新撰
幾何學教科書
（立體）

文部省檢定濟
明治四十五年六月廿八日　中學校・師範學校數學科用

新撰

幾何學教科書

〔立體之部〕

東北帝國大學理科大學教授
理學博士
林鶴一
編著

五乙、
仲、
小

開成館藏版

改正要目準據

修正改版ノ序

今次ノ改版ハ主トシテ中學校師範學校教授要目ノ改訂ニ起因ス。次ニ其ノ改訂ノ要點ヲ擧グ。

一。新教授要目ノ示セル所ニ隨ヒ,算術及ビ代數ト密接ナル聯絡ヲ保タシメタルコト。

二。問題ヲ精撰シ計算ニ關スル問題ヲ增加シ,以テユークリッド式ノ抽象的論證ヲ避ケタルコト。

三。校正ヲ嚴密ニシ完全ヲ期シタルコト。

四。用語ノ統一ヲ計リ,嚴正的確ナランコトヲ勉メタルコト。

五。最近ノ諸官立各種高等學校入學試驗問題ヲ採擇セルコト。

今ヤ中等教育數學界ニ於テ本書存在ノ意義ハ既ニ十分ニ認メラレタリ。尙益著者ノ意見ノ普ク行ハレテ幸ニ斯界ニ貢獻スルアラバ豈獨著者ノ滿足ノミナランヤ。

明治四十四年十二月　著者

目次

附　　録

記　　號

幾何學ニ於テ記號ヲ併用セバ論證ヲ簡明ナラシムルノ利益アリ,今普通ニ用フル記號ヲ次ニ掲グ。

∠	角。	⊥	垂直。
△	三角形。	□	正方形。
▭	矩形。	▱	平行四邊形。
∥	平行。	＝	相等。
≡	合同,全等。	≠	不等。
＞	ヨリ大ナリ。	＜	ヨリ小ナリ。
≯	ヨリ大ナラズ。	≮	ヨリ小ナラズ。
～	差。	∽	相似。

注意。 星標*ヲ附シタル箇所ハ初讀ノ際之ヲ省略シテ可ナリ。

本書中ニハ最近數年間ノ高等各種學校入學試驗問題ヲ蒐集シ,分類シテ之ヲ適當ノ處ニ記載シタリ。是レ生徒ガ既得ノ智識ニ依リテ「力試シ」ヲナスニ趣味アル究竟ナル練習問題タルヲ失ハザレバナリ。

學校名ノ略語ノ例

[大豫]	高等學校大學豫科
[東工]	東京高等工業學校
[大工]	大阪高等工業學校
[熊工]	熊本高等工業學校
[長商]	長崎高等商業學校
[東師]	東京高等師範學校
[盛農]	盛岡高等農林學校
[海兵]	海軍兵學校
[海機]	海軍機關學校
[海經]	海軍經理學校
[商船]	商船學校
[陸士]	陸軍士官學校
[農實]	農科大學實科
[水產]	水產講習所

立體幾何學

第六篇

直線及平面

第一章

直線ト平面トノ關係

試

1. 定義. 立體幾何學或ハ**空間幾何學**トハ同一ノ平面中ニ在ラザル圖形ヲ論ズル幾何學ナリ。

試

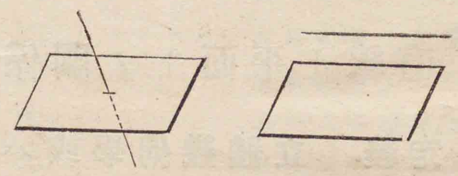
2. 定義. 平面トハ其面中ニ在ル任意ノ二點ヲ通過スル直線ガ全ク其面ニ密著スル面ナリ。

故ニ直線ハ其一部分ガ或平面中ニアリテ他ノ部分ガ其平面外ニアルコトヲ得ズ。

直線或ハ點ガ平面中ニ在ルトキ其平面ハ此直線或ハ點ヲ**含ム**又ハ**通過ス**ト云フ。

注意。 平面ハ無限ニ廣ガレルモノナリ,然レドモ之ヲ表スニハ多クハ平行四邊形ヲ以テス。

3. 定義. 直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキ此直線ハ平面ニ**交ル**ト云フ。

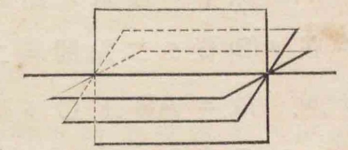


直線ト平面トガ一點ヲモ共有セザルトキハ互ニ平行ナリト云フ。

4. 公理 I. 平面ノ兩側ニ在ル二點ヲ通過スル直線ハ必此平面ニ交ル。

平面ニ交ル直線ノ交點ニテ分タレタル二部分ハ此平面ノ兩側ニアリ。

公理 II. 二點又ハ一直線ヲ通過スル平面ハ無數アリ。

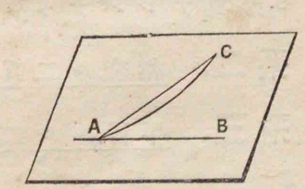


公理 III. 平面ハ,其中ニアル直線ヲ軸トシテ之ヲ廻轉シ其原位置ニ復歸セシムルトキハ空間中ノ總テノ點ヲ通過ス。

試

5. 定理一. 一直線(AB)ト此直線外ノ一點(C)トヲ通過スル平面ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] 直線ABヲ含メル任意ノ平面ヲ取リ,ABヲ軸トシ之ヲ廻轉スルトキハC點ヲ含ムニ至ルベシ(公理III)。故ニABトC點トヲ含ム平面アリ。



次ニ若此ノ如キ平面ガ二ツアリトセバC點ヨ

リ AB 線中ノ任意ノ點 A ニ至ル直線ハ各平面中ニ在リ(2),從テ二點間ニ二直線ヲ引キ得ルコトトナル。故ニ AB ト C トヲ含ム平面ハ唯一ニ限ル。

注意. 若干ノ直線又ハ點ヲ含ム平面ガ一アリ且唯一ニ限ルトキハ此等ノ直線又ハ點ハ此平面ヲ**決定**スト云フ。

故ニ上ノ定理ヲ略述シテ一直線ト此直線外ノ一點トハ平面ヲ決定スト云フ。

系一. 同一ノ直線中ニアラザル三點ハ平面ヲ決定ス。

其故ハ三點ヲ A, B, C トスレバ直線 AB ト點 C トヲ通過スル平面ハ此等ノ三點ヲ通過スベク其逆モ亦眞ナレバナリ。

系二. 相交ル二直線ハ平面ヲ決定ス。

系三. 平行ナル二直線 (AB, CD) ハ平面ヲ決定ス。

先平行線 AB, CD ハ定義ニ由テ同一ノ平面中ニ在リ。次ニ之ヲ含ム平面ハ唯一アルノミ,其故ハ其一線 AB ト他ノ線中ノ一點 C トヲ通過スル

平面ハ唯一ナレバナリ。

問　題

試 平行ナル 一ノ點ニ交ハル 平面上ニ在ル

(1) 直線ト平面トノ相互ノ位置幾通リアルカ

試

(2) 空間ニ在ル二直線ノ位置ノ關係ヲ總テ列

平行ナル 一ノ點ニ交ハル 平行ナラズシテ交ラザルモノ

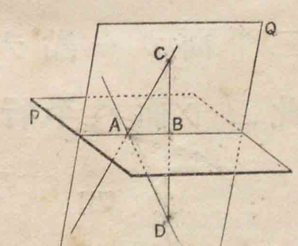
擧セヨ。　(東師)

(3) 三角形ノ三邊ハ皆同一ノ平面中ニアリ。

(4) 梯形又ハ平行四邊形ノ四邊ハ皆同一ノ平面中ニ在リ。

6. 定理二. 一點(A)ヲ共有スル二平面(P, Q)ハ此點ヲ通過スル一直線ヲ共有ス,而シテ唯此一直線ニ限ル。

[證明] Q 面中ニ於テ A 點ヲ通過スル任意ノ二直線 AC, AD ヲ引ケ。今其一ガ P 面中ニ在ラバ本題ノ前半部ハ明白ナリ。若然ラズシテ孰レモ P 面中ニ在ラズトスレバ夫々 P 面ノ兩側ニ在ル二點 C, D ヲ各線中ニ一ツヅツ取リ之ヲ連ヌ



ベシ,然ルトキ直線 CD ハ A ニアラザル一點 B ニ於テ P 面ニ交ルベシ(公理 I)。又 CD ハ Q 面中ノ二點ヲ通過スル直線ナルヲ以テ Q 面中ニ在リ,故ニ CD 中ノ一點 B モ亦 Q 面中ニアリ。故ニ二平面 P, Q ハ二點 A, B ヲ共有ス,從テ直線 AB ヲ共有スベシ(2)。

又二平面 P, Q ハ直線 AB 外ノ點ヲ共有スルコト能ハズ,其故ハ一直線ト其線外ノ一點トヲ通過スル平面ハ唯一ナレバナリ(5)。

7. 定義. 二平面ガ唯一ノ直線ヲ共有スルトキハ此二平面ハ**相交ル**ト云ヒ,其直線ヲ**交線**ト云フ。

二平面ガ一點ヲモ共有セザルトキハ此二平面ハ**平行**ナリト云フ。

問題

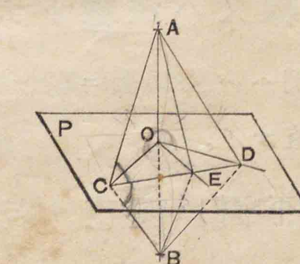
(1) 相交ル二直線ノ一ニ交リテ他ノ線ニ平行ナル總テノ直線ハ元ノ二直線ニテ決定セル平面中ニアリ。

(2) 空間ニ三直線 OX, OY, OZ アリテ一點 O ニ會ス,又二ツノ三角形 ABC, *abc* アリテ其頂點 A ト *a* トハ OX 上ニ,B ト *b* トハ OY 上ニ,C ト *c* トハ OZ 上ニアリ。BC 及 *bc*, CA 及 *ca*, AB 及 *ab* ノ交點ガ一直線上ニアルコトヲ證明セヨ。

(東工)

8. 定理三. 相交線(CO, DO)ノ各ニ垂直ナル直線(AO)ハ此二直線ノ平面(P)中ニ在ル任意ノ直線(EO)ニ垂直ナリ。

[證明] 三直線 OC, OE, OD ニ交ル任意ノ直線 CED ヲ引キ, AO ヲ B マデ延長シ OB=OA ナラシメ,二點 A, B ヲ三點 C, E, D ニ連ネヨ。



然ルトキハ OC ハ直線 AB ノ垂直二等分線ナル故

AC = BC.

同樣ニ　$AD = BD,$

$\therefore \quad \triangle ACD \equiv BCD,$

$\therefore \quad \angle ACE = BCE,$

$\therefore \quad \triangle ACE \equiv BCE,$

$\therefore \quad AE = BE.$

故ニ OE ハ又 AB ノ垂直二等分線ナリ。

即　$AO \perp EO.$

9. 定義. 平面ニ交ル直線ガ其交點ヲ通過スル此平面中ノ總テノ直線ニ垂直ナルトキハ此平面ト直線トハ互ニ**垂直**ナリト云ヒ,此直線ヲ平面ノ**垂線**又ハ**法線**トナフ。

試

例ヘバ上ノ圖ニ於テ線 AO ト平面 P トハ互ニ垂直ナリ。

平面ニ垂直ナラザル直線ヲ此平面ノ**斜線**ト云フ。

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲ垂線又ハ斜線ノ**足**ト云フ。

平面ト其垂線トハ互ニ直角ニ交ルトモ又ハ互ニ直交ストモ云ヒ,其斜線トハ互ニ斜交スト云フコトアリ。

系. 試 二定點 A, B ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ之ヲ連ヌル線分 AB ノ中點ヲ過ギ之ニ垂直ナル平面ナリ。

註. 或圖形中ノ總テノ點ガ或性質ヲ有シ,其他ノ點ハ皆此性質ヲ有スルコトナケレバ該圖形ヲ此性質ヲ有スル點ノ軌跡ナリト云フ。

注意. 一直線ガ一平面ニ斜交スル爲ニハ其交點ヲ通過スル平面中ノ一直線ニ斜交スレバ足ル。

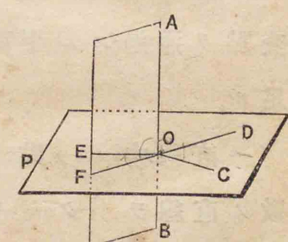
一直線中ノ一點ニ於テ此直線ニ垂直ナル無數ノ直線ヲ引クコトヲ得。

10. 定義. 二ツノ點ハ之ヲ連ヌル直線ノ中點ヲ過ギ此直線ニ垂直ナル平面ニ關シテ**對稱**ナリト云フ。

例ヘバ定理三ノ圖ニ於テ二點A,Bハ平面Pニ關シテ對稱ナリ。

11. 定理四. 一直線(AB)中ノ一點(O)ニ於テ之ニ垂直ナル總テノ直線(OC, OD, OE等)ハ皆此點ヲ過ギ此直線ニ垂直ナル同一ノ平面中ニ在リ。

[證明] 二直線OC, ODニテ決定セル平面ヲPトスレバ此平面ハO點ヲ過ギABニ垂直ナリ(8), 故ニ直線OEガ平面P中ニ在ルコトヲ證明スレバ可ナリ。今OEガ平面P中ニ在ラズト假定セン

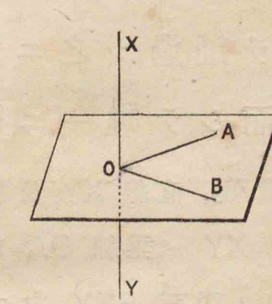


ニ,相交線OE, ABニテ決定セル平面AEBトPトノ交線OFハABニ垂直ナリ(8)。然ルトキハ同一ノ平面AEB上ニ於テ二直線OE, OFガ同一ノ直線ABニ垂直トナル,是レ背理ナリ。故ニOEハ平面P中ニ在リ。

系. 直角ノ一邊ヲ軸トシ之ヲ廻轉シテ其原位置ニ歸ラシムレバ他ノ邊ハ此軸ニ垂直ナル平面ヲ生ズ。

12. 定理五. 一直線(XY)中ノ一點(O)ヲ過ギ,之ニ垂直ナル平面ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] 直線XYヲ通過スル任意ノ二平面AXY, BXY中ニ於テO點ヲ過ギテXYニ垂直ナル二直線OA, OBヲ引クトキ此二直線ニテ決定セル平面AOBハXYニ垂直ナリ(8)。



又O點ニ於テXYニ垂直ナル總テノ直線ハ皆平面AOB中ニ在リ(11)。故ニOヲ過グル他ノ平面ハXYニ斜交スル直線ヲ含ムベク,從テ其平面モ亦XYニ斜交ス(9注意)。

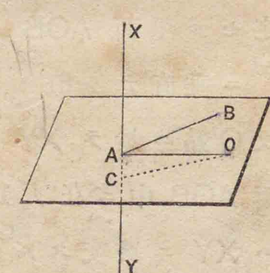
問題

(1) 一平面外ニ在ル二點ヨリ等距離ニ在リテ且此平面中ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。 (大豫)

試 (2) 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ハ此二定點ヲ連ヌル直線ニ垂直ナル平面ナリ。

13. 定理六. 一直線(XY)外ノ一點(O)ヲ通過シ之ニ垂直ナル平面ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] 直線XY及點Oヲ含ム平面中ニ於テOヨリXYニ垂線OAヲ引キ,次ニXYヲ含ム任意ノ他ノ平面BXY中ニ於テAヨリXYニ垂線ABヲ引クトキ平面OABハOヲ過ギテ直線XYニ垂直ナリ(8)。



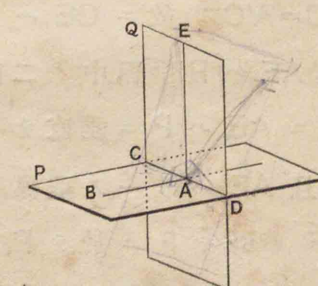
又Aヲ過ギテXYニ垂直ナル平面ハOAヲ含ムヲ以テOヲ通過ス(11),

而シテO點ヲ過ギXYニ垂直ナル平面ハOAヲ含ムベシ,其故ハ若然ラズトセバXYニ斜交スル直線OCヲ含ムベケレバナリ。然ルニAヲ過ギXYニ垂直ナル平面ハ唯一ナリ。故ニO點ヲ過ギXYニ垂直ナル平面モ亦唯一ナリ。

14. 定理七. 一平面(P)中ノ一點(A)ヲ通過シ此平面ニ垂直ナル直線ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

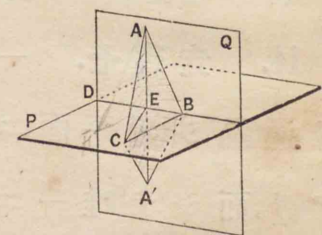
[證明] 平面P中ニ於テA點ヲ通過スル任意ノ直線ABヲ引キ,次ニAヲ通過シABニ垂直ナル平面Qヲ作レ(12)。此平面中ニ於テ二平面ノ交線CDニ垂線AEヲ引ケバ此線ハABニモ垂直ナル故P面ニ垂直ナリ。

次ニAE′ヲPニ垂直ナル他ノ直線トセバAEトAE′トハ共ニ此二線ヲ含メル平面トPトノ交線ニ垂直ナリ,是レ背理ナリ。故ニAEハ唯一ノ垂線ナリ。



15. 定理八. 一平面(P)外ノ一點(A)ヲ通過シ此平面ニ垂直ナル直線ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] 平面P中ニ於テ任意ノ直線BCヲ引キ,A點ヲ通過シ此線ニ垂直ナル平面Qヲ作レ(13)。此平面トPトノ交線ヲBDトシ,A點ヨリBDニ垂線AEヲ引ケバ此線ハP面ニ垂直ナリ,其故ハBD線ニ關スルA點ノ對稱點ヲA′トスレバ直角三角形ABC, A′BCハ明ニ合同ニシテAC=A′C。故ニCEハAA′ノ垂直二等分線ニシテ,AEハP平面中ノ二直線EB, ECニ垂直ナリ,故ニAEハPニ垂直ナリ。



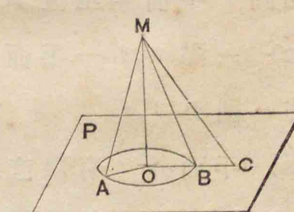
且AEハ唯一ノ垂線ナリ,其故ハ別ニ一直線AFヲ引キFニ於テP面ニ會セシムレバAEFハ直角ナルヲ以テAFEハ鋭角ニシテ,AFハ斜線ナレバナリ。

16. 定理九. 平面外ノ一點ヨリ此面ヘ垂線及數多ノ斜線ヲ引クトキ,[1]垂線ハ總テノ斜線ヨリ小ナリ。[2]垂線ノ足ヨリ等距離ノ點ニ於テ平面ニ會スル二斜線ハ相等シ。[3]垂線ノ足ヨリ不等距離ノ點ニ於テ平面ニ會スル二斜線ノ中大ナル距離ニアルモノガ他ヨリ大ナリ。

[2]及[3]ノ逆モ亦眞ナリ。

[證明] Pヲ平面トシMOヲ其垂線トシMA, MB, MCヲ斜線トス。

然ルトキハ垂線MOハ總テノ斜線ヨリ小ナリ。其故ハ直角三角形MOA, MOB, MOC等ニ於テ斜邊MA, MB, MCガ最大邊ナレバナリ。



次ニOA=OBナルトキハ△MOA≡MOB, 故ニMA=MB。

最後ニ OC > OA ナルトキハ MC > MA, 其故ハ OC 中ニ OB ヲ OA ニ等シク取レバ角 MBC ハ MOB ヨリ大ナル故鈍角ニシテ MCB ハ鋭角ナリ。故ニ △MBC ニ於テ ∠MBC > MCB, 故ニ MC > MB, 從テ MC > MA。

逆ハ轉換法ニ由テ明ナリ。

17. 定義. 一點ト一平面トノ**距離**トハ其間ノ垂線ノ長サナリ。

問　　題

(1) 一直線中ニアラザル三點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ此三點ヲ通過スル圓ノ中心ヲ通過シ此圓ノ平面ニ垂直ナル直線ナリ。

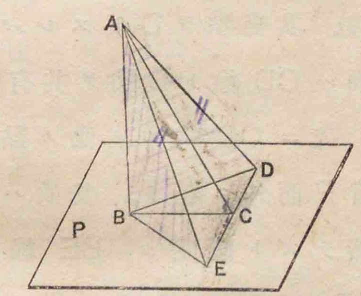
(2) 一點ヨリ一平面ニ至ル定長ノ斜線ノ足ノ軌跡ハ圓ナリ。

(3) 平面外ノ有限直線ヲ直角ノ下ニ見ル如キ此平面中ノ點ノ軌跡ハ圓ナリ。

(4) 水平面上ニ垂直ニ立テル二本ノ棒アリテ其高サハ等シカラズ,此平面上ニ於テ各ノ棒ヲ見ル視角ガ相等シキ點ノ軌跡ヲ求メヨ。（東工）

18. 定理十. 平面(P)ノ垂線(AB)ノ足(B)ヨリ此平面中ノ任意ノ直線(DE)ヘ垂線(BC)ヲ引クトキ第二ノ垂線ノ足ト第一ノ垂線中ノ一點トヲ連ヌル直線(AC)ハ平面中ノ該直線(DE)ニ垂直ナリ。

