ELEMENTARY COURSE OF TRIGONOMETRY

T. HAYASHI.

THE KAISEIKWAN

大正四年四月
森書肆ニテ購入
五學年三上 一郎

文部省檢定濟

大正元年十月廿五日　中學校數學科用

中等教育

平面三角法教科書

東北帝國大學理科大學教授

理學博士

林　鶴　一

編　著

開成館藏版

序

本書ハ中等教育數學教科書ノ三角法之部ヲナスモノニシテ,著者ガ先ニ著セル新撰平面三角法教科書ヲ新制ノ中學校數學教授要目ニ據リテ改訂補修シタルモノナリ。

次ニ其改纂ノ要項ヲ擧グ。

(一) 改訂教授要目ノ示セル所ニ隨ヒ數學相互ノ聯絡ヲ保タシメタルコト。

(二) 問題ヲ精撰スルト同時ニ嶄新ナル若干ノ新問題ヲ增補シ,一々驗證ヲ施シ教授上不適當ナルモノハ删除シタルコト。

(三) 校正ヲ嚴密ニスルト同時ニ用語ノ統一ヲ計リタルコト。

(四) 實地教授ニ經驗アル教師諸君ノ注意ニ基キ全篇ニ改修ヲ加ヘタルコト。

(五) 最近ノ諸官立各種學校入學試驗問題ヲ採擇シテ適當ニ各篇ニ配置シテ學生ニ興味ヲ覺ヘシメ且「力試シ」ヲ爲サシムルノ好材料ヲ供シタルコト。

(六) 弧度法,反圓函數,三角方程式ハ屢中學校卒業生ノ要スル所ナルヲ以テ附錄トシテ添ヘタルコト。

(七) 本書問題ノ不足ヲ補ハンガ爲メト補習科ノ用ニ供センガ爲メ補習雜題ヲ附錄ニ加ヘタルコト。

今ヤ中等教育ノ數學界ニ於テ本書ノ存在ノ意義ハ現ニ十分ニ認メラレタリ,尙益著者ノ意見ノ普ク行ハレテ

幸ニ斯界ニ貢獻スルアラバ豈獨リ著者ノ幸福ノミナランヤ。

終ニ臨ミ著者ハ多年中學教授ニ經驗アル東利作君ガ本書ノ編纂ニ關シ多大ノ助力ヲ與ヘラレタルヲ玆ニ記シテ謝意ヲ表ス。

大正元年八月

著者識

本書中ニハ,最近ノ高等各種學校入學試驗問題ヲ選擇シ,分類シテ適當ノ所ニ記載シタリ。蓋生徒ガ其既得ノ知識ヲ應用シテ力試シヲナスニ,趣味アル屈竟ナル練習問題タルヲ失ハザルベシ。

學校名ノ略語ノ例

[高　等]……………………高等學校大學豫科
[東　工]……………………東京高等工業學校
[大　工]……………………大阪高等工業學校
[名　工]……………………名古屋高等工業學校
[長　商]……………………長崎高等商業學校
[山　商]……………………山口高等商業學校
[東　師]……………………東京高等師範學校
[盛　農]……………………盛岡高等農林學校
[海　兵]……………………海軍兵學校
[海　機]……………………海軍機關學校
[商　船]……………………商船學校
[陸　士]……………………陸軍士官學校
[水　產]……………………水產講習所
[農　大]……………………農科大學實科
[醫　專]……………………醫學專門學校

目　次

平面三角法

第一篇

銳角ノ三角函數

第一章

三角函數ノ定義

1. 三角法ノ目的。 三角法ハ三角形ノ邊ト角トノ數量的關係及其應用ヲ考究スルヲ目的トス。

平面上ノ三角形ヲ論ズルモノヲ**平面三角法**ト稱シ,球面上ノ三角形ニ關スルモノヲ**球面三角法**ト云フ。

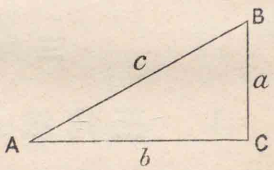
2. 量ノ數値。 或量ヲ單位ニテ測レルトキ其大サヲ表ス數ヲ其數値又ハ**測度**ト云フ。

例ヘバ長サ六尺ナル線分ノ數値ハ6ナリ。

量ノ數値ハ代數學的ニ文字ヲ以テ之ヲ表スヲ得。本書ニ於テ量ヲ示セル文字ハ大抵其數値ヲ表スモノトス。

角ヲ示セル文字ハ通常六十分法ニ依リ,度分秒ヲ用ヒテ測ラレタル大サヲ代表ス。

3. 定義。 直角三角形 ABC ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c ニテ表示*スルトキハ各二邊ノ間ニ六種ノ比ヲ生ズ,之ニ命名スルコト次ノ如シ,但 C ヲ直角トス。



[第一] 角 A ノ對邊ト斜邊トノ比ヲ此角ノ**正弦**ト云ヒ,之ヲ $\sin A$ ト記ス。

依テ $$\sin A = \frac{a}{c}.$$

[第二] 角 A ノ隣邊ト斜邊トノ比ヲ此角ノ**餘弦**ト云ヒ,之ヲ $\cos A$ ト記ス。

* 此記法ハ全書ヲ通ジテ採用セラル。

依テ $$\cos A = \frac{b}{c}.$$

[第三] 角 A ノ對邊ト隣邊トノ比ヲ此角ノ**正切**ト云ヒ,之ヲ $\tan A$ ト記ス。

依テ $$\tan A = \frac{a}{b}.$$

[第四] 角 A ノ隣邊ト對邊トノ比ヲ此角ノ**餘切**ト云ヒ,之ヲ $\cot A$ ト記ス。

依テ $$\cot A = \frac{b}{a}.$$

[第五] 斜邊ト角 A ノ隣邊トノ比ヲ此角ノ**正割**ト云ヒ,之ヲ $\sec A$ ト記ス。

依テ $$\sec A = \frac{c}{b}.$$

[第六] 斜邊ト角 A ノ對邊トノ比ヲ此角ノ**餘割**ト云ヒ,之ヲ $\operatorname{cosec} A$ ト記ス。

依テ $$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}.$$

注意一。 正切ヲ tg 又ハ tang ト記シ,餘切ヲ cotg 或ハ ctg ト記シ,餘割ヲ csc ト記スコトアリ。

注意二。 或角ノ餘割,正割,餘切ハ夫夫其正弦,餘弦,正切ノ逆數ナリ。

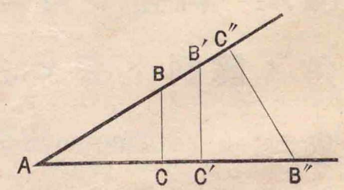
注意三。 或角ノ正弦,餘弦等ハ不名數ナル故之ニ代數的計算ヲ施スヲ得ベシ。

4. 定理。 或角ノ正弦ト餘弦トハ1ヨリ小ニシテ,正切ト餘切トハ如何ナル値ヲモ取リ得ベク,正割ト餘割トハ1ヨリ大ナリ。

其故ハ直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナレバナリ。

5. 定理。 角ガ變ゼザルトキハ其正弦,餘弦等モ亦變ゼズ。

證明。 角 A ノ一邊上ノ任意ノ點ヨリ他ノ邊ヘ垂線 BC, B′C′, B″C″ ヲ下セバ三角形 ABC, AB′C′, AB″C″ ハ皆相似ナル故



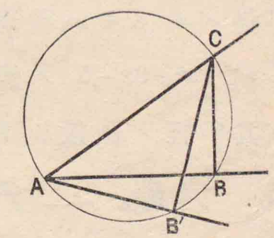
$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\sin A.$$

他ノ比ニ就テモ亦然リ。

6. 定理。 角ガ增大スルニ從ヒ其正弦,正切,正割ハ增大シ餘弦,餘切,餘割ハ却テ減小ス。

證明。 角 BAC $<$ B′AC ナルトキ,共有邊 AC ノ上ニ中心ヲ置キ且共通ノ頂點 A ヲ通過スル任意ノ圓ヲ畫キ,他ノ邊トノ交點ヲ B, B′ トスレバ圓周角 BAC $<$ B′AC ナル故弧 BC $<$ B′C,

從テ 弦 BC $<$ B′C,



$$\therefore\quad \frac{BC}{AC}<\frac{B'C}{AC},$$

即 $\sin BAC < \sin B'AC.$

又明カニ弦 AB $>$ AB′,

$$\therefore\quad \frac{AB}{AC}>\frac{AB'}{AC},$$

即 $\cos BAC > \cos B'AC.$

故ニ角ガ增大スレバ正弦ハ增大シ,餘弦ハ却テ減小ス。

又明カニ $\dfrac{BC}{AB}<\dfrac{B'C}{AB'}.$

即 $\tan BAC < \tan B'AC.$

故ニ正切ハ角ト共ニ増大ス。

次ニ餘割,正割,餘切ハ夫々正弦,餘弦,正切ノ逆數ナル故,角ノ増大ニ從ヒ餘切ト餘割トハ減小シ,正割ハ増大スルヲ知ル。

7. 定義。 角ノ正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割ヲ總稱シテ其角ノ**三角函數**ト云フ。

三角函數ハ又**圓函數**或ハ**三角比**トモ云フ。

注意。 一般ニ或數ガ變ズルニ從ヒ他ノ數モ亦變ズルトキハ後者ヲ前者ノ**函數**ト云フ。例ヘバ $2x^2+3x-5$ ノ數値ハ x ノ函數ニシテ,圓周ハ其半徑ノ函數ナリ。

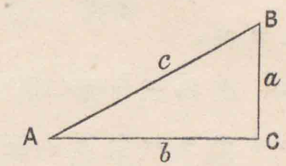
8. 定義。 二角ノ和ガ90°ナルトキハ其各ヲ他ノ**餘角**ト云フ。

角 α ノ餘角ハ $90°-\alpha$ ナリ。

9. 定理。 或角ノ餘弦,餘切,餘割ハ夫々其餘角ノ正弦,正切,正割ニ等シ。*

* 此定理ニヨレバ餘弦トハ「餘角ノ正弦」ノ略語ナリト見做スヲ得。餘切餘割モ亦之ニ準ズ。

證明。 直角三角形ABCニ於テ C ヲ直角トスレバ定義ニヨリ



$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B,$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \tan B,$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \sec B.$$

故ニ一般ニ或角ヲ α ニテ表サバ

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha = \sin(90°-\alpha)\\ \cot\alpha = \tan(90°-\alpha)\\ \operatorname{cosec}\alpha = \sec(90°-\alpha)\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

系。

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = \cos(90°-\alpha)\\ \tan\alpha = \cot(90°-\alpha)\\ \sec\alpha = \operatorname{cosec}(90°-\alpha)\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

[例] $\tan 30° = \cot 60°$, $\cos 35° 20' = \sin 54° 40'$.

問題 I.

(1) $42° 25' 40''$ ヲ直角ノ分數ニテ表セ。

(2) 三角形ABCニ於テ $A = 55° 33' 44''$, $B = 42° 56' 18''$ ナルトキ C ハ如何。

(3) 正十一角形ノ各外角ノ大サヲ度分秒ニテ

表セ。

(4) 平角ノ $\frac{113}{355}$ ヲ度分秒ニテ表シ,秒未滿四捨五入セヨ。

(5) 直角三角形ABCニ於テ $C=90°$, $AC=3$, $BC=4$ ナラバ角 A ノ三角函數如何。〔商船〕

(6) 直角三角形ノ一鋭角ノ正切 0·75 ニシテ其ノ周圍12寸ナルトキ,斜邊ノ長サ如何。〔海機〕

(7) 直角三角形ABCニ就テ $C=90°$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ ナラバ二角 A, B ノ三角函數如何。

(8) 次ノ如キ角 A ヲ幾何學的ニ作圖セヨ。

[1] $\sin A=\frac{2}{3}$,　[2] $\tan A=\frac{5}{4}$,

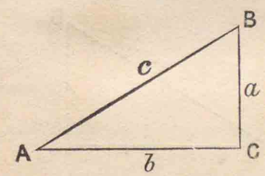
[3] $\sec A=\frac{8}{\sqrt{3}}$,　[4] $7\cos A=5$.

第二章

同角ノ三角函數ノ關係

10. 定理。 正弦ト餘割,餘弦ト正割,正切ト餘切ハ夫々互ニ逆數ヲ爲ス(逆數關係)。

證明。 $\sin A\operatorname{cosec} A=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}$.



卽　$\sin A\operatorname{cosec} A=1$

同樣ニ　$\cos A\sec A=1$

$\tan A\cot A=1$　$\cdots(3)$

系。 $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$,　$\sec A=\frac{1}{\cos A}$,　$\cot A=\frac{1}{\tan A}$.

11. 定理。 正切ハ正弦ト餘弦トノ比ニ等シク,餘切ハ餘弦ト正弦トノ比ニ等シ(相除關係)。

證明。 $\tan A=\frac{a}{b}$,

又　$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{c}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{故ニ} & \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} \\[2ex] \text{同樣ニ} & \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

12. 定理。 正弦ノ平方ト餘弦ノ平方トノ和ハ1ニ等シ(第一平方關係)。

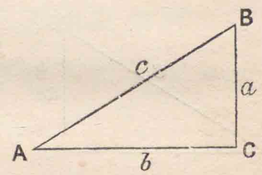
證明。 $(\sin A)^2+(\cos A)^2$

$$= \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

$$= \frac{c^2}{c^2}$$

$$= 1.$$



之ヲ次ノ如ク記ス。

$$\sin^2 A+\cos^2 A = 1\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

從テ
$$\sin^2 A = 1-\cos^2 A,$$
$$\cos^2 A = 1-\sin^2 A.$$

注意。 指數ガ正ノ整數ナルトキ三角函數ノ乘冪ヲ示スニ之ヲ函數記號ノ右肩ニ置ク。

13. 定理。 1ト正切ノ平方トノ和

ハ正割ノ平方ニ等シク,1ト餘切ノ平方トノ和ハ餘割ノ平方ニ等シ(第二平方關係)。

證明。 $1+\tan^2 A = 1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$$= \frac{\cos^2 A+\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= \sec^2 A.$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{即} & 1+\tan^2 A = \sec^2 A \\ \text{同樣ニ} & 1+\cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

14. 三角函數ノ一ヲ知リテ他ノ函數ヲ求ムル法。

例ヘバ $\sin A$ ヲ知リテ他ノ函數ヲ求メンニ公式(5)ヨリ

$$\cos A = \sqrt{(1-\sin^2 A)},$$

從テ(4)ヨリ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}},$$

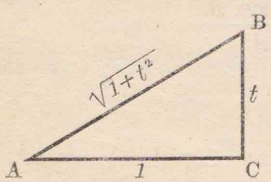
又
$$\cot A = \frac{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}{\sin A},$$

$$\sec A = \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}},$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

但根號ハ皆正根ヲ表ス。

又作圖ニ依テ此等ノ公式ヲ作ルヲ得。



例ヘバ $\tan A$ ヲ知レル場合ニ於テハ $\tan A$ ヲ t ニテ表シ $AC=1, BC=t$ ナル如キ直角三角形ヲ作ルベシ。

然ルトキハ

$$AB = \sqrt{1+t^2},$$

故ニ

$$\sin A = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}},$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$$

等ナリ。

問　題　2.

(1) $\sin x = \dfrac{12}{13}$ ヲ知リテ他ノ函數ヲ求メヨ。

(2) $\tan A = \dfrac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$, $\cos A$ ノ値如何。

〔海兵・海機〕

(3) $\cos A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ヲ知リテ $\sin A$, $\tan A$ ヲ求メヨ。

(4) $\sin\alpha = \dfrac{n}{m}$ ヲ知リテ $\tan\alpha$ ヲ求メヨ。

次ノ式ヲ證明セヨ (5)-(8)。

(5) $\tan A = \sqrt{(\sec^2 A-1)}$,　$\cot A = \sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}$.

(6) $\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}} = \dfrac{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}{\sec A}$.

(7) $\cos A = \dfrac{\cot A}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}} = \dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}{\operatorname{cosec} A}$. 〔海兵〕

(8) $\tan A = \dfrac{\sqrt{(1-\cos^2 A)}}{\cos A} = \dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}$.

(9) $\tan\theta = 0{\cdot}75$ ナルトキ $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

〔海機〕

(10) $\sec A = \sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}$ ノ値ヲ求メヨ。

〔陸士〕

15. 恒等式ノ證明法。 前述ノ關係ニヨリ三角函數ヲ含メル數多ノ恒等式ヲ證明スルヲ得。其方法ニ五種アリ。

(第一) 兩邊中複雜ナルモノヨリ簡單ナルモノヲ誘導スル方法。

[例] $(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A+\cot A)^2 = 2\sec A\operatorname{cosec} A.$

證明。左邊 $= \sec^2 A + 2\sec A \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A$

$$-(\tan^2 A + 2\tan A\cot A + \cot^2 A)$$

$$= 1 + \tan^2 A + 2\sec A \operatorname{cosec} A + 1 + \cot^2 A$$

$$-\tan^2 A - 2 - \cot^2 A$$

$$= 2\sec A \operatorname{cosec} A.$$

(第二) 兩邊ヲ同一ノ式ニ變ズル方法。

[例] $\tan A(\cos^2 A - \sin^2 A) = \sin A\cos A(1 - \tan^2 A).$

證明。

左邊 $= \dfrac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A - \dfrac{\sin A}{\cos A}\sin^2 A = \sin A\cos A - \dfrac{\sin^3 A}{\cos A}.$

右邊 $= \sin A\cos A - \sin A\cos A\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin A\cos A - \dfrac{\sin^3 A}{\cos A}.$

故ニ所題ノ恒等式ハ眞ナリ。

(第三) 既知ノ恒等式ヨリ誘導スル方法。

[例] $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$ 〔美術〕

證明。公式(5)ニ由テ

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

兩邊ヲ自乘シテ

$$\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1,$$

$$\therefore\ \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

(第四) 所題ノ恒等式ガ眞ナル爲ニ必要ナル條

件ヲ考究スル方法。

[例] $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha + \cot\alpha}{\sec\alpha + \tan\alpha} = \dfrac{\sec\alpha - \tan\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha}.$

證明。此恒等式ガ眞ナル爲ニハ

$$\operatorname{cosec}^2\alpha - \cot^2\alpha = \sec^2\alpha - \tan^2\alpha,$$

即 $(1 + \cot^2\alpha) - \cot^2\alpha = (1 + \tan^2\alpha) - \tan^2\alpha$

ナレバ可ナリ。然ルニ此式ノ兩邊ハ共ニ1ニ等シ。故ニ所題ノ恒等式ハ眞ナリ。

(第五) 兩邊ノ差ガ零ナルコトヲ示ス方法。

[例] $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha.$

證明。 $\cos^2\alpha - \sin^2\beta - (\cos^2\beta - \sin^2\alpha)$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\beta + \sin^2\alpha$$

$$= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - (\sin^2\beta + \cos^2\beta)$$

$$= 1 - 1 = 0.$$

依テ兩邊ハ相等シ。

問題 3.

次ノ恒等式ヲ證明セヨ* (1)-(20)。

(1) $\sin A\sec A\cot A = 1.$

* 恒等式ノ證明ニ於テハ sin, cos ヲ以テ他ノ函數ヲ表示スルヲ便利トス。

(2)　$(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$

(3)　$\sin^4 A-\cos^4 A=2\sin^2 A-1.$

(4)　$\tan A\sin A+\cos A=\sec A.$　〔美術〕

(5)　$(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$　〔商船〕

(6)　$(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta).$　〔商船〕

(7)　$\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x-\sin^2 x.$

(8)　$\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 B=\tan^2 A-\cot^2 B.$

(9)　$\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A\operatorname{cosec}^2 A.$

(10)　$\cot^2 A-\cos^2 A=\cot^2 A\cos^2 A.$　〔商船〕

(11)　$\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A.$　〔商船〕

(12)　$(1-\tan A)^2+(1-\cot A)^2=(\sec A-\operatorname{cosec} A)^2.$

(13)　$\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}=\tan\theta.$

(14)　$(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A).$　〔商船〕

(15)　$\operatorname{cosec}\alpha(\sec\alpha-1)+\sin\alpha=\cot\alpha(1-\cos\alpha)+\tan\alpha.$

(16)　$\sin^2 x\tan^2 x+\cos^2 x\cot^2 x=\tan^2 x+\cot^2 x-1.$

(17)　$\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta.$

(18)　$\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A.$

(19)　$\operatorname{cosec}^4 x(1-\cos^4 x)-2\cot^2 x=1.$

(20)　$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta.$

〔七高・新潟〕

(21)　$\sin\theta+\sin^2\theta=1$ ナレバ $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$ ナルコトヲ證セヨ。　〔海機〕

(22)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ ナルトキ　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ ノ値ヲ求メヨ。　〔山商〕

(23)　$\tan\theta=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ ナレバ次式ノ値如何。

$2mn\cos^2\theta-(m^2-n^2)\cos\theta\sin\theta.$　〔商船〕

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ (24)—(27)。

(24)　$(\sin A-\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A-\cot A)^2+(\cos A-\sec A)^2$

〔商船〕

(25)　$(\operatorname{cosec} A-\sin A)(\sec A-\cos A)(\tan A+\cot A).$

〔商船〕

(26)　$(\sec x\sec y+\tan x\tan y)^2$

$-(\tan x\sec y+\sec x\tan y)^2.$　〔海機〕

(27)　$\dfrac{1}{1+\sin^2 x}+\dfrac{1}{1+\cos^2 x}+\dfrac{1}{1+\sec^2 x}+\dfrac{1}{1+\operatorname{cosec}^2 x}.$

〔海兵〕

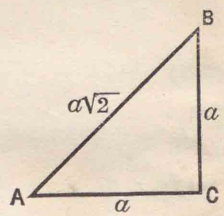
第三章

特別ナル角ノ三角函數

16. 45°ノ三角函數。

直角三角形 ABC ニ於テ $C=90°$, $AC=BC=a$ トセバ $A=B=45°$ ニシテ $AB=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

故ニ
$$\sin 45°=\cos 45°$$
$$=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=0{\cdot}7071.*$$



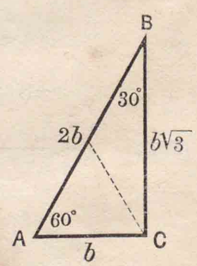
又
$$\tan 45°=\cot 45°=\frac{a}{a}=1,$$
$$\sec 45°=\operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}=1{\cdot}4142.$$

17. 30°, 60°ノ三角函數。

直角三角形 ABC ニ於テ

$A=60°$, $AC=b$ トスレバ

$AB=2b$, $BC=b\sqrt{3}$.



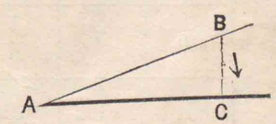
* 此値ハ小數四位迄計算シ以下四捨五入セリ，他ノ値モ亦之ニ準ズ。

$$\therefore\quad \sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{\cdot}8660,$$
$$\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2}=0{\cdot}5000,$$
$$\tan 60°=\cot 30°=\sqrt{3}=1{\cdot}7321,$$
$$\cot 60°=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=0{\cdot}5774,$$
$$\sec 60°=\operatorname{cosec} 30°=2,$$
$$\operatorname{cosec} 60°=\sec 30°=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}=1{\cdot}1547.$$

注意。 60° ノ正弦ハ 30° ノ正弦ノ二倍ニ等シカラズ。一般ニ二倍角ノ三角函數ハ原角ノ三角函數ノ二倍ニ等シカラズ。

18. 0°, 90°ノ三角函數。

角 BAC ノ邊 AC ヲ固定シ他ノ邊 AB ヲ廻轉シテ AC ニ接近セシムレバ角 ABC ハ漸次零ニ近ヅキ，AB 中ノ任意ノ點 B ヨリ AC ヘ下セル垂線 BC モ亦漸次零ニ近ヅキ，而シテ AC ハ漸次 AB ニ近ヅクベシ。之ヲ次ノ如ク略記ス。



$$\sin 0^\circ = 0,$$

$$\cos 0^\circ = 1,$$

從テ $$\tan 0^\circ = 0.$$

又角ガ減小スルニ從ヒ其正切ノ逆數ナル餘切ハ漸次ニ增大シテ際限ナシ,之ヲ次ノ如ク略記ス。

$$\cot 0^\circ = \infty.$$

同樣ニ $$\sec 0^\circ = 1, \quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$$

又 90° ハ 0° ノ餘角ナル故公式(I)ニ由テ

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \tan 90^\circ = \infty,$$

$$\cot 90^\circ = 0, \quad \sec 90^\circ = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

19. 本章ニ於テ求メ得タル重ナル三角函數ヲ次ノ表ニ揭ゲ以テ記憶ニ便ゼントス。任意ノ角ノ三角函數ヲ求ムル方法ハ困難ナルヲ以テ本書ニ於テハ之ヲ說述セズ。

角	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

問題 4.

次ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ求メヨ(1)—(4).

(1) $\sin 5x = \cos 7x.$

(2) $2\sin^2 x = \sin x.$

(3) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3} = 0.$

(4) $4+\sqrt{2} = 4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}+1)\sin x.$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ(5)—(7)。

(5) $\sin(x+y) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos(x-y) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

(6) $\cos(4x-3y) = 1, \quad \tan(7x+6y) = \infty.$

(7) $\tan x \tan y = 1, \quad \tan^2 x + \tan^2 y = 3\frac{1}{3}.$

(8) A ハ正ノ銳角ニシテ $\sec A > \operatorname{cosec} A$ ナラバ $A > 45^\circ$ ナルコトヲ證セヨ。〔海兵〕

(9) $(1+\sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$ ヲ證セヨ。〔商船〕

(10) $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}$ ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。〔海機〕

(11) 底邊12寸,頂角60°ヲ有スル三角形ノ外接圓ノ半徑ハ如何。〔千醫〕

第四章

三角函數ノ眞數表

20. 高等數學ニ依レバ任意ノ角ノ三角函數ノ略近値ヲ算出スルヲ得ベシ,之ヲ記入セル表ヲ三角函數ノ**眞數表**ト云フ。本書ニ載スル所ノ函數表ハ十分飛ビノ表ニシテ其用法ハ次ノ如シ。

[例一] $\tan 34°50'$ ヲ求メヨ。

解。最上列ニ tan ト記セル行ノ數ノ中ニテ左行ナル $34°50'$ ト同列ノ數 0·6959 ヲ取リテ之ヲ所要ノ値トス,即

$$\tan 34°50' = 0{\cdot}6959. \quad 答$$

[例二] $\sin 46°20'$ ヲ求メヨ。

解。最下例ニ sin ト記セル行ノ數ノ中ニテ右行ナル $46°20'$ ト同列ノ數 0·7234 ヲ見出シ之ヲ所要ノ値トス,即

$$\sin 46°20' = 0{\cdot}7234. \quad 答$$

此値ハ又 $\cos 43°40'$ ニ等シ,其故ハ

$$46°20' + 43°40' = 90°.$$

注意。$\sin(45°+x) = \cos(45°-x)$ ナルヲ以テ眞數

表ニ於テハ 45° ヨリ小ナル角ノ函數ヲ載セ,45°ヨリ大ナル角ノ函數ナリトモ見ラルル如クセリ。

[例三] $\sin 18°12'$ ヲ求メヨ。

解。眞數表ニ由テ

$$\sin 18°10' = 0{\cdot}3118,$$
$$\sin 18°20' = 0{\cdot}3145.$$

故ニ角ノ差 $10'$ ニ對スル函數ノ差ハ 0·0027 ナリ。之ヲ**表差**ト云フ。依テ

角ノ微差ト之ニ對應スル三角函數ノ微差トハ正比例ヲ爲ス(**比例部分ノ法則**)

ト假定セバ $2'$ ニ對スル正弦ノ差 x ハ比例式

$$10' : 2' = 0{\cdot}0027 : x$$

ヨリ得ラルベシ,即

$$x = 0{\cdot}0027 \times \frac{2}{10} = 0{\cdot}0005.$$

$$\therefore \quad \sin 18°12' = 0{\cdot}3118 + 0{\cdot}0005$$
$$= 0{\cdot}3123. \quad 答$$

[例四] $\sin A = 0{\cdot}4572$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解。眞數表ニ由テ

$$\sin 27^\circ 10' = 0{\cdot}4566,$$

$$\sin 27^\circ 20' = 0{\cdot}4592,$$

依テ　　表差 $= 0{\cdot}0026.$

又　　$\sin A - \sin 27^\circ\ 10' = 0{\cdot}0006,$

故ニ比例式

$$0{\cdot}0026 : 0{\cdot}0006 = 10' : d'$$

ヨリ　　$d' = 2'{\cdot}3$

ヲ得,之ヲ $27^\circ\ 10'$ ニ加フレバ

$$A = 27^\circ 12'{\cdot}3.\ \text{答}$$

注意。 tan 及 sec ヲ知リテ角ヲ求ムル場合ハ同様ナリト雖モ cos, cot, cosec ノ場合ニアリテハ函數ノ増大ニ伴ヒ角ハ却テ減小スルヲ以テ次ノ例ノ如クス。

[例五] $\cot A = 0{\cdot}5455$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解。眞數表ニ由テ

$$\cot 61^\circ 20' = 0{\cdot}5467,$$

$$\cot 61^\circ 30' = 0{\cdot}5430,$$

依テ　　表差 $= 0{\cdot}0037.$

又　　$\cot 61^\circ 20' - \cot A = 0{\cdot}0012,$

故ニ比例式

$$0.0037 : 0{\cdot}0012 = 10' : d'$$

ヨリ　　$d' = 10' \times \frac{12}{37} = 3'{\cdot}2$

ヲ得,之ヲ $61^\circ 20'$ ニ加フレバ

$$A = 61^\circ 23'{\cdot}2.\ \text{答}$$

問　題　5.

次ノ函數ノ値ヲ求メヨ (1)—(4)。

(1) $\sin 22^\circ 40'$.　　(2) $\tan 43^\circ 5'$.

(3) $\cos 37^\circ 33'$.　　(4) $\cot 39^\circ 25'$.

次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ (5)—(8)。

(5) $\sin x = 0{\cdot}4912$　　(6) $\tan x = 1{\cdot}3363$.

(7) $\cos x = 0{\cdot}3540$.　　(8) $\cot x = 0{\cdot}5525$.

(9) 半徑 r ノ圓ノ弦ガ其ノ一端ヲ過グル直徑ト角 α ヲナストキハ此ノ弦ノ長サ如何。

$r = 5$ 尺, $\alpha = 58^\circ\ 34'$ ナルトキ弦ノ長サヲ計算セヨ。　〔海機〕

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
0 0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	0 90
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.0000	50
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.0000	40
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.0000	30
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.9999	20
50	0.0145	0.0145	68.7501	0 9999	10
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	0 89
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20
50	0.0320	0.0320	31.2416	0 9995	10
2 0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	0 88
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10
3 0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	0 87
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10
4 0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	0 86
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10
5 0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	0 85
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50
20	0 0929	0.0934	10.7119	0.9957	40
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10
6 0	0.1045	0·1051	9.5144	0.9945	0 84
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30
40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	0 83
10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50
20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40
30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30
40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20
50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10
8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	0 82
10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50
20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40
30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30
40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20
50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10
9 0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	0 81
10	0 1593	0.1614	6.1970	0.9872	50
20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40
30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30
40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20
50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10
10 0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	0 80
10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50
20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40
30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30
40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20
50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10
11 0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	0 79
10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50
20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40
30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30
40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20
50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10
12 0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	0 78
10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50
20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40
30	0 2164	0.2217	4.5107	0.9763	30
40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20
50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	0 77
10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50
20	0.2306	0 2370	4.2193	0 9730	40
30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30
40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20
50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10
14 0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	0 76
10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50
20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40
30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30
40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20
50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10
15 0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	0 75
10	0.2616	0 2711	3.6891	0.9652	50
20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40
30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30
40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20
50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10
16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	0 74
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10
17 0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	0 73
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10
18 0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	0 72
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0·9492	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10
19 0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	0 71
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0 9417	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10
20 0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	0 70
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40
30	0.3502	0.3739	2.6746	0.9367	30
40	0.3529	0.3772	2.6511	0.9356	20
50	0.3557	0.3805	2.6279	0.9346	10
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	0 69
10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50
20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40
30	0.3665	0·3939	2.5386	0.9304	30
40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20
50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10
22 0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	0 68
10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50
20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40
30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30
40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20
50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10
23 0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	0 67
10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50
20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40
30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30
40	0.4014	0.4383	2.2817	0 9159	20
50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10
24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	0 66
10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
25 0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	0 65
10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20
50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
26 0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	0 64
10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
27 0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	0 63
10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
28 0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	0 62
10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30	0.4772	0.5430	1.8418	0.8788	30
40	0.4797	0.5467	1.8291	0.8774	20
50	0.4823	0.5505	1.8165	0.8760	10
29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °	° ′	sin.	tan.	cot.	cos.	′ °
29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	0 61	37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53
10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50	10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50
20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40	20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40
30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30	30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30
40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20	40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20
50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10	50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10
30 0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	0 60	38 0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	0 52
10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50	10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50
20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40	20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40
30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30	30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30
40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20	40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20
50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10	50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10
31 0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	0 59	39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	0 51
10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50	10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50
20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40	20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40
30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30	30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30
40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20	40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20
50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10	50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10
32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	0 58	40 0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	0 50
10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50	10	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50
20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40	20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40
30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30	30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30
40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20	40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20
50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10	50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10
33 0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	0 57	41 0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	0 49
10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50	10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50
20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40	20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40
30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30	30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30
40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20	40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20
50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10	50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10
34 0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	0 56	42 0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	0 48
10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50	10	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50
20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40	20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40
30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30	30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30
40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20	40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20
50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10	50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10
35 0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	0 55	43 0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	0 47
10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50	10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50
20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40	20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40
30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30	30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30
40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20	40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20
50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10	50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10
36 0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	0 54	44 0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	0 46
10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50	10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50
20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40	20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40
30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30	30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30
40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20	40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20
50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10	50	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10
37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	0 53	45 0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	0 45
° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °	° ′	cos.	cot.	tan.	sin.	′ °

第二篇

直角三角形

第一章

直角三角形ノ解法

21. 定義。 三角形ハ三邊及三角ヲ有ス,此六部分ノ中,三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ算出スルコトヲ三角形ヲ解クト云ヒ,其方法ヲ**解法**ト云フ。

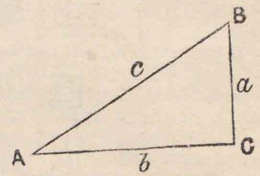
三角形ヲ直角三角形及斜角三角形ニ分ツ,後者ハ即任意ノ三角形ナリ。本篇ニ於テハ前者ノ解法ヲ論ズベシ。

直角三角形ノ解法ニ於テハ一部分ハ必ズ直角ナルヲ以テ他ノ二部分ヲ知ルヲ要ス,但二鋭角ノ大サヲ知リテ三邊ノ長サヲ算出スルヲ得ズ。

三角形 ABC ニ於テハ大字 A, B, C ヲ以テ其角ヲ表シ其對邊ヲ順次ニ a, b, c ニテ表スヲ常トス。

22. 第一ノ場合。 二邊 (a, b) ヲ知リ二鋭角 (A, B) 及斜邊 (c) ヲ求ムル法。

解法。 $\tan A = \frac{a}{b}$.



