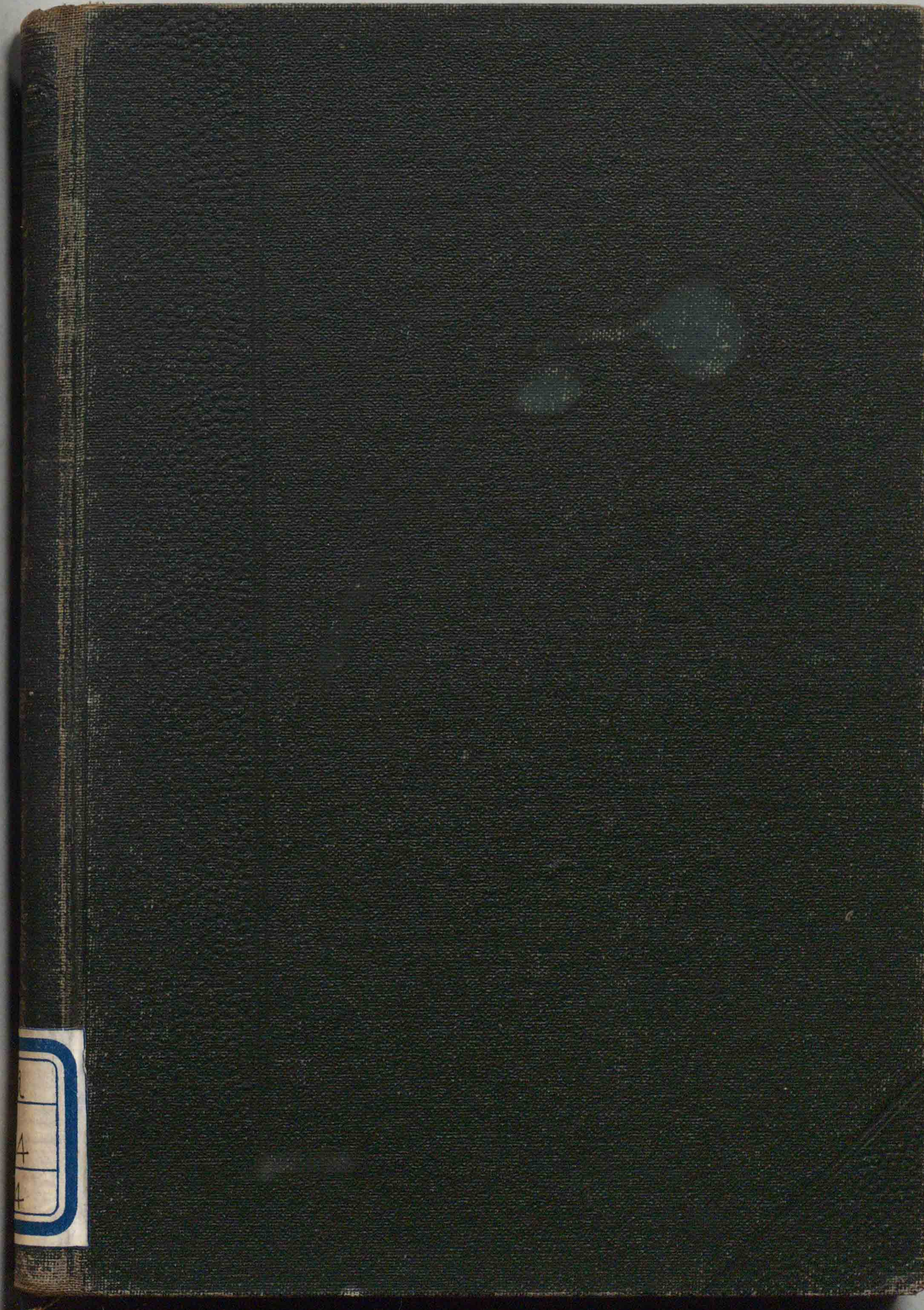
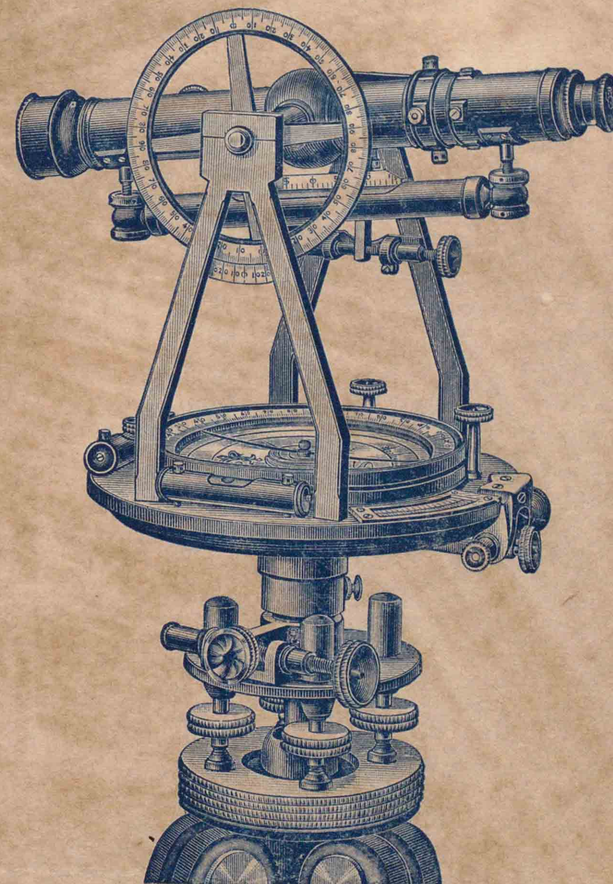


希臘文字

Α	α	Alpha.
Β	β	Beta.
Γ	γ	Gamma.
Δ	δ	Delta.
Ε	ε	Epsilon.
Ζ	ζ	Zeta.
Η	η	Eta.
Θ	θ	Theta.
Ι	ι	Iota.
Κ	κ	Kappa.
Λ	λ	Lambda.
Μ	μ	Mu.
Ν	ν	Nu.
Ξ	ξ	Xi.
Ο	ο	Omikron.
Π	π	Pi.
Ρ	ρ	Rho.
Σ	σ	Sigma.
Τ	τ	Tau.
Υ	υ	Upsilon.
Φ	φ	Phi.
Χ	χ	Chi.
Ψ	ψ	Psi.
Ω	ω	Omega.



經緯機

文部省檢定濟
大正四年十一月廿六日　中學校數學科教科書

平面三角法教科書

理學士
遠藤又藏
著

東京
光風館藏版

緒 言

著者ガ本書第一版ヲ公ニセシ以來多クノ年所ヲ經,版ヲ重ヌルコト廿有餘,全國ニ渉リテ漸次廣ク採用セラルルコトハ深ク光榮トスル所ナリ.

本書ハ版ヲ改ムル毎ニ及ブ限リノ注意ヲ以テ,絕ヘズ改良ヲ加ヘ,斯學ノ進步ト時代ノ要求トニ伴ハンコトヲ期シタリ.

本書ニ於テ特ニ注意シタル重ナル點ハ次ノ如シ.

第一 理論ノ嚴正ヲ期シタルコト.

第二 計算ノ方法ヲ詳述シタルコト.

第三 問題ノ必要ナル種類ヲ網羅センコトヲ勉メタルコト.

第四 舊慣ニ依ラズシテ公式ヲ取捨シタルコト.

第五 稍困難ナル問題ニハ指針ヲ附シタルコト.

第六 重要ナル諸定理及ビ多數ノ補充問題ヲ附錄トシタルコト.

本書ノ配當方ハ概ネ次ノ如シ.

第一編 } …………………… 第一學期
第二編 }

第三編 } …………………… 第二學期
第四編 }

第五編…………………… 第三學期

附 錄…………………… 補習科

著者ハ學界ノ進歩ト時世ノ變遷トニ鑑ミ,絶ヘズ本書ノ改良ニ力メントス.

大正四年十月

著者識ス

平面三角法教科書

目次

第一編 鋭角

第二編 一般ノ角

第三編 合角分角

第四編　對數

第五編　一般ノ三角形

附　　錄

附　　表

目　次　畢

平面三角法教科書

第一編
鋭　角

第一章
計　角　法

1.　三角法ノ定義.

三角法ハ三角函數(或ハ圓函數)ト名ヅクルモノノ性質及ビ應用ヲ講ズル學科ニシテ其ノ應用ノ區域ニヨリ之ヲ平面,球面ノ二部ニ分ツ.

2.　六十分法.

實地ノ計算ニ於テ一般ニ用フル所ノ角ノ計リ方ハ次ノ如シ.

一直角ノ九十分ノ一(即正三角形ノ一角ノ六十分ノ一)ヲ一度ト云ヒ,一度ノ六十分ノ一ヲ一分ト云ヒ,一分ノ六十分ノ一ヲ一秒ト云ヒ,度,分,秒ヲ單位トシテ角ヲ計ル方法ヲ六十分法ト云フ;而シテ d 度 m 分 s 秒ナル角ハ之ヲ $d^\circ m' s''$ ト記ス.

注意. 秒ナル單位ハ小ニ過グルヲ以テ實際上之ヲ用フルコト極メテ稀ナリ,分ヨリモ小ナル角ハ分ノ小數ニテ表スヲ適當且便宜ナリトス(通常ノ場合ニ於テハ小數一位ニテ充分ナリ). 教科書ニ於テ秒ヲ用ヒタルモノアルハ唯習慣ニ從ヘルノミ.

3. 角ノ單位ノ轉換.

任意ノ一角ニ於テ直角ヲ單位トシテ計レル値及ビ六十分法ニテ計レル値ノ中何レカ一ツヲ知ルトキハ容易ニ他ノ一ツヲ求ムルコトヲ得,其ノ方法次ノ如シ.

第一. 直角單位ニテ計レル値ヲ十六

分法ニテ計レル値ニ直スニハ之ニ90ヲ乘ジテ度數ヲ得,度ノ分數ニ60ヲ乘ジテ分ノ數ヲ得,分ノ分數ニ60ヲ乘ジテ秒數ヲ得,所得ノ度分秒ヲ連記シテ答トス.

例.

1. $\frac{45}{64}$直角ヲ六十分法ニテ表セ.

運算.

$$\frac{45}{64}\text{直角}=\left(\frac{45}{64}\times 90\right)\text{度}=63\frac{9}{32}\text{度}$$

$$\frac{9}{32}\text{度}=\left(\frac{9}{32}\times 60\right)\text{分}=16\frac{7}{8}\text{分}$$

$$\frac{7}{8}\text{分}=\left(\frac{7}{8}\times 60\right)\text{秒}=52{\cdot}5\text{秒}$$

答.

$63^\circ\ 16'\ 52''{\cdot}5.$

2. 0·07875直角ヲ六十分法ニテ表セ.

運算.

$$\begin{array}{rl} 0{\cdot}07875 & \text{直角} \\ 90 & \\ \hline 7{\cdot}0875 & \text{度} \\ 60 & \\ \hline 5{\cdot}25 & \text{分} \\ 60 & \\ \hline 15 & \text{秒} \end{array}$$

答.

$7^\circ\ 5'\ 15''$.

第二. 六十分法ニテ計レル値ヲ直角單位ニテ計レル値ニ直スニハ次ノ式ヲ用フ.

$$d^\circ\ m'\ s''=\left(\frac{d}{90}+\frac{m}{90\times60}+\frac{s}{90\times60\times60}\right)\text{直角}$$

例.

$8^\circ\ 15'\ 27''$ ハ幾直角ナルカ.

運算.

$$8^\circ\ 15'\ 27''=\left(\frac{8}{90}+\frac{15}{90\times60}+\frac{27}{90\times60\times60}\right)\text{直角}$$
$$=\left(\frac{8}{90}+\frac{1}{90\times4}+\frac{3}{90\times20\times20}\right)\text{直角}$$
$$=\frac{3200+100+3}{90\times400}\text{直角}$$
$$=\frac{3303}{36000}\text{直角}$$
$$=\frac{367}{4000}\text{直角}=0{\cdot}09175\text{直角}.$$

或ハ次ノ如ク運算ス.

