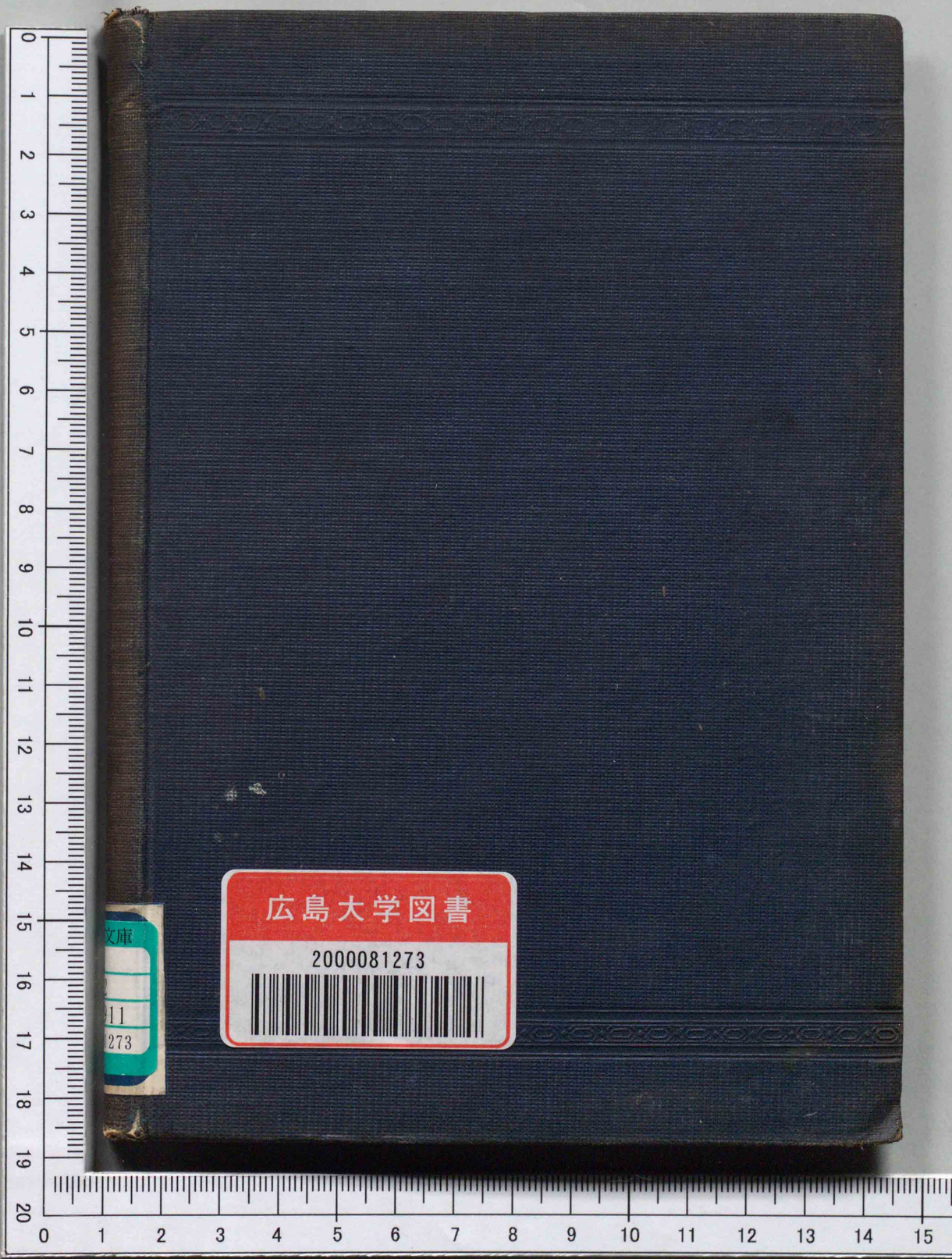
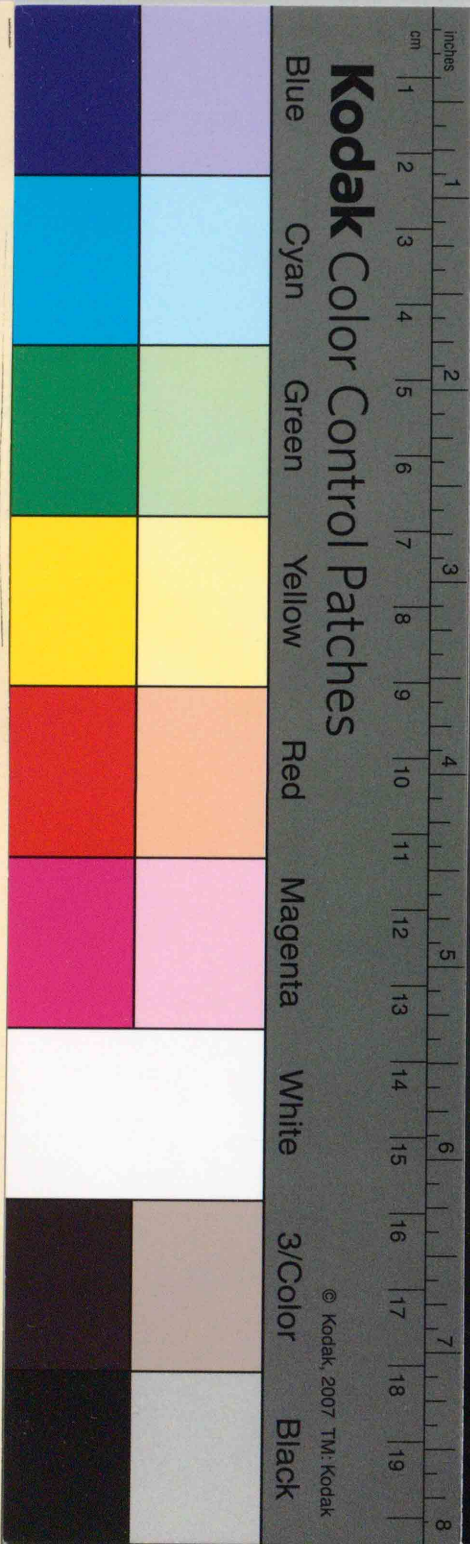


40134

教科書文庫

4
412
41-1911
20000 81273



4a
412
明KX

教科書文庫
4
412
41-1911
2000081273

資 料 室

新訂

代數學教科書

董正樺
著

東京

三省堂發兌

信 條
春 採 英 學 彙 介



広島大学図書

2000081273



緒 言

明治三十五年改訂代數學教科書ヲ公ニセシヨリ
八星霜ヲ經タルガ其間ニ於ケル我邦教育ノ著ル
シキ進歩ハ最早本書ヲ從來ノ儘ニ捨テ置クヲ容
サズ況ンヤ予ガ實際教授ニ試ミテ得タル結果ト
知己教師諸氏ノ忠告トハ益々其訂正ヲ促スニ於
テオヤ是即本書ヲ公ニスル理由ナリ

本書ノ前身ナル改訂代數學教科書ニ加ヘタル訂
正ノ重ナルモノハ次ノ如シ

1. 説明ヲ比較的簡明ナラシメタルコト
2. 教授ニ便ナラシムルタメニ問題ノ順序ヲ前
後入レ換ヘタルコト
3. 問題ノ數ヲ増シタルコト
4. 補習雜題ヲ加ヘタルコト
5. 不盡根數、指數論ヲ二次方程式ノ前ニ置キタ
ルコト
6. 附録ニ幾何學的應用ノ章ヲ設ケタルコト
7. 虛數ノ章ヲ設ケ之ヲ幾何學的ニ表現シタル
コト

8. 比例對變法ヲ比例ノ後ニ置キ且函數ノ定義ヲ入レタルコト

是ナリ今少シク其理由ヲ述ベンニ

1. 教科書トシテハ骨子トナルベキ樞要ノ點ヲ指示スルニ止メ詳細ナル説明ハ之ヲ教師ニ委スルヲ適當ナリト信ジ益々簡明ナラシメンコトヲ期シタルニ因ル
2. 雜題ニテモ成ルベク卑ヨリ高ニ、易ヨリ難ニ進ムヲ教授上便且益ナリト信ジタルヲ以テ其排列法ニ注意シタレドモ難易等ノ感ハ生徒各自之ヲ異ニシ又教師ノ手心ニ因ルノミナラズ元來平坦ナル路ノミヨリスルハ善良ノ教授法トハ云フ能ハザルベシ故ニ取捨、選擇一ニ教師諸氏ニ賴ラズンバアラズ
3. 實地ニ應用シ得ラル、ニハ其方法唯練習ノ一アルノミ歐米各國ノ學校ニ於テ教師學生何レモ眞面目ニ練習ニ力ヲ注ギツ、アルコト一見平凡ノ感アレドモ彼等ガ他日之ヲ應用スルニ際シ少シモ其力ノ不足ヲ感ゼザルハ平素練習ノ効ニ歸セザルヲ得ズ

予ハ上述ノ目的ヲ以テ教師ガ其問題ヲ選擇、省略シ得ラル、マデニ稍多クノ問題ヲ供給センコトヲ期シタリ

4. 補習雜題ハ素ヨリ問題ニ不足ヲ生ジタルトキノ補ヒニ供スルコトヲ得レドモ予ノ之ヲ設ケタル目的ハ課外練習用(長期休業等ノ場合ニ於ケル)ニ供スルニアリ而シテ此内ニハ官立學校入學試験問題ヲ加入セルヲ以テ學生ノ腕驗シノ材料トモナルベシ
 5. 不盡根數、指數論ハ二次方程式ノ根ノ驗シヲ實行スルトキニ入用ナルヲ以テ之ヲ其前ニ授クルコト適當ナリト信ジタルニ因ル
 6. 教育ハ學科ノ孤立ヲ容サズ應用ノ力ヲ得ルニモ興味ヲ得ルニモ各科ノ聯絡ノ必要ナルハ予ノ喋々ヲ要セズ況ンヤ數學ニ於ケル代數學ト幾何學トノ如ク所謂車ノ兩輪ナルモノニ於テオヤ現ニ歐米ノ教科書ニ於テ幾何學應用ナキモノ稀ナルヲ見テモ知ラル、コトナリ
- 然ルニ我邦ノ數學ノ進度ニ於テ現今本文中

ニ加入スルハ少シク突飛ノ感アルヲ以テ止
ムヲ得ズ暫ラク附録中ニ置キタリ

7. 歐米ノ多クノ教科書ニ於テ見ル所ノ代數學
ノ組織ノ中整数ヲ基礎トシ除法ノ汎通ノタ
メニ分數ヲ作り、減法ノ汎通ノタメニ負數ヲ
作り、開法ノ汎通ノタメニ不盡根數ヲ作り、又
虛數ヲ作り以テ所謂代數學系統ノ數ヲ完成
シ交換、組合、配分ノ三定則ニ從フ様ニ諸計算
ヲ定義シ其法則ヲ導クヲ適當ナルモノト信
ジ之ニ據リ本書編纂ノ順序ヲ定メタリ、サレ
バ虛數ノ章ヲ設ケ幾何學的ニ表現シタルハ
實ニ此目的ヲ一貫センガタメニ過ギス

8. 比例對變法ハ物理學ヲ學修スルニ必要ナル
ベケレバ之ヲ本文中ニ置クヲ適當ナリト信
ジタルニ因ル

茲ニ之ヲ機トシ函數ヲ定義シタルハ一見奇
異ナルガ如シト雖モ近時代數學ハ代數函數
ノ計算ノ學問ナリトシ函數ノ思想ヲ導クノ
必要ヲ論ズルノ歐米大家(Comteノ如キ)少シ
トセズ例ヘバ二次方程式ノ解法ノ如キ $y=ax^2$

$+bx+c$ ノ如キ整數函數ニ於テ $y=0$ ナル場合ノ
 x ノ値ヲ求ムルニアリトスルガ如キ是ナリ
上ノ如ク變更ヲ試ミタルニ拘ラズ文部省ノ示セ
ル教授要目ニ於テハ之ヲ包含シテ餘ス所ナシ而
シテ其餘分ノ點ハ畢竟該要目ノ發布當時ヨリ進
歩セル教育ニ適セシメンガタメニ教師諸君ノ忠
告ト予ノ理想トヲ折衷シテ成レルモノナリ
予ハ尙切ニ知己ト否トヲ論ゼズ一般ノ教師諸氏
ニ希望ス諸氏ハ忠告ノ勞ヲ惜ムコトナク漸次本
書ヲ完全無缺ノ域ニ導キ以テ教授ノ材料ニ供ス
ルコトアラシメラレコトヲ
終リニ臨ンデ從來忠告ノ勞ヲ採ラレタル教師諸
氏ニ謝意ヲ表シ特ニ本書ノ前身ナル改訂代數學
教科書及其以前ノ書ニ於テ予ヲ補助セラレタル
各位及本書ニ於テ盡力セラレタル各位ニ熱誠ナ
ル謝意ヲ表ス

明治四十三年九月

樺 正 董 識

上卷目次

緒論

第壹章	代數式.....	頁 1
第貳章	諸定則.....	13
第參章	正數及負數.....	17

第壹編 整數式ノ計算

第壹章	加法.....	31
第貳章	減法.....	40
第參章	乘法.....	46
第四章	除法.....	58

第貳編 一次方程式

第壹章	一元方程式.....	70
第貳章	一元方程式ノ應用.....	81
第參章	聯立方程式.....	90
第四章	聯立方程式ノ應用.....	106

第參編 倍數,約數

第壹章	因數分解法.....	116
-----	------------	-----

第貳章 最大公約數及最小公倍數.....139

第四編 分數式

緒論.....163

第壹章 分數化法.....165

第貳章 分數式ノ加減法.....173

第參章 分數式ノ乗除法.....177

第五編 一次方程式ノ續キ

第壹章 一元方程式.....184

第貳章 聯立方程式.....191

第參章 一次方程式ノ應用問題.....197

附 錄

不等式.....219

幾何學の表現法.....224

新 訂 代 數 學 教 科 書

上 卷

緒 論

第 一 章

代 數 式

1. 代數學ノ目的

代數學ハ算術ニ續キテ數ニ關スル
事項ヲ講述スルモノナリ而シテ其主
要ナル點ハ

問題ノ解方ノ簡明ナルコト、

結果ノ汎ク用キ得ラルコト

ナリ

記 號

2. 數ノ記號

算術ニ於テハ一定ノ價ヲ有スル所ノ
 數字ノミヲ用キテ計算スレドモ代數
 學ニ於テハ數字ノ外ニ數ヲ代表スル
 記號トシテ概ネ羅馬文字 a, b, c, d, \dots ,
 x, y, z ヲ用キテ計算ス

時トシテハ希臘文字 α (アルファ), β (ベータ), γ
 (ガンマ), \dots ヲ用ウルコトアリ

又 a', a'' ノ如ク文字ノ右肩ニ小符ヲ附シタルモ
 ノヲ用ウルコトアリ(前者ハ a プライム或ハ a ダッ
 シ後者ハ a セCOND或ハ a^2 ダッシト唱ヘラル)

本書ハ此後此等ノ文字ヲ代數文字ト稱スレドモ
 單ニ文字ヲ云フニハアラズシテ文字ガ代表スル
 數ヲ指スモノト知ルベシ

3. 運算記號, 關係記號, 結合記號

代數學ニ於テハ算術ト同様ナル運算
 記號 $+, -, \times$ 或ハ $(.)$, \div 或ハ $(:)$ 又ハ橫線
 (—) ヲ用ウ

然レドモ運算記號ノ内稍算術ト異ル
 モノハ乘法ノ場合ニシテ數字若クハ
 代數文字ヲ因數トスル積ヲ書キ表ハ
 スニハ數字ト數字トノ間ノ外ハ \times 或
 ハ $(.)$ ヲ省キ且數字ヲ最先ニ書クヲ通
 例トス

例ヘバ $a \times 4 \times b$ ノ代リ $= 4ab$ トスルガ如シ

(注意第一) 例ヘバ算術ニ於テ $7+5$ ハ $7=5$ ヲ加フ
 ベキコトヲ示スガ如ク運算記號ハ元來運算ノ
 手續ヲ指示スル記號ナレドモ $7+5$ ト記シテ其
 結果 12 ヲ表ハスモノト見做スコトアリ同様ニ
 $a+b$ ノ a 及 b ハ如何ナル數ナルヤヲ知ラザル
 以上ハ其結果ノ何ナルヤヲ知ル能ハズト雖
 $a+b$ ハ $a=b$ ヲ加フベキコトト $a=b$ ヲ加ヘ
 タル和トヲ表ハスモノト見做スヲ得

冪數及冪根ノ記法及唱ヘ方モ算術ト
 同ジ

例へば5ノ三冪數ヲ表ハスニ 5^3 トナスガ如ク a ノ三冪數ヲ表ハスニ a^3 ヲ以テス

從テ a ハ a ノ一冪數ニシテ a^1 ニ他ナラズ

冪根例へば其二冪數ガ a トナルベキ數即 a ノ二冪根即平方根ヲ \sqrt{a} (時トシテ $\sqrt[2]{a}$),又其三冪數ガ a トナルベキ數即 a ノ三冪根即立方根ヲ $\sqrt[3]{a}$ ニテ表ハスコト算術ト同ジ

其他關係記號 $=, >, <$ (角ノ開キタル方ニアル數ハ他方ニアル數ヨリ大ナリ)及結合記號即括弧 $(), \{ \}, []$ ノ用キ方ハ算術ニ同ジ

(注意第二)「然ルトキハ」「夫レ故ニ」ヲ表ハスニ
∴ナル記號ヲ用ウルコトアリ

代 數 式

4. 代數式, 整數式, 分數式, 項

式ナル語ハ已ニ算術ニ於テ知リタルナラン

一般ニ運算記號ヲ以テ代數文字及數

字ヲ結合シ運算ノ手續ヲ表ハシタルモノヲ代數式或ハ單ニ式ト云フ

即次ニ示セルモノハ代數式ナリ

$$4abc \quad (A)$$

$$\frac{1}{4}ab + 3c^2 - 5d^2c \quad (B)$$

$$\frac{5b}{4a^2} - \frac{b^2}{3ac} \quad (C)$$

算術ニ於テ $24 \times 3 - 7 + 6 + 3$ ナル式ヲ整數式ト云ヒ
 $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ ナル式ヲ分數式ト云フ

代數學ニ於テハ根號ヲ含マザル式ノ中(C)ノ如ク分母ニ代數文字ヲ有スル式ヲ分數式ト云ヒ(A),(B)ノ如ク然ラザルモノヲ整數式或ハ整式ト云フ

然レドモ或格段ノ文字ニノミ注意シテ其レガ分母ニアルト否トニ因リテ整數分數ヲ區別スルコトアリ例へば(C)ハ b ガ分母ニアラザル故 b ニ就テハ整數式ニシテ a ニ就テハ分數式ナルガ如シ又上ノ(B)ニ於テ見ル如ク $\frac{1}{4}ab, 3c^2$ 及 $5d^2c$ ハ+或ハ-ナル記號ニテ界セラレタリ

此ノ如ク $+$ 或ハ $-$ ニテ界セラレタル各部分ヲ其項ト云フ

又整數式ハ其項ノ數ニテ之ヲ區別スルコトアリ例ヘバ(A)ヲ單項式、(B)ヲ三項式ト云ヒ二項以上ヲ有スルモノヲ多項式ト云フ

(例一) $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{3} - \frac{c^2}{4}$ ハ何項式ナルカ

$+$ 、 $-$ ニ因テ界セラレタル部分ハ $\frac{a^2}{2}$ 、 $\frac{b^2}{3}$ 、 $\frac{c^2}{4}$ ノ三ツナリ故ニ此式ハ三項式ナリ

(例二) $4(a-b) - 6(c-d)$ ハ何項式ナルカ

$(a-b)$ 、 $(c-d)$ ハ一ツノ數ナルコトヲ注意スレバ二項式ナリ

5. 單項式ノ次數、係數

例ヘバ單項式 $5d^2c^3$ 即 $5ddccc$ ニ於テハ數字ヲ除キテ文字因數ノ數五個アルヲ以テ五次式ナリト云フ

凡ベテ單項式ハ其文字ノ因數ノ數即

指數ノ和ニテ其次數ヲ定ム

(例) $6a^5b^2$ 及 $4ab^3$ ノ次數夫レ々々如何

前者ハ $5+2=7$ ナルヲ以テ7次ニシテ後者ハ a ノ指數ハ1ナルコトヲ注意シテ $1+3=4$ ナルヲ以テ4次ナリ

(注意) 時トシテハ格段ナル文字ニノミ注意シテ式ノ次數ヲ定ムルコトアリ例ヘバ上ノ例ニ於テ $6a^5b^2$ ハ a ノ五次式ナリト云フガ如シ

單項式ニ於テハ或格段ナル文字ヲ定メテ其文字以外ノ他ノ因數ノ積ヲ其係數ト云フコトアリ

即 $5d^2c$ ニ於テ c ノ係數ハ $5d^2$ 、 d^2 ノ係數ハ $5c$ ナリ

數字ハ係數ノ内ニ入レラル、ヲ通例トス而シテ係數ナル語ニ辯解ナキトキ例ヘバ上述ノ如ク c ノ係數トカ d^2 ノ係數トカ明言セザルトキハ其項ノ數字ヲ指示スルモノト知ルベシ而シテ時トシテハ之ヲ數係數ト云フコトアリ

例ヘバ $4a^4$ ナル式ニ於テ係數ハ4ナリ又單ニ b ナ

ル式ニ於テハ b ハ $1 \times b$ ト見做シ得ラル、ヲ以テ其係數ハ 1 ナリト云フコトヲ得

(例) $7a^2x^2$ ノ係數如何及其 x^2 ノ係數如何

前者ハ何等ノ辯解ナキヲ以テ 7 ニシテ後者ハ x^2 以外ノ因數 $7a^2$ ナリ

(注意) 學生ハ係數ト指數トヲ混ゼザル様ニナスベシ即 x^3 ノ指數 3 ハ xxx ニ於ケル因數ノ數ニシテ $3x$ ノ係數 3 ハ $x+x+x$ ニ於ケル加フベキ x ノ數ヲ表ハス

6. 多項式ノ次數

今多項式例ヘバ

$$4abc + 3c^2 - 5d^2c^4$$

ニ於テ各項ノ次數ヲ數フルニ第一項ハ三次、第二項ハ二次、第三項ハ六次ナルトキ其最高キ次數ヲ取りテ六次ノ多項式ナリト云ヒ同様ニ c ニ就テハ四次ノ多項式ナリト云フ

一般ニ多項式ハ最高キ次數ヲ有スル項ノ次數ヲ以テ其次數ト定ム

7. 代數式ノ價

已ニ述ベタル如ク代數式ノ文字ハ數ヲ代表ス故ニ其文字ニ一定ノ値ヲ與フルト同時ニ代數式ノ値ハ定マルベシ今其一二ノ例ヲ示サントス

(例一) $a=1, b=2, c=3, d=5, e=6, f=0$ トセバ

$$\begin{aligned} \text{I. } 7a+3b-2d+f &= 7 \times 1 + 3 \times 2 - 2 \times 5 + 0 \\ &= 7 + 6 - 10 + 0 \\ &= 13 - 10 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \frac{4ac}{b} + \frac{10be}{cd} - \frac{de}{ac} &= \frac{4 \times 1 \times 3}{2} + \frac{10 \times 2 \times 6}{3 \times 5} - \frac{5 \times 6}{1 \times 3} \\ &= \frac{12}{2} + \frac{120}{15} - \frac{30}{3} \\ &= 6 + 8 - 10 \\ &= 4 \end{aligned}$$

(例二) 大小二數ノ和ヲ a ニテ、差ヲ b ニテ表ハス

トキ小數 x ハ $\frac{a-b}{2}$ ニ等シ

今一水夫流レニ順フトキハ一日ニ 56 里、流レニ逆フトキハ一日ニ 20 里ヲ行クト云フ一日間ニ水流ノ速サ如何

$a=56, b=20, x=\frac{56-20}{2}=\frac{36}{2}=18$ 從テ水流ノ速サ

ハ一日ニ18里ナルコトヲ知ル

例題

1. 次ノ各式ノ x, x^2, x^3 ノ係數ハ夫レ々々何ナルカ

I. $5a^2x$ II. $4abcx^3$ III. $\frac{3}{5}x^2$

2. $7a^3b^4cx$ = 於テ數係數, b^4x ノ係數, a^3 ノ係數及ビ a^3b^4 ノ係數ヲ求ム

3. a^2, b^3, c = 就テ冪指數, 係數ヲ示セ

4. x = 就テ次ノ多項式ノ次數ヲ數ヘヨ

I. $4b^2x^2 - 7a^2x^2 + 8abx^3$ II. $4c^2x^3 - ax^3 + bc^4$

III. $\frac{c^2x^3}{5} + \frac{d^2x^3}{b} - \frac{e^2x^3}{8}$ IV. $2x \div y - b \div z - c$

次ノ代數式ニ於テ $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=0$ トシ其值ヲ求メヨ (5—8)

5. $7ae + 3bc + 9d - af$ 6. $8abc - bcd + 9cde - def$

7. $\frac{4a}{b} + \frac{9b}{e} + \frac{8e}{d} - \frac{5d}{c}$ 8. $\frac{12a}{bc} + \frac{6b}{cd} + \frac{20e}{dc}$

9. 次ノ式ノ意味ノ差異ヲ述ベヨ

I. $2a$ 及 a^2 II. $3a$ 及 a^3 III. $4x$ ト x^4

次ノ代數式ニ於テ $a=3, b=4, c=7$ トシ其值ヲ求メヨ

10. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$ 11. $\frac{3\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}}a + \frac{4\frac{1}{4}}{2\frac{1}{3}}b - \frac{6\frac{1}{2}}{7}c$

次ノ代數式ニ於テ $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=0$ トシテ其值ヲ求メヨ

12. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$ 13. $abc^2 + acd^2 - dea + f^2$

14. $\frac{a^2 + b^2}{e} + \frac{c^2 + e^2}{b} + \frac{e^2 - d^2}{c}$ 15. $(a+c)(c+d)(e+f)$

16. $(8d^2 - 7c^2)^2$

17. a 圓ナル金ヲ五人ニ等分スルトキ一人ノ所得ノ圓數ヲ表ハス所ノ代數式如何

18. 或人金 a 圓ヲ持テリ内五分ノ三ハ紙幣ナリト云フ紙幣ノ圓數ヲ表ハス代數式ヲ作レ

19. $a+b-c$ ト $m-n$ トノ差ヲ表ハス式ヲ書クベシ

20. $a+b$ ト m トノ積ヲ表ハス式ヲ書ケ

21. 一升ノ價 a 錢ナル酒 b 升ヲ買ヒ之ヲ三人ニテ出金スルトキ一人ノ出金各如何

22. 一升 a 錢ノ酒 b 升ト一升 c 錢ノ酒 d 升アリ總價如何

23. $(a+b)(a-b)$ と a^2-b^2 とノ二式ハ a, b ガ如何ナル數ナルモ常ニ同ジ價ヲ有スルモノナルコトハ此後ニ證明セラルベシ今 $a=7, b=3$ 或ハ $a=5, b=2$, 或ハ $a=10, b=7$ トシテ之ヲ試ミヨ

24. 次ノ代數式ニ於テ $a=3, x=5, y=2$ トシ其價ヲ求メヨ

I. x^y II. y^{a+x} III. 5^y

第 二 章 諸 定 則

8. 加減ノ諸定則

既ニ算術ニ於テ次ノ定則ヲ知リタルナラン

$$12+10+8=8+12+10=10+8+12=..... \quad \left. \vphantom{12+10+8} \right\} \text{(交換定則)}$$

$$12+10-8=12-8+10$$

$$12+(10+4)=12+10+4$$

$$12-(5+3)=12-5-3$$

(組合定則)

此等ノ定則ハ整數, 分數ノ區別ナク成立ス故ニ次ノ如ク記スルコトヲ得

$$a+b+c=c+a+b=b+c+a=..... \quad \left. \vphantom{a+b+c} \right\} \text{(交換定則)}$$

$$a+b-c=a-c+b$$

$$a+(b+c)=a+b+c$$

$$a-(b+c)=a-b-c$$

(組合定則)

(注意) 凡テ定則或ハ公式ハ此儘ニ讀ミ且記憶スル外其等號ノ左右兩邊ノ式ヲ取り換ヘテ讀ミ且記憶スルコト必要ナリ例ヘバ $a-(b+c)=a-b-c$ フ此儘ニ a ヨリ b, c ノ和ヲ減ジタルモノハ

a より b, c ヲ次第ニ減ジタルモノニ等シト讀ム外 $a-b-c=a-(b+c)$ トナシテ a より b, c ヲ次第ニ減ジタルモノハ a より b, c ノ和ヲ減ジタルモノニ等シト讀ムガ如シ

9. 乗除ノ諸定則

既ニ算術ニ於テ次ノ定則ノ理ヲ知リタルナラン

$$\left. \begin{aligned} 4 \times 7 \times 8 &= 8 \times 4 \times 7 = 7 \times 4 \times 8 = \dots \\ 12 \times 2 \div 3 &= 12 \div 3 \times 2 \end{aligned} \right\} \text{(交換定則)}$$

$$\left. \begin{aligned} 4 \times (7 \times 8) &= 4 \times 7 \times 8 \\ 24 \div (3 \times 2) &= 24 \div 3 \div 2 \end{aligned} \right\} \text{(組合定則)}$$

$$\left. \begin{aligned} (7+4) \times 5 &= 7 \times 5 + 4 \times 5 \\ (24+18) \div 6 &= 24 \div 6 + 18 \div 6 \end{aligned} \right\} \text{(配分定則)}$$

此等ノ定則ハ整數, 分數ノ區別ナク成立ス故ニ次ノ如ク記スルコトヲ得

$$a \times b \times c = c \times a \times b = b \times a \times c = \dots \left\} \text{(交換定則)}$$

$$\left. \begin{aligned} a \times b \div c &= a \div c \times b \\ a \times (b \times c) &= a \times b \times c \end{aligned} \right\} \text{(組合定則)}$$

$$\left. \begin{aligned} a \div (b \times c) &= a \div b \div c \\ (a+b) \times c &= a \times c + b \times c \\ (a+b) \div c &= a \div c + b \div c \end{aligned} \right\} \text{(配分定則)}$$

(注意第一) 此等ノ定則ヲ應用シテ種々ノ定理或ハ法則ヲ作り或ハ計算ヲ簡便ニスルコトヲ得例ヘバ $7 \times 20 \times 3 = 5$ ヲ乘ズルトキハ

$$7 \times 20 \times 3 \times 5 = 7 \times 20 \times 5 \times 3 \quad \text{(交換定則)}$$

$$= 7 \times (20 \times 5) \times 3 \quad \text{(組合定則)}$$

ナルヲ以テ容易ニ其積ヲ求メ得ベシ

又 $7 \times 20 \times 3$ ヲ 5 ニテ除スルトキハ

$$7 \times (20 \div 5) \times 3$$

ノ如ク一因數ヲ除スレバヨシ何トナレバ後者ニ 5 ヲ乘ズレバ上ノ理ニ因リテ

$$7 \times (20 \div 5 \times 5) \times 3 = 7 \times 20 \times 3$$

トナレバナリ

即次ノ如キ重要ナル定理ヲ得

多クノ因數ノ積ニ或數ヲ乘ジ或ハ多クノ因數ノ積ヲ或數ニテ除スルニハ其中ノ一因數ニ乘法或ハ除法ヲ施セバヨシ

(注意第二) 上ニ述ベタル三定則ハ必要ナルモノニシテ此等ノ定則ニ矛盾セザル様ニ整數分數ノ他ニ次第ニ數ナル意義ヲ擴張シテ種々ノ數ヲ作り又其計算法則ヲ定ムルモノナルコトニ注意ス可シ

例題

1. 算術ニ於テ54 = 32ヲ加フルトキ次ノ如ク
別々ニ各位ノ數ヲ加フルハ何レノ定則ニ因ルカ

$$\begin{array}{r} 54 \\ 32 \\ \hline 86 \end{array}$$

2. 算術ニ於テ84ヨリ32ヲ減ズルトキ何レノ
定則ニ因リテ如何ニナスベキカ

3. 486 = 3ヲ乘ズルトキ被乘數ノ各位ノ數ニ
3ヲ乘ズルノ理如何

486ヲ3ニテ除スルニハ如何ニスベキヤ其理如何

4. 次ノ結果ヲ謄算ニテ求メヨ

I. $3 \times 25 \times 7 \times 4$ II. $75 \times 37 \times 4$ III. $375 \times 7 \div 25$

IV. $73 \times 67 + 27 \times 67$ V. $17 \div 62 + 45 \div 62$

5. $a + (b - c) = a + b - c$ ヲ例ヲ以テ説明セヨ

6. $a - (b - c) = a - b + c$ ヲ例ヲ以テ説明セヨ

(注意) 上ノ二ツノ定理ヲモ組合定則ノ中ニ入ル
ルコトアリ

7. $\frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{7}{12} = \frac{7}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12}$ ナルコトヲ證明セヨ

第三章

正數及負數

10. 正數及負數

今理解シ易キタメニ整數ノミニ就テ
述ブルコト、シ0ヨリ始メ右ニ移ル
ニ從ヒ次第ニ一個宛大ナル數ヲ排列
センニ

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

此ノ如ク排列セバ明カニ0ヨリ大ナ
ル整數ハ無限ナルベク又各數ノ間ニ
無限ニ衆多ノ分數若クハ帶分數ヲ入
ル、コトヲ得ベシ

逆ニ上表ニ於テ各數ハ左ニ移ルニ從
ヒ次第ニ一個ツ、小ナルモノトナリ
0ニ至リテ止マルヲ見ル

然レドモ0ヨリ小ナル數ヲ作り置ク
 コト便ナルヲ以テ0ヨリ1小ナルモ
 ノヲ-1ニテ表ハシ又0ヨリ2小ナル
 モノヲ-2ニテ表ハシ以下之ニ準ジ次
 第二1小ナル數ヲ作レバ0ヨリ小ナ
 ル數ヲ得ルコト無限ニシテ上ノ表ニ
 示セル數ト共ニ次第ニ1ダケノ差ヲ
 有スル一列ノ數ヲ得ルコト次表ノ如
 クナルベシ(各數ノ間ニ無限ニ多クノ
 分數或ハ帶分數ヲ入ル、コトヲ得)

..... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.....

此ノ如ク規約ヨリ生ジタル0ヨリ小
 ナル所ノ-1, -2, -3,.....ヲ負數ト稱
 シ之ニ對シテ0ヨリ大ナル數ヲ正數
 ト稱シ負數ノ記法ニ對シテ+1, +2,
 +3.....ノ如ク記スルコトアリ

此場合ニ用キタル+, -ノ記號ヲ性
 質ノ記號ト稱ス(或ハ單ニ記號ト云フ)

(注意第一) 上ニ述ベタル正數, 負數ハ通例ノ數字
 ニ+, -ナル記號ヲ附シテ一ツハ0ヨリ大ナル
 モノ, 一ツハ0ヨリ小ナルモノヲ表ハシタルニ
 他ナラズ此+, -ヲ附セザル元ノ數ヲ其對絕
 値ト云フ

例ヘバ-5ノ絶對値ハ5, +2ノ絶對値ハ2ナリ

(注意第二) 上ノ説明ヨリ負數ハ絶對値ノ大ナル
 モノ程小トナリ又スベテノ負數ハ0ヨリ小ニ
 シテ又如何ナル正數ヨリモ小ナルコト明カナ
 ルベシ

(例一) 42ト-120ト-80トヲ大キサノ順序ニ列
 セヨ

-120ノ絶對値ハ-80ノ絶對値ヨリ大ナルヲ以
 テ-120ハ-80ヨリ小ナリ又負數ハ正數ヨリ小
 ナル故ニ

42, -80, -120

(注意第三) 正數負數ナル語ハ日常ノ事ニ適用セ
 ラル

例ヘバ寒暖計ニ於テ零度以上ノ度數ヲ+ニテ

表ハシ零度以下ノ度數例ヘバ零度以下四度ヲ
一ナル記號ヲ用キテ表ハシ -4 度ノ如クスル
コトアリ

コハ零度以下四度ハ零度ヨリ 4 度下レルモノ
ヲ指示シ恰カモ 0 ヨリ 4 ダケ小ナルモノヲ -4
ニテ表ハスコト、一致ス

(例二) 利益ノ圓數ヲ + ニテ表ハストキハ -4 圓
ハ何ヲ表スカ

損失四圓ヲ表ハス

正數及負數ノ計算

11. 正數負數ノ加法, 代數和

理解シ易キタメニ再ビ正及負ノ整數
ノ一列即右方ニ移ルニ從ヒ次第ニ 1
ダケ大ナル數ノ一列

..... -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.....