故ニ表ヲ用ヒテAヲ求ムルヲ得。然ルトキハ

$$B = 90° - A$$

ヨリBヲ得。

次ニ$c = \frac{a}{\sin A}$ヨリcヲ求メ得ベシ。

[例] $a = 135{\cdot}62, b = 200$ ヲ知リテA,B,Cヲ求メヨ。

解。 $$\tan A = \frac{135{\cdot}62}{200} = 0{\cdot}6781.$$

表ニ依リテAヲ求ムレバ

$$A = 34°\ 8'{\cdot}6,$$

従テ $$B = 55°\ 51'{\cdot}4.$$

次ニcヲ計算スル爲表ヨリ$\sin A$ヲ求ムレバ

$$\sin A = 0.5613;$$

依テ $$c = \frac{135{\cdot}62}{0{\cdot}5613} = 241{\cdot}62.$$

23. 第二ノ場合。 斜邊(c)及一邊(a)ヲ知リ他ノ部分ヲ求ムル法。

解法。 $$\sin A = \frac{a}{c}.$$

故ニ表ヲ用ヒテAヲ求ムルヲ得,然ルトキハ$B = 90° - A$, $b = a \cot A$ヨリB, bヲ得。

24. 第三ノ場合。 一鋭角(A)及其對邊(a)ヲ知リ他ノ部分ヲ求ムル法。

解法。次ノ三式ヨリB, b, cヲ得ベシ。

$$B = 90° - A, \quad b = a \cot A, \quad c = \frac{a}{\sin A}.$$

注意。一鋭角及其隣邊ヲ知レル場合ハ本題ニ歸著ス。

25. 第四ノ場合。 斜邊(c)及一鋭角(A)ヲ知リ他ノ部分ヲ求ムル法。

解法。次ノ三式ヨリB, a, bヲ得ベシ。

$$B = 90° - A, \quad a = c \sin A, \quad b = c \cos A.$$

問題 6.

次ノ各題ニ於テ直角三角形ヲ解ケ(1)−(4)。

(1) $a = 168{\cdot}9, \ b = 500$. (2) $c = 400, \ a = 356$.

(3) $A = 62°\ 35', a = 400{\cdot}5$. (4) $c = 2000, A = 18°\ 24'$.

(5) 一ノ直線上ニ之トαナル角ヲ爲セルa尺

ノ線分ノ正射影ヲ作ルトキハ其長サ幾尺ナルカ。

(6) 直角三角形ノ一邊ノ長サヲ1·25尺トシ,其對角ノ大サヲ 30° トシテ他ノ二邊ノ長サヲ計算セヨ。〔海機〕

(7) 三角形ABCノ一角 C ヲ直角トス,今邊 BC ヲ1000尺トシ角 B ヲ $24^\circ\ 35'23''$ トスルトキ邊 AC ハ幾許ナルカ。但

$\tan 24^\circ 35' = 0{\cdot}41602,\quad \tan 24^\circ 36' = 0{\cdot}41628.$ 〔海兵〕

(8) 直角三角形ABCノ直角ノ頂點Cヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ $c\sin A\cos A$ ニ等シ。

(9) 三角形ABCニ於テ C ガ直角ナルトキハ

$$(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B)^2=2.$$ 〔山商〕

(10) 地球ノ自轉ニヨリ緯度45度ノ處ニ居ル人ハ一時間ニ幾哩空間ニ於テ運バルル譯ナルカ,但地球ノ半徑ヲ4000哩トス。〔大工〕

第二章

高サ及距離ノ測量

26. 測量上ノ用語。

直角三角形ノ解法ヲ應用シテ高サ及距離ノ測量ヲ爲スヲ得,今先ヅ必要ナル用語ヲ示サン。

間接ニ二點間ノ距離ヲ知ラント欲セバ別ニ**測鎖**又ハ**卷尺**ヲ以テ適宜ノ距離ヲ實測スルヲ要ス,之ヲ**基線**ト云フ。

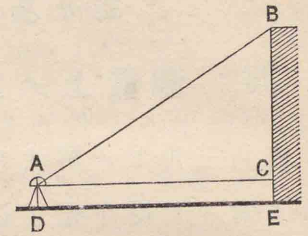
二直線間ノ角卽**距角**ヲ測ルニハ通常**經緯儀**又ハ**六分儀**ヲ以テス。

重錘ヲ絲ニテ吊シタルトキ其絲ノ方向ヲ**鉛直線**ト云ヒ,之ニ垂直ナル平面ヲ**水平面**ト云ヒ,其面上ノ直線ヲ**水平線**ト云フ。水平面ニ垂直ナル平面(鉛直線ヲ含ム平面)ヲ**直立面**ト云ヒ,此平面內ニ於テ一ツノ直線ガ水平線ト爲ス角ノ中,水平面ノ**上方**ニ在ルモノヲ**仰角**又ハ**高度**ト云ヒ,**下方**ニ在ルモノヲ**俯角**ト云フ。

27. 設問I。 水平面上ニ在リテ近

ヅキ得ベキ直立セル物體ノ高サヲ測ル法。

解法。 BE ヲ物體ノ高サトシ, AD ヲ觀測者ノ眼ノ高トセヨ。A 點ニ於テ物體ノ頂點ノ仰角 BAC ヲ實測シ,次ニ D ヨリ物體マデノ距離 DE ヲ實測スルトキハ

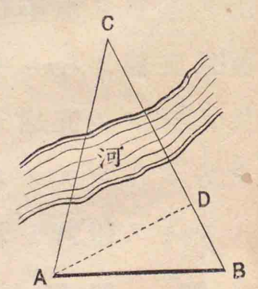


$$BC = AC \tan BAC.$$

故ニ　所要ノ高サ $= DE \tan BAC + AD.$

28. 設問 II。 近ヅキ得ザル物體ト觀測者ノ位置トノ距離ヲ求ムル法。

解法。 C ヲ物體ノ位置トシ A ヲ觀測者ノ位置トシ其距離 AC ヲ求メントス。適宜ニ基線 AB ヲ實測シ A ニ於テ角 BAC ヲ測リ B ニ於テ角 ABC ヲ測ルベシ。然ラバ



$$C = 180° - (A+B)$$

ナル故直ニ C ヲ知ルヲ得。

A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ引クトセバ △BAD ヨリ

$$AD = AB \sin B,$$

又 △CAD ヨリ

$$AD = AC \sin C,$$

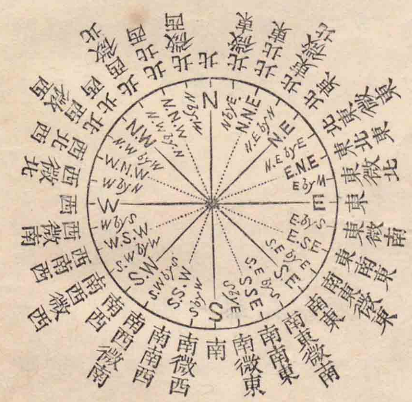
$$\therefore \quad AC \sin C = AB \sin B,$$

$$\therefore \quad AC = \frac{AB \sin B}{\sin C}.$$

注意。 本題ニ於テハ B, C ヲ孰レモ鋭角ト假定セリ,其中一ツガ鈍角ナル場合ニ於テハ之ニ其補角ヲ代入スレバ可ナリ。

本題ノ方法ニ由テ川ノ幅ヲ測量スルヲ得。

29. 航海用羅針盤。



航海用羅針盤ニ於テハ東西南北ノ間ノ角ヲ八等分シテ總テノ方向ヲ三十二方位トス,其名稱ハ圖ノ如シ。

例ヘバ東(E)ヨリ北(N)ヘノ名稱ハ東

微北(E *by* N), 東北東(E. N. E), 北東微東(N. E *by* E), 北東(N. E)等ナリ。其他類推スベシ。

相隣接セル二方位ノ間ノ角ハ

$$360° \div 32 = 11° 15'.$$

又物體ノ方位ヲ示スニ,上ノ方法ニ由ラズシテ北(或ハ南)ヨリ東(或ハ西)ヘ何度何分ト云ヒ,北何度何分東ト記スコトアリ。又陸地測量ニ於テハ北ヲ0°ノ方位ト定メ之ヨリ東,南,西ヲ經テ北ニ復ル度數ヲ以テスル方法アリ。例ヘバ90°ハ東,180°ハ南,270°ハ西,315°ハ北西ヲ示スガ如シ。

問題 7.

(1) 人アリ,地面ト 30° ノ傾斜ヲ爲セル坂路ヲ登ルコト12町35間ナリ。然ラバ此人地面ヨリ幾許ノ高サニ在ルカ。

(2) 壁ニ懸ケタル梯子アリ,其長サ12尺ニシテ地面ト 60° ノ傾斜ヲ爲セリ,其梯子ノ頂上ノ高サ及其脚ヨリ壁ノ基礎ニ至ル距離ハ幾許ナルカ。

(3) 海面上 100 尺ナル一艦ノ檣頭ヨリ他艦ノ艦體ヲ觀測セシニ俯角 30° ヲ得タリト云フ。二艦ノ距離ヲ問フ。 〔海經〕

(4) 旗竿アリ,風ノ爲ニ吹キ折ラレ,其頂上ハ竿底ヨリ10尺ヲ離レタル點ニ於テ地ヲ打チ且地面ト 60° ノ角ヲ作レリ。竿ノ全長ヲ求メヨ。

(5) 鋭角三角形ノ頂點ヨリ底ニ下セル垂線ニテ分タレタル底ノ二部分ノ比ハ之ニ隣レル底角ノ餘切ノ比ニ等シ。

又頂角ノ二部分ノ餘弦ノ比ハ隣邊ノ反比ニ等シ。之ヲ證明セヨ。

(6) 圓形ノ池アリ,地上ノ一點ヨリ此池ヲ夾ム角 60° ニシテ其點ヨリ池邊ニ至ル最短距離15間ナリ,此池ノ直徑幾間ナルカ。 〔東工〕

(7) 三角形 ABC ニ於テ C ヨリ AB ニ下セル垂線 CD ガ形内ニアルトキハ

$$CD = \frac{AB}{\cot A + \cot B}.$$

又垂線ガ形外ニアルトキハ如何。

(8) 海濱ニ在ル高サ h 尺ノ高樓ヨリ海上ナル二船ヲ同方位ニ見タルニ其俯角 α, β ナルヲ知レリ。然ラバ二船ノ距離ハ $h(\cot\beta \sim \cot\alpha)$ 尺ナリ。之ヲ證セヨ。

(9) A, B ハ海面上ノ二點ニシテ相距ルコト 2500 米ナリ。A, B 兩所ニ於テ AB 線ノ直上ニアル輕氣球 C ヲ望ミタルニ視線ガ水平面トナス角ハ夫々 $45°$ 及 $60°$ ナリ。輕氣球ノ水平面上ノ高サヲ問フ。〔東工〕

(10) 川岸ニ沿ヒ基線 $AB=300$ 尺ヲ實測シ A, B ヨリ對岸ノ樹木 C ヲ觀測シテ角 $CAB=52°20'$, $CBA=64°30'$ ヲ得タリ,川ノ幅及距離 AC 如何。

(11) 平速ヲ以テ垂直ニ昇ル所ノ輕氣球アリ。1 哩昇リシ時高度 α ヲ得,其後 15 分間ヲ經テ高度 β ヲ得タリ,輕氣球毎時ノ速サ如何。〔陸士〕

(12) 塔ノ正東ニ於テ互ニ 200 間ヲ離ルル兩地ヨリ此塔ノ頂上ヲ望ムニ仰角 $45°$ 及 $30°$ ナリ,塔ノ高サヲ問フ。〔陸經〕

(13) 塔アリ,日光ノ爲ニ地上ニ寫ス影 120 尺ナリト云フ,塔ノ高サ及太陽ノ仰角如何。但太陽ノ位置ハ 9 尺ノ直立竿ガ地上ニ映ズル影 $3\sqrt{3}$ 尺ナリト云フ。〔海經〕

(14) 某所ニ於テ其正東ニ在ル山頂ノ仰角ヲ測リテ $60°$ ヲ得,更ニ其測點ヨリ正南 2 哩ノ所ニ

於テ同ジ山頂ノ仰角ヲ測リテ $45°$ ヲ得タリ。此山ノ高サヲ求メヨ。〔鹿農〕

(15) 平野ヲ東西ニ貫ケル直線狀ノ通路 ABC アリ。A ノ正北ニ立テル塔ノ頂上ノ仰角ヲ A, B, C ノ三所ニ於テ測リシニ,夫々 $60°$, $45°$, $30°$ ヲ得タリ。是ニ依リテ B ハ AC ノ中央ニアルコトヲ證セヨ。〔陸士〕

第三篇

一般ノ角ノ三角函數

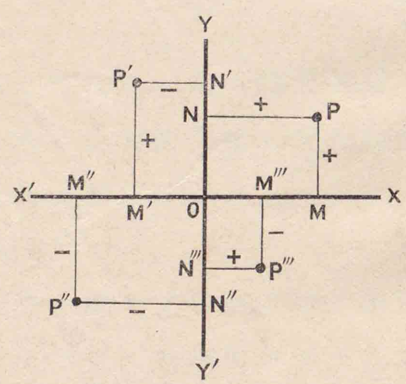
第一章

一般ノ角ノ三角函數ノ定義及關係

30. 本篇ニ於テハ代數學ノ數ノ性質ノ符號＋及－ヲ直線及角ノ測度ニ適用シ一般ノ角ノ三角函數ノ定義ヲ述べ其關係ヲ考究セントス。

31. 直線ノ正負。

XX', YY' ヲ互ニ直角ニ交ル二直線トシ O ヲ其交點トセヨ。然ルトキハ O ヨリ OX 線中ノ一

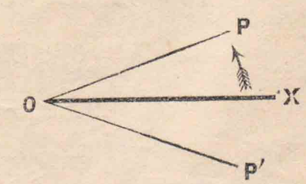


點 M ニ至ル線分 OM 及之ニ平行シテ YY' ノ右方ニ在ル線分 NP, $N'''P'''$ 等ヲ正トシ,又 OX' 線中ノ一點 M' ニ至ル線分 OM' 及之ニ平行シテ YY' ノ左方ニ在ル線分 $N'P'$, $N''P''$ 等ヲ負トス。又 YY' 線ニ沿ヘル ON, ON' 及之ニ平行シテ XX' ノ上方ニ在ル線分 MP, $M'P'$ 等ヲ正トシ下方ニ在ル線分 ON'', ON''', $M''P''$, $M'''P'''$ 等ヲ負トス。

略言セバ,(1) YY' ヨリ之ニ垂直ニ右方ニ向ヒ測レル長サヲ正トシ,左方ニ向ヒ測レル長サヲ負トス。(2) XX' ヨリ之ニ垂直ニ上方ニ向ヒ測レル長サヲ正トシ,下方ニ向ヒ測レル長サヲ負トス。

32. 角ノ正負。

直線 OP ノ一端 O ヲ固定シ,之ヲ定直線 OX ノ位置ヨリ矢ノ方向(之ヲ正ノ方向ト云フ)ニ廻轉シ圖中ノ OP ノ位置ニ至ラシムルトキ生ズル角 XOP ハ正ニシテ,反對ノ方向(之ヲ負ノ方向ト云フ)ニ廻轉シテ生ズル角 XOP' ハ負ナリトス。



例ヘバ XOP, 及 XOP' ノ大サ何レモ $30°$ ナレバ

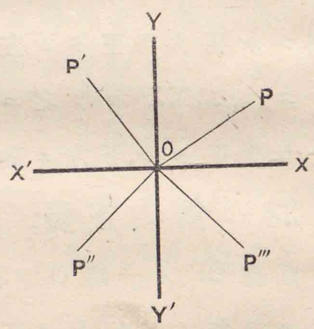
角 $XOP=+30^\circ$,　　角 $XOP'=-30^\circ$.

定直線 OX ヲ正角及負角ノ**主線**ト云ヒ, OP ヲ**動徑**ト云フ。

33. 象限。

互ニ直交スル二直線 XOX', YOY' ニテ分タレタル平面ノ四部分ヲ**象限**ト云ヒ, XOY, YOX', X'OY', Y'OX ヲ順次ニ**第一,第二,第三,第四象限**ト云フ。

34. 角ノ大サ。



XOX', YOY' ヲ互ニ直交スル二直線トシ,別ニ動徑 OP アリテ主線 OX ノ位置ヲ發シ O 點ヲ周リテ正ノ方向ニ廻轉セバ此線ト OX トノ間ノ角ハ次第ニ增大ス,即次ノ如シ。

$$0^\circ < XOP < 90^\circ,$$
$$90^\circ < XOP' < 180^\circ,$$
$$180^\circ < XOP'' < 270^\circ,$$
$$270^\circ < XOP''' < 360^\circ.$$

動徑 OP ガ尚廻轉ヲ續ケ OX ヲ超エテ再 OP ノ

位置ニ至ルトキ XOP ハ 360° ヨリ大ナリ,例ヘバ XOP ノ始メノ大サヲ 30° トスレバ後ノ大サハ $30^\circ+360^\circ$ 即 390° ナリ。 猶動徑 OP ヲ無限ニ廻轉スルヲ得。

同樣ニ動徑 OP ヲ負ノ方向ニ無限ニ廻轉スルヲ得。

故ニ角ノ絕對値ニハ際限ナシ。

任意ノ位置ニアル動徑 OP ト主線 OX トノ爲ス角ハ正角,負角共ニ無數ナリ。

此二線ノ爲ス角ノ中最小ナル正角ヲ α トスレバ此二線ノ爲セル總テノ角 θ ハ一ツノ式

$$\theta = n.360^\circ + \alpha$$

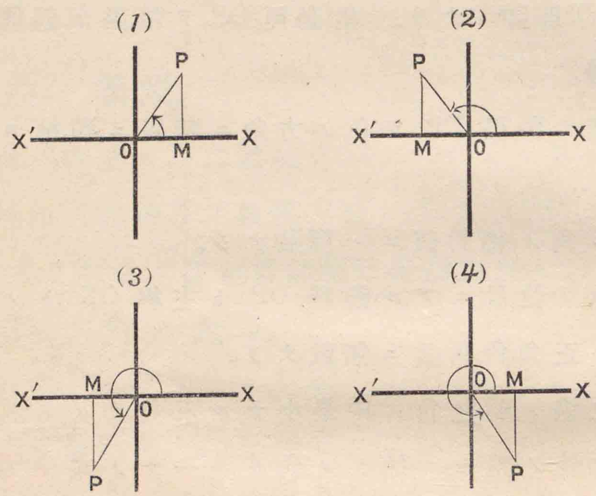
ニヨリテ表サル,但 n ハ零又ハ正負ノ整數ナリ。

前圖ニ於ケル四角 XOP, XOP', XOP'', XOP''' 及之ト二邊ヲ共有スル正角,負角ヲ夫々第一象限,第二象限,第三象限,第四象限ノ角ト云フ。

35. 三角函數ノ一般ノ定義。

主線 OX ト任意ノ線 OP トノ爲ス角ニ於テ,其一邊 OP 中ノ一點 P ヨリ OX 或ハ其延長 OX' ヘ垂

線 PM ヲ引キ,此任意ノ角ヲ θ ニテ表セバ角 θ ノ三角函數ノ定義ハ次ノ如シ。



$$\sin\theta=\frac{MP}{OP},\quad \cos\theta=\frac{OM}{OP},$$

$$\tan\theta=\frac{MP}{OM},\quad \cot\theta=\frac{OM}{MP},$$

$$\sec\theta=\frac{OP}{OM},\quad \operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP}.$$

注意。 OX ト OP トノ爲ス角ハ正,負共ニ無數ナル故同一ノ三角函數ヲ有スル角ハ無數ナリ。

36. $n.360^\circ+\alpha$ ノ三角函數。

角 α ト角 $n.360^\circ+\alpha$ トハ二邊ヲ共有スル角ナリ,

依テ其三角函數ハ全ク相等シ,但 n ハ 0 又ハ正負ノ整數ナリ。

$$\left.\begin{aligned}\sin(n.360^\circ+\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(n.360^\circ+\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(n.360^\circ+\alpha)&=\tan\alpha\\ \cot(n.360^\circ+\alpha)&=\cot\alpha\\ \sec(n.360^\circ+\alpha)&=\sec\alpha\\ \operatorname{cosec}(n.360^\circ+\alpha)&=\operatorname{cosec}\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

37. 三角函數ノ符號。

第 35 節ノ定義ニ於テ動徑 OP ノ符號ヲ恒ニ正トシ MP, OM, OP ノ絕對値ヲ夫々 a, b, c トセバ第一象限ニ於テハ此三線分ハ皆正ナルヲ以テ三角函數ハ皆正ナリ。

第二象限ニ於テハ

$$\sin\theta=\frac{+a}{+c}=+\frac{a}{c},$$

$$\cos\theta=\frac{-b}{+c}=-\frac{b}{c},$$

$$\tan\theta=\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

等ナリ。第三,第四象限ニ於テモ同樣ニ符號ヲ決

定スルヲ得ベシ。

之ヲ表ニテ示セバ次ノ如シ。

象限	I	II	III	IV	象限
$\sin\theta$	+	+	−	−	$\operatorname{cosec}\theta$
$\cos\theta$	+	−	−	+	$\sec\theta$
$\tan\theta$	+	−	+	−	$\cot\theta$

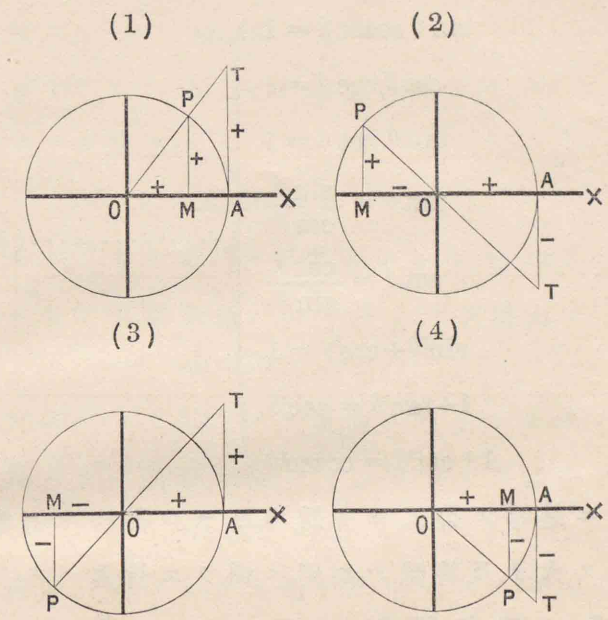
38.　單位圓。

線單位ヲ半徑トセル圓ヲ單位圓ト云フ。

今角 XOP ノ頂點 O ヲ中心トシテ單位圓ヲ畫キ,主線ト動徑トノ交點ヲ夫々A, P トシ, A ニ於ケル切線ト OP トノ交點ヲ T トス。然ルトキハ各象限ニ於テ角 $XOP=\theta$ ノ正弦,餘弦,正切ハ次ノ如シ。

$$\sin\theta = \mathrm{MP},$$
$$\cos\theta = \mathrm{OM},$$
$$\tan\theta = \mathrm{AT}.$$

其故ハ各象限ニ於テ大サ及符號ニ就キ



$$\sin\theta = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{MP}}{1} = \mathrm{MP},$$
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{OM}}{1} = \mathrm{OM},$$
$$\tan\theta = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{AT}.$$

39.　一般ノ三角函數ノ間ノ關係。

第 35 節ノ定義ニ於テ符號ヲ考フルモ猶次ノ關係アルコトハ容易ニ之ヲ證明スルヲ得ベシ。

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta\operatorname{cosec}\theta &= 1\\
\cos\theta\sec\theta &= 1\\
\tan\theta\cot\theta &= 1\\
\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\
\cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\
\sin^2\theta+\cos^2\theta &= 1\\
1+\tan^2\theta &= \sec^2\theta\\
1+\cot^2\theta &= \operatorname{cosec}^2\theta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

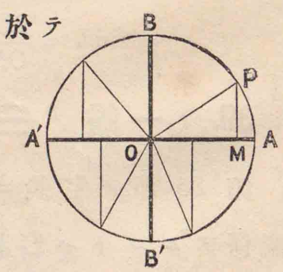
故ニ是等ノ公式ヨリ誘導セラレ得ベキ恒等式ハ角ノ大サ及符號ノ如何ニ係ラズ皆眞ナリ。

40. 三角函數ノ變化。

OP ト OA トノ爲ス角ヲ θ ニテ表シ,此角ガ 0° ヨリ 360° マデ增大スルニ從ヒ其函數ノ變化スル有樣ヲ考究セントス。(第 38 節ニヨル)。

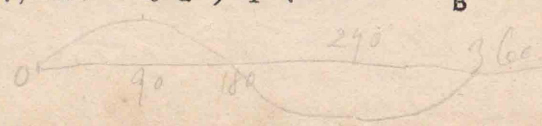
(第一)　正弦。 單位圓ニ於テ

$$\sin\theta = MP.$$



先ヅ　　$\sin 0^\circ = 0.$

θ ガ 0° ヨリ 90° マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ 0 ヨリ 1 マ



デ增大ス。　　$\sin 90^\circ = 1.$

θ ガ 90° ヨリ 180° マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ 1 ヨリ 0 マデ減小ス。

$$\sin 180^\circ = 0.$$

θ ガ 180° ヨリ 270° マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ常ニ負ニシテ其絕對値ハ 0 ヨリ 1 マデ增大ス。

$$\sin 270^\circ = -1.$$

θ ガ 270° ヨリ 360° マデ增大スルトキ, $\sin\theta$ ハ猶常ニ負ニシテ其絕對値ハ 1 ヨリ 0 マデ減小ス。

$$\sin 360^\circ = 0.$$

注意。 θ ガ 360° ヲ超エテ增大スレバ復上ト同一ノ變化ヲ繰返スコト明ナリ。

(第二)　餘弦。 前圖ニ於テ

$$\cos\theta = OM.$$

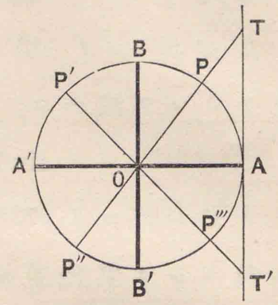
故ニ第一象限ニアリテハ $\cos\theta$ ハ 1 ヨリ 0 マデ減小シ,第二象限ニアリテハ 0 ヨリ -1 マデ減小ス,又第三,第四象限ニアリテハ反對ニ增大ス。

$$\cos 0^\circ = 1,\quad \cos 90^\circ = 0,\quad \cos 180^\circ = -1,$$
$$\cos 270^\circ = 0,\qquad \cos 360^\circ = 1.$$

(第三)　正切。

$\tan\theta = AT.$

先ヅ $\tan 0° = 0.$



θ ガ $0°$ ヨリ $90°$ マデ増大スルトキ, $\tan\theta$ ハ 0 ヨリ次第ニ増大シ, θ ガ充分ニ $90°$ ニ近ヅケバ $\tan\theta$ ハ如何ナル數ヨリモ大トナル。

之ヲ $90°$ ノ正切ハ無限大ナリト略言ス。

θ ガ僅ニ $90°$ ヲ超ユレバ正切ハ俄ニ負トナリテ其絶對値ハ如何ナル數ヨリモ大ナリ,故ニ

$$\tan 90° = \pm\infty$$

ナリト云フ。

θ ガ $90°$ ヨリ $180°$ マデ増大スルトキハ $\tan\theta$ ハ常ニ負ニシテ其絶對値ハ ∞ ヨリ 0 マデ減少ス。

$$\tan 180° = 0.$$

θ ガ第三象限ニ在ルトキハ $\tan\theta$ ハ第一象限ト同一ノ變化ヲ爲シ,第四象限ニ於テハ第二象限ト同一ノ變化ヲ爲スコト明ナリ。

從テ $$\tan 270° = \pm\infty,$$
$$\tan 360° = 0.$$

(第四) 餘切,(第五)正割,(第六)餘割ハ順次

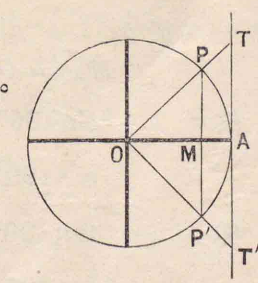
ニ正切,餘弦,正弦ノ逆數ナルヲ以テ容易ニ其變化ヲ知ルコトヲ得ベシ。

上ノ變化ヲ表ニ作レバ次ノ如シ。

象限	I	II	III	IV	
$\sin\theta$	0 ヨリ 1	1 ヨリ 0	0 ヨリ −1	−1 ヨリ 0	ニ變ズ
$\operatorname{cosec}\theta$	∞ ヨリ 1	1 ヨリ ∞	−∞ ヨリ −1	−1 ヨリ −∞	ニ變ズ
$\cos\theta$	1 ヨリ 0	0 ヨリ −1	−1 ヨリ 0	0 ヨリ 1	ニ變ズ
$\sec\theta$	1 ヨリ ∞	−∞ ヨリ −1	−1 ヨリ −∞	∞ ヨリ 1	ニ變ズ
$\tan\theta$	0 ヨリ ∞	−∞ ヨリ 0	0 ヨリ ∞	−∞ ヨリ 0	ニ變ズ
$\cot\theta$	∞ ヨリ 0	0 ヨリ −∞	∞ ヨリ 0	0 ヨリ −∞	ニ變ズ

注意。 正弦及餘弦ハ 1 ヨリ 0 ヲ經テ −1 ニ至ル總テノ實數値ヲ取リ,正割及餘割ハ 1 ト −1 トノ間ノ實數値ヲ取ルコトナク,又正切及餘切ハ $+\infty$ ヨリ 0 ヲ經テ $-\infty$ ニ至ル總テノ實數値ヲ取ルヲ得。

41. 負角ノ三角函數。



單位圓ニ於テ角 AOP ヲ θ トシ垂線 PM ヲ延長シ P′ ニ於テ圓ト會セシムレバ角 AOP' ハ $-\theta$ ナリ。

而シテ　$MP' = -MP,\quad OM' = OM,\quad AT' = -AT.$

故ニ

$$\left.\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= -\sin\theta\\
\cos(-\theta) &= \cos\theta\\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta\\
\cot(-\theta) &= -\cot\theta\\
\sec(-\theta) &= \sec\theta\\
\mathrm{cosec}(-\theta) &= -\mathrm{cosec}\,\theta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

從テ

42.　定義。 二角ノ和ガ90°ナルトキハ其各ヲ他ノ**餘角**ト云フ。

注意。 玆ニ云フ所ノ二角ハ鋭角ニ限ルニ非ズ。例ヘバ120°ノ餘角ハ$-30°$ナリ。

43.　餘角ノ三角函數。

單位圓ニ於テ角$AOP=\theta$, $AOP'=90°-\theta$トシP, P'ヨリ直徑AOA'ニ垂線PM, P'M'ヲ引ケバ大サト符號トニ於テ

$$M'P' = OM,\qquad OM' = MP.$$

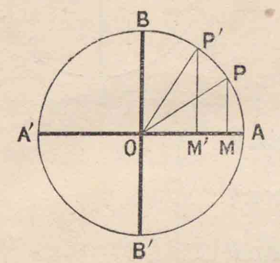
故ニ

$$\left.\begin{aligned}
\sin(90°-\theta) &= \cos\theta\\
\cos(90°-\theta) &= \sin\theta\\
\tan(90°-\theta) &= \cot\theta\\
\cot(90°-\theta) &= \tan\theta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

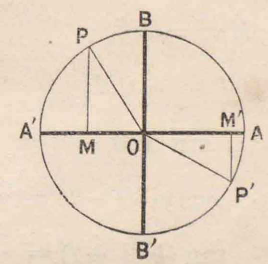
從テ

$$\left.\begin{aligned}
\sec(90°-\theta) &= \mathrm{cosec}\,\theta\\
\mathrm{cosec}(90°-\theta) &= \sec\theta
\end{aligned}\right)$$

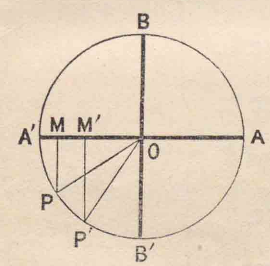
(1)



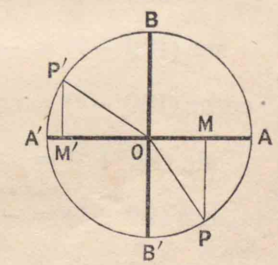
(2)



(3)



(4)

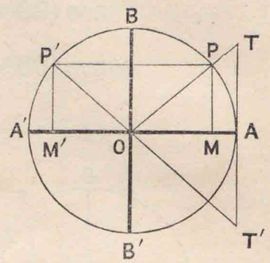


44.　定義。 二角ノ和ガ180°ナルトキハ其各ヲ他ノ**補角**ト云フ。

45.　補角ノ三角函數。

單位圓ニ於テ角$AOP=\theta$トシ, PヨリAOニ平行ナル直線PP'ヲ引キ, P'ニ於テ圓ト會セシム

レバ，角 $AOP'=180^\circ-\theta$ ナリ。



P, P′ ヨリ直徑 AOA′ ニ垂線

PM, P′M′ ヲ引ケバ

$$M'P'=MP,$$

$$OM'=-OM.$$

故ニ

從テ

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^\circ-\theta) &= \sin\theta \\ \cos(180^\circ-\theta) &= -\cos\theta \\ \tan(180^\circ-\theta) &= -\tan\theta \\ \cot(180^\circ-\theta) &= -\cot\theta \\ \sec(180^\circ-\theta) &= -\sec\theta \\ \operatorname{cosec}(180^\circ-\theta) &= \operatorname{cosec}\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

系。

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ+\theta) &= \cos\theta \\ \cos(90^\circ+\theta) &= -\sin\theta \\ \tan(90^\circ+\theta) &= -\cot\theta \\ \sin(180^\circ+\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(180^\circ+\theta) &= -\cos\theta \\ \tan(180^\circ+\theta) &= \tan\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{II}')$$

問題 3.