60 | 27 秒
60 | 15·45 分
90 | 8·2575 度
0·09175 直角

設 題 一.

1. 次ノ諸角ヲ六十分法ニテ表セ.

$\frac{11}{16}$直角, $0{\cdot}678$ 直角, $0{\cdot}024\dot{1}$ 直角.

2. 直角ヲ單位トスルトキ次ノ諸角ノ値幾何.

49°, $37'{\cdot}8$, $32''{\cdot}4$, $11^\circ15'$, $8^\circ0'36''$, $45'5''{\cdot}4$, $61^\circ52'30''$.

3. 或角ヲ單位トシテ 15° 及ビ $0{\cdot}2$ 直角ヲ計リテ得タル値ノ和ガ $0{\cdot}\dot{7}3$ ナルトキ單位トセル角ハ幾度ナルカ.

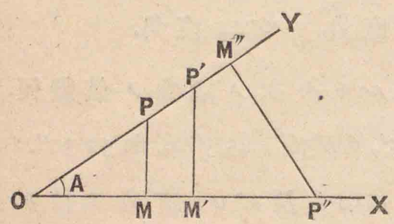
4. 三角形ノ三ツノ角ガ等差級數ヲナシ最小角ヲ秒ニテ表シタル數ガ最大角ヲ分ニテ表シタル數ノ四倍ナルトキ三ツノ角ヲ六十分法ニテ表セ.

第二章

銳角ノ三角函數

4. 定義.

任意ノ銳角Aノ任意ノ邊OY上ニ角頂外ノ任意ノ點Pヲ取リ此ノ點ヨリ他ノ邊OXニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲMトスルトキAニ關シテOPヲ斜邊, MPヲ垂線, OMヲ底邊ト云ヒ,次ノ六個ノ比ヲ總稱シテAノ三角函數(或ハ圓函數)ト云フ



第一. $\frac{垂線}{斜邊}$ 即 $\frac{MP}{OP}$ ヲAノ正弦ト云ヒ之ヲ $\sin A$ ト記ス.

第二. $\frac{底邊}{斜邊}$ 即 $\frac{OM}{OP}$ ヲAノ餘弦ト云ヒ之ヲ $\cos A$ ト記ス.

第三. $\frac{垂線}{底邊}$ 即 $\frac{MP}{OM}$ ヲAノ正切ト云ヒ之ヲ $\tan A$ (或ハ $tg A$) ト記ス.

第四. $\frac{底邊}{垂線}$ 即 $\frac{OM}{MP}$ ヲAノ餘切ト云ヒ之ヲ $\cot A$ ト記ス.

第五. $\frac{斜邊}{底邊}$ 即 $\frac{OP}{OM}$ ヲAノ正割ト云ヒ之ヲ $\sec A$ ト記ス.

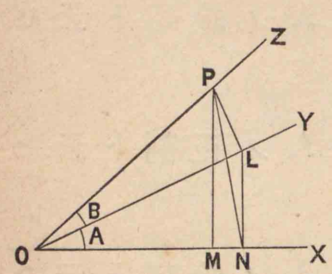
第六. $\frac{斜邊}{垂線}$ 即 $\frac{OP}{MP}$ ヲAノ餘割ト云ヒ之ヲ $\operatorname{cosec} A$ ト記ス.

注意一. 正弦,正切,正割ハ夫々餘弦,餘切,餘割ト互ニ餘函數ナリト云フ.

注意二. OY上ノ他ノ任意ノ點P′及ビOX上ノ任意ノ點P″ヨリOX及ビOYニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲM′, M″トセバ三角形OP′M′, OP″M″ハ何レモOPMニ相似ナルヲ以テ對應邊ノ比ハ相等シ故ニAノ一定ナル以上ハ其ノ各三角函數ノ値ハ一定ナリ.

5. 記法ニ關スル注意.

第一. $\sin A$ 等ハAニ屬スル比ノ記號ナルヲ以テ $\sin$ 等トAトヲ分割スベカラズ,例ヘバ $\sin A+\sin B$ ハAノ正弦トBノ正弦トノ和ヲ表スモノニシテAトBトノ和ノ正弦 $\sin(A+B)$ ニ等シカラズ. 今 $X\hat{O}Y$,



$Y\hat{O}Z$ ヲ A, B トシ OZ 上ノ一點 P ヨリ OY, OX ニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲ L, M トシ L ヨリ OX ニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲ N トシ P, N ヲ連ヌルトキハ

$$\sin A=\frac{NL}{OL}>\frac{NL}{OP},$$

$$\sin B=\frac{LP}{OP},$$

$$\therefore\quad \sin A+\sin B>\frac{NL+LP}{OP}>\frac{PN}{OP}>\frac{MP}{OP},$$

即 $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$.

第二. n ガ正ノ整數ナルトキ三角函數ノ n 乘ヲ示スニハ便宜上函數記號ノ右肩ニ指數 n ヲ附スルヲ常トス,例ヘバ $(\sin A)^3$, $(\cos A)^2$ ヲ $\sin^3 A$, $\cos^2 A$ ト記スルガ如シ.

設 題 二.

5. 直角三角形ノ三邊ガ三寸,四寸,五寸ナルトキ其ノ最小角ノ正弦,餘弦,正切ヲ求ム.

6. 直角三角形ノ直角ノ二邊ノ數値ガ 28, 45 ナルトキ其ノ大鋭角ノ正弦ヲ求ム.

7. 5, 12, 13 ニ比例セル三邊ヲ有スル三角形ノ最小角ノ餘切,正割,餘割ヲ求ム.

8. 直角二等邊三角形 ABC ニ於テ底邊 BC ノ一端 B ヲ對邊 AC ノ中點 D ニ連ヌルトキハ角 CBD ノ餘切幾何.

6. 三角函數相互ノ關係.

次ニ揭グルモノハ同角ノ三角函數ノ重要ノ關係ナリ.

第一. 二重關係.

$$\sin A\ \mathrm{cosec} A=\frac{垂}{斜}\cdot\frac{斜}{垂}=1 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\cos A\ \sec A=\frac{底}{斜}\cdot\frac{斜}{底}=1 \quad\cdots\cdots(2)$$

$$\tan A\ \cot A=\frac{垂}{底}\cdot\frac{底}{垂}=1 \quad\cdots\cdots(3)$$

第二. 三重關係.

$$\tan A=\frac{垂}{底}=\frac{垂}{斜}\div\frac{底}{斜}=\frac{\sin A}{\cos A} \quad\cdots\cdots(4)$$

$$cot\mathrm{A}=\frac{\text{底}}{\text{垂}}=\frac{\text{底}}{\text{斜}}\div\frac{\text{垂}}{\text{斜}}=\frac{cos\mathrm{A}}{sin\mathrm{A}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

第三. 平方關係.

$$sin^2\mathrm{A}+cos^2\mathrm{A}=\left(\frac{\text{垂}}{\text{斜}}\right)^2+\left(\frac{\text{底}}{\text{斜}}\right)^2=\frac{\text{斜}^2}{\text{斜}^2}=1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$1+tan^2\mathrm{A}=1+\left(\frac{\text{垂}}{\text{底}}\right)^2=\left(\frac{\text{斜}}{\text{底}}\right)^2=sec^2\mathrm{A}\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$1+cot^2\mathrm{A}=1+\left(\frac{\text{底}}{\text{垂}}\right)^2=\left(\frac{\text{斜}}{\text{垂}}\right)^2=cosec^2\mathrm{A}\cdots\cdots(8)$$

7. 恒等式ノ證明法.

前條ノ關係ニヨリ三角函數ヲ含メル種々ノ恒等式ヲ證明スルコトヲ得;其ノ重ナル方法ハ次ノ二種ナリ.

第一. 左邊ヨリ右邊ヲ誘導スル法.

例.

$tan^2\mathrm{A}\,cos^2\mathrm{A}+cot^2\mathrm{A}\,sin^2\mathrm{A}=1$ ヲ證セヨ

證.

$$\text{左邊}=\frac{sin^2\mathrm{A}}{cos^2\mathrm{A}}\,cos^2\mathrm{A}+\frac{cos^2\mathrm{A}}{sin^2\mathrm{A}}.\,sin^2\mathrm{A}$$
$$=sin^2\mathrm{A}+cos^2\mathrm{A}$$
$$=1.$$

第二. 已知ノ關係ヨリ誘導スル法.

例.

$$\frac{cosec\mathrm{A}-sec\mathrm{A}}{cot\mathrm{A}+tan\mathrm{A}}=\frac{cot\mathrm{A}-tan\mathrm{A}}{cosec\mathrm{A}+sec\mathrm{A}}$$ ヲ證セヨ.

證.

$$cosec^2\mathrm{A}=1+cot^2\mathrm{A}$$
$$sec^2\mathrm{A}=1+tan^2\mathrm{A}$$
$$\therefore\quad cosec^2\mathrm{A}-sec^2\mathrm{A}=cot^2\mathrm{A}-tan^2\mathrm{A}$$
$$(cosec\mathrm{A}-sec\mathrm{A})(cosec\mathrm{A}+sec\mathrm{A})=(cot\mathrm{A}-tan\mathrm{A})(cot\mathrm{A}+tan\mathrm{A})$$
$$\therefore\quad\frac{cosec\mathrm{A}-sec\mathrm{A}}{cot\mathrm{A}+tan\mathrm{A}}=\frac{cot\mathrm{A}-tan\mathrm{A}}{cosec\mathrm{A}+sec\mathrm{A}}.$$

注意. 恒等式ノ證明法ニハ此ノ外右邊ヲ左邊ニ變ズル法;兩邊ヲ同ジ形ニ變ズル法;及ビ恒等式ノ成立スルタメニ充分ノ條件ヲ求ムル法アリ,然レドモ成ルベクハ前ノ二法ノ何レカヲ用フルヲヨシトス.

設題三.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ.

*9. $tan^2\mathrm{A}-sin^2\mathrm{A}=tan^2\mathrm{A}sin^2\mathrm{A}.$

*10. $cot^2\mathrm{A}-cos^2\mathrm{A}=cot^2\mathrm{A}cos^2\mathrm{A}.$

*11. $sec^2\mathrm{A}+cosec^2\mathrm{A}=sec^2\mathrm{A}cosec^2\mathrm{A}.$

此ノ三ツモ亦平方關係ナリ.

*12. $cosecA - sinA = cotAcosA.$

*13. $secA - cosA = tanAsinA.$

*14. $cotA + tanA = secAcosecA.$

此ノ三ツヲ四重關係ト云フ.

(星標ヲ附シタル題ハ重要ナルモノナリ,以下之ニ倣フ)

15. $tanAsinA + cosA = secA.$

16. $(1 + sinA)^2 + (1 + cosA)^2 = 3 + 2(sinA + cosA).$

17. $sin^3A + cos^3A = (sinA + cosA)(1 - sinAcosA).$

18. $(1 + sinA + cosA)^2 = 2(1 + sinA)(1 + cosA).$

19. $sin^2AtanA + cos^2AcotA + 2sinAcosA = tanA + cotA.$

20. $(tanA + secA)^2 = \dfrac{1 + sinA}{1 - sinA}.$

21. $(sinA + cosA)(tanA + cotA) = secA + cosecA.$

22. $(sinA + secA)^2 + (cosA + cosecA)^2 = (1 + secAcosecA)^2.$

23. $2(sin^6A + cos^6A) - 3(sin^4A + cos^4A) + 1 = 0.$

24. $secA + tanA = \dfrac{1}{secA - tanA}.$

25. $sec^4A + tan^4A = 1 + 2sec^2Atan^2A.$

26. $cosec^6A - cot^6A = 1 + 3cosec^2Acot^2A.$

27. $(1 + tanA)^2 + (1 + cotA)^2 = (secA + cosecA)^2.$

28. $1 + cosec^4A - cot^4A = 2cosec^2A.$

29. $(sinA - cosecA)^2 + (cosA - secA)^2 - (tanA - cotA)^2 = 1.$

30. $(secx\ secy + tanx\ tany)^2 - (tanx\ secy + secx\ tany)^2 = 1.$

31. $sin\theta + sin^2\theta = 1$ ナルトキハ $cos^2\theta + cos^4\theta = 1$ ナリ.