[證明] DE 線上ニ於テ C 點ノ兩側ニ二點 D, E ヲ取リ CD = CE ナラシメ AD, AE, BD, BE ヲ連ヌルトキ BC ハ DE ノ垂直二等分線ナルヲ以テ BD = BE。故ニ斜線 AD = AE (16)。故ニ AC⊥DE。

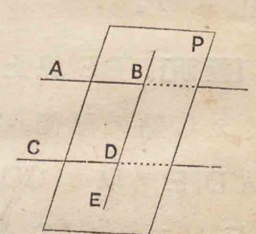


注意。 此定理ヲ**三垂線ノ定理**トイフ。

系. 平面外ノ一點ヨリ此平面及其中ニアル任意ノ直線ヘ各垂線ヲ引クトキ其足ヲ連ヌル直線ハ該直線ニ垂直ナリ。

19. 定理十一. 平行線ノ一(AB)ニ交ル平面(P)ハ又他ノ直線(CD)ニモ交ル。

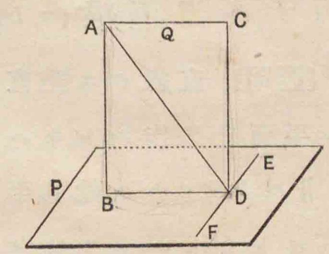
[證明] 假設ニ由テ AB 線ト P 面トハ一點 B ヲ共有ス,故ニ平行線ノ平面 ABDC モ亦 P 面ト一點 B ヲ共有シ,從テ一直線 BE ヲ共有ス(6)。



BE 線ハ平行線ノ一 AB ニ交ル故又 CD ニモ交ル(平幾公理)。其交點ヲ D トスレバ P 面ハ CD 線ト D 點ヲ共有ス。

次ニ CD 線中ノ他ノ點ハ皆 P 面外ニ在リ。其故ハ若然ラズト假定シ, BE 線中ニ共有點アリトセバ CD ハ BE ト相合シ,從テ CD ハ AB ニ平行ナラザルニ至ルベク,又 BE 線外ニ共有點アリトセバ平行線ノ平面ハ P 面ト相合シ,從テ P 面ハ AB ニ交ラザルニ至レバナリ。

20. 定理十二. 同一ノ平面(P)ニ垂直ナル二直線(AB,CD)ハ互ニ平行ナリ。



[證明] 二垂線ノ足 B,D ヲ連ネ又 AD ヲ引キ,次ニ平面 P 中ニ於テ D ヲ過ギ BD ニ垂線 EF ヲ引ケバ

EF⊥AD (18)。

又 CD ハ P ニ垂直ナル故 EF⊥CD。

三直線 DB, DA, DC ハ同一ノ直線 EF ニ垂直ナル故皆同一ノ平面 Q ノ上ニ在リ(11)。

故ニ AB モ亦平面 Q ノ上ニアリテ CD ト共ニ同一ノ直線 BD ニ垂直ナリ。

故ニ AB ∥ CD。

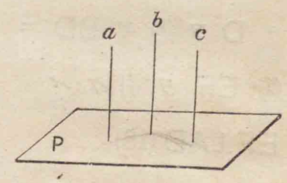
系. 平行線 (AB, CD) ノ一 (AB) ニ垂直ナル平面 (P) ハ又他ノ直線 (CD) ニモ垂直ナリ。

CDトP平面ト交点ヲDトス

其故ハ D ヲ通過シ平面 P ニ垂線 DC′ ヲ引ケバ此線ハ AB ニ平行ナリ。然ルニ同一ノ點 D ヲ過ギ同一ノ直線 AB ニ平行ナル線ハ唯一ナル故, DC′ ハ DC ニ合スベシ。即 CD ハ平面 P ニ垂直ナリ。

21. 定理十三. 同一ノ直線(c)ニ平行ナル二直線(a, b)ハ互ニ平行ナリ。

[證明] 直線cニ垂直ナル平面Pヲ作ルトキハ$a \parallel c$, $b \parallel c$ナル故,此平面ハaトbトニ交リ且之ニ垂直ナリ(20系), 故ニaハbニ平行ナリ(20)。



問題

(1) 一定點ヨリ相交ル二平面ニ下セル垂線ノ足ヨリ其二平面ノ交線ニ垂線ヲ引クトキハ其二ツノ垂線ハ二平面ノ交線ト同ジ點ニ於テ相會ス。 (東師)

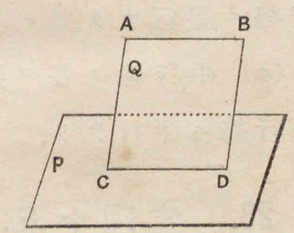
(2) 一平面外ノ一定點ヨリ此面中ノ一定點ヲ通過スル此面中ノ直線ヘ下セル垂線ノ足ノ軌跡如何。 (東商·大豫)

(3) 折面四邊形(四頂點ガ同一ノ平面上ニアラザルモノ)ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ連ヌルトキハ平行四邊形ヲ生ズ。

22. 定理十四. 平行線ノ一(CD)ヲ含ミ他ノ線(AB)ヲ含マザル任意ノ平面(P)ハ後ノ線(AB)ニ平行ナリ。

[證明] AB線トCD線トハ平行ナル故AB線ハCD線中ニ於テ平面Pニ會スルコトナシ。

又AB線ハCD線外ニ於テモ平面Pニ會スル能ハズ,其故ハ若CD線外ノ點ニテ相會ストセバ平行線ノ平面QハPト相合シ,從テPガABヲ含ムニ至レバナリ。



故ニ線ABト平面Pトハ全ク相會セズ,即平行ナリ。

系一. 平面ニ平行ナル一直線ヲ含ム任意ノ平面ト此平面トノ交線ハ該直線ニ平行ナリ。

系二. 一直線ニ平行ナル平面中ノ一點ヲ通過シ,此直線ニ平行ナル直線ハ全ク此平面中ニ在リ。

問　　　題

(1) 一平面ト之ニ平行ナル一直線トノ間ニ夾マレタル任意ノ平行線ノ部分ハ相等シ。

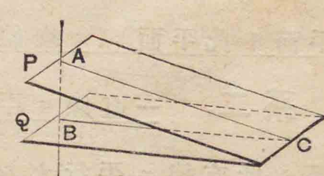
(2) 同一ノ直線ニ垂直ナル直線ト平面トハ互ニ平行ナリ。

(3) 同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交線ハ此直線ニ平行ナリ。

(4) 平行線ノ各ヲ通過スル二平面ノ交線ハ此平行線ニ平行ナリ。

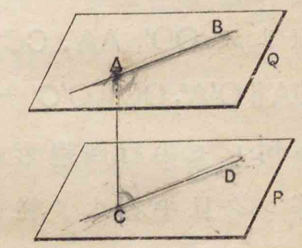
23. 定理十五. 同一ノ直線(AB)ニ垂直ナル二平面(P, Q)ハ互ニ平行ナリ。

[證明] 今二平面P, Qガ一點Cヲ共有スト假定セバ二ツノ直角ヲ有スル三角形ABCヲ得ルニ至ル,是レ背理ナリ。故ニ二平面ニハ共有點ナシ,從テ互ニ平行ナリ。

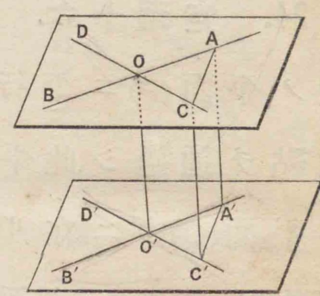


24. 定理十六. 一點(A)ヲ通過シ,任意ノ平面(P)ニ平行ナル直線(AB)ハ皆此點ヲ通過シ此平面ニ平行ナル同一ノ平面(Q)中ニ在リ。

[證明] A點ヨリ平面Pヘ垂線ACヲ引キ, AB, ACノ平面ト平面Pトノ交線ヲCDトスレバCD∥AB, 而シテCD⊥ACナル故AB⊥AC, 故ニA點ヲ通過シP平面ニ平行ナル直線ハ皆此點ニ於テAC線ニ垂直ナリ,故ニ此點ニ於テACニ垂直ナルQ平面中ニアリ(11), 而シテQハPニ平行ナリ(23)。



25. 定理十七. 相交線(AOB, COD)ガ夫々此等ト同一ノ平面中ニ在ラザル他ノ相交線(A′O′B′, C′O′D′)ニ平行ナレバ,二雙ノ相交線ノ平面ハ平行ニシテ,其夾角ハ相等シキカ又ハ互ニ補角ナリ。



[證明] I. 二直線 AB, CD ハ何レモ A′B′, C′D′ ヲ含ム平面ニ平行ナリ(**22**),故ニ O ヲ通過シテ此平面ニ平行ナル平面ノ中ニ在リ(**24**),卽 AB, CD ノ平面ト A′B′, C′D′ ノ平面トハ平行ナリ。

II. 次ニ $\angle AOC = A'O'C'$ ナリ。其故ハ頂點 O, O′ ヨリ同方向ニ $OA = O'A'$, $OC = O'C'$ ヲ截リ取リテ OO′, AA′, CC′, AC, A′C′ ヲ連ヌルトキハ $OA \parallel O'A'$, $OC \parallel O'C'$ ナル故 AOO′A′ ト COO′C′ トハ何レモ平行四邊形ニシテ AA′ 及 CC′ ハ OO′ ニ等シク且平行ナリ,從テ互ニ等シク且平行ナリ。

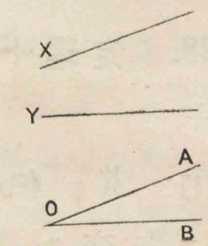
$$\therefore \quad AC = A'C'. \qquad \therefore \quad \triangle AOC \equiv A'O'C'.$$

$$\therefore \quad \angle AOC = A'O'C'.$$

同樣ニ AOD, A′O′D′ ハ相等シ,又 AOC, B′O′C′ 等ハ互ニ補角ナリ。

26. 定義. 同一ノ平面中ニ在ラザル二直線間ノ角トハ任意ノ點ヨリ之

ニ平行ニ引ケル二直線ノ夾角ナリ。



注意. 此定義ニヨレバ平面ニ垂直ナル直線ハ此平面中ノ總テノ直線ト直角ヲナス。

問題

(1) 三平面ガ二ツ宛相交ルトキ其三交線ハ同一ノ點ヲ通過スルカ,又ハ平行ナリ。

(2) 相交ル二平面間ニ在ル一點 A ヨリ此平面ヘ垂線 AB, AC ヲ引クトキハ BC ハ交線ニ垂直ナリ。

(3) 平行四邊形ノ一對角線ヲ通過スル平面ハ他ノ對角線ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。

27. 定理十八. 一平面ガ平行ナル二平面ニ交レバ其二交線ハ平行ナリ。

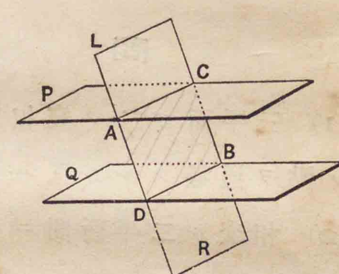
[證明] 二交線ハ夫々平行ナル平面中ニ在ルヲ以テ相會スルコトナク,且倶ニ同一平面中ニ在リ,

故ニ平行ナリ。

28. 定理十九. 二平面ガ平行ナルトキ

[1] 其一(P)ニ交ル直線(L)ハ他ノ面(Q)ニモ交ル。

[2] 其一(P)ニ交ル平面(R)ハ他ノ面(Q)ニモ交ル。



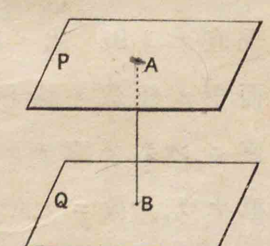
*[證明] I. 直線Lガ平面Pニ交ル點ヲAトシ平面Q中ニ任意ノ點Bヲ取ル。若此點ガ直線L中ニアラバ本題ハ明白ナリ。若此點ガL中ニアラザルトキハ此點Bト直線Lトヲ含ム平面ヲ作ラバ此平面ハP, Qノ二平面ト夫々A及Bナル點ヲ共有スル故直線AC及BDヲ共有スベク(6),而シテ此二線ハ平行ナリ(27),然ラバ直線LハAC, BDト同一平面中ニアリテACト交ル故BDトモ交ルベシ,其交點Dハ又L線トQ面トノ交點ナリ。且L線トQ面トハ他ノ點ヲ

共有スル能ハズ。

II. 二平面P, Rノ交線ヲACトシ平面R中ニ於テ交線AC中ノ任意ノ點Aヲ通過スル直線Lヲ引クトキ此直線ハPニ交ル故Qニモ交ルベシ,其交點Dハ二平面R, Q中ニアル故一直線BDヲ共有シ(6),且此線外ノ點ヲ共有スル能ハズ。故ニRハQト交ル。

***29. 定理二十.** 一點(A)ヲ通過シ一平面(Q)ニ平行ナル平面ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] A點ヨリ平面Qヘ垂線ABヲ引キ,又Aヲ過ギ直線ABニ垂直ナル平面Pヲ作ル(12)。然ラバ $P \parallel Q$。



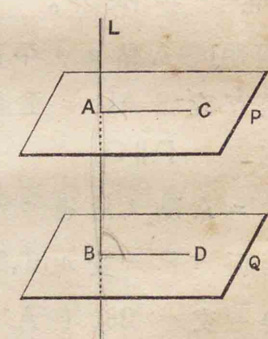
次ニA點ヲ通過スル他ノ平面ハPニ交ル(6),故ニ又Qニ交ル(28),即Aヲ通過シQニ平行ナル平面ハ唯一ニ限ル。

*系 同一ノ平面(R)ニ平行ナル二平面(P,Q)ハ互ニ平行ナリ。

其故ハPガQニ交ルトセバQ∥Rナル故Pハ又Rニ交リ假設ニ戻ルニ至ル,故ニPトQトハ交ラズ,故ニ平行ナリ。

30. 定理二十一. 平行平面ノ一(P)ニ垂直ナル直線(LA)ハ又他ノ面(Q)ニモ垂直ナリ。

[證明] LA線ハP面ニ交ル,故ニ之ニ平行ナルQ面ニ交ルベシ(28),其交點ヲBトス。又Q面中ニBヨリ任意ノ直線BDヲ引クトキ平面LBDトP平面トノ交線ACハBDニ平行ニシテ(27)。且LAニ垂直ナリ(9)。故ニLAハQ面中ノ任意ノ線BDニ垂直ニシテ又總テノ線ニ垂直ナリ。故ニLA線ハQ面ニ垂直ナリ。



注意。 此定理ヲ次ノ如ク述ブルコトヲ得。平行ナル二平面ハ共通垂線ヲ有ス。

31. 定理二十二. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレタル二平行線ノ部分ハ相等シ。

系. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレタル共通垂線ノ部分ハ相等シ。

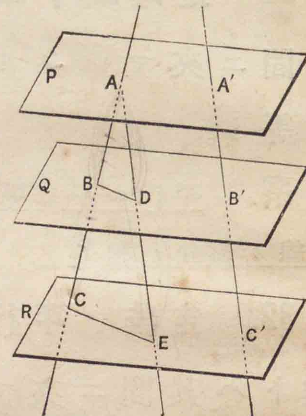
32. 定義. 平行ナル二平面間ノ距離トハ其間ニ夾マレタル共通垂線ノ部分ノ長サヲ云フ。

33. 定理二十三. 任意ノ二直線(ABC, A'B'C')ガ平行ナル三平面(P, Q, R)ニ交ルトキ相對應セル部分ハ比例ヲ爲ス。

[證明] 二直線ガ平行ナレバ對應セル部分ハ二ツ宛相等シ(31),故ニ比例ヲ爲ス。

又二直線ガ相交ルトキ此二直線ハ同一ノ平面中ニアルヲ以テ定理十八及平面幾何學ノ定理ヲ用ヒテ容易ニ證明スルヲ得。

二直線ガ同一ノ平面中ニアラズシテA,B,C及A′,B′,C′ニ於テ平面P,Q,Rニ交ルトキハAヲ通過シ直線A′B′C′ニ平行ナル直線ADEヲ引キ,平面QトRトニ夫夫DトEトニ於テ交ラシム。



然ラバ AD=A′B′, DE=B′C′ (31).

次ニ BD 及 CE ヲ引ケバ此二直線ハ平行ナリ

$$\therefore \quad AB : BC = AD : DE,$$

$$\therefore \quad AB : BC = A'B' : B'C'.$$

問題

(1) 平行ナル二平面ガ他ノ平行ナル二平面ニ交ルトキ四交線ハ皆平行ナリ。

(2) 二平面ガ平行ナルトキ其一ニ平行ナル直線ハ他ノ平面ニ平行ナルカ又ハ其中ニ在リ。

(3) 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレタル線分ノ

中點ノ軌跡如何。

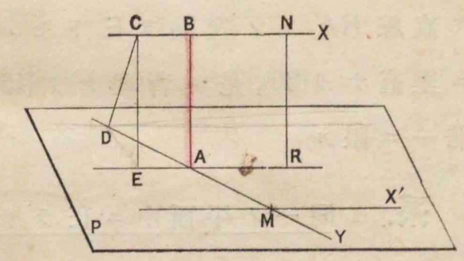
(4) 平行ナル二直線ニ夫々垂直ナル二平面ハ平行ナルカ又ハ相合ス。

(5) 所設ノ圓ノ平面外ノ所設ノ一點ト圓周上ノ各點トヲ結ブ直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(東工)

34. 定理二十四. 同一ノ平面中ニ在ラザル二直線(X,Y)ニ共通ナル垂線ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] Y線中ノ任意ノ點Mヲ過ギテXニ平行ナル線X′ヲ引キX′及Yヲ通過スル平面Pヲ作レバ此平面PハXニ平行ナリ(22)。



次ニX線中ノ任意ノ點NヨリP面ニ垂線NRヲ引キ,RヨリX線ニ平行ナル線RAヲ引ケバ此線ハY線ニ交リ且X′線ニ平行ナリ(21). 此線トY線トノ交點AヨリRNニ平行ナル線AB

ヲ引ケバX線トRAトハ平行線ニシテ同一平面中ニ在ル故此線ABハX線ニ交ル。然ルトキハNRハ平面Pニ垂直ナル故之ニ平行ナル線ABモ亦Pニ垂直ナリ。故ニABハYニ垂直ナリ。又ABNRハ平行四邊形ナル故角ABNハARNニ等シ,故ニ直角ナリ。故ニABハXニモ垂直ナリ。故ニABハ所要ノ共通垂線ナリ。

次ニ直線ABノ外ニ共通垂線CDアリトセヨ。Dヲ通過シX線ニ平行ナル直線ヲ引ケバ此直線ハ平面P中ニアルベキヲ以テCDハ平面Pニ垂直ナリ9)。CヨリBAニ平行ナル直線CEヲ引キ直線RAトノ交點ヲEトセバ,CEモ亦平面Pニ垂直ナリ(20),是レ背理ナリ(15),故ニ共通垂線ハ唯一ニ限ル。

系. 同一ノ平面中ニ在ラザル二直線(X,Y)ニ共通ナル垂線(AB)ハ此二直線間ニ引キ得ベキ最短線分ナリ。

其故ハ CE = BA, 而シテ CE < CD (16)。

$\therefore$ 　BA < CD。

35. 立體幾何學ニ於ケル作圖題ノ解法ハ,平面幾何學ニ於ケルガ如クナラズ,上ノ定理ニ於テ共通垂線ヲ引ケルガ如ク唯圖形ノ位置ヲ確定スルニ止マル。而シテ其要素トスベキモノハ同一ノ直線中ニ在ラザル三點又ハ相交ル二直線又ハ平行スル二直線ヲ含メル平面及此平面ト所題ノ直線トノ交點又ハ平面トノ交線竝ニ一定點ヲ通過シ一定平面ニ垂直ナル直線等ニシテ此等ハ皆作リ得ルモノト假定シ之ヲ諸種ノ作圖題ニ應用スルモノトス。

問　題

(1) 一定點ヲ通過シ,同一ノ平面中ニアラザル二直線ニ交ルベキ直線ヲ引ケ。不能ノ場合アルカ。 (大豫)

(2) 一平面外ノ二定點ニ至ル距離ノ和ガ最小ナル點ヲ此平面中ニ求メヨ。

又差ノ最大ナル點ヲ求メヨ (大豫)

(3) 同一ノ平面中ニアラザル二直線ノ各ヲ含ミ互ニ平行ナル平面ヲ作レ。

(4) 一ツノ平面ヨリ與ヘラレタル距離ニアリ且此平面上ノ三定點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。 (敎養)

(5) 一定點ヲ通過シ同一ノ平面中ニアラザル二直線ニ平行ナル平面ヲ作レ。

(6) 與ヘラレタル一直線ヲ過リ且二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ニアル平面ヲ作レ。

(東師)