次式ヲ證明セヨ (1)—(4)。

(1) $\sin(\theta-90^\circ)=-\cos\theta,\quad \cos(\theta-90^\circ)=\sin\theta.$

(2) $\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta,\quad \cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta.$

(3) $\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta,\quad \cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta.$

(4) $\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{3},\quad \cos 120^\circ=-\frac{1}{2},$

$\sin 135^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad \cos 135^\circ=-\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

(5) $\dfrac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}$ ノ値ヲ求メヨ。〔海兵〕

(6) $300^\circ, 330^\circ, 750^\circ, 1080^\circ, -315^\circ$ ノ正弦，餘弦，正切ヲ求メヨ。

(7) $\tan\theta=-\frac{4}{3}$ ナルトキ $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ ノ値ヲ見出セ。〔海兵〕

(8) $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ ナルトキ A ノ總テノ三角函數ヲ小數第二位マデ求メヨ。〔熊工〕

(9) $\tan\phi=\dfrac{n\sin\theta}{m+n\cos\theta}$ ナルトキハ $\sin\phi$ ノ値如何。〔海兵〕

(10) 次式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $\dfrac{\sin(90^\circ+A)\cos(90^\circ-A)}{\cos(180^\circ+A)}+\dfrac{\sin(180^\circ-A)\cos(90^\circ+A)}{\sin(180^\circ+A)}.$

〔海機〕

[2] $\dfrac{\sin(180^\circ-A)}{\tan(180^\circ+A)}\times\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\tan(90^\circ+A)}\times\dfrac{\cos(360^\circ-A)}{\sin(-A)}.$

〔海兵〕

(11) $a\sin\theta=b$, $c\cos\theta=d$ ナルトキハ

$$\frac{b^2}{a^2}+\frac{d^2}{c^2}=1.$$

注意。 本題ニ於ケルガ如ク或文字ヲ含メル若干ノ方程式ヨリ之ヲ含マザル式ヲ作ルコトヲ稱シテ此文字ヲ消去スト云フ。

次式ヨリ角 θ ヲ消去セヨ(12)—(14)。

(12) $l\cos\theta=m$, $l'\sec\theta=m'$.

(13) $\tan\theta+\cot\theta=p$, $\tan\theta-\cot\theta=q$.

(14) $a\sin\theta+b\cos\theta=c$, $b\sin\theta-a\cos\theta=d$.

(15) $\sin A=a$, $\tan A=b$ ナルトキハ

$$b^2=a^2(1+b^2).$$ 〔商船〕

(16) 次ノ二式ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

$$\sin x=a\cos y+b\sin y,$$
$$\cos x=a\sin y-b\cos y.$$

(17) $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$ ナレバ

$$m^2-n^2=4\sqrt{mn}.$$ 〔陸士〕

(18) $\sin\alpha=m\sin\beta$, $\tan\alpha=n\tan\beta$ ヨリ β ヲ消去セヨ。 〔商船〕

(19) 次ノ式ヨリ θ ヲ消去セヨ。

$$(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2=(x\cos\theta-y\sin\theta)^2=a^2.$$

第二章

二角ノ和及差ノ三角函數

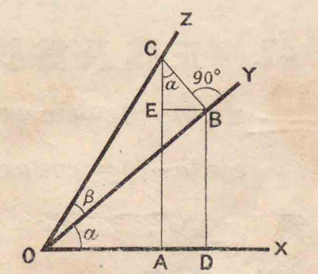
46. 正弦及餘弦ノ加法定理。

α, β ヲ任意ノ二角トセバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

證明。 二角ヲ XOY, YOZ トシ之ヲ α, β ニテ表サバ其和 XOZ ハ $\alpha+\beta$ ナリ。

今 XOZ<90° ト假定シ OZ 中ノ任意ノ點 C ヨリ OX, OY ニ垂線 CA, CB ヲ引キ, 次ニ B ヨリ OX, CA ニ垂線 BD, BE ヲ引ケバ



角 $BCE=BOD=\alpha$.

又 $OC=1$ トスレバ

$$AC=\sin(\alpha+\beta),\quad BC=\sin\beta,\quad OB=\cos\beta,$$

故ニ $EC=BC\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta,$

及 $AE=DB=OB\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta,$

然ルニ $AC = AE + EC,$

故ニ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

又 $OA = \cos(\alpha+\beta), \quad BC = \sin\beta, \quad OB = \cos\beta,$

而シテ $OD = OB\cos\alpha = \cos\alpha\cos\beta,$

$AD = EB = BC\sin\alpha = \sin\alpha\sin\beta,$

然ルニ $OA = OD - AD,$

故ニ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$

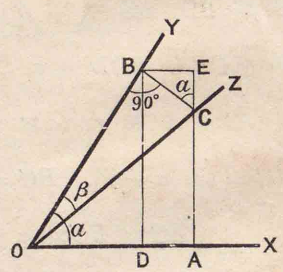
[例] $\cos A = \dfrac{40}{41}, \cos B = \dfrac{60}{61}$ ニシテ A, B ヲ第一象限ノ角トスレバ

$$\sin(A+B) = \frac{9}{41}\cdot\frac{60}{61} + \frac{40}{41}\cdot\frac{11}{61} = \frac{980}{2501}.$$

47. 正弦及餘弦ノ減法定理。

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

證明。 OZ ヲ OX ト OY トノ間ニ在ル如クスレバ角 XOZ ハ $\alpha-\beta$ ナリ。而シテ前節ト同樣ノ作圖ヲ爲セバ



$AC = \sin(\alpha-\beta), \quad BC = \sin\beta, \quad OB = \cos\beta,$

故ニ $EC = BC\cos\alpha = \cos\alpha\sin\beta,$

$AE = DB = OB\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta,$

然ルニ $AC = AE - EC.$

故ニ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$

同樣ニ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

系。 $\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta) = \sqrt{2}\cos(45^\circ-\theta) = \cos\theta + \sin\theta.$

$\sqrt{2}\{\sin 45\cos\theta + \sin\theta\cos 45^\circ\} = \sqrt{2}\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\}$

$\sqrt{2}\sin(45^\circ-\theta) = \sqrt{2}\cos(45^\circ+\theta) = \cos\theta - \sin\theta.$

注意一。 加法定理及減法定理ハ又**基本公式**ト稱シ極メテ重要ナルモノナリ。

注意二。 本節及前節ノ證明ニ於テハ $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ ヲ何レモ 90° ヨリ小ナル正角ト假定セリ，然レドモ角ノ大サ及正負ノ如何ニ拘ラズ上ノ定理ハ成立ス。但其證明ハ稍困難ナルヲ以テ之ヲ略ス。

注意三。 加法定理ニ於テ β ヲ $-\beta$ ニ變ズルトキハ之ヨリ減法定理ヲ誘導スルコトヲ得ベシ。

注意四。 $\sin(\alpha+\beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta,$

$\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta.$

48. 正切ノ加法定理。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

證明。公式(12)ニ由テ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

右邊ノ分母子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ ニテ除スベシ。

又公式(13)ニ由テ

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

是レ正切ノ減法定理ナリ。

系一。 $\tan(45^\circ\pm\theta)=\dfrac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta}.$

$\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cot b-1}{\cot b+\cot a}$

系二。 $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}.$

$\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cot b+1}{\cot b-\cot a}$

49. 15°及75°ノ三角函數。

公式(13)ニ於テ $\alpha=45^\circ,\beta=30^\circ$ トセバ

$$\sin15^\circ=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12$$

$$=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}=\cos75^\circ.$$

同様ニ $\cos15^\circ=\sin75^\circ=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}.$

又 $\tan15^\circ=\cot75^\circ=2-\sqrt3.$

他ノ函數モ亦容易ニ求ムルヲ得。

50. 二倍角ノ三角函數。

公式(12)ニ於テ $\beta=\alpha$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &=1-2\sin^2\alpha\\ &=2\cos^2\alpha-1\\ \text{又(14)ヨリ}\quad\tan2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(16)$$

系。 $\sin A=2\sin\dfrac A2\cos\dfrac A2$

$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\cos A=1-2\sin^2\dfrac A2=2\cos^2\dfrac A2-1.$

51. 半角ノ三角函數。

$$\left.\begin{aligned}\text{前節ヨリ}\quad\sin\frac12A&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\\ \cos\frac12A&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\\ \text{又}\quad\tan\frac12A&=\frac{1-\cos A}{\sin A}\\ \tan\frac12A&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

系。 $\sin 22^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

$\cos 22^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

$\tan 22^\circ 30' = \sqrt{2}-1.$ 〔海機〕

52. 三角ノ和及三倍角ノ三角函數。

$\sin(A+B+C) = \sin(\overline{A+B}+C)$

$= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C,$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad & \sin(A+B+C) \\
&= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C \\
&\quad + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C. \\
\text{同様ニ}\quad & \cos(A+B+C) \\
&= \cos A\cos B\cos C - \cos A\sin B\sin C \\
&\quad - \sin A\cos B\sin C - \sin A\sin B\cos C. \\
& \tan(A+B+C) \\
&= \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}
\end{aligned}\right\} \cdots (18)$$

次ニ上ノ三式ニ於テ $A=B=C$ トスレバ

$$\left.\begin{aligned}
\sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\
\cos 3A &= 4\cos^3 A - 3\cos A \\
\tan 3A &= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (19)$$

系。 $\sin^3 A = \frac{1}{4}(3\sin A - \sin 3A),$

$\cos^3 A = \frac{1}{4}(3\cos A + \cos 3A).$

53. 18°, 36°, 72° ノ三角函數。

$\alpha = 18^\circ$ トセバ $2\alpha + 3\alpha = 5\alpha = 90^\circ,$

$\therefore\ 2\alpha = 90^\circ - 3\alpha,$

$\therefore\ \sin 2\alpha = \cos 3\alpha,$

故ニ　$2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$

今 $\cos\alpha > 0$ ナル故之ヲ以テ兩邊ヲ割レバ

$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3 = 4(1-\sin\alpha) - 3$

ヲ得,因テ $\sin\alpha = x$ トスレバ

$2x = 4(1-x^2) - 3,$

$\therefore\ 4x^2 + 2x - 1 = 0,$

$\therefore\ x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$

負値ハ題意ニ適セズ,故ニ正値ヲ取レバ

$x = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ.$

$\therefore\ \cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = \frac{10+2\sqrt{5}}{16},$

$\therefore\ \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \sin 72^\circ.$

他ノ函數モ亦之ヨリ求メ得ベシ。

系。　$\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$,　〔陸士〕

$\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$.

問　題　9.

(1)　A 及 B ハ共ニ第一象限ノ角ニシテ $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$ ナリ。$A+B$ ナル角ノ正弦及餘弦ヲ求メヨ。　〔海兵〕

A, B ニ制限ナキトキハ如何。

(2)　$\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\tan(\alpha+\beta)$ ノ値如何,但 α, β ハ何レモ直角ヨリ小ナル正角トス。

〔海機〕

次ノ各式ヲ證明セヨ **(3)**–**(26)**。

(3)　$\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$.

(4)　$\cos(60^\circ+A)+\cos(60^\circ-A) = \cos A$.

(5)　$\cos(60^\circ-A)-\cos(60^\circ+A) = \sqrt{3}\sin A$.

(6)　$\frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ = \sin 70^\circ$.　〔海兵〕

(7)　$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$= (\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$.　〔海兵〕

(8)　$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$.

(9)　$\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$.

(10)　$\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ) = -\frac{\cos 2\alpha}{2}$.　〔海機〕

(11)　$\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha) = 1$.　〔高等〕

(12)　[I] $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$.　[2]　$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$.

〔海兵・商船・五高・千醫・長商〕

(13)　[I]　$\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2$.　〔陸士・金醫〕

[2]　$\frac{\sin 3A}{\sin A} + \frac{\cos 3A}{\cos A} = 4\cos 2A$.

(14)　$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$.　〔盛農〕

(15)　$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$.　〔長醫〕

(16)　$\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A) = 2\tan 2A$.　〔商船〕

(17)　$\cos^6\theta+\sin^6\theta = 1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta$.　〔海兵〕

(18)　[I]　$\operatorname{cosec} 2\theta + \cot 2\theta = \cot\theta$.　〔長商〕

[2]　$\operatorname{cosec}\alpha - \cot\alpha = \tan\frac{\alpha}{2}$.　〔長商〕

(19)　[I]　$\tan A + \cot A = 2\operatorname{cosec} 2A$.

〔陸士・大工・農大〕

[2] $\cot A-\tan A=2\cot 2A.$ 〔陸士・東師〕

(20) $\cot A-8\cot 8A=\tan A+2\tan 2A+4\tan 4A.$

(21) $\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}=\tan 2A+\sec 2A.$ 〔農大〕

(22) $\dfrac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A}=\tan^2(A+45°).$ 〔商船〕

(23) $4\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\sin 3\alpha.$ 〔海兵〕

(24) $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{1-2\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}.$

〔札農〕

(25) $\tan 50°+\cot 50°=2\sec 10°.$ 〔專門〕

(26) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}.$ 〔陸士〕

(27) 正切ガ夫々$\sqrt{7}+\sqrt{6}$, $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ナル二鋭角ノ和ヲ求メヨ。 〔高等〕

(28) $\cos 315°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ヲ知リテ$157°.5$ノ正弦及餘弦ヲ求メヨ。 〔海兵〕

(29) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ヲ知リテ$\cos\theta$, $\tan\theta$, $\sin 2\theta$及$\cos\dfrac{\theta}{2}$ヲ求メヨ。 〔海兵〕

(30) $\tan\theta=\dfrac{2ab}{a-b}$ナルトキ$\sin 2\theta$ノ値ヲ求メヨ。

〔熊工〕

(31) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ナラバ$\sin 2\theta$及$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ノ値如何。 〔海機〕

(32) $A+B+C=180°$ナルトキハ

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$ 〔陸士〕

(33) $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ナルトキハ

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\frac{\beta}{2}.$$ 〔名工〕

(34) $\tan B=\dfrac{2\sin A\sin C}{\sin(A+C)}$ナラバ$\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ハ等差級數ヲ爲ス。 〔仙醫〕

(35) 矩形ノ相隣レル二邊ガm寸及n寸ナルトキハ此矩形ノ二ツノ對角線ノ交角ノ正切ハ如何。

〔海機〕

(36) $\tan\alpha$, $\tan\beta$ヲ二次方程式$x^2+6x+7=0$ノ二根トセバ$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ナルコトヲ證セヨ。

〔海兵〕

第三章

加法定理及減法定理ノ變形

54. 公式(12),(13)ニ加減ヲ施セバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)&=2\sin\alpha\cos\beta\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)&=2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots(20)$$

上ノ公式ハ左右兩邊ヲ交換シテ正弦又ハ餘弦ノ積ヲ和又ハ差ノ形ニ變化スルニ用ヒラル。

今公式(20)ニ於テ $\alpha+\beta=x,\ \alpha-\beta=y$ トスレバ

$$\alpha=\frac{1}{2}(x+y),\qquad \beta=\frac{1}{2}(x-y).$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}\sin x+\sin y&=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)\\ \sin x-\sin y&=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)\\ \cos x+\cos y&=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)\\ \cos y-\cos x&=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y)\end{aligned}\right\}(21)$$

是等ノ四公式ハ正弦或ハ餘弦ノ和或ハ差ヲ積ノ形ニ變化スルニ必要ナルモノナリ。

[例一] $$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\tan\frac{1}{2}(x-y)}{\tan\frac{1}{2}(x+y)}.$$

[例二] $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$$=4\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

證明。 左邊 $=\{\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha\}+\{\cos\beta+\cos\gamma\}$

$$=2\cos\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

$$+2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

$$=2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\left[\cos\frac{1}{2}(2\alpha+\beta+\gamma)+\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\right]$$

$$=2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\times2\cos\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta)\cos\frac{1}{4}(2\gamma+2\alpha)$$

$$=4\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha).$$

[例三] $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

問題 10.

次式ヲ證明セヨ (1)—(18)。

(1) $\sin 5A+\sin A=2\sin 3A\cos 2A.$

(2) $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}=\tan\alpha.$ 〔海兵〕

(3) $\dfrac{\sin A+\sin 3A}{\cos A-\cos 3A}=\cot A.$ 〔陸士〕

(4) $\sin 80^\circ-\sin 40^\circ=\sin 20^\circ.$

(5) $2\sin 9\theta\cos 5\theta=\sin 14\theta+\sin 4\theta.$

(6) $2\sin 31^\circ 30'\sin 13^\circ 30'=\cos 18^\circ-\cos 45^\circ.$

(7) [1] $\sin 95^\circ-\sin 25^\circ-\sin 35^\circ=0.$ 〔海兵〕

[2] $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ-\cos 20^\circ=0.$ 〔農大〕

(8) $\cos^2 2A-\cos^2 3A=\sin 5A\sin A.$

(9) $\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta=\sin 4\theta\sin 5\theta.$ 〔商船〕

(10) $\sin A+\sin(120^\circ+A)-\sin(120^\circ-A)=0.$ 〔千醫〕

(11) $\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)+\cos A=0.$ 〔商船〕

(12) $\sin A\cos A+\sin B\cos B=\sin(A+B)\cos(A-B).$

(13) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B).$ 〔七高〕

(14) $\sin 36^\circ\sin 30^\circ=\sin^2 33^\circ-\sin^2 3^\circ.$ 〔大工〕

(15) $1+\cos 6\theta-\cos 10\theta-\cos 4\theta$

$=4\sin 2\theta\cos 3\theta\sin 5\theta.$ 〔岡醫〕

(16) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha=\dfrac{\cos\alpha-\cos 7\alpha}{2\sin\alpha}.$ 〔陸經〕

(17) $\sin^2\dfrac{A+B}{2}\cos^2\dfrac{A-B}{2}+\cos^2\dfrac{A+B}{2}\sin^2\dfrac{A-B}{2}$

$=1-\dfrac{1}{2}\cos^2 A-\dfrac{1}{2}\cos^2 B.$ 〔東商〕

(18) $\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A=\sin 3A\cos 2A.$〔陸士〕

(19) $\sin A+\cos B=2\cos\left(45^\circ-\dfrac{A-B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\dfrac{A+B}{2}\right)$

次ノ式ヲ積ノ形ニ變セヨ。

(20) [1] $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x.$ 〔高等〕

[2] $\sin 3\theta+\sin 2\theta+2\sin\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}.$ 〔岡醫〕

(21) $\alpha=24^\circ$ ナルトキ $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$ ノ値ヲ求メヨ。 〔新醫〕

(22) 次ノ二式ヨリ θ ヲ消去セヨ。 〔陸士〕

$\sin\theta-\cos\theta=m,\quad \sin 2\theta=n.$

(23) 次ノ二式ノ値ヲ求メヨ。

[1] $\cos 138^\circ+\cos 102^\circ+\cos 18^\circ.$ 〔陸士〕

[2] $\sin 20^\circ\sin 35^\circ\sin 45^\circ+\cos 25^\circ\cos 45^\circ\cos 80^\circ.$

次式ヲ證セヨ(24)—(27)。

(24) $\sin(B-C)+\sin(C-A)+\sin(A-B)$

$=-4\sin\dfrac{1}{2}(B-C)\sin\dfrac{1}{2}(A-B)\sin\dfrac{1}{2}(C-A).$

(25) $\cos(A+B+C)+\cos(B+C-A)+\cos(C+A-B)$

$+\cos(A+B-C)=4\cos A\cos B\cos C.$ 〔醫專〕

(26) $A+B+C=180^\circ$ ナルトキハ

$$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

〔鹿農〕

61

(27) $a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$

ナルトキハ

$$\frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}.$$

eg $\log 120$

$\log ab=\log a+\log b$

$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$

$\log a^n=n\log a$

$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a$

第四篇

對數

第一章

對數ノ定理

55. 定義。 或數Nノ他ノ數aニ關スル對數トハNヲ得ル爲ニ要スルaノ冪指數ナリ。aヲ對數ノ底ト云フ。

故ニ $a^x=N$ ナルトキ底aニ關スルNノ對數ハxナリ,之ヲ $x=\log_a N$ ト記ス。

例ヘバ $2^5=32$ ナル故 $5=\log_2 32.$

又 $125^{\frac{1}{3}}=5$ ナル故 $\log_{125}5=\frac{1}{3}=0.333\ldots$

底aハ正ニシテNモ亦正ナリ,然レドモxハ正或ハ負ナリ。Nヲ對數ノ眞數ト云フ。

相等シキ二數ノ對數ハ相等シク,大ナル數ノ對數ハ小ナル數ノ對數ヨリ大ナリ。逆モ亦眞ナリ。

56. 對數ノ定理。

I. 底ノ對數ハ1ナリ。

證明。 $a^1=a$ ナル故 $\log_a a=1$.

II. 1ノ對數ハ零ナリ。

證明。 $a^0=1$ ナル故 $\log_a 1=0$.

III. 積ノ對數ハ其因數ノ對數ノ和ニ等シ。

證明。 $x=\log_a M,\quad y=\log_a N$ トスレバ

$$M=a^x,\quad N=a^y,$$

$$\therefore\quad M.N=a^{x+y},$$

故ニ $$\log_a(M.N)=x+y=\log_a M+\log_a N.$$

同様ニ $$\log_a(M.N.P)=\log_a M+\log_a N+\log_a P.$$

IV. 商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ。

證明。 $x=\log_a M,\quad y=\log_a N$ トスレバ

$$M=a^x,\quad N=a^y,$$

$$\therefore\quad \frac{M}{N}=a^{x-y}.$$

故ニ $$\log_a\frac{M}{N}=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

V. 或數ノ乘冪ノ對數ハ其數ノ對數ニ冪指數ヲ乘ジタル積ニ等シ。

證明。 $x=\log_a M$ トスレバ $M=a^x$,

$$\therefore\quad M^n=a^{nx}.$$

故ニ $$\log_a M^n=nx=n\log_a M.$$

VI. 或數ノ乘根ノ對數ハ其數ノ對數ヲ根指數ニテ除シタル商ニ等シ。

證明。 $x=\log_a M$ トスレバ $M=a^x$,

$$\therefore\quad \sqrt[n]{M}=a^{\frac{x}{n}},$$

故ニ $$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{x}{n}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

問 題 11.

次ノ式ノ値ヲ求メヨ(1)—(3)。

(1) $\log_3 243$.　(2) $\log_8 128$.　(3) $\log_{2\sqrt{2}} 8$.

(4) $\log_m a,\ \log_m b,\ \log_m c$ ヲ以テ次ノ各式ヲ表セ。

[1] $\log_m(a^7b^5c^3)$.　[2] $\log_m\left(\frac{\sqrt{a}}{b^3c^2}\right)$.　[3] $\log_m\left(\frac{a^2b^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}$.

第二章

常用對數

57. 定義。 常用對數トハ10ヲ底トスル對數ナリ。

應用數學ニ於テハ專ラ之ヲ用フ。通例 $\log_{10}N$ ヲ單ニ $\log N$ ト記ス。本章以後ハ常用對數ヲ單ニ對數ト云フ。

58. 定理。 或數ノ對數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數トノ差ハ整數ナリ。

證明。$10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000, 10^4=10000$ 等ナル故

$$\log 10=1,$$
$$\log 100=2,$$
$$\log 1000=3,$$
$$\log 10000=4$$

等ナリ。

一般ニ $\qquad \log 10^n=n,$

$$\therefore \quad \log(N\times 10^n)=\log N+\log 10^n$$
$$=\log N+n.$$

又 $\qquad \log(N\div 10^n)=\log N-n.$

注意。此定理ニヨリ或數ノ對數ヲ知ラバ,唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數ヲ知ルヲ得。

例ヘバ $\log 1{\cdot}2$ ヲ知ラバ

$$\log 12=\log 1{\cdot}2+1,$$
$$\log 0{\cdot}12=\log 1{\cdot}2-1,$$
$$\log 120=\log 1{\cdot}2+2.$$

59. 對數ニ於テ10ノ冪ニ相當セザル數ノ對數ハ一般ニ不盡數ナレドモ,小數若干位ヲ算出シテ實用ニ供ス。

對數ノ目的ハ計算ヲ簡便ナラシムルニ在リ。即對數ヲ用フルトキハ加法,減法ヲ以テ乘法,除法ニ代ヘ,乘法,除法ヲ以テ冪法,開法ニ代フルヲ得。

連續整數ノ對數ヲ竝列セル表ヲ對數表ト云フ。

卷末ノ對數表ニヨリ $\log 2=0{\cdot}30103,$

從テ $\log 20 = 1{\cdot}30103,$

$\log 200 = 2{\cdot}30103,$

$\log 2000 = 3{\cdot}30103.$

故ニ對數ハ整數部及小數部ヨリ成ル。

對數ノ整數部ヲ指標ト云ヒ,小數部ヲ假數ト云フ。

60. 指標法則。

例ヘバ $\log 356{\cdot}72$ ノ指標ヲ求メンニ

$$1000 > 356{\cdot}72 > 100,$$

$$\therefore\quad 3 > \log 356{\cdot}72 > 2.$$

故ニ $\log 356{\cdot}72$ ハ 2 ト小數トノ和ニ等シ,依テ其指標ハ 2 ナリ。故ニ次ノ法則ヲ立ツ。

法則[1]　1ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ其整數部ノ桁數ヨリ1ダケ小ナリ。

小數ハ 1 ヨリ小ナル故其對數ハ 0 ヨリ小ニシテ負數ナリ,然レドモ不便ヲ避ケンガ爲メ,指標ノミヲ負トシ假數ハ常ニ正トス。

例ヘバ $0{\cdot}1 = \dfrac{1}{10} = 10^{-1},$

$$0{\cdot}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2},$$

$$0{\cdot}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

等ナル故 $\log 0{\cdot}1 = -1,$

$\log 0{\cdot}01 = -2,$

$\log 0{\cdot}001 = -3$

等ナリ。故ニ $\log 0{\cdot}2 = \log(0{\cdot}1 \times 2)$

$= \log 0{\cdot}1 + \log 2$

$= -1 + 0{\cdot}30103$

之ヲ $\log 0{\cdot}2 = \bar{1}{\cdot}30103$

ト記ス。

同樣ニ $\log 0{\cdot}02 = \bar{2}{\cdot}30103,\ \log 0{\cdot}002 = \bar{3}{\cdot}30103$

等ナリ。故ニ次ノ法則ヲ立ツ。

法則[2]　小數ノ對數ノ指標ハ負數ニシテ其絶對値ハ小數點ノ右ニアル零ノ數ヨリ1ダケ大ナリ。

上ノ二法則ニ由テ容易ニ指標ヲ補充シ得ル故,

對數表ニハ假數ノ數字ノミヲ記入ス。

指標ハ正又ハ負ナリト雖,假數ハ常ニ正ナリ。

61. 三角函數ノ對數。

三角函數ハ1ヨリ小ナルモノ多キガ故ニ其對數ハ負ノ指標ヲ有スルモノ多シ。

例ヘバ $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$$\therefore \log \sin 30^\circ = \log \frac{1}{2}$$
$$= \log 1 - \log 2$$
$$= 0 - 0{\cdot}30103$$
$$= -1 + 1 - 0{\cdot}30103$$
$$= \bar{1}{\cdot}69897.$$

負ノ指標ハ印刷ニ不便ナルヲ以テ故ラニ10ヲ加フルコトアリ,之ヲ表對數ト云ヒ,之ヲ示スニLヲ以テス。

例ヘバ $L \sin 30^\circ = 10 + \log \sin 30^\circ = 9.69897.$

62. 對數算出ノ例。

玆ニ既知ノ對數ヨリ他ノ對數ヲ算出スル方法ヲ說カントス。

[例一] $\log 7 = 0{\cdot}84510$, $\log 11 = 1{\cdot}04139$ ヲ知リテ $\log \frac{1331}{49}$ ヲ求メヨ。

解。
$$\log \frac{1331}{49} = \log 11^3 - \log 7^2$$
$$= 3 \log 11 - 2 \log 7$$
$$= 3 \times 1{\cdot}04139 - 2 \times 0{\cdot}84510$$
$$= 3{\cdot}12417 - 1{\cdot}69020$$
$$= 1{\cdot}43397.$$

[例二] $\log 5 = 0{\cdot}69897$ ヲ知リテ $\log 25$, $\log \sqrt{5}$, $\log \sqrt[3]{0.05}$ ヲ求メヨ。

解。
$$\log 25 = 2 \log 5 = 1{\cdot}39794,$$
$$\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = 0{\cdot}34949,$$

又
$$\log 0{\cdot}05 = \log 5 - 2$$
$$= \bar{2}{\cdot}69897.$$
$$\therefore \log \sqrt[3]{0{\cdot}05} = \frac{1}{3} \log 0{\cdot}05$$
$$= \frac{1}{3} \times \bar{2}{\cdot}69897$$
$$= \frac{1}{3}(\bar{3} + 1{\cdot}69897)$$
$$= \bar{1}{\cdot}56632.$$

63. 對數表ノ用法。

[例一] $\log 175{\cdot}4$ ヲ求メヨ。

解。指標ハ $3-1=2$ ニシテ假數ハ對數表ニヨリ 24403 ナルヲ知ル。故ニ

$$\log 175{\cdot}4 = 2{\cdot}24403.\quad 答$$

[例二] $\log x = \bar{3}{\cdot}15351$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解。指標ガ $\bar{3}$ ナル故,x ハ小數點ノ右ニ二ツノ零ヲ有スル數ナルベシ。對數表ヲ搜索シテ15351ニ對スル眞數 1424 ヲ得。故ニ

$$x = 0{\cdot}001424.\quad 答$$

64. 比例部分ノ法則。

五數字以上ノ數ノ對數ハ卷末對數表中ニ載セズ。之ヲ求ムルニハ次ノ法則ニヨル。

二數ノ微差ト之ニ對應スル對數ノ差トハ正比例ヲ爲ス。

三角函數ノ眞數(第 20 節例三)及三角函數ノ對數ニ於テモ同樣ノ法則アリ。

[例一] $\log 1912{\cdot}6$ ヲ求メヨ。

解。對數表ニヨリテ

$$\log 1912 = 3{\cdot}28149,$$
$$\log 1913 = 3{\cdot}28171.$$

故ニ $\log 1913 - \log 1912 = 0{\cdot}00022$ (之ヲ表差ト云フ)。

依テ比例式*

$$1 : 0{\cdot}6 = 0{\cdot}00022 : x$$

ヨリ $$x = 0{\cdot}00022 \times 0.6 = 0{\cdot}00013$$

ヲ得,之ヲ $\log 1912$ ニ加フレバ

$$\log 1912{\cdot}6 = 3{\cdot}28162.\quad 答$$

[例二] $\log x = 1{\cdot}23108$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解。指標ガ 1 ナル故 x ノ整數部ハ二桁ナリ。今假數 23108 ヲ挾メル所ヲ表中ニ求ムレバ

$$\log 17{\cdot}02 = 1{\cdot}23096,$$
$$\log 17{\cdot}03 = 1{\cdot}23121.$$

故ニ此處ニ於ケル表差ハ $0{\cdot}00025$ ナリ,而シテ

$$\log x - \log 17{\cdot}02 = 0{\cdot}00012.$$

故ニ比例式

$$0{\cdot}00025 : 0{\cdot}00012 = 0{\cdot}01 : d$$

ヨリ $$d = 0{\cdot}01 \times \frac{12}{25} = 0{\cdot}0048$$

* 通常ハ比例ヲ用ヒズシテ表中ノ比例部分ト記セル所ヲ用フ。

ヲ得,之ヲ 17·02 ニ加フレバ

$$x = 17{\cdot}0248.\quad \text{答}$$

[例三] $\mathrm{L}\cos 17°\,31'\,40''$ ヲ求メヨ。

解。 三角函數ノ對數表ニヨリテ

$$\mathrm{L}\cos 17°\,30' = 9{\cdot}97942,$$

$$\mathrm{L}\cos 17°\,40' = 9{\cdot}97902,$$

故ニ L cos ハ此處ニ於テ 10′ ニ付キ 0·00040 ダケ減小スルヲ見ル。故ニ 1′ 40″ ニ對スル差 x ハ比例式

$$10 : 1\frac{2}{3} = 0{\cdot}00040 : x$$

ヨリ $$x = 0{\cdot}00007$$

ナルヲ知ル。之ヲ $\mathrm{L}\cos 17°\,30'$ ヨリ引ケバ

$$\mathrm{L}\cos 17°\,31'\,40'' = 9{\cdot}97935.\quad \text{答}$$

注意。 餘弦,餘切,餘割ハ差ヲ引キ,正弦,正切,正割ハ之ヲ加フルヲ要ス(第 6 節參照)。

[例四] $\log\sin A = \bar{1}{\cdot}44881$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解。 對數表中 L sin ノ行ニ於テ 9·44881 ヲ挾メル所ヲ求ムレバ

$$\log\sin 16°\,10' = \bar{1}{\cdot}44472,$$

$$\log\sin 16°\,20' = \bar{1}{\cdot}44905.$$

故ニ此處ニ於ケル表差ハ 0·00433 ナリ。而シテ

$$\log\sin A - \log\sin 16°\,10' = 0{\cdot}00409,$$

故ニ比例式

$$433 : 409 = 10 : d$$

ヨリ $$d = 10 \times \frac{409}{433} = 9{\cdot}4,$$

故ニ $$A = 16°\,19'{\cdot}4.\quad \text{答}$$

問 題 12.