*32. $asin\theta + bcos\theta = c,\ a'sin\theta + b'cos\theta = c'$ ヨリ θ ヲ消去セヨ. (兩式ヨリ $sin\theta$ 及ビ $cos\theta$ ノ値ヲ求メ公式6ヲ應用スベシ).

8. 三角函數ノ一ツヲ以テ他ヲ表ス法.

一ツノ角ノ三角函數六種ノ中任意ノ一ツヲ以テ殘リ五ツノ何レヲモ表スコトヲ得ベシ. 其ノ式ノ作リ方ニ次ノ二法アリ.

第一. 他ヲ表スタメニ用ヒントスル三角函數ヲ含有スル平方關係ヲ取リ之ヨリ他ノ一ツヲ表ス式ヲ作ルコトヲ得,次ニ(1)ヨリ(5)マデノ公式ヲ用ヒテ殘リノ四ツヲ表ス式ヲ作ルコトヲ得.

例.

1. sinA ヲ以テ同角ノ他ノ三角函數ヲ表セ.

解.

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

$$\therefore \quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}.$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}.$$

2. cotA ヲ以テ同角ノ他ノ三角函數ヲ表セ.

解.

$$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec} A=\sqrt{1+\cot^2 A}.$$

$$\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}.$$

$$\cos A=\cot A\sin A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}.$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{1+\cot^2 A}}{\cot A}.$$

$$\tan A=\frac{1}{\cot A}.$$

同樣ニ餘弦ヲ以テ表サントセバ(6)ヲ用ヒ正割或ハ正切ヲ以テ表サントセバ(7)ヲ用ヒ餘割ヲ以テ表サントセバ(8)ヲ用フベシ.

第二. 考フル所ノ角ニ於テ他ヲ表スタメニ用ヒントスル三角函數ヲ作ルトキニ分母トスル邊ノ長サヲ1トセバ分子ニ當ル邊ノ長サハ此ノ函數ノ値ニ等シク殘リノ邊ハ *Pythagoras* ノ定理ニヨリ之ヲ定ムルコトヲ得,從ツテ定義ニヨリ他ノ三角函數ノ式ヲ得ベシ.

例.

secA ヲ以テ同角ノ他ノ三角函數ヲ表セ.

解.

A角ニ於テ $\sec A=\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ ナルヲ以テ 底邊$=1$ ナラシメバ 斜邊$=\sec A$, 垂線$=\sqrt{(\text{斜邊})^2-(\text{底邊})^2}=\sqrt{\sec^2 A-1}$ トナル.

$$\therefore \quad \sin A=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\frac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}.$$

$$\cos A=\frac{底邊}{斜邊}=\frac{1}{\sec A}.$$

$$\tan A=\frac{垂線}{底邊}=\sqrt{\sec^2 A-1}.$$

$$\cot A=\frac{底邊}{垂線}=\frac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{斜邊}{垂線}=\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}.$$

9. 一ツノ三角函數ノ値ヲ知リテ他ヲ求ムル法.

一ツノ三角函數ノ値ヲ知リテ同角ノ他ノ三角函數ヲ計算スルニハ次ノ二法アリ.

第一. 未知函數ヲ已知函數ニテ表ス式ニヨリ計算スル法.

第二. 考フル所ノ角ニ於テ已知函數ヲ作ルタメニ分母トスル邊ヲ其ノ値ノ分母ニ等シカラシメバ分子ニ當ル邊ハ値ノ分子ニ等シク他ノ一邊ハ *Pythagoras* ノ定理ニヨリ之ヲ求ムルコトヲ得.從ツテ定義ニヨリ他ノ函數ノ値ヲ得ル法.

例.

$\sin A=\frac{12}{13}$ ナルトキ A ノ他ノ三角函數ヲ求ム.

解.

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{13}\times\frac{1}{13}}=\frac{5}{13}.$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}.$$

$$\cot A=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}=\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}.$$

$$\sec A=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}=\frac{1}{\frac{5}{13}}=\frac{13}{5}.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{12}.$$

或ハ A 角ニ於テ 斜邊=13 ナラシメバ 垂線=12, 底邊=$\sqrt{(斜邊)^2-(垂線)^2}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{25\times1}=5$ トナルヲ以テ

$$\cos A=\frac{底邊}{斜邊}=\frac{5}{13}.$$

$$\tan A=\frac{垂線}{底邊}=\frac{12}{5}.$$

$$\cot A=\frac{底邊}{垂線}=\frac{5}{12}.$$

$$\sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}} = \frac{13}{5}.$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{斜線}}{\text{垂線}} = \frac{13}{12}.$$

設題四.

33. $\tan A = \frac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$ 及ビ $\cos A$ ヲ求ム.

34. $\sec A = 1{\cdot}0\dot{3}$ ナルトキ $\sin A$ 及ビ $\tan A$ ヲ求ム.

35. $\sec A$ ヲ以テ $(\operatorname{cosec} A - \cot A)^2$ ヲ表セ.

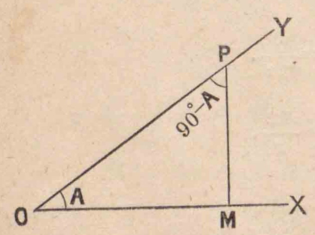
36. $\tan A = {\cdot}75$ ナルトキ $\sin^6 A + \cos^6 A$ ノ値ヲ求ム.

37. $\tan A + \sec A = 2$ ナルトキ $\sin A$ ヲ求ム.

38. $1 + \sin^2\theta = 3\cos\theta\sin\theta$ ヨリ $\tan\theta$ ヲ求ム.

(37 ハ公式 7 ヲ用ヰ, 38 ハ兩邊ヲ $\tan\theta$ ニテ表シテ之ヲ解クベシ).

10. 餘角ノ三角函數.



任意ノ鋭角Aノ一邊OY上ノ一點Pヨリ他ノ邊OXニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲMトセバ三角函數ノ定義ニヨ

リ次ノ關係ヲ得.

$$\sin(90^\circ - A) = \frac{OM}{OP} = \cos A.$$

$$\cos(90^\circ - A) = \frac{MP}{OP} = \sin A.$$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{OM}{MP} = \cot A.$$

$$\cot(90^\circ - A) = \frac{MP}{OM} = \tan A.$$

$$\sec(90^\circ - A) = \frac{OP}{MP} = \operatorname{cosec} A.$$

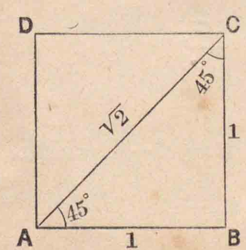
$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \frac{OP}{OM} = \sec A.$$

即 $90^\circ - A$ ト A トノ各三角函數ハ二ツヅツ餘函數ヲナス.

此ノ六ツノ關係ノ中後ノ四ツハ前ノ二ツヨリ誘導スルモ可ナリ;以下之ニ準ズ.

11. 重要ナル特別角ノ三角函數.

第一. 45°ノ三角函數.



1ナル邊ヲ有スル正方形ABCDニ於テ對角線ACヲ作ルトキハ $B\hat{A}C = 45^\circ$, $AC = \sqrt{2}$ ナルヲ以テ

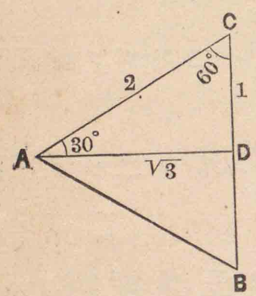
$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ.$$

$$\tan 45^\circ = \quad 1 \quad = \cot 45^\circ.$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2} \ = \operatorname{cosec} 45^\circ.$$

第二. 30° 及ビ 60° ノ三角函數.

2ナル邊ヲ有スル正三角形ABCニ於テAヨリ對邊ニ垂線ヲ作ルトキハ其ノ足DハBCノ中點ニシテ $D\hat{A}C=30^\circ$, $AD=\sqrt{3}$ ナルヲ以テ



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ.$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ.$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \quad 2 \quad = \sec 60^\circ.$$

設 題 五.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ.

39. $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A) = \sin A.$

40. $\sin^2(A+45^\circ) + \sin^2(45^\circ - A) = 1.$

41. $\dfrac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan(90^\circ - A) - \cos A.$

次ノ諸式ノ値ヲ求ム.

42. $(1+\sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$

43. $\sin^2 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ - \tan^2 60^\circ.$

44. $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}$ (小數二位マデ).

次ノ方程式ニ適スル鋭角ヲ求ム.

45. $4\sin^2\theta - 2(\sqrt{3}+1)\sin\theta + \sqrt{3} = 0.$

46. $\tan^2\theta - (\sqrt{3}+1)\tan\theta + \sqrt{3} = 0.$

47. $\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta - \dfrac{7}{4} = 0.$

上ノ三式ノ如キモノヲ三角方程式ト云フ,其ノ一般ノ講究ハ之ヲ附錄ニ讓ル.

12. 三角函數表.

任意ノ角ノ三角函數ヲ求ムル法ハ理論高尚運算繁雜ニシテ本書ニ於テ之ヲ論ズルコトヲ得ズ,然レドモ其ノ値ハ先輩精密ニ之ヲ計算シテ表ニ調製シタルモノアリ,本書ノ卷尾ニ載スルモノハ 0° ヨリ 90° ニ至ル $10'$ 置キノ諸角ノ三角函數ノ四桁ノ値ナリ.

表中ニアラザル角ノ三角函數ヲ求ムル法及ビ三角函數ニ對スル角ヲ求ムル法ハ次ノ定理ニヨル.

角ノ小變化ト其ノ各三角函數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド相比例ス.

此ノ定理ノ成立及ビ限界ヲ論ズルコトハ本書ノ程度ニ適セザルヲ以テ之ヲ略シ例ニヨリテ其ノ應用法ヲ示スベシ.

例.

1. $\sin 32°\ 16'.4$ ヲ求ム.

解.

$$\sin 32°20' - \sin 32°10' = 0.5348 - 0.5324 = 0.0024$$

$$10 : 6.4 :: 0.0024 : x$$

$$x = 0.0015$$

$$\sin 32°16'.4 = 0.5324 + 0.0015 = 0.5339.$$

2. $\tan A = 1.568$ ナルトキ A ヲ求ム.

解.

$$\tan 57°30' - \tan 57°20' = 1.570 - 1.560 = 0.010$$

$$\tan A - \tan 57°20' \quad = 1.568 - 1.560 = 0.008$$

$$0.010 : 0.008 :: 10 : x$$

$$x = 8$$

$$A = 57°20' + 8' = 57°28'.$$

3. $\cot 29°43'.6$ ヲ求ム.

解.

$$\cot 29°40' - \cot 29°50' = 1.756 - 1.744 = 0.012$$

$$10 : 3.6 :: 0.012 : x$$

$$x = 0.004$$

$$\cot 29°43'.6 = 1.756 - 0.004 = 1.752$$

4. $\cos A = 0.4452$ ナルトキ A ヲ求ム.

解.

$$\cos 63°30' - \cos 63°40' = 0.4462 - 0.4436 = 0.0026$$

$$\cos 63°30' - \cos A \quad = 0.4462 - 0.4452 = 0.0010$$

$$0.0026 : 0.0010 :: 10 : x$$

$$x = 3.8$$

$$A = 63°30' + 3'.8 = 63°33'.8.$$

設題六.

48. $\tan 25°26'.7$ ヲ求ム.

49. $\sec 38°27'.7$ ヲ求ム.

50. $\cos 63°37'.3$ ヲ求ム.

51. $\operatorname{cosec} 41°18'.2$ ヲ求ム.

52. $\sin A = 0.9479$ ナルトキ A ヲ求ム.

53. $\tan A = 0.1723$ ナルトキ A ヲ求ム.

54. $\cot A = 1.346$ ナルトキ A ヲ求ム.

第三章

直角三角形

13. 定義.