ヲ取り或數ニ正數或ハ負數ヲ加フル
意義ヲ定ムルコト次ノ如クス

或數ニ正數ヲ加フルトハ前者ヨリ其
絕對値ダケ大ナル數ヲ求ムルコトヲ
云ヒ或數ニ負數ヲ加フルトハ前者ヨ
リ其絕對値ダケ小ナル數ヲ求ムルコ
トヲ云ヒ其結果ヲ和或ハ代數和ト
云フ

此定義ト上表ヲ案ズレバ次ノ例ニ示セル解答ハ
明了ナルベシ

(例一) $(-5) + (+3) = -2$

(例二) $(-5) + (-3) = -8$

上ノ事實ニ因リテ次ノ法則ヲ得

(法則第一) 同記號ヲ有スル二數ノ代數
和ヲ求ムルニハ其絕對値ノ和ニ同
記號ヲ附シ, 異記號ヲ有スル二數ノ
代數和ヲ求ムルニハ絕對値ノ差ニ
其絕對値ノ大ナルモノ、記號ヲ附
スベシ

(例三) $-5, +13, -2, -7, +6$ ヲ加ヘヨ

$$(-5) + (+13) = +8, (+8) + (-2) = +6, (+6) + (-7) = -1,$$

$$(-1) + (+6) = +5 \text{ ヲ得而シテ負數ノミノ和 } -14 \text{ ト}$$

正數ノミノ和 $+19$ トヲ加ヘテモ同ジ結果ヲ得
故ニ次ノ法則ヲ得

(法則第二) 多クノ數ノ代數和ヲ求ムル

ニハ其正數, 負數ニ就テ別々ニ其和

ヲ求メテ得タル二數ノ絶對値ノ差

ニ其絶對値ノ大ナルモノ、記號ヲ

附スベシ

(注意) 上ノ定義及法則ニ因テ $5+3-2$ ナル式ハ
 $5+(+3)+(-2)$ トナスコトヲ得故ニ多項式ニ於
テ+ヲ前ニ有スルモノヲ正項ト云ヒ-ヲ前
ニ有スルモノヲ負項ト云フ但最左ニアル項
ハ記號ヲ有セザルモ+ヲ有スルモノト同様ニ
取扱ハルベキヲ以テ正項ナリ

例 題

次ノ加法ノ結果ヲ求メヨ

1. $(-31) + (+42)$

2. $(+104) + (-245)$

3. $(-17) + (-13)$

4. $(-11\frac{3}{4}) + (+8\frac{1}{4})$

5. $(-7) + (-5) + (+3) + (+4)$

6. $(+16) + (-3) + (-7) + (+4)$

7. $(+42) + (-16) + (-44) + (+5)$

8. $2 + (-6) + (-3)$ ハ $2-6-3$ ニ等シキコトヲ數ノ

排列ノ圖ニテ檢セヨ

9. $(+5) + (-3) + (-4) = (-4) + (+5) + (-3)$ ヲ數ノ排

列ノ圖ニ就テ檢セヨ

12. 正數, 負數ノ減法

算術ニ於ケル如ク一般ニ減法ハ加法
ノ逆ナリト定ム即減法ハ二數ノ和ト
其一數トヲ知リテ他ノ一數ヲ求ムル
法ナリト定ム

(例一) -3 ヲリ $(+5)$ ヲ減ズベシ

$(-3) - (+5)$ ナル減法ヲ加法トナシ同時ニ減數
ノ記號ヲ變ジテ $(-3) + (-5)$ トナセバヨシ何ト
ナレバ斯クナシタル數 $(-3) + (-5) =$ 減數 $+5$ ヲ
加フレバ被減數 -3 トナレバナリ

(例二) -3 ヨリ -5 ヲ減ズベシ

$(-3)-(-5)$ ナル減法ヲ加法ニ變ジ同時ニ減數ノ記號ヲ變ジテ $(-3)+(5)$ トナセバヨシ何トナレバ斯クナシタル數 $(-3)+(5) = 減數 -5$ ヲ加フレバ被減數 -3 トナレバナリ

故ニ次ノ法則ヲ得

(法則) 或數ヨリ他ノ或數ヲ減ズルニハソレヲ加法ニ變ジ同時ニ減數ノ記號ヲ變ズベシ

(注意) 算術ニ於テハ 0 ヨリ小ナル數アラザルヲ以テ減法ハ被減數ガ減數ヨリ小ナラザル場合ニ限リタリト雖ドモ代數學ニ於テハ 0 ヨリ小ナル數即負數ヲ設ケタルガタメニ如何ナル減法モ之ヲ實行シ得ベシ

例ヘバ算術ニ於テ交換定則ニ因テ $12+10-8=12-8+10$ トナシ得ルモ例ヘバ $6+9-10 = 於テハ6$ ヨリ 10 ヲ減ジ得ザルヲ以テ $6-10+9$ トナスコトヲ得ズ

然レドモ代數學ニ於テハ $6+9-10 = (+6)+(+9)$

$+(-10)$ トナスコトヲ得又交換定則ニテ之ヲ $(+6)+(-10)+(+9)$ 即 $6-10+9$ トナスコトヲ得ルヲ以テ次ノ如クナシ得ベシ

$$6+9-10=6-10+9$$

尙數ノ排列ヲ案ジテモ此事實ヲ知り得ベシ

例 題

次ノ計算ヲ實行セヨ

1. $(-10)-(-5)$ 2. $(-17)-(-20)$ 3. $93-(+22)$

4. $(-21)-(-6)$ 5. $(+6)+(-2)-(-14)$

6. $(-9)-(-3)-(+5) = (-9)-(+5)-(-3)$ ナルコト

ヲ檢セヨ

7. $8-((-7)+(-3)) = 8-(-7)-(-3)$ ナルコトヲ檢セヨ

13. 正數及負數ノ乘法(記號法則)

或數ニ正數ヲ乘ズルノ意義ハ已ニ算術ニ於テ説ケル所ノモノニ同ジ即或數ニ正數ヲ乘ズルトハ乘數ノ整數ナ

ルト分數ナルトニ因リテ被乗數ヲ若干倍スルコト或ハ若干等分シタルモノヲ若干倍スベキコトナリ

例ヘバ $5 = 3$ 即 $(+3)$ ヲ乗ジ若クハ $-5 = 3$ ヲ乗ズルトキハ

$$(+5) \times (+3) = (+5) + (+5) + (+5) = +15 \quad (1)$$

$$(-5) \times (+3) = (-5) + (-5) + (-5) = -15 \quad (2)$$

或數ニ負數ヲ乗ズル定義ハ次ノ如シ

或數ニ負數ヲ乗ズルトハ之ヲ正數トシテ乗ジ其結果ノ記號ヲ變ジタルモノヲ求ムルコトヲ云フ

故ニ例ヘバ $5 \times (-3)$ ハ 5×3 即 15 ノ記號ヲ變ジタル -15 ニシテ $(-5) \times (-3)$ ハ $(-5) \times 3$ 即 -15 ノ記號ヲ變ジタル $+15$ ナリ故ニ

$$(+5) \times (-3) = -15 \quad (3)$$

$$(-5) \times (-3) = +15 \quad (4)$$

此 (1), (2), (3), (4) ヨリ次ノ如ク二數ノ乘法法則ヲ得
(法則) 先絕對値ノ乘積ヲ求メ之レニ二

數ガ同記號ナルカ異記號ナルカニ從ヒテ夫レ々々正或ハ負ノ記號ヲ附スベシ

(例) $-5, -3, +7, -2$ ノ積ヲ求メヨ

$$(-5) \times (-3) = +15, (+15) \times (+7) = +105, (+105) \times (-2) = -210 \text{ ナリ}$$

例 題

次ノ結果ヲ求ム

1. $(-18) \times (+2)$
2. $(-8) \times (-2)$
3. $(+9) \times (-3)$
4. $(+12) \times (-3)$
5. $\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$
6. $(-0.2) \times (+0.12)$
7. $(-5) \times (-3) \times (+2)$
8. $(-5) \times (-12) \times (-5)$
9. $(-5) \times (-7) \times (-6) = (-6) \times (-7) \times (-5)$ ナルコトヲ檢セヨ
10. $7 \times (-2) + 8 \times (-3) + 9 \times (-1)$ ノ結果ヲ求ム

14. 正數及負數ノ除法(記號法則)

算術ト同様ニ除法ハ乘法ノ逆ナリト

定ム即二數ノ乗法ノ積ト其一數トヲ
知リテ他ノ一數ヲ求ムル法ナリト定
ム故ニ

$$(+15) \div (+3) = (+5) \quad (1)$$

$$(-15) \div (+3) = (-5) \quad (2)$$

$$(-15) \div (-3) = (+5) \quad (3)$$

$$(+15) \div (-3) = (-5) \quad (4)$$

何トナレバ除數ト商トヲ乘ジ被除數トナルニハ
此ノ如クナラザルヲ得ザレバナリ

此(1), (2), (3), (4)ヨリ次ノ除法ノ法則ヲ得

(法則) 先絶対値ノ商ヲ求メ之レニ二

數ガ同記號ナルカ異記號ナルカニ

從ヒテ夫レ々々正或ハ負ノ記號ヲ

附スベシ

(例) -270 ヲ次第ニ -6 , -3 ニテ除セヨ

$$(-270) \div (-6) = +45, (+45) \div (-3) = -15 \text{ ナリ}$$

例 題

次ノ商ヲ求メヨ

1. $(-36) \div (-9)$
2. $(-18) \div (+3)$
3. $(+15) \div (-5)$
4. $(-2.4) \div (-1.8)$
5. $(+1\frac{2}{5}) \div (-3\frac{2}{5})$
6. $(+5) \times (-6) \times (-7) \div (-14)$ ヲ計算セヨ
7. $(-3.2) \div (-0.4) \times (+5.2) \times (-6)$ ヲ計算セヨ

雜 題

1. -5 ト -7 トハ何レガ何程大ナルカ
2. -3 ト 7 トハ何レガ何程大ナルカ
3. $-4 = 7$ ヲ加フレバ如何, $-4 = -2$ ヲ加フレバ如何
4. 5 ヨリ 7 ヲ減ズレバ何トナルカ
5. -2 ヨリ -5 ヲ減ズベシ
6. 0 ヨリ 7 ヲ減ズレバ如何, 0 ヨリ -7 ヲ減ズレバ如何
7. 次ノ結果ヲ求ムベシ
 - I. $(+4) \times (-3)$
 - II. $(-4) \times (-3) \times (-2)$
 - III. $(-\frac{2}{5}) \times (+\frac{5}{2}) \times (-\frac{2}{3})$
 - IV. $(-5)^3$
 - V. $(-4)^3 \times (-5)^2 \times (-3)^3$
8. 次ノ商ヲ求ムベシ

I. $(-24) \div (-6)$

II. $(-24) \div (+6)$

III. $\left(-\frac{3}{5}\right) \div (-6) \times (-10)$

IV. $(-0.4) \div (+12)$

V. $(-12)^3 \div (-4)^3$

9. $(+7) - (-3) + (-2)$ ハ $(+7) + (-2) - (-3) =$ 等シ
キコトヲ檢セヨ

10. $(-7) \times (-3) \times (-2)$ ハ其因數ヲ種々ノ順序ニ
置キ直シテモ其積ノ常ニ相等シキコトヲ檢セヨ

11. $a=2, b=-1, c=-2$ トシテ次ノ數值ヲ求メヨ

I. $a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$

II. $bc + ca + ab$

III. $2a^2 - 4c^2 - 2ab$

12. $a=2, b=1, c=-3$ トシテ次ノ數值ヲ求メヨ

I. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

II. $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

第 壹 編

整 數 式 ノ 計 算

第 壹 章

加 法

單 項 式 ノ 加 法

15. 同類式加法

二ツノ單項式ガ $+$, $-$ ノ記號或ハ係數
ヲ異ニスルノミナルトキハ互ニ同類
ナリト云フ今此種ノ加法ヲ說カン

(例) $+9ax, -4ax, +7ax, -8ax$ ノ和ヲ求ムベシ

ax ヲ單位ト見做セバ同ジ單位ノ $+9, -4, +7,$

-8 ノ代數和ヲ求ムルコト、ナル然ルニ

$$9+7=16 \quad \dots \text{正數ノ絶對値ノ和}$$

$$4+8=12 \dots \text{負數ノ絶對値ノ和}$$

$$16-12=4$$

ナルヲ以テ ax ノ4倍即 $+4ax$ ナリ

因テ次ノ同類式加法ノ法則ヲ得

(法則第一) 多クノ同類式ヲ加フルニハ

正,負ノ記號ヲ附シタルマ、係數ヲ

分離シタルモノト見テ其代數和ヲ

求メ之ヲ係數トシタル同類式ヲ作

ルベシ

(例一) $2bc, -7bc, -3bc, +4bc, +5bc, -6bc$ ノ代數和ヲ求ムベシ

$$2+4+5=11, \quad 7+3+6=16$$

$$16-11=5$$

$$\begin{aligned} \therefore 2bc + (-7bc) + (-3bc) + (+4bc) + (+5bc) \\ + (-6bc) = -5bc \end{aligned}$$

(例二) $+5a, -2b, -7a, -5b, +8a$ ノ代數和ヲ求ムベシ

加法ノ交換,組合ノ定則ヲ注意スレバ次ノ如クナシ得ラル

$$\begin{aligned} (+5a) + (-2b) + (-7a) + (-5b) + (+8a) \\ = \{ (+5a) + (-7a) + (+8a) \} + \{ (-2b) + (-5b) \} \\ = 6a + (-7b) = 6a - 7b \end{aligned}$$

(注意第一) 此例ニ於テ $+5a, -2b, -7a, -5b, +8a$ ノ和ヲ求ムルノ目的ハ此式中ノ文字 a, b ニ如何ナル數値ヲ與フルモ恒ニ其等ノ數値ノ和ニ等シキ數値ヲ有シ而カモ同類項ナキ代數式ヲ求ムルニアリ從テ上例ヨリ異類項ノ加法ニ於テハ諸數ヲ記號ノマ、連記シ同類項ニ就テ別々ニ加法ヲ施スベキコトヲ知ルベシ

例ヘバ $a=3, b=2$ トスレバ

$$\begin{aligned} (+5a) + (-2b) + (-7a) + (-5b) + (+8a) \\ = (+5 \times 3) + (-2 \times 2) + (-7 \times 3) + (-5 \times 2) + (+8 \times 3) \\ = 15 + (-4) + (-21) + (-10) + (+24) = 4 \end{aligned}$$

$$6a - 7b = 6 \times 3 - 7 \times 2 = 18 - 14 = 4$$

$a=5, b=1$ トシテモ, $a=7, b=9$ トシテモ, $a=-3, b=-2$ トシテモ同様ナリ

一般整數式ノ計算ノ目的モコレニ同ジ

(注意第二) 多項式中ニアル同類項ハ例二ノ方法ヲ以テ其代數和ニテ表ハスヲ要ス此方法ヲ簡約ト稱ス

其他施スベキ代數計算ヲ實行シ夫レ々々同類

項ノ現ハレザル様ニナスコトヲ往々簡約ス
或ハ簡單ニスト唱フルコトアリ

例 題

1. 次ノ代數和ヲ求ムベシ

A. $-3, +25, -23, -27$

B. $+5, -2, -5, -7, +12, +15$

C. $-6, -7, -9, -16, +4\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

2. 利益ヲ算スルニ當リ $+9$ 圓, -17 圓, -28 圓,
 $+5$ 圓ノ差引利益或ハ損毛ノ金額如何但利益ヲ
+ニテ表ハシタルモノトス

3. 或日溫度 8.4 度ナリシニ $+1.2$ 度, -2.3 度, -4.3
度, $+3.7$ 度, -2.5 度ノ變化アリタリト云フ最終ノ溫
度如何但昇リノ度ヲ+トス

次ノ和ヲ求ム

4. $a, 2a, 3a$ 5. $+4a, -3a, -7a, -9a$

6. $+3ab, -5ab, +4ab, +3ab$

7. $+3x^2y, -4x^2y, -5x^2y, -16x^2y, +10x^2y$

8. $+2a, +5b, -2a, -3a, +8b$

9. $-6b, +\frac{1}{2}a, +\frac{2}{3}a, -7a, -8b$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

10. $3a+b+a$

11. $2x-y+x+3y$

12. $ab-ac+bc+ac$

13. $x^3-x^2+3x-4x^2-5x+7$

14. $x^2-3x-x^2+5+2x^3-x^2-4$

多項式ノ和

16. 多項式ハ常ニ正數或ハ負數ノ代
數和トシテ表ハサル、コト、交換及組
合ノ定則ハ一般ニ適用シ得ルコト及
同類項ノ加法ノ法則ヲ注意セバ次ノ
運算ノ理ハ明カナルベシ

(例一) a^2+b^2 ト $2a^2-3b^2$ トノ和ヲ求ム

$$a^2+b^2+(2a^2-3b^2)=(+a^2)+(b^2)+[(+2a^2)+(-3b^2)]$$

((11)ノ注意)

$$=(+a^2)+(b^2)+(+2a^2)+(-3b^2) \quad (\text{組合定則})$$

$$=3a^2-2b^2 \quad (\text{法則第一})$$

從テ同類項ヲ同行ニ記シ各同類項ニ就テ法則第
一ノ方法ヲ施スコト次ノ如クスルコトヲ得

$$\begin{array}{r} a^2 + b^2 \\ 2a^2 - 3b^2 \\ \hline 3a^2 - 2b^2 \end{array}$$

之ヲ案ジ次ノ多項式加法ノ法則ヲ得

(法則第二) 夫レ々々同類項ガ同行ニア

ル様ニ各式ヲ記シ法則第一ニ因リ

別々ニ其和ヲ求メ其下ニ書クベシ

(例二) $4a+5b-7c+3d$, $3a-b+2c+5d$, $9a-2b-c-d$, $-a+3b+4c-3d+e$ ヲ加フベシ

$$\begin{array}{r} 4a+5b-7c+3d \\ 3a-b+2c+5d \\ 9a-2b-c-d \\ -a+3b+4c-3d+e \\ \hline 15a+5b-2c+4d+e \end{array}$$

(注意) 算術ト同ジク代數學ニ於テモ各計算ノ結

果ノ正否ヲ檢スルコト必要ナリ而シテ檢算ニ

供スル所ノ二回目ノ計算ハ成ルベク初メト

異リタル方法ヲ用ウルヲ良トス

加法ニ於テハ別ニ其方法ナキヲ以テ其中ノ一

式ヲ除キ他ノ式ヲ加ヘ其和ニ今除キタル一

式ヲ加ヘ其結果ヲ初メノ結果ニ比較スベシ

例題

次ノ各題ノ和ヲ求メヨ

1. $3a-2b$, $4a-5b$, $7a-11b$, $a+9b$
2. $4x^2-3y^2$, $-2x^2+y^2$, $-x^2+y^2$, $-2x^2+4y^2$
3. $3a+3b+c$, $3a+3b+3c$, $a+3b+5c$
4. $3x+2y-z$, $2x+2y+2z$, $-x+2y+3z$
5. $7a-4b+c$, $6a+3b-5c$, $-12a+4c$
6. $x-4a+b$, $3x+2b$, $a-x-5b$
7. $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$
8. $a+2b+3c$, $2a-b-2c$, $b-a-c$, $c-a-b$
9. $a-2b+3c-4d$, $3b-4c+5d-2a$, $5c-6d+3a-4b$, $7d-4a+5b-4c$
10. x^3-4x^2+5x-3 , $2x^3-7x^2-14x+5$, $-x^3+9x^2+x+8$
11. $x^4-2x^3+3x^2$, x^3+x^2+x , $4x^4+5x^3$, $2x^2+3x-4$, $-3x^2-2x-5$
12. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, $2a^3+5a^2b-6ab^2-7b^3$, $a^3-ab^2+2b^3$
13. $x^3-2ax^2+a^2x+a^3$, x^3+3ax^2 , $2a^3-ax^2-2x^3$

$$14. \quad 2ab - 3ax^2 + 2a^2x, \quad 12ab + 10ax^2 - 6a^2x, \\ -8ab - 5a^2x + ax^2, \quad 7a^2x - 3ab$$

$$15. \quad x^2 + y^4 + z^3, \quad -4x^2 - 5z^3, \quad 8x^2 - 7y^4 + 10z^3, \quad 6y^4 - 6z^3$$

$$16. \quad 3x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 3y - 7, \quad 2x^2 - 4y^2 + 3x - 5y + 8, \\ 10xy + 8y^2 + 9y, \quad 5x^2 - 6xy + 3y^2 + 7x - 7y + 11$$

$$17. \quad x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4, \quad 4x^3y - 12x^2y^2 + 12xy^3 \\ - 4y^4, \quad 6x^2y^2 - 12xy^3 + 6y^4, \quad 4xy^3 - 4y^4, \quad y^4$$

$$18. \quad x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z,$$

$$x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz, \quad x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$$

$$19. \quad \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b, \quad \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b, \quad \frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b$$

$$20. \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z, \quad -\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{8}z, \quad \frac{5}{2}x + y - \frac{5}{16}z,$$

次ノ括弧ヲ去リ且簡單ニセヨ

$$21. \quad (x - 2y) + (2x - y) + (x - y)$$

$$22. \quad a + 1 + (2a - 1) + (3a + 4)$$

$$23. \quad x + 2 + \{x + 1 + (x + 2)\}$$

$$24. \quad a - 4b + (a - 2b) + \{2a + (a - b)\}$$

$$25. \quad \{x - 7a + (2x + a)\} - 2x + 12a$$

$$26. \quad a = y - z, \quad b = z - x, \quad c = x - y \text{ ナルトキハ } a + b + c = 0$$

ナルコトヲ證明セヨ

$$27. \quad x = 4b + 3c - 2a, \quad y = 4c + 3a - 2b, \quad z = 4a + 3b - 2c \text{ ナルトキハ } x + y + z = 5a + 5b + 5c \text{ ナルコトヲ證明セヨ}$$

$$28. \quad 2a + 3b + c, \quad -a - 4b + 2c \text{ 及 } 2b - c \text{ ノ和ハ } -a + b + c, \\ a - b + 3c \text{ 及 } a + b - 2c \text{ ノ和ニ等シキコトヲ證明セヨ}$$

$$29. \quad 3a + b + (b - a) = a + 3b + (a - b) \text{ ナルコトヲ } a = 2, \\ b = 3 \text{ トシテ檢セヨ}$$

$$30. \quad 7 - 9 + 17 \text{ ト各項ノ記號ヲ變ジタル } -7 + 9 - 17 \\ \text{ トヲ比較セヨ}$$

第 貳 章

減 法

17. 減法ハ加法ノ逆ナリ即二數ノ和ト其一數トヲ知リテ他ノ一數ヲ求ムル算法ナリ

一 般 ノ 減 法

18. 減法ヲ例ニ就テ説明セントス

$$\begin{aligned} \text{(例一)} \quad (-4a^2b) - (-7a^2b) &= (-4a^2b) + (+7a^2b) \\ &= 3a^2b \end{aligned}$$

何トナレバ $(-4a^2b) + (+7a^2b) =$ 減數 $-7a^2b$ ヲ加フレバ被減數 $-4a^2b$ トナレバナリ

(例二) $4x - 3y + 2z$ ヨリ $3x - y + z$ ヲ減ズベシ

次ノ如ク減數 $3x - y + z$ ノ各項ノ記號ヲ變ジテ加法ヲナセバヨシ何トナレバ $4x - 3y + 2z + (-3x + y - z) =$ 減數 $3x - y + z$ ヲ加フレバ明カニ被減數 $4x - 3y + 2z$ トナレバナリ

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z - (3x - y + z) \\ &= 4x - 3y + 2z + (-3x + y - z) \\ &= x - 2y + z \end{aligned}$$

上ノ如クナスニハ次ノ如ク同類項ヲ同行ニ置クヲ便トス但減數ハ其各項ノ記號ヲ元ノマヽニ記シ計算スルトキニ記號ヲ變ズル(書キ直スコトナク)モノトス

$$\begin{array}{r} 4x - 3y + 2z \\ 3x - y + z \\ \hline x - 2y + z \end{array}$$

上ノ二例ヲ案ジ次ノ減法法則ヲ得

(法則) 減數ノ各項ノ記號ヲ變ジ加法ヲ施スベシ

(例三) $3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 5$ ヨリ $2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 7$ ヲ減ズベシ

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 5 \\ 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x - 7 \\ \hline x^4 + 7x^3 - 11x^2 - x + 12 \end{array}$$

(注意) 算術ト同ジク減法ノ結果ノ正否ヲ檢スルニハ得タル差ニ減數ヲ加ヘ被減數ニ等シキ結果ヲ得ルヤ否ヤヲ檢スルニアリ

括弧用法

19. 已ニ加減ノ二法ヲ知レルヲ以テ括弧ヲ除去スルタメノ次ノ運算ノ理ハ明了ナルベシ

$$(例一) \quad a+(b-c+d)=a+b-c+d$$

$$(例二) \quad a-(b-c+d)=a+(-b+c-d) \\ =a-b+c-d$$

上ノ例ニ因リテ次ノ法則ヲ得

(法則) 其前ニ十ヲ有スル括弧ヲ除去スルニハ各項ノ記號ヲ其儘ニ、一ヲ有スルモノヲ除去スルニハ各項ノ記號ヲ變ジテ連記スベシ

$$(例三) \quad 4a-3-\{a+2-(5-2a)\}ノ括弧ヲ取レ \\ 4a-3-\{a+2-(5-2a)\}=4a-3-\{a+2-5+2a\} \\ =4a-3-a-2+5-2a \\ =a$$

(注意第一) 上ノ方法ヲ逆ニシテ任意ノ項ヲ括弧内ニ入ル、コトヲ得即

正號ヲ前ニ有スル括弧内ニ入ル、ニハ各項ノ記號ヲ元ノ儘ニナシ又負號ヲ前ニ有スル括弧内ニ入ル、ニハ各項ノ記號ヲ變ズルニアリ

(例四) $a+b-c+d$ ノ b 以下ノ項ヲ正號ヲ前ニ有スル括弧ニ入レ c 以下ノ項ヲ更ニ負號ヲ前ニ有スル小括弧内ニ入ルベシ

$$a+b-c+d=a+\{b-c+d\} \\ =a+\{b-(c-d)\}$$

(注意第二) 上ニハ最モ内ナル括弧ヨリ除去スル例ヲ示シタレドモ最モ外ナル括弧ヨリ除去スルモ可ナリ

$$(例五) \quad 4a-3-\{a+2-(5-2a)\}=4a-3-a-2+(5-2a) \\ =4a-3-a-2+5-2a \\ =a$$

例題

次ノ結果ヲ求ム

1. $5ab-(3ab)$

2. $3a^2b^2-(-8a^2b^2)$

3. $\frac{3}{4}x^2 - \left(-\frac{4}{5}x^3\right)$ 4. $7a+14b-(4a-10b)$
 5. $6a-2b-c-(2a-2b-3c)$
 6. $3a-2b+3c-(2a-7b-c-d)$
 7. $7x^2-8x-1-(5x^2-6x+3)$
 8. $4x^4-3x^3-2x^2-7x+9-(x^4-2x^3-2x^2+7x-9)$
 9. $2x^2-2ax+3a^2-(x^2-ax+a^2)$
 10. $x^2-3xy-y^2+yz-2z^2-(x^2+2xy+5xz-3y^2-2z^2)$
 11. $5x^2+6xy-12xz-4y^2-7yz-5z^2-(2x^2-7xy+4xz-3y^2+6yz-5z^2)$
 12. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-(-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3)$
 13. $7x^2-2x^2+2x+2-(4x^3-2x^2-2x-14)-(2x^3-8x^2+4x+16)$

次ノ括弧ヲ除去スベシ (14-18)

14. $a-\{b-c-(d-e)\}$
 15. $2a-(2b-d)-\{a-b-(6c-2d)\}$
 16. $3a-[b-\{a+(b+3a)\}]$
 17. $6a-[4b-\{4a-(6a-4b)\}]$
 18. $2a-[3b+(2b-c)-4c+\{2a-(3b-c-2b)\}]$
 19. $2a =$ 何ヲ加フレバ $-8a$ トナルカ
 20. $a =$ 何ヲ加フレバ b トナルカ

21. $a-d =$ 何ヲ加フレバ c トナルカ
 22. $a-b+c-e+f-g$ ノ e ヨリ以下ノ項ヲ負號ヲ前ニ有スル括弧内ニ入ルベシ
 23. $a-2b+5c-f+e-g$ ノ $5c$ 以下ノ項ヲ負號ヲ前ニ有スル括弧内ニ入レヨ
 24. $3x-(5y-z)$, $3x-5y-2z$, $3y-(2z+x)$ ヲ加ヘヨ
 25. $-a+b-c+d$, $a-2b-3c+d$, $-5b+4a$, $-5c+d$ ヲ加ヘ $6b-5c+3d$ ヲ減セヨ
 26. x^2-xy ハ x^2-2y^2 ト $2zy-y^2$ トノ和ニ何ヲ加ヘタルモノニ等シキカ
 27. $\frac{1}{5}a-\frac{2}{7}b+\frac{1}{3}c$ ヨリ $\frac{3}{14}b-\frac{1}{6}c+\frac{1}{2}d$ ヲ減セヨ且其結果ヲ $a=1$, $b=2$, $c=3$ トシテ檢セヨ
 28. $a^2+\frac{1}{4}a-\frac{1}{8}$ ヨリ $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{8}a$ ヲ減セヨ其結果ヲ $a=1$ トシテ或ハ $a=2$ トシテ檢セヨ

第 三 章

乘 法

20. 已ニ正數,負數ノ乘法ヲ説キ且交換,組合,配分ノ定則ハ一般ニ應用シ得ラル、コトヲ説キタリ

指 數 定 則

21. 次ノ指數定則ノ理ハ組合定則ヲ注意セバ明カナルベシ

$$\begin{aligned} \text{(例一)} \quad a^3 \times a^2 &= aaa \times (aa) \\ &= aaaaa \quad \text{(組合定則)} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

故ニ次ノ指數定則ヲ得

同數ノ冪ノ積ハ同數ニ其指數ノ和ヲ

指數トナシタルモノニ等シ

$$\text{(例二)} \quad a^8 \times a = a^{8+1} = a^9$$

例 題

次ノ積ヲ問フ

$$1. a^5 \times a^7 \qquad 2. y^{100} \times y^3$$

單 項 式 ノ 乘 法

22. 交換,組合及指數ノ定則及記號法則ヲ案スレバ次ノ運算ノ理ハ明カナラン

(例一) $7a$ ト $3bc$ トノ積ヲ求メヨ

$$\begin{aligned} 7a \times 3bc &= 7 \times a \times (3 \times b \times c) \\ &= 7 \times a \times 3 \times b \times c \quad \text{(組合定則)} \\ &= 21abc \quad \text{(交換定則)} \end{aligned}$$

(例二) $2a^3b^2$ ト $-3a^2b^4$ トノ積ヲ求メヨ

$$\begin{aligned} 2a^3b^2 \times (-3a^2b^4) &= 2 \times a^3 \times b^2 \times (-3) \times a^2 \times b^4 \quad \text{(組合定則)} \\ &= 2 \times (-3) \times a^3 \times a^2 \times b^2 \times b^4 \quad \text{(交換定則)} \\ &= -6(a^3 \times a^2)(b^2 \times b^4) \quad \text{(記號, 組合ノ定則)} \\ &= -6a^{3+2}b^{2+4} = -6a^5b^6 \quad \text{(指數定則)} \end{aligned}$$

因テ次ノ單項式乘法ノ法則ヲ得

(法則第一) 乘法ノ記號法則ニ依リ積ノ記號ヲ定メ次ニ係數ノ積ヲ係數トシ各文字ノ積ヲ作ルベシ若シ同文字アルトキハ指數定則ヲ用キ其積ヲ作ルベシ

$$(例三) (-2a^2b^3c^4) \times (-4ab^2c^5) = 8a^{2+1}b^{3+2}c^{4+5} = 8a^3b^5c^9$$

例題

次ノ積ヲ求メヨ

1. $2x^3, 4x^2$
2. $3a^4, 4a^5$
3. $2a^2b, 3ab^2$
4. $3x^3z, -5x^4y^3z$
5. $-7x^4y^2, -8y^2z^2$
6. $-4ax^2z, -6ay^2z^3, 3a^2x$
7. $\frac{7}{11}a^2b^4c^3, -\frac{3}{35}a^4b^3c^2$
8. $(-ab)^2$
9. $(-abc)^3$
10. $(-0.5a^3b^2)^5$

多項式ニ單項式ヲ乘ズル法

23. 配分定則及法則第一ヲ注意スレバ次ノ運算ノ理ハ明カナルベシ

$$(例一) 3(a+b) = 3a+3b$$

$$(例二) (-5)(a-b) = (-5)\{a+(-b)\}$$

$$= (-5)a + (-5)(-b) \quad (\text{配分定則})$$

$$= (-5a) + (+5b) \quad (\text{法則第一})$$

$$= -5a+5b$$

$$(例三) (-c)(a-b) = (-c)\{a+(-b)\}$$

$$= (-c)a + (-c)(-b) \quad (\text{配分定則})$$

$$= (-ca) + (+cb) \quad (\text{法則第一})$$

$$= -ca+cb$$

因テ次ノ多項式ニ單項式ヲ乘ズル法則ヲ得

(法則第二) 法則第一ニ因テ多項式ノ各項ニ乘數ヲ乘ジ其結果ヲ列記スベシ

$$(例四) (6a^2+5b) \times 4a^3 = 24a^{2+3} + 20a^3b$$

$$= 24a^5 + 20a^3b$$

$$(例五) (6x^2+7xy-3y^2) \times (-5x^2y)$$

$$= -30x^4y - 35x^3y^2 + 15x^2y^3$$

例題

次ノ積ヲ求ム

1. $4a^2 - 3b, 3ab$
2. $8a^2 - 9ab, 3a^2$
3. $8x^2 - 4y^2 + 5xy, 2x^2y$
4. $x^2y^3 - y^3z^4 + z^4x^2, x^2y^2z^2$
5. $2xy^2z^3 + 3x^2y^3z - 5x^3yz^2, 2xy^2z$
6. $\frac{1}{5}x^3 - \frac{2}{7}x^2y + \frac{3}{8}xy^2 - \frac{4}{9}y^3, \frac{3}{11}x^3y^4$
7. $(a+5) \times a + (a+5) \times 4$
8. $(a-3) \times a + (a-3) \times (-2)$
9. $(x-2) \times 3 + (x-5) \times 5 + (x+3) \times (-4)$
10. $\frac{1}{2} \left\{ 2a+1 - \frac{1}{3}(a+3) \right\}$

多項式ト多項式トノ乘法

24. 原則

今 $(5+3)(6+4)$ ナル積 = 於テ $(5+3)$ ヲ一數ト見做ス
トキハ法則第二 = 因テ次ノ如クナスコトヲ得

$$(5+3)(6+4) = (5+3) \times 6 + (5+3) \times 4$$

故ニ一般ニ次ノ如クナスコトヲ得

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d$$

即二式ノ積ヲ作ルニハ一式中ノ各項
ヲ以テ他ノ式ニ乗ジタル積ノ和ヲ求
ムベキコトヲ知ル

此定理ハ配分定則 = 因リタルヲ以テ $(a+b), c, d$ ガ
正數ナラザルモ可ナリ從テ a, b, c, d ガ正數ナラ
ザルモ可ナリ

$$\begin{aligned} \text{(例)} \quad (5+3)(6-4) &= (5+3)\{6+(-4)\} \\ &= (5+3) \times 6 + (5+3)(-4) \end{aligned}$$

25. 法則

今示セル原則及法則第二 = 因リテ次
ノ運算ヲナシ得ベシ

$$\begin{aligned} \text{(例一)} \quad (a-b)(c-d) &= (a-b)\{c+(-d)\} \\ &= (a-b)c + (a-b)(-d) && \text{(原則)} \\ &= ac - bc + (-ad + bd) && \text{(法則第二)} \\ &= ac - bc - ad + bd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(例二)} \quad (2a+3b-4c)(3a-4b) \\ &= (2a+3b-4c)\{3a+(-4b)\} \\ &= (2a+3b-4c)(3a) + (2a+3b-4c)(-4b) \quad \text{(原則)} \end{aligned}$$

此結果ヲ求ムルニハ次ノ如ク被乗數 = $3a$ 及 $-4b$
ヲ乘ゼシモノ、積ノ同類項ガ同ジ行ニアル様
ニ書キテ其加法ヲ施セバ良シ即

$$\begin{array}{r} 2a + 3b - 4c \\ 3a - 4b \\ \hline 6a^2 + 9ab - 12ac \\ - 8ab \quad - 12b^2 + 16bc \\ \hline 6a^2 + ab - 12ac - 12b^2 + 16bc \end{array}$$

因テ次ノ多項式乘法ノ法則ヲ得

(法則第三) 被乗數ノ下ニ首項ヲソロヘ

テ乗數ヲ記シ乗數ノ各項ヲ以テ被

乗數ニ乘ジ其積ノ同類項ガ同行ニ

アル様ニ其下ニ之ヲ書キ其和ヲ求

ムベシ

(注意第一) 乘ズル二數ノ項ヲ或同文字ノ次數ノ
同ジ順序例ヘバ何レモ次數ノ低キモノヨリ次
第ニ高キモノ(即昇冪ノ順序)或ハ何レモ次數ノ
高キモノヨリ次第ニ低キモノ(即降冪ノ順序)ヲ
記スルコト、ナストキハ乗數ノ各項ヲ被乗數
ニ乘ジタル積ノ同類項ガ同行ニアル様ニ記ス
ルトキニ便利ナリ

(例三) $a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ヲ乘ズベシ

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 \\ \hline a^4 - 2a^3b + a^2b^2 \\ + 2a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3 \\ \hline a^4 \quad a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\ - 2a^2b^2 \quad + b^4 \end{array}$$

(注意第二) 二數及乗數ノ各項ヲ被乗數ニ乘ジタ

ル積ヲ x ノ冪數ノ順序ニ記スルトキニ冪數ノ

無キ項ノ位置ハ明ケ置クラ可トス

(例四) $x^5 - 2x^3 + 7x - 1 = x^4 - 3x^3 - 2$ ヲ乘ズベシ

$$\begin{array}{r} x^5 \quad - 2x^3 \quad + 7x - 1 \\ x^4 - 3x^3 \quad - 2 \\ \hline x^9 \quad - 2x^7 \quad + 7x^5 - x^4 \\ - 3x^8 \quad + 6x^6 \quad - 21x^4 + 3x^3 \\ \hline \quad - 2x^5 \quad + 4x^3 - 14x + 2 \\ x^9 - 3x^8 - 2x^7 + 6x^6 + 5x^5 - 22x^4 + 7x^3 - 14x + 2 \end{array}$$