(1) 次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ。

$$\log(x^2 - 6x + 8) - \log(x - 4) = 2.$$

(2) 指數方程式 $a^x = b$ ヲ解ケ。

次ノ數ノ對數ヲ求メヨ (3)—(8)。

但 $\log 2 = 0{\cdot}30103$, $\log 3 = 0{\cdot}47712$ ヲ知レリトス。

(3) 1800. (4) $\sqrt{0{\cdot}000032}$. (5) $\dfrac{4}{9}$.

(6) 0·0375. (7) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

(8) cosec 45°, cos 30°, 5 tan 60°. 〔高等〕

(9) 45^{20} ニ於ケル數字ノ數如何。 〔海機〕

(10) $\log\cot 18°\,35'\,13''$ ヲ求メヨ。

(11) $\log x = 2{\cdot}14028$ ヨリ x ヲ求メヨ。

(12) 平地ニ直立セル長サ6尺ノ旗竿アリ,日中地上ニ5尺ノ影ヲ投ゼリト云フ。太陽ノ此時ニ於ケル仰角ハ何程ナルカ。

但 $\log 2 = 0{\cdot}30103,\quad \log 3 = 0{\cdot}47712.$

$\log\tan 50^\circ 11' = 0{\cdot}07901,\quad \log\tan 50^\circ 12' = 0{\cdot}07927.$ 〔金醫〕

(13) 立方體ノ對角線ガ之ト交ハル一ツノ稜ト為ス角ノ正切ヲ求メヨ。又此結果ヨリ其角ヲ分位マデ求メヨ。

但 $\log 2 = 0{\cdot}3010,\quad \log\tan 54^\circ 40' = 0{\cdot}1494,$

$\log\tan 54^\circ 50' = 0{\cdot}1521.$ 〔海兵〕

(14) $3\operatorname{cosec}^2\theta - 8\cot\theta + 2 = 0$ ニ適合スル鋭角 θ ノ値ヲ見出セ。

但 $\log 6 = 0{\cdot}77815,\quad \log\tan 30^\circ 57' = \bar{1}{\cdot}77791,$

$\log\tan 30^\circ 58' = \bar{1}{\cdot}77820.$ 〔專門〕

(15) 次ノ各式ヲ對數計算ニ適スル形ニ直セ。

[1] $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ.$ 〔海兵〕

[2] $m\cos\alpha + n\sin\alpha.$

[3] $a^2 + b^2.$

第五篇

斜角三角形

第一章

斜角三角形ノ性質

65. 角ノ關係。

任意ノ三角形ヲABCトスレバ次ノ等式ノ成立ツヲ知ルベシ。

$$\left.\begin{aligned}
& A+B+C=180^\circ \\
\text{從テ}\quad & \tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B+\tfrac{1}{2}C=90^\circ \\
\therefore\quad & \sin A=\sin(B+C) \\
& \cos A=-\cos(B+C) \\
& \sin\tfrac{1}{2}A=\cos\tfrac{1}{2}(B+C) \\
& \cos\tfrac{1}{2}A=\sin\tfrac{1}{2}(B+C) \\
& \tan\tfrac{1}{2}A=\cot\tfrac{1}{2}(B+C)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

問 題 13.

三角形 ABC ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ。

(1) $\sin(A+B+C)=1+\cos(A+B+C).$

(2) $\sin 2(A+B)=-\sin 2C,\ \cos 2(A+B)=\cos 2C.$

(3) $\sin 3(A+B)=\sin 3C,\ \cos 3(A+B)=-\cos 3C.$

(4) $\cos A\cos B+\cos C=\sin A\sin B.$

(5) $\sin\frac{3}{2}(A+B)=-\cos\frac{3}{2}C,\ \cos\frac{3}{2}(A+B)=-\sin\frac{3}{2}C.$

(6) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

〔山商・東師〕

(7) $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

〔仙工・米工〕

(8) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

(9) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C.$

(10) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$

(11) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

(12) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

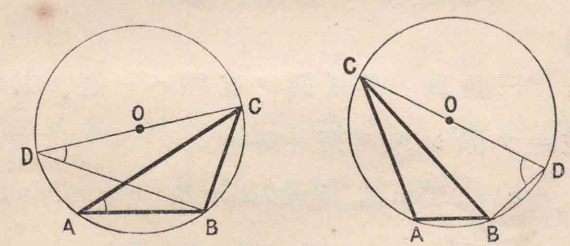
(13) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

〔京醫〕

(14) $\dfrac{\cos A}{\sin B\sin C}+\dfrac{\cos B}{\sin C\sin A}+\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}=2.$

66. 定理。 三角形ノ三邊ハ其對角ノ正弦ニ比例ス(**正弦法則**)。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\cdots\cdots\cdots(23)$$



證明。 C ヨリ外接圓ノ直徑 CD ヲ引ケバ

$A<90^\circ$ ナルトキ角 $D=A,$

$A>90^\circ$ ナルトキ角 $D=180^\circ-A.$

故ニ孰レノ場合ニ於テモ

$\sin D=\sin A.$

然ルニ $BC=CD\sin D.$

故ニ外接圓ノ半徑ヲRニテ表ストキハ

$$2R=\frac{a}{\sin A}.$$

同樣ニ $$2R=\frac{b}{\sin B},\quad 2R=\frac{c}{\sin C}.$$

又 $A=90^\circ$ナルトキハ

$$2R=\frac{a}{1}=\frac{a}{\sin A}.$$

故ニ總テノ場合ニ於テ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}. \quad = 2R$$

系。 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一邊ヲ其對角ノ正弦ニテ除シタル商ニ等シ。

又 $a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$

67. 定理。 三角形ノ各邊ハ他ノ二邊ノ各ト之ニ接スル角ノ餘弦トノ乘積ノ和ニ等シ(**第一餘弦法則**)。

$$\left.\begin{aligned} a&=c\cos B+b\cos C\\ b&=a\cos C+c\cos A\\ c&=b\cos A+a\cos B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

證明。 第一式ヲ證センニ

$$\begin{aligned} a&=2R\sin A=2R\sin(B+C)\\ &=2R(\sin B\cos C+\cos B\sin C)\\ &=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B\\ &=b\cos C+c\cos B.\end{aligned}$$

第二式,第三式ヲ得ルニハ文字ヲ輪換スベシ。

又此三式ハ直接ニ圖ニ由テ證明スルヲ得。

68. 定理。 三角形ノ各邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ此二邊ト其夾角ノ餘弦トノ乘積ノ二倍ヲ減ジタル差ニ等シ(**第二餘弦法則**)。

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(25)$$

證明。 公式(24)ノ第一式ニ$-a$ヲ乘ジ第二式ニbヲ乘ジ第三式ニcヲ乘ジテ其積ヲ加フレバ

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A,$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

文字ヲ輪換スレバ他ノ二式ヲ得。

又此三式ハ直接ニ圖ニ由テ證明スルヲ得。

系。
$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

69. 二邊ノ和ト第三邊トノ比。

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

證明。
$$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}$$
$$=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$
$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

其故ハ $\sin\frac{1}{2}(A+B)=\cos\frac{1}{2}C$

ナレバナリ。

70. 二邊ノ差ト第三邊トノ比。

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

前節ト同樣ニ證明スルヲ得。

71. 二邊ノ差ト和トノ比(正切法則)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

證明。
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$
$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$
$$=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

系。 $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C\cdots\cdots\cdots(30)$

72. 半角ノ正弦。

公式(17)及(26)ニ由テ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

三角形ノ周圍ノ半ヲ s トセバ

$$a+b+c=2s,$$

$$a+b-c=2(s-c),$$

$$a-b+c=2(s-b),$$

之ヲ上ノ式ニ代入セバ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \text{同様ニ}\quad &\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ &\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

73. 半角ノ餘弦。

前節ト同様ニ

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \text{同様ニ}\quad &\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ &\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

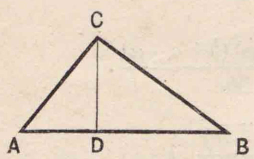
74. 半角ノ正切。

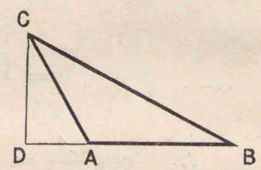
前二節ニ由テ

$$\left.\begin{aligned}&\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ &\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ &\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

注意。 三角形ノ角ノ半ハ鋭角ナル故公式(31), (32), (33)ノ根號ハ正ヲ取ルベキコト勿論ナリ。

75. 定理。三角形ノ面積ハ二邊ト其夾角ノ正弦トノ乘積ノ半ニ等シ。





證明。 △ABC ニ於テ CD ヲ高サトシ,面積ヲ $\varDelta$ ニテ表サバ

$$\varDelta=\frac{1}{2}\times AB\times CD$$

然ルニ $CD=b\sin A$, 又ハ $CD=b\sin(180^\circ-A)$,

故ニ何レノ場合ニ於テモ

同樣ニ

$$\left.\begin{aligned}\varDelta&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ \varDelta&=\frac{1}{2}ca\sin B\\ \varDelta&=\frac{1}{2}ab\sin C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

76. 三邊ヲ以テ面積ヲ表ス公式。

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

ナル故,公式(31)及(32)ニ由テ

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots(35)$$

ヲ得。故ニ(34)ニ由テ

$$\varDelta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\cdots(36)$$

之ヲ *Heron* ノ公式ト云フ。

問　題　14.

三角形 ABC ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ **(1)–(15)**。

(1) $\sin A+\sin B>\sin C.$ 〔陸士〕

(2) $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$ ナルトキハ $C=90^\circ.$

(3) $l\sin A+m\sin B:n\sin C=la+mb:nc.$

(4) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C).$ 〔商船〕

(5) $b\cos A-a\cos B=\dfrac{b^2-a^2}{c}.$ 〔商船〕

(6) $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}.$ 〔專門〕

(7) $\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}=\tan A.$ 〔商船.上靍〕

(8) $\dfrac{a^2}{b^2-c^2}=\dfrac{\sin(B+C)}{\sin(B-C)}$.　〔水產〕

(9) $a(\cos B\cos C+\cos A)=b(\cos C\cos A+\cos B)$

$=c(\cos A\cos B+\cos C)$.

(10) $A=2B$ ナルトキハ $a=2b\cos B$.　〔專門〕

(11) $a=2,\ b=\sqrt{2},\ c=\sqrt{3}-1$ ナルトキハ

$A=135°,\ B=30°,\ C=15°$.

(12) [1] $a\cos A=b\cos B$ ナレバ ABC ハ直角三角形ナルカ又ハ二等邊三角形ナリ。　〔海兵〕

[2] $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキモ亦然リ。

〔東商〕

(13) $b\cos A=a\cos B$ ナルトキハ $a=b$.

〔小商〕

(14) $a^2=b^2+bc+c^2$ ナルトキ A 角ノ大サ如何。

〔商船〕

(15) $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ ナルトキハ $B=C$.　〔陸士〕

(16) 二隣邊 a, b ニシテ夾角 θ ナル平行四邊形ノ兩對角線ノ長サハ次ノ如シ,之ヲ證セヨ。

$\sqrt{a^2+b^2\pm 2ab\cos\theta}$.　〔海機〕

(17) 三角形ノ三ツノ角ノ比ガ1:2:3ナルトキ三ツノ邊ノ長サノ比ハ如何。　〔千醫〕

次ノ關係ヲ證明セヨ(18)—(23)。

(18) $\operatorname{cosec}\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+b+c}{2a}$.　〔商船〕

(19) $s=b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}$.

(20) $a\sec A-b\sec B=\sec C(b\sec A-a\sec B)$.

(21) $\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$.　〔陸士〕

(22) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$.

〔商船〕

(23) $\dfrac{a}{1-\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}}=\dfrac{b}{1-\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}}$

$=\dfrac{c}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}}$.　〔商船〕

(24) $A=2C$ ナルトキハ $a^2=bc+c^2$　〔新醫〕

(25) 三角形ノ三邊ヲ $m^2+m+1,\ 2m+1,\ m^2-1$ トスレバ最大角ハ $120°$ ナルコトヲ證セヨ。〔高等〕

(26) 三角形ノ二邊ヲ $x+y\cos A,\quad y+x\cos A$ トシ其間ノ角ヲ A, 第三邊ヲ a トスレバ

$a=\sin A(x^2+y^2+2xy\cos A)^{\frac{1}{2}}$　〔大工〕

第三學期

第二章

斜角三角形ノ解法

77. 斜角三角形ニ於テ其六部分ノ中,三部分ヲ知ラバ他ノ三部分ヲ算出スルヲ得。但三角ノ大サヲ知リテ三邊ノ長サヲ算出スルヲ得ズ。此解法ヲ四ツノ場合ニ分ツ。

78. 第一ノ場合。 二角ト其頂點ノ間ノ邊トヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知　$a,\ B,\ C.$　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

未知　$A,\ b,\ c.$

公式　$A=180^\circ-(B+C),$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},\quad c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

解法。 $A+B+C=180^\circ,\ \therefore\ A=180^\circ-(B+C).$

次ニ正弦法則ニ由テ b 及 c ノ式ヲ得。

注意一。 計算ニハ對數表ヲ用フル故次ノ如クス。

$$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A,$$

$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A.$$

[例]　$a=142{\cdot}46,\quad B=47^\circ 35',\quad C=61^\circ 43'$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

解。A ノ計算

$$\begin{aligned}180^\circ&=179^\circ\,60'\\ B&=\ \ 47^\circ\,35'\\ C&=\ \ 61^\circ\,43'\\ \therefore\ A&=\ \ 70^\circ\,42'.\end{aligned}$$

b ノ計算

$$\begin{aligned}\log a&=2{\cdot}15369\\ \log\sin B&=\bar{1}{\cdot}86821\\ \log\sin A&=\bar{1}{\cdot}97488\\ \therefore\ \log b&=2{\cdot}04702\\ \therefore\ b&=111{\cdot}43.\end{aligned}$$

c ノ計算

$$\begin{aligned}\log a&=2{\cdot}15369\\ \log\sin C&=\bar{1}{\cdot}94479\\ \log\sin A&=\bar{1}{\cdot}97488\\ \therefore\ \log c&=2{\cdot}12360\\ \therefore\ c&=132{\cdot}92.\end{aligned}$$

注意二。 二角及其一ニ對スル邊ヲ知レル場合ハ此第一ノ場合ニ歸著ス。

79. 第二ノ場合。二邊ト其夾角トヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\tan\frac{A+B}{2}$

既知　$a, b, C.$

未知　$A, B, c.$

公式　$\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C,$

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C,$$

$$c = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}.$$

解法。 $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{C}{2}$ ナル故 $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ求メ得レバ A, B ヲ知リ得ベシ。然ルニ公式(30)ヨリ $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ求ムルヲ得。次ニ c ヲ求ムル式ハ公式(27)ヨリ得ラル。

注意一。 $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$

ヨリ c ヲ求メ得レドモ上ノ公式ヲ用フルヲ良トス。又(28)ヨリモ c ヲ得ベシ.

$\log\tan\frac{A-B}{2} = \log(a-b) - \log(a+b) + \log\tan\frac{A+B}{2}$

$C = \frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$　　$C = \frac{a\sin C}{\sin A}$

注意二。 上ノ解法ニ於テハ $a>b$ ナリトセリ, $a<b$ ナルトキモ亦之ト同樣ナリ。

80. 第三ノ場合。二邊ト其一對角トヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知　a, b, A

未知　$B, C, c.$

公式　$\sin B = \frac{b\sin A}{a},$

$$C = 180^\circ - (A+B),$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

解法。 正弦法則ヨリ直ニ $\sin B$ ノ式ヲ得,從テ他ノ公式ヲ得。

吟味。 本題ハ數多ノ場合ヲ吟味スルヲ要ス。是レ正弦ニ依リテ角ノ値ヲ決定スルニ當リ鋭角ト其補角ナル鈍角トヲ得レバナリ。

I. $A>90^\circ.$

(1) $a<b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ $A<B$ 或ハ $A=B$ ニシテ二角 A, B ガ共ニ鈍角ナル故本題ハ不能ナリ。

(2) $a>b$ ナルトキハ $A>B$ ナル故 B ノ値トシテ $\frac{b\sin A}{a}$ ヲ正弦トスル鋭角ノミヲ取ルベシ,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

II. $A=90^\circ$.

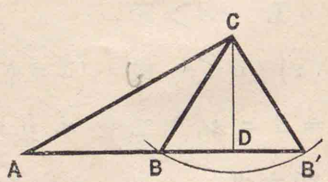
(1) $a<b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ $A<B$ 或ハ $A=B$ ニシテ二角 A, B ノ中一ツガ直角ニシテ他ガ鈍角ナルカ或ハ二角共ニ直角ナリ。故ニ本題ハ不能ナリ。

(2) $a>b$ ナルトキハ $A>B$ ナル故 B ノ値トシテ $\frac{b\sin A}{a}$ ヲ正弦トスル鋭角ノミヲ取ルベシ,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

III. $A<90^\circ$.

(1) $a>b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ $A>B$ 或ハ $A=B$ ナル故 B ノ値トシテ $\frac{b\sin A}{a}$ ヲ正弦トスル鋭角ノミヲ取ルベシ,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

(2) $a<b$ ナルトキハ $A<B$ ナル故 B ハ鋭角トモ又鈍角トモナルヲ得。今又三ツノ場合ヲ分チテ詳論セン。



角 CAD ヲ既知角 A トシ AC ヲ b ニ等シクセバ垂線 CD ハ BC 即 a ヨリ小ナルコトアリ,或ハ之ニ等シキコトアリ。然レドモ之ヨリ大ナルコト能ハズ。然ルニ

$$CD=b\sin A.$$

(i) $b\sin A<a$ ノ場合。

此時ニハ B ノ値トシテ鋭角及其補角ナル鈍角ヲ採ルヲ得。故ニ解答ハ二ツアリ。從テ C 及 c ノ値モ亦夫々二ツアリ。

此場合ヲ**兩意ノ場合**ト云フ。

(ii) $b\sin A=a$ ノ場合。

此時ニハ B ノ値ハ直角ナリ,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

(iii) $b\sin A>a$ ノ場合。

此時ニハ $\frac{b\sin A}{a}>1$ ナル故 B ノ値ナシ,故ニ問題ハ不能ナリ。

81. 第四ノ場合。三邊ヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知 $a, b, c.$

未知 $A, B, C.$

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}$

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

公式 $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

解法。公式(33)ヲ其儘用フルモノトス。

注意一。公式(26)卽

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

ヨリAヲ求メ得レドモ此式ハ對數計算ニ適セズ。

又公式(31)或ハ(32)ヲ用ヒ得ルモ公式(33)ヲ用フルヲ最良トス。其故ハ唯四數s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ノ對數ノミヲ表中ヨリ求ムレバ可ナルヲ以テナリ。

注意二。上ノ公式ニ由テ求メ得タル三ツノ角ノ和ハ180°ナルベキモノナレドモ實際ニ於テハ斯ノ如キコト稀ナリ,是レ五桁ノ對數表ヲ用フルヨリ起ル誤差ナリ。

問題 15.

次ノ部分ヲ知リテ三角形ヲ解ケ(1)—(6)。

(1) $B=60^\circ 40'$, $C=59^\circ 10'$, $a=10{\cdot}62$. 〔東商〕

(2) $A=82^\circ 20'$, $B=43^\circ 20'$, $a=479$.

(3) $a=20{\cdot}71$, $b=18{\cdot}87$, $C=55^\circ 12'$

(4) $a=77{\cdot}04$, $b=91{\cdot}06$, $A=40^\circ 13'$.

(5) $a=317$, $b=533$, $c=510$

(6) $a=3(\sqrt{3}-1)$, $c=2$, $C=75^\circ$.

(7) $B=30^\circ$, $c=150$, $b=50\sqrt{3}$ナル條件ニ適合スル二ツノ三角形ノ中,一ハ二等邊三角形,一ハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ。且大ナル三角形ノ第三邊ヲ見出セ。 〔農大〕

第三章

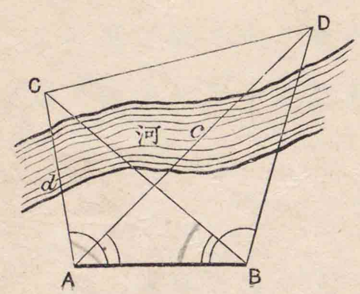
測量上ノ應用問題

82. 見得ルモ近ヅキ得ザル二點ノ距離ヲ求ムル法。

解法。 C, D ヲ其二點トス。基線 AB ヲ測リ其兩端ヨリ C, D ヲ見得ルモノトス。A 點ニ於テ二角 BAC, BAD ヲ測リ, 又 B 點ニ於テ二角 ABC, ABD ヲ測ルベシ。

然ルトキハ △ABC ニ於テ, 二角 ABC, BAC 及其頂點ノ間ノ邊 AB ヲ知ル故, AC ヲ算出スルヲ得。

$$AC=\frac{AB\sin ABC}{\sin(ABC+BAC)}.$$



又 △ABD ニ於テ邊 AB 及二角 BAD, ABD ヲ知ル故, AD ヲ算出スルヲ得。

$$AD=\frac{AB\sin ABD}{\sin(BAD+ABD)}.$$

而シテ $CAD=BAC-BAD$

故ニ本題ハ二邊 AC, AD 及其夾角 CAD ヲ知リテ △ACD ヲ解クコトニ歸ス。

今 $AD=c$, $AC=d$, $CAD=A$ トス。而シテ $c>d$ ト假定スレバ

$$\tan\frac{C-D}{2}=\frac{c-d}{c+d}\cot\frac{A}{2},$$

且 $$\frac{C+D}{2}=90^\circ-\frac{A}{2},$$

$$CD=\frac{d\sin A}{\sin D}.$$

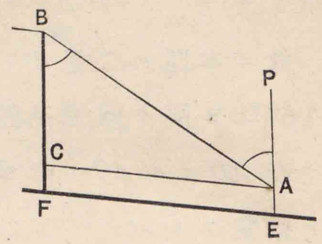
以上ノ六式ヲ用ヒテ終ニ CD ヲ得。

注意。 四點 A, B, C, D ガ同一ノ平面上ニ在ラザルトキハ角 CAD ヲ實測スルヲ要ス, 其故ハ CAD ガ BAC, BAD ノ差ニ非ザレバナリ。

83. 近ヅキ得ルモ水平面上ニ在ラザル塔ノ高サヲ求ムル法。

解法。 塔基 F ニ到リ得ベキ點 E ニ於テ測角器ヲ据ヘ, 又塔 BF ニ於テ CF ガ器械ノ高サ AE ニ等シキ様ニ C 點ヲ定メ然ル後角 BAC ヲ測リ又鉛直

線 AP ト AB トノ爲ス角 BAP ヲ測リ，又 EF ヲ測ルベシ，然ルトキハ $ABC = BAP$, $EE = AC$ ナル故正弦法則ニ由テ

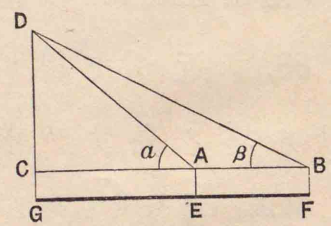


$$BC = \frac{AC \sin BAC}{\sin ABC},$$

之ニ $CF = AE$ ヲ加フレバ塔ノ高サヲ得。

84. 水平面上ニ在リテ，近ヅキ得ザル塔ノ高サヲ求ムル法。

解法。 DG ヲ所要ノ高サトセヨ。一點 E ニ於テ塔頂ノ仰角 $DAC(\alpha)$ ヲ測リ，次ニ塔基 G ト點 E ト一直線上ニアルベキ點 F ニ於テ仰角 $DBC(\beta)$ ヲ測リ，又基線 $EF(AB)$ ヲ測ルベシ。然ルトキハ



$$DC = DB \sin\beta,$$

又 △DAB ヨリ

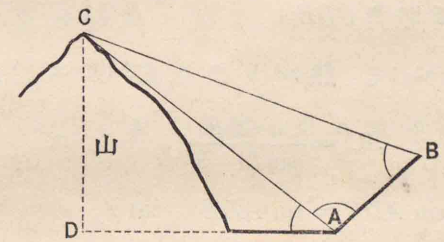
$$BD = \frac{AB \sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$\therefore \quad DC = \frac{AB \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

之ニ眼ノ高 AE ヲ加フレバ DG ヲ得。

注意。 此方法ニヨリテ山ノ高サヲ知ルヲ得。

85. 山ノ高サヲ求ムル法。



解法。 先ヅ適宜ノ處ニ基線 AB ヲ測リ A ニ於テ山頂ノ仰角 CAD ト角 CAB トヲ測リ，次ニ B ニ於テ角 ABC ヲ測ルベシ。然ルトキハ △ABC ヨリ

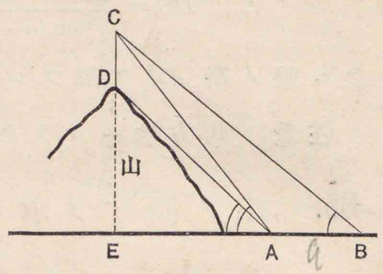
$$AC = \frac{AB \sin ABC}{\sin(BAC + ABC)},$$

然ルニ　$CD = AC \sin CAD,$

故ニ
$$CD = \frac{AB \sin ABC \sin CAD}{\sin(BAC + ABC)}.$$

86. 丘上ニ立テル旗竿ノ長サヲ求ムル法。

解法。CD ヲ旗竿トス。地面上ノ一點 A ニ於テ仰角 $CAE\,(\alpha)$ 及 $DAE\,(\alpha')$ ヲ測リ,更ニ基線 $AB\,(a)$ ヲ退キテ再仰角 $CBE\,(\beta)$ ヲ測ルベシ。然ルトキハ △ABC ニ於テ



$$AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

又 $$\sin ADC=\sin ADE=\cos\alpha',$$

然ルニ $$\frac{CD}{AC}=\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin ADC},$$

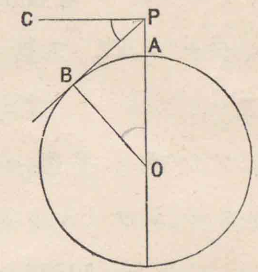
$$\therefore\quad CD=\frac{a\sin\beta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha'}.$$

又丘ノ高サヲモ求ムルヲ得。

87. 視界半徑ヲ求ムル法。

解法。地球ハ略球狀ヲ爲ス。今高處 P ヨリ地球ノ表面ヘ切線ヲ引ケバ,切點 B ノ軌跡ハ圓ニシテ此圓内ナル地面ノ部分ハ P ニ於ケル觀測者ノ望見シ得ル範圍ナリ,之ヲ P ニ於ケル**視界**ト云ヒ,切線 PB ノ長サヲ P ニ於ケル**視界半徑**又ハ**天涯距離**ト云フ。

又 O ヲ地球ノ中心トシ,平面 OBP ニ於テ OP ト直角ニ PC ヲ引クトキハ角 CPB ヲ P ニ於ケル**視水平俯角**又ハ**天涯俯角**ト云フ。



OP ト地面トノ交點ヲ A トシ,角 CPB ヲ α トセバ中心角 BOP モ亦 α ニ等シ,故ニ地球ノ半徑ヲ r トセバ

$$AP=OP-r,$$

然ルニ $$OP=r\sec\alpha,$$

故ニ $$AP=r(\sec\alpha-1)=\frac{r(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha}$$

故ニ $$PB=r\tan\alpha=\frac{AP\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\tan\alpha$$

$$=AP\cot\frac{\alpha}{2}.$$

系。地球ノ直徑ハ $AP\cos\alpha\operatorname{cosec}^2\dfrac{\alpha}{2}$ ニ等シ。

別法。視界半徑ノ略近値ヲ求ムルニハ次ノ如クスベシ。

幾何學ニ由テ

$$PB^2=PA(PA+2r)=PA^2+2r.PA.$$

然ルニ PA ハ直徑 $2r$ ニ比較シテ甚小ナル故猶更ニ小ナル PA^2 ヲ捨ツレバ

$$PB^2 = 2r.PA.$$

而シテ地球ノ半徑ハ約 3963 哩ナル故, n ヲ PB ノ哩數トシ, h ヲ PA ノ呎數トセバ

$$(n \times 5280)^2 = 2 \times 3963 \times 5280 \times h,$$

故ニ
$$n^2 = \frac{2 \times 396}{528} h,$$

故ニ
$$n^2 = \frac{3}{2} h.$$

是レ甚簡單ナル n ト h トノ關係ナリ。

試ニ $n=1$ トスレバ $h=\frac{2}{3}$. 故ニ海面上高サ八吋以下ノ物體ハ一哩ヲ距ツレバ望見スルヲ得ズ。

88. 三角測量。

大ナル地形ヲ測定スルニハ其地面上ニアル若干ノ重要ナル地點ヲ選ビ,之ヲ頂點トスル數多ノ三角形ヲ以テ地面ヲ蔽フモノト考フ。是等ノ三角形ノ邊中,最モ便宜ナル數邊ハ之ヲ基線トスル爲ニ鋼製ノ直銲ヲ以テ極メテ精密ニ其長サヲ測定ス。我國陸軍陸地測量部ニ於テハ全國ノ地圖

ヲ作ル爲ニ次ノ基線ヲ測定セリ。

羽前國最上郡	鹽野原基線	5129·587 米
相模國高座郡	相模野基線	5209·970 米
遠江國濱名郡	三方原基線	10839·770 米
近江國高島郡	饗庭野基線	3065·724 米
阿波國阿波郡	西林村基線	2832·212 米
伯耆國久米郡	天神野基線	3301·850 米
筑後國久留米市	久留米基線	3161·007 米
大隅國肝屬郡	笠野原基線	5875·509 米

是等ノ基線ト各地點ニ於テ測定セル他ノ兩地點ノ距角トヲ以テ順次間接ニ三角形ノ解法ヲ用ヒテ兩地點間ノ距離ヲ測定スルモノトス。

上ノ如キ測量ヲ**三角測量**ト云ヒ,一等,二等ノ別アリ,又地面ヲ蔽ヘル三角形ノ群ヲ**三角網**ト云フ。

重要ナル地點ニハ皆其何等測點タルコトヲ刻セル花崗石ヲ埋メアリ。

問　題　16.