三角形ノ邊及ビ角ヲ其ノ元素ト云ヒ,三ツノ獨立セル元素(或ハ其ノ他ノ量)ヲ知リテ殘リノ元素ヲ求ムルコトヲ三角形ヲ解クト云フ.

14. 直角三角形ノ解法.

直角三角形ニ於テ直角ノ外ニ獨立ナル二元素ヲ知ルトキハ殘リノ元素ヲ求ムルコトヲ得ベシ,其ノ解キ方ニ二種ノ場合アリ.

第一. 一邊及ビ一銳角ヲ知ル場合.

此ノ場合ニ於テハ已知銳角ノ餘角ヲ作リテ之ヲ他ノ銳角ノ値トシ次ニ未知邊ヲ已知邊ニテ除シタル商ガ已知角ノ如何ナル函數ニ當ルカヲ表ス式ヲ

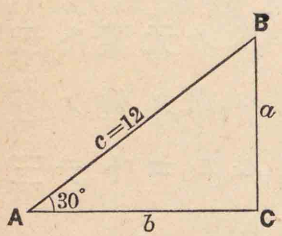
作リ其ノ分母ヲ拂ヒ之ヨリ未知邊ヲ計算ス.

例.

Cヲ直角トスル三角形ABCノ三邊ヲa, b, cトス.

1. $c=12,\ A=30^\circ$ ナルトキ B, a, b ヲ求ム.

解.



$$\left.\begin{array}{lcl} & & B=90^\circ-A \\ \dfrac{a}{c}=\sin A & \therefore & a=c\sin A \\ \dfrac{b}{c}=\cos A & \therefore & b=c\cos A \end{array}\right\}$$

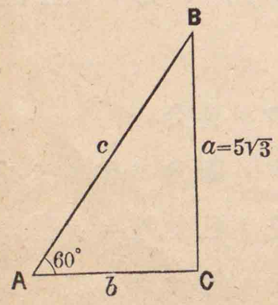
$$\therefore\quad B=90^\circ-30^\circ=60^\circ.$$

$$a=12\sin 30^\circ=12\times\frac{1}{2}=6.$$

$$b=12\cos 30^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

2. $a=5\sqrt{3},\ A=60^\circ$ ナルトキ B, b, c ヲ求ム.

解.



$$\left.\begin{array}{lcl} & & B=90^\circ-A \\ \dfrac{b}{a}=\cot A & \therefore & b=a\cot A \\ \dfrac{c}{a}=\operatorname{cosec} A & \therefore & c=a\operatorname{cosec} A \end{array}\right\}$$

$$\therefore\quad B=90^\circ-A=30^\circ.$$

$$b=5\sqrt{3}\cot 60^\circ=5\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=5.$$

$$c=5\sqrt{3}\operatorname{cosec} 60^\circ=5\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=10.$$

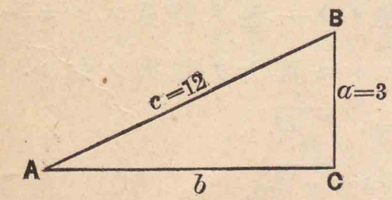
第二. 二邊ヲ知ル場合.

此ノ場合ニ於テハ已知二邊ノ比ガ一ツノ鋭角ノ如何ナル函數ニ當ルカヲ表ス式ヲ作リ之ヨリ其ノ鋭角ヲ定メ,夫レヨリ第一ノ場合ノ如ク殘リノ元素ヲ求ムベシ.

例.

1. $c=12,\ a=3$ ナルトキ A, B, b ヲ求ム.

解.



$$\left.\begin{array}{lcl} & & \sin A=\dfrac{a}{c} \\ & & B=90^\circ-A \\ \dfrac{b}{a}=\cot A & \therefore & b=a\cot A \end{array}\right\}$$

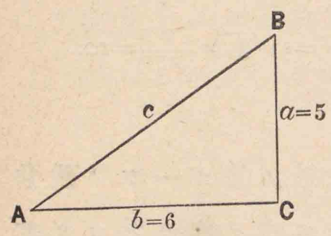
$$\therefore\quad \sin A=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{\cdot}25.$$

$$A=14^\circ 28'{\cdot}6.$$

$$B=75^\circ 31'{\cdot}4.$$

$$b=3\cot 14°28'.6=3\times 3.874=11.6.$$

2. $a=5,\ b=6$ ナルトキ A, B, c ヲ求ム.



解.

$$\left.\begin{array}{r}\cot A=\dfrac{b}{a}\\ B=90°-A\\ \dfrac{c}{a}=\mathrm{cosec}A\quad \therefore\quad c=a\,\mathrm{cosec}A\end{array}\right\}$$

$$\therefore\quad \cot A=\frac{6}{5}=1.2.$$

$$A=39°48'.6.$$

$$B=50°11'.4.$$

$$c=5\,\mathrm{cosec}\,39°48'.6=5\times 1.562=7.8.$$

注意. 二邊ヲ知リテ殘リノ一邊ヲ計算スルニハ*Pythagoras*ノ定理ヲ應用スルモ可ナリ,即次ノ如シ.

$c,\ a$ ヲ知ルトキハ　$b=\sqrt{c^2-a^2}.$

$a,\ b$ ヲ知ルトキハ　$c=\sqrt{a^2+b^2}.$

15. 測量問題ニ於ケル術語.

第一. 一點ヲ過グル鉛垂線或ハ鉛垂面トハ此ノ點及ビ地球ノ中心ヲ過グベキ直線或ハ平面ヲ云フ

第二. 一點ヲ過グル水平線或ハ水平面トハ此ノ

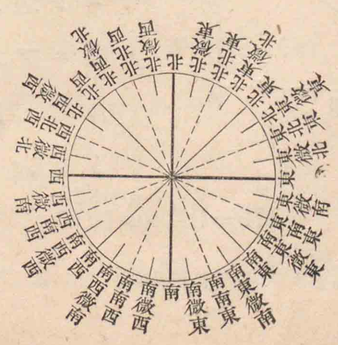
點ヲ過ギ同點ニ於テノ鉛垂線ト直交スル直線或ハ平面ヲ云フ.

第三. 一點ヲ觀測スルトキ此ノ點ト觀測器ノ中心(廻轉ノ軸ノ中點)トヲ連ヌル直線ガ觀測器ノ中心ヲ過グル水平面トナス角ヲ,其ノ點ガ水平面ヨリモ上ニアルカ下ニアルカニ從ヒ其ノ仰角或ハ俯角ト云フ.

仰角ハ又高度ト稱スルコトアリ(重ニ天體ノ場合ニ於テ).

第四. 二點ヲ觀測器ノ中心ニ連ヌル直線ノ夾角ヲ此ノ二點ノ角距ト云フ.

第五. 航海用ノ羅針盤ニ於テハ北東南西ノ間ヲ各八等分シテ三十二ノ方向ヲ記シ次ノ如ク之ニ命名ス.



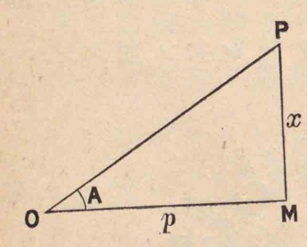
陸地測量ニ用フル羅針盤ニ於テハ其ノ周圍ニ度ヲ盛リテ北或ハ南ヨリ角ヲ計リ,北幾度東(或ハ西)又ハ南幾度東(或ハ西)等ト記シテ方向ヲ示ス.

16. 測量問題.

直接ニ測ルコトヲ得ザル距離及ビ高サハ三角形ノ解キ方ヲ應用シテ之ヲ計算スルヲ常トス. 次ニ其ノ數例ヲ擧グ.

例.

1. 直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ベキトキ其ノ高サヲ求ムル法.



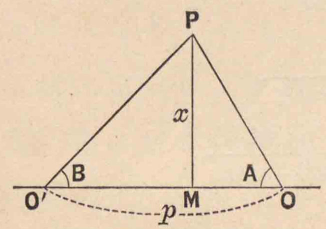
直立セル物體 MP ノ高サヲ x トシ,其ノ基礎 M ヨリ適宜ノ距離 p ナル處ニアル一點 O ニ於ケル其ノ頂點ノ仰角ヲ A トセバ

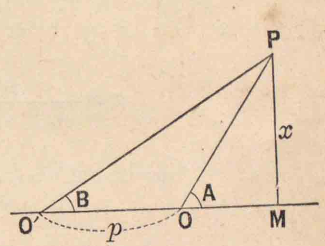
$$MP=OM\ \tan MOP,$$

即 $$x=p\tan A.$$

注意. 精密ヲ要スルトキハ上式ニ於テ p ニ物體ノ厚サ(基礎ニ於ケル)ノ半ヲ加ヘテ計算シ其ノ結果ニ觀測器ノ中心ノ高サヲ加フベシ,以下之ニ準ズ.

2. 達シ得ベカラザル一點ヨリ達シ得ベキ一直線ニ到ル距離ヲ求ムル法.





直線上ニ二點 O, O′ ヲ取リ其ノ距離(p)ヲ測リ達シ得ベカラザル點 P ヨリ此ノ線ニ作レル(假想)垂線 PM ノ數値ヲ x トシ角 MOP, MO′P ヲ A, B トセバ

$$MO'\pm MO=OO',$$

$$MP\ \cot MO'P\pm MP\ \cot MOP=OO',$$

即 $$x\cot B\pm x\cot A=p,$$

$$\therefore\quad x=\frac{p}{\cot B\pm\cot A}$$

3. 直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ザ

ルトキ此ノ物體(直線ト見做セル)ト同平面上ニアル地上ノ二點ニ於テ其ノ頂ノ仰角ヲ測リ此ノ物體ノ高サ及ビ距離ヲ求ムル法.

前例ノ右圖ニ於テ MP ヲ物體トシ O, O' ヲ二ツノ觀測點トシ OM ヲ y トセバ

$$x=\frac{p}{\cot B-\cot A}.$$

$$y=x\cot A=\frac{p\cot A}{\cot B-\cot A}.$$

設題七.

次ノ諸問題ニ於テ $\sqrt{2}$ 及ビ $\sqrt{3}$ ハ夫々 1·414 及ビ 1·732 トシテ計算スベシ.

55. 五重ノ塔ノ基礎ヲ去ルコト 500 尺ノ處ヨリ其ノ頂上ヲ望ミ仰角 30° ヲ得タリ;塔ノ高サ幾何

56. 旗竿アリ其ノ底點ヨリ 360 尺ノ距離ニ於ケル仰角ハ 135 尺ノ距離ニ於ケル仰角ノ半分ニ等シト云フ;竿ノ高サ幾何.

57. 小丘アリ其ノ麓ヨリ頂上マデハ 1 町 45 間ニ

シテ頂上ヨリ麓ヲ望ミシニ俯角 30° ヲ得タリト云フ;丘ノ高サ幾何.

58. 高サ 6 尺ノ直立セル竿ノ影ガ $2\sqrt{3}$ 尺ナルトキ太陽ノ高度ヲ求ム.

59. 水平面ニ對シ 45° ノ傾斜角ヲナセル長サ 100 尺ノ坂路アリ,今傾斜角ヲ 30° トナサバ坂路ノ長サ幾尺トナルベキカ.

60. 塔ノ東ニアリテ相互ノ間隔 200 尺ナル二地ヨリ其ノ頂ヲ望ミ仰角 45° 及ビ 30° ヲ得タリ;塔ノ高サ幾何.

61. 直立セル塔ノ基礎ヲ過ル水平面上ノ一點ヨリ之ヲ望ミ仰角 $32^\circ 27'$ ヲ得夫レヨリ塔ニ向ヒテ 100 尺ヲ進ミテ再ビ之ヲ望ミ仰角 45° ヲ得タリ;塔ノ高サ幾何.

62. 山頂ヨリ山麓ニ立テル高サ h 尺ノ塔ノ頂及ビ基礎ノ俯角ヲ測リ夫々 α, β ヲ得タリ;山ノ高サ幾何.