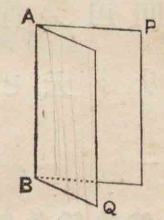
第二章

二面角

36. 定義. 同一ノ直線ニテ終ル二平面ヨリナル圖形ヲ**二面角**ト云フ。

此直線ヲ二面角ノ**稜**ト云ヒ,平面ヲ其**面**ト云フ。

例ヘバ二平面 ABP, ABQ ハ直線ABニ沿ヒテ二面角ヲ作ル,之ヲ二面角PABQ又ハ二面角ABト記ス。



相交ル二平面ハ空間ヲ四部ニ分ツ故四ツノ二面角ヲ生ズ。

二面角ノ大サ. 二面角PABQノ稜ABヲ含メル一平面ガ面ABQノ位置ヨリ稜ヲ軸トシテ廻轉シ,角內ヲ周リテ面ABPノ位置ニ至ラバ其廻轉ノ分量ハ卽二面角ノ大サナリ。

37. 定義. 稜ト一面トヲ共有シ,此面ノ兩側ニ在ル二ツノ二面角ヲ**隣接二面角**ト云フ。

相交ル二平面ニテ成レル四ツノ二面角ノ中,隣接セザルモノヲ**對稜二面角**ト云フ。

平面ガ他ノ平面ト交リ相等シキ隣接二面角ヲ作ルトキ前者ハ後者ニ**垂直**ナリト云ヒ,其各角ヲ**直二面角**ト云フ。

補角,餘角,鋭角,鈍角等ノ名稱ハ二直線間ノ角ニ於ケルト同樣ニ二面角ニ於テモ之ヲ適用ス。

38. 定義. 二面角ノ**平面角**トハ其稜中ノ一點ヨリ,各面中ニ於テ,稜ニ垂直ニ引ケル直線ノ間ノ二面角内ニアル角ナリ。

二面角ノ平面角ノ大サハ其頂點ノ位置ニ係ラズ一定ナリ(25)。

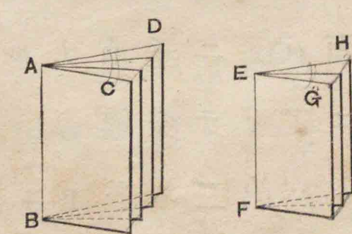
39. 定理二十五. 二ツノ二面角ガ相等シキトキハ其平面角モ亦相等シ。逆モ亦眞ナリ。 (重置法)

系一. 對稜二面角ハ相等シ。

系二. 直二面角ノ平面角ハ直角ナリ,而シテ此逆モ亦眞ナリ,從テ直二面角ハ皆相等シ。

系三. 平面ガ他ノ平面ニ垂直ナルトキハ後者ハ前者ニ垂直ナリ。

40. 定理二十六. 二ツノ二面角(CABD, GEFH)ノ比ハ其平面角(CAD,GEH)ノ比ニ等シ。



[證明] 平面角CAD, GEHヲ通約スベキ角トシ,例ヘバ前者ハ公約量ノ

三倍,後者ハ其二倍ニ等シト假定セヨ。然ルトキハ

$$\frac{CAD}{GEH}=\frac{3}{2}.$$

次ニCADヲ三等分シ又GEHヲ二等分シテ直線ヲ引キ,此等ノ直線ト稜AB, EFトヲ通過スル平面ヲ作レバ二面角CABDハ三等分セラレ,二面角GEFHハ二等分セラレ,且其各部ハ相等シ(39).

$$\therefore\quad \frac{CABD}{GEFH}=\frac{3}{2}.$$

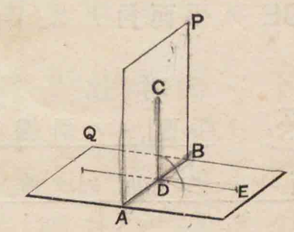
故ニ二面角ノ比ハ其平面角ノ比ニ等シ。

注意. 以上ノ理由ニヨリ二面角ノ大サヲ測ルニハ其平面角ヲ以テス。例ヘバ平面角ガ30°ナル二面角ノ大サハ30°ナリトス。

41. 定理二十七. 一平面(P)ガ他ノ平面(Q)ニ垂直ナルトキ,第一ノ平面中ニアリテ交線(AB)ニ垂直ナル直線(CD)ハ第二ノ平面ニ垂直ナリ。

[證明] 平面Q中ニ於テDヲ通過シ,ABニ垂直

ナル直線DEヲ引クトキCDEハ二面角CABEノ平面角ナル故直角ナリ(39系二)。故ニCDハDEニ垂直ニシテ,又ABニ垂直ナリ,故ニCDハ平面Qニ垂直ナリ。



系一. 二平面ガ互ニ垂直ナルトキ,其一面中ノ一點ヲ通過シ他ノ面ニ垂直ナル直線ハ全ク第一面ノ中ニ在リ。　(同一法)

系二. 相交ル二平面ガ第三ノ平面ニ垂直ナルトキ其交線モ亦此平面ニ垂直ナリ。

42. 定理二十八. 一直線(CD)ガ一平面(Q)ニ垂直ナルトキ,此直線ヲ含メル任意ノ平面(P)ハ此平面ニ垂直ナリ。

[證明] 二平面P,Q(前定理ノ圖)ノ交線ABハDヲ通過スルコト明ナリ,今DヨリABニ垂直ナ

ル線 DE ヲ平面Q中ニ引ケバ, CD ハ Q ニ垂直ナル故又 DE ニ垂直ナリ。而シテ CDE ハ二面角 CABE ノ平面角ナリ。故ニ P ト Q トハ互ニ垂直ナリ。

系. 平面ヘノ斜線ヲ含ミ此平面ニ垂直ナル平面ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

問題

(1) 一點ヨリ相交ル二平面ニ夫々垂線ヲ引ケバ此二垂線ノ平面ハ二平面ノ交線ニ垂直ニシテ且二垂線ノ交角ノ一ハ二平面間ノ二面角ノ平面角ニ等シ。

(2) 相交ル二平面ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ハ一雙ノ平面ナリ。平行平面ノ場合ハ如何。

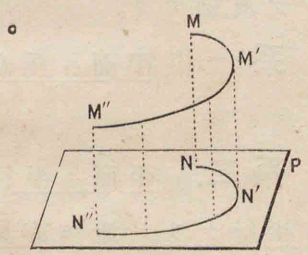
(3) 相交ル二直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡如何。二平行線ノ場合ハ如何。

(4) 一定點ヨリ一定直線ヲ通過スル無數ノ平面ニ下セル垂線ノ足ノ軌跡ハ圓ナリ。

(5) 矩形ノ紙 ABCD アリ, AB ハ四尺, BC ハ三尺ナリ,之ヲ對角線 AC ニ沿ヒテ折リ平面 ABC ト

CDA トヲシテ互ニ垂直ナラシム, BD ノ距離ヲ計算セヨ。（東工）

43. 定義. 一平面上ニ投ズル**一點ノ正射影**トハ此點ヨリ此平面ニ下セル垂線ノ足ナリ。又一平面上ニ投ズル**線ノ正射影**トハ此線中ノ總テノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ。

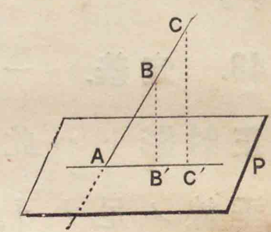


例ヘバ P ヲ平面トシ MM′M″ ヲ任意ノ線トシ,一點 M ガ此線上ヲ運動スト考フレバ此點ノ正射影ハ線 NN′N″ ヲ生ズ,是レ線 MM′M″ ノ正射影ナリ。

注意. 正射影ノ外,射影トイフモノアレドモ本書ニ於テハ正射影ノミヲ論ズルヲ以テ爾後單ニ射影ト云ハバ正射影ヲ指スモノト知ルベシ。

44. 定理二十九. 平面(P)ニ斜交スル直線(ABC)ノ射影ハ直線ナリ。

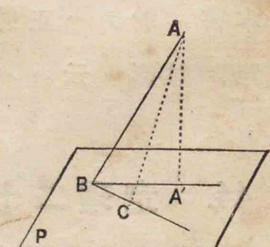
［證明］ 直線 ABC ヲ含ミ,平面 P ニ垂直ナル平面ハ ABC 線中ノ總テノ點ヨリ P ニ下セル垂線ヲ含ム(41 系一)。故ニ此二平面ノ交線 AB′C′ ハ ABC ノ射影ニシテ直線ナリ。



系一. 平面ニ垂直ナル直線ノ射影ハ一點ナリ。

系二. 平面ニ平行ナル直線ノ射影ハ此直線ニ平行ナリ。逆モ亦眞ナリ。

45. 定理三十. 平面 (P) ニ斜交スル直線 (AB) ガ此面中ニアリテ其足ヲ通過スル諸直線ト爲ス角ノ中其射影 (A′B) ト爲ス鋭角ガ最小ナリ。



［證明］ 交點 B ヲ過グル他

ノ直線ヲ BC トシ,A′ ヲ A ノ射影トシ BC ヲ BA′ ニ等シクセバ三角形 ABA′, ABC ニ於テ二邊相等シク第三邊不等ナリ,卽 $AA'<AC$。

$\therefore \qquad \angle ABA' < ABC$。

注意. 直線 AB ト平面 P トノ交點 B ヲ通過セザル直線ト雖平面 P 中ニアルモノニハ本定理ヲ適用スルコトヲ得(26)。

系. 平面ニ斜交スル直線ガ此面中ノ諸線ト爲ス角ノ中射影ト等角ヲ爲セル直線ト爲ス角ハ相等シク,射影ト大ナル角ヲ爲セル直線ト爲ス角ハ他ヨリ大ナリ。

46. 定義. 直線ト平面トノ角トハ此直線ト其射影トガ爲セル鋭角ナリ。

直線ガ平面ニ垂直ナレバ其角ハ直角ナリ。

問題

(1) 等シク且平行ナル二ツノ直線ハ任意ノ平面上ニ等シク且平行ナル正射影ヲ投ズ。(海機)

(2) 一平面上ニ投ズル數多ノ點ノ射影ガ一直線中ニアラバ此等ノ點ハ皆同一ノ平面中ニアリ。

(3) 相交ル二平面上ニ投ズル一線ノ射影ガ何レモ直線ナルトキハ原線モ亦直線ナリ。例外ノ場合ハ如何。

(4) 一ツノ圓ト其圓ノ之ニ平行ナル平面上ニ於ケル射影トハ全ク相等シ。 (大豫)

(5) 直線 AB ノ平面 P ノ上ニ投ジタル正射影ト直角ヲナシ,且其平面 P ノ中ニ在ル任意ノ直線ハ直線 AB ト直角ヲ爲ス。 (東師)

(6) 平面中ノ二直線ガ他ノ平面ト等角ヲナストキハ此二直線ハ交線ト等角ヲナス。

(7) 互ニ垂直ナル二平面ノ交線上ノ一點ヲ過ギテ其交線ト半直角ヲナス直線ヲ各ノ平面上ニ引クトキハ此二直線ノナス角ハ直角ノ三分ノ二ニ等シキカ若シクハ其補角ニ等シ。 (海機)

第三章

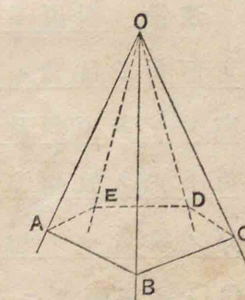
多面角

47. 定義. 一點ヲ共有シ,且二ツ宛順次ニ交ル三ツ以上ノ平面ヨリ成ル圖形ヲ**多面角**或ハ**立體角**ト云フ。

多面角ニハ之ヲ成セル平面ノ數ニヨリテ**三面角**,**四面角**,**五面角**等ノ名アリ。

相交ル二平面ハ空間ヲ四部ニ分ツ,其交線ト交ルベキ第三ノ平面ヲ作レバ空間ハ八部ニ分タル其各部ハ**三面角**ナリ。

48. 多面角ヲ成セル平面ハ皆相隣レル二面ノ交線ニテ終ルモノトス。



例ヘバ五平面 AOB,BOC 等ガ一點 O ヲ通過スル直線 OA, OB 等ニテ交レバ五面ノ多面角ヲ生ズ。O ヲ多面角ノ**頂點**ト云ヒ,平面ヲ其**面**ト云

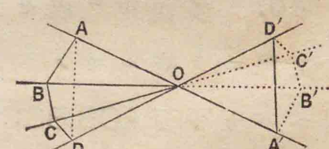
ヒ,交線OA,OB等ヲ其**稜**ト云ヒ,稜ノ間ノ角AOB,BOC等ヲ其**面角**ト云フ。又各二面ノ間ノ二面角ヲ多面角ノ内部ニ向テ測レバ之ヲ**稜角**ト云フ。

多面角ノ總テノ稜ヲ截ルベキ平面ヲ作レバ此面ト多面角ノ面トノ交線ハ多角形ヲ生ズベシ,之ヲ多面角ノ**截面**又ハ**底面**ト云フ。

49. 定義. **凸多面角**トハ其截面ガ凸多角形ナル多面角ナリ。

50. 定義. **對頂多面角**トハ二ツノ多面角ニシテ其各角ノ各稜ガ他ノ角ノ各稜ノ延長トナレルモノナリ。

例ヘバ O−ABCD 及 O−A′B′C′D′ ハ對頂多面角ナリ



注意。 對頂多面角ノ面角及稜角ハ二ツ宛夫々對頂角及對稜角ヲ爲ス故相等シ,然レドモ兩形ニ於ケル各部分ノ排置全ク相反ス,卽O點ヨリ見ルトキA,B,C,Dハ左廻リニシテA′,B′,C′,D′ハ右廻リナリ,故ニ

對頂多面角ハ一般ニ合同ナラズ。

51. 定義. 各部分夫々相等シキモ其排置相反スル二ツノ多面角ハ**對稱**ナリト云フ。

對稱多面角ハ合同ナラザルモ之ヲ動カシテ對頂多面角ノ位置ヲ取ラシムルコトヲ得。

52. 定理三十一. 三面角ノ二ツノ面角(AOB, BOC)ガ相等シキトキハ之ニ對スル稜角(OC, OA)モ亦相等シ。逆モ亦眞ナリ。

[證明] 稜OB中ノ任意ノ點Pヨリ稜OA,OC及面AOCニ垂線PM,PN,PDヲ下シDM,DNヲ連ヌルトキハ

DM⊥OA 及 DN⊥OC.

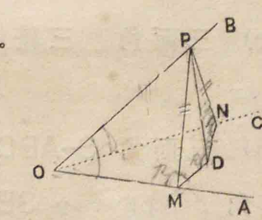
又 $\angle POM = PON$,

$\therefore$ $\triangle POM \equiv PON$,

$\therefore$ $PM = PN$,

$\therefore$ $\triangle PDM \equiv PDN$.

$\therefore$ $\angle PMD = PND$.



然ルニ角PMD及PNDハ夫々稜角OA及OCノ平面角ナリ。故ニ稜角モ亦相等シ。

逆モ亦容易ニ證明スルヲ得。

*系. 三面角ノ二ツノ面角ガ相等シケレバ此三面角ト其對頂三面角トハ合同ナリ。

53. 定理三十二. 三面角ノ一ノ面角ガ他ノ面角ヨリ大ナレバ前者ニ對スル稜角ハ後者ニ對スル稜角ヨリ大ナリ。

問題

(1) 三面角ノ各面角ノ二等分線ヲ含ミ其各面ニ垂直ナル三平面ハ同一ノ直線ヲ通過ス。

(2) 三面角ノ三稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。 (大豫)

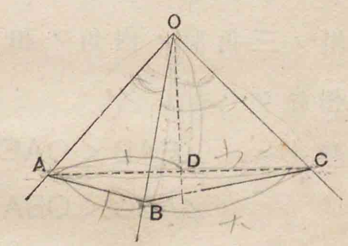
(3) 三面角 S-ABC ノ稜 SA ニ於ケル二面角ガ直角ナルトキハ SB 或ハ SC ナル稜ニ垂直ナル平面ニテ此三面角ヲ截リタル截口ハ直角三角形ナリ。 (大工)

(AC ガ面 ASB 或ハ AB ガ面 ASC ニ垂直トナル)。

(4) 三面角ノ各ノ稜角ヲ二等分スル三ツノ平面ハ同一ノ直線ヲ通過ス。 (東師)

54. 定理三十三. 三面角ノ各面角ハ他ノ面角ノ和ヨリ小ナリ。

[證明] 三ツノ面角ガ皆相等シキトキハ本定理ハ明白ナリ。故ニ三面角 O-ABC ニ於テ AOC ヲ最大ナル面角トセヨ。



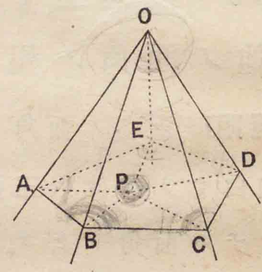
二邊 OA, OC ノ間ニ任意ノ直線 AC ヲ引キ,角 AOC ノ内ニ角 AOB ニ等シク角 AOD ヲ作リテ直線 OD ヲ引キ,次ニ OB ヲ OD ニ等シク截リ, AB, BC ヲ連ヌルトキハ $\triangle AOD, AOB$ ハ合同ナリ。然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ $AC-AB<CB$, 卽 $CD<CB$。故ニ $\triangle OCD, OCB$ ニ於テ OC ハ共通ニシテ $OD=OB$, $CD<CB$,

$$\therefore \quad \angle COD < COB.$$

此不等式ノ兩邊ニ等角 AOD, AOB ヲ加フレバ

$$\angle AOC < AOB + BOC。$$

55. 定理三十四. 凸多面角(O−ABC……)ノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。



[證明] 截面内ノ任意ノ一點Pヲ截面ノ頂點ニ連ネテ生ズル三角形ハ,Oヲ頂點トシ截面ノ邊ヲ底トスル三角形ト同數ナル故,二組ノ三角形ノ内角ノ和ハ相等シ。

然ルニ $\angle EAB < OAE + OAB,$ (54)

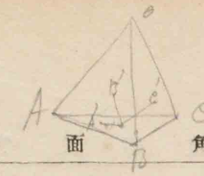
$\angle ABC < OBA + OBC,$

$\angle BCD < OCB + OCD,$

…………………………

故ニ此等ノ不等式ヲ邊々相加フレバPヲ頂點トスル諸三角形ノ底角ノ和ハOヲ頂點トスル諸三角形ノ底角ノ和ヨリ小ナルヲ知ル。

故ニ $\angle AOB, BOC, COD,$ ………ノ和ハP點ノ周リノ角卽四直角ヨリ小ナリ。



*系. 三面角(O−ABC)ノ三ツノ稜角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。

其故ハ角内ノ一點O′ヨリ面BOC, COA, AOBニ夫々垂線O′A′, O′B′, O′C′ヲ下セバ面角B′O′C′, C′O′A′, A′O′B′ハ夫々稜角OA, OB, OCト互ニ補角ヲ爲ス。

故ニ此六ツノ角ノ和ハ六直角ニシテ,其中初ノ三ツノ面角ノ和ハ本定理ニ依リテ四直角ヨリ小ナリ,從テ後ノ三ツノ稜角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。

注意. 三面角O−ABCトO′−A′B′C′トハ互ニ補角ナリト云フ。

問題

(1) Oヲ頂點トスル三面角ノ三ツノ平面角ガ皆直角ナルトキハ任意ノ一點Xヨリ三稜ニ垂線XP, XQ, XRヲ引クトキ下ノ關係アリ。

$$OX^2 = OP^2 + OQ^2 + OR^2。$$ (海機)

(2) 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面角ノ二等分線トヲ含ム三平面ハ同一ノ直線ヲ通過ス。

*(3) 二ツノ三面角ハ其面角ガ夫々相等シケレバ合同ナルカ或ハ對稱ナリ。

(O−ABC, O′−A′B′C′ ヲ所題ノ三面角トス。OA,OB,OC,O′A′,O′B′,O′C′ ヲ皆等シク取リ面 ABC, A′B′C′ ヘ垂線 OD, O′D′ ヲ下セバ D, D′ ハ夫々合同ナル三角形 ABC, A′B′C′ ノ外心トナル)。

(4) 平面ヲ以テ四面角ヲ截リ其截面ヲ平行四邊形ナラシメヨ。 (專門・陸士・名工)

(二雙ノ對面ノ交線ニ平行ナル平面ヲ作レバヨシ)。

(5) 三面角アリ,其二面角ハ何レモ直角ナリ。此三面角ヲ一平面ニテ截ルトキ此平面ト三面角ノ各面トノ交リノナス三角形ノ垂心ハ三面角ノ頂點ヨリ此平面ヘ下セル垂線ノ足ト同ジ點ナルコトヲ證セヨ。

第七篇
多面體
第一章
多面體ノ定義及性質

56. 定義. **多面體**トハ數多ノ平面多角形ニテ圍マレタル立體ナリ。

此等ノ多角形ヲ多面體ノ**面**ト云ヒ,其邊及頂點ヲ夫々多面體ノ**稜**及**頂點**ト云フ。

多面體ニハ其面ノ數ニ從テ**四面體**,**五面體**,**六面體**等ノ名アリ。

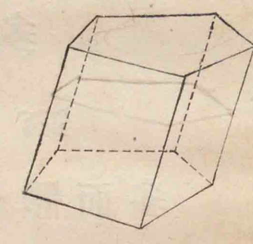
多面體ヲ作ルニハ少クトモ四平面ヲ要ス。

57. 定義. **凸多面體**トハ其何レノ面ヲ擴グルモ其體內ニ入ラザルモノナリ。

本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ。

58. 定義. 角壔トハ二面平行ニシテ他面皆平行四邊形ナル多面體ナリ。

平行ナル二面ヲ角壔ノ**底面**ト云ヒ,他ノ面ヲ**側面**ト云ヒ,側面ノ交線ヲ**側稜**ト云フ。兩底面ハ合同ナル多角形ナルコト明ナリ。



角壔ニハ其底面ノ邊數ニ從テ**三角壔**,**四角壔**等ノ名アリ。

兩底面ノ距離ヲ角壔ノ**高サ**ト云フ。

59. 定義. 直角壔トハ側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ナリ。然ラザルモノヲ**斜角壔**ト云フ。

正角壔トハ直角壔ノ底面ガ正多角形ナルモノナリ。

60. 定義. 多面體ノ**截面**トハ之ヲ平面ニテ截ルトキ生ズル多角形ナリ。

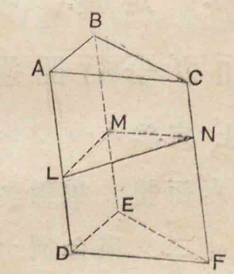
角壔ノ**直截面**トハ側稜ニ垂直ナル截面ナリ。

61. 定理一. 角壔ノ總テノ側稜ニ交ル平行截面ハ合同ナル多角形ナリ

[證明] 平行ナル截面ノ邊ハ平行四邊形ノ對邊ナル故相等シク,且其角ノ二邊ハ平行ナル故相等シ,故ニ合同ナリ。

62. 定理二. 角壔ノ側面積ハ直截面ノ周圍ト側稜ノ一トノ乘積ニ等シ

[證明] AF ヲ角壔トシ,LMN ヲ直截面トスレバ



$AD = BE = CF$.