(注意第三) 次ノ乘法ノ結果ハ此後屢々用ウルコ

トアルヲ以テ學生ハ自ラ之ヲ試ミ且諸記スベ
シ

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

(注意第四) 算術ト同ジク乘法ノ結果ノ正否ヲ檢

スルニハ被乗數ト乗數トヲ交換シ再乘法ヲ施

シ其積ヲ元ノ積ニ比較スルヲ要ス

又次ノ如ク二數及積ノ文字ニ任意ノ値ヲ代入

スルノ法ヲ用フルモ可ナリ

例ヘバ

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

ナルコトヲ檢スルニハ $a=4, b=3$ ヲ代入スレバ

左邊ノ數値ハ

$$(4+3)(4^2-4 \times 3+3^2)=7 \times 13=91$$

右邊ノ數値ハ

$$4^3+3^3=64+27=91$$

例題

次ノ積ヲ求ム

1. $x-7, x+6$ 2. $x+8, x+9$ 3. $x+8y, x+4y$

4. $7x+3y, 3x-4y$ 5. $2x^3+4x^2+8x+16, 3x-6$

6. $x^3+x^2+x-1, x-1$

7. $1+4x-10x^2, 1-6x+3x^2$

8. $x^3+4x^2+5x-24, x^2-4x+11$

9. $x^3-7x^2+5x+1, 2x^2-4x+1$

10. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1, x^4+2x^3+3x^2+2x+1$

11. $x^2+2ax-a^2, a^2+2ax+x^2$

12. $2b^2+3ab-a^2, 7a-5b$

13. $x+2y-3z, x-2y+3z$

14. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab, a+b+c$

15. $a^2-2ab+b^2+c^2, a^2+2ab+b^2-c^2$

16. $x-a, x+a, x^2+a^2$ 17. $x+a, x+b, x+c$

18. $x^2-ax+a^2, x^2+ax+a^2, x^4-a^2x^2+a^4$

19. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b, \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$ 20. $\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}y, \frac{3}{4}x+\frac{1}{5}y$

21. $(x+2)^2, (x-2)^2$

22. $(x-2), (x+2), (x-4)^2, (x+4)^2$

23. $(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2) - (a^4 - a^2b^2 + b^4)$
24. $(x + 2y - 3z)(x - 2y + 3z) - (x + 3y - 2z)(5x - 2y + 3z)$
25. $4x^2 - 6\{5x^2 - 7 - (x - 8)(x + 6)\}$
26. $(6x - 3)(7x + 8)(3x - 16)$ ヲ x ノ次數ノ順序ニ置キ x ノ二次ノ項以下ヲ負ヲ前ニ有スル括弧ノ内ニ入レヨ
27. $a^2 + a - \frac{1}{2} = a - \frac{1}{2}$ ヲ乘ジ其結果ヲ $a = 4$ トシテ檢セヨ
28. $x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 = x + \frac{1}{2}y$ ヲ乘ジ其結果ヲ $x = 2, y = 1$ トシテ檢セヨ
29. 次ノ式ノ積ヲ求メ其二ツノ因數ノ次數ト積ノ次數トニ就テ如何ナル關係アルカヲ述ベヨ又其最高次ノ項ニ就テ如何ナル關係アルカヲ述ベヨ

$$\text{I. } a^2 + 2ab + 3b^2, \quad a^2 + ab - 2b^2$$

$$\text{II. } x^3 + 3xy - 5y^2, \quad x^2 + 7y$$

30. 11 ヲリ 15 マデノ積ノ次數ヲ問フ
31. $(4a^2 - a + 1)^2, (5x^2 - 3y)^3$ ノ次數ヲ問フ

(注意) 多項式ノ各項ガ同ジ次數ナルトキハ其式ヲ同次式ト云フ

32. $a^2 - 2ab + b^2, a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ナル同次式ノ積ハ同次式ナリヤ否ヤ
33. $(-x)^3$ ト $-x^3$ トノ意義ノ異同及其等不等如何
34. $(-x)^4$ ト $-x^4$ ト等シキヤ否ヤ
35. $-5xy$ ノ三乗冪, 四乗冪ヲ問フ
36. 負數ノ冪ハ其指數ガ如何ナルトキ正トナルカ, 又負トナルカ

第 四 章

除 法

26. 除法ハ算術ニ於ケル如ク二數ノ積ト其一數トヲ知リテ他ノ一數ヲ求ムル運算ナリ而シテ已ニ除法ノ交換, 組合, 配分ノ三定則ハ負數ヲ有スル場合ニモ應用シ得ラル、ト述ベタリ

指 數 定 則

27. 乘法ニ關スル指數定則ハ已ニ説キタルヲ以テ其逆ナル除法ニ於ケル次ノ運算ノ理ハ容易ニ了解シ得ベシ

(例一) $a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$

何トナレバ $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$ ナルヲ以テナリ

故ニ除數ノ指數ガ被除數ノ指數ヨリ大ナラザルトキハ次ノ如ク云フコトヲ得

同數ノ乘冪ノ商ハ同數ニ被除數ノ指

數ヨリ除數ノ指數ヲ減ジタル殘リヲ指數トナシタルモノニ等シ

(例二) $a^8 \div a = a^{8-1} = a^7$

(例三) $a^3 \div a^5 =$ テ除セヨ

被除數ノ指數ハ除數ノ指數ヨリ小ナリ故ニ次ノ如ク分數トナルベシ

$$a^3 \div a^5 = \frac{1}{a^{5-3}} = \frac{1}{a^2}$$

單 項 式 ノ 除 法

28. 9ノ注意第一, 組合, 指數ノ定則及記號法則ヲ注意セバ次ノ運算ノ理ハ明カナルベシ

(例一) $15a^2b^5 \div -3b^2 =$ テ除スベシ

$$15a^2b^5 \div (-3b^2) = -(15a^2b^5 \div 3b^2) \quad (\text{記號法則})$$

$$= -\{15 \times a^2 \times b^5 \div 3 \div b^2\} \quad (\text{組合定則})$$

$$= -\{(15 \div 3) \times a^2 \times (b^5 \div b^2) \times c\}$$

(9ノ注意第一)

$$= -5a^2b^3c \quad (\text{指數定則})$$

故ニ次ノ單項式除法ノ法則ヲ得

(法則第一) 除法ノ記號法則ニ因リ商ノ記號ヲ定メ指數定則ニ因テ同文字ノ除法ヲ施シタル商ト被除數ノミニ含マレタル文字トノ積ヲ作り數係數ノ商ヲ其數係數トナスベシ

$$(例二) \quad -12a^2b^3c^2 \div (-3ab^2) = \frac{12}{3} \cdot \frac{a^2}{a} \cdot \frac{b^3}{b^2} \cdot c^2 = 4abc^2$$

例題

次ノ商ヲ求ム

1. $15x^5 \div 3x^2$
2. $24a^5 \div (8a^3)$
3. $18x^3y^2 \div 6x^2y$
4. $24a^4b^5c^6 \div (-3a^2b^3c^4)$
5. $20a^4b^4x^3y^3 \div (5b^2x^3y)$
5. $84x^5y^2z^9 \div (-12x^2y^2z^5)$

單項式ニテ多項式ヲ除スル法

29. 配分定則ト法則第一トニ注意スレバ次ノ運算ノ理ヲ知ル₁難カラズ

$$(例一) \quad \frac{ac-bc}{-c} = \frac{ac+(-bc)}{-c} = \frac{ac}{-c} + \frac{-bc}{-c} \quad (\text{配分定則})$$

$$= (-a) + (+b) \quad (\text{法則第一})$$

$$= -a + b$$

因テ單項式ニテ多項式ヲ除スル次ノ法則ヲ得

(法則第二) 法則第一ニ因テ被除數ノ各項ヲ除數ニテ除シ其商ヲ連記スベシ

$$(例二) \quad x^2y^3 - 3xy^2 + x^2y \quad \text{ヲ} \quad -xy \quad \text{ニテ除スベシ}$$

$$\frac{x^2y^3 - 3xy^2 + x^2y}{-xy} = -xy^2 + 3y - x$$

例題

次ノ左式ヲ右式ニテ除セヨ

1. $4x^3 - 8x^2 + 16x, 4x$
2. $x^3y - 3x^2y^2 + 4xy^3, xy$
3. $4x^2 - 8x, -2x$
4. $-15a^2b^3 - 3a^2b^2 + 12ab, -3ab$
5. $60a^2b^3c^5 - 48a^2b^4c^2 + 56a^2b^2c^4 - 20abc^6, -4abc^5$
6. $84a^9b^7y^5 - 16a^7b^3y^7 + 56a^5b^5y^3 - 48a^3y^9, -8a^5y^7$

多項式ヲ以テ多項式ヲ 除スル法

30. 此場合ノ除法ハ算術ニ於ケル衆位ノ數ニテ衆位ノ數ヲ除スル場合ト相似タル方法ヲ用ウルコトヲ得

(例一) x^3+2x^2-3x ヲ x^2+3x ニテ除スベシ

積ノ最高次ノ項ハ二ツノ因數ノ最高次ノ項ノ積ニ等シキヲ以テ除數ノ最高次ノ項 x^2 ト何トノ積ガ被除數ノ最高次ノ項 x^3 トナルヤヲ求ムレバ商ノ最高次ノ項ヲ得即 x^3 ヲ x^2 ニテ除シタル商 x 是レナリ

此ニ此 x ト除數トノ積ヲ(一)ノ如ク被除數ヨリ減ズレバ殘リノ $-x^2-3x$ ハ(二)ナル乘法ノ(I)+(II)ニ當リ即(I)ハ $-x^2$ ニ當リ(II)ハ $-3x$ ニ當ル

(一)	(二)
x^3+2x^2-3x	x^2+3x
x^3+3x^2	$x+\triangle$
<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>	<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>
$-x^2-3x$	x^3+3x^2
	(I)+(II)
	<hr style="width: 50%; margin: 0;"/>
	x^3+2x^2-3x

然ルニ(I)即 $(-x^3)$ ハ除數 x^2+3x ノ最高次ノ項 x^2 ト

商ノ第二項 \triangle トノ積ニ等シ故ニ \triangle ヲ求ムルニ $-x^2$ ヲ x^2 ニテ除スレバヨシ即 -1 ヲ得

-1 ヲ x^2+3x ニ乗ズレバ丁度 $-x^2-3x$ トナルヲ以テ所求ノ商ハ $x-1$ ナルコトヲ知ル

故ニ次ノ法則ヲ得

(法則第三) 被除數及除數ヲ同ジ文字ノ

昇冪或ハ降冪ノ順序ニ記シ除數ノ

首項ヲ以テ被除數ノ首項ヲ除シ之

ヲ商ノ首項トシ之ヲ除數ニ乗ジ被

除數ヨリ減ジ殘リノ項ヲ必要ダケ

前ト同ジ順序ニ書キ下シ其首項ヲ

除數ノ首項ニテ除シ商ノ第二項ヲ

定メ以下殘リノ首項ガ除數ノ首項

ニテ除シ得ラルル以上ハ同法ヲ續

行スベシ(若シ同法ヲ續行シ得ラル

ルコト無限ナルトキハ指定セラレ

タル商ノ項ヲ得ルニ至リテ止ム

(例二) $3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4$ ヲ $a^2 - 2ab + 3b^2$

ニテ除スベシ

$$\begin{array}{r}
 a^2 - 2ab + 3b^2 \overline{) 3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4} \\
 \underline{3a^4 - 6a^3b + 9a^2b^2} \\
 - 4a^3b + 13a^2b^2 - 22ab^3 \\
 \underline{- 4a^3b + 8a^2b^2 - 12ab^3} \\
 5a^2b^2 - 10ab^3 + 15b^4 \\
 \underline{5a^2b^2 - 10ab^3 + 15b^4} \\
 0
 \end{array}$$

(注意第一) 乗法ノ場合ニ於テ注意セシ如ク冪数ノ順序ニ被除数及各余数等ヲ記スルトキ缺ケタル項ハ其場所ヲ明ケ置クラヨシトス

(注意第二) 或余数ノ首項ガ除数ノ首項ニテ除シ得ザルニ至レバ其餘数ハ除シ盡シ得ザル余数ナリ例ヘバ $a^2 + 3ab + b^2$ ヲ $a + b$ ニテ除スルトキ $-b^2$ ハ除シ盡シ得ザル余数ナリ

$$\begin{array}{r}
 (a+b) \overline{) a^2 + 3ab + b^2} \\
 \underline{a^2 + ab} \\
 2ab + b^2 \\
 \underline{2ab + 2b^2} \\
 -b^2 \dots\dots\dots \text{余数}
 \end{array}$$

但 b ノ降冪ノ順序ニ除数被除数ヲ記スレバ商及余数ニ變化ヲ生ズベシ

(注意第三) 算術ト同ジク除法ノ結果ノ正否ヲ校

スルニハ商ニ除数ヲ乗ジ餘数ヲ加ヘテ得タル

結果ヲ被除数ニ比較スルヲ要ス

例題

次ノ左式ヲ右式ニテ除スベシ

1. $2x^3 - x^2 + 3x - 9, 2x - 3$
2. $6x^3 + 14x^2 - 4x + 24, 2x + 6$
3. $9x^3 + 3x^2 + x - 1, 3x - 1$
4. $7x^3 - 24x^2 + 58x - 21, 7x - 3$
5. $x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2 - xy^3, x - y$
6. $2a^4 + 27ab^3 - 81b^4, a + 3b$
7. $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5, x^3 + y^3$
8. $x^5 + 2x^4y + 3x^3y^2 - x^2y^3 - 2xy^4 - 3y^5, x^3 - y^3$
9. $x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6, x^2 - 3x + 3$
10. $x^4 + x^3 - 9x^2 - 16x - 4, x^2 + 4x + 4$
11. $x^4 - 13x^2 + 36, x^2 + 5x + 6$
12. $a^3 - 2ab^2 + b^3, a - b$
13. $x^4 - 81y^4, x - 3y$
14. $x^5 - y^5, x - y$
15. $a^5 + 32b^5, a + 2b$
16. $x^6 - 1, x - 1$
17. $x^4 + 64, x^2 + 4x + 8$
18. $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24, x^2 + 5x + 4$ ($x=2$ トシ結果ヲ檢セヨ)

19. $x^4+x^3-24x^2-35x+57, x^2+2x-3$ ($x=3$ トシ 結果ヲ 檢セヨ)
20. $1-x-3x^2-x^5, 1+2x+x^2$
21. x^6-2x^3+1, x^2-2x+1
22. $a^4+2a^2b^2+9b^4, a^2-2ab+3b^2$
23. $a^6-b^6, a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$
24. $x^6+2x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x-1, x^2+2x-1$
25. $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1, x^4-2x^3+3x^2-2x+1$
26. $x^{12}+x^6-2, x^4+x^2+1$
27. $x^4-x^3y-xy^3+y^4, x^2+xy+y^2$
28. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3-1, x-y-1$
29. $a^2+2ab+b^2-c^2, a+b-c$
30. $x^2+\frac{2}{3}x-1, x+2$
31. $x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{17}{4}x^2-1, x^2-\frac{1}{2}x-1$
32. $\frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+\frac{41}{8}x^2-\frac{23}{4}x+6, \frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x+1$
33. $x^2-(a+c)x+ac, x-c$
34. $x^3+(a+c)x^2+(ab+ac)x+abc, x+c$
35. $ax^3+(a^2+a-2)x^2-3ax-a^2+a+2, x+a+1$
36. $a^2(b+c)+b^2(a-c)+c^2(a-b)+abc, a+b+c$
37. 1 ヲ $1-x$ = テ 除シ 第五項 マデ 求メヨ

3
2

雑 題

1. $3ab+bc-ca, -ab+ca, ab-2bc+5ca$ ノ 和 ヲ ヲ
 $5ca+bc-ab$ ヲ 減ズベシ
2. $2x-5y-3z$ ト $-3x+y+4z$ ト ノ 和 ヲ ヲ $x-y+3z$
ト $-2y-2z$ ト ノ 和 ヲ 減ズベシ
3. $a=5x-3y+z, b=-2x+y-3z, c=x-5y+6z$ ナル
ト キ $a+b-c$ ハ 何トナルカ
4. $x-3(y-x)-4(x-2y)$ ノ 結果ヲ 求メヨ
5. $2x-5(3x-7+y)+4(2x+3y-8)-7y$ ヲ 簡單ニセ
ヨ
6. $2x-3y-4(x-2y)+5\{3x-2(x-y)\}$ ト $4x-(y-x)$
ト $\{2y-3(x+y)\}$ ト ノ 積ヲ 求メヨ
7. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ヲ $b-c$ = テ 除スベシ
8. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ヲ $b-c$ = テ 除スベシ
9. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ヲ $a^2(b-c)+b^2(c-a)$
 $+c^2(a-b)$ = テ 除スベシ
10. $x^4-12x^3+28x^2+43x+12$ ヲ 如何ナル數ニテ 除
スレバ x^2-7x-3 ヲ 得ルカ
11. $(a^3-b^3)(a+b) \div (a-b)$ ヲ 簡單ニセヨ

12. $(x^3 - y^3) \div (x - y) \times (x^2 - xy + y^2)$ フ簡單ニセヨ
13. $(2a+1)(a+4)+7=(a+1)(a+2)+(a+3)^2$ フ證明セヨ
14. $x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ ノ平方ヲ求メヨ

補習雜題 I.

1. $a=1, b=-2, c=-3$ ナリトシ $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}$ ノ數値ヲ求メヨ
2. $3x^2 - 4x^3, 2x - 3 - x^3$ 及 $2x^2 - 2$ ノ和ヲ求メ其結果ヨリ $6x^2 + 3$ フ減ズベシ
3. $2x - 5\{3x - 7(4x - 9)\}$ フ簡單ニセヨ
4. $(-a)^2, (-b)^3, (-c)^4$ フ求メヨ
5. $(a+b+c-d)(a+b-c+d) + (a-b+c+d)(-a+b+c+d) = 4(ab+cd)$ ナルコトヲ證明セヨ
6. $y^4 + 9y^2 + 81$ フ $y^2 - 3y + 9$ ニテ除スベシ
7. $(x+y)^3 + 3(x+y)^2z + 3(x+y)z^2 + z^3$ フ $(x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2$ ニテ除スベシ
8. $x^2 + y^2, x^4 + y^4$ アリ前者ハ之ヲ $x+y$ ニテ除スルコトヲ得ズ後者ハ $x+y$ ニテモ, $x^2 + y^2$ ニテモ除スルコトヲ得ザルコトヲ檢セヨ

9. $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 + 3y^3 = x^2 + 2xy - 3y^2$ フ乘ジ其結果ヲ $x=y$ トシテ檢セヨ

補習雜題 II.

1. 溫度50度ナリシニ+6度昇ルトキハ何度トナルカ, -6度昇ルトキハ如何
2. $\frac{2a - [b - \{a - (b - c)\} - \sqrt{(c^4 + a^2b^2 + 2a^3c)}]}{\sqrt{(2a^2 + b^2 + c^2)}}$ ニ於テ $a=-1, b=5, c=0$ トシテ數値ヲ求メヨ
3. $5x^3 - 2x^2 - 3x, 4x^2 - x^3 + 2x, -x - 7$ 及 $8 - 2x^2$ ノ和ヲ求メヨ
4. $4a^2 - 2ab - b^2 + 5bc$ ハ $2a^2 - 3ab + b^2 - c^2$ ヨリ何程超過スルカ
5. $3(x-2y) - 2(x-4y)$ フ簡單ニセヨ
6. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2]$ フ證明セヨ
7. $(-abc)^3$ フ a^2b^3 ニテ除スベシ
8. $x^5 - y^5$ フ $x - y$ ニテ除スベシ
9. $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$ フ $x - c$ ニテ除スベシ

第 貳 編
一 次 方 程 式
第 壹 章
一 元 方 程 式

31. 二式相等シトシテ表ハシタルモノ
ヲ一般ニ等式ト云ヒ之ヲ二ツニ分ツ
例ヘバ

$$(x+2)(x-2)=x^2-4 \quad (A)$$

$$x+2=6 \quad (B)$$

ニ於テ(A)ハ x = 如何ナル數ヲ代入スルモ等號ノ
左右兩邊ニ於ケル代數式ノ數値相等シク而シテ
(B)ハ x ノ值ガ 4 ナルトキニ限リテ成立ス

(A)ノ如キモノハ恒等式ト稱スルモノ
ニシテ第一編ニ於ケル算法ハ恒等式
ノ右或ハ左ノ一邊ノ式ヲ與ヘテ他ノ
一邊ノ式ヲ求ムル方法ニ相當ス

例ヘバ(1)ノ左邊 $(x+2)(x-2)$ ヲ與ヘ乘法ヲ施シ右
邊ノ式 x^2-4 ヲ得タルガ如シ

次ニ(B)ノ如キモノハ方程式ト稱ス
ルモノニシテ其内ニ含メル文字ノ值
ガ如何ナルトキ其等式ガ成立スルカ
ヲ求ムルノ必要ヲ生ズルモノナリ而
シテ其文字ノ值即未知數ノ值ヲ其根
ト云ヒ根ヲ求ムルコトヲ方程式ヲ解
クト云フ

或數ガ方程式ノ根ナリト云フ代リニ
其數ハ方程式ニ適合スト云フコト
アリ

方程式ニ於テ未知數ヲ表ハスニ上ノ(B)ノ如ク
羅馬文字ノ末字 x, y, z 等ヲ以テスルヲ慣例トス
然レドモ必ラズシモ之ニ拘泥スルヲ要セズ

$a=b$ ナル等式アリトセバ之ヨリ次ノ
等式ノ成立スルコト明カナリ

$$a+c=b+c \quad (1)$$

$$a-c=b-c \quad (2)$$

$$ac=bc \quad (3)$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{c} \quad (4)$$

(但 $c=0$ ナラズ)

$$-a=-b \quad (5)$$

之ヲ辭ニテ云ヒ表ハストキハ

等シキ數ニ同數ヲ加フルモ,等シキ數

ヨリ同數ヲ減ズルモ,等シキ數ニ同數

ヲ乘ズルモ,等シキ數ヲ同數ニテ除ス

ルモ其ノ結果ハ相等シ

方程式ノ根ヲ求ムル法

32. 方程式ノ根ヲ求ムルニハ次第ニ
方程式ヲ簡單ニシテ而カモ同一ナル
根ヲ有スル方程式(互ニ同値ナリト云
フ)ニ變ズルニアリ其法ハ次ノ二法ニ
基ヅク

分數ノ分母ヲ除去スルコト

移項スルコト

今例ヲ以テ之ヲ説カントス

(例一) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9$(1)ノ根ヲ求ムベシ

分母3,4,6ノ最小公倍數12ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$\frac{x}{3} \times 12 + \frac{x}{4} \times 12 + \frac{x}{6} \times 12 = 9 \times 12 \quad (2)$$

$$\text{即} \quad 4x+3x+2x=108 \quad (2)'$$

$$\text{即} \quad 9x=108 \quad (2)''$$

此ノ如ク分母ヲ除去シテ(1)ヨリ導キタル方程
式(2)ヨリ(1)ニ還ルコトヲ得ルヲ以テ(1)ノ根ハ
(2)ノ根トナルノミナラズ(2)ニ適スル根ハ(1)ニ
モ適ス(即同値ナリ)故ニ(1)ノ代リニ(2)即(2)'即
(2)''ヲ使用スルコトヲ得次ニ(2)''ニ於テ x ノ係
數9ニテ兩邊ヲ除スレバ

$$x=\frac{108}{9}=12 \quad (3)$$

此12ハ(2)''即(2)'即(2)即(1)ノ根ナリ而シテ試ミ
ニ(1)ノ $x=12$ ヲ代用セバ其左邊ハ

$$\frac{12}{3}+\frac{12}{4}+\frac{12}{6}$$

トナリ右邊ノ9ニ等シ即12ハ(1)ノ根ナリ

(例二) $7x+25=85-5x$ (1) ノ根ヲ求ムベシ

未知數ヲ有スル項及已知數ガ左右兩邊ニ於テ混ジタルヲ以テ未知數ヲ有スル項ヲ左邊ニ、已知數ヲ右邊ニ集ムルノ目的ニテ先其兩邊ニ $5x$ ヲ加フレバ

$$7x+25+5x=85-5x+5x \quad (2)$$

$$\text{即} \quad 7x+25+5x=85 \quad (2)'$$

(2)' ハ恰カモ(1)ノ右邊ノ $-5x$ ガ等號ヲ越エテ左邊ニ移リ爲ニ記號ヲ變ジタルニ同ジ而シテ又(2)ヨリ(1)ヲ導キ得ルヲ以テ(1)ノ根ハ(2)ノ根トナルノミナラズ(2)ニ適スル根ハ(1)ニモ適ス(即同値ナリ)從テ(2)'ヲ(1)ニ代フルコトヲ得

次ニ此式ノ兩邊ヨリ 25 ヲ減スレバ

$$7x+25+5x-25=85-25 \quad (3)$$

$$\text{即} \quad 7x+5x=85-25 \quad (3)'$$

是亦恰カモ(2)'ノ左邊ノ $+25$ ガ等號ヲ越エテ右邊ニ移リタルガ爲メニ記號ヲ變ジタルト同様ナリ而シテ(2)'ト(3)'トハ上述ノ理ニテ其根相等シキヲ以テ此ヲ彼ニ代フルコトヲ得從テ(1)ニ代フルコトヲ得

(3)'ヨリ以下ハ前例ト同様ニ

$$12x=60$$

$$x=5$$

試ミニ此 5 ヲ(1)ノ x ニ代入スレバ左右兩邊ハ夫レ々々

$$7 \times 5 + 25, \quad 85 - 5 \times 5$$

$$\text{即} \quad 60, \quad 60$$

トナリ從テ 5 ハ(1)ニ適合スルコトヲ知ル

二例ヲ案ジテ方程式ノ根ヲ求ムル次ノ法則ヲ得

(法則) 分數項アルトキハ分母ヲ除去

スルタメ各分母ノ最小公倍數ヲ各項ニ乘ジ次ニ未知項ヲ左邊ニ、已知項ヲ右邊ニ集合スルタメニ他邊ニ移スベキモノハ其項ノ記號ヲ變ジテ之ヲ他邊ニ移シ兩邊ノ式ヲ計算シ x ノ係數ニテ兩邊ヲ除スベシ

(注意第一) 得タル根ガ所題方程式ニ適合スルヤ

否ヤノ驗算ハ必ラズ之ヲ試ムルコトヲ要ス

(注意第二) 方程式ニ或計算ヲ施シタルトキハ元
方程式ト同ジ根ヲ有スベキヤ否ヤ即同値ナリ
ヤ否ヤノ注意ハ必要ナルモノナリ

(注意第三) 方程式ノ兩邊整數式ニシテ未知項ヲ
等號ノ左邊ニ、已知項ヲ右邊ニ集合シ(或ハ悉ク
左邊ニ集メテ)且兩邊ノ式ヲ簡約シタル後其未
知數ノ數ト其次數トニ因リテ方程式ニ名ヲ命
ス例ヘバ

$ax=b$一元ニシテ一次ナル方程式

$ax+by=c$二元ニシテ一次ナル方程式

$ax^2+bx=c$一元ニシテ二次ナル方程式

本編ハ一次ナル方程式ヲ論ジ就中本章ハ其一
元ナルモノヲ論ズ

(例三) $\frac{5x+3}{3} - \frac{16-5x}{7} = 37-4x$ ヲ解クベシ

21.....分母ノ最小公倍數

$$\frac{5x+3}{3} \times 21 - \frac{16-5x}{7} \times 21 = (37-4x)21$$

$$(5x+3)7 - (16-5x)3 = 777-84x$$

$$35x+21 - (48-15x) = 777-84x$$

$$35x+21-48+15x = 777-84x$$

$$35x+15x+84x = 777-21+48$$

$$134x = 804$$

$$x = \frac{804}{134}$$

$$x = 6$$

6ヲ元方程式ノ x ニ代入スレバ左右兩邊ハ

$$\frac{5 \times 6 + 3}{3} - \frac{16 - 5 \times 6}{7}, 37 - 4 \times 6$$

$$\text{即 } 11 - \frac{-14}{7}, 13$$

$$\text{即 } 13, 13$$

即6ハ元方程式ニ適合スルコトヲ知ル

例題

1. $5x+50=4x+56$

2. $16x-11=7x+70$

3. $24x-49=19x-14$

4. $3x+23=78-2x$

5. $7(x-18)=3(x-14)$

6. $16x=38+3(4-x)$

7. $7(x-3)=9(x+1)-38$

8. $5(x-7)+63=9x$

9. $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$

10. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{6} = \frac{x}{8} + \frac{1}{12}$

11. $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = x-7$

12. $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$

13. $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$

14. $\frac{x}{3} - \frac{1}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{5} - \frac{1}{5} - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}$

15. $\frac{2x}{3} = \frac{176-4x}{5}$

16. $\frac{3x}{4} + \frac{180-5x}{6} = 29$

17. $4(x-3)-7(x-4)=6-x$
18. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{2}$ 19. $\frac{x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=x-2$
20. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14$ 21. $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$
22. $\frac{3x-4}{2}-\frac{6x-5}{8}=\frac{3x-1}{16}$
23. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+2\frac{2}{3}=0$ 24. $\frac{x-3}{4}=\frac{x-5}{6}+\frac{x-1}{9}$
25. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{4}+\frac{x-5}{6}=4$ 26. $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{x-2}{5}=3$
27. $\frac{7x+5}{6}-\frac{5x+6}{4}=\frac{8-5x}{12}$
28. $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+7}{3}-\frac{x+2}{9}=9$
29. $\frac{2x-6}{6}+\frac{6x+3}{4}=5x-17\frac{1}{2}$
30. $\frac{1}{7}(3x-4)+\frac{1}{3}(5x+3)=43-5x$
31. $\frac{1}{7}\left(3x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(x+\frac{2}{3}\right)=\frac{43}{30}$
32. $\frac{1}{5}\left(3x-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{20}(2x+3)$
33. $\frac{1}{4}\{19-3(14x-31)\}=5\frac{1}{4}-\frac{35x}{12}$
34. $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{6}-\left(x-4\frac{1}{2}\right)\right\}+1\frac{17}{18}$

35. $0.5x+3.5=0.25x+3$
36. $1.5x+\frac{1}{2}(2.4x-0.9)=0.75x$
37. $0.2x-0.03=0.12x+2(0.05-0.2x)$
38. $0.1x+\frac{0.05x-0.08}{0.3}=0.88-\frac{0.03x-0.08}{0.5}$
39. $a+b$ ヲリ何ヲ減ズレバ $a-b$ トナルカ
40. 何ヲ $3m-4n$ ヲリ減ズレバ $4n-3m$ ガ残ルカ
41. 100 ヲ二ツノ部分ニ分チテ其一部分 x ナルトキ他ノ部分ハ如何
42. 二數ノ差 100 ニシテ大ナル數 x ナルトキハ小ナル數如何
43. 其總計 89 ナル三數アリ第一ノモノハ a ニシテ第二ノモノハ第一ヨリ 7 少ナシト云フ第二及第三ノ數如何
44. a ガ整數ナルトキ其前後ニアル整數如何
45. a ガ中央ニアル様ニ五個ノ連續整數ヲ書ケ
46. $2a$ ガ中央ニアル所ノ五個ノ偶數ノ和ヲ問フ
47. $2x+1$ ガ中央ニアル所ノ七個ノ奇數ノ和如何
48. 一本 y 錢ノ筆 50 本ノ價如何

49. 一坪 y 圓ノ地面 x 坪ノ價如何
50. x 圓ヲ y 人ニ等分スルトキ一人ノ取リ前如何
51. 兄弟アリ兄ハ a 年ニシテ弟ハ b 年ナリ弟ハ兄ガ幾歲ノ時ニ生レタルカ
52. x 日ニテ一事業ヲナストキ一日ニハ其事業ノ幾分ヲ成スカ、又5日ニテハ如何

第二章

一元方程式ノ應用

33. 前章ニ於テ説キタル方程式ヲ或問題ノ解法ニ應用スルノ例ヲ示サントス

(例一) 某數アリ其三分ノ一ハ五分ノ一ヨリ超過スルコト8ナリト云フ某數如何

某數ヲ x トスレバ其三分ノ一ハ $\frac{x}{3}$ 、五分ノ一ハ $\frac{x}{5}$ ナリ而シテ此差ハ8ナルヲ以テ

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 8$$

ニ適合スル x ノ値ヲ求ムルコトニ歸ス

今前章ノ法ニ因リ之ヲ解ケバ

$$x = 60$$

此60ヲ問題ノ上ニ檢スルニ其三分ノ一ハ20トナリ五分ノ一ハ12トナリ前者ハ後者ヨリ8超過シ即題意ニ適ス

(例二) 金250圓ヲ甲乙丙三人ニ分配スルニ乙ノ

所得金ハ甲ヨリ5圓多ク、丙ノ所得金ハ甲乙二人ノ所得金ノ和ニ等シト云フ各所得金如何

甲ノ所得金ノ圓數ヲ x トスレバ乙ノ所得金ノ圓數ハ $x+5$ ニシテ丙ノ所得金ノ圓數ハ甲乙ノ和即 $x+x+5$ ナリ

此等ノ和ハ250圓ニ等シキヲ以テ次ノ方程式ニ適合スル x ノ値ハ甲ノ所得金ノ圓數ナリ

$$x+(x+5)+(x+x+5)=250$$

之ヲ解クトキハ $x=60$ ヲ得從テ

60.....甲ノ所得金ノ圓數

$60+5=65$乙ノ所得金ノ圓數

$60+65=125$丙ノ所得金ノ圓數

之ヲ問題ノ上ニ檢セバ能ク適合スルコトヲ見ルベシ

(例三) 現今父ノ年齢ハ其子ノ年齢ニ五倍シ三年前ニハ父ノ年齢ハ其子ノ年齢ニ八倍セリト云フ現今二人ノ年齢各如何

現今ノ子ノ年齢ヲ x トスレバ父ノ年齢ハ其五倍即 $5x$ ニシテ三年前ノ年齢ハ夫レ々々 $x-3$, $5x-3$ ナリ而シテ此時父ノ年齢ハ子ノ年齢ノ八

倍ナルヲ以テ次ノ方程式ニ適スル x ノ値ヲ求ムレバ子ノ年齢ヲ得

$$5x-3=8(x-3)$$

之ヲ解クトキハ

$$x=7\text{.....子ノ年齢}$$

$$7 \times 5 = 35\text{.....父ノ年齢}$$

此結果ヲ問題ノ上ニ檢スルニ父ノ年齢35ハ子ノ年齢7ニ五倍シ三年前ニ於テ父ハ $35-3=32$, 子ハ $7-3=4$ ナルヲ以テ父ノ年齢ハ子ノ年齢ニ八倍シ即題意ニ適合スルコトヲ知ル

(注意第一) 上ノ例ヨリ凡テ方程式ノ應用問題ヲ解クニ當リ概ネ次ノ順序アルコトヲ知ルベシ
第一 方程式ヲ立ツルコト即 x ヲ以テ一未知數ヲ表ハシ已知數ト未知數トノ關係ヨリ方程式ヲ作ルコト

第二 其方程式ヲ解キテ未知數ノ値ヲ求ムルコト

第三 其答ガ能ク問題ニ適合スルヤ否ヤヲ檢スルコト

(注意第二) 或關係ヨリ作リタル方程式ニ於テ同

種類ノ量ヲ表ハス所ノ數ハ同ジ單位ノ數ナラザルベカラズ從テ此場合ニ於テ單位ノ不明ナルモノハ特ニ何ヲ單位トセシカヲ指示スルヲ要ス

例ヘバ例二ニ於テ x ヲ單ニ甲ノ所得金トセズシテ圓數ナルコトヲ明了ニ記シタルガ如シ

(注意第三) 學生ハ得タル結果ヲ問題ニ就テ檢スル勞ヲ採ルコトヲ忘ルベカラズ

(注意第四) 方程式ヲ立ツルトキ必ラズシモ問題ニ問フ所ノ未知數ヲ x トナスコトヲ要セズ其未知數ト關係アル他ノ未知數ヲ x トナシ其値ヲ方程式ヨリ求メ次ニ問フ所ノモノヲ求ムルヲ便トスルコトアリ

例ヘバ例三ニ於テ三年以前ノ子ノ年齡ヲ x トスレバ其年ニハ父ハ $8x$ ニシテ現今ハ夫レ々々 $x+3$, $8x+3$ ナリ次ニ $8x+3=5(x+3)$ ヲ立テ之ヨリ $x=4$ ヲ得ベク從テ現今ノ子ノ年齡7ヲ得