63. 投錨セル一汽船アリ海岸ニ沿ヒタル直線上ノ一點ヨリ之ヲ測レバ其ノ方向ハ此ノ直線ト 30°

ノ角ヲナシ此ノ線ニ沿ヒテ300間進ミテ再ビ其ノ方向ヲ測レバ60°ノ角ヲナスト云フ;船ト直線トノ距離(200間未滿ナル)幾何.

64. 燈臺Lヨリ南西及ビ南15°東ノ方向ニ二船A, Bアリ ABノ方向ハ南東ニシテ ALノ長サハ4哩ナリ;二船ノ距離幾何.

65. 地上ノ一點ヨリ空中ニ在ル球狀輕氣球ヲ望ミ其ノ張ル角ハαニシテ仰角ハβナルコトヲ知レリ;球ノ半徑ヲrトセバ其ノ高サ幾何.

66. 圓形ノ一池ガ地上ノ一點ニ於テ張ル角ハ60°ニシテ此ノ點ト池邊トノ最近距離ハ15間ナリト云フ;池ノ直徑幾何.

***67.** 塔ノ南ノ一地ニ於テ其ノ頂ノ仰角ヲ測リαヲ得夫レヨリ西方ニlナル距離ヲ歩ミテ再ビ其ノ仰角ヲ測リβヲ得タリ;塔ノ高サ幾何.

第二編
一般ノ角

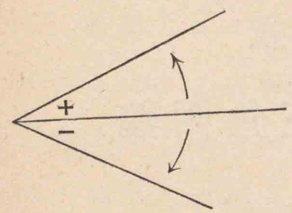
第四章
一般ノ角ノ三角函數

17. 角ノ定義.

角ニ就キテ講究セル所ノ事項ヲ一般ニ通ズルモノナラシメンガタメニハ角ノ意義ヲ擴張スルコトヲ要スルヲ以テ其ノ一般ノ定義ヲ設クルコト次ノ如シ.

同點ヨリ引キタル甲乙二直線アルトキ其ノ一ツ例ヘバ乙ヲ甲ノ位置ヨリ現位置マデ廻轉セルモノト思考シ此ノ廻轉ノ量ヲ乙ノ甲トナス角ト云ヒ乙ヲ其ノ廻線,甲ヲ其ノ首線ト云フ.而シテ廻線ノ運動ガ時針ノ運動ト反對ナルカ同樣

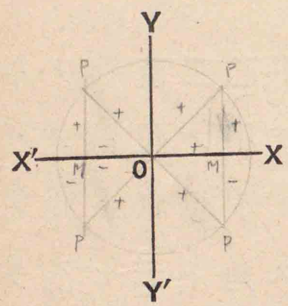
ナルカニ從ヒ其ノ作レル角ヲ正或ハ負トス.



角ノ首線及ビ廻線ヲ其ノ邊ト云ヒ二線ノ公點ヲ其ノ頂ト云フ.

角ヲ示スニハ首線及ビ廻線ノ上ニ一點ヅツヲ取リ其ノ名稱ノ間ニ頂ノ名稱ヲ夾ムベシ.

18. 象限ノ定義.



首線 OX 及ビ之ト正直角ヲナス直線 OY ノ延長ヲ各 OX′, OY′ トセバ二ツノ無限直線 XX′, YY′ ハ平面ヲ四分ス,此ノ各分ヲ象限ト云ヒ XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX ヲ夫々第一,第

二,第三,第四象限ト云フ.

角ハ其ノ廻線ノ存在スル象限ニ從ヒ某象限ノ角ト稱セラル.

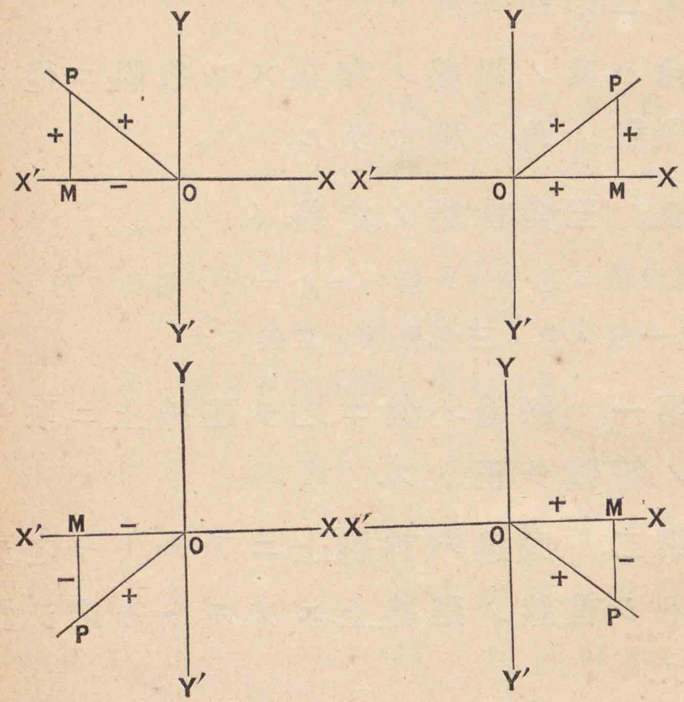
19. 三角函數ノ定義.

第四條ニ述ベタル所ノモノニ次ノ規約ヲ附シテ之ヲ一般ノ角ノ三角函數ノ定義トス.

第一. 斜邊ハ常ニ之ヲ廻線上ニ取リ其ノ符號ヲ正トス.

第二. 底邊ハ首線上ニアルトキ之ヲ正トシ首線ノ延線上ニアルトキ之ヲ負トス.

第三. 垂線ハ首線ト正直角ヲナス廻線ト同ジ側(首線及ビ其ノ延長ニ對シ)ニアルトキ之ヲ正トシ然ラザルトキ之ヲ負トス.



20. 三角函數相互ノ關係.

第六條ニ於テ得タル(1)(2)(3)(4)(5)ノ關係ハ定義ヨリ誘導セラレタルモノナルヲ以テ任意ノ角ニ就キ合理ナリ.

Pythagoras ノ定理ハ邊ノ正負ニ關セズ合理ナルヲ

以テ之ヨリ誘導セラレタル(6)(7)(8)ノ關係モ亦任意ノ角ニ就キ合理ナリ.

故ニ一般ニ

$$\sin A \operatorname{cosec} A = 1,\quad \cos A \sec A = 1,\quad \tan A \cot A = 1.$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A},\qquad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,\quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A,\quad 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A.$$

従ツテ此ノ諸公式ヨリ生ズル諸關係モ亦一般ニ合理ナリ.

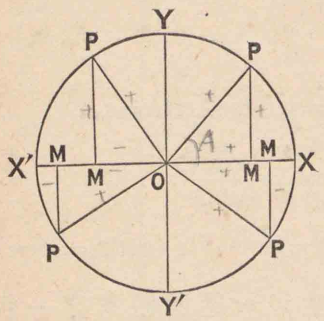
21. 無窮大.

a ガ零ナラザル常數ノトキ $\frac{a}{x}$ ナル分數ニ於テ x ノ數値漸次ニ減少スルトキハ此ノ分數ノ數値ハ次第ニ增大スルヲ以テ x ヲ充分小ナラシメテ分數ノ數値ヲ如何ナル數ヨリモ大ナラシムルコトヲ得ベシ,之ニヨツテ x ガ無窮小(卽 0)トナレル極限ニ於テ $\frac{a}{x}$ ノ値ハ無窮大ナリト云ヒ ∞ ヲ以テ其ノ記號トス.

0 ニハ正負ノ差別ナキヲ以テ $\frac{a}{0}$ 卽 ∞ ニモ亦正負ノ差別ナシ.

22. 三角函數ノ變化.

O ニ於テ相直交スル二直線 XX′, YY′ アリ; r ナル數値ノ廻線 OP ガ OX ヲ首線トシテ 0 度ヨリ 360 度マデノ角ヲ作ルトキ其ノ各位置ニ於テ P ヨリ XX′ ニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲ M トシ角 XOP (A ト名ヅク) ノ變化ニ伴フ其ノ三角函數ノ變化ヲ講究スルコト次ノ如シ.



第一. sinA 及ビ cosecA ノ變化.

第一象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其ノ數値ハ 0 ヨリ r マデ增大スルヲ以テ $sinA=\frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 0 ヨリ 1 マデ增大シ, $cosecA=\frac{OP}{MP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ ∞ ヨリ 1 マデ減少ス ($sin0^\circ=0$, $cosec0^\circ=\infty$; $sin90^\circ=1$, $cosec90^\circ=1$).

第二象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其ノ數値ハ r ヨリ 0 マデ減少スルヲ以テ $sinA=\frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ 0 マデ減少シ $cosecA=\frac{OP}{MP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ ∞ マデ增大ス. ($sin180^\circ=0$, $cosec180^\circ=\infty$).

第三象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其ノ數値ハ 0 ヨリ r マデ增大スルヲ以テ $sinA=\frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ 0 ヨリ 1 マデ增大シ, $cosecA=\frac{OP}{MP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ ∞ ヨリ 1 マデ減少ス. ($sin270^\circ=-1$, $cosec270^\circ=-1$).

第四象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其ノ數値ハ r ヨリ 0 マデ減少スルヲ以テ $sinA=\frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ 0 マデ減少シ, $cosecA=\frac{OP}{MP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ ∞ マデ增大ス. ($sin360^\circ=0$, $cosec360^\circ=\infty$).

第二. cosA 及ビ secA ノ變化.

第一象限ニ於テハ OM ハ正ニシテ其ノ數値ハ r ヨリ 0 マデ減少スルヲ以テ $cosA=\frac{OM}{OP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ 0 マデ減少シ, $secA=\frac{OP}{OM}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ 1 ヨリ ∞ マデ增大ス. ($cos0^\circ=1$, $sec0^\circ=1$; $cos90^\circ=0$, $sec90^\circ=\infty$).

第二象限ニ於テハ OM ハ負ニシテ其ノ數値ハ0ヨリrマデ増大スルヲ以テ $\cos A=\dfrac{OM}{OP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ0ヨリ1マデ増大シ, $\sec A=\dfrac{OP}{OM}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ∞ヨリ1マデ減少ス. ($\cos 180^\circ=-1$, $\sec 180^\circ=-1$).

第三象限ニ於テハ OM ハ負ニシテ其ノ數値ハrヨリ0マデ減少スルヲ以テ $\cos A=\dfrac{OM}{OP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ1ヨリ0マデ減少シ, $\sec A=\dfrac{OP}{OM}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ1ヨリ∞マデ増大ス. ($\cos 270^\circ=0$, $\sec 270^\circ=\infty$).

第四象限ニ於テハ OM ハ正ニシテ其ノ數値ハ0ヨリrマデ増大スルヲ以テ $\cos A=\dfrac{OM}{OP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ0ヨリ1マデ増大シ, $\sec A=\dfrac{OP}{OM}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ∞ヨリ1マデ減少ス. ($\cos 360^\circ=1$, $\sec 360^\circ=1$).

第三. $\tan A$ 及ビ $\cot A$ ノ變化.

第一象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其ノ數値ハ0ヨリrマデ増大シ OM ハ正ニシテ其ノ數値ハrヨ

リ0マデ減少スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ0ヨリ∞マデ増大シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ∞ヨリ0マデ減少ス. ($\tan 0^\circ=0$, $\cot 0^\circ=\infty$; $\tan 90^\circ=\infty$, $\cot 90^\circ=0$).

第二象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ其ノ數値ハrヨリ0マデ減少シ OM ハ負ニシテ其ノ數値ハ0ヨリrマデ増大スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ∞ヨリ0マデ減少シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ0ヨリ∞マデ増大ス. ($\tan 180^\circ=0$, $\cot 180^\circ=\infty$).

第三象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其ノ數値ハ0ヨリrマデ増大シ OM ハ負ニシテ其ノ數値ハrヨリ0マデ減少スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ0ヨリ∞マデ増大シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ正ニシテ其ノ數値ハ∞ヨリ0マデ減少ス. ($\tan 270^\circ=\infty$, $\cot 270^\circ=0$).