$\square ABED = LM.AD$,

$\square BCFE = MN.BE$,

$\square CADF = NL.CF$.

$\therefore$ 側面積 $=(LM+MN+NL).AD$.

系. 直角壔ノ側面積ハ其底面ノ周圍ト高サトノ乘積ニ等シ。

問　題

(1) 角壔ノ側稜ニ平行ナル截面ハ平行四邊形ナリ。

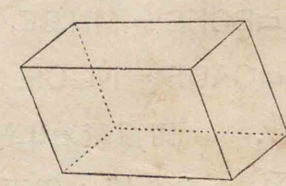
(2) 角壔ノ二雙ノ側稜ヲ通過スル二平面ノ交線ガ底面ニ垂直ナルモノハ直角壔ナリ。

(3) 底面ノ一邊a尺,高サh尺ナル正六角壔ノ全面積ヲ求メヨ。

(4) 底面ノ一邊一尺,高サ二尺ナル正八角壔ノ全面積ヲ平方分ニテ示セ(平方分未滿切捨)。

63. 定義. **平行六面體**トハ角壔ノ底面ガ平行四邊形ナルモノナリ。

上定義ニヨレバ平行六面體ノ相對スル面ハ二ツ宛合同ナル平行四邊形ナリ,故ニ其何レノ面ヲモ底面ト考フルコトヲ得ベシ。



直角平行六面體又ハ**直方體**トハ面ガ皆矩形ナル平行六面體ナリ。直方體ノ稜ガ皆相等シキモノヲ**立方體**又ハ單ニ**立方**ト云フ。

64. 定義. 多面體ノ**對角線**トハ同一ノ面中ニ在ラザル二頂點ヲ連ヌル線分ナリ。

問　題

(1) 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ皆各中點ニ於テ相交ル(之ヲ本形ノ中心ト云フ)。又其十二稜ノ平方ノ和ハ四ツノ對角線ノ平方ノ和ニ等シ。

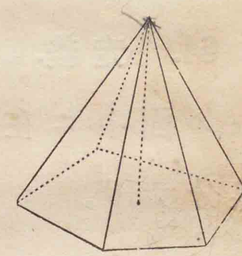
(2) 直方體ノ對角線ハ皆相等シク,其平方ハ一頂點ニ集マル三稜ノ平方ノ和ニ等シ。

(3) 立方體ノ各對角線ノ平方ハ其各稜ノ平方ノ三倍ニ等シ。

(4) 各稜ノ長サ一尺ナル立方體ノ對角線ノ長サヲ厘位マデ算出セヨ。

(5) 直方體ノ三稜ヲ a, b, c トスレバ其全面積如何。

65. 定義. 角錐トハ一面ヲ除キ他面ガ悉ク同一ノ頂點ヲ有スル三角形ナル多面體ナリ。



共通ノ頂點ヲ角錐ノ**頂點**ト云ヒ,之ニ對スル面ヲ**底面**ト云フ。頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ノ長サヲ角錐ノ**高サ**ト云ヒ,又頂點ニ集マル稜及面ヲ夫々其**側稜**及**側面**ト云フ。

角錐ニハ其底面ノ邊數ニ從テ**三角錐**,**四角錐**等ノ名アリ。

66. 定義. 正角錐トハ角錐ノ底面ガ正多角形ニシテ其底面ノ中心ガ此底面上ニ投ズル頂點ノ射影ナルモノナリ。

正角錐ノ頂點ヨリ底面ノ一邊ニ**下**セル垂線ノ

長サヲ其**斜高**ト云フ。

注意。正角錐ノ側面ハ皆合同ナル等脚三角形ナリ。

67. 定義. 角錐臺トハ角錐ノ底面ニ平行ナル截面ト底面トノ間ノ立體ナリ。截面ト底面トヲ共ニ其底面ト云ヒ,其間ノ距離ヲ其高サト云フ。

正角錐臺ノ側面ノ平行ナル二邊間ノ距離ヲ其斜高ト云フ。

68. 定理三. 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ

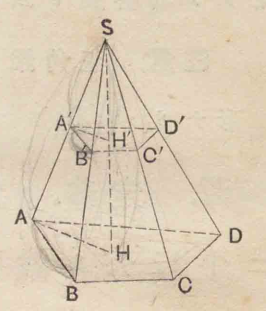
[1] 側稜及高サハ比例ニ分タル。

[2] 截面ト底面トハ相似ナリ。

[3] 截面ト底面トノ比ハ之ヨリ頂點マデノ距離ノ二乘比ニ等シ。

[證明] S-ABCD ヲ角錐トシ A'B'C'D' ヲ底面

ニ平行ナル截面トシ, SH′H ヲ高サトス。



[1] A′H′ トAH トハ平行面 A′C′, AC ト平面 ASH トノ交線ナル故平行ナリ。

$$\therefore \quad \frac{SA'}{A'A}=\frac{SH'}{H'H}.$$

[2] 截面及底面ノ各邊ハ夫々平行ニシテ同方向ニ向ヘル故其角ハ夫々相等シ。次ニ對應邊ノ比ハ明ニ SA′, SA ノ比ニ等シ。故ニ

$$A'B'C'D' \backsim ABCD.$$

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}$ $\frac{B'C'}{BC}=\frac{SB'}{SB}$

$\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}$ $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$

[3] 截面ト底面トノ比ハ A′B′, AB ノ比ノ二乘比ニ等シ。然ルニ三角形 SA′B′, SAB ハ相似ナル故

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SH'}{SH}. \quad \therefore \quad \frac{A'B'C'D'}{ACBD}=\left(\frac{SH'}{SH}\right)^2.$$

系一. 等高ナル兩角錐ニ於テ,頂點ヨリ等距離ニアリテ底面ニ平行ナル兩截面ノ比ハ兩底面ノ比ニ等シ

系二. 等底等高ナル兩角錐ニ於テ頂點ヨリ等距離ニアリテ底面ニ平行ナル兩截面ハ相等シ。

問題

(1) 三角錐(即四面體)ノ對稜ノ中點ヲ連ヌル三直線ハ各中點ニ於テ相交ル。

(2) 前題ヲ應用シテ四面體ノ一ツノ稜ト相對スル稜ノ中點トヲ過グル六ツノ平面ハ同一ノ點ニ於テ交ルコトヲ證セヨ。

(3) 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル六平面ハ同一ノ點ヲ通過ス。 (大豫)

(4) 三角錐ノ底面ニ平行ナル截面ノ面積ヲ底面ノ半ニ等シクセヨ。

(5) 四面體ノ各頂點ヨリ等距離ニアル點ヲ求メヨ。 (大工.東商)

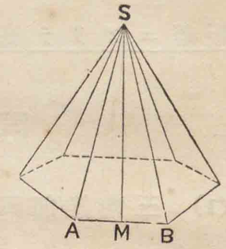
69. 定理四. 正角錐ノ側面積ハ底面ノ周圍ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

[證明] 正角錐 S−ABC……ノ底面ノ邊數ヲ n トシ斜高ヲ SM トスレバ

側面積 $= n.\triangle SAB$

$= \dfrac{n.AB.SM}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(n.AB).SM$。



而シテ$n.AB$ハ底面ノ周ニ等シキコト明ナリ。

70. 定理五. 正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周圍ノ和ノ半ト斜高トノ乘積ニ等シ。

問題

(1) 立方體ノ一頂點ヨリ出ヅル對角線ハ此頂點ニ集マル三稜ノ端ヲ通過スル平面ニ垂直ナリ。 (五高)

(2) 四面體ヲ相對スル二稜ニ平行ナル平面ニテ截レバ截面ハ平行四邊形ナリ。

(3) 四面體ニ於テ相對セル二稜ガ相等シキトキハ其二稜ニ平行ナル平面ニテ截リタル截面ハ周圍ガ一定セル平行四邊形ナリ。 (長商)

(4) 四面體 S−ABC ノ底面 ABC ニ平行ナル截面 DEF ヲ作リ,此截面ノ邊 DE, EF, FD ノ中點 G, H, K ト底面ノ對角頂 C, A, B トヲ連結スル三直線 GC, HA, KB ハ一點ニ會ス。 (專門)

(5) 四面體ノ各頂點ニ於テ其三面ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケバ其四直線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

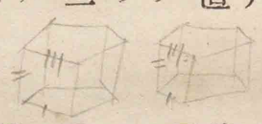
第二章

角壔ノ體積

71.　二ツノ立體ハ相重ネ得ザルモ其體積ハ相等シキコトヲ得。相重ネ得ルトキハ之ヲ合同或ハ全等ナリト云フ。

體積ヲ計ルニハ通常線單位ヲ稜トスル立方體ノ體積ヲ以テ其單位トス。

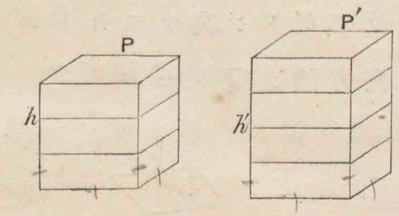
72.　**定理六.**　等高ニシテ合同ナル底面ヲ有スル二ツノ直角壔ハ合同ナリ。



（重置法）

系.　一頂點ニ集マル三稜ヲ等シクスル二ツノ直方體ハ合同ナリ。

73.　**定理七.**　底面ガ合同ナル二ツノ直方體(P,P′)ノ比ハ其高サ(h,h')ノ比ニ等シ。



〔證明〕　高サh,h'ガ公約量ヲ有シ,hハ其三倍,h'ハ其四倍ニ等シト假定スレバ

$$h:h'=3:4.$$

次ニh,h'ヲ夫々三等分及四等分シ分點ヨリ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキハ,Pハ三等分セラレ,P′ハ四等分セラル,而シテ兩體ノ各部分ハ合同ナリ(72)。

(一頂ニ集マル三稜ヲ
等シクスル故、

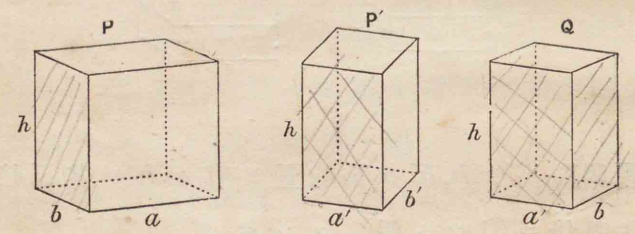
$$\therefore\quad P:P'=3:4.$$

$$\therefore\quad P:P'=h:h'.$$

系.　二稜ヲ等シクスル二ツノ直方體ノ比ハ第三稜ノ比ニ等シ。

74.　**定理八.**　等高ナル二ツノ直方體ノ比ハ其底面ノ比ニ等シ。

[證明] P及P′ヲ所設ノ直方體トシ底面ノ二邊ヲ夫々a, b及a', b'トシ,高サヲhトス。a', b, hヲ三稜トスル直方體ヲQトセバ



$$\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'},\qquad \frac{Q}{P'}=\frac{b}{b'}.$$

$$\therefore\quad \frac{P}{P'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}=\frac{a.b}{a'.b'}.$$

然ルニ此式ノ右邊ハP及P′ノ底面ノ比ニ等シ。

75. 定理九. 二ツノ直方體ノ比ハ其三稜ノ測度ノ乘積ノ比ニ等シ。

[證明] P及P′ヲ所設ノ直方體トシ,其三稜ノ測度ヲa, b, c及a', b', c'トス。而シテa', b', c'ナル三稜ヲ有スル直方體ヲRトセバ前定理ニ由テ

$$\frac{P}{R}=\frac{b.c}{b'.c'}\quad 及\quad \frac{R}{P'}=\frac{a}{a'}.\qquad (74, 73)$$

$$\therefore\quad \frac{P}{P'}=\frac{a.b.c}{a'.b'.c'}.$$

系一. 直方體ノ體積ノ測度ハ底面ト高サトノ測度ノ乘積ニ等シ,從テ三稜ノ測度ノ乘積ニ等シ。

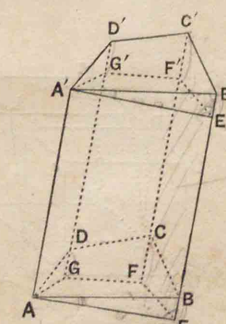
系二. 立方體ノ體積ハ其稜ノ三乘冪ニ等シ。

(以下測度ト云フ語ヲ略ス)。

注意. 故ニ或數ノ三乘冪ヲ其立方ト云フ。

76. 定理十. 斜角壔ノ體積ハ其直截面ヲ底面トシ其稜ヲ高サトスル直角壔ノ體積ニ等シ。

[證明] 所設ノ角壔ヲABCDA′B′C′D′トシ稜AA′ノ兩端ヲ通過シ,之ニ垂直ナル平面ヲ作リテ側面ト交ラシム。然ルトキハ此直截面AEFG, A′E′F′G′ヲ底面トシAA′ヲ高サトスル直角壔ハ所設ノ斜角壔

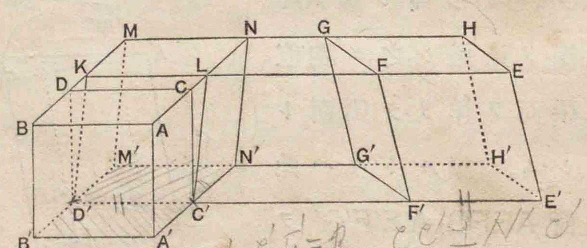


ニ等シ。

其故ハ立體 ABCDEFG, ヲ取リテ之ヲ他ノ立體 A′B′C′D′E′F′G′ ニ重ネ, 面 AF ヲ面 A′F′ ノ上ニ置ケバ此二面ハ合同ナルヲ以テ相重ナル (61)。又稜 EB, FC, GD ハ夫々 E′B′, F′C′, G′D′ ニ等シク且相重ナル面ニ垂直ナル故相重ナル。從テ兩立體ハ合同ナレバナリ。

注意。A 及 A′ ヲ通過スル直截面ガ底面ト交ル場合モ亦容易ニ證明スルヲ得。

77. 定理十一. 平行六面體 (EFGHE′F′G′H′) ノ體積ハ其底面 (E′F′G′H′) ト高サ (h) トノ乗積ニ等シ。



∠E′F′ = R　CC′ ⊥ N′C′
∠C′N′ ≠ R

[證明] 稜 EF, HG, E′F′, H′G′ ヲ任意ニ延長シ,

E′F′ ノ延長上ニ C′D′ ヲ E′F′ ニ等シク取リ, 二點 C′, D′ ヲ通過シ, 直線 C′D′ ニ垂直ナル平面ヲ作レバ直立平行六面體* KN′ ヲ得ベシ。

次ニ稜 N′C′, NL, MK, M′D′ ヲ延長シ N′C′ ノ延長中ニ C′A′ ヲ N′C′ ニ等シク取リ, 平面 ANN′A′ 中ニ於テ C′ ヨリ A′C′ ニ垂線 C′C ヲ引ケ。

稜 D′C′ ハ平面 AN′ ニ垂直ナル故 C′C 及 C′A′ ニ垂直ナリ。故ニ平面 CC′D′ ヲ作リ, 又 A′ ヲ通過シ此平面ニ平行ナル平面 A′B′BA ヲ作レバ生ズル所ノ立體 A′D ハ直方體ナリ。

然ルニ元ノ立體 EG′ ハ直立平行六面體 KN′ ト等積ニシテ此立體ハ又直方體 A′D ト等積ナリ (76), 而シテ此等ノ三立體ノ高サハ同ジ平行平面ノ距離ナル故皆 h ニ等シ。

然ルニ體積 A′D = A′B′D′C′ × h (75 系一)。

又　　A′B′D′C′ = C′D′M′N′ = E′F′G′H′。

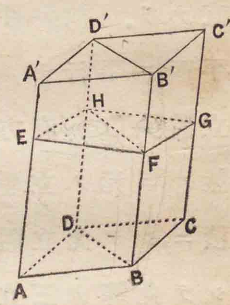
∴　　體積 EG′ = E′F′G′H′ × h。

---

* 直立平行六面體トハ平行六面體ノ側稜ガ底面ニ垂直ナルモノナリ。

78. 定理十二. 平行六面體(ABCDA′B′C′D′)ヲ,二對稜(BB′, DD′)ヲ通過スル平面ニテ分ツトキ生ズル兩三角壔ハ等積ナリ。

[證明] 稜 BB′ ニ垂直ナル直截面ヲ EFGH トスレバ $\triangle$EFH, GHF ハ夫々三角壔 ABD′, CBD′ ノ直截面ナリ。

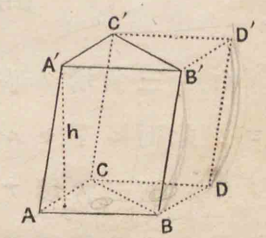


然ルニ三角壔 ABD′ ハ BB′ ヲ高サトシ $\triangle$EFH ヲ底面トスル直三角壔ト等積ナリ。又三角壔 CBD′ ハ前者ト同高ニシテ $\triangle$GHF ヲ底面トスル直三角壔ト等積ナリ。然ルニ此二ツノ直三角壔ハ合同ナル底面 EFH, GHF ヲ有スル故合同ナリ(72)。

$$\therefore \quad \text{三角壔}\ ABD' = CBD'.$$

注意。 三角壔 ABD′, CBD′ ノ各面及稜角ハ二ツ宛相等シ,然レドモ其排置ノ順序相反スルヲ以テ兩體合同ナラズ。

79. 定理十三. 三角壔(ABCA′B′C′)ノ體積ハ其底面(ABC)ト高サ(h)トノ乗積ニ等シ。



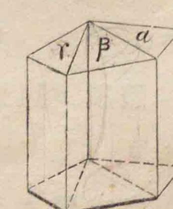
[證明] 平行四邊形 ABDC 及 A′B′D′C′ ヲ完成シ DD′ ヲ連ヌルトキ AD′ ハ平行六面體ニシテ三角壔 ABC′ ノ二倍ナリ(78)。

故ニ三角壔ノ體積ヲ V トセバ

$$V = \frac{1}{2} ABDC \times h = \triangle ABC \times h.$$

系一. <u>任意ノ角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乗積ニ等シ。</u>

其故ハ任意ノ角壔ハ之ヲ同高ナル若干ノ三角壔ニ分チ得ベシ,依テ三角壔ノ底面ヲ α, β, γ トシ高サヲ h トスレバ



$$\text{全體積}\ V = \alpha h + \beta h + \gamma h = (\alpha+\beta+\gamma)h.$$

故ニ底面ヲ B トスレバ

$$V = Bh.$$

系二. 角壔ノ體積ハ其直截面ト側稜トノ乘積ニ等シ。 定理十四ノ導クハ…と 卽チ高サナル

問　題

(1) 三角壔ノ體積ハ其一側面ト對稜中ノ一點ヨリ此面ニ下セル垂線トノ乘積ノ半ニ等シ。

(2) 正三角壔アリ,底面ノ一邊 a 尺ニシテ,高サ h 尺ナリ,其體積幾立方尺ナルカ。

(3) 正六角壔アリ,底面ノ一邊一寸二分ニシテ側稜ノ長サ二寸五分ナリ。其體積ハ幾立方寸ナルカ。 (陸士)