(1) 川岸ノ一點ヨリ對岸ニアル高サ 145 尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ $34° 50'$ ヲ得タリ。川ノ幅ヲ算

出セヨ。但眼ノ高サヲ算入セズ。

(2) 高サ h 尺ノ塔ノ頂ヨリ之ト同一ノ地平面上ニ立テル圓柱ノ頂上及基礎ノ俯角ヲ測リテ α 及 β ヲ得タリ。此圓柱ノ高サ如何。

(3) 毎時12海里ノ速度ニテ正東ニ航行スル船アリ。或人正午ニハ此船ヲ南ヨリ15′東ニ見,午後一時半ニハ此船ヲ南東ニ見タリ。正午ニ於ケル此船マデノ距離ヲ求メヨ。

(4) 南西ニ向テ航行スル船ヨリ碇泊セル二艦甲乙ヲ觀測セシニ,甲ハ北北西ニ在リテ,乙ハ西北西ニ在ルヲ知レリ。然ルニ此船10海里ヲ航行セシ後甲ハ北ニ在リテ乙ハ北西ニ在ルヲ見タリ。甲乙二艦ノ距離及相互ノ方位如何。

(5) 高サ h 尺ナル塔ノ基底ヨリ地平面上 a 尺ノ距離ニ在ル一點ニ於テ塔ノ張ル角ト塔上ニ直立セル竿ノ張ル角トハ相等シト云フ。竿ノ長サ如何。〔名工〕

(6) 地球ノ半徑ヲ四千哩ト假定セバ高サ一哩ノ山巓ニ於ケル視界半徑約幾哩ナルカ。

(7) 塔基ヨリ地平面上ニ於テ a 尺ヲ退キ塔ノ

頂上ニ立テル旗竿ノ距角ヲ測リテ α ヲ得,更ニ b 尺ヲ退キテ再同ジ距角ヲ得タリ。然ルトキ竿ノ長サ如何。

(8) 直線ヲナス道ニ沿ヒテ歩行スル人アリ,塔ノ最大高度ヲ測リテ α ヲ得,又他ノ直線ヲナス道ヨリ最大高度ヲ測リテ β ヲ得タリ。但兩觀測點ヨリ兩道ノ交點ニ至ル距離ハ a 及 b ナリ。然ルトキ塔ノ高サ如何。

(9) 湖水面ヨリ h 尺高キ場所ニ於テ雲ノ高度ヲ測リテ α ヲ得,又湖水面ニ映ズル雲像ノ俯角 β ヲ得タリ。然ルトキハ雲ノ高サ如何。

(10) 塔アリ,其頂上ニ長サ a 尺ノ旗竿ヲ立ツ。今塔ノ基礎ト同水平面上ノ一點ニ於テ塔ノ仰角及旗竿ノ距角ヲ測リシニ,何レモ θ 度アリタリ。然ルトキハ塔ノ高サハ $a\cos 2\theta$ 尺ナリ,之ヲ證セヨ。〔水産〕

(11) 海濱ニアル山ノ高サ CD ヲ知ラント欲シ,相距ルコト365尺ナル二船A, Bニ於テ角 $BAC=67°\ 16'$, $ABC=54°\ 20'$, 仰角 $CAD=35°\ 30'$ ヲ測リ得タリ。山ノ高サヲ問フ 但眼ノ高サヲ10尺トス。

(12) P, Q, R, S ハ順次ニ一直線上ニ取レル四ツノ點ナルトキ,其直線外ニ任意ノ一點 O ヲ取リ,之ヲ P, Q, R, S ニ結ビ付クレバ

$$\frac{PQ.RS}{QR.PS}=\frac{\sin POQ \sin ROS}{\sin QOR \sin POS}.$$ 〔大工〕

(13) 高サ h ノ山上ニ在ル人,其正西ニ方リ一ツノ船ヲ望見セシニ俯角 θ ナリシガ,或時間ヲ經テ再望ミシニ,船ハ西ヨリ 60° 南ニ方リ俯角 θ' トナレリ,此船ノ前後兩位置ノ距離ヲ問フ。〔海兵〕

(14) 烟突ノ頂點ヲ D, 其基底ヲ C トシ A 及 B ヲ C ト同ジ水平面上ノ二點トス,而シテ觀測ニ依リテ $CAB=105°$, $CBA=30°$, $DAC=60°$, $AB=30$ 間ナル値ヲ得タリ。烟突ノ高サハ何程ナルカ,間ノ小數第二位マデ計算セヨ。 〔高等〕

(15) 甲乙二ツノ塔アリ,同一水平面上ニ直立ス,其高サハ甲ハ 18 米,乙ハ 8 米ナリ,而シテ其各塔ノ基底ニ於テ,互ニ他ノ塔ノ仰角ヲ測リシニ,甲塔ノ仰角ハ乙塔ノ仰角ノ二倍ナリシト云フ,二ツノ塔ノ距離如何。 〔陸士〕

(6) 南北ノ道路上ニ北ヨリ A, B, C, D, E ノ順序ニ五個ノ目標アリ, E ノ東ノ一地 O ニ於テ是等ノ目標ヲ望ミ角 $AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, $COD=\gamma$, $DOE=\delta$ ナルヲ知レリ,尚 $DE=d$ ナルトキハ AB, BC, CD 各如何,但對數計算ニ便ナル算式ニテ表ハセ。

又 $d=10$ 米, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=15°$ ナル場合ニ於ケル結果ヲ米ノ小數第一位マデ計算セヨ。〔同上〕

附錄第一

附錄第二

補　習　雜　題

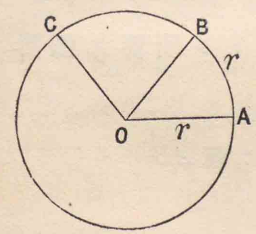
附錄第三

附録第一

第一章

弧度法

1. 圓ノ半徑ト等シキ長サヲ有スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ大サヲ求ムル法。



解法。圓 ABC ニ於テ半徑 OA ヲ r トシ,又弧 AB ヲ r ニ等シトシ中心角 AOB ノ大サヲ求メントス。

中心角ハ其弧ニ比例ス。

$$\therefore \qquad AOB : 360° = r : 2\pi r,$$

$$\therefore \qquad AOB = \frac{180°}{\pi} = 57°\cdot 2958 \text{弱} = 206265'' \text{弱}.$$

注意。此角ハ一定ノ大サヲ有スル故,之ヲ測角ノ單位トスルヲ得。此角ヲ「れーぢあん」ト云ヒ其測角法ヲ**弧度法**ト云フ。

系。 四直角ハ 2π「レーヂアン」,平角ハ π「レーヂアン」ニシテ弧度法ニ於テハ單ニ其測度ノミヲ記スルモノトス。

$$\therefore\quad 360^\circ = 2\pi,\quad 180^\circ = \pi,\quad 90^\circ = \frac{\pi}{2},\quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

一般ニ
$$n^\circ = \frac{n}{180}\pi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

2. 半徑 r ノ圓ニ於テ,長サ a ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ弧度ヲ求ムル法。

解法。 前圖ニ於テ弧 $AC = a$ トシ,所要ノ弧度ヲ x トセバ

$$角\ AOC : 角\ AOB = 弧\ AC : 弧\ AB,$$

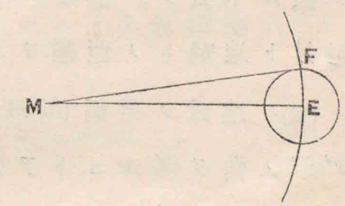
即
$$x : 1 = a : r,$$
$$\therefore\quad x = \frac{a}{r}.$$

故ニ角 AOC ハ $\frac{a}{r}$「レーヂアン」ニシテ其度數ト秒數トヲ夫々 d, s トスレバ

$$d = \frac{a}{r} \times 57{\cdot}2958,$$
$$s = \frac{a}{r} \times 206265.$$

注意。 單位圓ニ於ケル中心角ト其弧トハ測度ヲ同ジクス。故ニ角ノ三角函數ヲ弧ノ三角函數トモ云フ。

[例] 地球ノ半徑 (3963哩) ハ月ニ於テ $57'\ 3''{\cdot}16$ ノ角ヲ張ルト云フ。然ラバ地球ト月トノ距離如何。



解法。 M ヲ月ノ中心, E ヲ地球ノ中心トス。M ヲ中心トシ ME ヲ半徑トシテ圓弧 EF ヲ書ケバ弧 EF ハ殆地球ノ半徑ニ等シキ故, ME ノ長サヲ x 哩トセバ

$$3423{\cdot}16 = \frac{3963}{x} \times 206265,$$
$$\therefore\quad x = \frac{3963 \times 206265}{3423{\cdot}16} = 238793.$$

故ニ所要ノ距離ハ約二十四萬哩ナリ。

問題 I.

(1) $23^\circ\ 30'$ ヲ弧度ニテ表セ。

(2)　11° 15′ ヲ弧度ニテ表セ。

(3)　$\frac{7\pi}{6}$ 及 $\frac{5\pi}{12}$ ヲ度ニテ表示セヨ。

(4)　n 邊ノ正多角形ノ一角ヲ弧度ニテ表セ。

(5)　月ノ直徑ハ地球ノ中心ニ於テ 1868″ ノ角ヲ張ルト云フ。然ラバ月ノ直徑ハ幾哩ナルカ。但月ト地球トノ距離ヲ 238793 哩トス。

(6)　地球ノ半徑 (3963 哩) ハ太陽ノ中心ニ於テ 8″·82 ノ角ヲ張ルコトヲ知レリ。地球ト太陽トノ距離ヲ求メヨ。

次式ヲ證明セヨ。

(7)　$\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\cos^2 B}=\tan\frac{3\pi}{4}.$　〔陸士〕

(8)　$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$　〔京醫〕

(9)　$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$　〔名工〕

(10)　$\cot\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8}=2.$　〔陸士〕

(11)　$\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}=2\ \sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}.$　〔農大〕

第二章

反圓函數

3. 定義。 或數 y ガ他ノ數 x ノ函數ナルトキ x ヲ y ノ**反函數**ト云フ。

例ヘバ $y=\sin x$ トセバ x ハ y ノ反圓函數ナリ。之ヲ次ノ如ク記ス。

$$x=\operatorname{arc}\sin y \quad 又ハ \quad x=\sin^{-1}y.$$

同様ニ $\tan\theta=t$ ナルトキハ

$$\theta=\operatorname{arc}\tan t \quad 又ハ \quad \theta=\tan^{-1}t.$$

$\sin^{-1}\frac{1}{2}=30°$　$\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=45°$

故ニ　$30°=\sin^{-1}\frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1.$

注意一。 $\sin^{-1}y$ 又ハ $\tan^{-1}t$ ハ $\frac{1}{\sin y}$ 又ハ $\frac{1}{\tan t}$ トハ全ク異ナルコトヲ忘ルベカラズ。

上ノ記法ニヨレバ

$$\sin(\sin^{-1}y)=y.$$

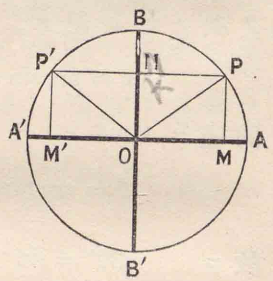
注意二。 反圓函數モ亦六種アリテ反正弦,反餘弦,反正切,反餘切,反正割,反餘割ト云フ。

4. 既知數 k ヲ正弦トスル總テノ

角ヲ求ムル法。

解法。或角ノ正弦ハ唯一ナレドモ同一ノ正弦ヲ有スル角ハ無數アリ(第 **35** 節注意參照)。

單位圓 O ニ於テ互ニ垂直ナル直徑ヲ AOA′, BOB′ トシ直徑 BOB′ 上ニ於テ,中心 O ヨリ ON ヲ k ニ等シク取リ(圖ニハ k ヲ正トス),N ヲ通過シ直徑 AOA ニ平行ナル弦 PP′ ヲ引クトキハ OA ト OP トノ爲ス角ノ正弦ハ MP ニシテ OA ト OP′ トノ爲ス角ノ正弦ハ $M'P'$ ナリ,而シテ共ニ k ニ等シ。今角 AOP ヲ α ニテ表サバ角 AOP' ハ $\pi-\alpha$ ナリ。故ニ此二角ニ周角ノ若干倍卽 $2n\pi$ ヲ加ヘタル角ハ皆 k ヲ正弦トス。故ニ $\sin^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ



$$\left.\begin{array}{l}\theta=2n\pi+\alpha\\ \text{及}\quad\theta=(2n+1)\pi-\alpha\\ \text{之ヲ}\quad\theta=m\pi+(-1)^m\alpha\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナル一式ニ纏ムルヲ得,但 m, n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數ナリ。

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

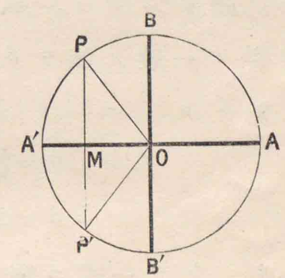
$x=45=\frac{\pi}{4}$

$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$

是レ $\sin\theta=k$ ニ適合スル θ ノ總テノ値ナリ。

5. 既知數 k ヲ餘弦トスル總テノ角ヲ求ムル法。

解法。單位圓 O ニ於テ直徑 AOA′ 上ニ OM ヲ k ニ等シク取リ,M ヲ通過シ AOA′ ニ垂直ナル弦 PP′ ヲ引クベシ(圖ニハ k ヲ負數トス)。角 AOP ヲ α ニテ表サバ AOP' ハ $-\alpha$ ナリ。



故ニ α 又ハ $-\alpha$ ニ 2π ノ若干倍ヲ加ヘタルモノハ皆 k ヲ餘弦トス。故ニ $\cos^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ

$$\theta=2n\pi\pm\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=30=\frac{\pi}{6}$

$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$

但 n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數ナリ。

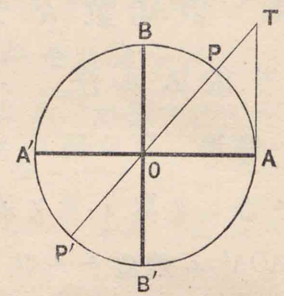
是レ $\cos\theta=k$ ニ適合スル θ ノ總テノ値ナリ。

6. 既知數 k ヲ正切トスル總テノ角ヲ求ムル法。

解法。單位圓ノ直徑 AOA′ ノ一端 A ニ於テ垂

線 AT ヲ引キ其長サヲ k ニ等シク取リ TO ヲ結ビ P, P′ ニ於テ圓周ニ交ラシムレバ

$$\tan AOP = \tan AOP' = k.$$



角 AOP ヲ α ニテ表サバ AOP' ハ $\alpha+\pi$ ナリ。故ニ所要ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ

$$\theta = 2n\pi + \alpha,$$

及

$$\theta = 2n\pi + \pi + \alpha$$

ナリ。之ヲ一式ニ纏ムレバ

$$\theta = m\pi + \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

但 m, n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數ナリ。

是レ $\tan\theta = k$ ニ適合スル θ ノ總テノ値ナリ。

注意。 餘割,正割,餘切ハ夫々正弦,餘弦,正切ノ逆數ナルニ因リ其公式ハ夫々 (2), (3), (4) ト同樣ナリ。

例ヘバ $\cot\theta = k$ ナルトキ $\tan\theta = \frac{1}{k}$ ナル故, $\frac{1}{k}$ ヲ正切トスル角ノ一ツノ値ヲ α トスレバ其一般ノ値ハ $m\pi+\alpha$ ナリ。故ニ k ヲ餘切トスル θ

ノ一ツノ値ヲ α トスレバ其一般ノ値ハ $m\pi+\alpha$ ナリ。

問題 2.

次ノ方程式ニ適合スル θ ノ一般ノ値如何 **(1)**—**(5)**。

(1) $\sin\theta = 1.$ **(2)** $\sin\theta = \frac{1}{2}.$

(3) $\cos^2\theta = 1.$ 〔東工〕 **(4)** $\sin\theta = 0.$

(5) $2\cos\theta = -\sqrt{3}.$

(6) $2\sqrt{2}\cos 5\theta = \sqrt{3}+1$ ナルトキ 0° ト 180° トノ間ニ在ル θ ノ値ヲ求メヨ。

(7) $\cos^{-1}0$ ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

(8) $\cot\theta = 1$ ナルトキ θ ノ一般ノ値如何。

(9) $\tan^2\theta = 3$ ナルトキ θ ノ一般ノ値如何。

(10) $\tan 10\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ナル方程式ニ適合スル總テノ銳角ヲ求メヨ。

第三章

三角方程式ノ解法

7. 定義。 未知角ノ圓函數ヲ含メル方程式ヲ**三角方程式**ト云ヒ其未知角ノ大サヲ求ムル事ヲ三角方程式ヲ解クト云フ。

既ニ前章ニ於テ簡單ナル三角方程式

$$\sin\theta = k,\quad \cos\theta = k,\quad \tan\theta = k$$

ヲ解キタリ。今猶二三ノ例ヲ示サン。

〔例一〕 方程式 $\cos 2\theta = \cos\theta$ ヲ解ケ。

解法。 公式(3)ニ由テ

$$2\theta = 2n\pi \pm \theta.$$

$$\therefore\quad \theta = 2n\pi \quad 又ハ \quad \theta = \frac{2}{3}n\pi.$$

〔例二〕 $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 1$ ヲ解ケ。 〔上叢〕

解法。 兩邊ヲ2ニテ除セバ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{2},$$

sinノ係数ヲ2ニシテCosノ係数ヲ割リ ル ソレニナルヤウナ
tanノ角ヲ求メル 即チ次ノ角ヲトル.
Cosヲ2ニシテ sinヲ割リテモヨシ

$$\cos\theta\cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

即

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore\quad \theta - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore\quad \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

〔例三〕 $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$ ヲ解ケ。

解法。 $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2,$

$$\therefore\quad \tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0,$$

$$\therefore\quad \tan^2\theta \quad 1 = 0,$$

$$\therefore\quad \tan\theta = \pm 1,$$

$$\therefore\quad \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

問題 3.

次ノ方程式ヲ解ケ **(1)–(11)**。

(1) $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}.$ **(2)** $\cos\theta + \cos 3\theta = 0.$

(3) $\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos\theta = 0.$

(4) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0.$ 〔秋鑽〕

注 $(-1)^0=1$. $(-1)^{-1}=\frac{1}{(-1)^1}=\frac{1}{-1}=-1$
$(-1)^1=-1$

(5)　$\cos 3\theta+4\cos^2\theta=0.$　〔東工〕

(6)　$\sin\theta+\dfrac{3}{2}=\operatorname{cosec}\theta.$

(7)　$\cos 1'-\cos 59^\circ 59'=\cos x.$　〔海經〕

(8)　$2\sin\theta=\tan\theta.$

(9)　$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\theta.$　〔商船〕

(10)　$3\tan^2\theta=1+4\sin^2\theta.$

(11)　$\cos\theta-\cos 7\theta=\sin 4\theta.$　〔專門〕

(12)　$\cos 2A+\cos A=0$ ヲ與ヘテ角 A ヲ求メヨ、但 A ハ 0° ト 360° トノ間ニアルモノトス。　〔海機〕

(13)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナル方程式ヲ滿足スル 360° 以下ノ θ ノ値ヲ求メヨ。　〔大工〕

(14)　方程式 $\cos 3A-\cos 5A=\sin A$ ニ適スル角ノ内ニテ 90° 及 -90° ノ間ニアルモノヲ求メヨ。　〔陸士〕

(15)　θ ヲ 180° ヨリ小ナル正角トシテ次ノ方程式ニ適スル θ ノ總テノ値ヲ求メヨ。

[1]　$2\cos^3\theta=\cos\theta.$　〔海機〕

[2]　$2\cos^2\theta+3\sin\theta=3.$　〔海機〕

[3]　$2\sin\theta\sin 3\theta=1.$　〔陸士〕

附錄第二

補習雜題

第一集

銳角ノ三角函數

次ノ恒等式ヲ證セヨ **(1)**-**(10)**。

(1)　$\sin A+\tan A=\sin A\tan A(\cot A+\operatorname{cosec} A).$

(2)　$\cot^4 A+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^4 A-\operatorname{cosec}^2 A.$

(3)　$\tan^4 A+\tan^2 A=\sec^4 A-\sec^2 A.$

(4)　$\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}=2\sec^2 A.$

(5)　$(\sec A-\tan A)^2=\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}.$

(6)　$(\operatorname{cosec} A+\cot A)^2=\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}.$　〔鹿農〕

(7)　$\cos^6 A+\sin^6 A+3\sin^2 A\cos^2 A=1.$

(8)　$(\tan A+\cot A)^2=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A.$

(9)　$(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A.$　〔商船〕

(10)　$\sin^2 A\cos^2 B(1+\cot^2 A)(1+\tan^2 B)=1.$

(11) $\cos A = \cos x \sin C,\ \cos B = \sin x \sin C$ ナレバ

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$$

(12) $\sin^2 A \operatorname{cosec}^2 B + \cos^2 A \cos^2 C = 1$ ナルトキハ

$$\sin^2 C = \tan^2 A \cot^2 B.$$

(13) $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ ナルトキハ

$$\frac{a\sin\theta + b\cos\theta}{a\sin\theta - b\cos\theta} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

(14) $\tan\theta + \sec\theta = 1{\cdot}5$ ナルトキ $\sin\theta$ ヲ求メヨ。

(15) $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = 5$ ナルトキ $\cos\theta$ ヲ求メヨ。

(16) $\sec^2\theta = 2(1+\tan\theta)$ ナルトキ $\tan\theta$ ヲ求メヨ。

第二集

直角三角形ノ解法

(1) A, B, C ハ海岸ニ於テ一直線上ニアル三個ノ目標ニシテ $AB=BC=2$ 哩ナリ,或船 B ニ向ヒ海岸線 ABC ニ垂直ニ進メルニ,最初 AC ノ視角 60° ニシテ,十分後ニハ 120° ナリ,船ノ速サ如何。

(2) 三角形 ABC ニ於テ $A=75°,\ C=45°$, 及 A ヨリ BC ニ下セル垂線ノ長サ 12 尺ガ與ヘラレテ三邊ノ長サヲ見出セ。〔東商〕

(3) 半徑 a 尺ナル圓アリ,其中心角 A ニ對スル弦ノ長サハ幾尺ナルカ。〔海兵〕

(4) 直立セル一塔アリ,其底ヲ過ル水平面上ノ一點ニ於テ其頂ヲ見レバ仰角 32°27′ ナリ。此點ヨリ塔ニ向ヒテ同ジ平面上尚 100 尺ヲ進ミタル點ニテ其頂ヲ見レバ仰角 45° ナリ。此平面上塔ノ高サ幾尺ナルカ。

但 $\tan 32°20' = 0{\cdot}6330,\ \tan 32°30' = 0{\cdot}6371.$ 〔一高〕

(5) 南北ニ走ル堤防アリ,正東ニ向ヒテ登ルトキハ七歩ニ付キ高マリ二歩ノ割合ナリ,然ラバ東ヨリ 30° 南ニ向ヒテ登ルトキハ八歩ニ付キ高マリ二歩ナルコトヲ證セヨ。〔海兵〕

(6) 某所ニ於テ山ノ高度ヲ測リシニ 60° ヲ得更ニ其山上ニ聳エタル 100 尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ 75° ヲ得ルトキハ山ノ高サハ幾許ナルカ。

但 $\tan 75° = 2+\sqrt{3}.$ 〔商船〕

(7) 橋上ニ於テ浮標ノ俯角ヲ測リテ 35° ヲ得

更ニ3尺降リテ又俯角ヲ測リ 34° ヲ得タリ,浮標マデノ距離如何。但 $\tan 35^\circ = 0{\cdot}7$, $\tan 34^\circ = 0{\cdot}675$.

〔商船〕

(8) 塔アリ,某所ヨリ其頂點ヲ望ミシニ,方位ハ正北ニシテ仰角ハ α ナリ。其處ヨリ正西ノ方向ニ l 尺進ミ,更ニ塔頂ヲ望ミシニ仰角 β ナリキト云フ。塔ノ高サヲ求メヨ。但塔ノ基礎及二個ノ測點ハ同ジ水平面上ニアリ。〔商船·水産〕

(9) 東西一哩ヲ隔ツル二地A, Bニ於テ二人ノ觀測者空中飛行機ヲ望ミタルニ,其方位ハ北西及北東ニ當リ,仰角ハ各 45° ナルコトヲ知レリ,飛行機ノ高サ如何,呎ニテ算出セヨ。〔海經〕

(10) 或人東西及南北ニ通ズル二ツノ道路ノ交點ヨリN 30° E[正北ヨリ 30° 東方ニ傾ケル]ノ方向ニ600尺ヲ進ミ,更ニ方向ヲ北東ニ轉ジ400尺ヲ進ミテ某地迄ニ達セリ,此地點ガ兩道路ヲ距ルコト各幾尺ナルカ。〔海機〕

(11) 地上ノ一定點ヨリ空中ニアル直徑六間ノ輕氣球ヲ望ム視角 30° ニシテ其中心ノ仰角ハ 45° ナリ,此輕氣球ノ中心ガ地面ヲ距ル鉛直ノ高

サヲ求メヨ。〔海兵〕

第三集

一般ノ角ノ三角函數

次ノ恒等式ヲ證セヨ(1)—(8)。

(1) $(\sec^2\theta-\cos^2\theta)(\mathrm{cosec}^2\theta-\sin^2\theta)=2+\sin^2\theta\cos^2\theta.$

(2) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\,\mathrm{cosec}^2\theta-2.$

(3) $$\sin^3\theta+\cos^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta=\sin\theta+\cos\theta.$$

(4) $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0.$ 〔海兵〕

(5) $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=\cot^2\theta\sin^2\theta(\mathrm{cosec}^2\theta-\cot^2\theta).$

(6) $\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta$、$\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta.$

(7) $\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1.$ 〔商船〕

(8) $\tan(45^\circ-\theta)\tan(45^\circ+\theta)=1.$

(9) 次式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{(a^2-b^2)\cot(180^\circ-\theta)}{\cot(180^\circ+\theta)}-\frac{(a^2+b^2)\tan(90^\circ-\theta)}{\cot(180^\circ-\theta)}.$$

(10)　次ノ三式ノ連乘積ヲ求メヨ。

$\sin(\theta-90^\circ)+\cos(\theta-180^\circ)$,

$\cot(\theta-90^\circ)-\tan(\theta-180^\circ)$,

$\sec(\theta-90^\circ)-\operatorname{cosec}(\theta-180^\circ)$.

次ノ各ノ値ヲ求メヨ **(11)—(14)**。

(11)　$\cos 510^\circ$,　$\cos(-30^\circ)$,　$\cos 3540^\circ$,

$\cos 225^\circ$,　$\cos 315^\circ$.

(12)　$\tan 120^\circ$,　$\tan 225^\circ$,　$\tan(-585^\circ)$,

$\tan 750^\circ$,　$\tan 7320^\circ$.

(13)　$\sin 480^\circ$,　$\cos 4080^\circ$,　$\tan 8400^\circ$,

$\cot(-7260^\circ)$,　$\sec 7335^\circ$,　$\operatorname{cosec} 1485^\circ$.

(14)　$\cos^2\theta+\cos^2(90^\circ+\theta)+\cos^2(180^\circ+\theta)+\cos^2(270^\circ+\theta)$.

(15)　x ヲ實數トセバ等式 $\sin\theta=x+\dfrac{1}{x}$ ニ適合スル角 θ ナシ。之ヲ證セヨ。

(16)　$x=y$ ナルニ非ザレバ等式 $\sec^2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ハ成立セズ。之ヲ證セヨ。

第　四　集

二角ノ和,差及倍角分角ノ三角函數

次ノ式ヲ證明セヨ **(1)—(61)**。

(1)　$\dfrac{\sin 2A}{1+\sin 2A}=\dfrac{2}{(1+\tan A)(1+\cot A)}$.

(2)　$\cos(n+1)A\cos nA+\sin(n+1)A\sin nA=\cos A$.

(3)　$\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)$

$+\sin C\sin(A-B)=0$.

(4)　$\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A=\sin 3A\cos 2A$.

〔陸士〕

(5)　$2\{\sin(30^\circ+x)+\cos(60^\circ+x)\}^2$

$-\{\cos(45^\circ-x)-\sin(45^\circ-x)\}^2=2\cos 2x$.

〔高等〕

(6)　$\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}$.

(7)　$\sec(45^\circ+a)\sec(45^\circ-a)=2\sec 2a$.　〔陸士〕

(8)　$\tan\dfrac{A+B}{2}-\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$.

〔高等〕

(9) $1+\tan A\tan 2A = \sec 2A.$ 〔小商〕

(10) $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)} = \sin 2A.$ 〔札農〕

(11) $\dfrac{\sin B-\sin A}{\cos A-\cos B} = \cot\dfrac{A+B}{2}.$ 〔陸士〕

(12) $\sin A\cos^3 A-\sin^3 A\cos A = \dfrac{1}{4}\sin 4A.$ 〔海兵〕

(13) $\cot^2 A-\tan^2 A = 4\cot 2A\operatorname{cosec} 2A.$ 〔盛農〕

(14) $\tan 2A\tan 3A\tan 5A = \tan 5A-\tan 3A-\tan 2A.$

(15) $3\sin A-\sin 3A = 2\sin A(1-\cos 2A).$ 〔水產〕

(16) $\sin\theta+\sin(\theta+120^\circ)+\sin(\theta+240^\circ) = 0.$

(17) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

〔商船〕

(18) $\cos(B+C)\cos(B-C)-\cos(A+C)\cos(A-C)$

$= \sin(A+B)\sin(A-B).$

(19) $2\sin^2\theta\sin^2\psi+2\cos^2\theta\cos^2\psi-\cos 2\theta\cos 2\psi = 1.$

〔盛農〕

(20) $\sin 3^\circ = \dfrac{1}{8}\{(\sqrt{3}+1)\sqrt{(3-\sqrt{5})}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{(5+\sqrt{5})}\}.$

(21) $2+\tan^2(A+90^\circ)+\cot^2(A-90^\circ) = 4\operatorname{cosec}^2 2A.$

cot A tan A

〔海兵〕

(22) $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2 = 4\cos^2\dfrac{A-B}{2}.$

(23) $\sin(B-C)\sin(A+D)+\sin(C-A)\sin(B+D)$

$1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}$

$1-\cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}$

$+\sin(A-B)\sin(C+D) = 0.$

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

(24) $\tan\alpha = \tan\dfrac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha).$ 〔商船〕

(25) $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A} = \dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{1}{2}A\right)^2.$

(26) $(\cot\theta-\tan\theta)^2 = 4\left(\dfrac{1+\cos 4\theta}{1-\cos 4\theta}\right).$

$4\left(\frac{2\cos^2 2\theta}{2\sin^2 2\theta}\right)$

(27) $\sin 2A\tan 2A = \dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}.$ 〔商船〕

(28) $\sec 2A-\cos 2A = \dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}.$ 〔商船〕

(29) $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \sec 2\alpha-\tan 2\alpha.$ 〔陸士〕

(30) $\cot^2 A-\tan^2 A = \dfrac{4\cos 2A}{\sin^2 2A}.$ 〔大工〕

(31) $\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ) = \dfrac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}.$

〔專門〕

(32) $\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)+\tan A\tan(A+60^\circ)$

$+\tan(A-60^\circ)\tan A+3 = 0.$

(33) $\tan A\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A) = -\tan 3A.$

〔東北大豫〕

(34) $\cos A+\cos(A+120^\circ)+\cos(A+240^\circ) = 0.$ 〔千醫〕

(35) $\cos 65^\circ + \cos 55^\circ + \cos 175^\circ = 0.$ 〔仙醫〕

(36) $\cos^2 A + \cos^2(120^\circ + A) + \cos^2(120^\circ - A) = \dfrac{3}{2}.$

(37) $\cos 47^\circ - \cos 61^\circ - \cos 11^\circ + \cos 25^\circ = \sin 7^\circ.$

(38) $1 + \tan 65^\circ + \tan 70^\circ = \tan 65^\circ \tan 70^\circ.$

(39) $4 \sin 110^\circ \sin 70^\circ \sin 40^\circ = \sin 80^\circ + 2 \sin 40^\circ.$

(40) $\cos\theta \cos(120^\circ + \theta) + \cos\theta \cos(120^\circ - \theta)$

$$+ \cos(120^\circ + \theta)\cos(120^\circ - \theta) = -\frac{3}{4}.$$

(41) $\cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ$

$$+ \cos 160^\circ \cos 40^\circ = -\frac{3}{4}.$$

(42) $\cos^2 A - \cos A \cos(60^\circ + A) + \sin^2(30^\circ - A) = \dfrac{3}{4}.$

〔二高〕

(43) $\cos^2 27{\cdot}5^\circ + \cos^2 32{\cdot}5^\circ + \cos^2 87{\cdot}5^\circ = \dfrac{3}{2}.$ 〔陸士〕

(44) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{\sin 2\alpha - 1} \div \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cot\alpha - 1} = \operatorname{cosec}\alpha.$ 〔醫專〕

(45) $\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A \cos B \cos(A+B)$

$$= \sin^2(A+B).$$ 〔專門〕

(46) $4\cos^3 A \sin 3A + 4\sin^3 A \cos 3A = 3\sin 4A.$

(47) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\sin 3B}{\sin B} = 4\sin(A+B)\sin(B-A).$

〔商船〕

(48) $\sin 4A = 4\sin A\cos A - 8\sin^3 A\cos A.$

(49) $\sin 5A = 5\sin A - 20\sin^3 A + 16\sin^5 A.$ 〔高等〕

(50) $\cos 4A = 1 - 8\cos^2 A + 8\cos^4 A.$

(51) $\cos 5A = 5\cos A - 20\cos^3 A + 16\cos^5 A.$ 〔商船〕

(52) $\sin 6A = \cos A(6\sin A - 32\sin^3 A + 32\sin^5 A).$

(53) $\cos 6A = 32\cos^6 A - 48\cos^4 A + 18\cos^2 A - 1.$

(54) $2(\cos^8 A - \sin^8 A) = \cos 2A(1 + \cos^2 2A).$

(55) $\cos^8\alpha - \sin^8\alpha = \cos 2\alpha\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2\alpha\right).$ 〔陸士〕

(56) $\sin A \sin B \sin(A-B) + \sin B \sin C \sin(B-C)$

$$+ \sin C \sin A \sin(C-A) + \sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A) = 0$$

〔東商〕

(57) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2(A+B+C)$

$$= 2 - 2\cos(B+C)\cos(C+A)\cos(A+B).$$

(58) $\cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta-\gamma)$

$$+ \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

(59) $2\{\sin(30^\circ + x) + \cos(60^\circ + x)\}^2$

$$-\{\cos(45^\circ - x) - \sin(45^\circ - x)\}^2 = 2\cos 2x.$$

〔東工〕

(60) $\tan\dfrac{A+B}{2} - \tan\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{2\sin B}{\cos A + \cos B}.$ 〔高等〕

(61) $\tan(B-C)+\tan(C-A)+\tan(A-B)$

$$=\tan(B-C)\tan(C-A)\tan(A-B).$$

(62) $\sin\alpha=\sin\beta,\ \cos\alpha=\cos\beta$ ナルトキハ $\alpha-\beta$ ハ 0° 又ハ 360° ノ倍數ナリ,之ヲ證セヨ。

(63) 次式ノ値ヲ求メヨ。

$\sin 100^\circ \sin(-160^\circ)+\cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$. 〔高等〕

(64) 次ノ三式ヲ最簡ニセヨ。

[1] $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)$.