例 題

1. 某數アリ其五倍ト30トノ和ハ其四倍ヨリ36多シト云フ某數如何

2. 某數アリ其十六倍ヨリ11ヲ減ジタルモノハ其七倍ヨリ7多シト云フ某數如何

3. 或人ニ年齡ヲ問ヒシニ今ヨリ14年前ノ年齡ハ現今ノ年齡ノ三分ノ一ナルト答ヘタリ現今其人ノ年齡如何

4. 某數ノ四倍ヨリ35ヲ減ジタル餘數ハ35ヨリ其數ヲ減ジタル餘數ニ等シト云フ某數如何

5. 或人若干圓ヲ有セリ其中7圓ヲ費シタル後殘ノ4倍ニ當ルモノト63圓トヲ得タルヲ以テ元ノ金高ノ九倍トナリシト云フ元ノ金高如何

6. 甲乙二人ノ所有金ヲ比スルニ甲ハ乙ヨリ25圓多ク又甲ハ乙ノ三倍ナリト云フ各所有金如何

7. 二數ノ差7ニシテ其和ハ33ナルトキ各數如何

8. 東西兩市ノ距離33里アリ今甲乙二人ガ兩市ヨリ同時ニ相向テ出發シ甲ハ乙ヨリ7里多ク歩ミテ相會セリト云フ各歩行里數如何

9. 56ヲ二ツニ分チ其一部ヲ他ノ部ノ三倍ニ等シカラシメントス其各部如何

10. 100ヲ二分シ其一部ノ三倍ト他ノ部ノ四倍トノ和ヲシテ320ナラシメントス各部分如何
11. 100ヲ二分シ其一部ノ三倍ト他ノ部ノ四倍トヲ等シカラシメントス各部分如何
12. 酒アリ其三分ノ一ヲ出シ次ニ9升ヲ出シ、ニ元ノ量ノ半ヲ殘セリト云フ元ノ量如何
13. 75ヲ二部分ニ分チシニ大ナルモノ、三倍ハ小ナルモノ、七倍ヨリ15多シト云フ各如何
14. 二數ノ和ハ36ニシテ其差ハ大數ノ半ニ等シキトキ二數各如何
15. 父子アリ父ハ30歳ニシテ子ハ2歳ナリ今ヨリ幾年ノ後父ノ歳ハ子ノ歳ノ八倍トナルカ
16. 甲乙二人アリ甲ハ金100圓ヲ有シ乙ハ金20圓ヲ有ス甲ヨリ乙ニ金何圓ヲ與フルトキ乙ノ所有金ハ甲ノ半トナルカ
17. 甲乙二ツノ要塞アリ甲塞ニハ96人、乙塞ニハ30人ノ將校アリ今甲塞ヨリ乙塞ニ何人移ルトキハ乙塞ノ將校ノ數ガ甲ノ四分ノ三トナルカ
18. 或人80發ノ射的ヲナセシニ其中若干ノ命中アリ然レドモ若シ命中セシ數ガ現ニ命中セシ

- モノ、二倍トナリシナラバ其數ハ其時ノ不命中ノ數ノ三倍トナルベシト云フ命中數ヲ問フ
19. 甲乙丙ノ三人ニ金若干圓ヲ分チシニ甲ハ其金ノ半ヲ取リ乙ハ其金ノ三分ノ一ヲ取リ丙ハ50圓ヲ取レリト云フ甲乙ノ所得金各如何
20. 池ノ中ニ竿アリ其全長ノ九分ノ一ハ泥中ニアリ又殘リノ四分ノ三ハ水中ニアリテ水上ニアル長サハ2尺ナリトセバ此竿ノ長サ如何
21. 或人276里ノ道ヲ行キシニ汽車ニ乗リシ里數ハ歩行ノ里數ノ二倍ヨリ12里多ク舟行ノ里數ハ汽車ニ乗リシ里數ノ三倍ヨリ12里多シト云フ各里數如何
22. 金4189圓ヲ男子7人、女子5人、小兒7人ニ分配セントスルニ女子一人ノ所得ハ男子一人ノ半ニシテ小兒一人ノ所得ハ女子一人ノ三分ノ二ナラシメントス各一人ノ所得如何
23. 小兒若干人ニ蜜柑ヲ與フルニ各五ツ宛與フレバ42餘リ、八ツ宛與フレバ15不足スト云フ蜜柑ノ數及小兒ノ數如何
24. 一升70錢ノ酒ト一升50錢ノ酒トヲ混ジテ

平均一升55錢ノモノ一石ヲ作ラントス各酒幾何
ヲ混スベキヤ

25. 一日ニ10里ヅ、行ク人ガ立出セシ後6日
ヲ經テ一日ニ12里ヅ、行ク人之ヲ追フトキハ此
人ノ出發後何日ノ後ニ追ヒ付クベキカ

26. 或人職工ヲ雇フニ其働キタル日ニハ50錢ヲ
給シ休ミタル日ニハ日給ヲ與ヘザルノミナラズ
食料30錢ヲ納メシムル約ヲナシテ24日ノ後ニ8
圓80錢ヲ拂ヒタリト云フ職工ノ休ミシ日數如何

27. 父子アリ其年齡ヲ比較スルニ父ノ年ハ子
ノ年ノ三倍ニシテ今ヨリ10年後父ノ年ハ子ノ年
ノ二倍トナルベシト云フ各年齡ヲ問フ

28. 或人六人ノ子ヲ有テリ其年齡次第ニ4年
ノ差アリテ第一子ノ年齡ハ第六子ノ年齡ノ三倍
ニ等シト云フ各年齡如何

29. 或人死ニ臨ミ其財産ヲ妻ト男ト女トニ分
チシニ妻ハ財産ノ三分ノ一、男ハ二分ノ一、女ハ其
餘金2000圓ヲ得タリト云フ財産ノ高如何

30. 或人五十錢、二十錢、五錢ナル三種ノ貨幣合
セテ36個ヲ有セリ其價ハ13圓80錢ニシテ五十錢

貨幣ノ數ハ二十錢貨幣ノ三倍ナリト云フ各枚數
如何

31. 魚アリ其頭ハ4寸ニシテ其尾ハ背ノ長サノ
半ト頭ノ長サトノ和ニ等シク、背ハ頭ト尾トノ長
サノ和ニ等シト云フ尾及背ノ長サヲ求ム

32. 絹一「ヤード」ノ價ハ金巾一「ヤード」ノ價ニ6倍
スルモノアリ今絹7「ヤード」ト金巾6「ヤード」ノ價
ノ和ハ10圓ナリト云フ各一「ヤード」ノ價ヲ問フ

33. 38ト10トノ間ニアル數アリ其レト10トノ
差ハ其レト38トノ差ニ3倍スト云フ其數如何

34. 或汽車ガ5時間ニテ走ルベキ距離ヲ1時間
ニ10哩早ク走リタルタメニ其道程ヲ4時間ニテ
走リタリト云フ其距離ヲ問フ

35. 或日或室内ノ溫度ハ攝氏ノ度盛ニテ讀ムト
華氏ノ度盛ニテ讀ムトハ53.6度ノ差アリシト云
フ然ラバ其度ハ攝氏ノ幾度ナリシカ

第 三 章 聯 立 方 程 式

二 元 方 程 式

34. 今甲乙二人ニ梨100個ヲ分配スルトセンニ
甲乙ノ所得ノ個數ヲ x, y トセバ

$$x+y=100$$

ナラザルベカラズ然レドモ此條件ダケニテハ甲
乙ノ所得ハ全ク不定ニシテ

$$x=20 \text{ ナラバ } y=80$$

$$x=30 \text{ ナラバ } y=70$$

ノ如ク無數ノ解答アルベシ

然レドモ上ノ條件ノ他ニ甲乙ノ差ヲシテ6個ナ
ラシメヨト云フ條件ヲ加フルトキ即

$$x-y=6$$

ニモ適スルノ要アルトキハ甲乙ノ所得ノ個數ハ
全ク定マリテ

$$x=53, \quad y=47$$

ナルベシ

之ヲ約言スルトキハ $x+y=100, x-y=6$ ナルニツ
ノ方程式ニ適スル x, y ノ値ハ各一個アルモ單ニ
一個ノ方程式ニ適スルモノハ無數アルガ故ニ不
定ナリ

此ノ如キ x, yナル多クノ未知數
ヲ有スル若干ノ方程式ニ x ノ同ジ値,
 y ノ同ジ値.....ガ適合スベキモノナ
ルトキ其等ノ方程式ヲ聯立方程式
ト云フ

消 去 法

35. 今消去法ト稱スル方法ヲ用キ
テ二元方程式ヲ解クコトヲ述ベン

$$\begin{array}{l} \text{(例一)} \quad 5x - 3y = 9 \quad (1) \\ \quad \quad \quad 7x + 11y = 43 \quad (2) \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}} \right\} \text{ノ } x, y \text{ヲ求メヨ}$$

y ヲ消去センガタメニ其係數ヲ同一ナラシム
ルノ要アリ依テ(1)ニ11ヲ乘ジ(2)ニ3ヲ乘ジ之
ヲ邊々相加フ(若シ同記號ナラバ減法ヲナス)レ

バ y ノ項ハ記號異ナルヲ以テ消滅シタル方程式 (2)' ヲ得

$$\begin{array}{r} 55x - 33y = 99 \\ 21x + 33y = 129 \\ \hline 76x = 228 \dots\dots (2)' \end{array}$$

此 (2)' ヨリ $x=3$

之ヲ (1) ノ x = 代入スレバ

$$5 \times 3 - 3y = 9 \quad \text{即 } y = 2$$

(注意) 上ノ方法ニ於テハ (1), (2) ノ根ヲ (1), (2)' ヨリ求メタルニ相當ス蓋シ (1), (2) ヨリ (2)' ヲ導キタルノミナラズ (2)', (1) ヨリ再ビ (2) ヲ得ベキヲ以テ (1), (2) ノ根ハ (2)' ノ根トナルノミナラズ (2)', (1) ノ根ハ (2) ノ根トナル故 (1), (2) ノ代リ = (2)', (1) ヲ用キタルナリ

(1) ノ $x = 3$ ヲ代入スル代リ = (2) ノ x = 代入スルモ亦 $y = 2$ ヲ得ベシ即二ツノ方程式ノ減法ヨリ得タル $76x = 228$ ヲ (1) ノ代リ = 之ヲ用キ之レト (2) トヨリ x, y ノ値ヲ求ムルコトヲ得

$x = 3, y = 2$ ヲ (1), (2) = 檢セバ何レモ適合スルコトヲ見ルベシ

$$\left. \begin{array}{l} \text{(例二)} \quad 13x - 7y = 8x - 4y + 9 \\ \quad \quad \frac{1}{3}(7x - 4y + 2) = 15 - 5y \end{array} \right\} \text{ヲ解ケ}$$

先分母ヲ除去シテ未知數ヲ左邊ニ, 已知數ヲ右邊ニ移シ且簡約スレバ夫レ々々

$$5x - 3y = 9$$

$$7x + 11y = 43$$

トナリ即例二ト同ジ故ニ其解ヲ略ス

上ニ云ヘルコトニ因リ次ノ法則ヲ得

(法則) 先方程式ノ分母ヲ除去シ次ニ

未知數ヲ左邊ニ, 已知數ヲ右邊ニ移

シ且ツ簡約シテ $ax + by = c$ ノ形トナシ

其任意ノ未知項ヲ消去スルノ目的

ヲ以テ其係數ヲ同一ナラシムルタ

メニ適當ナル數ヲ二ツノ方程式或

ハ一ツノ方程式ニ乗ジ邊々相加へ

或ハ相減ジ一未知數ヲ有スル方程

式ヲ作り之ト元方程式ノ一ツトニ

テ二ツノ未知數ノ値ヲ求ムベシ

(例三) $8x-21y=5$ (1), $6x+14y=-26$ (2) ヲ解ケ

今 x ヲ消去スル目的ニテ (1) = 6, (2) = 8 ヲ乗ズル代リ = 6 ト 8 トノ比ハ 3 ト 4 トノ比ニ等シキヲ以テ (1) = 3, (2) = 4 ヲ乗ジ邊々相減ジタルモノヲ (2) ノ代リニ用ウレバ

$$\begin{array}{r} 24x - 63y = 15 \\ 24x + 56y = -104 \\ \hline -119y = 119 \end{array} \quad (2)'$$

$$(2)' \text{ ヨリ} \quad y = -1$$

之ヲ (1) ノ y ニ代入スレバ

$$8x - 21 \times (-1) = 5$$

$$\text{故ニ} \quad x = -2$$

此 $x = -2, y = -1$, ヲ (1), (2) ニ就テ檢セバ能ク適合スルコトヲ見ルベシ

$$(例四) \quad \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5 \quad (1),$$

$$\frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10 \quad (2)$$

ヲ解ケ

先此二方程式ノ分母ヲ拂ヒ $ax+by=c$ ノ形ニ化スレバ (1), (2) ハ

$$7x - y = 120 \quad (1)'$$

$$-x + 7y = 120 \quad (2)'$$

(1)' ノ x ニ 7 ヲ乗ジ (2)' ト邊々相加ヘタルモノ即 y ヲ消去シタルモノヲ (2)'' ノ代リニ用ウレバ

$$\begin{array}{r} 49x - 7y = 840 \\ -x + 7y = 120 \\ \hline 48x = 960 \end{array} \quad (2)''$$

$$(2)'' \text{ ヨリ} \quad x = 20$$

之ヲ (1)' ニ代入スレバ

$$7 \times 20 - y = 120$$

$$\text{因テ} \quad y = 20$$

x, y ノ値ヲ (1), (2) ノ上ニ檢セバ全ク適合スルコトヲ見ルベシ

代入法

(初學者ハ第五編ノ聯立方程式ノ前ニ於テ之ヲ學ブモ可ナリ)

36. 今代入法ト稱スルモノヲ用キテ二元方程式ヲ解ク方法ヲ述ベントス

(例一) $5x-3y=9$ (1), $7x+11y=43$ (2) ノ x, y ヲ求メヨ

(1)ノ x ヲ已知數ト見做シ y ノ値ヲ求メンガタ
メニ先 $5x$ ヲ右邊ニ移ストキハ

$$-3y = 9 - 5x$$

即 $3y = -9 + 5x$

故ニ $y = \frac{-9 + 5x}{3}$

即 $y = \frac{5x - 9}{3}$ (1')

之ヲ(2)ノ y ニ代入スレバ

$$7x + 11 \times \frac{5x - 9}{3} = 43 \quad (2)$$

此一元方程式ヲ解クトキハ

$$21x + 55x - 99 = 129$$

$$76x = 228$$

$$x = 3$$

之ヲ(1)'ノ x ニ代入スレバ

$$y = \frac{5 \times 3 - 9}{3} = 2$$

此法ヲ案ズルニ(1), (2)ニ適合スベキ x, y ノ値ヲ

(1)ト同値ナル(1)'ト(2)ヨリ求メタルニ外ナラズ

即次ノ法則ニ歸ス

(法則) 一方程式中ノ一未知數ヲ已知

數ノ如ク取扱ヒ他ノ未知數ヲ表ハ
シ之ヲ他ノ方程式中ノ此未知數ニ
代入シ殘ル未知數ノ値ヲ求ムベシ

$$\begin{cases} (例二) & 8x - 21y = 5 & (1) \\ & 6x + 14y = -26 & (2) \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ヲ解クベシ}$$

x ヲ已知數ノ如ク取扱ヒ y ノ値ヲ求ムルタメ
ニ(1)ノ $8x$ ヲ右邊ニ移ストキハ

$$-21y = 5 - 8x$$

即 $21y = -5 + 8x$

故ニ $y = \frac{8x - 5}{21}$ (1')

之ヲ(2)ノ y ニ代入スレバ $14, 21$ ハ約セラレテ

$$6x + 2 \times \frac{8x - 5}{3} = -26$$

分母ヲ除去スレバ

$$18x + 16x - 10 = -78$$

即 $34x = -68$

故ニ $x = -2$

x ノ此價ヲ(1)'ニ代入スレバ

$$y = \frac{8 \times (-2) - 5}{21} = \frac{-16 - 5}{21} = -1$$

上ノ如クシテ得タル x, y ノ價ヲ (1) 及 (2) ノ上ニ
檢スレバ能ク適合スルヲ見ルベシ

例 題

次ノ聯立方程式ヲ解クベシ(代入法ヲモ學ビタル
モノハナルベク消去法ト代入法ヲ交互ニ用ウベ
シ)

1. $3x+4y=58, 7x+9y=133$
2. $7x-5y=24, 4x-3y=11$
3. $3x+2y=32, 20x-3y=1$
4. $11x-7y=37, 8x+9y=41$
5. $7x+5y=60, 13x-11y=10$
6. $6x-7y=24, 7x-6y=75$
7. $10x+9y=290, 12x-11y=130$
8. $3x-4y=18, 3x-2y=0$
9. $4x-\frac{y}{2}=11, 2x-3y=0$
10. $\frac{x}{3}+3y=7, \frac{4x-2}{5}=3y-4$
11. $7x-11y-3=0, 5y-6x+7=0$
12. $7x-3y=13, 4y=5x$

13. $6x-5y+2=0, 5x=5y$
14. $5x+3y=29=2x+7y$
15. $7x+5y=5x-7y+72=8x+2y+9$
16. $(x+2)(y-1)=xy, (x-4)(y+3)=xy$
17. $3(x+2y)+5(x+y)=40, 4(x+2y)-3(x+y)=9$
18. $2x+\frac{y-2}{5}=21, 4y+\frac{x-4}{6}=29$
19. $\frac{3x}{19}+5y=13, 2x-\frac{7y-4}{2}=33$
20. $\frac{x}{7}+\frac{y}{14}=10\frac{1}{2}, 2x-y=7$
21. $\frac{7x}{6}+\frac{5y}{3}=34, \frac{7x}{8}+\frac{3y}{4}=\frac{5y}{8}+12$
22. $\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{2}=9, \frac{x}{2}+\frac{x+y}{9}=5$
23. $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5, \frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$
24. $\frac{x-1}{8}+\frac{y-2}{5}=2, 2x+\frac{2y-5}{3}=21$
25. $0.3x+0.125y=x-6, 3x-0.5y=28-0.25y$
26. $0.4x-0.7y=0.6, \frac{x}{25}-0.06y=0.08$

$x=2$
 $y=1$

三元方程式

37. 今三ツノ未知數ヲ有スル三ツノ方程式ニ適合スル未知數ノ値ヲ求ムル方法ヲ説カントス(凡テ聯立方程式ニ於テハ未知數ノ數ト方程式ノ數トハ相等シキヲ要ス)

38. 今先消去法ヲ用キテ三元方程式ヲ解カントス

$$\begin{cases} \text{(例一)} & 7x+3y-2z=16 & (1) \\ & 2x+5y+3z=39 & (2) \\ & 5x-y+5z=31 & (3) \end{cases} \text{ヲ解クベシ}$$

今此三方程式ヨリ例ヘバ z ヲ消去シテ二元方程式二個ヲ作ルノ目的ヲ以テ(1)ト(2)トニテ z ヲ消去シ(2)ト(3)トニテ同ジ未知數 z ヲ消去セバ x, y ノ二元方程式二個ヲ作ルコトヲ得

(1) = 3ヲ乗ジ(2) = 2ヲ乗ジ邊々相加フレバ

$$\begin{array}{r} 21x+9y-6z=48 \\ 4x+10y+6z=78 \\ \hline 25x+19y=126 \end{array} \quad (2)'$$

次=(2)=5ヲ乗ジ(3)=3ヲ乗ジ邊々相減ズレバ

$$\begin{array}{r} 10x+25y+15z=195 \\ 15x-3y+15z=93 \\ \hline -5x+28y=102 \dots\dots\dots (3)' \end{array}$$

今得タル二ツノ方程式即(2)', (3)'ヲ以テ所題ノ三ツノ方程式ノ二ツ例ヘバ(2), (3) = 代用シ即(1)', (2)', (3)' = 適合スル x, y, z ノ値ヲ求ムルニ歸ス

$$7x+3y-2z=16 \quad (1),$$

$$25x+19y=126 \quad (2)'$$

$$-5x+28y=102 \quad (3)'$$

此(2)', (3)'ナル二元方程式ニ就テ消去法ヲ用キ(3)' = 5ヲ乗ジタルモノト(2)'トヲ邊々相加フレバ

$$\begin{array}{r} 25x+19y=126 \\ -25x+140y=510 \\ \hline 159y=636 \end{array}$$

故ニ $y=4$

(2)', (3)'ノ中ノ一ナル(2)'ノ y ニ此値ヲ代入スレバ

$$\begin{array}{r} 25x+19 \times 4=126 \\ 25x=50 \end{array}$$

$$\text{故} = \quad x=2$$

$x=2, y=4$ を (1) に代入スレバ

$$7 \times 2 + 3 \times 4 - 2z = 16$$

$$-2z = 16 - 14 - 12$$

$$\text{故} = \quad z=5$$

蓋シ上ノ如クシタル (1), (2)', (3)' ノ未知數ノ値ハ (1), (2), (3) ノ未知數ノ値ト全ク相等シ何トナレバ後ヨリ前者ヲ導キタルノミナラズ前者ヨリ後者ニ還ルコトヲ得レバナリ

現ニ之ヲ (1), (2), (3) ニ就テ檢セバ其能ク適合スルコトヲ見ルベシ

因リテ次ノ三元方程式解法ノ法則ヲ得

(法則) 先三ツノ方程式ヲ $ax+by+cz=d$

ノ形ニ取纏メタル後二ツノ二元方

程式ヲ得ルノ目的ヲ以テ二式ツ、

組ミ合セ二元方程式ノ消去法ニ準

ジ一未知數ヲ消去シ斯クシテ得タ

ル二ツノ二元方程式ヨリ二ツノ未

知數ノ値ヲ求メ此等ノ二ツノ未知

數ノ値ヲ元ノ一方程式ニ代入シ殘

リノ一未知數ノ値ヲ求ムベシ

$$\begin{aligned} \text{(例二)} \quad & 5x-7y=2 \quad (1) \\ & 4y-3z=1 \quad (2) \\ & 2x-z=7 \quad (3) \end{aligned} \quad \text{ヲ解クベシ}$$

(1) ニハ z ヲ有セザルヲ以テ (2), (3) ヨリ z ヲ消去シテ (1) ト共ニ x, y ヲ含ム二ツノ二元方程式ヲ作ランガタメニ (3) ニ 3 ヲ乘ジタルモノト (2) ト邊々相減ズレバ

$$4y-3z=1$$

$$6x-3z=21$$

$$4y-6x=-20 \quad \dots\dots\dots (3)'$$

$$\text{故} = \quad 2y-3x=-10 \quad \dots\dots\dots (3)''$$

(1), (3)'' ヨリ x, y ヲ求ムル爲メ (1) ニ 2 ヲ乘ジ (3)'' ニ 7 ヲ乘ジ邊々相加フレバ

$$10x-14y=4$$

$$-21x+14y=-70$$

$$-11x \quad = -66$$

$$\text{故} = \quad x=6$$

x ノ此値ヲ(1)ニ代入スレバ

$$5 \times 6 - 7y = 2$$

故ニ $y = 4$

y ノ値ヲ(2)ニ代入スレバ

$$4 \times 4 - 3z = 1$$

故ニ $z = 5$

蓋シ此方法ハ(1)ト(3)ト(2)トヨリ x, y, z ヲ求メタルコトトナリ即(3)ノ代リニ(3)ヲ用キタルニ他ナラズ

今 $x=6, y=4, z=5$ ヲ(1), (2), (3)ニ於テ檢セバ其能ク適合スルコトヲ視ルベシ

(注意) 代用法ニテ三元方程式ヲ解クコトヲ得ベシ然レドモ此處ニ之ヲ略ス

例題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

1. $x+3y+2z=11, 2x+y+3z=14, 3x+2y+z=11$
2. $5x-6y+4z=15, 7x+4y-3z=19, 2x+y+6z=46$
3. $4x-5y+z=6, 7x-11y+2z=9, x+y+3z=12$
4. $3x-y+z=17, 5x+3y-2z=10, 7x+4y-5z=3$

$$5. \quad x+y+z=5, \quad 3x-5y+7z=75, \quad 9x-11z+10=0$$

$$6. \quad x+2y+3z=6, \quad 2x+4y+2z=8, \quad 3x+2y+8z=101$$

$$7. \quad 7x-3y=30, \quad 9y-5z=34, \quad x+y+z=33$$

$$8. \quad x+y+z=2, \quad 4x-3y=18, \quad 4y-z=-9$$

$$9. \quad 2x+y=6, \quad 3y+z=-1, \quad 4z+x=24$$

$$10. \quad 2x+3y=4, \quad 5y-4z=22, \quad 3z+4x=29$$

$$11. \quad \frac{x+2y}{7} = \frac{3y+4z}{8} = \frac{5x+6z}{9}, \quad x+y-z=126$$

第四章

聯立方程式ノ應用

39. 今例ヲ以テ前章ノ應用ヲ示サントス

(例) 若干ノ金額ヲ若干人ニ等分スルニ若現在ノ人員ヨリ6人ヲ増セバ各人ノ所得ハ2圓ヲ減ズベク若3人ヲ減ゼバ各人ノ所得ハ2圓ヲ増スベシト云フ現在ノ人員及各人ノ所得ヲ問フ

x ヲ以テ現在ノ人員トナシ y ヲ以テ各人所得ノ圓數トナストキハ其全金額ノ圓數ハ xy ナル積ニ等シク、人數 $x+6$ トナルトキハ一人ノ所得ノ圓數ハ $y-2$ トナルヲ以テ又全額ノ圓數ハ $(x+6)(y-2)$ ナル積ニ等シク、又同理ニテ全額ノ圓數ハ $(x-3)(y+2)$ ニ等シ故ニ

$$(x+6)(y-2)=xy \quad (1)$$

$$(x-3)(y+2)=xy \quad (2)$$

ニ適スル x, y ヲ求ムルコトニ歸ス

今之ヲ解カンニ(1)ハ

$$xy+6y-2x-12=xy \text{ 即 } 6y-2x=12 \dots\dots(1)'$$

次ニ(2)ハ

$$xy-3y+2x-6=xy \text{ 即 } -3y+2x=6 \dots\dots(2)'$$

トナルベシ今(1)', (2)'ヨリ x, y ノ値ヲ求ムレバ

$$x=12, \quad y=6$$

即人員12人、各人ノ所得6圓ナリ

此結果ヲ問題ノ上ニ檢セバ全額ハ $6^{\text{圓}} \times 12$ 即72圓ニシテ6人ヲ増シ18人トナストキハ各人ノ所得ハ6圓ヨリ2圓ヲ減ジタル4圓トナリ、3人ヲ減ジ9人トナストキ各人ノ所得ハ6圓ニ2圓ヲ増シタル8圓トナルベシ即能ク題意ニ適合スルコトヲ知ル

例題

1. 甲乙二人各若干圓ヲ有セリ若甲ノ所有金ニ24圓ヲ加フレバ乙ノ所有金ノ四倍ニ當リ又乙ノ所有金ヨリ5圓ヲ減ズレバ甲ノ所有金ノ半ニ當ルト云フ各所有金ヲ求ム

2. 大小二數アリ大數ト小數ノ半トノ和ハ24

ニシテ小數ト大數ノ三分ノ一トノ和ハ18ナリト云フ二數ヲ求ム

3. 人アリ茶5斤及砂糖3斤ヲ買フトキ總價5圓4錢ニシテ若シ茶3斤及砂糖4斤ヲ買フトキハ總價3圓42錢ナリト云フ各一斤ノ價ヲ求ム

4. 甲乙二人ノ年齢ヲ比較スルニ現今ヨリ7年以前甲ハ乙ニ三倍シ7年以後ニハ甲ハ乙ニ二倍スベシト云フ各現今ノ年齢ヲ問フ

5. 或人金2圓93錢ヲ以テ10錢ニ付4個ノ林檎及10錢ニ付5個ノ梨各若干ヲ買ヒ又2圓40錢ヲ以テ10錢ニ付5個ノ林檎ヲ前ト同ジ個數ダケト10錢ニ付6個ノ梨ヲ前ト同ジ個數ダケトヲ求メタリト云フ各個數ヲ求ム

6. 甲乙二人アリ其所有金ノ和150圓ナリシニ甲ハ所有金ノ半ヲ費シ乙ハ三分ノ二ヲ費セシニ因リ二人ノ所有金ノ和ハ60圓トナレリト云フ最初ノ所有金高各如何

7. 甲乙二種ノ酒アリ甲酒ハ一升ニ付60錢、乙酒ハ75錢ナリ今之ヲ混合シテ70錢ノ酒3斗2升ヲ作ラントス各何程ヲ混ズベキカ

8. 金若干圓ヲ甲乙ノ二口ニ分チ甲ヲ年利5歩、乙ヲ年利4.5歩ニテ貸シ一年間ニ利息568圓80錢ヲ得タリ若甲乙ノ利率ヲ取換ヘナバ利息ハ6圓増スベシト云フ各部ノ金高如何

9. 慈善家アリ金若干圓ヲ貧民ニ惠與スルニ每人5圓ヅ、トスレバ10圓不足シ4圓ヅ、トスレバ5圓ノ殘金アリト云フ人數及金高ヲ求ム

10. 矩形ノ地アリ若此幅ヲ2間長クシ長サヲ3間長クスレバ坪數ハ64坪増加シ若又幅ヲ3間長クシ長サヲ2間長クスレバ68坪ヲ増加スト云フ長サ及幅ヲ問フ

11. 甲乙二國ノ戰爭ニ於テ甲國ガ乙國ヨリ得タル精米ノ石數ハ捕虜ノ數ノ五倍ヨリ100多シ今此米ヲ以テ此捕虜ヲ養ヒ一年後歸國セシムルモ一日5合ヲ食スルトシテ尙1687.5石ヲ餘スベシト云フ捕虜及精米ノ石高ヲ問フ

12. 甲乙二人ニテ5秒時間ノ競走ヲナスニ乙ハ甲ヨリ前方20尺ノ所ヨリ始メ乙ノ2尺走ル間ニ甲ハ3尺ヲ行ク割合ニテ乙ハ遂ニ30尺負ケタリ競走セシ場所ノ長サ及各一秒時間ノ速度如何

Handwritten mathematical notes and calculations, including equations like $x + y = 150$, $x - \frac{1}{2}x = 75$, and $x = 100$.

13. 金若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分配スルニ甲ノ所得ハ乙丙所得ノ和ノ八分ノ三ヨリ8圓多ク乙ノ所得ハ甲丙所得ノ和ノ七分ノ三ヨリ4圓多ク丙ノ所得ハ甲乙所得ノ和ノ三分ノ二ニ當ルト云フ各所得如何

雑題

次ノ1ヨリ10マデノ方程式ヲ解ケ

1. $2.25x - 0.125 = 3x + 375$
- △ 2. $12\{3x - 0.25(x-4) - 0.3(5x+14)\} = 47$
3. $\frac{x+0.75}{0.125} - \frac{x-0.25}{0.25} = 15$
4. $1.5 = \frac{0.36x}{0.2} - \frac{0.09x-0.18}{0.9}$
5. $(x+1)(x+2)(x+6) = x^3 + 9x^2 + 4(7x-1)$
6. $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = y + \frac{z}{2} = x + y + z + 2 = 0$
7. $\frac{x}{2} + y = 1, \frac{y}{3} - z = 3, z + 2y + 3x + 8 = 0$
8. $y + z - x = a, z + x - y = b, x + y - z = c$
9. $x + y + z = a + b + c, x + a = y + b = z + c$
10. $\frac{y-z}{3} = \frac{y-x}{2} = 5z - 4x, y + z = 2x + 1$
11. 今 18000 圓ヲ甲乙丙三人ニ分ツニ乙ノ取リ

分ハ甲ノ取リ分ノ三倍ヨリ 600 圓少ナク丙ノ取リ分ハ乙ノ取リ分ノ四倍ヨリ 600 圓多シト云フ三人ノ取リ分各如何

12. 或人番頭ヲ雇ヒ年給 35 圓ト洋服一着トヲ與フルコトヲ約セリ然ルニ 7 ヶ月ニテ解約シ金 15 圓ト前約束ノ洋服トヲ與ヘタリ此洋服ノ價如何

13. 鶴龜アリ頭數 60 ニシテ足數 168 ナリト云フ各ノ頭數ヲ求ム

14. 或人ニ年齢ヲ問ヒシニ其答ニ我ニ一子アリテ 2 年前我年ハ子ノ年ニ 4 倍シ今ヨリ 3 年後ハ我年ハ子ノ年ニ三倍スト云ヘリ此人ノ年齢如何

15. 甲乙丙三種ノ砂糖アリ甲種 9 斤ト乙種 5 斤ト丙種 1 斤トヲ買ヒ 6 圓 53 錢ヲ拂ヘリ而シテ毎斤甲種ハ乙種ヨリ 5 錢高ク乙種ハ丙種ヨリ 7 錢高シト云フ各一斤ノ價ヲ求ム

16. 或人鶏卵若干個ヲ 15 個ニ付 42 錢ノ割合ニテ買ヒ之ヲ 12 個ニ付 45 錢ノ割合ニ賣リシニ 1 圓 14 錢ノ利ヲ得タリト云フ鶏卵ノ數幾個ナルカ

補習雜題 I.

1. $x=-1, y=0, z=1$ トシ $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$ ノ値ヲ見出セヨ

2. $a^3+b^3+c^3-3abc-a(a^2-bc)-b(b^2-ca)-c(c^2-ab)=0$ ナルコトヲ證明セヨ

3. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xy+y^2, \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+y^2$ ノ積ヲ求ム

4. $2-12x^5+10x^6$ ヲ $1-2x+x^2$ ニテ除スベシ

5. $2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ ナルコトヲ證明セヨ

6. $(x+y)^2-(x+y)(x-y)-\{x(2y-x)-y(3x-y)\}$ ヲ簡單ニセヨ

7. ニツノ代數式ノ積ガ $x^5+x^5y+x^4y^2-x^3y^3+y^6$ ニシテ其一ガ x^2+xy+y^2 ナルトキハ他ノ一ハ何ナルカ

8. $(a+b+c)^2$ ニ何ヲ加フレバ $(a-b-c)^2$ トナルカ

9. $(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)$ ナル連乗積ヲ見出セ

10. x^3+z^3 ヲ $x+z$ ニテ除シタル結果ヲ案ジ直ニ $(x+y)^3+z^3$ ヲ $x+y+z$ ニテ除シタル商ヲ書キ下スベシ

11. 次ノ等式ヲ證明セヨ

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \\ =2(x-y)(x-z)+2(y-z)(y-x)+2(z-x)(z-y)$$

次ノ方程式ヲ解ケ

12. $2(1.7x-1)+5.9=3x+5.22$

13. $\frac{2x-y}{3}=\frac{3y+2z}{4}=\frac{x-y-z}{5}=4$

14. 甲乙丙ノ所持金ヲ比スルニ甲ト乙トハ 3 ト 2 トノ比ニ等シク、乙ヨリ丙ニ 18 圓ヲ與フレバ乙ト丙トハ 3 ト 2 トノ比ニ等シカルベク其和ハ 920 圓ナリト云フ各所持金如何

補習雜題 II.

1. $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ ナルコトヲ證明シ $a=1, b=-2$ ナルトキノ結果ヲ檢セヨ

2. $x^2-(a-b)x-ab$ ト $x^2+(a+b)x+ab$ ノ積ニ於ケル x^2 ノ係數ヲ見出セ

3. 若シ x^2+7x+c ヲ $x+4$ ニテ除スルコトヲ得バ c ノ値ハ何ナルカ

4. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ ナルコトヲ證明セヨ

$$5. (b-c)^2 + (a-b)(a-c) = (c-a)^2 + (b-c)(b-a)$$

$= (a-b)^2 + (c-a)(c-b)$ ナルコトヲ證明セヨ

$$6. 2a^2 - \frac{55ab}{12} + \frac{29ac}{9} + \frac{21b^2}{8} - \frac{15bc}{4} + \frac{c^2}{3} \quad \text{ヲ} \quad \frac{2a}{3} - \frac{3b}{4}$$

$+c$ ニテ除スベシ

$$7. 6x^4 + x^2y + 2x^2 - 12y^2 + 37y - 28 \quad \text{ヲ} \quad 2x^2 + 3y - 4 \quad \text{ニテ}$$

除シ $x=2, y=-1$ ヲ代入シテ之ヲ檢セヨ

次ノ方程式ヲ解ケ

$$8. 7(x-97) = \frac{x-97}{3} - x + 97$$

$$9. 2x = \frac{y-3}{5} + \frac{5x-2}{2}, \quad 2y = \frac{x-5}{3} + \frac{7y-7}{2}$$

10. 三種ノ金塊合シテ900匁アリ其品位甲ハ0.9, 乙ハ0.8, 丙ハ0.72ナリ若シ甲乙兩種ヲ熔和セバ品位0.84トナリ, 甲丙兩種ヲ熔和セバ品位0.78トナルト云フ三種ノ金塊ノ目方各如何

補習雜題 III.