(4) 正八角壔アリ,底面ノ一邊一寸ニシテ側稜ノ長サ二寸ナリ。其體積ハ幾立方寸ナルカ。 $(1+\sqrt{2})^2$

(5) 斜角壔アリ,底面ハ一邊 a 尺ナル正三角形ニシテ,側稜ハ長サ b 尺ニシテ底面ト六十度ノ角ヲナスト云フ。其體積ハ幾許ナルカ。 底面積

(6) 體積ガ148.877立方糎ナル立方體ノ全面積ヲ求メヨ。 $a=\sqrt[3]{148.877}=5.3$, $5.3^2\times 6=168.54$ 平方糎

(7) 直方體ノ全面積ガ497.26平方呎ニシテ三稜ノ比ハ3,4,5ノ如シ,三稜ノ長サヲ求メヨ。

(8) 直方體アリ,對角線ノ長サ七尺ニシテ三稜ノ長サノ比ハ 2:3:6 ニ等シト云フ。其體積ハ幾許ナルカ。又其全面積ハ如何。

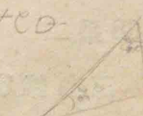
(9) 高サノ相等シキ正三角壔ト正四角壔トアリ,底ハ同ジ圓ニ内接スル正三角形及正方形ナリ。其體積ノ比ヲ求メヨ。

7, 三稜ノ長サハ3,4,5ナルヲ以テ單位面積ハ
497.26 ÷ {(3×4+3×5+4×5)2} = 5.29
5.29 平方呎 ナリ故ニ 單位ノ長サハ $\sqrt{5.29}=2.3$ 呎ナリ
故 23×3, 23×4, 23×5 ハ 6.9呎, 9.2呎, 11.5呎

9, $a_4=\sqrt{2}r$　$a_3=\sqrt{3}r$
$a^2=2r^2$　$a^2=3r^2$
正四角壔ノ體積 $2r^2h$　正三角壔ノ體積 $3r^2h$

$$\frac{2r^2h}{3r^2h}=\frac{2}{3}$$

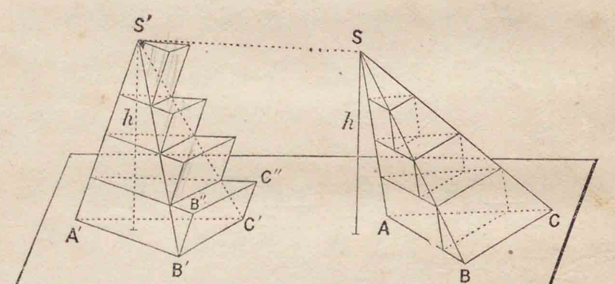
$ek=ke$　$ek+dk=ke+eo$
$dk \neq de$　$cD=ke+eo$



第三章

角錐ノ體積

80. 定理十四. 等底$(ABC, A'B'C')$等高(h)ナル二ツノ三角錐$(SABC, S'A'B'C')$ハ等積ナリ。



[證明] 所設ノ兩體ヲ同一ノ平面上ニ置クトキ兩體ハ等高ナル故直線SS'ハ此平面ニ平行ナリ.
稜SAヲn等分シ,其分點ヲ通過シ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキ兩角錐ノ截面ハ二ツ宛相等シ(68系二)。

三角錐$SABC$ニ於テ,各截面ヲ上底トシ稜SA

ノ一部分ニ等シク且平行ナル稜ヲ有スル$n-1$個ノ三角壔ヲ作リ,又$S'A'B'C'$ニ於テモ同樣ノ作圖ヲ爲ストキ,兩體ニ於ケル三角壔ハ二ツ宛等底等高ナル故等積ナリ。

三角錐$SABC, S'A'B'C'$ノ體積ヲV, V'トシ内部ノ三角壔ノ體積ノ和ヲPトスレバ

$$P<V \text{ 及 } P<V'.$$

nヲ大ナラシムレバPハ從テ大ナルベシ,例ヘバnヲ前ノ二倍ト爲サバ各角壔ハ二ツトナリ其一ハ前者ノ半ニシテ他ノ一ハ此半ヨリ大ナルベシ。

次ニ三角錐$S'A'B'C'$ニ於テn個ノ角壔ヲ作リ,其下底ヲシテ三角錐ノ底面及截面タラシメ,其稜ヲシテ$S'A'$ノ一部分ニ等シク且平行ナラシメ,又三角錐$SABC$ニ於テモ同樣ノ作圖ヲ爲ストキハ,兩體ニ於ケル各三角壔ハ二ツ宛相等シ,故ニ各角錐ニ於ケル三角壔ノ體積ノ和ヲQトスレバ

$$Q>V \text{ 及 } Q>V'.$$

而シテnヲ大ナラシムレバQト各三角錐トノ

差ハ如何程ニテモ小ナラシムルヲ得ベシ。

故ニP及Qハ何レモ或極限ニ近迫ス。故ニ其兩極限ガ相等シキコトヲ知ラバ,常ニPトQトノ間ニ在ル定量V及V′ハ相等シクシテP及Qノ共有スル極限ニ等シキコトヲ知リ得ベシ。

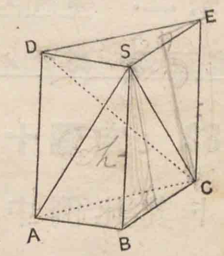
偖Q−Pハ三角壔A′B″C″ナリ,其故ハ他ノ$n-1$個ノ三角壔ハSABCノ内部ニアル$n-1$個ノ三角壔ト夫々等積ナレバナリ。

然ルニ此三角壔A′B″C″ノ底面ハ恆ニ一定シ,其高サハ兩三角錐ノ高サノ$\frac{1}{n}$ナル故其體積ハnガ限リ無ク大ナルニ從テ零ニ近迫ス。故ニQ−Pハ之ヲ如何程ニテモ零ニ近迫セシムルヲ得。然ルニV及V′ハ共ニQトPトノ間ニアル故其差ハQ−Pヨリモ小ナリ,從テ零ナリ,卽V及V′ハQ及Pノ共有スル極限ニシテ卽相等シ。

81. 定理十五. 三角錐(SABC)ノ體積(V)ハ其底面(ABC)ト高サ(h)トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

[證明] 頂點Sヨリ夫々稜BA, BCニ等シキ平

行線SD, SEヲ引キAD, DE, ECヲ連又レバ此三角錐ト同底同高ナル三角壔ヲ得,此三角壔ハ元ノ三角錐ノ三倍ニ等シカルベシ。其故ハ面SDCヲ作レバ此三角壔ハ三ツノ三角錐SADC, SECD, SABCニ分タル,然ルニ第一,第二ノ兩三角錐ハ等底ADC, ECDヲ有シ,且Sヨリ平面AEニ下セル垂線ヲ高サトスルヲ以テ互ニ等積ナリ。次ニ第二,第三ノ三角錐ヲ比較スルニ第二ハCヲ頂點トシDSEヲ底面トスト見做スコトヲ得ルヲ以テ第三ト等底同高ナリ,故ニ等積ナリ。



故ニ三角錐SABCハ此三角壔ノ$\frac{1}{3}$ニ等シ。

$$\therefore \quad V=\frac{\triangle ABC\times h}{3}.$$

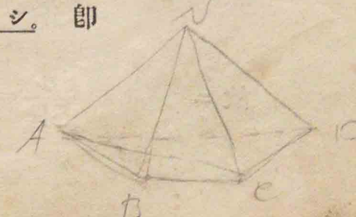
系一. 任意ノ角錐ノ體積(V)ハ底面(B)ト高サ(h)トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。卽

$$V=\frac{1}{3}Bh.$$

$\frac{1}{3}\triangle ABC, h$

$\frac{1}{3}\triangle ACD, h$

$\frac{1}{3}ABCD\,h$



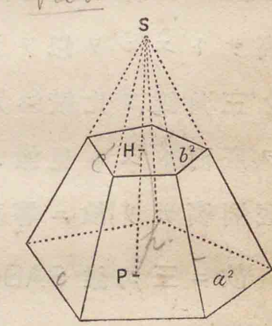
其故ハ所題ノ角錐ハ同高ナル數多ノ三角錐ニ分チ得レバナリ。

系二. 等高(又ハ等底)ナル兩角錐ノ體積ノ比ハ底面(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

82. 定理十六. 角錐臺ノ體積ハ兩底ト其比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタル積ノ三分ノ一ニ等シ。

比例中項 $\sqrt{a^2b^2}=ab$

[證明] SP ヲ角錐ノ高サ, V ヲ角錐臺ノ體積, a^2 及 b^2 ヲ其兩底ノ面積, HP$=h$ ヲ其高サトス。



V ハ二ツノ角錐ノ差ナルヲ以テ

$$V=\frac{SP}{3}\times a^2-\frac{SH}{3}\times b^2.$$

然ルニ
$$\frac{a^2}{SP^2}=\frac{b^2}{SH^2},$$

故ニ
$$\frac{a}{SP}=\frac{b}{SH}=\frac{a-b}{h}.$$

$$\therefore\quad SP=\frac{ah}{a-b},\quad SH=\frac{bh}{a-b}.$$

故ニ
$$V=\frac{a^3h}{3(a-b)}-\frac{b^3h}{3(a-b)}$$
$$=\frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}$$
$$=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2).$$

問題

(1) 四面體ノ二面角ヲ二等分スル平面ハ對稜ヲ兩側面ノ比ニ分ツ。 (陸士·大工·專門)

(2) 一ツノ三面角ヲ等シクスル二ツノ三角錐ノ比ハ此三面角ノ三稜ノ乘積ノ比ニ等シ。

(3) 三角錐アリ,高サハ2.04尺ニシテ底面ノ三邊ガ夫々0.4尺, 0.5尺, 0.6尺ナリ,體積如何。

(4) 正四面體ノ稜ノ長サ a 寸ナルトキ其高サ幾寸ナルカ。 (海兵)

(5) 正四面體ノ一稜ガ6寸ナルトキ其體積ヲ求メヨ,但立方寸以下第二位マデ算出スベシ。 (四高)

(6) 正四面體內ノ任意ノ一點ヨリ各面ニ下セル垂線ノ長サノ和ハ其高サニ等シキコトヲ證セヨ。　(仙工)

(7) 高サ六寸ノ正四面體ノ體積ヲ求メヨ。

(熊工)

(8) 正六角錐體ノ一邊ハ一寸八分ニシテ高サハ四寸七分ナリト云フ,其體積如何。　(農實)

(9) 底面ノ各邊四寸ニシテ高サ一尺五寸ノ正六角錐ノ體積ヲ求メヨ。　(熊工)

(10) 底ノ一邊ノ長サ4尺側稜ノ長サ10尺アル正四角錐ノ全面積及體積ヲ求メヨ。但體積ハ立方尺ノ小數第三位マデ算出スベシ。

(11) 體積1立方寸ナル角錐アリ,底面ガ平行四邊形ニシテ其二邊及對角線ガ夫々1寸,2寸,$\sqrt{7}$寸ナルトキハ高サ幾寸ナルカ。　(名工)

(12) 正角錐臺アリ,兩底面ハ一邊ノ長サ夫々15寸及20寸ナル正六角形ニシテ,高サハ12寸ナリト云フ。其體積ハ幾許ナルカ。

(13) 正四角錐臺アリ,兩底ハ一邊ノ長サ夫々2寸及8寸ニシテ其體積ハ112立方寸ナリト云フ。

其高サ及斜高ハ各幾許ナルカ。

(14) 正角錐臺アリ,高サハ2.1寸ニシテ體積ハ36.4立方寸ナリ,而シテ一方ノ底面ハ一邊ノ長サ2寸ナル正方形ナリト云フ。他ノ底面ノ邊ノ長サハ幾許ナルカ。 6寸。

第八篇

曲面體*

第一章

直圓壔

83. **定義.** **直圓壔**トハ矩形ガ其一邊ヲ軸トシ,其原位置ニ歸ルマデ廻轉シテ生ズル立體ナリ。

軸ニ垂直ナル二ツノ邊ハ夫々圓ヲ生ズ,之ヲ圓壔ノ**底面**ト云フ。軸ニ平行ナル邊ハ曲面ヲ生ズ,之ヲ其**側面**ト云

軸トセル邊ノ長サ卽兩底面ノ距離ヲ其**高サ**ト云フ。

---

*直圓壔ト直圓錐ト球トヲ總稱シテ曲面體ト云フ。

84. **定義.** 直角壔ノ底面ガ直圓壔ノ底面ニ內接又ハ外接スルトキ此直角壔ハ此直圓壔ニ**內接**又ハ**外接**スト云フ。

85. **定理一.** 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ圓周ト高サトノ乘積ニ等シ。

[證明] 直圓壔ニ內接スル正多角壔ノ底面ノ周圍ヲ p ニテ表シ,高サヲ H ニテ表サバ此角壔ノ側面積ハ $p.H$ ナリ(62系)。今其底面ノ邊數ヲ無限ニ增セバ p ノ極限ハ圓壔ノ底面ノ圓周 P ナリ。故ニ此正多角壔ノ側面積ノ極限ハ $P.H$ ニシテ,是レ圓壔ノ側面積ナリ。

系. 直圓壔ノ底面ノ半徑ヲ R トシ,高サヲ H トセバ

側面積=$2\pi RH$. 底面積=$2\pi R^2$

$$全面積\ S = 2\pi R(R+H)。$$

注意. 曲面ノ面積トハ常ニ平面ノ面積ノ和ノ極限ナリ。

86. 定理二. 直圓壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ。

[證明] 直圓壔ノ體積Vハ內接正多角壔ノ體積Pヨリ大ニシテ外接正多角壔ノ體積P′ヨリ小ナリ,卽

$$P<V<P'.$$

今高サヲHトシ,內外ニアル角壔ノ底面積ヲB, B′トセバ

$$P=B.H,\quad P'=B'.H.$$

然ルニ角壔ノ底面ノ邊數ヲ無限ニ增セバP及P′ハ何レモVニ近迫ス,故ニVハ其共有ノ極限ニシテ底面ト高サトノ乘積ニ等シ。

系. 直圓壔ノ底面ノ半徑ヲRトシ,高サヲHトスレバ

$$體積V=\pi R^2H.$$

問　　題

(1) 直圓壔ノ軸ニ平行ナル平面ヲ以テ,之ヲ截ラバ其截面ハ矩形ナリ。

(2) 矩形ノ二隣邊ヲa, bトセバ其各邊ヲ軸トシ,此矩形ヲ廻轉シテ生ズベキ兩直圓壔ノ體積ノ比如何。

(3) 底面ノ直徑一尺五寸,高サ四尺ナル直圓壔形ノ水桶アリ,其容量ヲ勺マデ算出セヨ。但πハ3.1416トス。

(4) 高サガ底ノ直徑ニ等シキ圓壔ノ傍面積(側面積)ハ底ノ半徑ノ平方ニ比例シ,體積ハ其立方ニ比例ス。 (陸士)

(5) 直圓壔ノ高サ1米ニシテ其全面積ハ半徑2米ナル圓ノ面積ニ等シト云フ,此圓壔ノ半徑及體積ヲ求メヨ。 (陸士)

(6) 直圓壔ノ側面積ガ169.56平方米ニシテ其高サト直徑トノ比ハ2:3ナリ,其體積如何。 (仙醫)

(7) 半徑Rナル水槽アリ。今活塞ノ通路ノ長サlニシテ其內半徑rナル「ポンプ」ヲ使用シテ此水ノ深サヲLダケ減ゼントス。幾回活塞ヲ上下スベキカ。 (海兵)

R=2尺, l=1尺, r=2寸, L=4尺トセバ如何。

(8) 一升ノ水ヲ底ノ半徑五糎アル直圓壔形ノ器ニ移シ入ルヽトキハ水面ノ高サ幾許トナルカ。但$\pi=3.1416$トス。

(9) 底面ノ直徑一尺ナル直圓壔形ノ水桶ニ水ヲ入レタルアリ,之ニ一邊ノ長サ三寸アル立方體ヲ沈ムルトキハ水面ノ上ルコト幾寸ナルカ. 但$\pi=3.1416$トス。

第二章

直圓錐

87. 定義. **直圓錐**トハ直角三角形ガ其直角ノ一邊ヲ軸トシ,原位置ニ歸ルマデ廻轉シテ生ズル立體ナリ。

軸ノ長サハ圓錐ノ**高サ**ニシテ,軸ニ垂直ナル邊ニ由テ生ズル圓ハ其**底面**ナリ。又斜邊ノ長サヲ圓錐ノ**斜高**ト云ヒ,斜邊ニ由テ生ズル曲面ヲ其**側面**ト云フ。

角錐ガ直圓錐ト頂點ヲ共有シ,其底面ガ直圓錐ノ底面ニ内接又ハ外接スルトキ其角錐ハ直圓錐ニ内接又ハ外接スト云フ。

88. 定理三. 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ圓周ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

[證明] 直圓錐ニ内接スル正角錐ノ側面積ハ

底面ノ周圍×斜高ノ半

ニ等シ(69),底面ノ邊數ヲ無限ニ増セバ角錐ノ側

面積ハ圓錐ノ側面積ニ近迫ス。而シテ角錐ノ底面ノ周圍ノ極限ハ圓錐ノ底面ノ圓周ニシテ角錐ノ斜高ノ極限ハ圓錐ノ斜高ナリ。故ニ圓錐ノ側面積ハ底面ノ圓周ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。$=\pi RH'$

系一. 直圓錐ノ側面積ハ高サノ中點ヲ通過シ底面ニ平行ナル截面ノ圓周ト斜高トノ乘積ニ等シ。 $R=2r$ $\therefore S=\pi 2r H'$

系二. 直圓錐ノ高サヲHトシ,斜高ヲH′トシ底面ノ半徑ヲRトスレバ $=S+\pi R^2=\pi RH'+\pi R^2$

$$\text{全面積}\ S=\pi R(H'+R),$$

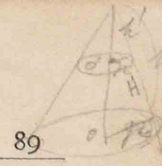
且 $$H'=\sqrt{H^2+R^2}.$$

89. 定理四. 直圓錐ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

系. 直圓錐ノ底面ノ半徑ヲRトシ,高サヲHトスレバ

$$\text{體積}\ V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

90. 定義. 直圓錐臺トハ直圓錐ノ底面ト之ニ平行ナル截面トノ間ニ夾マレタル立體ナリ。



梯形ノ一邊ガ其兩底ニ垂直ナルトキ此邊ヲ軸トシ其原位置ニ歸ルマデ廻轉セバ直圓錐臺ヲ生ズ。軸ニ對スル邊ヲ此圓錐臺ノ斜高ト云フ。

91. 定理五. 直圓錐臺ノ側面積ハ底面ノ圓周ノ和ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

系一. 直圓錐臺ノ側面積ハ軸ヲ直角ニ二等分スル截面ノ圓周ト斜高トノ乘積ニ等シ。

系二. 直圓錐臺ノ體積,高サ,兩底面ノ半徑ヲ夫々V,H,R,R′トセバ

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+RR'+R'^2). \qquad (82)$$

問題

(1) 直圓錐ノ頂點ヲ通過スル截面ハ等脚三角形ナリ。

(2) 直圓錐ヲ其高サノ中點ヲ過ギ,底面ニ平行ナル平面ヲ以テ截ルトキ生ズル二ツノ部分ノ體積ノ比ヲ求メヨ。 (新醫)

(3) 二邊ノ長サa及bナル直角三角形ヲ,其斜邊ヲ軸トシテ廻轉シ,生ズル所ノ立體ノ全面積及體積ヲ求メヨ。 (海機)

(4) 一邊ノ長サlナル正三角形ノ一頂點ヲ通過シ,之ニ對スル邊ニ平行ニ引ケル直線ヲ軸トシテ此正三角形ヲ廻轉シ,由テ生ジタル立體ノ體積ヲ求メヨ。 (大工)

(5) 底面ノ周八寸八分ニシテ高サ二寸七分ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ。 (長商)

(6) 直圓錐ノ底面ニ平行ナル截面ヲ作リ,其傍面積(側面積)ヲ二等分セヨ。 (陸士)

又底ノ半徑 8 糎,高サ 20 糎ナルトキ截面ト底面トノ距離如何。 (大豫)

(7) 邊 AB ヲ軸トシ矩形 ABCD ヲ廻轉シテ生ズル立體ノ體積ト對角線 AC ヲ軸トシテ△ABC ヲ廻轉シテ生ズル立體ノ體積トノ比ヲ求メヨ。但 AB＝3尺, BC＝5尺トス。 (名工)

(8) 三邊ノ比ガ 3:4:5 ナル直角三角形ノ各邊ヲ夫々軸トシテ廻轉スルトキ生ズル所ノ立體ノ體積ヲ比較セヨ (仙工)

(9) 直圓錐臺アリ,其高サ七十尺ニシテ,兩底面ノ直徑八十尺及七尺ナリ,體積ヲ求メヨ。但πハ$\dfrac{22}{7}$トス。 (水産)