[2] $\tan(45^\circ+x)-\tan(45^\circ-x)$. 〔海機〕

[3] $\dfrac{2\cos A\cos(90^\circ+A)}{\tan 225^\circ+\cos(-2A)}$

$+\dfrac{\operatorname{cosec} 150^\circ}{\cot\left(90^\circ+\dfrac{A}{2}\right)-\tan\left(\dfrac{A}{2}-90^\circ\right)}$. 〔海兵〕

(65) 次ノ三式ノ最大値ヲ求メヨ。

[1] $\sin\theta\cos\theta$. [2] $\cos^4\theta-\sin^4\theta$.

[3] $a^2\tan^2 x+b^2\cot^2 x$. 最小値

(66) $A+B+C+D=360^\circ$ ナレバ

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}.$$ 〔八高〕

(67) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha,\ \tan\beta$ トシテ $\tan(\alpha+\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。 〔海機〕

(68) $\cos(\alpha-\beta)=m\sin(\alpha+\beta)$ ナルトキハ

$$\tan(45^\circ+\alpha)=\frac{m+1}{m-1}\tan(45^\circ-\beta).$$

(69) $\cos A=\dfrac{\cos B-k}{1-k\cos B}$ ナルトキハ

$$\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\tan\frac{B}{2}.$$ 〔高等〕

(70) 二次方程式 $x^2-2x\cot 2\alpha-1=0$ ノ根ヲ成ルベク簡單ニセヨ。

(71) $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ナルトキハ

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$$ 〔高等〕

(72) 若 $\sin\theta+\sin\phi=a$, $\cos\theta+\cos\phi=b$ ナラバ $\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\phi)$ ノ値如何。 〔海兵〕

(73) $\cos(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$ ヲ變ジテ $k\sin(45^\circ-\alpha)$ トナシ, k ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。

〔大工〕

(74) 次ノ乘積ヲ和ニ變形シ,然ル後此乘積ヲ

最大ナラシムル α ノ値ヲ求メヨ。

$$2\sin(\alpha-30^\circ)\cos\alpha.$$ 〔海兵〕

(75) $\tan\theta=\frac{a}{b}$ ナルトキハ

$$a\cos\omega+b\sin\omega=\sqrt{(a^2+b^2)}\sin(\theta+\omega).$$ 〔東工〕

(76) $A+B+C=180^\circ$ ナルトキハ

$$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$$ 〔長醫〕

(77) $A+B+C=180^\circ$ ナルトキハ

$$\sin 8A+\sin 8B+\sin 8C=-4\sin 4A\sin 4B\sin 4C.$$

〔陸士〕

(78) $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$ ナルトキハ

$$\cos^2 B=1+\cos 2A.$$ 〔醫專〕

(79) $A+B+C=180^\circ$, $\cos A=\cos B\cos C$ ナルトキハ $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$ ナリ 〔仙工〕

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ (80)—(87)。

(80) $\sin(x+60^\circ)+2\sin(x-60^\circ)-\sqrt{3}\cos(120^\circ-x).$

〔海機〕

(81) [1] $\sin 2A\cos A-\cos 2A\sin A.$

[2] $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)$

$+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta).$ 〔商船〕

(82) $\sin^2 B+\sin^2(A-B)+2\sin B\sin(A-B)\cos A$

〔水產〕

(83) $\dfrac{\sin A\sin(B-C)-\sin B\sin(A-C)}{\sin C}.$ 〔海機〕

(84) [1] $(\tan A+\tan B)(\cot A+\cot B)$

$+(\tan A-\tan B)(\cot A-\cot B).$

[2] $\dfrac{\cos(\alpha-30^\circ)}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin\alpha}.$ 〔海機〕

(85) $\cos 2A+\dfrac{2}{\cot^2 A+1}.$ 〔海機〕

(86) $\cos^2 A+\cos^2(A+120^\circ)+\cos^2(A+240^\circ).$ 〔專門〕

(87) $\cos(15^\circ-A)\sec 15^\circ-\sin(15^\circ-A)\operatorname{cosec}15^\circ.$

〔海機〕

(88) 次ノ二式ノ値ヲ求メヨ。

[1] $\tan\{2(x+y)\}$, 但 $\tan x=2$, $\tan y=3$.

[2] $\sin 3A-\cos 3B$, 但 $\sin A=\frac{1}{3}$, $\cos B=\frac{2}{3}$.

〔陸士〕

(89) 次式ヲ單項式ニ直セ。

$(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2.$ 〔商船〕

(90) $\tan 7{\cdot}5^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。而シテ或角ノ正

切ガ之ト同ジ値ヲ有スル如キ角ノ一般ナル式ヲ記セ。　〔大工〕

(91) 方程式 $x^2-2px+q^2=0$ ニ於テ $p=\frac{1}{2}\sec\theta$, $q=\frac{1}{2}\tan\theta$ ナルトキハ兩根ハ次ノ如シ。

$$\frac{1}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},\qquad \frac{1}{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}.$$　〔名工〕

(92) 次ノ無限級數ノ和ヲ最モ簡單ナル形ニテ表ハセ。

$$a\sin\theta,\quad a\sin\theta\cos\theta,\quad a\sin\theta\cos^2\theta,\quad a\sin\theta\cos^3\theta,\quad \cdots\cdots$$

〔仙工〕

(93) $\sin 33^\circ\frac{3}{4}=0{\cdot}55557$, $\cos 33^\circ\frac{3}{4}=0{\cdot}83147$ ナリ。然ラバ $\sin 67^\circ\frac{1}{2}$ 及 $\cos 101^\circ\frac{1}{4}$ ノ値ヲ各小數第五位マデ求メヨ。　〔商船〕

(94) θ ガ 0° ヨリ 360° マデ變化スルトキ次ノ各式ノ値ノ變化ヲ考究セヨ。

[1] $\sec\theta-\tan\theta$.　[2] $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$.

[3] $\sin\theta+\cos\theta$.　〔海兵〕

第五集

三角形

次ノ問題ニ於テハ A, B, C ヲ三角形ノ內角トシ a, b, c ヲ其對邊トス。又 Δ ヲ面積トシ r ヲ內接圓ノ半徑トシ, r', r'', r''' ヲ A, B, C ノ角內ニアル傍接圓ノ半徑トシ, R ヲ外接圓ノ半徑トス。又 h_a, h_b, h_c ハ頂點 A, B, C ヨリ對邊 a, b, c ニ下セル高サトス。

(1) 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ヲ D ニ於テ內分シ $AD:BD=a:b$ ナラシムレバ

$$\tan ACD=\frac{a^2}{b^2},\qquad CD=\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{a+b}$$

(2) $C=90^\circ$ ナルトキハ

$$\cos(A-B)=\frac{2ab}{c^2},\qquad \cos 2B=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

(3) C ガ直角ナルトキハ $\tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$.〔商船〕

(4) 次ノ關係アラバ $C=90^\circ$ ナルベシ。之ヲ證セヨ。

$$\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B},\ \text{或ハ}\ \frac{\sin A}{\cos B}=\sin C+\cos C\cot A$$

任意ノ三角形ニ於テ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ (5)—(36)。

(5) $s^2 = bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2}$.

(6) $\tan A\tan B + \tan B\tan C + \tan C\tan A$

$= 1 + \sec A\sec B\sec C$. 〔盛農〕

(7) $\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$.

(8) $\left(\tan\frac{1}{2}A - \tan\frac{1}{2}B\right) : \left(\tan\frac{1}{2}A + \tan\frac{1}{2}B\right) = a - b : c$.

(9) $r = (s-a)\tan\frac{1}{2}A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$.

(10) $r' = s\tan\frac{1}{2}A,\quad r'' = s\tan\frac{1}{2}B,\quad r''' = s\tan\frac{1}{2}C$.

(11) $\Delta = sr = (s-a)r' = (s-b)r'' = (s-c)r'''$.

(12) $r\left(\cot\frac{1}{2}B + \cot\frac{1}{2}C\right) = a$.

(13) $R = \frac{abc}{4\Delta}$.

(14) $\frac{R}{r} = \frac{a+b+c}{a\cos A + b\cos B + c\cos C}$.

(15) $\frac{a}{2\sin A} = \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}$. 〔陸士〕 (99 page 21)

(16) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}$.

(17) $4R = r' + r'' + r''' - r$.

(18) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

(19) $\tan\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}$

$= \tan\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}$. 〔商船〕

(20) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

$= 4\cos\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{C}{2}\right)$.

(21) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$.

〔農大・山商〕

(22) $a\cos(B-C) + b\cos(C-A) + c\cos(A-B)$

$= 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$.

(23) $2\left(a\cos^2\frac{1}{2}A + b\cos^2\frac{1}{2}B + c\cos^2\frac{1}{2}C\right)$

$= (a+b+c)(\cos A + \cos B + \cos C)$.

1 (24) $c(\cos A + \cos B) = 2(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C$.

2 (25) $c^2\sin(A-B) = (a^2-b^2)\sin(A+B)$.

(26) $(b^2+c^2-a^2)\tan A = (c^2+a^2-b^2)\tan B$

$= (a^2+b^2-c^2)\tan C$.

$a \sin B = b \sin A$ $a \sin C = c \sin A$ $b \sin C = c \sin B$

(27) $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 2ab \sin C.$

(28) $$\frac{b^2-c^2}{a \sin (B-C)} = \frac{c^2-a^2}{b \sin (C-A)} = \frac{a^2-b^2}{c \sin (A-B)}.$$

(29) $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C$

$$+4 \cos \frac{3}{2} A \cos \frac{3}{2} B \cos \frac{3}{2} C = 0.$$

(30) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$

〔陸士〕

(31) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$

(32) $\sin^2 A + 2 \sin B \sin C \cos A = \sin^2 B + \sin^2 C.$ 〔大工〕

(33) $\cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C = \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} C.$

(34) $b^2 \cos 2C + 2bc \cos (B-C) + c^2 \cos 2B = a^2.$

(35) $c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}.$ 〔商船〕

(36) $c^2 = \left\{(a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} - (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}\right\} \sec (A-B).$

(37) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ ヨリシテ

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ヲ作レ。 〔大工〕

(38) x, y, z ヲ

$$\cos x = \frac{a}{b+c}, \quad \cos y = \frac{b}{c+a}, \quad \cos z = \frac{c}{a+b}$$

ナル如キ鋭角トスレバ

$$\tan^2 \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{y}{2} + \tan^2 \frac{z}{2} = 1,$$

$$\tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2} \tan \frac{z}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

(39) $b = 4c \cos \left(30^\circ + \frac{A}{2}\right) \cos \left(30^\circ - \frac{A}{2}\right)$

ナルトキハ $A = 2C$ 及 $a^2 = c(b+c).$

(40) 任意ノ三角形ニ於テ

$$\tan^2 \psi = \frac{4ab}{(a-b)^2} \sin^2 \frac{1}{2} C$$

トスレバ $c = (a-b) \sec \psi.$

(41) 任意ノ三角形ニ於テ

$$\sin^2 \theta = \frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{1}{2} C$$

トスレバ $c = (a+b) \cos \theta.$

(42) $C = 60^\circ$ ナルトキハ $a + b = 2c \cos \frac{A-B}{2}.$

〔陸士〕

(43) $C = 60^\circ$ ナルトキハ

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

$\frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3$

(44) $B = 60^\circ$ ナルトキハ

$$\frac{a+c}{2b} = \sin (30^\circ + C).$$ 〔高等〕

(45) 三角形 ABC ニ於テ $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ

$$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3.$$ 〔高等〕

(46) $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ ナルトキハ

$$a+b+c=3b.$$ 〔海兵〕

(47) $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6}$, $\tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ ナルトキ $\tan C$ ハ如何。 〔大工〕

(48) 三角形ノ二邊夫々五尺ト七尺トニシテ其夾角六十度ナリ。第三邊及面積ヲ求メヨ。

〔東工〕

(49) 正三角形ノ一角ヲ2:1ノ比ニ分ツ直線ハ對邊ヲ如何ナル比ニ分ツカ。 〔水產〕

(50) 三角形ノ角頂ヨリ對邊ニ下セル垂線ノ長サハ次ノ如クナルコトヲ證セヨ。

$$\frac{2s}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}},\quad \frac{2s}{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}},\quad \frac{2s}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}.$$

〔陸士〕

(51) 平行四邊形ノ二邊ノ長サ8尺及12尺ニシテ其夾角 60° ナルトキハ對角線ノ長サ如何。

〔海兵·商船〕

(52) 半徑 R ノ圓ニ内接スル n 邊ノ正多角形ノ周ハ $2nR\sin\frac{180^\circ}{n}$ ニシテ面積ハ $\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}$ ナリ。

(53) 半徑 r ノ圓ニ外接スル n 邊ノ正多角形ノ周ハ $2nr\tan\frac{180^\circ}{n}$ ニシテ面積ハ $nr^2\tan\frac{180^\circ}{n}$ ナリ。

(54) 圓ノ面積ト之ニ内接スル正十六角形ノ面積トノ比ヲ小數第二位マデ算出セヨ。〔大工〕

(55) $A=120^\circ$, $b=12$尺, $c=6$尺ナルトキ a ヲ求メヨ。 〔海機·鹿農〕

(56) 次ノモノヲ知リテ角 A, B ヲ求メヨ。

$$a=522,\quad b=320,\quad C=34^\circ\,22'.$$

$\log\tan 72^\circ\ 49'=0{\cdot}50971$, $\log\cot 52^\circ\ 11'44''=\bar{1}{\cdot}88975$.

$\log 1{\cdot}01=0{\cdot}00432$, $\log 4{\cdot}21=0{\cdot}62428$. 〔七高〕

(57) 一角ガ 22° ニシテ之ヲ夾ム二邊ノ長サガ20尺及30尺ナルトキ他ノ二角ヲ求メヨ。

但 $L\cot 11^\circ=10{\cdot}7113477$, $L\tan 45^\circ\ 48'=10{\cdot}0121294$,

$L\tan 45^\circ 49'=10{\cdot}0123821$, $\log 2=0{\cdot}3010300$. 〔仙工〕

(58) $\tan B=1$, $\tan C=2$, $b=100$ ナルトキ $a=60\sqrt{5}$ ナルコトヲ證セヨ。 〔水產〕

(59)　$\sin(180^\circ - A) = \sqrt{2}\cos(B - 90^\circ)$,　$\sin A = \sqrt{2}\sin B$

$\sqrt{3}\cos A = -\sqrt{2}\cos(180^\circ + B)$　$\sqrt{3}\cos A = \sqrt{2}\cos B$

ナルトキ A, B, C ノ値ヲ求メヨ。〔海兵〕

(60)　等周ナル正三角形ト正方形ト正六角形トハ其面積ノ比殆ド 10 ト 13 ト 15 トノ如シ,之ヲ證セヨ。

第六集

應用

(1)　三角形ノ地面アリ。其三邊ノ長サ夫夫 120 間, 130 間, 134 間ナリ。面積ヲ求メヨ。

(2)　川岸ナル高塔ノ高サヲ知ラント欲シ,對岸ヨリ頂上ノ仰角ヲ測リテ $25^\circ 10'$ ヲ得タリ。川幅ガ二百尺ナルトキ塔ノ高サハ幾尺ナルカ。

(3)　高サ 6600 呎ノ山ハ百哩ノ距離ヨリ見ルヲ得ベシト云フ。地球ノ半徑ヲ求メヨ。

(4)　富士山ノ頂上(海面ヲ拔クコト 12000 尺トス)ヨリ天涯俯角ヲ測リシニ $1^\circ 56'$ ヲ得タリト云フ。地球ノ半徑ハ何里ナルカ。

(5)　太陽ノ直徑ノ視角ヲ $31' 30''$ トシ,地球ヨリノ距離ヲ九千六百萬哩トスルトキ太陽ノ中心ヲ地球ノ中心ノ所ニ置カバ其體ハ月ヲ超エテ廣ガルコト約二十萬哩ナルベシ。之ヲ證セヨ。但地球ヨリ月マデノ距離ヲ二十四萬哩トス。

(6)　敵港ヲ封鎖セル軍艦アリ。港ノ南方四海里ノ處ニ在リテ敵艦ノ該港ヨリ出デ S. 60° E. ノ方向ニ逃走スルヲ見タリ。今毎時十八海里ノ速サヲ以テ半時間ノ後敵艦ノ航路ニ達センニハ何レノ方向ニ進航スベキカ。

(7)　山脈ノ山脊ヨリ兩側ナル山麓ノ俯角ヲ測リテ $55^\circ 40'$ 及 $68^\circ 20'$ ヲ得タリ而シテ山脊ヨリ之ニ應ズル隧道ノ兩口ニ至ル距離ハ 3475 尺及 2896 尺ナリ。山ヲ貫通スル隧道ノ長サ如何。

(8)　太陽ノ高度 α ナルトキ同方位ナル雲ノ高度ヲ測リテ β ヲ得,又觀測點ヨリ雲影マデノ距離 d 尺ヲ得タリ。雲ノ高サヲ求メヨ。

(9) 或人正午ニ輕氣球ヲ 30° ノ高度ニ於テ南方ニ其見影ニ至ル距離一哩ニシテ太陽ノ高度 45° ナルヲ知レリ。此輕氣球ハ午前十一時ニ南東微南ニ在リテ午後一時ニハ南西微西ニ在リ。然ラバ輕氣球ヲ等速等高ニ進行スト假定シ其每時ノ速度及方向ヲ求メヨ。

(10) 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ニ於テ角 $CAD=\alpha$, $BAC=\beta$, $ABD=\gamma$ トセバ

$$CD=\frac{\mathrm{AB}\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

〔山商〕

(11) 或人塔ノ高サヲ知ラント欲シ,其北方ナル一點ニ於テ塔頂ノ仰角 α ヲ得,次ニ此點ノ東方 d ナル距離ノ點ニ於テ仰角 β ヲ得タリ。然ラバ塔ノ高サハ次ノ如シ,之ヲ證セヨ。

$$\frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\}}}.$$

(12) 平原ニ一直線上ニアル三點 A, B, C ヨリ輕氣球ノ高度ヲ同時ニ測リテ α, β, γ ヲ得タリ。$AB=a$, $CA=b$, $BC=c$ ナルトキ球ノ高サハ

$$\sqrt{\frac{abc}{a\cot^2\gamma+c\cot^2\alpha-b\cot^2\beta}}$$

ナリ。之ヲ證セヨ。

(13) 小丘ノ麓ニ樓閣アリ,其脚ヨリ百尺ヲ上リ其頭脚ノ距角ヲ測リテ 54° ヲ得タリ,而シテ坂路ノ傾斜ハ 9° ナリト云フ。樓閣ノ高サ如何。

(14) 地平面上ニ立テル塔ノ脚ヨリ a 尺ヲ退キテ其仰角ヲ測リ,更ニ b 尺ヲ退キテ又仰角ヲ測リテ前ノ角ノ三分ノ一ニ等シキ角ヲ得タリ。然ラバ塔ノ高サハ $(a+b)\sqrt{(b-2a)/(3b+2a)}$ 尺ナリ。之ヲ證セヨ。

(15) 一船進行中,北東及北北東ニ方リテ二個ノ燈臺ヲ見タリ,夫レヨリ正北ニ向ヒテ進行スルコト 20 哩ニシテ再以前ノ燈臺ヲ見ルニ其方位何レモ正東ナリキト云フ。二ツノ燈臺ノ距離如何。

〔臨經・水產〕

(16) 人アリ B 點ヨリ或山ノ頂點 C ヲ測リシニ仰角 $27^\circ\ 18'$ ヲ得タリ。又同ジ水平面上 500 間後方ナル A 點ヨリ之ヲ測リシニ $16^\circ\ 10'$ ヲ得タリト云フ。依テ山ノ高サヲ求メヨ,但 A, B, C ハ同一ノ平面中ニアリ。

〔長商〕

(17) A, B, C ヲ三ツノ物體トシ $BC=1716$ 尺

$CA=924$ 尺, $AB=1056$ 尺ナリトス。或人平面ABC上ノ一點Dヨリ此三ツノ物體ヲ觀測セシニCヲAノ前面ニ見又角 $CDB=14°24'$ ヲ得タリ。CD ヲ求メヨ。

(18)　二隣邊ノ長サ48尺,27尺,夾角 $58°48'$ ナル平行四邊形アリ,其長邊ハ水平面上ニアリテ,其面ノ水平面ニ對スル傾斜ハ $65°30'$ ナリ. 其面積及水平面上ニ於ケル其正射影ノ面積ヲ求メヨ。

〔陸士〕

第七集

弧度法

次ノ恒等式ヲ證セヨ。

(1)　$\sin\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\pm\theta\right\}=\cos\theta.$

(2)　$\tan\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2}\pm\theta\right\}=\mp\cot\theta.$

(3)　$\tan(\theta-\pi)+\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan(\pi-\theta)$

$$+\cot\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)+\tan(\pi+\theta)+\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=0.$$

(4)　$\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$

$$+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=-\frac{3}{4}$$　〔商船〕

(5)　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{(1+\sin 2\theta)},$

$\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{(1-\sin 2\theta)}.$

上ノ公式ニ於テ θ ガ $\frac{\pi}{4}$ ト $\frac{3\pi}{4}$ トノ間ニ在ルトキハ複號ノ中何レヲ取ルベキカ。

(6)　$A+B+C=2\pi$ ナルトキハ

[1]　$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}.$

〔二高〕

[2]　$\cos A+\cos B+\cos C=4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$

〔八高〕

第八集

三角方程式

次ノ方程式ヲ解キテ x ノ最小正値ヲ求メヨ

(1)-(17)。

(1) $\tan x + \cot x = 4.$

(2) $\cot x \sec 2x - \cos x \operatorname{cosec} x = 1.$

(3) $\sin x + \operatorname{cosec} x = 2.$

(4) $\cot^2 x - \tan^2 x = 2 \sec x \operatorname{cosec} x.$

(5) $3\cos^2 x - \sin^2 x + (\sqrt{3}+1)(1-2\cos x) = 0.$

(6) $\tan x + \cot x = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}.$

(7) $\dfrac{\tan x}{\cos 2x} + \dfrac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} = 1.$

(8) $\cot 2x + 2\tan 2x$

$$= 4\sec 2x \operatorname{cosec} 2x \tan^2 2x - \tan^3 2x.$$

(9) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}.$ 〔東北大豫〕

(10) $\sin^2 2x = 2\cos^2 x.$

(11) $2\cos^2 x + 3\sin x = 3.$ 〔海機〕

(12) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x.$

(13) $\cos x - \sin x = 2\sqrt{2}\sin x \cos x.$

(14) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \dfrac{3}{2\cos 2x}.$

(15) $5\sin x = \cos 2x + 2.$ 〔大工〕

(16) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0.$ 〔陸士〕

(17) $\sin(x-40^\circ) = \sin(x+80^\circ).$ 〔海機〕

次ノ方程式ヲ解キθノ一般ノ値ヲ弧度ニテ求メヨ(18)-(37)。

(18) $\sin\theta + \cos 2\theta = 1.$

(19) $\tan 4\theta = \tan\theta.$

(20) $\sin 9\theta + \sin 5\theta + 2\sin^2\theta = 1.$

(21) $\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 9\theta \cos 7\theta.$

(22) $\cos(a+c)\theta \cos(b+c)\theta = \cos a\theta \cos b\theta.$

(23) $\sin 7\theta - \sin\theta = \sin 3\theta.$ 〔海兵〕

(24) $\cos 8\theta + \cos 4\theta = 2\cos 2\theta.$

(25) $\cos 7\theta + \cos\theta = 3\cos 4\theta.$

(26) $2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2.$ 〔海兵・海機〕

(27) $\sin^2\theta + \cos 2\theta = \cos\theta.$ 〔海兵〕

(28) $\sin 5\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos 3\theta.$ 〔商船〕

(29) $\tan\theta + \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right) = 2.$ 〔海兵〕

(30) $3\tan\theta + \cot\theta = 5\operatorname{cosec}\theta.$ 〔盛農〕

(31) $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}.$

(32) $\sin 3\theta = 2\sin 2\theta - \sin\theta.$

(33) $\sin\theta + \cos\theta = 1.$

(34) $\sin^2\theta + \sin\theta = \cos^2\theta + \cos\theta.$

(35)　$\cos 2\theta - \cos 4\theta = \sin\theta.$　〔海兵〕

(36)　$\sqrt{3}\tan^2\theta - (\sqrt{3}+1)\tan\theta + 1 = 0.$

(37)　$\cos 2\theta = (\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1.$　〔高等〕

(38)　次ノ方程式ヲ解ケ。

［1］　$x+y = 90°,\ \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$　〔東工〕

［2］　$x+y = 150°,\ \tan x + \tan y = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$　〔東工〕

次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ (39)—(43)。

但對數ヲ用フベシ。

(39)　$\left(\frac{10}{3}\right)^{x+2} = 9^{2x+1}.$

(40)　$8^x \times 125^{2-x} = 2^{4x+3} \times 5^x.$

(41)　$2^x = \sin 65°.$　(42)　$x^2 = 135^2 + 318^2.$

(43)　$\sin^4 x + \cos^4 x = 0{\cdot}8.$

第　九　集

反　圓　函　數

次ノ各式ヲ證セヨ。

(1)　$\sin^{-1}a = \cos^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{(1-a^2)}}.$

(2)　$\cos^{-1}a = \sin^{-1}\sqrt{1-a^2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$

(3)　$\tan^{-1}a = \sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{(1+a^2)}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{(1+a^2)}}.$

(4)　$\sin^{-1}a + \sin^{-1}b = \sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}).$

(5)　$\tan^{-1}a \pm \tan^{-1}b = \tan^{-1}\left(\frac{a \pm b}{1 \mp ab}\right).$

(6)　$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$

(7)　$2\tan^{-1}a = \sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}.$　〔陸士〕

(8)　$\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{56}{65} = \frac{\pi}{2}.$

(9)　$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{4}.$

(10)　$\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$

第　十　集

消　去　法

次ノ各題ニ於テ θ ヲ消去セヨ (1)—(5).

(1) $a\sin\theta+b\cos\theta-m=0,$

$b\tan\theta-a-n\sec\theta=0.$ 〔東工〕

(2) $\tan\theta+\cos\theta=a,\ \tan\theta-\cos\theta=b.$ 〔商船〕

(3) $a\sin\theta+b\cos\theta=c,\ b\sin\theta+a\cos\theta=d.$

(4) $a\sin\theta+b\cos\theta=1,$

$b\sin\theta+a\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta.$ 〔海兵〕

(5) $m\sec\theta=1+\tan\theta,\ n\sec\theta=1-\tan\theta.$

〔陸士〕

(6) $\sin A+\sin B=a,\quad \cos A+\cos B=b,$ 及 $\cos(A-B)=c$ ヲ與ヘ A 及 B ヲ消去セヨ。〔大工〕

(7) 次ノ二式ニ於テ ψ ヲ消去シ, $\cos A$ ノ値ヲ a, b, c ニテ表ハセ。

$$a=(b+c)\cos\psi,$$

$$4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2\sin^2\psi.$$ 〔商船〕

(8) $\sin\theta\cos^2\theta=a,\ \sin^2\theta\cos\theta=b$ ナルトキハ

$$a^2b^2=(a^2+b^2)^3.$$

(9) $x=a\cos^m\theta\cos^m\psi,\ y=b\cos^m\theta\sin^m\psi,$ $z=c\sin^m\theta$ ナルトキハ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{m}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{m}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{m}}=1.$$

(10) $a\cos^2x+b\sin^2x=m\cos^2y,$

$a\sin^2x+b\cos^2x=n\sin^2y,$

$m\tan^2x=n\tan^2y$

ナルトキハ $\tan^2x=1,$ 及 $(a+b)(m+n)=2mn.$

附錄第三

希臘文字

大字	小字	發音	大字	小字	發音
Α	α	Alpha	Ν	ν	Nu
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
Ι	ι	Iota	Φ	φ	Phi
Κ	ϰ	Kappa	Χ	χ	Chi (ki)
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	Mu	Ω	ω	Omega

答

［容易ナルモノハ之ヲ略ス］

問　題 2 〔12頁-13頁〕

(9) 0·3088.　(10) $\sqrt{2}+1$.

問　題 3 〔15頁-17頁〕

(22) $\frac{115}{128}$.　(23) 0.　(24) 1.

(25) 1.　(26) 1.　(27) 2.

問　題 4 〔21頁〕

(10) 7·26.　(11) 6·93 寸。

問　題 5 〔25頁〕

(1) 0·3854.　(2) 0·9353.　(3) 0·7929.

(4) 1·2131.　(5) $29°25'·2$.　(6) $53°11'·5$.

(7) $69°16'·1$.　(8) $61°4'·7$.　(9) 5·215 尺。

問　題 6 〔30頁〕

(1) $A=18°40'$,　$c=527·7$.