1. $a=1\frac{1}{4}, b=-\frac{3}{4}, c=-\frac{1}{2}, d=0$ ナルトキ $(a+b) \times (b+c)(c+d)(d+a)$ ノ數値如何

2. $(a-b)x - (b-c)y$ ヲ $(a+b)x + (b+c)y$ ヨリ減ゼヨ

3. $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3 = x^3 + 6xy + 9y^2$ ヲ乘ゼヨ

$$4. (ax+by+cz)^2 + bc(y-z)^2 + ca(z-x)^2 + ab(y-y)^2 \\ = (a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2) \quad \text{ヲ證明セヨ}$$

$$5. \frac{2x+7}{7} - \frac{9x-8}{11} = \frac{x-11}{2} \quad \text{ヲ解ケ}$$

$$6. \frac{2(x+y)}{9} = \frac{x+5}{3}, \quad \frac{y+20}{4} = \frac{12x-5y}{20} \quad \text{ヲ解ケ}$$

$$7. 2x-3y=7, 4y+z=10, 3z-x=-7 \quad \text{ヲ解ケ}$$

8. $5x-y=8, 5y-x=20$ ナルトキ $x+y, x-y$ ノ値ヲ求メヨ

9. 茶5斤, 珈琲8斤ノ總價1「ポンド」2「シルリング」ナリ今茶ノ價ガ一斤ニ付2「ペンス」下落シ珈琲ノ價ガ一斤ニ付2「ペンス」騰貴スルトキハ茶8斤, 珈琲5斤ノ總價ハ1「ポンド」3「シルリング」トナルベシト云フ茶, 珈琲ノ初ノ一斤ノ價如何

10. 牧夫アリ若干日間羊若干頭ヲ畜ヒ得ベキ牧草ヲ有セリ若シ75頭賣ルトキハ20日多ク畜ヒ得ベク若シ100頭買ヒ入ル、トキハ15日少ナク畜ヒ得ベシト云フ元ノ羊ノ頭數及之ヲ畜ヒ得ル日數如何

第三編

倍數、約數

第一章

因數分解法

40. 算術ニ於テ既ニ數ヲ素數ノ積トシテ表ハ
ス法ヲ説ケリ例ヘバ

$$60=2 \times 2 \times 3 \times 5 \quad \text{或ハ} \quad 2^2 \times 3 \times 5$$

今之ニ準ジ一代數式ヲ與ヘテ之ヲ因
數ノ積トシテ表ハス方法ヲ説明セン
トス而シテ此等ノ各因數ハ最早分解
シ能ハザルモノナルヲ要ス(數ノ因數
分解ハ之ヲ度外ニ措クヲ例トス)

乘法ノ公式第一

41. 算術ニ於テ或數ヲ因數ノ積ニ分解スルニ
ハ乘法ノ結果ニ就テ其因數トノ關係ヲ知ルヲ

要スル如ク代數學ニ於テモ其因數ト積トガ如何
ナル關係ヲ有スルカラ能ク知リ置クヲ要ス

例ヘバ $(a+b+c) = d$ ヲ乘ズレバ

$$(a+b+c)d = ad+bd+cd \quad (1)$$

即多項式ニ單項式ヲ乘ジタル結果ト
多項式ノ各項ニ其單項式ヲ乘ジタル
モノ、和トハ相等シ

例題

1. $(4ab+bc-6ac) \times 6ab$ ヲ求ムベシ
2. $(x^2+8x-10) \times 7a$ ヲ求ムベシ

因數分解法第一

42. 上ノ(1)ナル式ノ左邊ト右邊トヲ
取り換フレバ

$$ad+bd+cd = (a+b+c)d \quad (1')$$

即多項式ノ各項ガ共通ノ因數ヲ有ス

ルトキハ其多項式ハ其共通因數ト各
項ヨリ其因數ヲ取り去リタル項ヨリ
ナレル多項式トノ積トシテ表ハサル
之ヲ通因數ヲ抽キ出スト云フ

(例一) $3ax^2y - 6ax^2y^3$ ヲ因數ニ分解セヨ

此式ノ各項ニ共通ナル因數ハ $3ax^2y$ ナリ然ルニ
第一項ヨリ此因數ヲ抽キ出セバ x ヲ得、第二項
ヨリ此因數ヲ抽キ出セバ $-2y^2$ ヲ得、故ニ

$$3ax^2y - 6ax^2y^3 = 3ax^2y(x - 2y^2)$$

(例二) $3x^2(a^2 - ab) - y^2(a^2 - ab)$ ヲ因數ニ分解セヨ

此式ハ二項ヨリ成リ各項ハ $(a^2 - ab)$ ナル共通因
數ヲ有ス故ニ

$$(a^2 - ab)(3x^2 - y^2)$$

$a^2 - ab$ ハ尙 a ナル共通因數ヲ有スルガ故ニ

$a(a - b)$ トスルコトヲ得因テ原式ハ

$$a(a - b)(3x^2 - y^2)$$

例 題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $x^2 + 2x$
2. $a^3 + 2a^2b$
3. $4ab - 3a^2c$
4. $2ax - \frac{1}{2}x^2$
5. $6ax^4 - 5a^2x^2 + 80ax^3$
6. $8a^4 - 4a^2 + 4a$
7. $8x^2y^2 - 4xy$
8. $100a^8b^7 - 50a^6b^5$
9. $a^2(a - b) + b^2(a - b)$
10. $a(a - c) - b(a - c)$
11. $4a(x + y) - b(x + y)$
12. $(xy - y^2)a^2 + (xy - y^2)b^2$
13. $(xy - y^2)b^2 + (xy - y^2)ab$

14. $a(x-1) - x + 1$

乘法公式第二

43. 乘法ニ於テ重要ナル公式トシテ
次ノ三式ヲ注意セリ

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad (2)$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \quad (3)$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \quad (4)$$

此等ノ公式ハ A, B ガ如何ナル數ナル
モ成立スルヲ以テ此等ノ公式ノ左邊
ノ如キ形ヲナス式ハ此公式ニ據リテ
乘法ヲ施スコトヲ得

(例一) $(x+b)^2$ ヲ計算セヨ

此式ヲ公式(2)ノ $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ノ左邊ニ
比スルニ公式ノ A ガ x トナリ B ガ b トナリタ
ルノ差アルノミ故ニ右邊 $A^2+2AB+B^2$ ノ A ノ
代リニ x トナシ B ノ代リニ b トナスニアリ

$$(x+b)^2=x^2+2xb+b^2$$

(例二) $(x+2)(x-2)$ ナル積ヲ求ムベシ

此式ヲ(4)ノ左邊 $(A+B)(A-B)$ ニ比スルニ A ガ x
ニ、 B ガ 2 ニ變ジタルノ差アリ故ニ右邊 A^2-B^2
ノ A ヲ x ニ、 B ヲ 2 ニ變ズレバヨシ

$$(x+2)(x-2)=x^2-2^2=x^2-4$$

(例三) $\{(x+a)+4\}\{(x+a)-4\}$ ナル積ヲ求ムベシ

此式ニ於テハ(4)ノ左邊 $(A+B)(A-B)$ ノ A ガ $x+a$
ニ、 B ガ 4 ニ變ジタルニ他ナラズ故ニ右邊ノ
 A^2-B^2 ノ A ヲ $x+a$ ニ、 B ヲ 4 ニ變ズレバヨシ

$$\begin{aligned} \{(x+a)+4\}\{(x+a)-4\} &= (x+a)^2-4^2 \\ &= x^2+2ax+a^2-16 \end{aligned}$$

(例四) $(x^2+2x-2)^2$ ヲ計算セヨ

之ヲ $\{(x^2+2x)-2\}^2$ ト見レバ(3)ノ左邊ト同ジ形

$$\begin{aligned} (x^2+2x-2)^2 &= x^4+y^2+z^2+2(x^2+2x)(-2)+2(-2)(-2) \\ &= x^4+2x^2+4x-4x^2-8x+4 \\ &= x^4-6x^2+4x+4 \end{aligned}$$

ヲナシ A ガ (x^2+2x) ニ、 B ガ 2 ニ變ジタルニ他ナ
ラズ故ニ

$$\{(x^2+2x)-2\}^2=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)+4$$

次ニ $(x^2+2x)^2$ ハ(2)ノ左邊ト同ジ形ヲナセリ故ニ
此右邊ノ式ハ

$$(x^4+4x^3+4x^2)-(4x^2+8x)+4$$

$$\text{即 } x^4+4x^3-8x+4$$

例題

公式ヲ用キテ次ノ結果ヲ求メヨ

1. $(2x+b)^2$
2. $(3x+4y)^2$
3. $(4x-3y)^2$
4. $(6c-d)^2$
5. $(15x+14y)^2$
6. $(a^2b-3b^3c)^2$
7. $(pq+\frac{3}{2}r)^2$
8. $(\frac{1}{5}c+\frac{2}{3}d)^2$
9. $(x^2+5x+7)^2$
10. $(x^2+x+1)^2$
11. $(3x^2-4xy+5y^2)^2$
12. $(4x+3y)(1x-3y)$
13. $(\frac{3}{4}a-\frac{1}{3}b)(\frac{3}{4}a+\frac{1}{3}b)$
14. $(x+y+z)(x+y-z)$
15. $(x+y-z)(x-y-z)$
16. $(x-y+z)(x+y-z)$
17. $(ay+bx)^2(ay-bx)^2$

因數分解法第二

44. 前條ノ恒等式ノ左右二邊ヲ置キ換フルトキハ

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 \quad (2)'$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 \quad (3)'$$

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \quad (4)'$$

之ヲ次ノ如ク云ヒ表ハスコトヲ得

(2)' 甲乙二數ノ平方ト二數ノ積ノ二倍トノ和ハ二數ノ和ノ平方ニ等シ

(3)' 甲乙二數ノ平方ノ和ヨリ二數ノ積ノ二倍ヲ減シタルモノハ二數ノ差ノ平方ニ等シ

(4)' 甲乙二數ノ平方ノ差ハ二數ノ和ト差トノ積ニ等シ

又(2)'(3)'(4)'ノ左邊ノ如キ形ヲナサザル式ト雖モ

適當ナル手段ヲ施シテ其レト同ジ形狀ヲナサシムルコトヲ得ルトキハ此公式ヲ用キテ其式ヲ因數ニ分解スルコトヲ得

(例一) $x^2 - 2xy + y^2$ ヲ因數ニ分解セヨ

(3)'ノ左邊ノAガxニ、Bガyニ變ジ本式トナリタルモノト見ルコトヲ得故ニ其右邊モ同様ニ變化スルヲ要ス即

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

(例二) $x^2 + 6x + 9$ ヲ因數ニ分解スベシ

此式ハ何レノ公式ノ左邊ト同ジ形狀ヲ有スルカヲ檢スルニ此式ハ

$$x^2 + 2x \times 3 + 3^2$$

トナシ得ルヲ以テ公式(2)'ノ左邊ノAガxニ、Bガ3ニ變ジタルモノト見ルコトヲ得故ニ

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

(例三) $-4x^2 + 12x - 9$ ヲ因數ニ分解スベシ

$$\begin{aligned} -4x^2 + 12x - 9 &= -\{(2x)^2 - 2(2x) \times 3 + 3^2\} \\ &= -(2x-3)^2 \end{aligned}$$

(例四) $x^2 - 4y^2$ ヲ因數ニ分解スベシ

$$x^2 - 4y^2 = x^2 - (2y)^2 = (x+2y)(x-2y)$$

(例五) $9xy^2 - x^3$ ヲ因數ニ分解セヨ

先共通因數 x ヲ引キ出シ次ニ殘リノ多項式ヲ
因數ニ分解ス

$$\begin{aligned} 9xy^2 - x^3 &= x(9y^2 - x^2) \\ &= x\{(3y)^2 - x^2\} \\ &= x(3y+x)(3y-x) \end{aligned}$$

(例六) $x^4 - y^4$ ヲ分解スベシ

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x^2)^2 - (y^2)^2 \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y) \end{aligned}$$

(注意) 上ノ如ク或式ヲ因數ニ分解スルニハ最
初各項ニ共通因數ナキヤ否ヤヲ檢シ若シ共通
因數アルトキハ其因數ヲ抽キ出シ殘リノ多項
式ヲ(2)' (3)' (4)' ノ公式ニ比較シテ其左邊ト同ジ
形ヲナセルコトヲ見タラバ之ヲ分解スベシ

例題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $x^2 + 2xy + y^2$ 2. $x^2 + 2xz + z^2$
3. $(3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2$ 4. $9a^2 + 12ab + 4b^2$

$$9a^2 + 12ab + 4b^2$$

$$9a^2 + 12ab + 4b^2$$

$$3a + 2b$$

5. $(4x)^2 + 2(4x)(5y) + (5y)^2$ 6. $16x^2 + 40xy + 25y^2$

7. $x^2 + z^2 - 2xz$ 8. $(3x)^2 + (5z)^2 - 2(3x)(5z)$

9. $9x^2 + 25z^2 - 30xz$ 10. $4a^2 - 20ax + 25x^2$

11. $4a^2 - 12ab + 9b^2$ 12. $4x^2 + 4x + 1$

13. $9a^2 - 6a + 1$ 14. $1 - 8x + 16x^2$

15. $x^2 - y^2$ 16. $(4x)^2 - (3b)^2$

17. $(5x^2)^2 - (4b)^2$ 18. $x^2 - 3^2$

19. $x^2 - 9$ 20. $16 - b^2$

21. $25a^2 - b^2$ 22. $x^2 - 9y^2$

23. $36a^2 - 49y^2$ 24. $x^2 + 2x\left(\frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}y\right)^2$

25. $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$ 26. $3a^2 + 6ab + 3b^2$

27. $4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4$ 28. $3a^3 - 6a^2b + 3ab^2$

29. $4xy^2 - 9x^3$ 30. $9a^2x^2 - 49a^2y^2$

31. $8x^3y - 32xy^3$ 32. $4xy^3 - 4x^2y^2 + x^3y$

33. $x^2y^2 + x^3y + \frac{1}{4}xy^3$ 34. $-(a^2 + 2ab + b^2)$

35. $-(9x^2 + 6x + 1)$ 36. $-(16x^2 - 8xy + y^2)$

37. $-(16x^2 + y^2 - 8xy)$ 38. $-a^2 - 2ab - b^2$

39. $-9x^2 - 6x - 1$ 40. $-16x^2 + 8xy - y^2$

41. $-16x^2 - y^2 + 8xy$ 42. $8xy - 16x^2 - y^2$

43. $-8x^2 - 4x^4 - 4$ 44. $(a+b)^2 - c^2$

45. $(a-b)^2 - c^2$ 46. $(x+y)^2 + 2(x+y)a + a^2$
 47. $(a+b)^2 - 4c(a+b) + 4c^2$
 48. $(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)z + z^2$
 49. $a^2 - (a-c)^2$ 50. $(3a+5)^2 - (a-3)^2$
 51. $(4x-y)^2 - (x+5y)^2$ 52. $4(a+b)^2 - 9(a-b)^2$
 53. $(a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$
 54. $a^2 - (2b-a-c)^2$ 55. $x^4 - y^4$ 56. $x^3 - y^3$
 57. $x^3 - 1$ 58. $a^{10} - a^2$
 59. $(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2$ 60. $(3x^2+x-2)^2 - (x^2-x-2)^2$

乘法公式第三

45. 前條ニ示セル三公式ノ外尙重要ナル乘法ノ結果ヲ用ウルコトアリ

今次ノ如ク $(x+a)(x+b)$ 及 $(x+4)(x-3)$ ナル積ヲ求メ得タリトセン

$x+a$	$x+4$
$x+b$	$x-3$
$\hline x^2+ax$	$\hline x^2+4x$
$\hline bx+ab$	$\hline -3x-12$
$\hline x^2+(a+b)x+ab$	$\hline x^2+x-12$

即 $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
 $(x+4)(x-3) = x^2 + x - 12$

即 $(x+a)(x+b)$ ナル形ヲナセル二項式ノ積ハ三項ヨリ成リ其兩端ハ $+x^2, +ab$ ニシテ夫レ々々二式ノ兩端ノ積ニ等シク中項ハ一式ノ首項ト他式ノ末項トノ積 $+ax, +bx$ ノ和ニ等シ

$(x+a)(x+b)$ $(x+4)(x-3)$

(例一) $(x+3)(x+5)$ ヲ求ムベシ

$(x+3)(x+5)$ ヲ案ジ積ノ兩端ハ $x^2, +15$ ニシテ中項ハ $+3x, +5x$ ノ和即 $+8x$ ナルコトヲ知ル故ニ

$$(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15$$

(例二) $(x-4)(x+2)$ ヲ求メヨ

積ノ首尾二項ハ $x^2, -8$ ニシテ中項ハ $-4x, +2x$ ノ和即 $-2x$ ナルベシ故ニ

$$(x-4)(x+2) = x^2 - 2x - 8$$

例題

次ノ乘法ノ結果ヲ問フ

- | | |
|------------------|-------------------|
| 1. $(x+5)(x-3)$ | 2. $(x-7)(x-3)$ |
| 3. $(x-12)(x+9)$ | 4. $(x-20)(x+30)$ |
| 5. $(x-b)(x-a)$ | 6. $(x-7a)(x+8b)$ |

因數分解法第三

46. 前條ノ事實ニ因リテ三項式ヲ因數ニ分解スル方法ヲ例ヲ以テ説カントス

(例一) $x^2+13x+22$ ヲ因數ニ分解スベシ

$x^2+13x+22$ ガ二ツノ二項式ノ積ニ等シケレバ
 x^2 ハ其二式ノ首項ノ積, 22 ハ其二式ノ末項ノ積
 ニ等シカルベシ然ルニ 22 ハ 2×11 ニ等シキヲ
 以テ假ニ所求ノ二式ヲ

$$(x+2)(x+11)$$

トシテ元ノ三項式ニ比較センニ此二ツノ因數
 ハ首末二項ノ吟味ヨリ作りタルモノナレバ唯
 積ノ中項ノミヲ元ノ三項式ノ中項ニ比較スレ

バヨシ然ルニ此二式ノ積ノ中項ハ $2x+11x=13x$

トナリ原式ノ中項ト一致スルヲ見ル故ニ

$$x^2+13x+22=(x+2)(x+11)$$

(注意第一) 此ノ如ク假ニ因數ヲ設ケ其正否ヲ視
 察スルヲ以テ時トシテ此法ヲ視察法ト云フ
 コトアリ

(例二) $x^2-3xy-10y^2$ ヲ因數ニ分解セヨ

二因數ナル二項式ノ首項ハ各 x ニシテ其末項
 ハ其積ガ $-10y^2$ トナルヲ要スル故

$$-2y, \quad +5y$$

或ハ $-5y, \quad +2y$

或ハ $-y, \quad +10y$

或ハ $-10y, \quad +y$

ナルベク從テ因數分解ノ結果ハ $(x-2y)(x+5y)$ ナ
 ルカ, $(x-5y)(x+2y)$ ナルカ, $(x-y)(x+10y)$ ナルカ, 或
 ハ $(x-10y)(x+y)$ ナルカノ一ツナリ而シテ之ヲ定
 ムルニハ唯何レノ積ノ中項ガ原式ノ中項 $-3xy$
 ト等シキヤ否ヲ檢スレバ可ナリ然ルニ第二以
 外ノ積ノ中項ハ原式ノ中項ト一致セザレドモ
 第二ノ積ノ中項ハ $-5xy, +2xy$ ノ和即 $-3xy$ ニ等
 シク原式ノ中項ト一致ス從テ

$$x^2 - 3xy - 10y^2 = (x - 5y)(x + 2y)$$

(注意第二) $ax^2 + bx + c$ ノ如キ三項式或ハ $ax^2 + b$ ノ如キ二項式ガ (2)', (3)', (4)' ノ左邊ノ如キ形ヲ有セズ又上ノ如ク視察法ニテ因數ニ分解シ得ザルトキハ其式ハ素式ナリト云フ

例題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $x^2 + 3x + 2$ 2. $x^2 - 5x + 6$ 3. $x^2 - 7x + 12$
 4. $x^2 - 8x + 15$ 5. $x^2 - 6x + 5$ 6. $x^2 + x - 6$
 7. $x^2 - 2x - 35$ 8. $x^2 + 8x - 33$ 9. $x^2 + 5x + 4$
 10. $x^2 + 2x - 15$ 11. $3x^2 - 4x + 1$ 12. $2x^2 - 11x + 12$
 13. $5x^2 - 38x + 21$ 14. $3x^2 + 11x - 20$
 15. $7x^2 + 75x + 108$ 16. $18x^2 + 260x - 150$
 17. $4x^2 + 21x - 18$ 18. $10x^2 + 3x - 1$
 19. $14x^2 + 246x - 108$ 20. $5x^2 - 30xy + 40y^2$
 21. $8x^2 + 40xy - 112y^2$ 22. $x^4 - 15x^2 + 36$
 23. $x^4 - 25x^2y^2 + 144y^4$ 24. $y^4 - 6y^2 - 27$
 25. $a^2b^2 + 8ab + 7$ 26. $a^3 + 5a^2 - 24a$
 27. $x^3 + x^2 - 12x$ 28. $a^2b^2 - ab^3 - 2b^4$
 29. $6x^4 - 36x^3y + 54x^2y^2$

前ニ洩レタル公式及雜題

47. 公式

次ノ乘法ノ公式ハ前ノ公式ニ續キテ重要ナルモノナリ

$$(A+B)(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3 \quad (5)$$

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3 \quad (6)$$

(1), (2), (3), (4) ノ公式ト同様ニ此公式ハ乘法或ハ因數分解法ニ應用セラル今其一二ノ例ヲ示サントス

(例一) $x^3 + 8$ ヲ因數ニ分解スベシ

$$\begin{aligned} x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 2^2) \\ &= (x+2)(x^2 - 2x + 4) \end{aligned}$$

但 $x^2 - 2x + 4$ ハ素式ナリ

(例二) $8a^3 - 27b^3$ ヲ因數ニ分解スベシ

$$\begin{aligned} 8a^3 - 27b^3 &= (2a)^3 - (3b)^3 \\ &= (2a - 3b)\{(2a)^2 + (2a)(3b) + (3b)^2\} \\ &= (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) \end{aligned}$$

但 $4a^2 + 6ab + 9b^2$ ハ素式ナリ

(例三) $a^6 - b^6$ ヲ因數ニ分解スベシ

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{aligned}$$

但此二次因數ハ何レモ素式ナリ

(例四) $(x+6)^3 - (x-6)^3$ ヲ因數ニ分解セヨ

$$\begin{aligned} (x+6)^3 - (x-6)^3 &= \{(x+6) - (x-6)\} \{(x+6)^2 + (x+6)(x-6) \\ &\quad + (x-6)^2\} = 12(3x^2 + 36) = 36(x^2 + 12) \end{aligned}$$

但 $x^2 + 12$ ハ素式ナリ

(注意) 次ノ乗法公式ハ上ノ公式ニ續キテ重要ナルモノナリ

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\begin{aligned} (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \end{aligned}$$

48. 二項因數ノ決定法

今一多項式ガ二項因數ヲ有スル爲メニ必要ナル條件ヲ説カントス例ヘバ

$$x^2 - ax - bx + ab = (x-a)(x-b)$$

ニ於テ x ガ a 或ハ b ニ等シキトキ $x-a$ 或ハ $x-b$ ハ 0 ナリ即右邊ノ式ハ 0 トナルヲ以テ $x^2 - ax - bx - ab$ モ x ガ a 或ハ b ニ等シキトキハ 0 トナルベク且 a, b ノ外ニハ x ニ代入シテ $x-a$, 或ハ $x-b$ ガ 0 トナルモノナク從テ $(x-a)(x-b)$ 即 $x^2 - ax - bx + ab$ ガ 0 トナルモノナシ

故ニ $x-a$ ノ形ヲナセル二項式ガ他ノ x ナル文字ヲ有スル多項式ノ因數トナルニハ $x-a$ ガ 0 トナルニ適スベキ x ノ値ヲ多項式ノ x ニ代入スルトキニ 0 トナルコトヲ要シ其場合ニハ其二項式ハ其多項式ノ因數ナリ

(例一) $x^2 - 3ax + 2a^2$ ハ $x-a$ ニテ整除シ得ラルハヤ否ヤ

$x-a$ ガ 0 トナルベキ x ノ値ハ a ナリ今 $x^2 - 3ax + 2a^2$ ノ $x = a$ ヲ代入スレバ

$$a^2 - 3a^2 + 2a^2 = 0$$

故 $= x-a$ は $x^2-3ax+2a^2$ の一因數ナリ即後者ハ前者ニテ整除シ得ラル

(例二) x^3+a^3 は $x+a$ ニテ整除シ得ラル、ヤ否ヤ $x+a$ ガ 0 トナルベキ x ノ價ハ $-a$ ナリ之ヲ x^3+a^3 ノ x ニ代入スレバ

$$(-a)^3+a^3=-a^3+a^3=0$$

故 $= x+a$ は x^3+a^3 ノ一因數ナリ

(例三) x^n-a^n は n ガ如何ナルトキ $x-a$ ニテ整除シ得ラル、カ又整除シ得ラルレバ其商如何

$x-a$ ガ 0 トナルベキ x ノ値ハ a ナリ今 x^i-a^n ノ $x=a$ ヲ代入スレバ

$$a^n-a^n=0$$

故 $= n$ ノ奇偶如何ニ拘ハラズ $x-a$ は x^i-a^n ノ一因數ニシテ他ノ因數ハ除法ニテ求メ得ラル

$$\text{即 } \frac{x^i-a^n}{x-a} = x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\dots+a^{n-1} \quad (1)$$

(例四) x^n+a^n ノ n ガ如何ナルトキ $x+a$ ニテ整除シ得ラル、カ若シ整除シ得ラルレバ其商如何

$x+a$ ガ 0 トナルベキ x ノ値ハ $-a$ ナリ今 x^n+a^n ノ $x=-a$ ヲ代入スレバ

$$(-a)^n+a^n$$

n ガ偶數ナルトキハ

$$a^n+a^n=2a^n$$

n ガ奇數ナルトキハ

$$-a^n+a^n=0$$

故 $= n$ ガ偶數ナルトキ $x+a$ は x^n+a^n ノ因數ナラズシテ n ガ奇數ナルトキ $x+a$ は x^n+a^n ノ因數ナリ而シテ他ノ因數ハ除法ニテ求メ得ラル、コト次ノ如シ

$$\frac{x^n+a^n}{x+a} = x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}-\dots+a^{n-1} \quad (2)$$

(例五) x^n-a^n は $x+a$ ニテ整除シ得ラル、カ

上例ノ如ク x^n-a^n ノ $x=-a$ ヲ代入スレバ

$$(-a)^n-a^n$$

n ガ奇數ナルトキハ

$$-a^n-a^n=-2a^n$$

n ガ偶數ナルトキハ

$$a^n-a^n=0$$

故 $= x+a$ は n ガ奇數ナルトキ x^n-a^n ノ因數ナラズシテ n ガ偶數ナルトキ x^n-a^n ノ因數ナリ而シテ他ノ因數ハ除法ニテ求メ得ラル即

$(x+y)-2(x+z) = (-x+y-2z)$
 $(x+y)+5(x+z) = (6x+y+5z)$
 $(-x+y-2z)(6x+y+5z) = (-6x^2-5y^2-12xz-5yz-2yz-10z^2)$
 $(x+y)-2(x+z) = (-x+y-2z)$
 $(x+y)+5(x+z) = (6x+y+5z)$

$$\frac{x^n - a^n}{x+a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-1} \quad (3)$$

(注意) 上ノ三ツノ例ニ因リテ次ノ大切ナル定理

ヲ得即

nガ奇數或ハ偶數何レナルモ $x^n - a^n$ ハ $x-a$ ナル

因數ヲ有ス

nガ奇數ナルトキ $x^n + a^n$ ハ $x+a$ ナル因數ヲ有

ス

nガ偶數ナルトキ $x^n - a^n$ ハ $x+a$ ナル因數ヲ有

ス

例 題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $a^3 + x^3$ 2. $a^3 + 1$ 3. $a^3 + 27b^3$

4. $27x^3 + 64y^3$ 5. $a^3 - x^3$ 6. $27x^3 - y^3$

7. $8x^3 - 343y^3$ 8. $2 - 16a^3$ 9. $x^4 - x$

10. $a^6 - 1$ 11. $1 - 64x^6$

12. $(x^2+2)^3 + (x-2)^3$ 13. $(4a+3b)^3 + (a+2b)^3$

14. $(x+2)^4 - (x-2)^4$ 15. $(a+b+c)^2 - 4c^2$

16. $(a+b-2c)^2 - 4c^2$ 17. $x^3 + \frac{13x^2}{6} + x$

$(7+1)(7-1) = 48$
 $(4-1)(4+1) = 15$

$x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2+4) = (x+1)(x+2)(x-2)$
 $ax^2 + c + cx + c = a(x^2+1) + c(x+1)$
 $x^2(x+1) - x^2(x+1) - (x+1)(x-1) = (x+1)(x+1)(x-1)$
 $x^2 - y^2 - x + y = (x+y)(x-y) - (x-y) = (x-y)(x+y-1)$

18. $x^4 - 5x^2 + 4$ 19. $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$

20. $(x+y)^2 - 5a(x+y) + 6a^2$

21. $(x+y)^2 - 8(x+y)(x+2) + 15(x+2)^2$

22. $x(x+z) - y(y+z)$ 23. $a^3 - 5a^2 + a - 5$

24. $x^3 + x^2 - 4x - 4$ 25. $ax^3 + cx + a + c$

26. $x^3 + bx^2 - a^2x - a^2b$ 27. $x^2 - x - y^2 + y$

28. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2ac + 2bd$

29. $a^2x^2 + x^2 - a^2y^2 - y^2$ 30. $a^3b - b - a^3c + c$

31. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ 32. $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$

33. $x^3 - 8y^3 - 27z^3 - 18xyz$ 34. $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

35. $x^4 + a^2x^2 + a^4$ 36. $x^4 - 7x^2 + 1$

37. $(a+b)^2 + (a+c)^2 - (c+d)^2 - (b+d)^2$

38. $x^2y^2z^2 - x^2z - y^2z + 1$

39. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2$

40. $(x^2 + x)^2 - 14(x^2 + x) + 24$

41. $x^2 - z(a+b)x - ab(a-z)(b+z)$

42. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

43. $x^2 - 5x + 6$ ハ $x-2$ ニテ整除シ得ラル、カ

44. $x^2 + 7x + c$ ガ $x+2$ ニテ整除シ得ラル、ニハ c

ハ如何ナル數ナルコトヲ要スルカ

- 45. $a^4 - 16b^4 \div a - 2b =$ テ整除シ得ラル、カ
- 46. $x^3 + ax^2 - 2a^3 \div x + a =$ テ整除シ得ラル、カ
- 47. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \div x$ ナル因數ヲ有スルカ
- 48. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \div (b+c)(c+a)(a+b) =$ テ整除シ得ラル、カ
- 49. $(x+y)^5 - x^5 - y^5 \div x+y =$ テ整除シ得ラル、カ
- 50. $(x+y)^7 - x^7 - y^7 \div x-y$ ナル因數ヲ有スルカ
- 51. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$ ナルコトヲ證明セヨ
- 52. 次ノ式ノ内 $x+a, x-a =$ テ整除シ得ラル、モノヲ摘出セヨ

$$x^5 - a^5 \qquad x^9 + a^9$$

$$x^{80} - a^{80} \qquad x^{12} + a^{12}$$

(37) $x^4 + 2x^2 + 1 - 9x^2 = (x^2 + 1)^2 - (3x)^2 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

(38) $x^2 - x - y^2 - y = x^2 - y^2 - x + y = (x+y)(x-y) - (x-y) = (x-y)(x+y-1)$

(39) $a^2(x^2 - 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) = (c-a)^2 - (b-d)^2 = (c-a+b-d)(c-a-b+d)$

(37) $(a+b)^2 - (c+d)^2 + (a+c)^2 - (b+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b-c-d) + (a+c+b+d)(a+c-b-d) = (a+b+c+d)(a-b-c-d) = (a+b+c+d)(a-b-c-d)$

(38) $x^2 z^2 (y^2 z^2 + 1) - (y^2 z^2 - 1) = (y^2 z^2 - 1)(x^2 z^2 - 1)$

(39)

(40) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 1) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

(41) $(x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 24 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24 = (x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) = x(x+5)(x^2 + 5x + 10)$

第二章
最大公約數及最小公倍數
最大公約數

49. 算術ノ最大公約數及其法則

算術ニ於ケル最大公約數ノ定義ハ次ノ如シ
多クノ數ノ何レヲモ整除シ得ベキ數ノ中最モ大ナルモノヲ此等ノ數ノ最大公約數ト云フ
之ヲ求ムル方法ハ次ノ如シ

例ヘバ $2^3 \times 3^4 \times 5, 2^2 \times 3^5 \times 7, 2^4 \times 3^4 \times 11^2$ ノ如ク因數ニ分解シタルモノ、最大公約數ヲ求ムルニハ共通ノ因數ニ最モ小ナル指數ヲ附シタルモノ、積 $2^2 \times 3^4$ ヲ作ルニアリ

上ノ結果ヲ案ズルニ衆數ノ最大公約數ハ各數ヲ整除シ得ベキ數ノ内最モ多ク素因數ヲ有スルモノナリ

50. 代數學ノ最大公約數ノ定義及其法則

代數學ニ於テハ例ヘバ $a^3b^4c, a^2b^5d, a^4b^4c^2$ ノ最大公

(39) $(x^2)^2 - 2(27b^2)x^2 + (2^2b^2)^2 = (x^2 - 27b^2)^2 = (x^2 - 27b^2)(x^2 + 27b^2) = (x-27b)(x+27b)(x^2 + 27b^2)$

約數ハ各文字ヲ假ニ素因數ト見做シタル算術上ノ最大公約數ト異ルコトナシ而シテ之ヲ次ノ如ク語ヲ換ヘテ言ヒ表ハス

多クノ式ヲ除シ得ベキ式ノ最モ高次ナルモノヲ此等ノ式ノ最大公約數ト云フ

最大公約數ヲ表ハスニ $G.C.M$ ヲ以テスルコトアリ

上ノ定義ニ因リテ最大公約數ヲ求ムル方法ハ上ニ述ベタル算術ノ方法ニ異ナラズ

(例一) $a^3b^4c, a^2b^5d, a^4b^4e^2$ ノ最大公約數ヲ求メヨ

上述ノ算術ノ例ニ於ケルモノト同法ニテ作レル a^2, b^4 ノ積 a^2b^4 ハ各數ニ共通ナル因數ヲ有スルヲ以テ各式ヲ整除シ得ルモ若シ一ツニテモ因數ヲ増ストキハ最早何レカノ一式ヲ整除シ得ザルヲ以テ a^2b^4 ハ所求ノ最大公約數ナリ

又若與ヘラレタル各式ニ整數係數ヲ有スルトキハ上ト同ジ理ニテ此等ノ數ノ最大公約數ヲ以テ所求ノ最大公約數ノ數係數トナスベキコトヲ知ルベシ

故ニ最大公約數ヲ求ムル次ノ法則ヲ得

(法則) 各式ニ共通ナル因數ニ最モ小ナル指數ヲ附シタルモノ、積ヲ作ルベシ(整數係數ヲ有スルトキハ其最大公約數ヲ數係數トナス)

但或式ガ多項式ナルトキハ先之ヲ因數ニ分解シテ上ノ如クナスベシ

(例二) $8a^2b^3c^2x^5yz^3, 12a^4bcx^2y^3, 16a^3c^3x^2y^4$ ノ最大公約數ヲ求ムベシ

8, 12, 16 ノ最大公約數ハ 4 ニシテ共通ノ因數 a ノ最モ低キ指數ハ 2, c ニ於テハ 1, x ニ於テハ 2, y ニ於テハ 1 ナルヲ以テ所求ノ最大公約數ハ

$$4a^2cx^2y$$

(例三) $4a^2(a+b)^2, 6ab(a^2-b^2)$ ノ最大公約數ヲ求ムベシ

先 $6ab(a^2-b^2)$ ヲ因數ニ分解スレバ下ノ如シ

$$6ab(a^2-b^2) = 6ab(a+b)(a-b)$$

之レト $4a^2(a+b)^2$ トハ 2 ト a ト $(a+b)$ トヲ共有ス
ルヲ以テ

$$G. C. M = 2a(a+b)$$

(例四) $x^2 - 15x + 36$, $x^2 - 9x - 36$ ノ最大公約數ヲ求
ムベシ

$$x^2 - 15x + 36 = (x-12)(x-3)$$

$$x^2 - 9x - 36 = (x+3)(x-12)$$

故ニ $G. C. M = x-12$

例題

最大公約數ヲ求メヨ

1. a^3b^2 , $6a^2b^3$
2. ab^3c^2 , a^2bc^3
3. $9a^3b^2$, $6a^2b^3$
4. $24a^3b^3x$, $60a^2b^4x^4$
5. $42x^2y^2z^3$, $70b^3y^3$
6. $a^2bc^3x^4$, $a^4bc^2x^3$, $a^4b^3cx^2$
7. $x(x-1)$, $(x-1)^2$
8. $a(a+1)$, $a(a+2)$
9. $x^2(x+2)$, $x(x+2)^2$, $(x-3)(x+2)^3$
10. $12(a^2+b^2)^2$, $8(a^4-b^4)$
11. $12(a^2-b^2)^2$, $8(a^4-b^4)$
12. $a^2x^3+2a^3x^2$, $ax^4-4a^5x^2$
13. x^2-3x-4 , x^2-x-12
14. x^3-16x , x^3-8x^2+16x
15. x^3-12x^2+36x , $x^4-9x^3+18x^2$

$x(x-6)^2 = x^2(x^2-9x+18)$
 $(G.C.M.) x(x-6)$
 $= x^2(x-3)(x-6)$

16. x^2+3x+2 , x^2+6x+8 , $x^2+7x+10$
17. $x^3+3x^2y+2xy^2$, $x^4+6x^3y+8x^2y^2$, $x^2y+7xy^2+10y^3$
18. $a^3b^2(x^3y^2-y^5)$, $a^2b^3(x^4+x^3y+x^2y^2)$, $a^2b^2(x^2y-xy^2)$
19. $x^2-(a+b)x+ab$, $x^2-(a+c)x+ac$, $x^2-2ax+a^2$

最小公倍數

51. 算術ノ最小公倍數及其法則

算術ニ於ケル最小公倍數ノ定義ハ次ノ如シ
 多クノ數ニテ整除シ得ラルベキ數ノ中最小ナル
 モノヲ此等ノ數ノ最小公倍數ト云フ

之ヲ求ムル方法ハ次ノ如シ

例ヘバ $2^3 \times 3^4 \times 5$, $2^2 \times 3^5 \times 7$, $2^4 \times 3^4 \times 11^2$ ノ如ク因數ニ
 分解シタルモノ、最小公倍數ハ二數以上ニ共通
 ノ因數ニ其指數ノ最大ナルモノヲ指數トシタル
 モノト一數ノミニ含マレタル因數トノ積 $2^4 \times 3^5 \times 5$
 $\times 7 \times 11^2$ ナリ

上ノ結果ヲ案ズルニ衆數ノ最小公倍數ハ公倍數
 中ノ最モ少ナク素因數ヲ有スルモノナリ

52. 代數學ノ最小公倍數ノ定義及其法則

代數學ニ於テハ例ヘバ a^3b^4c , a^2b^5d , $a^4b^4e^2$ ノ最小公倍數ハ各文字ヲ假ニ素因數ト見做シタル算術上ノ最小公倍數ト異ルコトナシ而シテ之ヲ次ノ如ク語ヲ換ヘテ言ヒ表ハス $b^3 b^5$)