(10) 直圓錐臺アリ,上底ノ半徑 2 寸高サ 6 寸其體積 119.3808 立方寸ナリ,下底ノ半徑ヲ求メヨ。但πハ 3.1416 トス。

第三章

球

92. 定義. **球面**トハ閉塞セル曲面ニシテ其面上ノ總テノ點ガ**中心**ト稱スル定點ヨリ等距離ニ在ルモノナリ。而シテ球面ニテ圍マレタル立體ヲ**球**ト云フ。

中心ト球面上ノ一點トヲ連ヌル直線ヲ球ノ**半徑**ト云ヒ,中心ヲ通過シ其兩端ガ球面ニテ終レル直線ヲ其**直徑**ト云ヒ,直徑ノ兩端ヲ球ノ**對點**ト云フ。

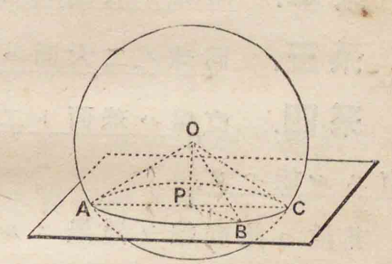
注意一。 球面ハ一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ。

注意二。 半圓ノ直徑ヲ軸トシ之ヲ廻轉シ其原位置ニ歸ラシムレバ球ヲ生ズ。

注意三。 球面ト云フベキヲ略シテ球ト云フルコトアリ。

93. 定理六. 球面ト平面トノ交線ハ圓周ナリ。

[證明] 球ノ交ル平面ガ球ノ中心ヲ通過スレバ交線中ノ點ハ皆此平面上ニアリテ球ノ中心ヨリ等距離ニ在リ,故ニ此交線ハ球ノ半徑ヲ半徑トシ球ノ中心ヲ中心トスル圓周ナリ。



此平面ガ球ノ中心Oヲ通過セザルトキハOヨリ此平面ヘ垂線OPヲ引キ,交線ABC中ノ任意ノ二點AトBトヲOニ連ネヨ。然ラバOA, OBハ球ノ半徑ナル故相等シ,故ニAトBトハ此垂線ノ足Pヨリ等距離ニアリ。故ニ交線ABCハPヲ中心トシPAヲ半徑トスル圓周ナリ。

注意。 圓ABCヲ球ノ**截面**ト云フ。

系一. 球ノ半徑ヲRトシ截面ノ半徑ヲrトシ兩中心ノ距離OPヲdトスレバ

$$r^2=R^2-d^2,$$

故ニ中心ヨリ等距離ニ在ル截面ハ皆相等シク,中心ヨリ遠キ截面ハ近キ截面ヨリ小ナリ。

定義. 球ノ中心ヲ通過スル截面ヲ球ノ**大圓**ト云ヒ,然ラザルモノヲ**小圓**ト云フ。

系二. 同球ノ大圓ハ皆合同ナリ。 直經相ニナ故

系三. 同球ノ二大圓ハ互ニ二等分ス。

系四. 直線ハ球面ト二點ヨリ多クノ點ヲ共有スル能ハズ。

其故ハ此直線ヲ通過スル任意ノ平面ト球トノ交線ハ圓周ニシテ,此圓周ト此直線トノ交點ハ二ツヨリ多カラザレバナリ。

系五. 球面上ノ對點ナラザル二點ヲ通過スル大圓ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

94. 定理七. 大圓ハ球及球面ヲ二等分ス。

[證明] 大圓ノ直徑ノ一ヲ軸トシ,球ノ一部分ヲ平角ダケ廻轉シ,此大圓ガ其原位置ニ合スルトキ

二部分ノ曲面ハ相合スベシ,然ラザレバ中心ヨリ球面上ノ點ニ至ル距離ガ不等トナルベシ。故ニ二部分ハ合同ナリ。

95. 定義. 球ノ大圓又ハ小圓ノ中心ヲ通過シ其面ニ垂直ナル直線ヲ此圓ノ**軸**ト云ヒ,軸ト球面トノ二交點ヲ此圓ノ**極**ト云フ。

球ノ大圓又ハ小圓ノ軸ハ球ノ中心ヲ通過シ各極ハ其圓周上ノ點ヨリ等距離ニ在リ。

問　題

(1) 二定點又ハ三定點ヲ通過スル球ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(2) 四面體ノ四頂點ヲ通過スル球ハ一アリ而シテ唯一ニ限ル。

(大豫)

注意. 此球ハ四面體ニ外接スト云フ。

(3) 二定點ニ至ル距離ノ比ガ一定ナル點ノ軌跡ハ球ナリ。

(4) 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定不易ナル點ノ軌跡如何。

(5) 所設ノ平面及此平面外ニ所設ノ二點アリ此二點ヨリ平面上ノ點ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定不易ナル點ノ軌跡如何。　(名工)

(6) 半徑五寸ナル球ノ中心ヨリ三寸ノ距離ニ在ル小圓ノ面積ヲ計算セヨ。

96. 定義. 直線又ハ平面ト球面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ之ヲ**相切**スト云ヒ,此直線又ハ平面ヲ夫々球面ノ**切線**又ハ**切平面**ト云フ。二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ之ヲ**相切**スト云フ。

97. 定理八. 球ノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル平面ハ其球面ニ切ス。

系一. 半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル直線ハ球面ニ切ス。　同上

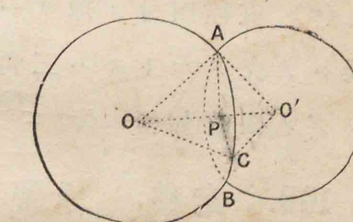
系二. 球面ニ切スル直線又ハ平面ハ切點ニ

至ル半徑ニ垂直ナリ。

其故ハ此半徑ハ中心ヨリ切線又ハ切平面ニ至ル最短線分ナレバナリ。

98. 定理九. 二ツノ球面ノ交線(ABC)ハ圓周ニシテ此圓ノ平面ハ兩球ノ共通ノ中心線(OO′)ニ垂直ナリ。

[證明] 交線中ノ任意ノ點ヲCトスレバ三角形OCO′ノ三邊ノ長サハ一定ナル故高サCPノ長サモ一定ニシテPハ定點ナリ。故ニC點ハ常ニPヲ通過シOO′ニ垂直ナル平面ノ中ニ在リテ,P點ヨリ定距離ニ在リ;故ニ交線ABCハPヲ中心トスル圓周ナリ。



99. 定理十. 共通ノ中心線中ノ一點ヲ共有スル二ツノ球面ハ相切ス。

注意. 共有點ガ兩中心ノ間ニ在レバ兩球面ハ**外切**シ,然ラザレバ**内切**スト云フ。

系. 相切スル二球面ノ切點ハ共通ノ中心線中ニ在リ,且此點ニ於テ共通ノ切平面ヲ作ルヲ得。

問 題

(1) 球面外ノ一點ヨリ此球ヘ引ケル切線ハ皆相等シク,且其切點ハ同一ノ小圓上ニアリ。

(2) 二平面又ハ三平面ニ切スル球面ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(3) 二定點ヨリ夫々既知ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(4) 直徑四寸ノ球ヲ一邊六寸ノ正三角形ノ三邊ニテ支フルトキハ三角形ノ面ヨリ球ノ最高點マデノ距離如何。 $bH=\frac{AB}{2\sqrt{3}}$ (大工)

100. 定義. 球帶トハ平行平面ノ間ニ在ル球面ノ部分ナリ。

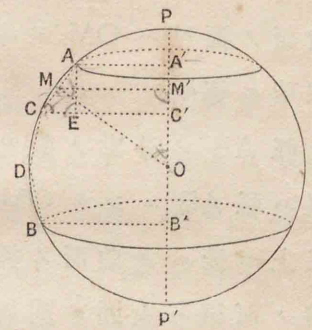
二平面ノ距離ヲ球帶ノ**高サ**ト云フ。

缺球トハ小圓ニテ截リタル球ノ各部分ヲ云フ。

小圓ヲ其**底面**ト云ヒ,其極ト底面トノ距離ヲ其**高サ**ト云フ。

101. 定理十一. 球帶ノ面積ハ其高サト大圓ノ圓周トノ乘積ニ等シ。

[證明] 中心 O ナル圓ノ直徑 PP′ ヲ軸トシ,弧 ACB ヲ廻轉スレバ一ノ球帶ヲ得ベシ。弧 AB ヲ C, D 等ニ於テ若干等分シ,弦 AC, CD 等ヲ引キ,O ヨリ弦 AC ニ垂線 OM ヲ引キ,又 PP′ 上ニ投ズル A, M, C, B ノ射影ヲ A′, M′, C′, B′ トセバ A′B′ ハ球帶ノ高サナリ。



先弦 AC ノ廻轉ニヨリテ生ズル曲面ノ面積ヲ求メンニ此面積ハ圓錐臺ノ側面ナル故

$$2\pi MM'.AC$$

ニ等シ(91系一)。A ヨリ CC′ ニ垂線 AE ヲ引ケバ三角形 ACE, OMM′ ハ等角ナル故

$$\frac{AC}{AE}=\frac{OM}{MM'}$$

$$\therefore \quad MM'.AC=OM.AE。$$

而シテ $AE=A'C'$ ナル故所要ノ面積ハ

$$2\pi OM.A'C'$$

ナリ。故ニ折線 ACD......B ノ廻轉ニ由テ生ズル曲面ノ面積ハ OM ヲ半徑トセル圓周ト A'B' トノ乘積ニ等シ。

弧 AB ノ分點ノ數ヲ無限ニ增セバ此折線ノ極限ハ弧 AB ニシテ OM ノ極限ハ球ノ半徑ナリ。又上ニ云ヘル曲面ノ極限ハ球帶ノ面積ナル故球帶ノ面積ハ大圓ノ圓周ト高サ A'B' トノ乘積ナリ。

系. 缺球ノ曲面ハ球帶ト見做スヲ得。故ニ其曲面積ハ大圓ノ圓周ト高サトノ乘積ニ等シ。

102. 定理十二. 球ノ面積ハ其直徑ト大圓ノ圓周トノ乘積ニ等シ。

(其故ハ球面ハ直徑ヲ高サトセル球帶ト見做スコトヲ得レバナリ)。

系一. 球ノ面積ヲ S トシ,半徑ヲ R トスレバ

$$S=4\pi R^2。$$

故ニ球面ハ大圓ノ四倍ニ等シ。

系二. 球ノ面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シ。又其全面積ノ三分ノ二ニ等シ。

103. 定理十三. 球ノ體積ハ其面積ト半徑トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

[證明] 球面上ニ無數ノ點ヲ取リ二ツ宛連ネテ三角形ヲ作レバ,各面ガ皆三角形ナル多面體ガ此球ニ內接セラレタリト見做スヲ得。而シテ此多面體ノ頂點ヲ球ノ中心ニ連ヌレバ,此多面體ハ無數ノ三角錐ノ和ニ等シト見做スヲ得。

而シテ球面上ニ取レル點ノ數ヲ無限ニ增ストキハ此多面體ノ體積ハ球ノ體積ニ近迫シ,其面ノ面積ノ和ハ球ノ面積ニ近迫ス。且此多面體ヲ作レル三角錐ノ高サハ球ノ半徑ニ近迫ス。然ルニ三角錐ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times 底 \times 高サ$$

ナリ。故ニ球ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times 球ノ面積 \times 半徑$$

ナリ。

系一. 球ノ體積ヲVトスレバ

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3。$$

$\frac{1}{3}\times 4\pi R^2\cdot R$

系二. 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ニ等シ。 (*Archimedes*)。

問 題

(1) 球ノ半徑ヲ直角ニ二等分スル平面ニテ分タレタル球面ノ二部分ノ比ヲ求メヨ。

(2) 直徑一尺ナル球ノ體積ト其外接直圓壔ノ體積トノ差ヲ求メヨ。

(3) 球ニ外接スル直圓錐ノ高サガ其球ノ直徑ノ二倍ナルトキハ直圓錐ノ全面積ハ球ノ面積ノ二倍ニ等シキコトヲ證セヨ。 (陸士)

(4) 直徑6粍高サ28粍アル直圓壔ノ兩端ニ同ジ直徑ノ半球ヲ附シタル立體アリ,之ト等シキ體積ヲ有スル球ノ直徑ヲ求メヨ。 (小商)

(5) 高サモ底ノ半徑モ共ニaナル直圓壔ノ一方ノ底ニハ半徑aナル半球ヲ接ギ合セ,他ノ底ニハ高サモ底ノ半徑モ共ニaナル直圓錐ヲ接ギ合セタル一ツノ立體アリ,其立積及面積ヲ求メヨ。

(大豫)

(6) 半徑三間三尺ノ球ノ體積ヲ求メヨ。 但$\pi=3{\cdot}1416$トシ一立方尺ニ滿タザル端數ハ四捨五入セヨ。

(海機)

(7) 半徑八尺ナル球ト體積相等シクシテ底面ノ半徑七尺ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。(海兵)

(8) 直徑六米ナル球ノ體積ト底ノ直徑六米,高サ四米ナル直圓錐ノ體積トノ比ハ3:1ナリ。

(陸士)

(9) 直角二等邊三角形ABCアリ,其直角ノ頂點Cヲ中心トシCAヲ半徑トシテ弧AMBヲ畫キACヲ軸トシテ之ヲ廻轉スルトキ弓形AMBノ畫ク體積ヲ計算セヨ。

(大豫)

附錄一

雜題

附録一

雜題

(1) 同一ノ平面中ニアラザル三ツノ平行直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(2) 所設ノ二直線アリ，P, Q ハ夫々此等ノ直線上ニアル任意ノ點ナリトス。PQ ノ中點ハ一定ナル平面中ニアルコトヲ證セヨ。 (水產)

(3) 一平面上ノ一點ヲ過ギ，此平面上ニ引キタル任意ノ直線へ此平面外ノ所設ノ點ヨリ垂線ヲ引クトキ其足ノ軌跡如何。 (大豫)

(4) 二平面M及Nヲ與へ，所設ノ點Aヲ通過シテ平面Nニ平行ニシテ平面Mト所設ノ角ヲナス直線ヲ引ケ。 (名工)

(5) 三角形 ABC ノ垂心Oヨリ，其平面ニ垂線OP ヲ引ケバ直線 PA ハ A ヲ過ギテ BC ニ平行ナル直線ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。 (山商)

(6) 直徑 AB ナル半圓周上ノ點ヲCトシAヨリ圓ノ平面ヘ垂線 AP ヲ立テ之ヲ弦 BC ニ等シク取レバ △PCB, △PAB ハ合同ナリ。之ヲ證セヨ。 (專門)

(7) P ハ所設ノ平面, O ハ所設ノ點ニシテ OA OB ハ P ニ平行ナル二ツノ直線ナリ。然ルトキハ O ヲ過ギテ夫々 OA, OB ニ垂直ナル二平面ノ交リハ P ニ垂直ナリ,之ヲ證セヨ。 (水產)

(8) 三面角ノ三稜ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ。

(9) 三面角ノ三面ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(10) 折面四邊形ノ二邊ニ平行ナル平面ハ他ノ二邊ヲ比例ニ分ツ。

(11) 折面四邊形ノ四角ノ和ハ周角ヨリ小ナリ。

(12) ABCD ガ折線ニシテ角 BCD ガ直角ナルトキ, AB ガ平面 BCD ニ垂直ナラバ CD ハ平面 ABC ニ垂直ナリ。

(13) 數多ノ平面ノ交線ガ平行ナレバ任意ノ一點ヨリ此等ノ平面ニ下セル垂線ノ足ハ同一ノ平面中ニアリ。

(14) 一直線ガ一平面ニ交リ,其交點ヲ通過スル此面内ノ三直線ト等角ヲ作ルトキ此直線ハ平面ニ垂直ナリヤ否ヤ。

(15) 二定點ニ至ル距離ノ平方ノ差ガ既知ノ値ヲ有スベキ點ヲ所設ノ直線中ニ求メヨ。

(16) 相交ル二平面ノ一ニ垂直ナル直線ノ他ノ面上ノ射影ハ二平面ノ交リニ垂線ナリ。(三高)

(17) 二定點ニ至ル距離ノ和ガ最小ナル點及距離ノ差ガ最大ナル點ヲ之ト同一ノ平面中ニアラザル定直線中ニ發見セヨ。

(18) 三面角 O-ABC 内ニ線 OD ヲ引クトキハ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

[1] $\angle AOD+BOD+COD$

$$>\frac{1}{2}(BOC+COA+AOB).$$

[2] $\angle AOD+BOD<AOC+BOC.$

[3] $\angle AOD+BOD+COD$

$$<BOC+COA+AOB.$$

(19) 直角三角形ノ三頂點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ斜邊ノ中點ニ連ヌルトキ此線ハ此三角形ノ平面ニ垂直ナリ。

(20) 相異レル平面中ニアル角 AOB, AOC ガ相等シキトキハ其平面ニテナス二面角ヲ二等分スル平面ハ平面 BOC ニ垂直ナルコトヲ證セヨ。

(東北大豫)

(21) 平面中ノ直線ガ他ノ平面ト最大角ヲ作レバ此直線ハ此二平面ノ交線ニ垂直ナリ。

(22) 平行セル二線分ノ比ハ任意ノ平面上ニ投ズル其射影ノ比ニ等シ。

(23) 一點ト數多ノ平行線トニテ決定セル諸平面ト任意ノ平面トノ交線ハ同一ノ點ヲ通過スルカ,又ハ平行ナリ。

(24) 一直線ト之ニ平行ナル平面中ノ諸直線トノ最近距離ハ相等シ。

此定理ノ例外ノ場合ヲ發見セヨ。

(25) 一定ノ長サヲ有スル線分ノ兩端ガ夫々同一ノ平面中ニアラズシテ且互ニ直交スル二直線ノ上ヲ運動スルトキハ其中點ハ一ツノ定圓周上ニアリ。

(26) 直角三角形ノ直角ノ一邊ガ一ツノ平面ニ平行ナルトキハ此三角形ノ此平面上ニ於ケル射影ハ又直角三角形ナリ。

(27) 動線アリ,恆ニ所設ノ平面ニ平行シ,且二定直線ニ交ル。其交點ノ間ノ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡如何。

(28) 直三面角(三面角ヲ作レル三面ガ二ツ宛垂直ナルモノ)ヲ平面ニテ截ルトキ,頂點ヨリ底面マデノ稜ノ長サヲ夫々 a, b, c トシ底面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}.$$

(29) A, B ヲ二點トシ, P, Q ヲ二平面トス。A ヨリ P, Q ニ至ル距離ノ和ガ B ヨリ P, Q ニ至ル距離ノ和ニ等シキトキハ AB 線中ノ任意ノ點ヨリ P, Q ニ至ル距離ノ和モ亦其和ニ等シ之ヲ證セヨ。

(大豫)

(30) 三定點アリ,各點ヨリ二定平面ニ至ル距離ノ和ガ皆相等シキトキハ此三點ヲ含ム平面中ノ任意ノ點ヨリ此二平面ニ至ル距離ノ和モ亦一定不易ナリ。

(31) 三面角ノ各稜ヲ含ミ,其對面ニ垂直ナル三平面ハ同一ノ直線ヲ通過ス。 (水產)

(32) 平面外ノ二定點ヘ引ケル二直線ガ此面ト等角ヲ爲ス如キ此平面中ノ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(33) 角錐ノ側面積ハ底面積ヨリ大ナリ。

(34) 直方體ノ三稜ノ長サヲ a, b, c ニテ表サバ對稜ヲ通過スル截面ノ面積ハ

$$a\sqrt{b^2+c^2},\quad b\sqrt{c^2+a^2},\quad c\sqrt{a^2+b^2}$$

ナリ。 又 $a>b>c$ トスレバ最大截面ハ何レナルカ又數値ヲ用ヒズシテ最大截面ヲ發見セヨ。

(35) 四面體ヲ其二對稜ニ平行ナル平面ニテ截ラバ其截面ハ平行四邊形ナリ(頁62問題2參照)。此截面ハ平面ガ稜ノ中點ヲ通過スルトキ最大ナリ。

(36) 四面體ヲ一ツノ平面ニテ截リ,其截斷面ヲシテ菱形ナラシメヨ。

(37) 角錐ヲ其底面ニ平行ナル平面ニテ截リ,截面ト底面トノ比ヲ既知ノ比ニ等シクセヨ。

(38) 四面體ノ六稜ノ平方ノ和ハ對稜ノ中點ヲ連結スル三線分ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ。

(39) 任意ノ四角壔ノ十二稜ノ平方ノ和ハ,四ツノ對角線ノ平方ノ和ヨリ大ナルコト,二ツ宛ノ對角線ノ共通ナル中點ヲ連ヌル線分ノ平方ノ八倍ナリ。

(40) 四面體ノ各頂點ト對面ノ重心トヲ連ヌル四直線ハ同一ノ點ニテ交リ,各直線ハ此點ニテ1ト3トノ比ニ分タル。 (陸士.大豫)

注意. 此點ヲ四面體ノ**重心**ト云フ。

(41) 四面體ニ於テ,二雙ノ對稜ガ互ニ垂直ナルトキ,他ノ一雙ノ對稜モ亦互ニ垂直ナリ,又頂點ヨリ對面ニ下セル四垂線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