第四象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ其ノ數値ハrヨリ0マデ減少シ OM ハ正ニシテ其ノ數値ハ0ヨリrマデ増大スルヲ以テ $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ ハ負ニシテ其ノ數値ハ∞ヨリ0マデ減少シ, $\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ ハ負ニシテ其

ノ數值ハ 0 ヨリ ∞ マデ增大ス.($tan 360° = 0$, $cot 360° = \infty$).

各三角函數ノ變化ヲ表ニテ示セバ次ノ如シ.

	0°		90°		180°		270°		360°
sin	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
cos	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
tan	0	+	∞	−	0	+	∞	−	0
cot	∞	+	0	−	∞	+	0	−	∞
sec	1	+	∞	−	−1	−	∞	+	1
cosec	∞	+	1	+	∞	−	−1	−	∞
	−360°		−270°		−180°		−90°		0°

注意一. 角ガ 360° ヨリ漸次ニ增大スルトキハ其ノ三角函數ハ上表ノ變化ヲ繰リ返スベク,廻線ガ首線ヨリ發シテ負角ヲ作ルトキ其ノ三角函數ハ上表ノ變化ヲ逆ノ順序ニ繰リ返スベシ.

注意二. 正弦及ビ餘弦ノ數值ハ 1 ヨリモ大ナルコトナク,正割及ビ餘割ノ數值ハ 1 ヨリモ小ナルコトナク,正切及ビ餘切ノ值ニハ制限ナシ.

注意三. 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ノ正弦ハ 0, 1, 2, 3, 4 ノ平方根ノ半ニ等シク其ノ餘弦ハ 4, 3, 2, 1, 0 ノ平方根ノ半ニ等シ.

第五章

$n.90° \pm A$ ノ三角函數

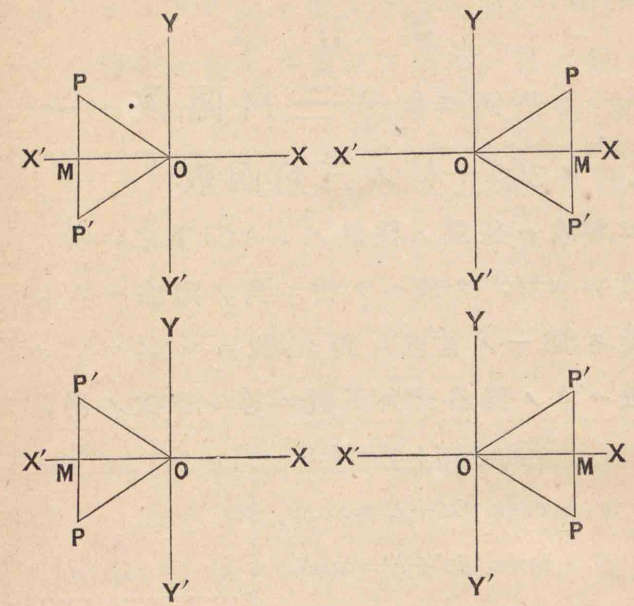
23. $n.360° + A$ ノ三角函數.

n ガ零或ハ任意ノ整數ノトキ(以下之ニ倣フ)任意ノ角 A ニ $n.360°$ ヲ加ヘテ得ル角ノ廻線ハ A ノ廻線ニ一致ス(同一ノ首線ニ對シ),故ニ $n.360°+A$ ノ各三角函數ハ A ノ同名三角函數ニ等シ;卽次ノ關係アリ.

$$\left.\begin{aligned} sin(n.360°+A) &= sinA. \\ cos(n.360°+A) &= cosA. \\ tan(n.360°+A) &= tanA. \\ cot(n.360°+A) &= cotA. \\ sec(n.360°+A) &= secA. \\ cosec(n.360°+A) &= cosecA. \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

24. 負角ノ三角函數.

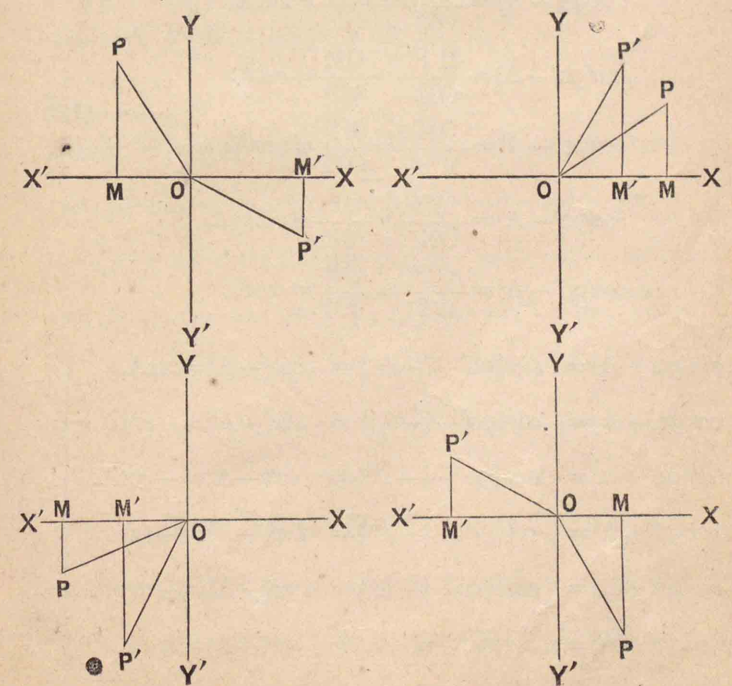
$X\hat{O}P$, $X\hat{O}P'$ ヲ A, −A トシ二角ノ廻線上ニ等長 OP, OP′ ヲ取ルトキハ P, P′ ヲ連ヌル直線ハ OX (或ハ其ノ延長)ト直交ス其ノ交點ヲ M トセバ $OP' = OP$, $MP' = -MP$ ナルヲ以テ次ノ關係アリ.



$$\left.\begin{aligned}
sin(-A)&=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\frac{MP}{OP}=-sinA.\\
cos(-A)&=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=cosA.\\
tan(-A)&=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\frac{MP}{OM}=-tanA.\\
cot(-A)&=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\frac{OM}{MP}=-cotA.\\
sec(-A)&=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=secA.\\
cosec(-A)&=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-\frac{OP}{MP}=-cosecA.
\end{aligned}\right\}\cdots\textbf{(10)}$$

系.
$$\left.\begin{aligned}
sin(n.360^\circ-A)&=sin(-A)=-sinA.\\
cos(n.360^\circ-A)&=cos(-A)=cosA.\\
tan(n.360^\circ-A)&=tan(-A)=-tanA.\\
cot(n.360^\circ-A)&=cot(-A)=-cotA.\\
sec(n.360^\circ-A)&=sec(-A)=secA.\\
cosec(n.360^\circ-A)&=cosec(-A)=-cosecA.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\textbf{(11)}$$

25. 餘角ノ三角函數.



$X\hat{O}P$ ヲ A トシ $90°-A$ (A ノ餘角ト名ヅク) ヲ $X\hat{O}P'$ トシ二角ノ廻線上ニ等長 OP, OP' ヲ取リ P, P' ヨリ OX (或ハ其ノ延長) ニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲ M, M' トセバ $O\hat{P}M \equiv P'\hat{O}M'$ ナルヲ以テ $OP'=OP, M'P'=OM, OM'=MP$ ナリ,故ニ次ノ關係アリ.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(90°-A) &= \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos A.\\
\cos(90°-A) &= \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin A.\\
\tan(90°-A) &= \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{MP} = \cot A.\\
\cot(90°-A) &= \frac{OM'}{M'P'} = \frac{MP}{OM} = \tan A.\\
\sec(90°-A) &= \frac{OP'}{OM'} = \frac{OP}{MP} = \operatorname{cosec} A.\\
\operatorname{cosec}(90°-A) &= \frac{OP'}{M'P'} = \frac{OP}{OM} = \sec A.
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(12)$$

系.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(90°+A) &= \sin\{90°-(-A)\} = \cos(-A) = \cos A.\\
\cos(90°+A) &= \cos\{90°-(-A)\} = \sin(-A) = -\sin A.\\
\tan(90°+A) &= \tan\{90°-(-A)\} = \cot(-A) = -\cot A.\\
\cot(90°+A) &= \cot\{90°-(-A)\} = \tan(-A) = -\tan A.\\
\sec(90°+A) &= \sec\{90°-(-A)\} = \operatorname{cosec}(-A) = -\operatorname{cosec} A.\\
\operatorname{cosec}(90°+A) &= \operatorname{cosec}\{90°-(-A)\} = \sec(-A) = \sec A.
\end{aligned}\right\}(13)$$

26. 補角ノ三角函數.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(180°-A) &= \sin\{90°+(90°-A)\} = \cos(90°-A) = \sin A.\\
\cos(180°-A) &= \cos\{90°+(90-A)\} = -\sin(90°-A) = -\cos A.\\
\tan(180°-A) &= \tan\{90°+(90°-A)\} = -\cot(90°-A) = -\tan A.\\
\cot(180°-A) &= \cot\{90°+(90°-A)\} = -\tan(90°-A) = -\cot A.\\
\sec(180°-A) &= \sec\{90°+(90°-A)\} = -\operatorname{cosec}(90°-A) = -\sec A.\\
\operatorname{cosec}(180°-A) &= \operatorname{cosec}\{90°+(90°-A)\} = \sec(90°-A) = \operatorname{cosec} A.
\end{aligned}\right\}(14)$$

$180°-A$ ヲ A ノ補角ト云フ.

系.

$$\left.\begin{aligned}
\sin(180°+A) &= \sin\{180°-(-A)\} = \sin(-A) = -\sin A.\\
\cos(180°+A) &= \cos\{180°-(-A)\} = -\cos(-A) = -\cos A.\\
\tan(180°+A) &= \tan\{180°-(-A)\} = -\tan(-A) = \tan A.\\
\cot(180°+A) &= \cot\{180°-(-A)\} = -\cot(-A) = \cot A.\\
\sec(180°+A) &= \sec\{180°-(-A)\} = -\sec(-A) = -\sec A.\\
\operatorname{cosec}(180°+A) &= \operatorname{cosec}\{180°-(-A)\} = \operatorname{cosec}(-A) = -\operatorname{cosec} A.
\end{aligned}\right\}(15)$$

27. 角ノ減少法.

大ナル數値ノ角ノ三角函數ヲ小ナル正角ノ三角函數ニテ表スコトヲ角ノ減少法ト云フ.其ノ方法ハ

次ノ順序ニヨルヲ便トス.

第一. 與角若シ 360° ヨリモ大ナル數値ヲ有スルトキハ之ヲ $n.360^\circ \pm A$ ノ形ニ直シ(9)或ハ(11)ニヨリテ 360° ヨリモ小ナル正角ノ三角函數ニ化スベシ.

第二. 與角若シ 360° ヨリモ小ナル數値ヲ有スルトキハ之ヲ $n.90^\circ \pm A$ ノ形ニ直シ n 若シ偶數(0ヲモ含ム)ナルトキハ A ノ同名函數ニテ表シ n 若シ奇數ナルトキハ A ノ餘函數ニテ表スベシ,但結果ノ前ニ附スベキ符號ハ原角ノ象限ニヨリ適當ニ之ヲ撰擇スベシ.

設 題 八.

68. $\cos 0^\circ \sin 270^\circ + 2\cos 180^\circ \tan 45^\circ$ 及ビ

$3\sin 0^\circ \sec 180^\circ + 2\operatorname{cosec} 90^\circ - \cos 360^\circ$ ノ値ヲ求ム.

69. $\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$ ナルトキ $\sin\theta$ 及ビ $\cos\theta$ ノ値如何.

70. $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) + \tan(180^\circ + A)\sin(-A) = \sin(90^\circ + A)$ ヲ證セヨ.

次ノ諸式ヲ簡單ニセヨ (71—75).

71. $\sin 90^\circ + \tan^2(180^\circ - a) - \operatorname{cosec}^2(90^\circ - a)$.

72. $\cos(180^\circ + x)\cos(90^\circ + y) - \sin(90^\circ - x)\sin(180^\circ - y)$.