多クノ式ニテ除シ得ベキ式ノ最モ低次ナルモノヲ此等ノ式ノ最小公倍數ト云フ

最小公倍數ヲ表ハスニ $L.C.M$ ヲ以テスルコトアリ上ノ定義ニ因リテ最小公倍數ヲ求ムル方法ハ上ニ述ベタル算術ノ方法ニ異ナラズ

(例一) a^3b^4c , a^2b^5d , $a^4b^4e^2$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ

上ノ算術ノ例ニ於テ述ベタルト同法ニテ作レル $a^4b^5cde^2$ ハ各式ノ因數ヲ有スルヲ以テ各式ニテ除スルコトヲ得ベク若シ一因數ニテモ之ヲ失フトキハ何レカノ一式ニテ之ヲ整除シ得ザルヲ以テ $a^4b^5cde^2$ ハ所求ノ最小公倍數ナリ

又若與ヘラレタル數ガ數係數ヲ有スルトキハ此

等ノ數ノ最小公倍數ヲ所求ノ最小公倍數ノ數係數トナスベキコト明カナリ

故ニ最小公倍數ヲ求ムル次ノ法則ヲ得

(法則) 二式以上ニ共通ナル因數ニ於

テハ最大ナル指數ヲ有スルモノ、

ミヲ採用シ一式ノミニ含マレタル

モノハ其儘採用シテ積ヲ作ルベシ

(整數係數ヲ有スルトキハ其最小公倍數ヲ數係數トナス)

但原式ガ多項式ナルトキハ先之ヲ

因數ニ分解シ上ノ如クナスベシ

(例二) $8a^2b^3c^2x^5yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$, $16a^3c^3x^2y^4$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ

8, 12, 16 ノ最小公倍數 48 ヲ數係數トシ二數以上ニ共通ナル代數文字ニ最大指數ヲ附シタル a^4, b^3, c^3, x^5, y^4 ト一數ノミニ含マレタル因數³トノ積ヲ作ル即

$$L. C. M = 48a^4b^3c^3x^5y^4z^3$$

(例三) $4a^2(a+b)^2, 6ab(a^2-b^2)$ ノ $L. C. M$ ヲ求ム

先 $6ab(a^2-b^2)$ ヲ因數ニ分解スレバ

$$6ab(a^2-b^2) = 6ab(a+b)(a-b)$$

之レト $4a^2(a+b)^2$ トヨリ $L. C. M$ ヲ求ムレバ

$$L. C. M = 12a^2b(a+b)^2(a-b)$$

(例四) $x^2-1, (1-x)^3, x^3-1$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) \quad x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$(1-x)^3$ ハ $x-1 =$ テ除シ得ラル、ヲ以テ

$$L. C. M = (1-x)^3(x+1)(x^2+x+1)$$

例題

次ノ最小公倍數ヲ求ムベシ

1. $4a^2b, 6ab^2$
2. $8a^2x^2y^3, 12b^2x^3y^3$
3. $12a^3bc, 18ab^2c^3$
4. $24a^3b^3x^3, 48a^2b^5$
5. $42a^2x^3y^2z^5, 77b^3y^5, 35a^3x^5$
6. $(a-x)(a-3x), (a-x)^2(a+4x)$
7. $(a-b)^2(a-c), (a-c)^3(a-b)$
8. $ax^3(a-x)(a-2x), a^3x(a-2x)(a-3x)$

$12 = (2^2 \cdot 3)(2^2 + 2b + b^2)$
 $116 = (2+4)(x+2x)(x+4x)$
 $03 = (x-y)(x-2y)(x-3y)(x-4y)(x-5y)$
 最大公約數及最小公倍數

9. $(a-b)^2, a^2-b^2$
10. $4a(a+b), 6(a^2-b^2)$
11. $6a(a+b), 8b(a^3+b^3)$
12. a^2-b^2, a^3-b^3
13. $6ab(a+b)^2, 4b^2(a^2-b^2)$
14. x^2-3x-4, x^2-x-12
15. x^2+3x+2, x^2+5x+4
16. $x^2+3ax+2a^2, x^2+5ax+4a^2$
17. $3x^2-xy^2, 6x^2-5y^2x+y^4$
18. $(a+b)^2-c^2, a^2-(b+c)^2$
19. $8(a^2-b^2), 12(a+b)^2, 20(a+b)^3$
20. $12(a+b), 6(a^2-b^2), 8(a^3+b^3)$
21. $(x+2y)^2, 6(x+y)^2, 8(x^2-4y^2)$
22. $x^2+7x+12, x^2+6x+8, x^2+5x+6$
23. $x^2-7xy+12y^2, x^2-9xy+8y^2, x^2-5xy+6y^2$
24. $(x+a)^2-(b+c)^2, (x+b)^2-(c+a)^2, (x+c)^2-(a+b)^2$
25. $x^2-(a+b)x+ab, x^2-(a+c)x+ac, x^2-(b+c)x+bc$
26. $a^2-b^2-2bc-c^2, a^2-b^2+2ac+c^2, a^2-2ab+b^2-c^2$

多項式ノ最大公約數及最小公倍數ヲ求ムル別法

53. 別法ノ必要

前諸條ニ於テ代數學ニ於ケル最大公約數及最小公倍數ノ定義ハ算術ト略ボ同様ナルコトヲ説キ且單項式或ハ因數ニ分解シ得ラル、多項式ノ最大公約數及最小公倍數ヲ求ムル方法ヲ説ケリ算術ニ於テハ因數ニ分解スルコトノ困難ナル程ノ大ナル數ノ最大公約數及最小公倍數ヲ求ムルニハ前法ト異ル法ヲ用キタリ

代數學ニ於テモ殆ント算術ト同一ノ法ヲ用キテ因數ニ分解スルコトノ困難ナル多項式ノ最大公約數及最小公倍數ヲ求ムルヲ得

54. 約數, 倍數ノ原則

算術ト同様ニ約數, 倍數ニ關スル次ノ原則ヲ證明スルコトヲ得

第一 A, B ガ何レモ C ノ倍數ナルトキハ $A+B, A-B$ ハ何レモ C ノ倍數ナリ

何トナレバ A, B モ C ノ倍數ナルヲ以テ

$$A = mC, \quad B = nC$$

ナル整式 m, n アルベシ從テ

$$A+B = (m+n)C, \quad A-B = (m-n)C$$

ニシテ $m+n, m-n$ モ亦整式ナルヲ以テ $A+B, A-B$ ハ C ノ倍數ナルコト明カナレバナリ

第二 A ガ C ノ倍數ナルトキハ A ノ倍數 mA ハ C ノ倍數ナリ但 m ハ或整式ナリ

何トナレバ A ガ C ノ倍數ナルヲ以テ

$$A = nC$$

ナル n ナル整式アルベシ故ニ

$$mA = mnC$$

而シテ mn ハ整式ナルヲ以テ mA ハ C ノ倍數ナリ

第三 A, B ガ C ノ倍數ナルトキハ $mA \pm nB$ モ C ノ倍數ナリ但 m, n ハ整式ナリ

何トナレバ A, B ガ C ノ倍數ナルヲ以テ mA, nB ハ C ノ倍數ナルベク從テ其和或ハ差ナル $mA \pm nB$ ハ第一ニ依リテ C ノ倍數ナリ

第四 A ガ B ニテ整除シ得ラルレバ A, B ノ最大公約數ハ B ナリ

何トナレバ B ハ A ヲ整除スルコトヲ得、 B ハ B ヲ整除スルコトヲ得ルヲ以テ B ハ A, B ノ公約

數ナルベク而カモ且 B ヨリ高次ナルモノニテ
 B ヲ除シ得ザルヲ以テ B ハ A, B ノ最大公約
 數ナリ

第五 A ト B トノ最大公約數ト A ヲ B ニテ除シタ
 ル餘數 R ト除數 B トノ最大公約數ハ相等シ

今次ノ如ク除法ヲナシタリトセン

$$\begin{array}{r} B) A (Q \\ \underline{BQ} \\ R \end{array}$$

A ト B トノ公約數ヲ q トセヨ

$R = A - BQ$ ナルヲ以テ第三ニ依リテ q ハ R ノ約
 數ナリ故ニ q ハ B, R ノ公約數ナリ

次ニ q' ハ B ト R トノ公約數ナリトセヨ

$A = BQ + R$ ナルヲ以テ第三ニ依リテ q' ハ A ノ約
 數ニシテ即 q' ハ A ト B トノ公約數ナリ

斯ク A, B ト B, R トニ於テ其一ツノ公約數ハ他
 ノ公約數トナルヲ以テ一ツノ最大公約數ハ他
 ノ最大公約數トナル

第六 A, B ノ最大公約數ハ A, mB ノ最大公約數ニ
 等シ但 m ハ A ノ因數ヲ含マザルモノトス

何トナレバ m ハ A ノ因數ヲ含マザルヲ以テ A
 ト B トノ共通因數ニ於テ B ノ代リニ mB ヲ採
 用スルモ何等ノ變化ナク從テ其最大公約數ニ
 變化ナケレバナリ

第七 A, B ノ最大公約數ト $A, \frac{B}{m}$ ノ最大公約數ト
 ハ相等シ但 m ハ B ノ約數ニシテ A ノ因數ヲ含マ
 ザルモノトス

其證明ハ上ト同様ナリ ((11)ノ注意)

55. 最大公約數

(例一) $x^2 - 4x + 3, 4x^3 - 9x^2 - 15x + 18$ ノ最大公約數ヲ
 求メヨ

若 $x^2 - 4x + 3$ ニテ $4x^3 - 9x^2 - 15x + 18$ ヲ整除シ得ラ
 ルレバ除數ハ原則第四ニ因リテ其最大公約數
 ナリ故ニ除法ヲ試ム

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 3) 4x^3 - 9x^2 - 15x + 18(4x + 7 \\ \underline{4x^3 - 16x^2 + 12x} \\ 7x^2 - 27x + 18 \\ \underline{7x^2 - 28x + 21} \\ x - 3 \end{array}$$

斯ク餘數ヲ得タルヲ以テ原則第五ニ因リテ餘
 數ト $x^2 - 4x + 3$ トノ最大公約數ヲ求ムレバヨシ
 上ト同ジ目的ヲ以テ再ビ除法ヲ施セバ

$$\begin{array}{r} x-3)x^2-4x+3(x-1) \\ \underline{x^2-3x} \\ -x+3 \\ \underline{-x+3} \end{array}$$

斯ク整除シ得タルヲ以テ $x-3$ ハ $x-3$ ト x^2-4x+3

トノ最大公約數ナルノミナラズ原則第五ニ因

リテ原二式ノ最大公約數ナリ

故ニ次ノ最大公約數ヲ求ムル法則ヲ得

(法則) 一ツノ多項式ヲ以テ他ノ多項

式ヲ整除スベシ若整除シ得ラルレ

バ除數ハ所求ノ最大公約數ナリ

若餘數アルトキハ之レト除數トノ

最大公約數ヲ求ムル目的ヲ以テ其

餘數ヲ以テ前除數ヲ除スベシ以下

同法ヲ續行シ整除シ得ラル、ニ至

ラバ最後ノ除法ノ除數ハ所求ノ最

大公約數ナリ

(例二) $2x^2-7x+5, 3x^2-7x+4$ ノ $G.C.M$ ヲ求メヨ

先法則ニ因リテ除法ヲ試ミントスルニ $3x^2-7x+4$ ノ首項 $3x^2$ ヲ $2x^2-7x+5$ ノ首項 $2x^2$ ニテ除スル時ハ $\frac{3}{2}$ ナル分數ヲ得ルヲ以テ此不便ヲ避クルガ爲ニ原則第六ニ依リテ前者ノ因數ナラザル2ヲ後者ニ乗ジタル積 $6x^2-14x+8$ ヲ後者ノ代リニ用キ之ト前者トノ最大公約數ヲ求ムレバヨシ

$$\begin{array}{r} 2x^2-7x+5)6x^2-14x+8(3 \\ \underline{6x^2-21x+15} \\ 7x-7 \end{array}$$

次ニ $2x^2-7x+5$ ト $7x-7=7(x-1)$ トノ最大公約數ヲ求メンニ 7 ハ $2x^2-7x+5$ ノ因數ナラザルヲ以テ原則第七ニ依リテ $7(x-1)$ ノ 7 ヲ取り去リタル $x-1$ ト $2x^2-7x+5$ トノ最大公約數ヲ求ムレバヨシ

$$\begin{array}{r} x-1)2x^2-7x+5(2x-5 \\ \underline{2x^2-2x} \\ -5x+5 \\ \underline{-5x+5} \end{array}$$

故ニ $x-1$ ハ $x-1, 2x^2-7x+5$ ノ最大公約數ニシテ
即所設二式ノ最大公約數ナリ

(例三) $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4$, $3x^4 - 11x^3 - 2x^2 - 4x - 16$ の
最大公約數ヲ求メヨ

原則第六ニ因リテ 2 ヲ後式ニ乗ジ之ヲ後式ノ
代リニ用ウ

$$\begin{array}{r} 2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4 \\ 6x^4 - 21x^3 - 12x^2 + 3x - 12 \\ \hline -x^3 + 8x^2 - 11x - 20 \\ -x^3 + 8x^2 - 11x - 20 \\ \hline 2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4 \quad (-2x - 9) \\ 2x^4 - 16x^3 + 22x^2 + 40x \\ \hline 9x^3 - 26x^2 - 39x - 4 \\ 9x^3 - 72x^2 + 99x + 180 \\ \hline 46x^2 - 138x - 184 \end{array}$$

$46x^2 - 138x - 184 = 46(x^2 - 3x - 4)$ ニシテ 46 ハ $-x^3 + 8x^2 - 11x - 20$ ノ因數ナラザルヲ以テ原則第七ニ因リテ $46(x^2 - 3x - 4)$ ノ代リニ $x^2 - 3x - 4$ ヲ用キテ運算ヲ繼續スルヲ得

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 \\ x^3 - 8x^2 + 11x + 20 \quad (x - 5) \\ \hline x^3 - 3x^2 - 4x \\ \hline -5x^2 + 15x + 20 \\ -5x^2 + 15x + 20 \\ \hline \end{array}$$

故ニ $x^2 - 3x - 4$ ハ所求ノ最大公約數ナリ

(注意) 三式以上ノ最大公約數ヲ求ムルニハ算術ト同ジ様ニ先二式ノ最大公約數ヲ求メ次ニ

之レト殘リノ式ノ一ツトノ最大公約數ヲ求ムル如ク逐次ニ進ムベシ

56. 最小公倍數

(例一) $x^2 - 4x + 3$, $4x^3 - 9x^2 - 15x + 18$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ

算術ト同様ニ先前法ヲ用キテ此二式ノ最大公約數 $x - 3$ ヲ求メ次ニ除法ニテ二式トモ他ノ因數ヲ求メテ次ノ如クナシ得タリトセン即

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

$$4x^3 - 9x^2 - 15x + 18 = (x - 3)(4x^2 + 3x - 6)$$

然ルニ $x - 3$ ガ最大公約數ナルヲ以テ $x - 1$, $4x^2 + 3x - 6$ ニハ最早公約數ナシ故ニ其最小公倍數ハ $(x - 3)(x - 1)(4x^2 + 3x - 6)$ ニシテ恰カモ二式ノ積ヲ $x - 3$ ニテ除シタルモノニ等シ或ハ一式ヲ $x - 3$ ニテ除シ其商ニ他式ヲ乗ジタルモノニ等シ故ニ二式ノ最小公倍數ヲ求ムル次ノ法則ヲ得

(法則) 先二式ノ最大公約數ヲ求メ之ヲ以テ一式ヲ除シテ得タル商ニ他ノ式ヲ乘ズベシ

(例二) $2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4$, $3x^4 - 11x^3 - 2x^2 - 4x - 16$ の

最小公倍数ヲ求ム

$$G. C. M = x^2 - 3x - 4$$

$$\frac{2x^4 - 7x^3 - 4x^2 + x - 4}{x^2 - 3x - 4} \times (3x^4 - 11x^3 - 2x^2 - 4x - 16)$$

$$= (2x^2 - x + 1)(3x^4 - 11x^3 - 2x^2 - 4x - 16)$$

(注意) 三式以上ノ最小公倍数ヲ求ムルニハ算術ト同様ニ先二式ノ最小公倍数ヲ求メ次ニ之レト残りノ式ノ一ツトノ最小公倍数ヲ求ムル如ク逐次ニ進ムベシ

例題

次ノ最大公約數及最小公倍数ヲ求ムベシ

1. $x^2 - 6x + 5$, $x^2 - 5x + 4$
2. $x^3 + 5x^2 + 7x + 2$, $x^2 + 6x + 8$
3. $12x^2 + 5x - 3$, $6x^3 + x^2 - x$
- △ 4. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
5. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, $x^4 - 1$
- ▷ 6. $x^4 - x^3 + 8x - 8$, $x^3 + 4x^2 - 8x + 24$
7. $x^2 + a^3$, $x^3 - a^3$, $x^4 + a^2x^2 + a^4$
- ▷ 8. $x^3 + 2x^2 - x - 2$, $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$, $x^3 + 3x^2 - 2x - 8$

× 9. $2a^3 - 13a^2 + 20a$, $2a^3 - 5a^2 - 8a + 20$, $4a^4 - 8a^3 - 5a^2 - 8a + 20$

雜題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $x^2 + x + \frac{1}{4}$
2. $-81x^2 - 180x - 100$
3. $-9x^2 - 42xy - 49y^2$
4. $x^2(a-b)^2 - 4(a-b)xy + 4y^2$
5. $-x^2(a+b)^2 + 2xy(a^2 - b^2) - y^2(a-b)^2$
6. $\frac{c^2}{4} - \frac{d^2}{49}$
7. $1 - 100d^2$
8. $25p^2 - (3q - 4r)^2$
9. $(3a^2 + 5ac + 3c^2)^2 - 9c^4$
10. $36(2x + 3y)^2 - 16(4x - 5y)^2$
11. $4a^2 + 9b^2 + 12ab - 25d^2$
12. $343 + x^3$
13. $\frac{x^3}{512} - \frac{y^3}{1000}$
14. $x^4 - 8x^2y + 15y^2$
15. $x^2 - xy + \frac{3}{16}y^2$
16. $x^2 - 2xy + y^2 - 9x + 9y + 14$
17. $272 - xy^2 - x^2y^4$
18. $x^6 - 14x^4y^2 - 95x^2y^4$
19. $99x^2 - 4xy - 143y^2$
20. $42x^2 - 113xy + 35y^2$
21. $57^2 - 31^2$ 及 $87^2 - 81^2$ ヲ因數ニ分解シテ計算セヨ
22. $1001^3 - 999^3$ ヲ因數ニ分解シテ計算セヨ

23. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ナル公式
ニ因リ次ノ計算ノ結果ヲ求ム

I. $(a+b-c)^2$ II. $(a-b-c)^2$

III. $(x^2-7x-13)^2$ IV. $b^2(b+c-a)^2$

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

24. $a^4 + a^2b^2 + b^4$ 25. $x^{16} + x^8 + 1$

26. $x^7 - 14x^5 + 49x^3 - 36x$

27. $(bc+ca+ab)^2 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$

28. $x^7 - a^7$ ハ $x-a$ ニテ整除シ得ラル、カ、若整除
シ得ラル、ナラバ其商ヲ求メヨ

29. $(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (b+c-a)^2$
 $= 4(a^2 + b^2 + c^2)$ ナルコトヲ證明スベシ

30. $(a+b)^2 + 2(a^2 - b^2) + (a-b)^2 = (2a)^2$ ナルコトヲ證
明スベシ

31. $x^3 - 27$, $x^2 - 15x + 36$, $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ ノ最大公約
數ヲ求ム

32. $a(a-1)x^2 + (2a^2-1)x + a(a+1)$ 及 $(a^2-3a+2)x^2 + (2a^2$
 $-4a+1)x + a(a-1)$ ノ最大公約數ヲ求ム

33. $2x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ 及 $x^7 - 3x^6 + x^5 - 4x^2 + 12x - 4$ ノ
最大公約數及最小公倍數ヲ求ム

34. 二式ノ最大公約數 $x-7$, 最小公倍數 $x^3 - 10x^2$
 $+ 11x + 70$ ニテ一式ガ $x^2 - 5x - 14$ ナルトキ他ノ一式
如何

補習雜題 I.

1. $3x^2 - 5(x+7) - \{3(x^2 - 5x) + 7\} =$ 於テ $x=4$ ナルト
キノ値ヲ求メヨ

2. $x^3 - 3x^2y - 3xy^2 = x^2 - 5xy + 2y^2$ フ乗ジ $x=2, y=-1$
トシテ其結果ヲ檢セヨ

3. $\{(1+xy)^2 - (x+y)^2\} \div (1-x^2)$ フ簡單ニセヨ

4. $4a^4 + 7a^2b^2 + 16b^4$ フ $2a^2 - 3ab + 4b^2$ ニテ除セヨ

5. $x=-12, y=-5.7, z=(3.2)^2$ ナルトキ $7x^2 + y + 2z$
ヲ $8x + 3y$ ニテ除シタルモノ、値ヲ小數點以下第
二位マデ計算スベシ

6. $4x - 6y - 3 = 7x + 2y - 4 = -2x + 3y + 24$ フ解ケ

(35年大坂高工)

7. $0.2x - 7.4 = 2(1.25x - 9.5)$ フ解ケ

8. 甲乙兩人相伴フテ汽車ニ乘ラントスルニ
兩人ノ携帶荷物ヲ合シテ 350 斤アリ若一人ニテ
之ヲ持ツトキハ無貨ト定メラレタル重量ニ超過

シタル部分ニ對シテ金一圓五十五錢ノ運賃ヲ支拂ハザル可ラザレドモ兩人別々ニ之ヲ持ツトキハ超過部分ニ對スル運賃トシテ甲ハ金七十五錢、乙ハ金六十錢ヲ支拂ヘバ足ルベシト云フ問フ一人ニ許ス所ノ無賃斤量如何 (36年神戸高商) 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

9. $(2a+b)^2 - (2b-a)^2$ 10. $a^3 - b^3c^3$

11. $x^2 - \frac{1}{6}xy - \frac{1}{6}y^2$ 12. $x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$

13. $x^3 + a^3$ ハ $x+a$ ニテ整除シ得ラル、カ、整除シ得ラル、ナラバ其商ヲ求メヨ

14. $(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = (b+c)^2 + (c+a)^2 + (a+b)^2$ ナルコトヲ證明スベシ

15. $x^3 - 2x + 1$, $x^3 + 2x^2 - 1$ ノ最大公約數ヲ求メヨ (36年東京高工)

補習雜題 II.

1. 佛國銀行ノ元資ハ英國銀行ノ元資ヨリ少ナキコト 3560 萬弗ニシテ獨逸帝國銀行ノ元資ヨリ多キコト 630 萬弗ナリ而シテ三銀行ノ元資

ヲ合スルトキハ 13490 萬弗ナリト云フ各元資ノ高ヲ問フ

2. 一水夫毎時 $1\frac{1}{2}$ 湮ノ割ニテ或河ヲ溯リ同ジ漕力ナラバ毎時 12 湮ノ割ニテ其河ヲ下ルコトヲ得ルト云フ水流ノ速ヲ如何

3. $(x+b)(x+c) - (x+b+c)(x+b) + a^2 + ab + b^2 + 3ax$ ヲ簡單ニセヨ

4. $5a - 7(b-c) - [6a - (3b+2c) + 4c - \{2a - (b+c-a)\}]$ ヲ簡單ニセヨ

5. $(-5a^3bc^3)^{72}$ ノ正負ノ記號及 b, c ノ指數ヲ問フ

6. $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 4x + 2$ ヲ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ニテ除セヨ

7. $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ ヲ證明セヨ

8. $x^2 - 2x + 1$ ニテ除スルトキ商 $x^2 + 2x + 1$, 餘數 $x+1$ ヲ得ベキ被除數ヲ問フ

9. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{4} + \frac{x+3}{5} = 4$ ヲ解ケ

10. $\frac{x}{1} + \frac{y}{5} = 5$, $2x + \frac{y}{3} - 17 = 0$ ヲ解ケ

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ (11-14)

11. $(x-y)^2 - 3(x-y) + 2$ 12. $x^2 + 8xy - 65y^2$

13. $30x^2 + yx - 20y^2$ 14. $x^{12} + y^{12}$
15. $3x^3 - 3x^2y + xy^2 - y^3$ 及 $4x^2y - 5xy^2 + y^3$ ノ最大公約
數ヲ求メヨ
16. $2x^2 - 23x + 11$, $2x^3 - 5x^2 - 196x + 99$, $2x^3 - 3x^2 - 200x - 99$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ

第 四 編

分 數 式

緒 論

57. 算術ニ於テハ $\frac{3}{5}$ ハ 3ヲ5ニテ除シタル商即
之ニ5ヲ乘ズルトキハ3トナルベキ數ナリト定
メタリ

代數學ニ於テモ $\frac{A}{B}$ ハ A ヲ B ニテ除シ
タル商即之ニ B ヲ乘ズレバ A トナル
ベキ數トシテ之ヲ定メ之ヲ分數(或
ハ分數式)ト稱シ A ヲ分子, B ヲ分母
ト云ヒ或ハ何レモ分數ノ項ト云フ
コト算術ニ同ジ

故ニ A, B ガ特別ノ形ヲナストキハ $\frac{A}{B}$ ハ整數式ト
ナルコトアリ或ハ整數式ト分數式トノ和トナル
コト恰モ算術ニ於テ假分數ガ整數トナリ或ハ帶
分數トナルガ如シ

(注意第一) 上ノ如ク定メタル分數ハ A, B ガ含ム所ノ代數文字ニ或數値ヲ與フルトキハ正或ハ負ノ整數或ハ分數トナルベシ而シテ此等ノ整數, 分數ハ皆交換, 組合, 配分ノ定則ニ從フベキモノナルヲ以テ上ノ如ク定メタル $\frac{A}{B}$ ナル分數ハ此三定則ニ從フコト明カナリ

(注意第二) 二分數ノ分母, 分子ガ含ム代數文字ニ如何ナル數値ヲ與フルモ恒ニ二分數ノ値相等シキモノヲ得ルトキハ二分數相等シト云フ

(注意第三) 分數式 $\frac{A}{B}$ ノ分母, 分子ノ記號ヲ變ジテ $\frac{-A}{-B}$ トナスコトヲ得(除法ノ記號法則) 又分母, 分子ノ一ツノ記號ヲ變ジテ例ヘバ $\frac{-A}{B}$ トナストキハ元ノ分數 $\frac{A}{B}$ ノ記號ヲ變ジタル $-\frac{A}{B}$ ニ等シカルベシ(同上ノ法則)

第 一 章

分 數 化 法

58. 算術ニ於テ例ヘバ $\frac{16}{24}$ ナル分數ノ分母, 分子ニ 3 ヲ乘ジ或ハ分母, 分子ヲ 4 ニテ除スルモ其値ノ變ゼザルコトヲ説ケリ

同様に $\frac{A}{B}$ ナル分數ノ分母, 分子ニ 0 ナラザル或數 C ヲ乘ズルモ或ハ分母, 分子ヲ 0 ナラザル C ニテ除スルモ分數ノ値ハ變ゼズ

例ヘバ $\frac{A}{B}$ ハ $\frac{AC}{BC}$ ニ等シ何トナレバ $\frac{A}{B}$ ハ之ニ B ヲ乘ズレバ A トナルベキ數ナルヲ以テ

$$\frac{A}{B} \times B = A$$

C ヲ此兩邊ニ乘ズレバ

$$\frac{A}{B} \times B \times C = AC$$

即 $\frac{A}{B} \times (BC) = AC$ (組合定則)

此ノ如ク $\frac{A}{B} = (BC)$ ヲ乗ズレバ AC トナルヲ以テ
 $\frac{A}{B}$ ハ AC ヲ BC ニテ除シタル商 $\frac{AC}{BC}$ ニ等シ即

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$$

此式ヲ右邊ヨリ讀ムトキハ分母,分子ヲ同數 C ニ
 テ除シタルモノハ元ノ分數ニ等シト云フコトヲ
 得

約 分

59. 算術ト同様ニ上ノ原則ヲ應用シテ分母,分
 子ノ共通因數ヲ除去スルコトヲ得

例ヘバ $\frac{16a^4b^3c}{20a^3b^4d}$ ノ分母,分子ヨリ次第ニ $4, a^3, b^3$ ヲ除
 去スルトキハ

$$\frac{4a^4b^3c}{5a^3b^4d}, \frac{4ab^3c}{5b^4d}, \frac{4ac}{5bd}$$

上ノ如ク分母,分子ノ共通因數ヲ除去
 スルコトヲ分數ヲ約スト云ヒ其共通
 因數ナキ分數ヲ已約分數ト云フ

上ノ最後ノモノハ一時ニ原分數ノ分母,分子ヨリ
 $4a^3b^3$ ヲ除去シテモ得ラル而シテ $4a^3b^3$ ハ分母,分子
 ノ最大公約數ニ當リ從テ $\frac{4ac}{5bd}$ ノ分母,分子ニハ最
 早公約數ナキコト明カナリ

然レドモ通例約スト云フ語ヲ一分數ヲ已約分數
 ニ變ズルコトニ用ウ故ニ次ノ約分法則ヲ得

(法則) 分母,分子ノ共通因數ヲ次第ニ

除去シ(共通因數ナキマデ)或ハ二式

ノ最大公約數ヲ以テ除スベシ

(例一) $\frac{81a^6b^4c^3d^6}{36a^3b^5c^7d^3}$ ヲ約スベシ

$$\frac{81a^6b^4c^3d^6}{36a^3b^5c^7d^3} = \frac{9a^3d^3}{4bc^4}$$

(例二) $\frac{x^4-x^2}{x^4-1}$ ヲ約スベシ

$$\frac{x^4-x^2}{x^4-1} = \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

(例三) $\frac{x^2-4x+3}{4x^3-9x^2-15x+18}$ ヲ約スベシ

此分母子ノ最大公約數 $x-3$ ヲ求メ之ニテ分母,

分子ヲ除シテ $\frac{x-1}{4x^2+3x-6}$ ヲ得

(注意) 分數ハ常ニ已約分數ニ變ジタルモノヲ取扱フベキコト算術ニ同ジト知ルベシ
 又分數ハ施スベキ計算ヲ實行シ其結果ヲ已約分數ニテ表ハスコトヲ簡單ニスルト唱フルコトアリ

例題

次ノ分數ヲ約スベシ

- 1. $\frac{5x}{15x^2y}$ 2. $\frac{b^3c^2d}{bc^3d^2}$ 3. $\frac{28x^4y^5z^7}{49x^5y^9z^5}$
- 4. $\frac{a^2+ab}{2ab}$ 5. $\frac{16(a+b)^2}{24(a^2-b^2)}$ 6. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$
- 7. $\frac{x^2-16x-17}{x^2-22x+85}$ 8. $\frac{3x^2+23x-36}{4x^2+33x-27}$ 9. $\frac{x^4-1}{x^2-1}$
- 10. $\frac{x^4-y^4}{(x^2+y^2)(x-y)}$ 11. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$
- 12. $\frac{(a^6-b^6)(a-b)}{(a^3-b^3)(a^4-b^4)}$ 13. $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{(x^2-1)(x+1)}$
- △14. $\frac{x^2-xy+cy+cx}{x^2-bx-xy-by}$ △15. $\frac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(a-c)^2-(b-d)^2}$

- 16. $\frac{x^3-2x-1}{x^3-3x^2+x+2}$ 17. $\frac{2x^3-5x^2-8x-16}{2x^3+11x^2+16x+16}$
- 18. $\frac{12x^4+4x^3-23x^2-9x-9}{8x^4-14x^2-9}$

通 分 法

60. 算術ニ於テ例ヘバ $\frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{10}$ ヲ通分スルニ次ノ如クセリ

120 6, 8, 10 ノ最小公倍数

$$\frac{5}{6} = \frac{100}{120}, \quad \frac{3}{8} = \frac{45}{120}, \quad \frac{7}{10} = \frac{84}{120}$$

代数学ニ於テモ上ト同様ニ(58)ノ原則ニ因リ次ノ如ク通分スルコトヲ得但算術ノ如ク任意ノ公倍数ヲ用キテモ可ナレドモ最小公倍数ヲ用ウルヲヨシトス

(例一) $\frac{a}{yz}, \frac{b}{zx}, \frac{c}{xy}$ ヲ通分セヨ

xyz 分母ノ最小公倍数

$$\frac{a}{yz} = \frac{ax}{xyz}, \quad \frac{b}{zx} = \frac{by}{xyz}, \quad \frac{c}{xy} = \frac{cz}{xyz}$$

因テ次ノ通分ノ法則ヲ得

(法則) 分母ノ最小公倍數(或ハ公倍數)

ヲ共通ノ分母トナシ各分數ノ分母

ニテ此共通ノ分母ヲ除シタル商ヲ

其分子ニ乘ジ得タル積ヲ分子トナ

ス所ノ分數ヲ作ルベシ

(例二) $\frac{1}{3a(x-y)}, \frac{3}{4a^2(x+y)}, \frac{4}{5a^2b(x^2-y^2)}$ ヲ通分スベシ

$$5a^2b(x^2-y^2) = 5a^2b(x+y)(x-y)$$

$60a^2b(x+y)(x-y)$ 分母ノ最小公倍數

$$\frac{1}{3a(x-y)} = \frac{20ab(x+y)}{60a^2b(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{3}{4a^2(x+y)} = \frac{45b(x-y)}{60a^2b(x+y)(x-y)}$$

$$\frac{4}{5a^2b(x^2-y^2)} = \frac{48}{60a^2b(x+y)(x-y)}$$

(例三) $\frac{a}{a-2b}, \frac{1}{4b^2-a^2}, \frac{b}{a+2b}$ ヲ通分セヨ

$4b^2 - a^2 = (2b - a)(2b + a) =$ シテ $a - 2b, 2b - a =$ テ整除シ得ラル、ヲ以テ

$(a - 2b)(a + 2b)$ 共通分母

$$\frac{a}{a-2b} = \frac{a(a+2b)}{(a-2b)(a+2b)}$$

$$\frac{1}{4b^2-a^2} = \frac{-1}{(a-2b)(a+2b)}$$

$$\frac{b}{a+2b} = \frac{b(a-2b)}{(a-2b)(a+2b)}$$

(注意) 算術ト同ク通分セザル前ニ各分數ヲ已約分數トナスヲ要ス

例 題

次ノ分數式ヲ通分セヨ

1. $\frac{b-c}{bc}, \frac{c-a}{ca}, \frac{a-b}{ab}$ 2. $\frac{3x+4}{5x}, \frac{4x-5}{3x^2}, \frac{6x-7}{15x^2}$

3. $\frac{1}{x+1}, \frac{3}{4x+4}, \frac{x}{x^2-1}$

4. $\frac{3}{4x-4}, \frac{4}{3x-3}, \frac{5}{7x-7}$

5. $\frac{a}{a-b}, \frac{b}{a+b}, \frac{ab}{a^2-b^2}$

7. 6. $\frac{a}{b-a}, \frac{b}{a+b}, \frac{ab}{a^2-b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}$
7. $\frac{a}{x-a}, \frac{x}{a-x}, \frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{x^2}{a^2-x^2}$
8. $\frac{a}{a-x}, \frac{a+x}{x^2+ax+a^2}, \frac{ax}{x^3-a^3}$
9. $\frac{1}{(b-c)^2-a^2}, \frac{1}{(c-a)^2-b^2}, \frac{1}{(a-b)^2-c^2}$
10. $\frac{1}{(x-a)(x-b)}, \frac{1}{(b-x)(c-x)}, \frac{1}{(x-c)(x-a)}$

Handwritten work for problem 10:

$$\frac{1}{(b-c)^2-a^2} = \frac{1}{(b-c-a)(b-c+a)}$$

$$= \frac{1}{(a-b+c)(c+b-a)}$$

$$= \frac{1}{(a-b+c)(c+b-a)}$$

第二章

分數式ノ加減法

61. 算術ニ於テ $\frac{5}{14} + \frac{3}{14} = \frac{5+3}{14}$ 及 $\frac{5}{14} - \frac{3}{14} = \frac{5-3}{14}$ トナ
スコトヲ得タリ

代數學ニ於テモ

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

トナスコトヲ得何トナレバ $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ ノ意味ヨリ

$$\frac{a}{c} \times c = a$$

$$\frac{b}{c} \times c = b$$

之ヲ加フレバ $\frac{a}{c} \times c + \frac{b}{c} \times c = a + b$

配分定則ニ因リテ c ナル共通因數ヲ抽キ出セバ

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)c = a + b$$

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ハ之ニ c ヲ乘ズレバ $a + b$ トナルヲ以テ $\frac{a}{c}$
 $+$ $\frac{b}{c}$ ハ $a + b$ ヲ c ニテ除シタル商即 $\frac{a+b}{c}$ ニ等シ故ニ

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

此理ハ減法ノ場合ニ於テモ同様ナリ

若加減スベキ分數ガ同分母ナラザルトキハ先之ヲ通分スレバ上ノ方法ニ因リテ加減シ得ラル、コト算術ニ同ジ

故ニ次ノ加減法則ヲ得

(法則) 加減スベキ分數ヲ通分シ其分

母ヲ分母トシ、分子ニ就テ加減法ヲ

施シタルモノヲ分子トナスベシ

(例一) $\frac{c}{a+b}, \frac{c}{a-b}$ ノ和ヲ求メヨ

$$\begin{aligned} \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a-b} &= \frac{c(a-b)}{(a+b)(a-b)} + \frac{c(a+b)}{(a+b)(a-b)} \\ &= \frac{c(a-b)+c(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2ac}{(a+b)(a-b)} \end{aligned}$$