(42) 四面體ノ各稜ヲ含ミ對稜ニ垂直ナル六平面ハ同一ノ點ヲ通過シ,三雙ノ對稜ノ共通垂線モ亦同一ノ點ヲ通過ス。

(43) 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過ギ之ニ垂直ナル六平面ハ同一ノ點ヲ通過ス

(44) 四面體ノ各面ノ外心ヲ通過シ各面ニ垂直ナル四直線ハ同一ノ點ヲ通過ス。

(45) 三角錐ノ底面ガ正三角形ニシテ頂點ニ於ケル各面角ガ何レモ直角ナルトキ,

[1] 三側稜ハ皆相等シ。

[2] 高サノ平方ハ側稜ノ平方ノ三分ノ一ニ等シ。

[3] 底面中ノ一點ヨリ三側面ニ至ル三垂線ノ和ハ一定不易ナリ。

(46) 三角錐O–ABCノ頂點Oニ於ケル面角ガ何レモ直角ナルトキ,

[1] 底面ABCハ鋭角三角形ナリ。

[2] Hヲ頂點Oノ底面ABC上ニ投ズル射影ナリトスレバ△AOBハ△ABCト△HABトノ比例中項ナリ。

(47) 角壔又ハ角錐ノ截面ノ各邊ト他ノ截面ノ對應邊トノ交點ハ同一ノ直線上ニアリ。

之ヨリ次ノ定理ヲ推定セヨ。

二ツノ三角形ノ頂點ガ二ツ宛三ツノ同一ノ點ヲ通過スル直線或ハ三ツノ平行線中ニ在ルトキ對應邊ノ交點ハ同一ノ直線上ニ在リ。

(48) 同一ノ平面中ニアラザル三ツノ平行線X, Y, ZアリZノ上ニ一定ノ長サCDヲ取リ,X,Yノ上ニ夫々點A,Bヲ取リA,Bヲ各C,Dニ連ネテ四面體ABCDヲ作ルトキハA,BガX,Yノ上ヲ移動シテモ其體積ハ不易ナリ。

(49) 同一ノ平面中ニアラザル二ツノ直線X,Yアリ,Xノ上ニ一定ノ長サABヲトリ,Yノ上ニ一定ノ長サCDヲ取リ,四面體ABCDヲ作ルトキハAB, CDガ夫々X,Yノ上ヲ移動シテモ其體積ハ不易ナリ。

(50) 前題ニ於テ四面體ABCDノABノミガ一定ナルトキハ其體積ハCDニ比例ス,

(51) 三角錐臺ABCA′B′C′アリ之ヲ三ツノ四面體AA′B′C′,AB′BC′,ABCC′ニ分ツトキハAB′BC′ハAA′B′C′トABCC′トノ比例中項ナリ。

(52) 四面體ABCDノ頂點Aヲ過ギ三面角Aノ三面ト等角ヲ爲ス直線ト對面BCDトノ交點ヲA′トスレバ,三角形A′BC, A′CD, A′DBノ面積ハABC, ACD, ADBノ面積ニ比例ス。

(53) 四面體ノ二對稜ノ中點ヲ通過スル平面ハ他ノ二對稜ヲ比例ニ分ツ。

(54) 四面體ノ二對稜AB,CDノ中點ヲE,Fトシ此二點ヲ通過スル平面ト他ノ二稜トノ交點ヲG, HトスレバEFハGHヲ二等分ス。

(55) 四面體ノ二對稜ノ中點ヲ通過スル平面ハ本體ヲ二等分ス。

(56) 立方體ヲ平面ニテ截リ,截面ヲシテ正六邊形ナラシメヨ。　(大工)

(57) 四面體內ニ一點ヲ求メ,此點ト各稜トヲ含メル六平面ニテ本體ヲ四等分セヨ。

(58) 四面體ABCD內ノ一點ヲOトシ, AO, BO, CO, DOト四面トノ交點ヲA′, B′, C′, D′トスレバ

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

(59) 四面體ABCDノ底面BCD內ニアル一點OヨリAB, AC, ADニ平行ナル直線ヲ引キ側面トB′, C′, D′ニ於テ會セシムルトキ,

$$\frac{OB'}{AB}+\frac{OC'}{AC}+\frac{OD'}{AD}=1.$$

(60) 四面體ノ重心ヨリ之ヲ截ラザル平面ニ至ル距離ハ四頂點ヨリ同平面ニ至ル距離ノ和ノ四分ノ一ニ等シ。

平面ガ此四面體ヲ截ル場合ヲ考究セヨ。

(61) 三定直線上ニ三稜ヲ有スル平行六面體ヲ作レ。

(62) 直方體アリ,其體積Vニシテ其三稜ハ三數a, b, cニ比例スト云フ,三稜ノ長サヲ求メヨ。

(63) 角壔ノ直截面ハ他ノ截面ヨリ小ナルコトヲ證セヨ。

(64) 定直線ヲ通過スル平面ヲ以テ所設ノ平行六面體ヲ二等分セヨ。

(65) 定點ヲ通過シ,所設ノ四面體ヲ二等分スル平面ノ位置ヲ求メヨ。

(66) 定直線ニ平行ニシテ,所設ノ四面體ヲ二等分スル平面ノ位置ヲ求メヨ。

(67) 等面積ヲ有スル直方體ノ中ニテ,立方體ノ體積ガ最大ナリ。

(68) 立方體ノ對角線ガ35尺ナルトキ全面積及體積ヲ算出セヨ。

(69) 直方體ノ水槽アリ。其長サ6.5尺,幅3.2尺,深サ2.8尺ナリ。容積ヲ勺マデ求メ以下四捨五入セヨ。

(70) 厚サ$\frac{3}{8}$吋ノ鐵板ニテ造ラレタル直角壔狀ノ無蓋ノ水溜アリ。其底面ハ內規(ウチノリ)ニテ3呎4吋ト2呎6吋トノ矩形ニシテ其深サ4呎8吋ナリ。水ヲ充タセルトキ及空虛ナルトキノ此水溜ノ重量ヲ計算セヨ。但鐵ノ比重ヲ7.2トシ又水一立方呎ノ重サヲ62.3封度トス。 (大工)

(71) 直圓錐臺ノ上下兩底ノ徑夫々三尺,四尺ニシテ高サ五尺ナリ,此體積ヲ求メヨ。但πヲ$\frac{22}{7}$トス。 (七高)

(72) 高サ十二吋ノ直圓錐ヲ其底面ニ平行ナル

平面ニテ截リ其體積ヲ二等分セヨ。 (熊工)

(73) 同一ノ平面中ニアラザル四點ヲ通ズル球ハ幾種アルカ。 (海經)

(74) 四面體ニ於テ各對稜ガ互ニ垂直ナルトキハ

[1] 六稜ノ中點ハ同一ノ球面上ニアリ。

[2] 各面ノ九點圓ノ周ハ同一ノ球面上ニアリ。

(75) 四面體ノ六稜ガ同一ノ球面ニ切スルトキハ對稜ノ和ハ常ニ相等シ。

(76) 定長ノ線分ガ其兩端ヲ球面上ニ置キテ動クトキハ其中點ノ軌跡如何。

(77) 所設ノ二球又ハ三球ヲ等角ノ下ニ見ル點ノ軌跡如何。

(78) 所設ノ二線分ヲ直角ノ下ニ見ル點ノ軌跡如何。

(79) 三ツノ球面ガ相交ルトキ共通ナル二點ハ三球ノ中心ヲ通過スル平面ニ關シテ對稱ナリ。之ヲ證セヨ

(80) 所設ノ球面上ノ一定點Oヲ過グル任意ノ直線ヲ引キ,球面トAニ於テ會セシメ,此直線上ニ一點A′ヲトリ矩形OA.OA′ヲ一定ナラシム,A′點ノ軌跡ヲ求メヨ。(東工)

(81) 定點Oヨリ定平面ヘ直線OAヲ引キ,之ヲB點ニ於テ矩形OA.OBガ一定不易ナル如ク分ツトキハB點ノ軌跡如何。

(82) 二球面ヲ大圓周ニテ截ルベキ球ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(83) 缺球ノ曲面積ハ其底面タル小圓ノ圓周ヨリ極ニ至ル距離ノ平方トπトノ積ニ等シ,之ヲ證セヨ。

(84) 球ニ外接スル直圓壔ノ全面積ト此球ノ面積トノ比如何。又其體積ノ比如何。

(85) 球ニ外接スル立方體ノ體積ト此球ノ體積トノ比ヲ求メヨ。

(86) 半徑rナル球面ヲ二ツノ缺球面ニ分チ,其大部ガ小部ト全球面トノ比例中項ナルトキ,球ノ中心ヨリ截面ニ至ル距離如何。

(87) 等半徑ノ二球ニ外接スル多面體ノ體積ノ比ハ其全面積ノ比ニ等シ。

(88) 側面積ノ相等シキ二ツノ直圓壔ノ體積ノ比如何。

(89) 體積ノ相等シキ二ツノ直圓壔ノ側面積ノ比如何。

(90) 相似圓壔ノ體積ハ底ノ直徑ノ立方ニ比例スルコトヲ證セヨ。

註. **相似圓壔**トハ互ニ相似ナル矩形ガ對應邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル直圓壔ナリ。

(91) 相似圓錐ノ體積ハ底ノ直徑ノ立方ニ比例スルコトヲ證セヨ。(農實)

註. **相似圓錐**トハ互ニ相似ナル直角三角形ガ直角ヲ夾ム對應邊ヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル直圓錐ナリ。

(92) 矩形ノ隣邊ヲ夫々軸トシ,之ヲ廻轉シテ生ズル兩圓壔ノ體積ガa立方尺及b立方尺ナルトキ此矩形ノ對角線ノ長サ如何。

(93) 直圓壔ノ高サト全面積トヲ知リテ其底面ノ半徑ヲ求メヨ。

(94) 直圓壔ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ,其側面ノ二部分ノ比例中項ヲ截面ニ等シクセヨ。

(95) 三角形ABCガABヲ軸トシテ一廻轉スルトキ生ズル所ノ體積ハAヨリBCマデノ距離ニ邊BCガ軸ABヲ廻轉シテ成ス所ノ面ノ面積ヲ乘ジタルモノノ三分ノ一ニ等シ。 (陸士)

(96) 三角形ト同一ノ平面中ニアリテ,其一頂點ヲ過ギ之ヲ截ラザル直線ヲ軸トシ,此三角形ヲ廻轉スルトキ,生ズル所ノ立體ノ體積ハ,此頂點ニ對スル邊ノ廻轉ニ由テ生ズル面積ト之ニ應ズル高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

(97) 三角形ABCニ於テAB, BC, CAノ長サ夫々10寸,21寸,17寸ナリ。今Aヲ通過シBCニ平行ナル直線XAX′ヲ軸トシテ△ABCノ平面ヲ一廻轉スルトキ,

[1] △ABCノ作ル體積ヲ求メヨ。

[2] △ABCノ重心ノ畫ク徑路ト△ABCノ面積トノ相乘積ヲ計算セヨ。 (大工)

(98) 直圓壔ノ側面積ハ其高サト底面ノ直徑トノ比例中項ヲ半徑トセル圓ノ面積ニ等シ。

(99) **球扇形**(半圓内ノ扇形ガ其直徑ヲ軸トシ,其原位置ニ復歸スルマデ廻轉シテ生ズル立體)ノ體積ハ其底面ナル球帶ノ面積ト球ノ半徑トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

(100) ABヲ半圓CABDノ弧ノ一部トシ,直徑CD上ニ投ズル弦ABノ射影ヲA′B′トスレバ,CDヲ軸トシ弓形ABヲ廻轉シテ生ズル立體ノ體積ハ$\frac{\pi}{6}\overline{AB}^2\times A'B'$ナリ。

(101) 缺球ノ體積ハ

$$V=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2)$$

ナリ,但rハ底面ノ半徑ニシテhハ其高サトス。又Rヲ球ノ半徑トスレバ

$$V=\pi h^2(R-\frac{1}{3}h).$$

(102) **球分**(平行平面ノ間ニ夾マレタル球ノ部分ノ體積ハ

$$=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2+3r'^2)$$

ナリ,但 r, r' ハ其兩底面ノ半徑ニシテ h ハ其距離即高サナリ。

(103) 直圓錐ノ底ノ周圍ハ32尺ニシテ其體積ハ半徑5尺ノ球ノ體積ニ等シ,此圓錐ノ高サヲ求メヨ。 (海機)

(104) 直圓錐及直圓壔ノ底面ガ何レモ球ノ大圓ニ等シキトキ圓錐ト球ト圓壔トノ體積ハ三數1, 2, 3ニ比例ス之ヲ證セヨ。但高サハ直徑ニ等シトス。

(105) 次ノ定理ヲ證明セヨ。

[1] 球ニ内接スル等邊圓壔ノ全面積ハ球ノ面積ト内接等邊圓壔ノ全面積トノ比例中項ナリ。體積ニ就キテモ亦然リ。

[2] 球ニ外接スル等邊圓壔ノ全面積ハ球ノ面積ト外接等邊圓錐ノ全面積トノ比例中項ナリ。體積ニ就キテモ亦然リ。

註。 **等邊圓壔**トハ其軸ヲ通過スル截面ガ正方形トナル如キ直圓壔ナリ。

等邊圓錐トハ其軸ヲ通過スル截面ガ正三角形トナル如キ直圓錐ナリ。

(106) 造酒桶ノ口徑ヲ d トシ,底徑ヲ d' トシ,胴徑(高サヲ直角ニ二等分スル截面ノ直徑)ヲ d'' トシ,高サヲ h トスレバ桶ノ體積Vハ大略次ノ如シ。

$$V=\frac{\pi h}{24}\{(d+d'')^2+(d''+d')^2-d''(d+d')\}.$$

(107) 作圖ニ由テ實球ノ半徑ヲ求メヨ。

(球面上ノ任意ノ點Pヲ極トシ任意ニ兩脚器ヲ開キテ圓ABCヲ球面上ニ畫ケ。次ニ兩脚器ヲ以テ距離AB, BC, CAヲ紙面上ニ移シ,之ヲ三邊トシテ三角形A′B′C′ヲ作リ其外接圓ノ中心ヲO′トシ此點ニ於テA′O′ニ垂線P′Q′ヲ引キ,A′ヲ中心トシ,APニ等シキ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ此垂線トP′ニ於テ交ラシメ,A′點ニ於テA′P′ニ垂線A′Q′ヲ引ケ然ルトキハP′Q′ハ球ノ直徑PQニ等シカルベシ)。

(108) 實球上ノ大圓周ヨリ其極ニ至ル距離ヲ測定セヨ。

(109) 球面上ノ對點ナラザル二定點A, Bヲ通過スル大圓弧ヲ畫ケ。

(本題ノ未知件ハ所要ノ圓ノ極Pナリ,然ルニ此極ヨリAトBトニ至ル距離ハ何レモ象限弧ノ弦ニ等シキヲ以テ二定點ヲ夫々中心トシ此弦ニ等シキ距離ヲ以テ圓弧ヲ畫ケバ其交點Pハ所要ノ極ナリ)。

(110) 球面上ノ定點Aヲ通過シ,且所設ノ大圓弧BCニ垂直ナル大圓弧ヲ畫ケ。

(A點ヲ極トシ,象限弧ノ弦ニ等シキ極距離ヲ以テ大圓弧ヲ畫キ,P點ニ於テBC弧ヲ截ラシメ,次ニ此點ヲ極トシ同ジ極距離ヲ以テ大圓ヲ畫カバ此圓弧ハAヲ通過シ且BC弧ニ垂直ナルヲ知ル)

(111) 球面上ニ於テ所設ノ大圓弧ヲ直角ニ二等分スベキ大圓弧ヲ畫ケ。

(112) 球面上ノ三定點ヲ通過スベキ小圓ノ極ヲ求メヨ。

(113) 所設ノ大圓弧ノ上ニ取リタル一點ヲ通過シ,之ト所設ノ角ニ等シキ傾斜ヲ爲スベキ大圓弧ヲ畫ケ。

(114) 所設ノ直線ヲ通過シ,所設ノ球ニ切スル平面ヲ作レ。

(115) 三定點ヨリ夫々既知ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

(116) 定直線ヲ通過シテ平面ヲ畫キ,所設ノ球ヲ截リ其截面ノ半徑ヲ既知ノ長サニ等シクセヨ。

(117) 直圓壔形ノ水桶アリ,深サ1.25米,底面ノ半徑0.35米ナリ,此容器ノ重量ヲ1.24瓩トセバ滿水セシトキノ全重量如何($\pi=3.1416$)。答 482.3瓩。

(118) 長サ1.72米,幅1.03米,厚サ0.685米ナル大理石ノ體積及重量ヲ求メヨ。

但大理石ノ比重ハ2.717ナリ。

答 $\begin{cases}\text{體積 1.2135立方米,} \\ \text{重量 3297瓩餘。}\end{cases}$

(119) 水銀ヲ充シタル壜アリ,其全重量21.348瓩ニシテ壜ノ重サハ1.5瓩ナリ。壜ノ容量如何。

但水銀ノ比重ハ13.598ナリ。 答 約1.46立。

(120) 地球ノ面積ヲ概算セヨ。

(地球ノ大圓周ハ凡四萬粁ナル故其直徑ハ$\dfrac{40000}{\pi}$粁ナリ。故ニ其面積ハ$\pi\left(\dfrac{40000}{\pi}\right)^2$平方粁。

即50929萬平方粁ナリ)。

(121) 地球ノ半徑ハ凡ソ幾粁ナルカ。

答 6366粁。

(122) 地球ノ體積ヲ概算セヨ。

答 108×10^{10} 立方粁。

(123) 面積ガ一平方尺ナル球ノ半徑ヲ算出セヨ。 答 0.282尺。

(124) 缺球狀ノ鍋アリ,口徑二尺四寸,深サ九寸ナリ,其容量ヲ勺マデ算出セヨ。

答 3斗7升2合9勺。

(125) 鑄鐵球アリ,其重量36瓩ナリ,其直徑如何。但鑄鐵ノ比重ハ7.2トス。 答 21.4糎。

(126) 等邊圓錐ノ底面ノ半徑 2.5 寸ナルトキ其內接球ノ體積如何。 答 12.56立方寸。

(127) 直徑48糎ナル直圓壔形ノ容器ニ水ヲ入レタルアリ,或物體ヲ其中ニ沈メタルニ水ノ上昇スルコト57粍ナルヲ見タリ,此物體ノ體積ヲ求メヨ。 答 10314.5立方糎。

(128) 前題ノ容器中ニ黃銅製ノ小彫刻像ヲ投

入セシニ水ノ上昇スルコト26粍ナリ。此像ノ目方ヲ求メヨ。但黃銅ノ比重ハ8.4ナリ。答39.5瓩.

(129) 月ノ半徑ハ地球ノ半徑ノ $\dfrac{31}{114}$ ナリトスレバ其體積ノ比ハ殆 $\dfrac{1}{49}$ ナルコトヲ證セヨ。

(130) 雨天ニ屋外ニ置キタル口徑一尺,底徑六寸,深サ八寸ナルばけつニ水ノ溜レルコト其深サノ半分ニ至リシト云フ。一坪ノ面積ノ中ニ降レル雨量ハ幾斗幾升ナルカ。但一升ヲ64.8立方寸トス。

(海兵)

(131) 面積 a^2 ナル矩形アリ,其二隣邊ヲ軸トシテ夫々之ヲ一廻轉セシメテ生ズル二ツノ圓壔ノ體積ノ差ハ半徑 $\dfrac{a}{2}$ ナル球ノ體積ノ三倍ニ等シト云フ。矩形ノ二邊ノ長サハ各幾許ナルカ。

(海機)

附錄二

(一) 正多面體

(二) 球面多角形

附　録　二

(一) 正多面體

1.　定義.　正多面體トハ其面ガ皆合同ナル正多角形ニシテ其多面角モ亦皆合同ナルモノナリ。

2.　定理一.　正多面體ハ五種ヨリ多カラズ。

[證明]　正多面體ノ多面角ハ皆互ニ合同ニシテ且其各面角ハ正多角形ノ角ニ等シキヲ要ス。然ルニ正三角形ノ一角ハ一直角ノ$\frac{2}{3}$ナル故,正三角形ヲ面トシテ作リ得ベキ多面角ハ唯三種ニ止ル,卽三面角ト四面角ト五面角ト是レナリ,而シテ之ヨリ多クノ面ヲ有スル多面角ハ面角ノ和ガ四直角ヨリ小ナラザルガ故作リ得ベカラズ。

正方形ノ一角ハ一直角ナル故之ヲ以テ唯一種

ノ多面角卽三面角ヲ作ルコトヲ得。

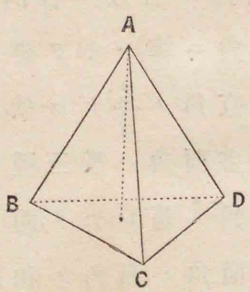
正五角形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$直角ナルガ故之ヲ以テ唯一種ノ多面角卽三面角ヲ作ルコトヲ得。

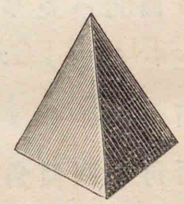
正六角形ノ一角ハ$\frac{4}{3}$直角ナル故之ヲ以テ多面角ヲ作ルコトヲ得ズ。之ヨリ多キ邊數ノ正多角形ニ就テモ亦然リ。故ニ正多面體ハ五種ヨリ多カラズ。

3. 作圖題. 正多面體ヲ作レ。

[1] 正面四體.