73. $\tan(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A) + \cos(180^\circ - A)\cot(180^\circ - A)$.

74. $\dfrac{\sin(180^\circ + A)\tan^2(180^\circ - A)}{\cos(270^\circ + A)} - \dfrac{\sin(270^\circ - A)\sec^2(-A)}{\sin(90^\circ + A)}$.

75. $\dfrac{\sin(180^\circ - A)}{\sin(270^\circ + A)} \cdot \dfrac{\tan(180^\circ + A)}{\cos(270^\circ - A)} \cdot \dfrac{\sin(A - 90^\circ)}{\tan(-A)}$.

76. 120°, 135°, 150°, 210°, 225°, 240°, 300°, 315°, 330° ノ各三角函數ヲ表ニテ示セ.

77. $270^\circ \pm A$ ノ三角函數ヲ A ノ三角函數ニテ表セ.

78. $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ)$ ノ値ヲ求ム.

79. $\sin 1275^\circ$ 及ビ $\tan(-2232^\circ)$ ヲ最小正角ノ三角函數ニテ表セ.

80. 次ノ方程式ニ適スル 360° ヲ超エザル正角ヲ求ム.

(i) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$.

(ii) $\sec^2\theta - 2\tan^2\theta = 2$.

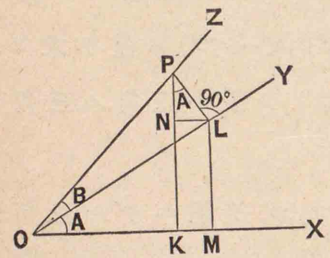
第三編

合角分角

第六章

和角及ビ差角ノ三角函數

28. 二角ノ和ノ正弦及ビ餘弦.



$X\hat{O}Y, Y\hat{O}Z$ ヲ A, B トセバ $X\hat{O}Z$ ハ A+B ナリ.今 A, B 及ビ其ノ和ガ鋭角ナルトキ OZ 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ $PK \perp OX, PL \perp OY, LM \perp OX, LN \perp PK$ トセバ $N\hat{P}L = X\hat{O}Y = A$ ナリ.

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \frac{KP}{OP} = \frac{KN+PN}{OP} = \frac{ML+PN}{OP}$$

$$= \frac{ML}{OP} + \frac{PN}{OP}$$

$$= \frac{ML}{OL} \cdot \frac{OL}{OP} + \frac{PN}{PL} \cdot \frac{PL}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\cos(A+B) = \frac{OK}{OP} = \frac{OM-KM}{OP} = \frac{OM-NL}{OP}$$

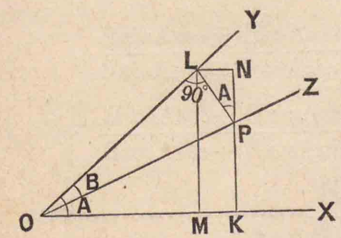
$$= \frac{OM}{OP} - \frac{NL}{OP}$$

$$= \frac{OM}{OL} \cdot \frac{OL}{OP} - \frac{NL}{PL} \cdot \frac{PL}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B \cdots\cdots\cdots (17)$$

此ノ二公式ハ加法定理ト云ヒ A, B ノ如何ナル場合ニモ適合ス(完全ノ證明ハ附錄ニ讓ル).

29. 二角ノ差ノ正弦及ビ餘弦.



$X\hat{O}Y, Y\hat{O}Z$ ヲ A, B トセバ $X\hat{O}Z$ ハ A−B ナリ.今大角 A ヲ鋭角トシ OZ 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ前ト同樣ノ作圖ヲナストキハ

$$\sin(A-B) = \frac{KP}{OP} = \frac{KN-PN}{OP} = \frac{ML-PN}{OP}$$

$$= \frac{ML}{OP} - \frac{PN}{OP}$$

$$= \frac{ML}{OL} \cdot \frac{OL}{OP} - \frac{PN}{PL} \cdot \frac{PL}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

$$\cos(A-B)=\frac{OK}{OP}=\frac{OM+MK}{OP}=\frac{OM+LN}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OP}+\frac{LN}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OL}\cdot\frac{OL}{OP}+\frac{LN}{PL}\cdot\frac{PL}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

此ノ二公式ハ減法定理ト云ヒ A, B ノ如何ナル場合ニモ適合ス(完全ノ證明ハ附錄ニ讓ル).

30. 二角ノ和ト差トノ正切及ビ餘切.

$$\tan(A\pm B)=\frac{\sin(A\pm B)}{\cos(A\pm B)}=\frac{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}{\cos A\cos B\mp\sin A\sin B}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B\pm\cos A\sin B)\div\cos A\cos B}{(\cos A\cos B\mp\sin A\sin B)\div\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B} \cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

$$\cot(A\pm B)=\frac{\cos(A\pm B)}{\sin(A\pm B)}=\frac{\cos A\cos B\mp\sin A\sin B}{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}$$

$$=\frac{(\cos A\cos B\mp\sin A\sin B)\div\sin A\sin B}{(\sin A\cos B\pm\cos A\sin B)\div\sin A\sin B}$$

$$=\frac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A} \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

31. 二角ノ和ト差トノ正弦或ハ餘弦ノ乘積.

(16) (18) ノ兩式ヲ相乘ズレバ

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$$

$$=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A \cdots\cdots (22)$$

(17) (19) ノ兩式ヲ相乘ズレバ

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B$$

$$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$$

$$=\cos^2A-\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A \cdots\cdots (23)$$

32. 三ツノ角ノ和ノ三角函數.

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\{(\alpha+\beta)+\gamma\}$$

$$=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$$

$$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma$$

$$+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma$$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \cdots\cdots (24)$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta+\gamma)&=\cos\{(\alpha+\beta)+\gamma\}\\
&=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma\\
&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma\\
&\quad-(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\sin\gamma\\
&=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma\\
&\quad-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\ \cdots\cdots(25)
\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\div\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)\div\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}\ \cdots\cdots(26)$$

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)\div\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\div\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma-\cot\alpha-\cot\beta-\cot\gamma}{\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta-1}\ \cdots\cdots(27)$$

33. 正弦餘弦ノ乘積ト和或ハ差トノ轉換.

(16) (18) ノ和及ビ差幷ニ (17) (19) ノ和及ビ差ヲ作リ各式ノ左右邊ヲ轉換シテ次ノ式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}
2\sin A\cos B&=\sin(A+B)+\sin(A-B)\\
2\cos A\sin B&=\sin(A+B)-\sin(A-B)\\
2\cos A\cos B&=\cos(A+B)+\cos(A-B)\\
2\sin A\sin B&=-\cos(A+B)+\cos(A-B)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(28)$$

此ノ四式ヲ (A, B) 式ト稱シ二角ノ正弦餘弦ノ乘積ヲ一次式ニ直スニ用フ.

次ニ

$$\left.\begin{aligned}
\sin C+\sin D&=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)+\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)\\
&=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.\\
\sin C-\sin D&=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)-\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)\\
&=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.\\
\cos C+\cos D&=\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)\\
&=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.\\
\cos C-\cos D&=\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)-\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)\\
&=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.
\end{aligned}\right\}(29)$$

此ノ四式ヲ (C, D) 式ト稱シ正弦餘弦ノ和或ハ差

ヲ一項式ニ直スニ用フ.

注意一. (A, B) 式及ビ (C, D) 式ハ成ルベク大角ヲ前ニ置キテ應用スベシ,然ルトキハ結果ニ負角ヲ生ゼザルノ便アリ.

注意二. $\cos C+\sin D$, $\cos C-\sin D$, $\sin C-\cos D$ 等ヲ一項式トナスニハ先ヅ (12) 或ハ (13) ニヨリ同種類ノ函數ノ和或ハ差ニ直シ然ル後 (C, D) 式ヲ應用スベシ.

設 題 九.

81. $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$ 及ビ $(\cos 2A+\sin 2A)(\cos A+\sin A)=\cos A+\sin 3A$ ヲ證セヨ.

82. α, β ガ正鋭角ニテ $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{12}{13}$ ナルトキ $\alpha+\beta$ ノ餘弦ヲ求ム.

83. $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$, $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$ ナルトキ $\tan(A-B)$ ヲ求ム.

84. A, B ガ鋭角ニシテ $\cot A=2$, $\operatorname{cosec} B=\sqrt{10}$ ナルトキ A+B ヲ求ム.

***85.** 15° ノ三角函數ヲ求ム.

($15^\circ=45^\circ-30^\circ$ トシテ計算スベシ)

86. 三角形 ABC ノ頂 A ヨリ BC ニ垂線 AD ヲ作ルトキ BD, CD, AD ガ 2, 3, 6 ニ比例セバ頂角ノ大サハ如何. (但 D ハ B, C ノ間ニ在リ)

87. $\sin 100^\circ \sin(-160^\circ)+\cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$ ノ値ヲ求ム.

次ノ諸相等式ヲ證セヨ.

***88.** $\tan A\pm\tan B=\frac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$.

***89.** $\cot B\pm\cot A=\frac{\sin(A\pm B)}{\sin A\sin B}$.

***90.** $\cot A\pm\tan B=\frac{\cos(A\mp B)}{\sin A\cos B}$.

***91.** $\tan(45^\circ\pm A)=\frac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$.

***92.** $\cot(45^\circ\pm A)=\frac{\cot A\mp 1}{\cot A\pm 1}$.

***93.** $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA$

$=\tan(p+q)A\tan pA\tan qA$.

***94.** $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ヲ餘弦トスル角ヲ α トセバ

$a\cos A\pm b\sin A=\sqrt{a^2+b^2}\cos(A\mp\alpha)$.

***95.** $\begin{cases}\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos(45^\circ-A)=\sqrt{2}\sin(45^\circ+A)\\ \cos A-\sin A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)=\sqrt{2}\sin(45^\circ-A)\end{cases}$

96. A ガ 0° ヨリ 360° マデ變ズル間ニ $\cos A+\sin A$

ノ値ハ如何ニ變ズルカ.

97. $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{1-2\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$.

98. $\dfrac{1}{\tan3A-\tan A}+\dfrac{1}{\cot A-\cot3A}=\cot2A$.

99. $\sec(45°+\alpha)\sec(45°-\alpha)=2\sec2\alpha$.

100. $\tan(45°+A)-\tan(45°-A)=2\tan2A$.

***101.** $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma)+\cos\beta\sin(\gamma-\alpha)+\cos\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$.

102. $\sin2A+\sin4A+\sin6A=\dfrac{\cos A-\cos7A}{2\sin A}$.

103. $\cos20°\cos40°\cos80°=\dfrac{1}{8}$.

104. $17A=180°$ ナルトキハ $\dfrac{\cos A\cos13A}{\cos3A+\cos5A}=-\dfrac{1}{2}$.

105. $\cos55°+\cos65°+\cos175°=0$.

106. $\begin{cases}\cos A+\cos(120°+A)+\cos(120°-A)=0.\\ \sin A+\sin(120°+A)-\sin(120°-A)=0.\end{cases}$

107. $\dfrac{\sin\theta-\sin3\theta+\sin5\theta}{\cos\theta-\cos3\theta+\cos5\theta}=\tan3\theta$.

108. $\tan(\alpha+60°)\tan(\alpha-60°)=(1+2\cos2\alpha)/(1-2\cos2\alpha)$.

109. $\cos\theta\cos(120°+\theta)+\cos\theta\cos(120°-\theta)$

$$+\cos(120°+\theta)\cos(120°-\theta)=-\frac{3}{4}.$$

110. $\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha=4\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha$.

***111.** $\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.\\ \cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma-\dfrac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.\\ \tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha+\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{\cos(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.\\ \cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha+\cot\alpha\cot\beta=1+\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.\end{cases}$

(上ノ關係ハ公式 24, 25 ヨリ誘導ス).

***112.** $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

***113.** $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$$=4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

114. 二鋭角 α, β ノ和ガ定角 σ ニ等シキトキ $\cos\alpha+\cos\beta$ ノ最大値ヲ求ム.