(例二) $\frac{2a}{x-a} - \frac{3a}{x+a} + \frac{a^2}{x^2-a^2}$ ヲ簡單ニセヨ

$$\begin{aligned} \frac{2a}{x-a} - \frac{3a}{x+a} + \frac{a^2}{x^2-a^2} &= \frac{2a(x+a)}{(x-a)(x+a)} - \frac{3a(x-a)}{(x-a)(x+a)} \\ &+ \frac{a^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{2ax+2a^2-(3ax-3a^2)+a^2}{(x-a)(x+a)} = \frac{6a^2-ax}{(x-a)(x+a)} \end{aligned}$$

例題

次ノ結果ヲ求メヨ

1. $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$ 2. $\frac{3a-5b}{4} + \frac{2a-b-c}{3} + \frac{a+b+c}{12}$

3. $\frac{a-2b}{3c} - \frac{b-3c}{2a} + \frac{4ab+3bc}{6ac}$

4. $\frac{c}{a-b} - \frac{c}{a+b}$ 5. $\frac{1+3x}{1-3x} - \frac{1-3x}{1+3x}$

6. $\frac{a}{x(a-x)} - \frac{x}{a(a-x)}$

7. $\frac{a}{a-x} + \frac{3x}{a+x} - \frac{2ax}{a^2-x^2}$

8. $\frac{a^3+abx-bxy}{a(a^2-y^2)} - \frac{bx}{a(a+y)} - \frac{a}{2(a-y)}$

9. $\frac{x-2a}{x+a} + 2\frac{a^2-4ax}{a^2-x^2} - \frac{3a}{x-a}$

10. $\frac{2b}{a+b} - \frac{3a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

11. $\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+2} + \frac{2x}{(x+2)^2}$

12. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} - \frac{x^2-x^2}{a^2+x^2}$ 13. $x - \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x+1}$

14. $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)}$

$$15. \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x^2-7x+12}$$

$$16. \frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{2}{x^2-4x+3} - \frac{3}{x^2-5x+4}$$

$$17. \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \frac{1}{a+3}$$

$$18. \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

第三章

分數式ノ乗除法

$$62. \text{算術} = \text{於テ} \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7} \quad \frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} \text{トス}$$

ルコトヲ得タリ

$$\begin{aligned} \text{代數學} = \text{於テモ} \frac{b}{a} \times \frac{d}{c} &= \frac{bd}{ac}, \quad \frac{b}{a} \div \frac{d}{c} \\ &= \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} \text{トスルコトヲ得何トナレバ} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} \times a = b$$

$$\frac{d}{c} \times c = d$$

此二式ヲ邊々相乗ズレバ

$$\frac{b}{a} \times a \times \left(\frac{d}{c} \times c \right) = bd$$

交換組合ノ定則ハ分數ニモ適用シ得ラル、ヲ以テ次ノ如クナスコトヲ得

$$\left(\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} \right) \times (ac) = bd$$

斯ク $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$ ハ之ニ ac ヲ乗ズレバ bd トナルヲ以テ

$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}$ は bd を ac にテ除シタル商即 $\frac{bd}{ac}$ = 等シ故 =

$$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$$

又 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$ ナルコトハ $\frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$ ヲ乘ジ $\frac{b}{a}$

トナルヲ以テ明確ナリ

故ニ分數乗除ノ法則ヲ得ルコト次ノ如シ

(法則) 分數ニ分數ヲ乘ズルニハ分母ノ

積ヲ分母トシ分子ノ積ヲ分子トシ

タル分數ヲ作ルベシ

分數ヲ分數ニテ除スルニハ除分數

ノ分母分子ヲ置換ヘタル分數ヲ被

除分數ニ乘ズベシ

(例一) $\frac{3a}{4b} \times \frac{8c}{9a} = \frac{3a \times 8c}{4b \times 9a} = \frac{2c}{3b}$

(例二) $\frac{ab-b^2}{(a+b)^2} \div \frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{b(a-b)}{(a+b)^2} \times \frac{(a-b)(a+b)}{b^2}$
 $= \frac{b(a-b)(a-b)(a+b)}{(a+b)^2 b^2} = \frac{(a-b)^2}{b(a+b)}$

(注意) 分數乘法ハ分母,分子ヲ各別ニ相乘セザル
 前ニ約分シ得ルコト算術ニ同ジ又整數式ハ之
 ヲ分母1ヲ有スル分數ト見做シテ上ノ法則ヲ
 適用スベシ

例題

次ノ各式ノ結果ヲ求ム

1. $\frac{2a}{3b} \times \frac{6bc}{5a^2}$

2. $\frac{a^2}{bc} \times \frac{b^2}{ac} \times \frac{c^2}{ab}$

3. $\frac{a^2b}{x^2y} \times \frac{b^2c}{y^2z} \times \frac{c^2a}{z^2x}$

4. $\frac{4a^2b}{5a^2y} \div \frac{2ab^2}{15xy}$

5. $\frac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4} \div \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$

6. $\frac{1}{x^2-y^2} \div \frac{1}{x-y}$

7. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x^2-1} \times \frac{x-1}{(x+2)^2}$

8. $\frac{6(ab-b^2)}{a(a+b)^2} \div \frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$

9. $\frac{xa}{x+a} \times \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x}\right)$ 10. $\left(b + \frac{a^2}{b}\right) \left(a - \frac{b^2}{a}\right)$

11. $\left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \left(b - \frac{ab}{a+b}\right)$

12. $\left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \div \frac{y}{x^2+y^2}$

13. $(5x^2 - \frac{1}{5}) \div (x + \frac{1}{5})$ 14. $(\frac{x^4}{a^4} - \frac{a^4}{x^4}) \div (\frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2}{x^2})$
15. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \times (\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y})$
16. $(\frac{a}{bc} - \frac{b}{ac} - \frac{c}{ab} - \frac{2}{a}) \times (1 - \frac{2c}{a+b+c})$
17. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$
18. $\frac{x^2+2x-15}{x^2+8x-33} \div \frac{x^2+9x+2}{x^2+7x-44}$
19. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac} \times \frac{x^2-c^2}{x^2-b^2}$
20. $\frac{(a-b)^2+c^2}{(a-c)^2+b^2} \div \frac{c^2+(a-b)^2}{b^2+(c-a)^2}$

雑題

1. $\frac{x^6-1}{x^2-1}$ フ約スベシ
2. $\frac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}$ フ約スベシ
3. $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}$ フ約スベシ
4. $x - \frac{x^2}{x+1} - \frac{x}{x-1}$ フ簡單ニセヨ
5. $\frac{b^2+bc+c^2}{b+c} - \frac{b^2-bc+c^2}{b-c}$ ノ結果ヲ求メヨ

6. $\frac{x}{y} - \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ ノ結果ヲ求メヨ
7. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{2}{(x-1)(x^2-x+1)}$ ノ結果ヲ求メヨ
8. $\frac{1}{x(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x-1)x} + \frac{2}{(x-1)(x+1)}$ ノ結果ヲ求メヨ
9. $\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} + \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ ノ結果ヲ求メヨ
10. $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ ヨリ $\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}$ フ減ズベシ
11. $\frac{2x}{x^4+x^2+1} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}$ ノ結果ヲ求メヨ
12. $\frac{x^2-(2y-3z)^2}{(x+3z)^2-4y^2} + \frac{4y^2-(x-3z)^2}{(x+2y)^2-9z^2} + \frac{9z^2-(x-2y)^2}{(2y+3z)^2-x^2}$ フ簡單ニセヨ
13. $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x^2}{(1-x)(1+x^2)} - \frac{2x^2}{(1+x)(1+x^2)}$ $-\frac{8x^3}{1-x^4}$ フ簡單ニスベシ
14. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$ フ簡單ニセヨ
15. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ フ簡單ニセヨ

$$16. \frac{(b+c)(x^2+a^2)}{(c-a)(a-b)} + \frac{(c+a)(x^2+b^2)}{(a-b)(b-c)} + \frac{(a+b)(x^2+c^2)}{(b-c)(c-a)} \quad \text{ヲ}$$

簡單ニセヨ

$$17. \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x} + \frac{y}{b} - \frac{b}{y}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x} - \frac{y}{b} + \frac{b}{y}\right) \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$18. \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \times \frac{x^3-1}{x^6+1} \times \frac{(x-1)^2(x+1)^2+x^2}{x^4+x^2+1} \quad \text{ヲ}$$

簡單ニセヨ

$$19. \left\{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}\right\} \div \left\{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right\} \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$20. \frac{1}{a + \frac{1}{1 + \frac{a+1}{3-a}}} \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$21. \frac{x}{1 + \frac{x}{y}} - \frac{y}{1 - \frac{y}{x}} - \frac{2}{\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}} \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$22. \frac{1}{bx + \frac{1}{bx + \frac{1}{bx}}} \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$23. \frac{\frac{x^2}{y^2} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{y} + 1\right)}{\frac{x^2}{y^2} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 - \frac{x}{y} \left(\frac{x}{y} + 1\right)} \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$24. y = \frac{3}{4}x \quad \text{ナルトキ} \quad \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{y^2}{x^2-y^2} \quad \text{ヲ簡單}$$

ニセヨ

$$25. x = \frac{a+1}{ab+1}, \quad y = \frac{ab+a}{ab+1} \quad \text{ナルトキ} \quad \frac{x+y-1}{x-y+1} \quad \text{ヲ簡}$$

單ニセヨ

$$26. \left(x - \frac{xy-y^2}{x+y}\right) \left(x - \frac{xy^2-y^3}{x^2+y^2}\right) \div \left(1 - \frac{xy-y^2}{x^2}\right) \quad \text{ヲ簡}$$

單ニセヨ

Handwritten notes and calculations on the right page, including:

$$= \frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$$

$$= \frac{c}{d} \times e = \frac{ce}{d}$$

第五編 一次方程式ノ續

(分數方程式)

第一章

一元方程式

63. 第二編ニ於テ平易ナル一次方程式ヲ説キタリシガ其後進ンデ約數、倍數、分數式ノ計算ヲ説キタルヲ以テ今一次方程式ヲ完結スルコトヲ得

第二編ニ説キタル如ク方程式解法ノ基礎トナルモノハ移項法及分母ヲ除去スル法ナリ然ルニ例一ニ示スガ如ク分母ガ未知數ヲ含ムトキハ分母ヲ除去シテ得タル方程式ノ根ハ原方程式ニ適合セザルコトアルヲ以テ其根ヲ原方程式ニ代入シテ其適否ヲ檢スルヲ要ス

(注意) 次ノ諸例ニ於テハ特種ノ解法ヲ示シタリ

ト雖モ第二編ニ於テ示シタル一般解法ノ法則ニ因リテ解キ得ラル、モノト知ルベシ

$$(例一) \quad \frac{x+3}{2+3x} + \frac{1-4x}{4x+1} - \frac{1-2x}{2+3x} = 0 \text{ヲ解ケ}$$

分母ヲ拂フタメニ分母ノ最小公倍數 $(2+3x)(4x+1)$ ヲ乘ズレバ

$$(x+3)(4x+1) + (1-4x)(2+3x) - (1-2x)(4x+1) = 0$$

$$\text{即} \quad 4x^2 + 13x + 3 + 2 - 5x - 12x^2 - 1 - 2x + 8x^2 = 0$$

$$\text{從テ} \quad 6x + 4 = 0$$

$$\text{故ニ} \quad x = -\frac{2}{3}$$

之ヲ原方程式ニ代入スレバ

$$\frac{-\frac{2}{3} + 3}{0} + \frac{1 + \frac{8}{3}}{-\frac{8}{3} + 1} - \frac{1 + \frac{4}{3}}{0}$$

トナルベシ然ルニ分母ニ0ヲ有スルモノハ無意味ナルヲ以テ $-\frac{2}{3}$ ハ原方程式ニ適セズ即原方程式ハ根ヲ有セズ

此理由ヲ案ズルニ分數方程式ヲ解クトハ右邊ガ0トナル様ニ移項シ且簡約シタルモノ、根ヲ求ムルコトナリ今先此儘ニ計算スレバ

$$(2+3x)(4x+1) \dots\dots\dots \text{共通ノ分母}$$

$$\text{即} \quad \frac{6x+4}{(2+3x)(4x+1)} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{2(3x+2)}{(2+3x)(4x+1)} = 0 \quad (1)$$

之ヲ約スレバ

$$\frac{2}{4x+1} = 0 \quad (2)$$

トナリ根ヲ有セザルコト明カナリ

然ルニ前ノ法ハ單ニ(1)ノ分子ガ0トナル様ニ

x ノ値ヲ求メタルニ相當ス

$$\text{(例二)} \quad \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} \quad \text{ヲ解ケ}$$

分母ヲ除去スル前ニ左右兩邊ノ減法ヲ實行スレバ

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = -\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = -\frac{1}{(x-5)(x-6)}$$

故ニ原方程式ハ

$$-\frac{1}{(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{(x-5)(x-6)}$$

分母ヲ除去シ且各項ノ記號ヲ變スレバ

$$(x-5)(x-6) = (x-2)(x-3)$$

$$\text{即} \quad x^2 - 11x + 30 = x^2 - 5x + 6$$

移項シ且簡約スレバ

$$-6x = -24$$

$$\text{因テ} \quad x = 4$$

此4ハ能ク原方程式ニ適合スルコトヲ知ル

別解法

原方程式ハ次ノ如ク之ヲ記スルコトヲ得

$$\frac{x-2+1}{x-2} - \frac{x-3+1}{x-3} = \frac{x-5+1}{x-5} - \frac{x-6+1}{x-6}$$

$$\text{故} = 1 + \frac{1}{x-2} - \left(1 + \frac{1}{x-3}\right) = 1 + \frac{1}{x-5} - \left(1 + \frac{1}{x-6}\right)$$

$$\text{故} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-6}$$

$$\text{即} \quad \frac{-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{(x-5)(x-6)}$$

此後ハ上ノ如クシテ $x=4$ ヲ得

$$\text{(例三)} \quad \frac{x-a}{x-b} = \frac{(2x-a)^2}{(2x-b)^2} \quad \text{ヲ解ケ}$$

分母ヲ除去スレバ

$$(x-a)(2x-b)^2 = (x-b)(2x-a)^2$$

$$\text{即} \quad (x-a)(4x^2 - 4bx + b^2) = (x-b)(4x^2 - 4ax + a^2)$$

$$\text{即} \quad 4x^3 - 4ax^2 - 4bx^2 + 4abx + b^2x - ab^2$$

$$= 4x^3 - 4ax^2 - 4bx^2 + 4abx + a^2x - a^2b$$

移項シ且簡約スレバ

$$(a^2 - b^2)x = a^2b - ab^2$$

$$\text{故} = (a+b)(a-b)x = ab(a-b)$$

$$\text{從テ} \quad x = \frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{ab}{a+b}$$

此 x ノ値ヲ原方程式ニ代入スレバ次ノ如ク左右兩邊夫レ々々 $\frac{a^2}{b^2}$ トナリ能ク適合スルコトヲ知ル

$$\frac{\frac{ab}{a+b} - a}{\frac{ab}{a+b} - b} = \frac{ab - a^2 - ab}{ab - ab - b^2} = \frac{-a^2}{-b^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{2ab}{a+b} - a\right)^2}{\left(\frac{2ab}{a+b} - b\right)^2} &= \frac{\left(\frac{2ab - a^2 - ab}{a+b}\right)^2}{\left(\frac{2ab - ab - b^2}{a+b}\right)^2} = \frac{(ab - a^2)^2}{(ab - b^2)^2} \\ &= \frac{a^2(b-a)^2}{b^2(a-b)^2} = \frac{a^2}{b^2} \end{aligned}$$

例 題

次ノ方程式ヲ解ケ

$$1. \quad \frac{12}{x} + \frac{1}{12x} = \frac{29}{24}$$

$$2. \quad \frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3}$$

$$3. \quad \frac{128}{3x-4} = \frac{216}{5x-6} \quad 4. \quad \frac{3x-2}{3x+4} = \frac{4x-5}{4x-1}$$

$$5. \quad \frac{x+2}{x-4} + \frac{x+4}{x-2} = 2 \quad 6. \quad \frac{4x+17}{x+3} + \frac{3x-10}{x-4} = 7$$

$$7. \quad \frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2+x+1}{x+1} = 2x$$

$$8. \quad \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+4} = 0$$

$$9. \quad \frac{2x^2-11x-39}{x-8} = \frac{4x^2+8x+2}{2x-1}$$

$$10. \quad \frac{3+x}{3-x} - \frac{2+x}{2-x} - \frac{1+x}{1-x} = 1$$

$$11. \quad \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-8}$$

$$12. \quad \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}$$

$$13. \quad \frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$$

$$14. \quad \frac{3-2x}{1-2x} - \frac{2x-5}{2x-7} = 1 - \frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$$

$$15. \quad (2x+1.5)(3x-2.25) = (2x-1.125)(3x+1.25)$$

$$16. \quad \frac{b}{a} - \frac{dx}{c} = \frac{ax}{b} - \frac{c}{d}$$

$$\textcircled{17}. \frac{ax}{a+c} + 2ac - a^2 = \frac{cx}{a-c} - c^2$$

$$\textcircled{18}. \frac{bx-c}{b-c} - \frac{ax+c}{a+c} = b \quad \textcircled{19}. a \frac{x-a}{b} + b \frac{x-b}{a} = x$$

$$\textcircled{20}. \frac{a}{x+c} + \frac{b}{x+b} = \frac{a+b}{x}$$

$$\textcircled{21}. \frac{mx-a-b}{nx-c-d} = \frac{mx-a-c}{nx-b-d}$$

$$\textcircled{22}. \frac{m(x+a)}{x+b} + \frac{n(x+b)}{x+a} = m+n$$

第二章

聯立方程式

64. 聯立方程式ノ分數項ヲ有スルモノ及其他ノ解法ヲ例ニ就テ示サントス

$$\begin{aligned} \text{(例一)} \quad \frac{12}{x} + \frac{8}{y} &= 8 & (1) \\ \frac{27}{x} - \frac{12}{y} &= 3 & (2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{12}{x} + \frac{8}{y} &= 8 \\ \frac{27}{x} - \frac{12}{y} &= 3 \end{aligned}} \right\} \text{ヲ解ケ}$$

此場合ニハ分母ヲ除去スルコトナク此儘ニテ之ヲ解クコトヲ得

今先 y ヲ消去スル目的ヲ以テ(1)ニ3ヲ乘ジ(2)ニ2ヲ乘ジ邊々相加フレバ

$$\begin{aligned} \frac{36}{x} + \frac{24}{y} &= 24 \\ \frac{54}{x} - \frac{24}{y} &= 6 \\ \hline \frac{90}{x} &= 30 \quad (2)' \end{aligned}$$

$$\text{此 (2)' ヨリ} \quad 90 = 30x$$

$$\text{故ニ} \quad x = 3$$

之ヲ(1)ノ x ニ代入セバ

$$\frac{12}{3} + \frac{8}{y} = 8$$

故ニ $4 + \frac{8}{y} = 8$

4ヲ移ストキハ $\frac{8}{y} = 4$

分母ヲ除去スレバ $8 = 4y$

故ニ $y = 2$

此 $x=3, y=2$, ヲ(1), (2)ノ式ニ代入スレバ能ク適

合スルコトヲ見ルベシ

$$\begin{cases} a^2x + b^2y = c^2 & (1) \\ ax + by = c & (2) \end{cases} \text{ヲ解ケ}$$

y ヲ消去スル目的ヲ以テ(2)ニ b ヲ乘ジ(1)ト邊

々相減ズレバ

$$\begin{array}{r} a^2x + b^2y = c^2 \\ abx + b^2y = cb \\ \hline (a^2 - ab)x = c^2 - cb \end{array} \quad (1')$$

(1)'ヨリ $x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$

x ノ此値ヲ(2)ニ代入スレバ

$$\frac{ac(c-b)}{a(a-b)} + by = c$$

移項スレバ

$$by = c - \frac{c(c-b)}{a-b}$$

即 $by = \frac{c(a-b) - c(c-b)}{a-b}$

即 $by = \frac{c(a-c)}{a-b}$

b ニテ兩邊ヲ除スレバ

$$y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)} \quad \text{或ハ} \quad y = \frac{c(c-a)}{b(b-a)}$$

$$x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}, \quad y = \frac{c(a-c)}{b(a-b)} \quad \text{ハ次ノ如ク能ク原方程}$$

式ニ適合ス

先(1)ノ左邊ハ

$$\begin{aligned} a^2 \times \frac{c(c-b)}{a(a-b)} + b^2 \times \frac{c(a-c)}{b(a-b)} &= \frac{ac(c-b)}{(a-b)} + \frac{bc(a-c)}{(a-b)} \\ &= \frac{ac^2 - bc^2}{a-b} = \frac{c^2(a-b)}{a-b} = c^2 \end{aligned}$$

即右邊ト相等シキコトヲ知ル

次ニ(2)ノ左邊ハ

$$\begin{aligned} a \times \frac{c(c-b)}{a(a-b)} + b \times \frac{c(a-c)}{b(a-b)} &= \frac{c(c-b)}{a-b} + \frac{c(a-c)}{a-b} \\ &= \frac{ca - cb}{a-b} = \frac{c(a-b)}{a-b} = c \end{aligned}$$

即右邊ト相等シキコトヲ知ル

(注意) 原方程式ヲ檢スルニ x, y ノ係數ハ a, b ノ差

アルノミ故ニ $x = \frac{c(c-b)}{a(a-b)}$ ニ於テ b ト a トヲ交換

スレバ $y = \frac{c(c-a)}{b(b-a)}$ ヲ得

$$\begin{aligned} \text{(例三)} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 3 & (1) \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 5 & (2) \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 4 & (3) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 3 \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 5 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 4 \end{aligned}} \right\} \text{ヲ解ケ}$$

次ノ如ク (2) ト (1) ト邊々相減ジテ z, x ノ二元方程式ヲ得

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 5 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= 3 \\ \hline \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= 2 & (2)' \end{aligned}$$

今 (2)' ト (3) ト邊々相加ヘテ (2)'' トセン

$$\begin{aligned} \frac{z}{c} - \frac{x}{a} &= 2 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} &= 4 \\ \hline \frac{2z}{c} &= 6 & (2)'' \end{aligned}$$

此 (2)'' ヨリ $2z = 6c$

故ニ $z = 3c$

此 z ノ値ヲ (3) ニ代入スレバ x ノ値ヲ得即

$$x = a$$

x ノ此値ヲ (1) ニ代入スレバ y ノ値ヲ得即

$$y = 2b$$

此 $x = a, y = 2b, z = 3c$ ヲ原方程式ニ代入スレバ能

ク之ニ適合スルコトヲ見ルコト容易ナリ

例題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

1. $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 4, \quad \frac{9}{x} - \frac{2}{y} = 2$

2. $\frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 3, \quad \frac{6}{x} - \frac{2}{y} = 1$

3. $x + \frac{2}{y} = 9, \quad 3x - \frac{1}{y} = 13$

4. $x - 4y = 7, \quad \frac{x}{3y} + \frac{11}{10} = \frac{4x - 5y}{5y}$

5. $\frac{x+1}{y-1} - \frac{x-1}{y} = \frac{6}{y}, \quad x - y = 1$

6. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, \quad bx - ay = 0$

7. $x+y=a+b, bx+ay=2ab$
8. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$
9. $x+y=c, ax-by=c(a-b)$
10. $ax-by=a^2-ab, bx-ay=ab-b^2$
11. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\frac{5}{6}, \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4}{z}$
12. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=2, \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$
13. $y+z=a, z+x=b, x+y=c$
14. $y+z-x=a, z+x-y=b, x+y-z=c$
15. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1, \frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1$
16. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=3, \frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=1, \frac{2a}{x}-\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=0$

第三章

一次方程式ノ應用問題

65. 本章ニ於テハ一元方程式及聯立方程式ノ問題ノ解法ヲ記セントス

問題ヲ解クニ一元方程式ヲ用キテモ聯立方程式ヲ用キテモ解キ得ラル、モノアリ何等ノ要求ナキ場合ニハ孰レヲ以テスルモ可ナリ

問題ノ解法ニ多クノ未知數ヲ用キ從テ多クノ聯立方程式ヲ立ツルトキハ之ヲ一元方程式ヲ以テスルニ比シテ了解シ易ケレドモ其計算ニ於テハ一元方程式ノ簡單ナルニ若カザルベシ之ヲ換言スレバ概ネ一得一失アリト知ルベシ

(例一) 時計アリ二時ノ後時針、分針相重ナル時ヲ問フ

時計ノ盤面ノ周圍ヲ60等分シ其各ヲ分ト名ツケ時針、分針ガ此周圍ヲ廻ルト見做セバ分針ガ60分ヲ行ク間ニ時針ハ5分ヲ行クヲ以テ分針ハ時針ニ比シ12倍ノ速度ヲ有ス

正二時ノ時ニハ分針ハ時針ニ後ル、コト10分ナリ故ニ時針、分針ガ相重ナルニハ分針ハ時針ヨリ10分多ク進ムヲ要ス

故ニ正二時ノ分針ノ位置(即圖ノ12ト記シタル位置)ヨリ兩針相重ナル位置マデ分針ノ行ク分ノ數ヲ x トスレバ時針ハ其間ニ $\frac{x}{12}$ ヲ進ミ其差10分ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得

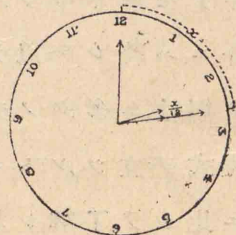
$$x - \frac{x}{12} = 10$$

之ヲ解クトキハ

$$12x - x = 120$$

$$11x = 120$$

$$x = 10\frac{10}{11}$$



即時針、分針相重ナルマデニ分針ハ10分 $\frac{10}{11}$ 進ムヲ要シ從テ求ムル時刻ハ2時10分 $54\frac{6}{11}$ 秒ナリ

之ヲ問題ノ上ニ檢スルニ分針10分 $\frac{10}{11}$ ヲ行ク間ニ時針ハ此十二分ノ一即 $\frac{10}{11}$ 分進ムヲ以テ兩針相重ナリ即此答解ハ能ク適合スルヲ知ル

(例二) 一工事アリ甲乙丙三人合力シテ之ニ從

事セバ3日間ニ之ヲ成シ得ベク甲乙二人ナラバ3.2日間、乙丙二人ナラバ12日間ニ之ヲ成シ得ベシト云フ各一人ニテ成ス日數ヲ求ム

甲乙丙ノ各ガ一人ニテ成シ得ベキ日數ヲ夫レ夫レ x, y, z トスレバ各一日ニ其事ノ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ヲ成シ3日ニハ同事ノ $\frac{3}{x}, \frac{3}{y}, \frac{3}{z}$ ヲ成スベク而シテ此等ノ和ハ一工事ニ等シ故ニ

$$\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 1 \quad (1)$$

同様ニ甲ト乙トハ3.2日間ニ其事ヲ成スヲ以テ次ノ(2)ヲ得、乙ト丙トハ12日間ニ之ヲ成スヲ以テ(3)ヲ得

$$\frac{3.2}{x} + \frac{3.2}{y} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{12}{y} + \frac{12}{z} = 1 \quad (3)$$

聯立方程式(1),(2),(3)ヲ解キテ x, y, z ヲ求ムレバ

$$x=4, \quad y=16, \quad z=48$$

ヲ得即甲4日、乙16日、丙48日ナリ

之ヲ檢スルニ一日ニ甲ハ其工事ノ $\frac{1}{4}$ 、乙ハ $\frac{1}{16}$ 、

丙ハ $\frac{1}{48}$ ヲナスヲ以テ甲乙丙共力セバ一日ニ此和 $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}$ 即 $\frac{1}{3}$ ヲナシ從テ其工事ヲ3日ニテ成スコトヲ知ル同様ニ甲乙二人ナラバ3.2日, 乙丙二人ナラバ12日ヲ要スルヲ知ル

(例三) 二數字ヨリ成ル數アリ本數ハ數字ノ和ノ5倍ニ等シク本數ニ9ヲ加フレバ數字ノ順序ガ本數ノ數字ノ順序ト逆ナル數ヲ得ルト云フ本數如何

x ヲ十ノ位ノ數トシ y ヲ一ノ位ノ數トスレバ本數ハ $10x+y$ ナリ然ルニ此數ハ數字ノ和ニ5倍ス故ニ

$$10x+y=5(x+y) \quad (1)$$

數字ノ順序逆トナルトキハ y ハ十ノ位ニ來リ x ハ一ノ位ニ來ルヲ以テ其數ハ $10y+x$ ナリ然ルニ此數ハ本數ニ9ヲ加へタル $10x+y+9$ ニ等シ故ニ

$$10x+y+9=10y+x \quad (2)$$

聯立方程式(1),(2)ヲ簡單ニスレバ

$$5x-4y=0 \quad (1)'$$

$$9x-9y=-9 \text{ 即 } x-y=-1 \quad (2)'$$

此方程式ヲ解クトキハ

$$x=4, \quad y=5$$

故ニ本數ハ45ナルコトヲ知ル

之ヲ問題ノ上ニ檢スルニ45ハ數字ノ和(4+5)ノ5倍ニ當リ45ニ9ヲ加フレバ54トナリ丁度數字ノ順序ガ前ト逆トナルコトヲ知ル

(注意) 已知數ノ關係ヨリ方程式ノ根ノ成立セザルコトアリ即一元方程式ニ於テ分母ヲ除去シ又移項シ且計算シタル後ノ結果ガ

$$0x=b \text{ 或ハ } 0x=0$$

ナル形ヲナストキ是ナリ

前者ニ於テハ x ニ如何ナル數ヲ代入スルモ0ニ乘ジテ b トナル數ナク即 x ノ値ヲ求ムルコト不能ナルベク後者ニ於テハ x ガ如何ナル數ナルモ之ヲ0ニ乘ズルトキハ0トナリ即後者ニ適合スル x ノ値不定ナルベシ

次ニ二元方程式ニ於テハ其二ツノ方程式ガ

$$\begin{cases} ax+by=c \\ ax+by=d \end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases} ax+by=c \\ arx+bry=cr \end{cases}$$

ナル形ヲナスコトアリ

前者ニ於テハ二方程式ノ左邊相等シク右邊相異ナル理ナキヲ以テ不能ナルベク後者ニ於テハ然ラザルモ一個ノ二元方程式ニ過ギザルヲ以テ x, y ノ値相關聯シテ變化シ全ク不定ナルベシ

又二元方程式ガ

$$0x+0y=0, 0x+0y=0$$

ノ如クナルトキハ x, y ノ値不定ニシテ而カモ x, y ハ全ク獨立的ニ不定ナリ

此等ノ場合ニ遭遇シタルトキハ題意ヲ吟味シテ之ニ適當ナル解釋ヲ附スルヲ要ス

例 題

1. 二數アリ其大ナル數ヲ小ナル數ニテ除スレバ商ハ5ニシテ其餘數ハ7ナルベク大數ニ2ヲ加フルトキハ小數ニ6倍スト云フ二數各如何

2. 鉛筆一「ダース」ノ價ガ1「シルリング」ダケ騰貴スルトキハ1「ポンド」ニテ買ヒ得ラル、數ハ元價ノトキ15「シルリング」ニテ買ヒ得ラル、數ニ等シト云フ「ダース」ノ價何程ナリシカ

3. 金2圓50錢ヲ以テ牛肉ヲ買フニ若牛肉ノ價今ヨリ2割下落スルトキハ今ヨリ5斤多ク買ヒ得ベシト云フ現今牛肉一斤ノ價如何

4. 甲乙二人アリ一哩ヲ行クニ乙ハ甲ヨリ3分間ダケ多ク要シ甲ガ6哩行ク間ニ乙ハ5哩行クト云フ毎時ノ速サ各如何

5. 甲乙ノ脚夫アリ甲ハ某地ヲ出發シ5時間ニ8里ノ割ニテ行キ乙ハ甲ヨリ2時間後同地ヲ出發シ3時間ニ5里ノ割ニテ同方向ニ行ケリ何時ノ後乙ハ甲ニ追ヒ付クベキカ

6. 犬ト兎トアリ兎ノ4歩スル間ニ犬ハ3歩シ、犬ノ2歩ノ長サハ兎ノ3歩ニ等シト云フ今兎ハ犬ヨリモ50歩(兎ノ足ニテ)前ニアルトキ犬ガ兎ニ追ヒ付クニハ何歩スベキカ

7. 酒精ト水ト混合セルモノアリ其酒精ノ量ハ其全量ノ半ヨリ25升多ク水ノ量ハ全量ノ三分ノ一ヨリ5升少ナシト云フ各何程ナルカ

8. 時計アリ十二時ニ於テ時針、分針相會セリ

$$x - \frac{1}{12}x = 6$$

次ニ相會スルハ何時ナルカ

又六時ノ後ニ相會スルハ何時ナルカ

9. 時針,分針三時ノ後直角トナル時刻ヲ問フ
又五時ノ後ニ直角トナルハ何時ナルカ

10. 時針,分針六時ノ後反對ノ方向ニアリテ一
直線トナルハ何時ナルカ

11. 時計アリ一時ト二時トノ間ニ於テ分針ハ
時針ヨリ一分進ミタリト云フ其時刻ヲ求メヨ

12. 時計ヲ見ルニ時針ハ XI ト XII トノ間ニ,分
針ハ XII ト I トノ間ニアリ其後若干時ヲ經テ時
針ト分針トガ入レ換ハレリト云フ始メノ時ハ何
時ナリシカ

13. 分數アリ分母ト分子トノ差 12 ニシテ分母
ト分子トニ 5 ヲ加フレバ $\frac{3}{4}$ トナルト云フ元分數
如何

14. 金若干圓ヲ年利 6 歩ニテ貸シ附ケタルニ 10
年ノ後其利息ハ元金ヨリ 10 圓少ナカリシト云フ
元金ノ高如何

15. 金若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ配分セシニ甲
ハ全額ノ四分ノ一ヨリ 20 圓多ク取り乙ハ其残り

ノ半分ヨリ 25 圓少ク取り丙ハ其残りヲ取りタル
ニ其金額 60 圓ナリシト云フ甲乙ノ取り分各如何

16. 甲乙二人アリ金若干圓ノ内ヨリ甲ハ先 2 圓
ヲ取り後其残りノ六分ノ一ヲ取り其後ニ於テ乙
ハ先 3 圓ヲ取り又其残りノ六分ノ一ヲ取りシユ
其金額相等シカリシト云フ各ノ所得金如何

17. 長サ八寸ノ棒アリ重サナキモノト假定シ
其一端ニ 70「グラム」他ノ一端ニ 40「グラム」ノモノ
ヲ置キ之ヲ水平ニ保タシメントス支點ヲ如何ナ
ル所ニ置クベキカ但水平ニナスニハ支點ト一端
トノ距離ノ比ヲ重サノ反比ニ等シクスルヲ要ス

18. 甲乙二人アリ其カスレバ $3\frac{3}{7}$ 日ニ成ルベキ
一工事ヲ甲一人ニテ 5 日間働キタル後乙之ニ代
リテ其殘業ヲ $2\frac{1}{4}$ 日ニテ成シタリト云フ各單獨
ニテナストキハ何日ニテ成ルカ

19. 甲乙丙ノ職人アリ或一事ヲ甲乙ニテ爲ス
トキハ 12 日,甲丙ニテ爲ストキハ 15 日,三人ニテ爲
ストキハ 10 日ニテ成ルト云フ各一人ニテ爲スニ
要スル日數ヲ問フ

20. 茶 4 斤 珈琲 30 斤ヲ 28 圓 60 錢ニ買ヒ之ヲ賣リ

茶ニハ1割2分、珈琲ニハ1割5分ノ利益ヲ得テ賣上代價32圓50錢トナリタリト云フ各一斤ノ原價ヲ求ム

21. 三數字ヨリ成レル數アリ此數ハ其三ツノ數字ノ和ノ24倍ニシテ逆ニ書キタル數ハ元數ヨリ396多ク、此數ノ十ノ位ト一ノ位トノ數ニテ成レルモノハ百ノ位ノ數ノ8倍ナリト云フ元數如何

22. 二位ノ數アリ之ヲ5ニテ除スレバ其商トシテ十ノ位ノ數字ノ2倍ヲ得テ殘數ハ1個ナリ又8ニテ除スレバ其商ハ一ノ位ノ數字ノ5倍ヲ得テ殘數ハ一個ナリト云フ此數ヲ求メヨ

23. 男子1人女子8人ノ一日ノ賃錢ノ和ハ4圓40錢ニシテ男子4人ノ賃錢ハ女子6人ノ賃錢ヨリ12錢多シト云フ然ラバ女子一人ノ賃錢如何

24. 甲乙二人18町ノ道ヲ競走スルニ甲ハ乙ニ14間ヲ讓ルトキハ甲ハ乙ヨリ51秒ダケ早く着ス甲若乙ヨリ1分55秒後ニ出發スルトキハ88間負クベシト云フ各別ニ18町ヲ走ル時間ヲ求ム

25. 甲乙ノ汽車アリ其長サ各92尺、84尺ナリ平行セル軌道ヲ逆方向ニ進行スレバ二車ノ互ニ遭ヒシヨリ分ル、マデノ時間ハ1.5秒ニシテ同方向

ニ進行スレバ甲車ガ乙車ヲ超ユルニ6秒時間ヲ要スト云フ各車ノ速度ヲ求ム

26. $\frac{2}{3}$ ニ等シキ分數アリ分母、分子ノ各ニ同ジ或數ヲ加フルトキハ $\frac{8}{11}$ トナリ分母子ノ各ヨリ前ヨリ一個大ナル數ヲ減ズルトキハ $\frac{5}{9}$ トナルト云フ此分數如何

27. 一汽車アリ一定ノ速度ヲ以テ進行スルコト1時間ノ後或危害ニ遭ヒ15分間停車シ其後ハ前速度ノ四分ノ三ヲ以テ進行シタルタメ定時ヨリ24分遅クレテ到着シタリ然レドモ其危害ガ尙5哩ダケ進ミタル後ニ起リ前ト同様ニ停車シタランニハ定時ヨリ21分遅クルベシト云フ前ニ定メタル速度及二地ノ距離如何

28. 一水夫一時間ニ流速度2哩ノ川上ノ一地ヨリ1時40分間漕ギ下リ引キ返ヘシテ出發點ヨリ1.5哩下ノ地マデ漕ギ上リシニ總ベテ4時15分間ヲ費シタリト云フ始メニ漕ギ下リシ哩數如何

雜 題

次ノ(1)ヨリ(15)マデノ方程式ヲ解クベシ

$$1. (x+7)(x+1)=(x+3)^2 \quad 2. \frac{x-1}{x-2} = \frac{7x-21}{7x-26}$$

$$3. \frac{x-4}{3} + (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - 4$$

$$4. (x+1)(x+2)(x+3) = (x-1)(x-2)(x-3) \\ + 3(4x-2)(x+1)$$

$$5. (2x+1.5)(3x-2.25) = (2x-1.125)(3x+1.25)$$

$$6. a(x-a) + b(x-b) + 2ab = 0$$

$$7. \frac{b}{a} - \frac{dx}{c} = \frac{ax}{b} - \frac{c}{d} \quad 8. \frac{a-b}{x-c} = \frac{a+b}{x+c}$$

$$9. \frac{x-a}{x-b} - \frac{x+a}{x+b} = \frac{2ax}{x^2-b^2}$$

$$10. (x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 = 3(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$11. (x+a)(2x+b+c)^2 = (x+b)(2x+a+c)^2$$

$$12. a(2x-y) + b(2x+y) = c(2x-y) + d(2x+y) = 1$$

$$13. a(x+y) + b(x-y) = 1, \quad a(x-y) + b(x+y) = 1$$

$$14. x+y+z = a+b+c, \quad x+a = y+b = z+c$$

$$15. x-ay+a^2z = a^3, \quad x-by+b^2z = b^3, \quad x-cy+c^2z = c^3$$

16. 分數アリ分子=1ヲ加ヘ分母ヨリ1ヲ減ズ
ルトキハ其分數ハ1トナリ分子=分母ト同ジ數
ヲ加ヘ分母ヨリ分子ト同ジ數ヲ減ズレバ4トナ
ルト云フ元分數如何

17. 金若干圓ヲ甲乙丙丁戊ノ五人ニ分配スル
ニ乙ハ甲ヨリ20圓少ナク、丙ハ乙ヨリ32圓多ク、丁
ハ丙ヨリハ10圓少ナク、戊ハ丁ヨリ15圓多ク受取
リシニ戊ハ恰カモ甲乙二人分ノ和ニ當レリト云
フ各人ノ取リ分如何

18. 甲乙二工アリ一工事ヲ甲ハ30日ニテ爲シ
乙ハ20日ニテ爲スト云フ甲先此工事ヲ成スコト
若干日ニシテ乙之ニ代リテ甲ノ從事セシヨリ10
日多ク從事シテ其工事ヲ成就セリト云フ初メニ
甲ノ働キシ日數ヲ求ム

19. 或將一隊ノ兵ヲ二等分シテ各中空ナル方
陣ヲ作りシニ一ハ3列、一ハ5列ニシテ一方陣ハ
他ノ方陣ノ空所ニ容ル、コトヲ得ルト云フ兵員
ノ數如何

20. 一商人若干ノ資本ヲ以テ商業ヲ始メシニ
初年ノ末ニ至リテ其資本ノ二倍ヨリ100圓少キ
金額ヲ利シ次年ノ末ニ於テモ亦此ノ如クニシテ
此年末ノ資産ハ初ノ資本ノ四倍トナリシト云フ
初ノ資本金幾何ナリシカ

21. 學生アリ初年ニ若干ノ金ヲ所持セシニ親

ヨリ其所持金ト同額ノ金ヲ貰ヒテ内20圓ヲ書籍費ニ拂ヒ第二年ニハ殘額ト同様ノ金額ヲ親ヨリ貰ヒ内20圓ヲ書籍費ニ拂ヒ第三年ニモ亦此ノ如クセシニ其年末ニハ毫モ殘金ナキニ至レリト云フ初メ此學生ノ所持セシ金高如何

22. 時計ノ分針ガ4時ト5時トノ間ニ於テ時針ヨリ13分先キニアル時刻ヲ求ム

23. 或人金若干圓ヲ所持シ田地ヲ買ヘリ然ルニ若一段ノ價ガ4圓安キモノナルトキハ其金額ニテ買ヒ得ベキ田地ハ前ヨリ7段多カルベク又若一段ノ價ガ18圓高キモノナルトキハ其金額ニテ買ヒ得ベキ田地ハ最初ヨリ15段少ナルベシト云フ初メノ所持金ノ高如何

補習雜題 I.