正三角形BCDノ中心ヨリ其面ニ垂線ヲ引キ，



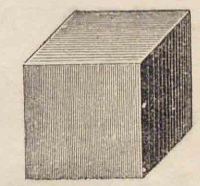


其中ニA點ヲ求メ AB=BC ナラシムレバ AC, AD モ亦 BC ニ等シク,四面體 ABCD ノ面ハ皆合同ナ

ル正三角形ナリ。且此四面體ノ四頂點ニ於ケル三面角ハ皆面角ヲ等シクスル故合同ナリ。故ニ此立體ハ正多面體ナリ。之ヲ正四面體ト云フ。

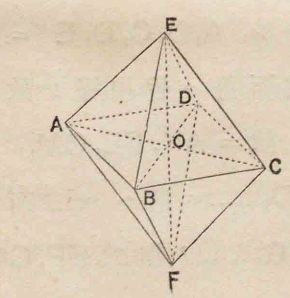
[2] 正六面體.

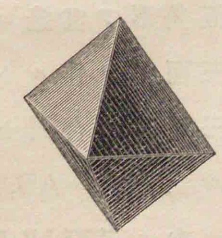
直角平行六面體ノ各面ガ正方形ナルモノヲ作ルトキハ之レ正多面體ナリ。之ヲ正六面體ト云フ。卽立方體ナリ。



[3] 正八面體.

ABCD ヲ正方形トシOヲ其中心トセヨ。Oヲ通過シ正方形ノ平面ニ垂直ナル直線ヲ引キ其中ニ二點 E, F ヲ求メ, EA, FA ヲ AB ニ等シクシ, EB,EC,ED,FB,FC,FD ヲ連ヌ。然ラバE及Fヨリ



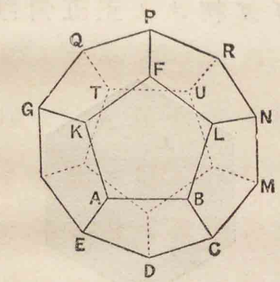


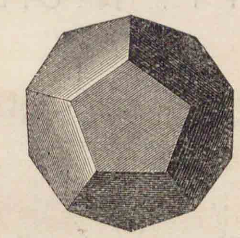
A,B,C,D ニ至ル直線ハ皆相等シ,故ニ八ツノ三角形ハ皆互ニ合同ナル正三角形ナリ。次ニ對角線 AC ヲ引ケバ此線ハ中心 O ヲ通過シ,EF モ亦 O ヲ通過スル故,四點 A,E,C,F ハ同一ノ平面中ニアリ。又三角形 AEC,ABC,AFC ハ三邊ヲ等シクスル故合同ニシテ,角 ABC ハ直角ナル故 AEC,AFC モ亦直角ナリ。故ニ AECF ハ ABCD ニ等シキ正方形ナリ。故ニ B ニ於ケル多面角ハ E ニ於ケル多面角ト合同ナリ。他ノ頂點ニ於ケル多面角モ亦同樣ニ之ト合同ナリ。故ニ立體 E-ABCD-F ハ正多面體ナリ。之ヲ正八面體ト云フ。

[4] 正十二面體.

正五角形 ABCDE ヲ底面トシ,之ト合同ナル五ツノ正五角形ヲ其邊ニ接合シ,A,B,C,D,E ニ於テ夫々三面角ヲ作ルトキ,其面角ハ皆相等シ故ニ五ツノ三面角ハ合同ナリ。故ニ AK,BL,CM,…… ニ沿ヘル二面角ハ AB,BC,CD,…… ニ沿ヘル二面角ニ等シ。次ニ平面 NLF,FKG,…… ヲ作リ,FP,GQ,

…… ヲ其交線トスルトキ L,K,…… ニ於ケル三面角ハ二ツノ面角及其夾メル二面角ヲ等シクスルヲ以テ A ニ於ケル三面角ニ等シ,故ニ NLF,FKG,……



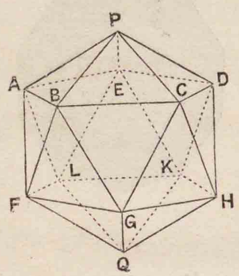


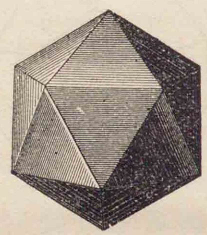
ハ皆正五角形ノ一角ニ等シ。故ニ五ツノ正五角形ヲ完成スルトキハ正五角形 PRUTQ ヲ生ズ,是レ三面角 P ヲ三面角 A ニ重ネ,面 FPQ ヲ面 EAK ニ重ヌルトキ PRUTQ ハ明ニ ABLFK ニ重ナレバナリ。故ニ之ヲ閉塞スレバ正多面體ヲ得。之ヲ正十二面體ト云フ。

[5] 正二十面體.

正五角形 APCGF ノ中心ヨリ引ケル垂線中ニ B 點ヲ求メ,AB=AP ナラシメ,此點ヲ P,C,G,F ニ連ヌルトキハ正五角錐ヲ得。又三角形 PBG,PCG

ハ三邊ヲ等シクスル故合同ニシテ,角PBGハ正五角形ノ一角PCGニ等シ,故ニPB, BGヲ相隣レル二隣邊トシテ正五角形PBGHDヲ作リCD, CHヲ引クトキ五角錐C-PBGHDガ初メノ正五角錐ト





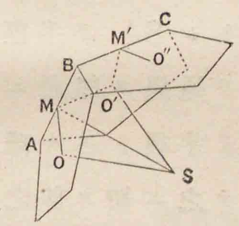
合同ナルコトハ容易ニ證明シ得ラル。次ニG點ニ於テ五角錐G-FBCHQヲ完成スルトキハ十箇ノ正三角形ヨリ成レル折面ヲ得,然ラバA, P, D, H, Q, Fニ於ケル面ノ數ハ順次ニ2, 3, 2, 3, 2, 3ニシテ三點B, C, Gニ於テ集ル稜角ハ皆相等シ。

別ニ上ニ云ヘル折面ト合同ナル第二ノ折面ヲ作リ之ヲ裏返シテ其境界ヲ第一ノ折面ノ境界タル折線APDHQFニ接合スベシ。然ラバA, P, D, ……ニ於ケル五面角ハ皆Bニ於ケル五面角ト合同

ナルコト明ナリ。斯クシテ得ラレタル立體PQヲ正二十面體ト云フ。

4. 定理二. 正多面體ハ球ニ內接シ又之ニ外接ス。

[證明] 正多面體ニ於テ,O及O′ヲ相隣レル二面ノ中心トシ,ABヲ其交線トスルトキ,二點O及O′ヨリABニ垂線ヲ引ケバ,同一ノ點Mニ於テ會スベシ,又各平面ニ垂線ヲ引ケバ,此二垂線ハ面ノ頂點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ナル故,平面OMO′中ニアル點Sニ於テ相交ルベシ。然ラバ直角三角形MOS, MO′Sハ共通ノ斜邊ヲ有シ,且OM=O′Mナル故合同ナリ。然ルニ角OMO′ハ二面角ABノ平面角ナル故何レノ相隣レル二面ニ就テモ一定ニシテ,其半ナル$\angle OMS$, 從テ$\triangle OMS$モ亦一定ナリ。



次ニ第二ノ面トBCニ於テ隣接セル第三ノ面ヲ考フルニ其中心O″ヨリ其面ニ垂直ニ引ケル直線ハ又S點ニ於テO′Sニ會ス,其故ハ△O″M′Sハ△OMSト合同ナレバナリ。

順次同法ヲ行フトキハ,正多面體ノ總テノ面ノ中心ヲ通過スル垂線ハ皆同一ノ點Sニ於テ相交リ,此點ハ總テノ面ヨリ等距離ニシテ,且總テノ頂點ヨリモ等距離ニ在ルコトヲ知ルベシ,故ニSヲ中心トシSAヲ半徑トスル球ハ多面體ノ總テノ頂點ヲ通過ス,即之ニ外接ス。又Sヲ中心トシSOヲ半徑トスル球ハ多面體ノ總テノ面ノ中心ニ於テ之ニ切ス,即之ニ内接ス。

注意。Sヲ多面體ノ中心ト云ヒSAヲ其半徑ト云フ。

正多面體ノ面ノ數ヲFトシ,各面ノ邊ノ數ヲnトシ,頂點ノ數ヲvトシ,各頂點ニ會スル稜ノ數ヲmトシ,稜ノ數ヲEトスレバ次表ノ如シ。

	F	n	v	m	E
正四面體	4	3	4	3	6
正六面體	6	4	8	3	12
正八面體	8	3	6	4	12
正十二面體	12	5	20	3	30
正二十面體	20	3	12	5	30

問 題

(1) 正四面體ノ稜ノ長サa尺ナルトキハ其高サ,全面積及體積如何。 (海機·水産)

(2) 正四面體ノ對稜ハ互ニ垂直ニシテ,其中點ヲ連ヌル直線ハ其共通垂線ナリ。 (五高)

(3) 正四面體ノ相對スル二稜ノ間ノ最短距離ハ其一ツノ稜ヲ邊トセル正方形ノ對角線ノ半分ニ等シ。 (海機)

(4) 各稜ノ長サa尺ナル正四面體ノ内接球及外接球ノ半徑ヲ求メヨ。

(5) 各稜ノ長サ a 尺ナル正八面體ノ體積ハ

$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ 立方尺ナリ。

(6) 正四面體ノ一頂點ヨリ底面ノ三中線ノ交點ニ引ケル直線ハ其交點ヨリ一ツノ側面ニ引ケル垂線ノ三倍ナリ。 (大豫)

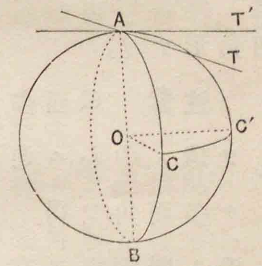
(7) 球ノ體積ヲVトシ内容正六面體ノ稜邊ヲ a トスルトキハ $V=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$ ナルコトヲ證明セヨ。

(陸士)

(8) 球ノ體積ト内容正八面體ノ體積トノ比ヲ求メヨ。

(二)球面多角形

1. 定義. 二圓周ガ相交ルトキ,其兩圓周ガ同一ノ平面中ニアルトアラザルトニ拘ラズ其交點ニ於ケル各切線ノ間ノ角ヲ此交點ニ於ケル**二圓周ノ間ノ角**ト云フ。

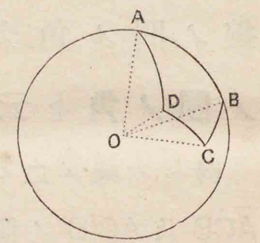


例ヘバ球ノ二ツノ大圓弧ACB及AC'Bノ間ノ角トハAニ於ケル各切線ノ間ノ角TAT'ナリ。故ニ此角ハ此二ツノ大圓弧ノ平面ノ間ノ二面角ト同測度ヲ有ス。

注意. Oヲ中心トシ,AC, AC'ヲ象限弧トスルトキハOC, OC'ハ夫々AT, AT'ニ平行ナル故,∠COC'=TAT'ナリ,故ニ弧CC'ハ此二ツノ大圓弧ノ間ノ角ヲ測ル。

2.　定義.　球面多角形トハ三ツ以上ノ大圓弧ニテ圍マレタル球面ノ部分ナリ。其弧ヲ此多角形ノ**邊**,其弧ノ間ノ角ヲ此多角形ノ角,其弧ノ交點ヲ此多角形ノ**頂點**ト云フ。

球面多角形ニハ其邊數ニ從テ**球面三角形,球面四角形**等ノ名アリ。例ヘバABCDハ球面四角形ナリ。



注意。球面多角形ノ頂點ヲ球ノ中心ニ連ヌルトキハ此中心ヲ頂點トスル多面角ヲ得。此多面角ノ面角ハ此多角形ノ邊ト同測度ヲ有シ,其稜角ハ此多角形ノ角ト同測度ヲ有ス。故ニ多面角ノ性質ヨリ容易ニ球面多角形ノ性質ヲ導キ出スコトヲ得。

3.　定義.　二ツノ球面多角形ノ邊及角ガ互ニ相等シキモ其順序ガ相反對セルトキ兩形ハ**對稱**ナリト云フ。

二ツノ球面多角形ノ頂點ガ互ニ對點ナルトキ兩形ハ**對頂**ナリト云フ。

4.　次ノ定理ハ多面角ノ性質ヨリ容易ニ證明シ得ベシ。

[1]　對頂球面多角形ハ對稱ナリ。

[2]　球面三角形ノ二邊ガ相等シケレバ其對角モ亦相等シ。逆モ亦眞ナリ。(52)

[3]　二ツノ對稱ナル二等邊球面三角形ハ合同ナリ。(52系)

[4]　對稱球面三角形ハ等積ナリ。

(三頂點ヲ通過スル小圓ノ極ヨリ三頂點ニ至ル大圓弧ヲ引カバ三ツノ等脚三角形ヲ得ベシ。)

[5]　球面三角形ノ三角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。(55系)

5.　定義.　球面三角形ノ三角ノ和ト二直角トノ差ヲ其**球面過剩**ト云フ。

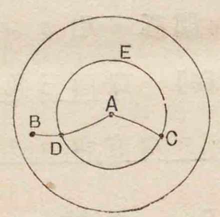
6. 定理一. 球面三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

[證明] 球面三角形ノ三頂點ヲ球心ニ結ベバ球心ヲ頂點トスル三面角ヲ得,而シテ頂點ニ於ケル三面角ノ各面角ハ他ノ面角ノ和ヨリ小ナリ。故ニ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

系. 球面三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大ナリ。

7. 定理二. 球面上ニテ一點ヨリ他ノ一點ニ至ル最短キ途ハ此二點ヲ過グル大圓ノ劣弧ナリ。

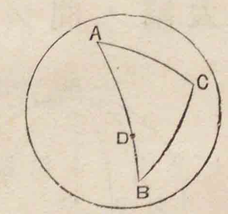
[證明] 二段ニ分チテ之ヲ證明セントス。



I. A,B,C ヲ球面上ノ三點トシA,B間ノ大圓弧(劣弧トス,以下皆同ジ)ガA.C間ノ大圓弧ヨリ大ナリトセヨ。然ルトキハ球面上ニ

テAヨリBニ至ル最短キ途ハAヨリCニ至ル最短キ途ヨリ大ナルベシ。何トナレバAヲ中心トシテAヨリCニ至ル最短キ途ヲ球面ニ沿ヒテ廻轉スルトキCハ小圓或ハ大圓ノ弧CDEヲ畫キAトBトハ此圓弧ノ兩側ニ分レAヨリBニ至ル最短キ途ガ如何ナル形ヲ取ルトモ必此圓弧ト一點Dニ於テ交ルベシ。而シテAヨリCニ至ル最短キ途トAヨリDニ至ル最短キ途トハ其長サ相等シカルベシ。故ニAヨリBニ至ル最短キ途ハAヨリCニ至ル最短キ途ヨリモ,DヨリBニ至ル最短キ途ダケ長シ。

II. 球面上AヨリBニ至ルニ大圓弧ADB外ノ一點Cヲ過グト假定セヨ。大圓弧ADヲ大圓弧ACニ等シク截ルトキAヨリDニ至ル最短キ途ハAヨリCニ至ル最短キ途ニ等シク且大圓弧DB $<$ BCナルガ故ニDヨリBニ至ル最短キ途ハCヨリBニ至ル最短キ途ヨリ小ナリ。



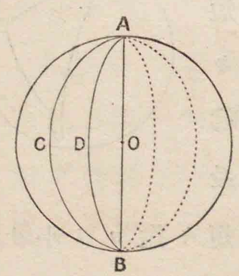
故ニAヨリBニ至ルニ大圓弧ADB外ノ一點Cヲ過グルモノトセバ此ヨリ更ニ短キ途存在ス。故ニAヨリBニ至ル最短キ途ハ大圓弧ADBナラザルベカラズ。

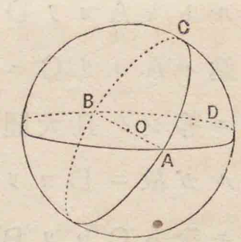
8. 定義. 三角ガ皆直角ナル球面三角形ヲ三直球面三角形ト云フ。

三直球面三角形ノ面積ハ全球面ノ$\frac{1}{8}$ナル故其測度ハ$\frac{1}{2}\pi R^2$ナリ。故ニ任意ノ球面三角形ノ面積ヲ知ルニハ之ト三直球面三角形ノ面積トノ比ヲ知ラバ足ル。今之ヲ段階ヲ履ミテ説キ示サン。

9. 定義. **月形**トハ二大圓ノ半圓周ニテ圍マレタル球面ノ部分ナリ。

二大圓ノ間ノ角ヲ月形ノ**角**ト云フ。





例ヘバ ACBDA ハ月形ニシテ二ツノ大圓弧AC, AD ノ間ノ角ハ月形ノ角ナリ。

10. 定理三. 同球又ハ等球ニ於テ，等角ヲ有スル二ツノ月形ハ合同ナリ。

系一. 同球又ハ等球ニ於テ二ツノ月形ノ比ハ其角ノ比ニ等シ。

系二. 月形ト球面トノ比ハ其角ト四直角トノ比ニ等シ。

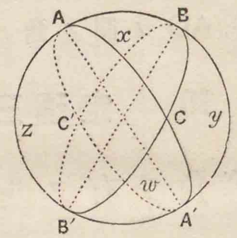
系三. 月形ノ面積ハ其角ノ二倍ト測度ヲ同ジクス。但三直球面三角形ヲ面積ノ單位トシ直角ヲ角ノ單位トス。

11. 定理四. 球面三角形ノ面積ハ其球面過剩ト測度ヲ同ジクス。

但三直球面三角形ヲ面積ノ單位トシ直角ヲ角ノ單位トス。

[證明] ABC ヲ球面三角形トシ,頂點ノ對點ヲ

A′, B′, C′ トシ,半球 ABA′B′C 上ニアル三角形 ABC, A′BC, AB′C, A′B′C ノ測度ヲ順次ニ x, y, z, w トセバ



$$x+y=\text{月形 A}=2A,$$

$$x+z=\text{月形 B}=2B.$$

又對頂球面三角形 A′B′C, ABC′ ハ等積ナル故

$$x+w=\text{月形 C}=2C.$$

故ニ $\qquad 2x+(x+y+z+w)=2(A+B+C).$

然ルニ $x+y+z+w$ ハ半球ノ測度ナル故4ニ等シ。

$$\therefore \qquad x=A+B+C-2.$$

系. 球面多角形ノ面積ノ測度ヲ S トシ,邊數ヲ n トシ,角ノ測度ノ和ヲ s トセバ

$$S=s-2(n-2).$$

問 題

(1) 球面三角形ノ三内角ヲ二等分スル大圓弧ハ同一ノ點ヲ通過ス。一内角ト二外角トヲ採ラバ如何。

(2) 球面菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ナリ。

(3) 半徑一尺ナル球面上ニ球面三角形アリテ,三角ノ大サガ 100°, 120°, 110° ナリ,其面積如何。

(4) 球面四角形アリ,其角ノ大サハ 120°, 130° 140°, 150° ニシテ球ノ半徑ハ五寸ナリ,其面積如何

(5) 球面三角形ノ各ノ角ハ其極三角形ノ之ニ對應スル邊ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角ニ等シキコトヲ證セヨ。 (仙 工)

註. 球面三角形ノ各邊ノ極ヲ頂點トスル球面三角形ヲ極三角形ト云フ。

定理索引

直線及平面

多面體

曲面體

附錄二

(一) 正多面體

(二) 球面多角形

希臘字母

GREEK ALPHABET

WITH

PRONUNCIATIONS.

A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	φ	Phi
K	$\varkappa$	Kappa	X	χ	Chi(likeKi)
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

明治三十七年七月廿五日印刷
明治三十七年七月廿八日發行
明治四十二年三月八日訂正六版印刷
明治四十二年三月十一日訂正六版發行
明治四十五年三月十二日修正七版印刷
明治四十五年三月十五日修正七版發行
明治四十五年六月十五日訂正八版印刷
明治四十五年六月十八日訂正八版發行

新撰幾何學教科書（立體）
定價四拾錢

編纂者　林鶴一
東京市小石川區小日向水道町七十三番地

發行者　西野虎吉
東京市本所區番場町四番地

印刷者　平井登

發行所　開成館
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
【振替貯金口座】東京第五參貳貳番

西部販賣所　三木佐助
大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角

東部販賣所　林平次郎
東京市日本橋區數寄屋町九番地

凸版印刷株式會社分工場印刷

庵原の健児
紫浪
仙谷生