(2) $A=62°52'·3,\quad B=27°7'·7,\quad b=182·4.$

(3) $B=27°25',\quad b=207·8,\quad c=451·2.$

(4) $B=71°36',\quad a=631·2,\quad b=1897·6.$

(7) 416·12 尺。 (10) 1035 哩餘。

問 題 7 〔36頁-39頁〕

(1) 6町 17 間 3 尺。 (2) $6\sqrt{3}$ 尺, 6 尺。

(3) 173·2 尺。 (4) 37·32 尺。 (6) 30 間。

(9) 1585 米弱。 (10) 川幅 240·2 尺, $AC=303·4$ 尺。

(11) $4(\cot\alpha\tan\beta-1)$ 哩。 (12) 273·2 間 餘。

(13) $120\sqrt{3}$ 尺, 60°. (14) $\sqrt{6}$ 哩 $=12931$ 呎弱。

問 題 8 〔52頁-54頁〕

(7) $\sin\theta=-\dfrac{4}{5},\ \cos\theta=\dfrac{3}{5}.$ 又ハ $\sin\theta=\dfrac{4}{5},$

$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}.$ (8) $\cos A=0·41,\ \sin A=\pm0·92,$

$\tan A=\pm2·24,\ \cot A=\pm0·44,\ \sec A=2·41,\ \mathrm{cosec}\,A=\pm1·08.$

(9) $\pm\dfrac{n\sin\theta}{\sqrt{(m^2+n^2+2\,mn\cos\theta)}}.$ (10) [1] 0. [2] $\sin A.$

(12) $ll'=mm'.$ (13) $p^2-q^2=4.$

(14) $a^2+b^2=c^2+d^2.$ (16) $a^2+b^2=1.$

(18) $\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha=m^2.$ (19) $x^2+y^2=2a^2.$

問 題 9 〔62頁-65頁〕

(1) 第一象限ノ場合。

$\sin(A+B)=\dfrac{24}{25},\ \cos(A+B)=-\dfrac{7}{25}.$

他ノ場合。 $\sin(A+B)=0,\ \cos(A+B)=1.$

或ハ $\sin(A+B)=\dfrac{24}{25},\ \cos(A+B)=\dfrac{7}{25}.$

或ハ $\sin(A+B)=0,\ \cos(A+B)=-1.$

(2) $-\dfrac{56}{33}$ (27) 90°.

(28) 正弦 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$ 餘弦 $=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

(29) $\tan\theta=\pm\dfrac{3}{4},\ \sin2\theta=\pm\dfrac{24}{25},$

$\cos\dfrac{\theta}{2}=\pm\dfrac{3}{\sqrt{10}},$ 或ハ $\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}.$

(30) $\dfrac{4ab(a-b)}{(a+b)^2}.$

問 題 10 〔67頁-70頁〕

(21) $\dfrac{1}{2}$ (23) [1] 0. [2] $\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

問 題 12 〔83頁-84頁〕

(1) 102. (2) $x=\log b/\log a.$ (3) 3·25527.

(4) $\bar{3}{\cdot}75258$. (5) $\bar{1}{\cdot}64782$. (6) $\bar{2}{\cdot}57403$.

(7) $\bar{1}.75767$. (8) $0{\cdot}15052$, $\bar{1}{\cdot}93753$, 0.93753.

(9) 34. (10) $0{\cdot}47730$. (11) $138{\cdot}128$.

(12) $50°11'32''$. (13) $\sqrt{2}$, $54°\,44'$.

(14) $45°$ 或ハ $30°\,57'\,49''{\cdot}7$. (15) [1] $\sqrt{3}\cos 20°$

[2] $\sqrt{m^2+n^2}\sin(\alpha+\psi)$, 但 $\sin\psi=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$,

[3] $a^2+b^2=a^2\sec^2\psi$, 但 $\tan\psi=\dfrac{a}{b}$.

問 題 14 〔95頁-97頁〕

(14) $120°$. (17) $1:\sqrt{3}:2$.

問 題 15 〔104頁-105頁〕

(1) $A=60°\,10'$, $b=10{\cdot}673$, $c=10{\cdot}512$.

(2) $C=54°\,20'$, $b=331{\cdot}68$, $c=392{\cdot}66$.

(3) $A=67°\,28'{\cdot}9$, $B=57°\,19'{\cdot}1$, $c=18{\cdot}41$.

(4) $B=49°\,44'{\cdot}8$, $C=90°\,2'{\cdot}2$, $c=119{\cdot}32$.

或ハ $B=130°\,15'{\cdot}2$, $C=9°\,34'{\cdot}9$, $c=19{\cdot}54$.

(5) $A=35°\,17'{\cdot}8$, $B=76°\,18'{\cdot}9$.

(6) 不能。 (7) $100\sqrt{3}$.

問 題 16 〔113頁-117頁〕

(1) 208·37尺。 (2) $\dfrac{h\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\sin\beta}$. (3) $18\sqrt{2}$ 海里。

(4) 距離 $=10\sqrt{2+\sqrt{2}}$ 海里。甲ハ乙ノ東北東。

(5) $\dfrac{h(a^2+h^2)}{a^2-h^2}$ 尺。 (6) 89·44 哩。 (7) $(2a+b)\tan\alpha$.

(8) $\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{\cot^2\alpha-\cot^2\beta}}$. (9) $\dfrac{h\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$.

(11) 212·21尺。 (13) $h\sqrt{(\cot^2\theta+\cot^2\theta'-\cot\theta\cot\theta')}$.

(14) 36·74間。 (15) 24米。

(16) $AB=d\cot\delta\sin\alpha\,/\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos(\beta+\gamma+\delta)$,

$BC=d\cot\delta\sin\beta\,/\cos(\beta+\gamma+\delta)\cos(\gamma+\delta)$,

$CD=d\sin\gamma\,/\sin\delta\cos(\gamma+\delta)$.

$AB=27{\cdot}3$ 米, $BC=15{\cdot}7$ 米, $CD=115$ 米。

附 錄 一

問 題 1 〔3頁-4頁〕

(5) 2162 哩。 (6) 92 678 844 哩。

問 題 2 〔9頁〕

(1) $n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{2}$. (2) $n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$.

(3) $2n\pi$ 及 $(2n+1)\pi$, 之ヲ一式ニ纏ムレバ $m\pi$.

(4) $n\pi$. (5) $2n\pi\pm\frac{5}{6}\pi$.

(6) 3°, 69°, 75°, 141°, 147°.

(7) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$. (8) $n\pi+\frac{\pi}{4}$. (9) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(10) $\theta=3°$, 21°, 39°, 57°, 75°.

問 題 3 〔11頁-12頁〕

(1) $\frac{1}{3}\left(2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)$. (2) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或ハ $(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

(3) $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ 或ハ $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(4) $\frac{1}{2}n\pi$ 或ハ $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$. (5) $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ 或ハ $2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$

(6) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (7) $n.360°\pm60°1'$.

(8) $n\pi$ 或ハ $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. (9) $n\pi$. (10) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

(11) $\theta=\frac{n}{4}\pi$ 或ハ $\frac{n}{3}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{18}$

(12) 60°, 180°, 300°. (13) 105°, 345

(14) 0°, ±15°, ±75°.

(51) [1] 45°, 90°. [2] 30°, 90°, 150°.

[3] 30°, 45°, 135°, 150°.

補習雜題答

第二集。 (1) 每時 $8\sqrt{3}$ 哩。

(2) $a=18{\cdot}928$ 尺, $b=16{\cdot}971$ 尺, $c=13{\cdot}856$ 尺。

(3) $2a\sin\frac{A}{2}$ 尺。 (4) 174·6 尺。 (6) 86·6 尺。

(7) 120 尺。 (8) $l/\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}$ 尺。 (9) 3733·5 呎。

(10) 802·5 尺, 582·8 尺。 (11) $3(\sqrt{3}+1)=8{\cdot}196$ 間。

第三集。 (10) 8. (14) 2.

第四集。 (67) $b/(c-a)$. (70) $-\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

(72) $\pm\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. (73) 1·93. (74) $\alpha=n.180°+60°$.

(84) [1] 0. [2] $\operatorname{cosec}2a$. (85) 1. (86) $\frac{3}{2}$.

(87) [1] $\pm\infty$. [2] $\frac{50}{27}$.

(89) $\tan7{\cdot}5°=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

(91) $a\cot\frac{\theta}{2}$. (92) 0·92388, −0·19509.

第五集。 (48) $\sqrt{39}$尺。$\frac{35}{4}\sqrt{3}$平方尺。

(49) $2\cos 20^\circ : 1$. (51) 10·58尺，17·44尺。

(54) 1·02. (55) 15·87尺。

(56) $125^\circ\ 0'44''$, $20^\circ\ 37'16''$.

(57) $124^\circ\ 48'\ 59''$, $33^\circ\ 11'\ 1''$.

(59) $A=45^\circ$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$.

第六集。 (1) 7050·66坪。(2) 94尺.

(3) 4000哩。(4) 1626里。(6) S. $82^\circ\ 38'{\cdot}3$ E.

(7) 3034·4尺。(8) $d\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\alpha\sim\beta)$尺。

(9) $\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})$哩，西北西。(13) $25(\sqrt{10}+\sqrt{2})$尺。

(15) 11·7哩。(16) 330·7間。(17) 2109·8尺。

(18) 1108·5平方尺，453·8平方尺。

第八集。 (1) 15°. (2) $22^\circ\ 30'$. (3) 90°.

(4) $22^\circ\ 30'$. (5) 30°. (6) 30°. (7) $22^\circ\ 30'$.

(8) 15°. (9) 75° (10) 45°. (11) 30°.

(12) 45°. (13) 15°. (14) 15°. (15) 30°.

(16) 45°. (17) 70°.

(18) $\theta=n\pi$ 或ハ $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (19) $4\theta=\theta+n\pi$.

(20) $2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或ハ $7\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

(21) $8\theta=n\pi$ 或ハ $8\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(22) $(a+b+2c)\,\theta=2n\pi\pm(a+b)\,\theta$.

(23) $3\theta=n\pi$ 或ハ $4\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

(24) $2\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或ハ $6\theta=2n\pi$.

(25) $4\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$. (26) $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或ハ $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

(27) $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 或ハ $2n\pi$. (28) $3\theta=\frac{\pi}{2}(2n+1)$.

或ハ $2\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. (29) $\theta=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

(30) $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. (31) $\theta=(3n+1)\frac{\pi}{6}$.

(32) $\theta=\frac{n\pi}{2}$. (33) $\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

(34) $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$ 或ハ $\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$.

(35) $\theta=n\pi$ 或ハ $3\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

(36) $\theta=n\pi+\frac{\pi}{4}$ 或ハ $\theta=n\pi+\frac{\pi}{6}$.

(37) $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ 或ハ $\theta=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$.

(38) [1] $x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$, $y=90^\circ-\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

[2] $x=120^\circ$, $y=30^\circ$. 或ハ $x=30^\circ$, $y=120^\circ$.

但最小正値ヲ取ル。

(39) $x=1{\cdot}44341$. (40) $x=1{\cdot}06$.

(41) $x=-0{\cdot}14191$. (42) $x=\pm345{\cdot}48$.

(43) $2x=39^\circ\ 13'{\cdot}9$.

第十集。 (1) $a^2+b^2=m^2+n^2$.

(2) $4(a-b)^2+(a^2-b^2)^2=16$.

(3) $(a-b)^2(c+d)^2+(a+b)^2(c-d)^2=(a^2-b^2)^2$.

(4) $a^2+b^2=1$. (5) $m^2+n^2=2$.

(6) $a^2+b^2=2(1+c)$.

(7) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

(終)

第一表

數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 564
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 925	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 065	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 204	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 535	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 677	98 722	98 767	98 811	98 856	98 900	98 945	98 989	99 034	99 078
98	99 123	99 167	99 211	99 255	99 300	99 344	99 388	99 432	99 476	99 520
99	99 564	99 607	99 651	99 695	99 739	99 782	99 826	99 870	99 913	99 957
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 00	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	492	522	551	580
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869

比例部分

	44	43	42
1	4·4	4·3	4·2
2	8·8	8·6	8·4
3	13·2	12·9	12·6
4	17·6	17·2	16·8
5	22·0	21·5	21·0
6	26·4	25·8	25·2
7	30·8	30·1	29·4
8	35·2	34·4	33·6
9	39·6	38·7	37·8
	41	**40**	**39**
1	4·1	4·0	3·9
2	8·2	8·0	7·8
3	12·3	12·0	11·7
4	16·4	16·0	15·6
5	20·5	20·0	19·5
6	24·6	24·0	23·4
7	28·7	28·0	27·3
8	32·8	32·0	31·2
9	36·9	36·0	35·1
	38	**37**	**36**
1	3·8	3·7	3·6
2	7·6	7·4	7·2
3	11·4	11·1	10·8
4	15·2	14·8	14·4
5	19·0	18·5	18·0
6	22·8	22·2	21·6
7	26·6	25·9	25·2
8	30·4	29·6	28·8
9	34·2	33·3	32·4
	35	**34**	**33**
1	3·5	3·4	3·3
2	7·0	6·8	6·6
3	10·5	10·2	9·9
4	14·0	13·6	13·2
5	17·5	17·0	16·5
6	21·0	20·4	19·8
7	24·5	23·8	23·1
8	28·0	27·2	26·4
9	31·5	30·6	29·7
	32	**31**	**30**
1	3·2	3·1	3·0
2	6·4	6·2	6·0
3	9·6	9·3	9·0
4	12·8	12·4	12·0
5	16·0	15·5	15·0
6	19·2	18·6	18·0
7	22·4	21·7	21·0
8	25·6	24·8	24·0
9	28·8	27·9	27·0

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298

比例部分

	29	28
1	2·9	2·8
2	5·8	5·6
3	8·7	8·4
4	11·6	11·2
5	14·5	14·0
6	17·4	16·8
7	20·3	19·6
8	23·2	22·4
9	26·1	25·2

	27	26
1	2·7	2·6
2	5·4	5·2
3	8·1	7·8
4	10·8	10·4
5	13·5	13·0
6	16·2	15·6
7	18·9	18·2
8	21·6	20·8
9	24·3	23·4

	25
1	2 5
2	5·0
3	7·5
4	10·0
5	12·5
6	15·0
7	17·5
8	20·0
9	22·5

	24	23
1	2·4	2·3
2	4·8	4·6
3	7·2	6·9
4	9·6	9·2
5	12·0	11·5
6	14·4	13·8
7	16·8	16·1
8	19·2	18·4
9	21·6	20·7

	22	21
1	2·2	2·1
2	4·4	4·2
3	6·6	6·3
4	8·8	8·4
5	11·0	10·5
6	13·2	12·6
7	15·4	14·7
8	17·6	16·8
9	19·8	18·9

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
220	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005
224	35 025	044	064	983	102	122	141	160	180	199
225	218	238	257	276	295	315	334	353	372	392
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154
230	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	549	568	586	605	624	642	661	680	698	717
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
245	917	934	952	970	687	*005	*023	*041	*058	*076
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777
250	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950

比例部分

	22	21
1	2·2	2·1
2	4·4	4·2
3	6·6	6·3
4	8·8	8·4
5	11·0	10·5
6	13·2	12·6
7	15·4	14·7
8	17·6	16·8
9	19.8	18·9

	20
1	2·0
2	4·0
3	6·0
4	8·0
5	10·0
6	12·0
7	14·0
8	16·0
9	18.0

	19
1	1·9
2	3·8
3	5·7
4	7·6
5	9·5
6	11·4
7	13·3
8	15·2
9	17·1

	18
1	1·8
2	3·6
3	5·4
4	7·2
5	9·0
6	10·8
7	12·6
8	14·4
9	16·2

	17
1	1·7
2	3·4
3	5·1
4	6·8
5	8·5
6	10·2
7	11·9
8	13·6
9	15·3

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
251	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
258	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271	297	313	3 9	345	361	377	393	409	425	441
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
298	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
299	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698
300	712	727	741	756	770	784	799	813	828	842

比例部分

	18	17	16	15	14
1	1·8	1·7	1·6	1·5	1·4
2	3·6	3·4	3·2	3·0	2·8
3	5·4	5·1	4·8	4·5	4·2
4	7·2	6·8	6·4	6·0	5·6
5	9·0	8·5	8·0	7·5	7·0
6	10·8	10·2	9·6	9·0	8·4
7	12·6	11·9	11·2	10·5	9·8
8	14·4	13·6	12·8	12·0	11·2
9	16·2	15·3	14·4	13·5	12·6

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51 055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
325	188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
340	148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
341	275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342	403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343	529	542	555	567	580	593	605	618	631	643
344	656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345	782	794	807	820	832	845	857	870	882	895
346	908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
347	54 033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348	158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349	283	295	307	320	332	345	357	370	382	394
350	407	419	432	444	450	469	481	494	506	518

比例部分

	15	14	13	12
1	1·5	1·4	1·3	1·2
2	3·0	2·8	2·6	2·4
3	4·5	4·2	3·9	3·6
4	6·0	5·6	5·2	4·8
5	7·5	7·0	6·5	6·0
6	9·0	8·4	7·8	7·2
7	10·5	9·8	9·1	8·4
8	12·0	11·2	10·4	9·6
9	13·5	12·6	11·7	10·8

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360	630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361	751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362	871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363	991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098
364	56 110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365	229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366	348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367	467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368	585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
369	703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370	820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371	937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378	749	761	772	784	795	807	818	830	841	352
379	864	875	887	898	910	921	633	944	955	967
380	978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
381	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	988	999	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
399	60 097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
400	206	217	228	239	249	260	271	282	293	304

比例部分

	13	12	11	10
1	1·3	1·2	1·1	1·0
2	2·6	2·4	2·2	2·0
3	3·9	3·6	3·3	3·0
4	5·2	4·8	4·4	4·0
5	6·5	6·0	5·5	5·0
6	7·8	7·2	6·6	6·0
7	9·1	8·4	7·7	7·0
8	10·4	9·6	8·8	8·0
9	11·7	10·8	9·9	9·0

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60 206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	423	433	444	455	466	477	487	498	509	500
403	531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	638	649	660	670	681	692	703	713	724	735
405	746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	853	863	874	885	895	906	917	927	938	949
407	959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215	225	236	247	257	268
410	278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	752	763	773	784	794
415	805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003
417	62 014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315
420	325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
424	737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
429	246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
432	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	849	859	869	879	889	899	909	919	929	939
436	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
441	444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
443	640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
445	836	846	856	865	875	885	895	904	914	924
446	933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	128	137	147	157	167	176	186	196	205	215
449	225	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450	321	331	341	350	360	369	379	389	398	408

比例部分

	11	10	9
1	1·1	1·0	0·9
2	2·2	2·0	1·8
3	3·3	3·0	2·7
4	4·4	4·0	3·6
5	5·5	5·0	4·5
6	6·6	6·0	5·4
7	7·7	7·0	6·3
8	8·8	8·0	7·2
9	9·9	9·0	8·1

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	65 321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
451	418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
452	514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
453	610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
454	706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
455	801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
456	896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
457	992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
458	66 087	096	106	115	124	134	143	153	162	172
459	181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
460	276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
461	370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
462	464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
463	558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
464	652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
465	745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
466	839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
467	932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
468	67 025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469	117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470	210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471	302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472	394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473	486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474	578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475	669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476	761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477	852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478	943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
479	68 034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484	485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485	574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486	664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487	753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488	842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489	931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
500	897	906	914	923	932	940	949	958	966	975

比例部分

	10	9	8
1	1·0	0·9	0·8
2	2·0	1·8	1·6
3	3·0	2·7	2·4
4	4·0	3·6	3·2
5	5·0	4·5	4·0
6	6·0	5·4	4·8
7	7·0	6·3	5·6
8	8·0	7·2	6·4
9	9·0	8·1	7·2

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
535	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540	239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107

比例部分

	9	8	7
1	0·9	0·8	0·7
2	1·8	1·6	1·4
3	2·7	2·4	2·1
4	3·6	3·2	2·8
5	4·5	4·0	3·5
6	5·4	4·8	4·2
7	6·3	5·6	4·9
8	7·2	6·4	5·6
9	8·1	7·2	6·3

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
551	115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
552	194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
553	273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
555	429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
558	663	671	679	687	695	702	710	718	726	733
559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
560	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
561	896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
562	974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*042
563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
565	205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
566	282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
567	358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
568	435	442	450	458	465	473	481	488	496	504
569	511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
570	587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
572	740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
575	967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
579	208	275	283	290	298	305	313	320	328	335
580	343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
581	418	425	433	440	448	455	462	470	477	485
582	492	500	507	515	522	530	537	545	552	559
583	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
584	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
585	716	723	730	738	745	753	760	768	775	782
586	790	797	805	812	819	827	834	842	849	856
587	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
588	938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004
589	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
590	085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
591	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225
592	232	240	247	254	262	269	276	283	291	298
593	305	313	320	327	335	342	349	357	364	371
594	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
595	452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
596	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590
597	597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
598	670	677	685	692	699	706	714	721	728	735
599	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808
600	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880

比例部分

	8
1	0·8
2	1·6
3	2·4
4	3·2
5	4·0
6	4·8
7	5·6
8	6·4
9	7·2

	7
1	0·7
2	1·4
3	2·1
4	2·8
5	3·5
6	4·2
7	4·9
8	5·6
9	6·3

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
602	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
605	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
615	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232
620	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
625	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650
626	657	664	671	678	685	762	699	706	713	720
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
635	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	911
640	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
642	754	760	797	774	781	787	794	801	808	814
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
645	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351

比例部分

	8
1	0·8
2	1·6
3	2·4
4	3·2
5	4·0
6	4·8
7	5·6
8	6·4
9	7·2

	7
1	0·7
2	1·4
3	2·1
4	2·8
5	3·5
6	4·2
7	4·9
8	5·6
9	6·3

	6
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	885	891	397	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	198	205	211	217	223	230	236	242	248	255
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504
700	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566

比例部分

7	
1	0·7
2	1·4
3	2·1
4	2·8
5	3·5
6	4·2
7	4·9
8	5·6
9	6·3

6	
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
705	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710	126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
715	431	437	443	449	455	461	467	473	479	485
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
719	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
724	974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028
725	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
729	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730	332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
731	392	398	404	410	415	421	427	433	439	445
732	451	457	463	469	475	481	487	493	499	504
733	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
734	570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
735	629	635	641	646	652	658	664	670	676	682
736	688	694	700	705	711	717	723	729	735	741
737	747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
738	806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
739	864	870	876	882	888	894	900	906	911	917
740	923	929	935	941	947	953	958	964	970	976
741	982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210
745	216	221	227	233	239	245	251	256	262	268
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326
747	332	338	344	349	355	361	367	373	379	384
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442
749	448	454	460	466	471	477	483	489	495	500
750	506	512	518	523	526	535	541	547	552	558

比例部分

7	
1	0·7
2	1·4
3	2·1
4	2·8
5	3·5
6	4·2
7	4·9
8	5·6
9	6·3

6	
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

5	
1	0·5
2	1·0
3	1·5
4	2·0
5	2·5
6	3·0
7	3·5
8	4·0
9	4·5

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789
755	795	800	806	812	818	823	829	835	841	846
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961
758	967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	078
760	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981
776	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977
794	982	988	993	998	*004	009	*015	*020	*026	*031
795	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304
800	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358

比例部分

6	
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

5	
1	0·5
2	1·0
3	1·5
4	2·0
5	2·5
6	3·0
7	3·5
8	4·0
9	4·5

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	90 309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628
806	634	639	644	650	755	660	666	671	677	682
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843
810	849	854	859	865	870	875	881	886	891	897
811	902	907	913	918	924	929	934	940	945	950
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004
813	91 009	014	020	025	030	036	041	046	052	057
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217
817	222	228	233	238	243	249	254	259	265	270
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376
820	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429
821	434	440	445	450	455	461	466	471	477	482
822	487	492	498	503	508	514	519	524	529	535
823	540	545	551	556	561	566	572	577	582	587
824	593	598	603	609	614	619	624	630	635	640
825	645	651	656	661	666	672	677	682	687	693
826	698	703	709	714	719	724	730	735	740	745
827	751	756	761	766	772	777	782	787	793	798
828	803	808	814	819	824	829	834	840	845	850
829	855	861	866	871	876	882	887	892	897	903
830	908	913	918	924	929	934	939	944	950	955
831	960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007
832	92 012	018	023	028	033	038	044	049	054	059
833	065	070	075	080	085	091	096	101	106	111
834	117	122	127	132	137	143	148	153	158	163
835	169	174	179	184	189	195	200	205	210	215
836	221	226	231	236	241	247	252	257	262	267
837	273	278	283	288	293	298	304	309	314	319
838	324	330	335	340	345	350	355	361	366	371
839	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423
840	428	433	438	443	449	454	459	464	469	474
841	480	485	490	495	500	505	511	516	521	526
842	531	536	542	547	552	557	562	567	572	578
843	583	588	593	598	603	609	614	619	624	629
844	634	639	645	650	655	660	665	670	675	681
845	686	691	696	701	706	711	716	722	727	732
846	737	742	747	752	758	763	768	773	778	783
847	788	793	799	804	809	814	819	824	829	834
848	840	845	850	855	860	865	870	875	881	886
849	891	896	901	906	911	916	921	927	932	937
850	942	947	952	957	962	967	973	978	983	988

比例部分

6	
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

5	
1	0·5
2	1·0
3	1·5
4	2·0
5	2·5
6	3·0
7	3·5
8	4·0
9	4·5

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92 942	947	952	957	962	967	973	978	983	688
851	993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039
852	93 044	049	054	059	064	069	075	080	085	090
853	095	100	105	110	115	120	125	131	136	141
854	146	151	156	161	166	171	176	181	186	192
855	197	202	207	212	217	222	227	232	237	242
856	247	252	258	263	268	273	278	283	288	293
857	298	303	308	313	318	323	328	334	339	344
858	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
859	399	404	409	414	420	425	430	435	440	445
860	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	694	699	704	709	714	719	724	729	634	738
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	376	381	386	390	395	400	405	410	415	419
900	424	429	434	439	444	448	453	458	463	468

比例部分

	6	5	4
1	0·6	0·5	0·4
2	1·2	1·0	0·8
3	1·8	1·5	1·2
4	2·4	2·0	1·6
5	3·0	2·5	2·0
6	3·6	3·0	2·4
7	4·2	3·5	2·8
8	4·8	4·0	3·2
9	5·4	4·5	3·6

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
901	472	477	482	487	492	497	501	506	511	516
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
905	665	670	674	679	684	689	694	698	703	708
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899
910	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
914	095	099	104	109	114	118	123	128	133	137
915	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374
920	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609
925	614	619	624	628	633	638	642	647	652	656
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844
930	848	853	358	862	867	872	876	881	886	890
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933	988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077
935	081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308
940	313	317	322	327	331	336	340	345	350	354
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539
945	543	548	552	557	562	566	571	575	580	585
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768
950	772	777	782	786	791	795	800	804	809	813

比例部分

	5	4
1	0·5	0·4
2	1·0	0·8
3	1·5	1·2
4	2·0	1·6
5	2·5	2·0
6	3·0	2·4
7	3·5	2·8
8	4·0	3·2
9	4·5	3·6

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813	
951	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859	
952	864	868	873	877	882	886	891	896	900	905	
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950	
954	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996	
955	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041	
956	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087	
957	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132	
958	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177	
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223	
960	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268	5
961	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313	1 │ 0·5
962	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358	2 │ 1·0
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403	3 │ 1·5
964	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448	4 │ 2·0
965	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493	5 │ 2·5
966	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538	6 │ 3·0
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583	7 │ 3·5
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628	8 │ 4·0
969	932	637	641	646	650	655	659	664	668	673	9 │ 4·5
970	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717	
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762	
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807	
973	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851	
974	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896	
975	900	905	909	914	918	923	927	932	636	941	
976	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985	
977	989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029	
978	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074	
979	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118	
980	123	127	131	136	140	145	149	154	158	162	4
981	167	171	176	180	185	189	193	198	202	207	1 │ 0·4
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251	2 │ 0·8
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295	3 │ 1·2
984	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339	4 │ 1·6
985	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383	5 │ 2·0
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427	6 │ 2·4
987	432	436	441	445	449	454	458	463	467	471	7 │ 2·8
988	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515	8 │ 3·2
989	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559	9 │ 3·6
990	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603	
991	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647	
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691	
993	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734	
994	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778	
995	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822	
996	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865	
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909	
998	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952	
999	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996	
1000	00 000	004	009	013	107	022	026	030	035	039	

第二表

三角函數ノ對數表

°	′	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	′	°
0	0	——		——		——	10. 00 000		0	90
	10	7. 46 373	30102	7. 46 373	30103	12. 53 627	10. 00 000	0	50	
	20	7. 76 475	17609	7. 76 476	17610	12. 23 524	9. 99 999	1	40	
	30	7. 94 084	12494	7. 94 086	12495	12. 05 914	9. 99 998	1	30	
	40	8. 06 578	9690	8. 06 581	9692	11. 93 419	9. 99 997	1	20	
	50	8. 16 268	7918	8. 16 273	7919	11. 83 727	9. 99 995	2	10	
1	0	8. 24 186	6693	8. 24 192	6696	11. 75 808	9. 99 993	2	0	89
	10	8. 30 879	5799	8. 30 888	5801	11. 69 112	9. 99 991	2	50	
	20	8. 36 678	5114	8. 36 689	5118	11. 63 311	9. 99 988	3	40	
	30	8. 41 792	4574	8. 41 807	4578	11. 58 193	9. 99 985	3	30	
	40	8. 46 366	4138	8. 46 385	4142	11. 53 615	9. 99 982	3	20	
	50	8. 50 504	3778	8. 50 527	3781	11. 49 473	9. 99 978	4	10	
2	0	8. 54 282	3475	8. 54 308	3480	11. 45 692	9. 99 974	4	0	88
	10	8. 57 757	3216	8. 57 788	3221	11. 42 212	9. 99 969	5	50	
	20	8. 60 973	2995	8. 61 009	3000	11. 38 991	9. 99 964	5	40	
	30	8. 63 968	2801	8. 64 009	2807	11. 35 991	9. 99 959	5	30	
	40	8. 66 769	2631	8. 66 816	2637	11. 33 184	9. 99 953	6	20	
	50	8. 69 400	2480	8. 69 453	2487	11. 30 547	9. 99 947	6	10	
3	0	8. 71 880	2346	8. 71 940	2352	11. 28 060	9. 99 940	7	0	87
	10	8. 74 226	2225	8. 74 292	2233	11. 25 708	9. 99 934	6	50	
	20	8. 76 451	2117	8. 76 525	2124	11. 23 475	9. 99 926	8	40	
	30	8. 78 568	2017	8. 78 649	2025	11. 21 351	9. 99 919	7	30	
	40	8. 80 585	1928	8. 80 674	1936	11. 19 326	9. 99 911	8	20	
	50	8. 82 513	1845	8. 82 610	1854	11. 17 390	9. 99 903	8	10	
4	0	8. 84 358	1770	8. 84 464	1779	11. 15 536	9. 99 894	9	0	86
	10	8. 86 128	1701	8 86 243	1710	11. 13 757	9. 99 885	9	50	
	20	8. 87 829	1635	8. 87 953	1645	11. 12 047	9. 99 876	9	40	
	30	8. 89 464	1576	8. 89 598	1587	11. 10 402	9. 99 866	10	30	
	40	8. 91 040	1521	8. 91 185	1531	11. 08 815	9. 99 856	10	20	
	50	8. 92 561	1469	8. 92 716	1479	11. 07 284	9. 99 845	11	10	
5	0	8. 94 030	1420	8. 94 195	1432	11. 05 805	9. 99 834	11	0	85
	10	8. 95 450	1375	8. 95 627	1386	11. 04 373	9. 99 823	11	50	
	20	8. 96 825	1332	8. 97 013	1345	11. 02 987	9. 99 812	11	40	
	30	8. 98 157	1293	8. 98 358	1304	11. 01 642	9. 99 800	12	30	
	40	8. 99 450	1254	8. 99 662	1268	11. 00 338	9. 99 787	13	20	
	50	9. 00 704	1219	9. 00 930	1232	10. 99 070	9. 99 775	12	10	
6	0	9. 01 923	1186	9. 02 162	1199	10. 97 838	9. 99 761	14	0	84
	10	9. 03 109	1153	9. 03 361	1167	10. 96 639	9. 99 748	13	50	
	20	9. 04 262	1124	9. 04 528	1138	10. 95 472	9. 99 734	14	40	
	30	9. 05 386	1095	9. 05 666	1109	10. 94 334	9. 99 720	14	30	
	40	9. 06 481	1067	9. 06 775	1083	10. 93 225	9. 99 705	15	20	
	50	9. 07 548	1041	9. 07 858	1056	10. 92 142	9. 99 690	15	10	
7	0	9. 08 589	1017	9. 08 914	1033	10. 91 086	9. 99 675	15	0	83
	10	9. 09 606	993	9. 09 947	1009	10. 90 053	9. 99 659	16	50	
	20	9. 10 599	971	9. 10 956	987	10. 89 044	9. 99 643	16	40	
	30	9. 11 570	949	9. 11 943	966	10. 88 057	9. 99 627	16	30	
	40	9. 12 519	928	9. 12 909	945	10. 87 091	9. 99 610	17	20	
	50	9. 13 447	909	9. 13 854	926	10. 86 146	9. 99 593	17	10	
8	0	9. 14 356		9. 14 780		10. 85 220	9. 99 575	18	0	82
°	′	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	′	°