1. $(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + s^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ナルコトヲ證明セヨ但 $2s = a + b + c$ ナリ
2. $(a^2 - bc)(b - c) + (b^2 - ca)(c - a) + (c^2 - ab)(a - b) = 0$ ヲ證明セヨ

3. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x + y + z)(y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$ ヲ證明スベシ

4. $2x^3 - x^2 - 30x + 30$ ヲ $x^2 + 3x - 5$ ニテ除スレバ其餘數如何

5. $2x^3 + 3ax^2 + 4a^2x - 6a^3$ ト $2x^3 - 3ax^2 + 4a^2x + 6a^3$ トノ平方ノ差ヲ求メヨ

6. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

$$ax^2 - ay^2 - bx^2 + by^2$$

$$a^2x + a(1 - x^2) - x$$

$$3(a + b)^2 - 2(a^2 - b^2) - a(a + b)$$

$$(1 + a)^2(1 + b^2) - (1 + b)^2(1 + a^2)$$

7. $\frac{x^3}{125} + \frac{y^3}{27}$ ヲ $\frac{x}{5} + \frac{y}{3}$ ニテ除セヨ

8. $(1 + 6a + 6a^2)^3 + (3 + 12a + 12a^2)^3$ ヲ $(2 + 6a + 6a^2)^2$ ニテ整除シ得ラルヽコトヲ證明セヨ

9. $6x^3 - 23x^2 - 8x + 5$, $6x^4 - 15x^3 - 34x^2 - 22x - 5$ ノ最大公約數及最小公倍數ヲ求メヨ

10. $x = \frac{b}{c}$ ナルトキ $\frac{a^2 + b^2}{bx} - \frac{c^2x}{b}$ ヲ簡單ニセヨ

11. $\frac{1}{x+1 + \frac{1}{x-1 + \frac{1}{x+1}}}$ ヲ簡單ニセヨ

$$12. \left(\frac{a}{a+2} - \frac{a-2}{a} \right) \div \left(\frac{a}{a+2} + \frac{a-2}{a} \right) \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

次ノ方程式ヲ解ケ (13-18)

$$13. (x+7)(x+1) = (x+3)^2$$

$$14. (x-9)(x-7)(x-5)(x-1) = (x-2)(x-4)(x-6) \times (x-10)$$

$$15. \frac{a}{x} = \frac{b}{x-a+b} \quad 16. a \frac{x-a}{b} + b \frac{x-b}{a} = x$$

$$17. \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0, \quad \frac{x+y+b}{a} + \frac{x-y-a}{b} = 0$$

$$18. ay+bx=c, \quad cx+az=b, \quad bz+cy=a$$

19. 一汽船アリ或水流ノ速サニ5倍スル速サヲ以テ其流レヲ下ルコトヲ得ルト云フ而シテ其河ヲ45哩ヲ遡ル時間ハ同距離ヲ下ル時間ヨリ2時間多シト云フ水流ノ速サヲ問フ

20. 人アリ一頭ニ付70圓ノ牛若干頭ヲ買ヒ20頭ニ付10圓宛ノ費用ヲ費シ每頭80圓ニ賣リテ836圓ノ利ヲ得タリト云フ牛ノ頭數ヲ求ム

21. 甲乙二人アリ共ニ旅行セシニ一夜盜難ニ罹レリ盜難前ニ甲ハ金100圓ヲ所持シ乙ハ48圓ヲ所持セシニ盜難ノタメニ甲ノ失ヒシ金高ハ乙ノ失ヒシ金高ニ二倍シ而シテ甲ノ殘金ノ高ハ乙

ノ殘金ノ高ニ三倍セリト云フ各人ノ失ヒシ金額ヲ求ム

22. 一商人金17圓6錢ニテ甲茶15斤ト乙茶28斤トヲ買ヘリ然ルニ甲茶ヲ賣リテ一割ヲ損シ乙茶ヲ賣リテ3割ヲ益シ差引1圓87錢8厘ノ利益アリシト云フ各一斤ノ原價ヲ求ム

補習雜題 II.

$$1. 13 - [2x - \{3 + 4(x-2) - 3(5-x)\} - 2] \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$2. (x-a)^3 + (x-b)^3 + (x-c)^3 - 3(x-a)(x-b)(x-c) \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

3. 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

$$I. a^2 - 5ab - 24b^2 \quad II. x^5 - x^2y^3$$

$$4. 2x^3 - x^2 - 8x + 4 \text{ヲ因數ニ分解セヨ}$$

$$5. x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \text{及} x^3 - 2x^2 - x + 2 \text{ノ} G. C. M. \text{及} L. C. M. \text{ヲ求メヨ}$$

$$6. \frac{2x}{x^2-2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2} - \frac{x+2}{x^2+2x+2} \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

$$7. \frac{x-3}{2x+1} + \frac{2x-1}{4x-3} = 1 \text{ヲ解ケ}$$

$$8. \frac{2}{5} \left(6 + \frac{x-1}{3} \right) = \frac{3x}{2} - 2 - \frac{2(7x-9)}{15} \quad \text{ヲ解ケ}$$

$$9. \frac{x^2 - a^2}{bx} - \frac{a-x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x} \quad \text{ヲ解ケ}$$

$$10. \frac{x}{a+1} - \frac{y}{a-1} = 2, \quad \frac{x-y}{2a} = \frac{x+y}{a+1} \quad \text{ヲ解ケ}$$

$$11. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 1 \quad \text{ヲ解ケ}$$

12. 或農夫若干ノ羊ノ群ヲ有セリ其中若干ヲ賣リタルガ其殘リハ其賣リシモノニ $1\frac{1}{5}$ 倍セリ而シテ其後尙15頭賣リタルガ爲メニ初ノ數ノ半トナリタリト云フ初メノ羊ノ數如何

13. 或選舉ニ於テ A, B, C, D ノ候補者ヨリ二人ヲ選バントス而シテ選舉者ノ三分ノ一ハ A, B ヲ投票シ60人ハ B, C ヲ投票シ20人ハ棄權シ殘リハ A, D ヲ投票セリ而シテ其結果トシテ A, D ハ選舉セラレ B ハ其次點トナリ D ノ三分ノ二ヲ探レリト云フ選舉人ノ數及各候補者ノ得票數如何

補習雜題 III.

1. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ (39年神戸高商)

$$\frac{x^3 - x^2 - 13x + 4}{2x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 11x - 4}$$

2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ (39年神戸高商)

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}$$

3. 次ノ各式ヲ因數ニ分テ (40年山口高商)

$$A. x^2 + 9x - 36 \quad B. bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$$

$$4. \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \quad \text{ヲ簡$$

單ニセヨ (42年長崎高商)

5. 次ノ方程式ヲ解クベシ (34年海軍機關)

$$\frac{x-3}{4} - \frac{2x-5}{6} = \frac{41}{60} + \frac{3x-8}{5} - \frac{5x+6}{15}$$

6. $3x^3 + x^2 - 8x + 4, 3x^3 + 7x^2 - 4, x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ (35年同上)

$$7. \frac{x+y}{x^3-y^3} + \frac{x-y}{x^3+y^3} - \frac{2(x^2-y^2)}{x^4+x^2y^2+y^4} \quad \text{ヲ簡單ニセヨ}$$

(35年同上)

8. 次ノ式ヲ最簡ニセヨ (40年同 上)

$$\frac{1}{a-b+\frac{1}{a+b+\frac{1}{a-b}}}$$

9. $a+bx^2$ ナル式ノ値ガ $x=10$ ナルトキ 100 ニシテ $x=11$ ナルトキ 120 ナリト云フ $x=12$ ナルトキノ値如何 (38年商船)

10. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$x+y+z=0, \quad ax+by+cz=0, \quad a^2x+b^2y+c^2z=1$$

11. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$ ヲ因子ニ分解セヨ (37年神戸高商)

12. 容量二十一石ノ水槽ニ水ヲ注入スベキ甲乙二管アリ今甲管ヲ四時間,乙管ヲ五時間開クトキハ水九石ヲ注入シ得ベク又甲管ヲ七時間,乙管ヲ三時間半開クトキハ水十二石六斗ヲ注入シ得ベシト云フ若シ甲乙兩管ヲ同時ニ開クトキハ幾時間ニシテ此水槽ヲ滿タシ得ベキカ

(37年東京高商)

13. 甲乙二人同時ニ相離レタル兩地ヨリ出發シ五時間ニシテ相會シタリ今若シ甲ガ毎時一哩

速ク旅行シ乙ガ一時間早ク出發スルカ或ハ乙ガ毎時一哩遅ク旅行シ甲ガ一時間遅ク出發セシナラバ二人ガ最初出逢ヒシ處ニテ相會フベシト云フ兩地間ノ距離ヲ問フ (38年山口高商)

14. 或人上下二種ノ砂糖ヲ買ヒ代價五圓二十三錢ヲ支拂ヘリ上種ハ下種ヨリ一斤ニ付二錢五厘高ク總代價ニ於テ五十五錢安シ又買ヒ入レタル斤數ハ下種ハ上種ヨリ五斤多シ各種ノ斤數及一斤ノ價格ヲ計算セヨ

15. 甲品ヲ其時價ヨリモ2割高ク賣リ乙品ヲ其時價ヨリモ金5圓安ク賣ルトキハ合計金86圓ヲ得ベク若又甲品ヲ其時價ヨリモ金2圓50錢安ク賣リ乙品ヲ其時價ヨリモ1割2分高ク賣ルトキハ合計金89圓10錢ヲ得ベシト云フ然ラバ甲乙兩品ノ時價各幾何ナルカ (41年神戸高商)

16. 或學校ニテ數學教科書若干部ト化學教科書若干部トヲ購買シ其代價合セテ金四十二圓九十錢ヲ書肆ニ仕拂ヘリ然ルニ其後書肆ニ於テ數學書一部ノ代價ト化學書一部ノ代價トヲ取違ヘ計テ算シタルコトヲ發見シ金一圓六十五錢ヲ返

却シ來レリ因テ學校ニテハ其一圓六十五錢ヲ以テ更ニ數學教科書一部ト化學教科書一部トヲ購買シタリト云フ買ヒ入レタル教科書數學,化學ヲ合セテ幾部ナルカ (37年海軍機關)

17. 或矩形ノ地面ノ間口及奥行ヲ4間宛短クスルトキハ面積ハ28坪減ジ又間口及奥行ヲ4間宛長クスルトキハ面積ハ60坪増加スト云フ長短各如何

附 錄

不 等 式

1.-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5.....ナル一列ノ數ハ左ヨリ右ニ移ルニ從ヒテ次第ニ1ダケ大ナルヲ以テ或一數ヨリ其左方ニアル或數ヲ減ズレバ正數ヲ得ルコト明カナリ一般ニ $A-B$ ガ正數ナルトキハ A ハ B ヨリ大或ハ B ハ A ヨリ小ナリト云フ

(注意) 已ニ或負數ハ正數ノ如何ナル數ヨリモ小ナルコト,或負數ハ0ヨリ小ナルコト及其絕對值ノ大ナルモノ程小ナルコトヲ説ケリ從テ A ガ正數ナルコトヲ示ス記號トシテ $A > 0$ ヲ以テシ, A ガ負數ナルコトヲ示ス記號トシテ $A < 0$ ヲ以テス

2. 次ノ定理ハ重要ナルモノナリ

第一. $A > B$ ト $A \pm C > B \pm C$ トハ同時ニ成立ス但此場合ノ複記號士ハ同時ニ+ノミ或ハ-ノミヲ用フ

何トナレバ $A \pm C$ ヨリ $(B \pm C)$ ヲ減ジタル残りハ
 $A - B$ トナリ $A > B$ ヨリ其正ナルコトヲ知り得
 ラレ又逆ニ $A \pm C > B \pm C$ ヨリ $A > B$ ヲ得レバナ
 リ

第二. $A > B$ ト $AC > BC$ トハ C ガ正數ナルトキハ
 同時ニ成立ス

何トナレバ $AC - BC$ 即 $C(A - B)$ ノ正數ナルコト
 ハ $A - B$ ノ正數ナルコト及 C ノ正數ナルコト
 ヨリ之ヲ知り得ラレ又逆モ眞ナルコトハ容易
 ニ知り得ラルレバナリ

第三. 同様ニ C ガ負數ナルトキハ $A > B$ ト $AC < BC$
 トハ同時ニ成立スルコトヲ知ルベシ

第四. $A > B$ ト $C > D$ ナルトキ $A + C > B + D$ ナリ

何トナレバ $A + C - (B + D)$ 即 $(A - B) + (C - D)$ ノ二
 項ハ $A > B, C > D$ ニ因リテ何レモ正數ナレバナ
 リ

3. 上ノ定理ヲ應用スル例ヲ示サントス

(例一) $\frac{2x}{4} - \frac{2}{3} > \frac{x}{6} + \frac{1}{3}$ ノ x ノ一限界ヲ示セ(不等
 式ヲ解クトモ云フ)

分母ノ最小公倍數12ヲ兩邊ニ乘ズレバ乘數ガ
 正數ナルヲ以テ第二ニ因リテ不等記號ノ向キ
 ハ變ゼズシテ

$$9x - 8 > 2x + 4$$

8 及 $-2x$ ヲ兩邊ニ加フレバ不等記號ノ向キハ
 變ゼズシテ(第一)

$$9x - 8 + 8 - 2x > 2x + 4 + 8 - 2x$$

$$\text{即} \quad 9x - 2x > 4 + 8$$

$$\text{即} \quad 7x > 12$$

兩邊ニ $\frac{1}{7}$ ヲ乘ズレバ第二ニ因リテ不等記號ノ
 向キハ變ゼズシテ

$$x > \frac{12}{7}$$

ヲ得ベシ

上ノ方法ヲ案ズレバ不等式ノ解法ハ乘ズル數ノ
 記號ヲ注意スレバ一元方程式解法ト略同様ナル
 コトヲ知ルベシ

(例二) $4x - 6y = 9$ (1), $-5x + 8y > 27$ (2) ノ x, y ノ一
 限界ヲ求メヨ

(1) = 4 ヲ乘ジ, (2) = 3 ヲ乘ジ邊々相加フレバ第
 一ニ因リテ

$$\begin{array}{r} 16x-24y=36 \\ -15x+24y>81 \\ \hline x > 117 \end{array}$$

(1) = 5ヲ乗ジ, (2) = 4ヲ乗ジ邊々相加フレバ

$$\begin{array}{r} 20x-30y=45 \\ -20x+32y>108 \\ \hline 2y>153 \end{array}$$

$$2 = \text{テ除シ} \quad y > \frac{153}{2}$$

(注意) $A>B, C>D$ ナルモ $A-C>B-D$ ハ必ラズシモ眞ナラズ又 A, B, C, D ガ正數ナルニ非ザレバ $A>B, C>D$ ナリトモ $AC>BD$ ハ必ラズシモ眞ナラズ

例ヘバ $5>3, 4>1$ ナルモ $5-4>3-1$ ナルコトナク又 $2>-3, 4>-5$ ナルモ $2 \times 4 > (-3)(-5)$ ナルコトナキガ如シ

又 A, B ガ正數ナルニ非ザレバ $A>B$ ヨリ $A^2>B^2$ ヲ得ルコトナシ例ヘバ $-2>-3$ ナルモ $(-2)^2 > (-3)^2$ 即 $4>9$ ナルコトナキガ如シ

例題

次ノ不等式ニ於テ x 或ハ x, y ノ限界ヲ求ム

1. $9x-6>3x-12$ 2. $16x-(16-12x)>2x-4$

3. $\frac{7}{3}-12x<8-\frac{x}{4}$ 4. $\frac{4x}{5}-6x<\frac{1}{3}-\frac{x}{5}$

5. $\frac{5x-6}{7}-3>6-\frac{5-6x}{21}$

6. $3x-6y=12, -6x+5y>-4$

7. $8x-3y=10, -5x+2y<3$

8. $\frac{3x}{4}-\frac{2y-6}{5}=15, -6x+\frac{3y+8}{7}<12$

9. 同時 $= 6x+\frac{5}{7}>4x+7, 8x+3<4x+50 = \text{適スル}$

x ノ整數ナル値ヲ求ム

10. $a^2+b^2>2ab$ ナルコトヲ證明スベシ

11. $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}>2$ ナルコトヲ證明スベシ但 m, n ハ

同記號ノモノナリ

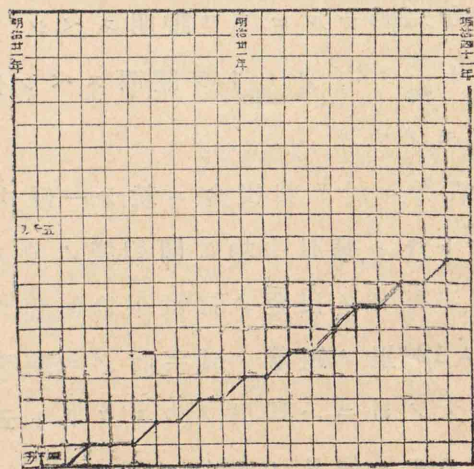
12. 或銀行ニ於テ其出金ニ就テ一錢未滿ヲ切り捨ツルトキハ毎日平均2圓40錢ノ差アリト云フ此銀行ハ毎日ノ出金ノ口數平均何程ナルカ

13. 或人120里ノ距離ノ地ニ行クニ晴天ノ日ニハ15里雨天ノ日ニハ10里ヲ歩ミタリト云フ此人先方ニ達スルハ何日ノ後ナルカ

幾何學的表現法

1. 相關二量ノ變化ヲ圖ニテ表ハスコト

例へば明治二十一年ヨリ明治四十一年ニ至ル我邦人口ヲ百萬人ヲ單位トシテ次ノ如ク圖ニテ表ハシ得ラル、コトハ何人モ知了スル所ナラン



即相關二量ノ内主ト見做スベキ量ヲ縦線ニテ表ハシ他ノ量ヲ横線ニテ表ハスニアリ(但夫レ々々單位ヲ定ムルヲ要ス)

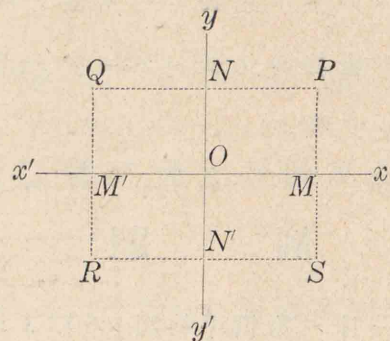
例題

明治二十年一月ノ物價平均額ヲ100トスレバ爾後明治四十一年一月マデ毎年一月ノ物價ハ次ノ如シト云フ之ヲ圖ニテ表ハセ

100, 108, 108, 117, 112, 110, 120, 123,
133, 140, 146, 170, 160, 190, 182, 168,
177, 191, 203, 217, 228, 236

2. 縦横線, 軸

cox' , yoy' ハ互ニ直角ニ交ル二直線ナリトシ P ハ xoy 角内ノ點ニシテ PM ハ ox ニ垂直ナリトセン然ルトキハ OM , MP ノ長サガ已知ナルトキハ P 點ノ位置ハ定マルベシ



OM, MP ノ長サヲ夫レ々々 P 點ノ橫線, 縱線(或ハ x 線, y 線)ト云ヒ xx', yy' ヲ縱橫軸或ハ軸ト云ヒ O 點ヲ原點ト云フ

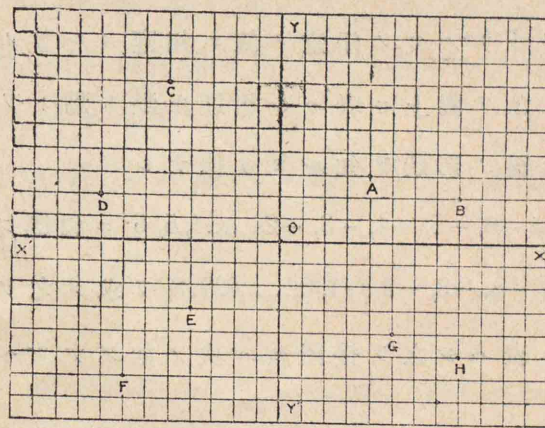
3. x, y ノ正負

上圖ノ x 線ニ於テ Ox ノ方向ヲ正トシ Ox' ノ方向ヲ負トシ又 y 線ニ於テ Oy ノ方向ヲ正トシ Oy' ノ方向ヲ負トス

故ニ上圖ニ於テ P ノ縱橫線ヲ $x=8, y=3$ ナリトシ且 OM', ON' ノ絶對値ガ OM, ON ノ絶對値ニ等シトセバ Q, R, S ナル點ノ縱橫線ハ $(x=-8, y=3), (x=-8, y=-3), (x=8, y=-3)$ ナルベシ

例題

1. 次ノ圖ニ於テ A, B, C, \dots 等ノ縱橫線ヲ求ム但正方形ノ一邊ノ長サヲ1トス



2. 方眼紙ノ上ニ次ノ點ヲ表ハセ(但 $(8, 6)$ トアルハ $x=8, y=6$ ノコトナリ)

- I. $(8, 6)$ II. $(-8, 6)$ III. $(-5, 9)$
- IV. $(-7, -4)$ V. $(-4.7, -6.5)$

4. 二元一次方程式ノ幾何學的表現法

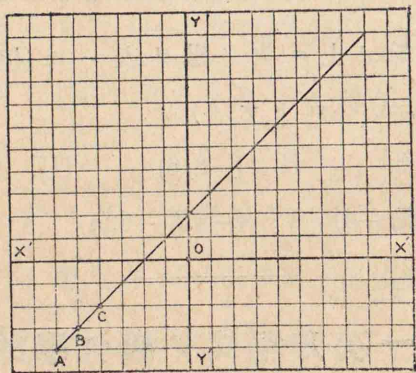
(例) $y=x+2$ ヲ幾何學的ニ表ハセ

此問題ノ意義ハ次ノ如シ

此方程式ヲ満足スル x, y ノ値ノ數ハ無限ニア
ルベシ其點ノ軌跡ヲ表ハセ

現今ノ問題トシテ此解答ハ少シク困難ナリ唯
十個計リノ x ノ任意ノ値ニ相應スル y ノ値ヲ
求メ之ヲ圖上ニ表ハシ相近キ點ト點トヲ結合
シテ圖ノ形狀ヲ知ルヨリ他ナシ

即 $x = -6, -5, -4, -3, -2, \dots, 4, 5, 6$ ニ相應スル y
ノ値 $-4, -3, -2, -1, 0, \dots, 6, 7, 8$ ヲ求メ之ヲ圖ノ
上ニ表ハシ之ヲ接續セバ次ノ如クナルベシ



例 題

次ノ二元一次方程式ヲ圖ニ表ハセ

1. $y = x$ 2. $y = x + 1$ 3. $y = x - 3$

4. $y + x = 10$ 5. $2y = x + 2$ 6. $2x + 3y = 6$

(注意) 解析幾何學ニ因レバ二元一次方程式ハ直
線ヲ表ハスベシ

7. $y = x + 2, y + x = 10$ ノ圖ヲ畫キ其交點ヲ求メ
次ニ其 x, y ノ値ヲ求メヨ

8. $x + y = 5, 2y = x + 1$ ニ就テ求ムルコト上ニ同
ジ

9. $3x + 2y = 5, 6x + 4y = 8$ ニ就テ求ムルコト上ニ
同ジ

10. $8x + 6y = 10, 4x + 3y = 5$ ニ就テ求ムルコト上ニ
同ジ

11. $2x + 5y = 7$ ト $x = 0$ トノ交點ヲ求メヨ

明治四十四年二月二十八日
文部省檢定濟

發行所
(東京一五九七
振替貯金口座)
三省堂書店

東京市神田區裏神保町一番地

東京市神田區三崎河岸十二號地

印刷所 三省堂印刷部

發售者 龜井忠一
發行所 兼者

著者 樺正

不復製
不許



明治三十五年十二月廿七日發行
明治三十四年十一月十五日發行
明治三十三年十月十一日發行
明治三十二年九月十四日發行
明治三十一年八月十七日發行
明治三十年七月二十日發行
明治二十九年六月十三日發行
明治二十八年五月十六日發行
明治二十七年四月十九日發行
明治二十六年三月廿三日發行
明治二十五年二月廿七日發行
明治二十四年一月廿一日發行
明治二十三年十二月十四日發行
明治二十二年十一月十七日發行
明治二十一年十月二十日發行
明治二十年九月十三日發行
明治十九年八月十六日發行
明治十八年七月十九日發行
明治十七年六月廿二日發行
明治十六年五月廿五日發行
明治十五年四月廿八日發行
明治十四年三月廿一日發行
明治十三年二月廿四日發行
明治十二年一月廿七日發行
明治十一年十二月三十日發行
明治十年十一月廿三日發行
明治九年十月廿六日發行
明治八年九月廿九日發行
明治七年八月廿二日發行
明治六年七月廿五日發行
明治五年六月廿八日發行
明治四年五月卅一日發行
明治三年四月廿四日發行
明治二年三月廿七日發行
明治元年二月三十日發行

定價金五十錢

新訂代數學教科書奧附

卷之三

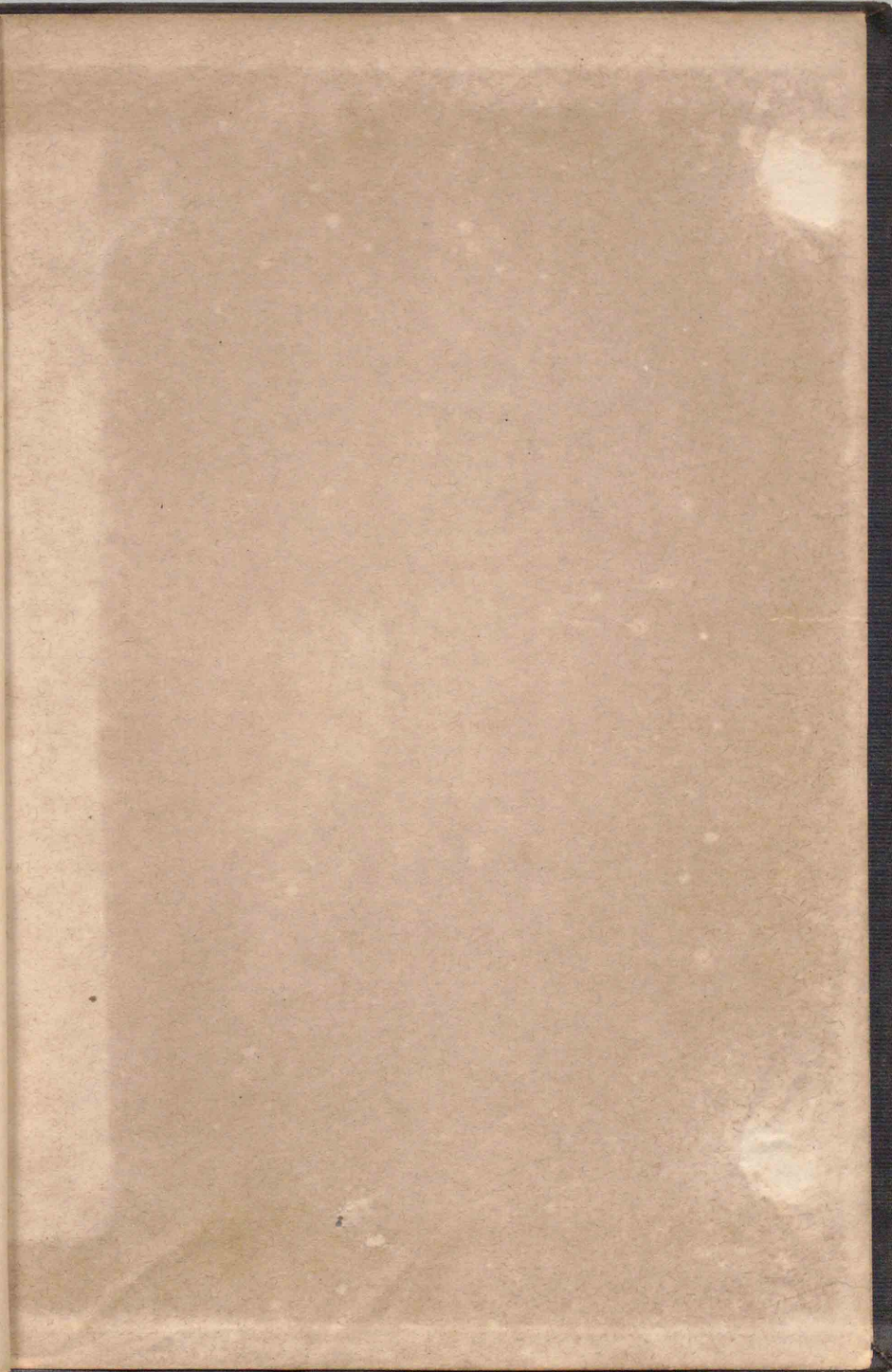
卷之三

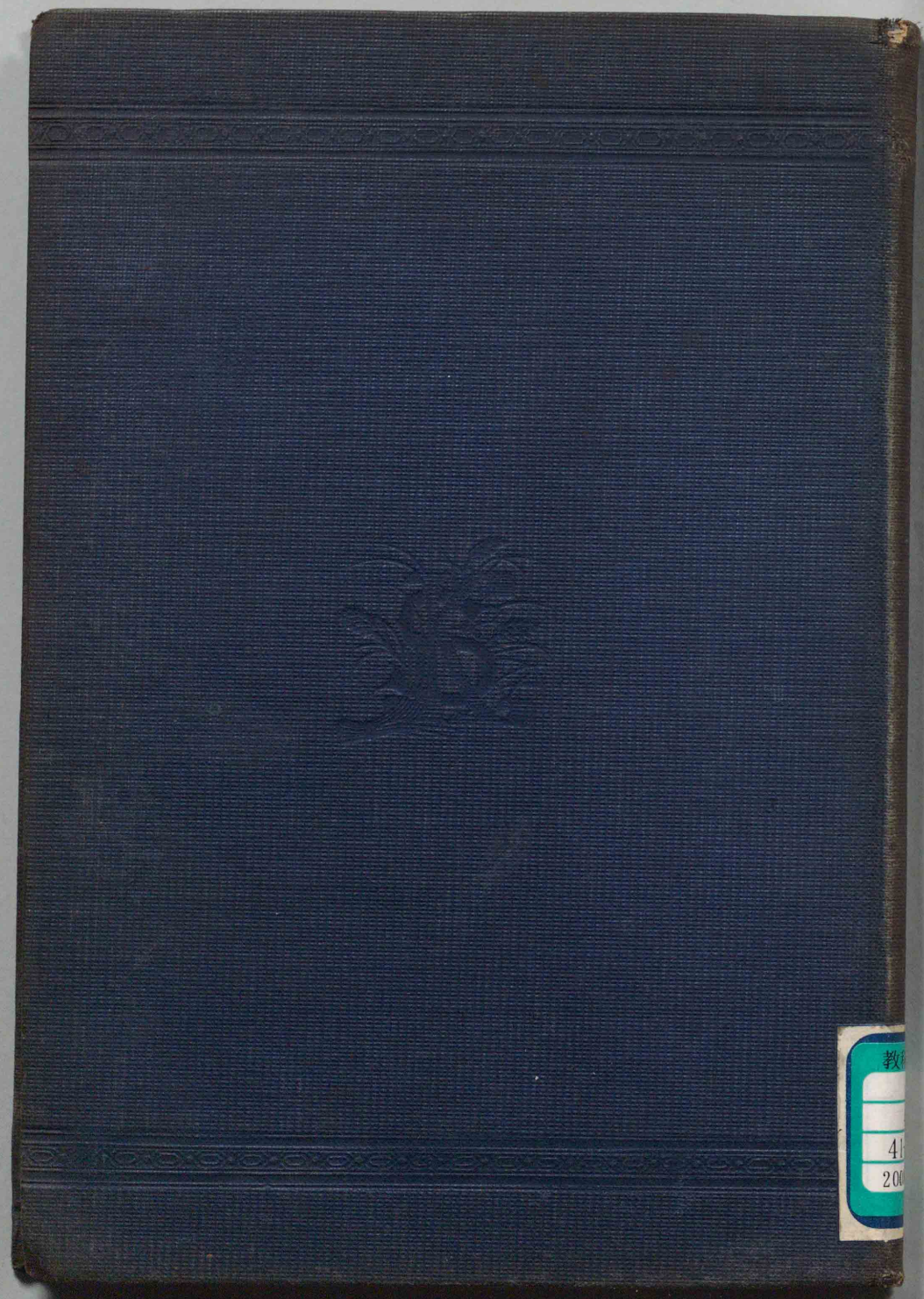
不
賀

三
未
一



Vertical text columns on the right side of the page, likely bleed-through from the reverse side.





教
41
200