°	′	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	′	°
8	0	9. 14 356		9. 14 780		10. 85 220	9. 99 575		0	82
	10	9. 15 245	889	9. 15 688	908	10. 84 312	9. 99 557	18	50	
	20	9. 16 116	871	9. 16 577	889	10. 83 423	9. 99 539	18	40	
	30	9. 16 970	854	9. 17 450	873	10. 82 550	9. 99 520	19	30	
	40	9. 17 807	837	9. 18 306	856	10. 81 694	9. 99 501	19	20	
	50	9. 18 628	821	9. 19 146	840	10. 80 854	9. 99 482	19	10	
9	0	9. 19 433	805	9. 19 971	825	10. 80 029	9. 99 462	20	0	81
	10	9. 20 223	790	9. 20 782	811	10. 79 218	9. 99 442	20	50	
	20	9. 20 999	776	9. 21 578	796	10. 78 422	9. 99 421	21	40	
	30	9. 21 761	762	9. 22 361	783	10. 77 639	9. 99 400	21	30	
	40	9. 22 509	748	9. 23 130	769	10. 76 870	9. 99 379	21	20	
	50	9. 23 244	735	9. 23 887	757	10. 76 113	9. 99 357	22	10	
10	0	9. 23 967	723	9. 24 632	745	10. 75 368	9. 99 335	22	0	80
	10	9. 24 677	710	9. 25 365	733	10. 74 635	9. 99 313	22	50	
	20	9. 25 376	699	9. 26 086	721	10. 73 914	9. 99 290	23	40	
	30	9. 26 063	687	9. 26 797	711	10. 73 203	9. 99 267	23	30	
	40	9. 26 739	676	9. 27 496	699	10. 72 504	9. 99 243	24	20	
	50	9. 27 405	666	9. 28 186	690	10. 71 814	9. 99 219	24	10	
11	0	9. 28 060	655	9. 28 865	679	10. 71 135	9. 99 195	24	0	79
	10	9. 28 705	645	9. 29 535	670	10. 70 465	9. 99 170	25	50	
	20	9. 29 340	635	9. 30 195	660	10. 69 805	9. 99 145	25	40	
	30	9. 29 966	626	9. 30 846	651	10. 69 154	9. 99 119	26	30	
	40	9. 30 582	616	9. 31 489	643	10. 68 511	9. 99 093	26	20	
	50	9. 31 189	607	9. 32 122	633	10. 67 878	9. 99 067	26	10	
12	0	9. 31 788	599	9. 32 747	625	10. 67 253	9. 99 040	27	0	78
	10	9. 32 378	590	9. 33 365	618	10. 66 635	9. 99 013	27	50	
	20	9. 32 960	582	9. 33 974	609	10. 66 026	9. 98 986	27	40	
	30	9. 33 534	574	9. 34 576	602	10. 65 424	9. 98 958	28	30	
	40	9. 34 100	566	9. 35 170	594	10. 64 830	9. 98 930	28	20	
	50	9. 34 658	558	9. 35 757	587	10. 64 243	9. 98 901	29	10	
13	0	9. 35 209	551	9. 36 336	579	10. 63 664	9. 98 872	29	0	77
	10	9. 35 752	543	9. 36 909	573	10. 63 091	9. 98 843	29	50	
	20	9. 36 289	537	9. 37 476	567	10. 62 524	9. 98 813	30	40	
	30	9. 36 819	530	9. 38 035	559	10. 61 965	9. 98 783	30	30	
	40	9. 37 341	522	9. 38 589	554	10. 61 411	9. 98 753	30	20	
	50	9. 37 858	517	9. 39 136	547	10. 60 864	9. 98 722	31	10	
14	0	9. 38 368	510	9. 39 677	541	10. 60 323	9. 98 690	32	0	76
	10	9. 38 871	503	9. 40 212	535	10. 59 788	9. 98 659	31	50	
	20	9. 39 369	498	9. 40 742	530	10. 59 258	9. 98 627	32	40	
	30	9. 39 860	491	9. 41 266	524	10. 58 734	9. 98 594	33	30	
	40	9. 40 346	486	9. 41 784	518	10. 58 216	9. 98 561	33	20	
	50	9. 40 825	479	9. 42 297	513	10. 57 703	9. 98 528	33	10	
15	0	9. 41 300	475	9. 42 805	508	10. 57 195	9. 98 494	34	0	75
	10	9. 41 768	468	9. 43 308	503	10. 56 692	9. 98 460	34	50	
	20	9. 42 232	464	9. 43 806	498	10. 56 194	9. 98 426	34	40	
	30	9. 42 690	458	9. 44 299	493	10. 55 701	9. 98 391	35	30	
	40	9. 43 143	453	9. 44 787	488	10. 55 213	9. 98 356	35	20	
	50	9. 43 591	448	9. 45 271	484	10. 54 729	9. 98 320	36	10	
16	0	9. 44 034	443	9. 45 750	479	10. 54 250	9. 98 284	36	0	74
°	′	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	′	°

°	′	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	′	°
16	0	9. 44 034		9. 45 750		10. 54 250	9. 98 284		0	74
	10	9. 44 472	438	9. 46 224	474	10. 53 776	9. 98 248	36	50	
	20	9. 44 905	433	9. 46 694	470	10. 53 306	9. 98 211	37	40	
	30	9. 45 334	429	9. 47 160	466	10. 52 840	9. 98 174	37	30	
	40	9. 45 758	424	9. 47 622	462	10. 52 378	9. 98 136	38	20	
	50	9. 46 178	420	9. 48 080	458	10. 51 920	9. 98 098	38	10	
17	0	9. 46 594	416	9. 48 534	454	10. 51 466	9. 98 060	38	0	73
	10	9. 47 005	411	9. 48 984	450	10. 51 016	9. 98 021	39	50	
	20	9. 47 411	406	9. 49 430	446	10. 50 570	9. 97 982	39	40	
	30	9. 47 814	403	9. 49 872	442	10. 50 128	9. 97 942	40	30	
	40	9. 48 213	399	9. 50 311	439	10. 49 689	9. 97 902	40	20	
	50	9. 48 607	394	9. 50 746	435	10. 49 254	9. 97 861	41	10	
18	0	9. 48 998	391	9. 51 178	432	10. 48 822	9. 97 821	40	0	72
	10	9. 49 385	387	9. 51 606	428	10. 48 394	9. 97 779	42	50	
	20	9. 49 768	383	9. 52 031	425	10. 47 969	9. 97 738	41	40	
	30	9. 50 148	380	9. 52 452	421	10. 47 548	9. 97 696	42	30	
	40	9. 50 523	375	9. 52 870	418	10. 47 130	9. 97 653	43	20	
	50	9. 50 896	373	9. 53 285	415	10. 46 715	9. 97 610	43	10	
19	0	9. 51 264	368	9. 53 697	412	10. 46 303	9. 97 567	43	0	71
	10	9. 51 629	365	9. 54 106	409	10. 45 894	9. 97 523	44	50	
	20	9. 51 991	362	9. 54 512	406	10. 45 488	9. 97 479	44	40	
	30	9. 52 350	359	9. 54 915	403	10. 45 085	9. 97 435	44	30	
	40	9. 52 705	355	9. 55 315	400	10. 44 685	9. 97 390	45	20	
	50	9. 53 056	351	9. 55 712	397	10. 44 288	9. 97 344	46	10	
20	0	9. 53 405	349	9. 56 107	395	10. 43 893	9. 97 299	45	0	70
	10	9. 53 751	346	9. 56 498	391	10. 43 502	9. 97 252	47	50	
	20	9. 54 093	342	9. 56 887	389	10. 43 113	9. 97 206	46	40	
	30	9. 54 433	340	9. 57 274	387	10. 42 726	9. 97 159	47	30	
	40	9. 54 769	336	9. 57 658	384	10. 42 342	9. 97 111	48	20	
	50	9. 55 102	333	9. 58 039	381	10. 41 961	9. 97 063	48	10	
21	0	9. 55 433	331	9. 58 418	379	10. 41 582	9. 97 015	48	0	69
	10	9. 55 761	328	9. 58 794	376	10. 41 206	9. 96 966	49	50	
	20	9. 56 085	324	9. 59 168	374	10. 40 832	9. 96 917	49	40	
	30	9. 56 408	323	9. 59 540	372	10. 40 460	9. 96 868	49	30	
	40	9. 56 727	319	9. 59 909	369	10. 40 091	9. 96 818	50	20	
	50	9. 57 044	317	9. 60 276	367	10. 39 724	9. 96 767	51	10	
22	0	9. 57 358	314	9. 60 641	365	10. 39 359	9. 96 717	50	0	68
	10	9. 57 669	311	9. 61 004	363	10. 38 996	9. 96 665	52	50	
	20	9. 57 978	309	9. 61 364	360	10. 38 636	9. 96 614	51	40	
	30	9. 58 284	306	9. 61 722	358	10. 38 278	9. 96 562	52	30	
	40	9. 58 588	304	9. 62 079	357	10. 37 921	9. 96 509	53	20	
	50	9. 58 889	301	9. 62 433	354	10. 37 567	9. 96 456	53	10	
23	0	9. 59 188	299	9. 62 785	352	10. 37 215	9. 96 403	53	0	67
	10	9. 59 484	296	9. 63 135	350	10. 36 865	9. 96 349	54	50	
	20	9. 59 778	294	9. 63 484	349	10. 36 516	9. 96 294	55	40	
	30	9. 60 070	292	9. 63 830	346	10. 36 170	9. 96 240	54	30	
	40	9. 60 359	289	9. 64 175	345	10. 35 825	9. 96 185	55	20	
	50	9. 60 646	287	9. 64 517	342	10. 35 483	9. 96 129	56	10	
24	0	9. 60 931	285	9. 64 858	341	10. 35 142	9. 96 073	56	0	66
°	′	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	′	°

°	′	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	′	°
24	0	9. 60 931		9. 64 858		10. 35 142	9. 96 073		0	66
	10	9. 61 214	283	9. 65 197	339	10. 34 803	9. 96 017	56	50	
	20	9. 61 494	280	9. 65 535	338	10. 34 465	9. 95 960	57	40	
	30	9. 61 773	279	9· 65 870	335	10. 34 130	9. 95 902	58	30	
	40	9. 62 049	276	9. 66 204	334	10. 33 796	9. 95 844	58	20	
	50	9. 62 323	274	9. 66 537	333	10. 33 463	9. 95 786	58	10	
25	0	9. 62 595	272	9. 66 867	330	10. 33 133	9. 95 728	58	0	65
	10	9. 62 865	270	9. 67 196	329	10. 32 804	9. 95 668	60	50	
	20	9. 63 133	268	9. 67 524	328	10. 32 476	9. 95 609	59	40	
	30	9. 63 398	265	9. 67 850	326	10. 32 150	9. 95 549	60	30	
	40	9. 63 662	264	9. 68 174	324	10. 31 826	9. 95 488	61	20	
	50	9. 63 924	262	9. 68 497	323	10. 31 503	9. 95 427	61	10	
26	0	9. 64 184	260	9. 68 818	321	10. 31 182	9. 95 366	61	0	64
	10	9. 64 442	258	9. 69 138	320	10. 30 862	9. 95 304	62	50	
	20	9. 64 698	256	9. 69 457	319	10. 30 543	9. 95 242	62	40	
	30	9. 64 953	255	9. 69 774	317	10. 30 226	9. 95 179	63	30	
	40	9. 65 205	252	9. 70 089	315	10. 29 911	9. 95 116	63	20	
	50	9. 65 456	251	9. 70 404	315	10. 29 596	9. 95 052	64	10	
27	0	9. 65 705	249	9. 70 717	313	10. 29 283	9. 94 988	64	0	63
	10	9. 65 952	247	9. 71 028	311	10. 28 972	9. 94 923	65	50	
	20	9. 66 197	245	9. 71 339	311	10. 28 661	9. 94 858	65	40	
	30	9. 66 441	244	9. 71 648	309	10. 28 352	9. 94 793	65	30	
	40	9. 66 682	241	9. 71 955	307	10. 28 045	9. 94 727	66	20	
	50	9. 66 922	240	9. 72 262	307	10. 27 738	9. 94 660	67	10	
28	0	9. 67 161	239	9. 72 567	305	10. 27 433	9. 94 593	67	0	62
	10	9. 67 398	237	9. 72 872	305	10. 27 128	9. 94 526	67	50	
	20	9. 67 633	235	9. 73 175	303	10. 26 825	9. 94 458	68	40	
	30	9. 67 866	233	9. 73 476	301	10. 26 524	9. 94 390	68	30	
	40	9. 68 098	232	9. 73 777	301	10. 26 223	9. 94 321	69	20	
	50	9. 68 328	230	9. 74 077	300	10. 25 923	9. 94 252	69	10	
29	0	9. 68 557	229	9. 74 375	298	10. 25 625	9. 94 182	70	0	61
	10	9. 68 784	227	9. 74 673	298	10. 25 327	9. 94 112	70	50	
	20	9. 69 010	226	9. 74 969	296	10. 25 031	9. 94 041	71	40	
	30	9. 69 234	224	9. 75 264	295	10. 24 736	9. 93 970	71	30	
	40	9. 69 456	222	9. 75 558	294	10. 24 442	9. 93 898	72	20	
	50	9. 69 677	221	9. 75 852	294	10. 24 148	9. 93 826	72	10	
30	0	9. 69 897	220	9. 76 144	292	10. 23 856	9. 93 753	73	0	60
	10	9. 70 115	218	9. 76 435	291	10. 23 565	9. 93 680	73	50	
	20	9. 70 332	217	9. 76 725	290	10. 23 275	9. 93 606	74	40	
	30	9. 70 547	215	9. 77 015	290	10. 22 985	9. 93 532	74	30	
	40	9. 70 761	214	9. 77 303	288	10. 22 697	9. 93 457	75	20	
	50	9. 70 973	212	9. 77 591	288	10. 22 409	9. 93 382	75	10	
31	0	9. 71 184	211	9. 77 877	286	10. 22 123	9. 93 307	75	0	59
	10	9. 71 393	209	9. 78 163	286	10. 21 837	9. 93 230	77	50	
	20	9. 71 602	209	9. 78 448	285	10. 21 552	9. 93 154	76	40	
	30	9. 71 809	207	9. 78 732	284	10. 21 268	9. 93 077	77	30	
	40	9. 72 014	205	9. 79 015	283	10. 20 985	9. 92 999	78	20	
	50	9. 72 218	204	9. 79 297	282	10. 20 703	9. 92 921	78	10	
32	0	9. 72 421	203	9. 79 579	282	10. 20 421	9. 92 842	79	0	58
°	′	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	′	°

°	′	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	′	°
32	0	9. 72 421		9. 79 579		10. 20 421	9. 92 842		0	58
	10	9. 72 622	201	9. 79 860	281	10. 20 140	9. 92 763	79	50	
	20	9. 72 823	201	9. 80 140	280	10. 19 860	9. 92 683	80	40	
	30	9. 73 022	199	9. 80 419	279	10. 19 581	9. 92 603	80	30	
	40	9. 73 219	197	9. 80 697	278	10. 19 303	9. 92 522	81	20	
	50	9. 73 416	197	9. 80 975	278	10. 19 025	9. 92 441	81	10	
33	0	9. 73 611	195	9. 81 252	277	10. 18 748	9. 92 359	82	0	57
	10	9. 73 805	194	9. 81 528	276	10. 18 472	9. 92 277	82	50	
	20	9. 73 997	192	9. 81 803	275	10. 18 197	9. 92 194	83	40	
	30	9. 74 189	192	9. 82 078	275	10. 17 922	9. 92 111	83	30	
	40	9. 74 379	190	9. 82 352	274	10. 17 648	9. 92 027	84	20	
	50	9. 74 568	189	9. 82 626	274	10. 17 374	9. 91 942	85	10	
34	0	9. 74 756	188	9. 82 899	273	10. 17 101	9. 91 857	85	0	56
	10	9. 74 943	187	9. 83 171	272	10. 16 829	9. 91 772	85	50	
	20	9. 75 128	185	9. 83 442	271	10. 16 558	9. 91 686	86	40	
	30	9. 75 313	185	9. 83 713	271	10. 16 287	9. 91 599	87	30	
	40	9. 75 496	183	9. 83 984	271	10. 16 016	9. 91 512	87	20	
	50	9. 75 678	182	9. 84 254	270	10. 15 746	9. 91 425	87	10	
35	0	9. 75 859	181	9. 84 523	269	10 15 477	9. 91 336	89	0	55
	10	9. 76 039	180	9. 84 791	268	10. 15 209	9. 91 248	88	50	
	20	9. 76 218	179	9. 85 059	268	10. 14 941	9. 91 158	90	40	
	30	9. 76 395	177	9. 85 327	268	10. 14 673	9. 91 069	89	30	
	40	9. 76 572	177	9. 85 594	267	10. 14 406	9. 90 978	91	20	
	50	9. 76 747	175	9. 85 860	266	10. 14 140	9. 90 887	91	10	
36	0	9. 76 922	175	9. 86 126	266	10. 13 874	9. 90 796	91	0	54
	10	9. 77 095	173	9. 86 392	266	10. 13 608	9. 90 704	92	50	
	20	9. 77 268	173	9. 86 656	264	10. 13 344	9. 90 611	93	40	
	30	9. 77 439	171	9. 86 921	265	10. 13 079	9. 90 518	93	30	
	40	9. 77 609	170	9. 87 185	264	10. 12 815	9. 90 424	94	20	
	50	9. 77 778	169	9. 87 448	263	10. 12 552	9. 90 330	94	10	
37	0	9. 77 946	168	9. 87 711	263	10. 12 289	9. 90 235	95	0	53
	10	9. 78 113	167	9. 87 974	263	10. 12 026	9. 90 139	96	50	
	20	9. 78 280	167	9. 88 236	262	10. 11 764	9. 90 043	96	40	
	30	9. 78 445	165	9. 88 498	262	10. 11 502	9. 89 947	96	30	
	40	9. 78 609	164	9. 88 759	261	10. 11 241	9. 89 849	98	20	
	50	9. 78 772	163	9. 89 020	261	10. 10 980	9. 89 752	97	10	
38	0	9. 78 934	162	9. 89 281	261	10. 10 719	9. 89 653	99	0	52
	10	9. 79 095	161	9. 89 541	260	10. 10 459	9. 89 554	99	50	
	20	9. 79 256	161	9. 89 801	260	10. 10 199	9. 89 455	99	40	
	30	9. 79 415	159	9. 90 061	260	10. 09 939	9. 89 354	101	30	
	40	9. 79 573	158	9. 90 320	259	10. 09 680	9. 89 254	100	20	
	50	9. 79 731	158	9. 90 578	258	10. 09 422	9. 89 152	102	10	
39	0	9. 79 887	156	9. 90 837	259	10. 09 163	9. 89 050	102	0	51
	10	9. 80 043	156	9. 91 095	258	10. 08 905	9. 88 948	102	50	
	20	9. 80 197	154	9. 91 353	258	10. 08 647	9. 88 844	104	40	
	30	9. 80 351	154	9. 91 610	257	10. 08 390	9. 88 741	103	30	
	40	9. 80 504	153	9. 91 868	258	10. 08 132	9. 88 636	105	20	
	50	9. 80 656	152	9. 92 125	257	10. 07 875	9. 88 531	105	10	
40	0	9. 80 807	151	9. 92 381	256	10. 07 619	9. 88 425	106	0	50
°	′	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	′	°

°	′	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	′	°
40	0	9. 80 807	150	9. 92 381	257	10. 07 619	9. 88 425	106	0	50
	10	9. 80 957	149	9. 92 638	256	10. 07 362	9. 88 319	107	50	
	20	9. 81 106	148	9. 92 894	256	10. 07 106	9. 88 212	107	40	
	30	9. 81 254	148	9. 93 150	256	10. 06 850	9. 88 105	109	30	
	40	9. 81 402	147	9. 93 406	255	10. 06 594	9. 87 996	109	20	
	50	9. 81 549	145	9. 93 661	255	10. 06 339	9. 87 887	109	10	
41	0	9. 81 694	145	9. 93 916	255	10. 06 084	9. 87 778	110	0	49
	10	9. 81 839	144	9. 94 171	255	10. 05 829	9. 87 668	111	50	
	20	9. 81 983	143	9. 94 426	255	10. 05 574	9. 87 557	111	40	
	30	9. 82 126	143	9. 94 681	254	10. 05 319	9. 87 446	112	30	
	40	9. 82 269	141	9. 94 935	255	10. 05 065	9. 87 334	113	20	
	50	9. 82 410	141	9. 95 190	254	10. 04 810	9. 87 221	114	10	
42	0	9. 82 551	140	9. 95 444	254	10. 04 556	9. 87 107	114	0	48
	10	9. 82 691	139	9. 95 698	254	10. 04 302	9. 86 993	114	50	
	20	9. 82 830	138	9. 95 952	253	10. 04 048	9. 86 879	116	40	
	30	9. 82 968	138	9. 96 205	254	10. 03 795	9. 86 763	116	30	
	40	9. 83 106	136	9. 96 459	253	10. 03 541	9. 86 647	117	20	
	50	9. 83 242	136	9. 96 712	254	10. 03 288	9. 86 530	117	10	
43	0	9. 83 378	135	9. 96 966	253	10. 03 034	9. 86 413	118	0	47
	10	9. 83 513	135	9. 97 219	253	10. 02 781	9. 86 295	119	50	
	20	9. 83 648	133	9. 97 472	253	10. 02 528	9. 86 176	120	40	
	30	9. 83 781	133	9. 97 725	253	10. 02 275	9. 86 056	120	30	
	40	9. 83 914	132	9. 97 978	253	10. 02 022	9. 85 936	121	20	
	50	9. 84 046	131	9. 98 231	253	10. 01 769	9. 85 815	122	10	
44	0	9. 84 177	131	9. 98 484	253	10. 01 516	9. 85 693	122	0	46
	10	9. 84 308	129	9. 98 737	252	10. 01 263	9. 85 571	123	50	
	20	9. 84 437	129	9. 98 989	253	10. 01 011	9. 85 448	124	40	
	30	9. 84 566	128	9. 99 242	253	10. 00 758	9. 85 324	124	30	
	40	9. 84 694	128	9. 99 495	252	10. 00 505	9. 85 200	126	20	
	50	9. 84 822	127	9. 99 747	253	10. 00 253	9. 85 074	125	10	
45	0	9. 84 949		10. 00 000		10. 00 000	9. 84 949		0	45
°	′	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	′	°

+1. -1

log x = 1̄.2356

colog x = 0̄.846

log x = 1̄.9562

colog x = 2̄

log x = 1.6892

colog x = 1̄

0.23

1̄.44

1̄.

重要公式一覽表

$$(1)\begin{cases}\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha).\\ \cot\alpha=\tan(90^\circ-\alpha).\\ \operatorname{cosec}\alpha=\sec(90^\circ-\alpha).\end{cases}$$

$$(2)\begin{cases}\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha).\\ \tan\alpha=\cot(90^\circ-\alpha).\\ \sec\alpha=\operatorname{cosec}(90^\circ-\alpha).\end{cases}$$

$$(3)\begin{cases}\sin A\operatorname{cosec}A=1.\\ \cos A\sec A=1.\\ \tan A\cot A=1.\end{cases}$$

$$(4)\begin{cases}\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}.\\ \cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}.\end{cases}$$

$$(5)\ \sin^2A+\cos^2A=1.$$

$$(6)\begin{cases}1+\tan^2A=\sec^2A.\\ 1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A.\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}\sin(n.360^\circ+\alpha)=\sin\alpha.\\ \cos(n.360^\circ+\alpha)=\cos\alpha.\\ \tan(n.360^\circ+\alpha)=\tan\alpha.\\ \cot(n.360^\circ+\alpha)=\cot\alpha.\\ \sec(n.360^\circ+\alpha)=\sec\alpha.\\ \operatorname{cosec}(n.360^\circ+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha.\end{cases}$$

$$(9)\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta.\\ \cos(-\theta)=\cos\theta.\\ \tan(-\theta)=-\tan\theta.\\ \cot(-\theta)=-\cot\theta.\\ \sec(-\theta)=\sec\theta.\\ \operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta.\end{cases}$$

$$(11)\begin{cases}\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta.\\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta.\\ \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta.\\ \cot(180^\circ-\theta)=-\cot\theta.\\ \sec(180^\circ-\theta)=-\sec\theta.\\ \operatorname{cosec}(180^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta.\end{cases}$$

$$(11')\begin{cases}\sin(90^\circ+\theta)=\cos\theta.\\ \cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta.\\ \tan(90^\circ+\theta)=-\cot\theta.\\ \sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta.\\ \cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta.\\ \tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta.\end{cases}$$

$$(12)\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta\\ \qquad\qquad+\cos\alpha\sin\beta.\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta\\ \qquad\qquad-\sin\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

$$(13)\begin{cases}\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta\\ \qquad\qquad-\cos\alpha\sin\beta.\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta\\ \qquad\qquad+\sin\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

$$(14)\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$(15)\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$(16)\begin{cases}\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.\\ \cos2\alpha=\cos^2-\sin^2\alpha\\ \qquad\ =1-2\sin^2\alpha\\ \qquad\ =2\cos^2\alpha-1.\\ \tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\end{cases}$$

$$(17)\begin{cases}\sin\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.\\ \cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.\\ \tan\frac{1}{2}A=\dfrac{1-\cos A}{\sin A}.\\ \tan\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}.\end{cases}$$

$$(18)\begin{cases}\sin(A+B+C)\\ \quad=\sin A\cos B\cos C\\ \quad+\cos A\sin B\cos C\\ \quad+\cos A\cos B\sin C\\ \quad-\sin A\sin B\sin C.\\ \cos(A+B+C)\\ \quad=\cos A\cos B\cos C\\ \quad-\cos A\sin B\sin C\\ \quad-\sin A\cos B\sin C\\ \quad-\sin A\sin B\cos C.\\ \tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.\end{cases}$$

$$(19)\begin{cases}\sin3A=3\sin A-4\sin^3A.\\ \cos3A=4\cos^3A-3\cos A.\\ \tan3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}.\end{cases}$$

$$(20)\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\ \qquad=2\sin\alpha\cos\beta.\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\ \qquad=2\cos\alpha\sin\beta.\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\ \qquad=2\cos\alpha\cos\beta.\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\\ \qquad=2\sin\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

$$(21)\begin{cases}\sin x+\sin y\\ \quad=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y).\\ \sin x-\sin y\\ \quad=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y).\\ \cos x+\cos y\\ \quad=2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y).\\ \cos y-\cos x\\ \quad=2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y).\end{cases}$$

$$(22)\begin{cases}A+B+C=180^\circ.\\ \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90^\circ.\\ \sin A=\sin(B+C).\\ \cos A=-\cos(B+C).\\ \sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C).\\ \cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C).\\ \tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C).\end{cases}$$

$$(23)\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

重 要 公 式 一 覽 表

$\ldots = \sin(90^\circ-\alpha).$
$\ldots \tan(90^\circ-\alpha).$
$\ldots = \sec(90^\circ-\alpha).$
$\ldots = \cos(90^\circ-\alpha).$
$\ldots = \cot(90^\circ-\alpha).$
$\ldots = \mathrm{cosec}(90^\circ-\alpha).$
$\ldots \mathrm{ec}A = 1.$
$\ldots \mathrm{ec}A = 1.$
$\ldots \mathrm{t}A = 1.$
$\ldots \dfrac{\sin A}{\cos A}.$
$\ldots \dfrac{\cos A}{\sin A}.$
$\ldots \mathrm{s}^2A = 1.$
$\ldots = \sec^2 A.$
$\ldots = \mathrm{cosec}^2 A.$
$\ldots 60^\circ+\alpha) = \sin\alpha.$
$\ldots 60^\circ+\alpha) = \cos\alpha.$
$\ldots 60^\circ+\alpha) = \tan\alpha.$
$\ldots 60^\circ+\alpha) = \cot\alpha.$
$\ldots 60^\circ+\alpha) = \sec\alpha.$
$\ldots 60^\circ+\alpha) = \mathrm{cosec}\,\alpha.$
$\ldots = -\sin\theta.$
$\ldots = \cos\theta.$
$\ldots = -\tan\theta.$
$\ldots = -\cot\theta.$
$\ldots = \sec\theta.$
$\ldots = -\mathrm{cosec}\,\theta.$

$$(11)\begin{cases}\sin(180^\circ-\theta) = \sin\theta.\\ \cos(180^\circ-\theta) = -\cos\theta.\\ \tan(180^\circ-\theta) = -\tan\theta.\\ \cot(180^\circ-\theta) = -\cot\theta.\\ \sec(180^\circ-\theta) = -\sec\theta.\\ \mathrm{cosec}(180^\circ-\theta) = \mathrm{cosec}\,\theta.\end{cases}$$

$$(11')\begin{cases}\sin(90^\circ+\theta) = \cos\theta.\\ \cos(90^\circ+\theta) = -\sin\theta.\\ \tan(90^\circ+\theta) = -\cot\theta.\\ \sin(180^\circ+\theta) = -\sin\theta.\\ \cos(180^\circ+\theta) = -\cos\theta.\\ \tan(180^\circ+\theta) = \tan\theta.\end{cases}$$

$$(12)\begin{cases}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

$$(13)\begin{cases}\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

$$(14)\quad \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$(15)\quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$(16)\begin{cases}\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.\\ \cos 2\alpha = \cos^2-\sin^2\alpha\\ \qquad = 1-2\sin^2\alpha\\ \qquad = 2\cos^2\alpha-1.\\ \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.\end{cases}$$

$$(17)\begin{cases}\sin\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}.\\ \cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}.\\ \tan\frac{1}{2}A = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}.\\ \tan\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}.\end{cases}$$

$$(18)\begin{cases}\sin(A+B+C)\\ \quad =\sin A\cos B\cos C\\ \quad +\cos A\sin B\cos C\\ \quad +\cos A\cos B\sin C\\ \quad -\sin A\sin B\sin C.\\ \cos(A+B+C)\\ \quad =\cos A\cos B\cos C\\ \quad -\cos A\sin B\sin C\\ \quad -\sin A\cos B\sin C\\ \quad -\sin A\sin B\cos C.\\ \tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.\end{cases}$$

$$(19)\begin{cases}\sin 3A = 3\sin A-4\sin^3 A.\\ \cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A.\\ \tan 3A = \dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}.\end{cases}$$

$$(20)\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\ \quad = 2\sin\alpha\cos\beta.\\ \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\ \quad = 2\cos\alpha\sin\beta.\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\ \quad = 2\cos\alpha\cos\beta.\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\\ \quad = 2\sin\alpha\sin\beta.\end{cases}$$

$$(21)\begin{cases}\sin x+\sin y\\ \quad = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y).\\ \sin x-\sin y\\ \quad = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y).\\ \cos x+\cos y\\ \quad = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y).\\ \cos y-\cos x\\ \quad = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\sin\frac{1}{2}(x-y).\end{cases}$$

$$(22)\begin{cases}A+B+C = 180^\circ.\\ \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C = 90^\circ.\\ \sin A = \sin(B+C).\\ \cos A = -\cos(B+C).\\ \sin\frac{1}{2}A = \cos\frac{1}{2}(B+C).\\ \cos\frac{1}{2}A = \sin\frac{1}{2}(B+C).\\ \tan\frac{1}{2}A = \cot\frac{1}{2}(B+C).\end{cases}$$

$$(23)\quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$(24)\begin{cases}a = c\cos B+b\cos C.\\ b = a\cos C+c\cos A.\\ c = b\cos A+a\cos B.\end{cases}$$

$$(25)\begin{cases}a^2 = b^2+c^2-2\,bc\cos A.\\ b^2 = c^2+a^2-2\,ca\cos B.\\ c^2 = a^2+b^2-2\,ab\cos B.\end{cases}$$

$$(26)\begin{cases}\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.\\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{cases}$$

$$(27)\quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

$$(28)\quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}.$$

$$(30)\quad \tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C.$$

$$(31)\begin{cases}\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}.\\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}.\end{cases}$$

$$(32)\begin{cases}\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}.\\ \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}.\\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}.\end{cases}$$

$$(33)\begin{cases}\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.\\ \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}.\\ \tan\frac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.\end{cases}$$

$$(34)\begin{cases}\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A.\\ \Delta = \frac{1}{2}ca\sin B.\\ \Delta = \frac{1}{2}ab\sin C.\end{cases}$$

$$(36)\quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

（附　　錄）

（1） $n^\circ = \dfrac{n}{180}\pi.$

（2） α ト同ジ正弦ヲ有スル角
$\theta = n\pi+(-1)^n\alpha.$

（3） α ト同ジ餘弦ヲ有スル角
$\theta = 2n\pi\pm\alpha.$

（4） α ト同ジ正切ヲ有スル角
$\theta = n\pi+\alpha.$

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ\ 17'\ 45.''$$

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142.$$

$$\sqrt{3} = 1{\cdot}7321.$$

大正元年八月廿四日印刷
大正元年八月廿八日發行
大正元年十月十五日訂正再版印刷
大正元年十月十八日訂正再版發行

中等教育平面三角法教科書
定價金五拾錢

編纂者 林鶴一
發行者 東京市小石川區小日向水道町七十三番地 西野虎吉
印刷者 東京市京橋區築地三丁目十一番地 野村宗十郎
發行所 東京市小石川區小日向水道町七十三番地 開成館
【振替貯金口座】東京第五參貳貳番
西部販賣所 大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角 三木佐助
東部販賣所 東京市日本橋區數寄屋町九番地 林平次郎

(株式會社東京築地活版所印刷)