115. $\sin\alpha+\sin\beta=a,\ \cos\alpha+\cos\beta=b,\ \cos(\alpha-\beta)=c$ ヨリ α, β ヲ消去セヨ.

(初メノ二式ノ二乘ヲ加ヘテ變形スベシ).

次ノ方程式ニ適スル 180° ヲ超ヘザル正角ヲ求ム.

116. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

117. $\cos3\theta+\cos2\theta+\cos\theta=0$.

第七章

倍角半角ノ三角函數

34. 二倍角ノ三角函數.

(16)ニ於テ B=A ト置ケバ

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A \cdots\cdots\cdots(\mathbf{30})$$

系. $\sin 2A = \dfrac{2\sin A\cos A\sec^2 A}{\sec^2 A \; 1+\tan^2 A} = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$

(17)ニ於テ B=A ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{31})$$

系 1. $\cos 2A = \dfrac{(\cos^2 A - \sin^2 A)\sec^2 A}{\sec^2 A} = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$

系 2. $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ ヲ轉項シ 2 ヲ以テ兩邊ヲ除シ次ノ式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 A &= \frac{1}{2}(1-\cos 2A) \\ \cos^2 A &= \frac{1}{2}(1+\cos 2A) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{31})'$$

此ノ二式ハ任意ノ角ノ正弦及ビ餘弦ノ平方ヲ一次式ニ直スニ用フ.

(20)ノ一ツニ於テ B=A ト置ケバ

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{32})$$

同様ニ $$\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{32})'$$

35. 半角ノ三角函數.

(31)'ノAノ代リニ $\dfrac{A}{2}$ ヲ用ヒ平方ニ開ケバ

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{33})$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{34})$$

(33)÷(34) 從ッテ
$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \\ \cot\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots(\mathbf{35})$$

但根號ノ前ノ符號ハ $\dfrac{A}{2}$ ノ象限ニヨリ適當ニ之ヲ撰ブベシ.

系. $\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{1-\cos A}{\sin A}.$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}\\ \cot\frac{A}{2}&=\frac{\sin A}{1-\cos A}=\frac{1+\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)$$

36. 三倍角ノ三角函數.

$$\sin 3A=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A$$
$$=2\sin A\cos A\cos A+(1-2\sin^2 A)\sin A$$
$$=2\sin A(1-\sin^2 A)+\sin A-2\sin^3 A$$
$$=3\sin A-4\sin^3 A\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A$$
$$=(2\cos^2 A-1)\cos A-2\sin A\cos A\sin A$$
$$=2\cos^3 A-\cos A-2\cos A(1-\cos^2 A)$$
$$=4\cos^3 A-3\cos A\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

$$\tan 3A=\tan(2A+A)=\frac{\tan 2A+\tan A}{1-\tan 2A\tan A}$$

$$=\frac{\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\tan A}{1-\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\tan A}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

(39)ト同様ニ(21)ヨリ次ノ式ヲ得ベシ.

$$\cot 3A=\frac{3\cot A-\cot^3 A}{1-3\cot^2 A}\cdots\cdots\cdots\cdots(39)'$$

系. (37), (38)ヲ轉項シ4ヲ以テ除シ次ノ式ヲ得.

$$\left.\begin{aligned}\sin^3 A&=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)\\ \cos^3 A&=\frac{1}{4}(3\cos A+\cos 3A)\end{aligned}\right\}$$

此ノ二式ハ任意ノ角ノ正弦及ビ餘弦ノ立方ヲ一次式ニ直スニ用フ.

設題十.

次ノ諸恒等式ヲ證セヨ. $=2\sin A\cos A$

***118.** $\sin 2A=\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)}$

(餘角ノ關係及ビ公式31ノ系1ヲ用ヒテ證ス).

***119.** $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec}2A.$

***120.** $\cot A-\tan A=2\cot 2A.$

***121.** $\operatorname{cosec}A-\cot A=\tan\frac{A}{2}.$

***122.** $\operatorname{cosec}A+\cot A=\cot\frac{A}{2}.$

***123.** $\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2=1\pm\sin A.$

$\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan^2\alpha$

***124.** $\frac{1\pm\sin A}{1\mp\sin A}=\tan^2\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$

***125.** $\sec A\pm\tan A=\tan\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$

***126.** $\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}.$

但根號ノ前ノ符號ハAガ第一,第四象限ニ在ルトキ+ニシテ第二,第三象限ニ在ルトキ−ナリ.

此ノ式ニヨリ $\tan 7^\circ.5=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ ヲ證セヨ.

127. $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta.$

128. $\sin^4A-\cos^4A$ ノ最大値ヲ求ム. $\cos 2A=-1$

129. $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ ノ値ヲ求ム.

(先ヅ $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ ヲ $1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$ ニ變シテ計算ス).

$=-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)$

130' $\tan x=2,\ \tan y=\frac{1}{3}$ when $\tan\{2(x+y)\}$

X. **130.** $\cos x=\frac{3}{5},\ \cos y=\frac{5}{13}$ ナルトキ $\tan\{2(x+y)\}$ ノ値ヲ求ム(但シ x,y ハ正鋭角トス).

131. $\cos 315^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ知リテ $157^\circ.5$ ノ正弦及ビ餘弦ヲ求ム.

$\sin\frac{315}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 315}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\cos 157.5=-\sqrt{\frac{1+\cos 315}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

132. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ ナルトキ $\sin 2\theta,\ \sin^3\theta+\cos^3\theta$ ノ値ヲ求ム.

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$

$\{1+\sin 2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2$ ヨリ計算ス$\}$

133. $\tan A+2\tan 2A+4\tan 4A=\cot A-8\cot 8A.$

(問題 120 ヨリ誘導ス).

134. $\tan^2\theta=2\tan^2\phi+1$ ナルトキ $\cos 2\theta+\sin^2\phi=0$ ナルコトヲ證セヨ.

135. $\cos^2A+\cos^2(A+120^\circ)+\cos^2(A+240^\circ)$ ヲ簡單ニセヨ.

136. $(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2=4\cos^2\frac{A-B}{2}.$

137. $1+\cos 6\theta-\cos 10\theta-\cos 4\theta=4\sin 2\theta\cos 3\theta\sin 5\theta.$

138. $\sec 2A-\cos 2A$ ヲ $\tan A$ ニテ表セ.

139. $\tan\theta=\frac{b}{a}$ ナルトキハ $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}.$

140. $\cos A=\dfrac{\cos B-k}{1-k\cos B}$ ナルトキハ $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+k}{1-k}\tan^2\dfrac{B}{2}$.

141. 二鋭角α,βノ和ガ定角σニ等シキトキ $\cos\alpha\cos\beta$ ノ最大値ヲ求ム.

142. $$\begin{cases} 4\sin A\sin(60^\circ+A)\sin(60^\circ-A)=\sin 3A. \\ 4\cos A\cos(60^\circ+A)\cos(60^\circ-A)=\cos 3A. \end{cases}$$

143. $\cos^3 A\dfrac{\sin 3A}{3}+\sin^3 A\dfrac{\cos 3A}{3}=\dfrac{1}{4}\sin 4A.$

144. $\sin 5A$ ヲ $\sin A$ ニテ表シ $\cos 5A$ ヲ $\cos A$ ニテ表セ.

($\sin 5A=\sin 5A+\sin A-\sin A$, $\cos 5A=\cos 5A+\cos A-\cos A$ トシテ計算スルヲ便トス).

145. $\sin 18^\circ$ 及ビ $\cos 36^\circ$ ヲ求ム.

($\cos 3.18^\circ=\sin 2.18^\circ$ ヲ變形シテ之ヨリ $\sin 18^\circ$ ヲ求メ従ッテ二倍角ノ公式ニヨリ $\cos 36^\circ$ ヲ求ム).

146. $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ.$

次ノ方程式ニ適スル 360° ヲ超ヘザル正角ヲ求ム.

147. $\cos 2\theta=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-1.$

148. $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{4}{\sqrt{3}}.$

149. $\operatorname{cosec}\theta-4\sin\theta=2.$

150. $\cos 3\theta+8\cos^3\theta=0.$

第四編
對數
第八章
一般ノ對數

37. 對數ノ定義及ビ記法.

任意ノ正數 a ノ x (任意ノ數)乘冪ヲ y トスルトキ x ハ a ヲ底トセル y ノ對數ナリト云ヒ,此ノ關係ヲ $x=log_a y$ ト記ス.

注意一. 此ノ關係ヲ又 $y=log_a^{-1}x$ トモ記ス.

注意二. 定義ニヨリ直ニ次ノ關係ヲ得.

(i) $log_a 1 =0$ $\quad\because\quad a^0 =1.$

(ii) $log_a a =1$ $\quad\because\quad a^1 =a.$

(iii) $log_a a^m=m$ $\quad\because\quad a^m=a^m.$

38. 對數ノ重ナル性質.

第一. 乘積ノ對數ハ其ノ各因數ノ對數ノ和ニ等シ.

證.

$log_a m=x,\ log_a n=y$ トセバ $m=a^x,\ n=a^y$

$$\therefore\quad mn=a^x a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\quad log_a mn=x+y=log_a m+log_a n.$$

同様ニ $log_a mnp\cdots\cdots\cdots=log_a m+log_a n+log_a p+\cdots\cdots\cdots\cdots$

第二. 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ.

證.

$log_a m=x,\ log_a n=y$ トセバ $m=a^x,\ n=a^y$

$$\therefore\quad \frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

$$\therefore\quad log_a\frac{m}{n}=x-y=log_a m-log_a n.$$

第三. 一數ノ乘冪ノ對數ハ原數ノ對數ニ其ノ指數(任意ノ數)ヲ乘ジタルモノニ等シ.

證.

$log_a m=x$ トセバ $m=a^x$

$$\therefore\quad m^r=(a^x)^r=a^{rx}$$

$\therefore \quad log_a m^r = rx = r log_a m.$

注意. $log_a \sqrt[r]{m} = log_a m^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} log_a m.$

設題十一.

151. 對數ノ定義ニヨリ次ノ諸對數ノ値ヲ求ム.

$log_2 1024$, $log_3 \sqrt{27}$, $log_4 0{\cdot}125$, $log_{49} \sqrt[3]{7}$, $log_{\cdot 01} 10$, $log_{2\cdot 25} 3{\cdot}375$, $log_2 sin 45^\circ$.

152. $7 log_a \frac{15}{16} - 6 log_a \frac{3}{8} + 5 log_a \frac{2}{5} - log_a \frac{25}{32}$ ヲ簡單ニセヨ.

153. $7 log_2 \frac{16}{15} + 5 log_2 \frac{25}{24} + 3 log_2 \frac{81}{80}$ 及ビ

$log_{15} \sqrt{54} - log_{15} \left(\frac{7\frac{1}{5}}{27} \right)^2 + log_{15} \frac{8}{3} \sqrt{\cdot\dot{6}}$ ノ値ヲ求ム.

154. $a^p = b^q$ ナルトキハ $q log_a x = p log_b x$.

***155.** $log_a b \times log_b c = log_a c$.

第九章

常用對數

39. 常用對數ノ性質.

定義一. 10ヲ底トスル對數ヲ常用對數ト云フ.

規約一. 常用對數ノ記法ニ於テハ底ヲ略スルヲ常トス.

規約二. 常用對數ニ於テハ其ノ小數分ヲ常ニ正ナラシメ整數分若シ負ナルトキハ負號ヲ其ノ上ノミニ記ス.

今後單ニ對數ト稱スルハ常用對數ノコトナリ.

定義二. 對數ノ小數分ヲ假數ト云ヒ整數ヲ指標ト云フ.

定義三. 一數ノ對數ノ符號ヲ變ジタ

ルモノヲ此ノ數ノ餘對數ト云フ.

注意一. 一數ノ餘對數ハ $colog$ ナル記法ニヨリ之ヲ表スコトアリ.

注意二. 互ニ反數ヲナス二數ノ對數ハ互ニ餘對數ナリ.

定理一. 單ニ位ノミノ異ナレル二數ノ對數ノ假數ハ異ナルコトナシ.

證.

$$log(a\times 10^n)=loga+log10^n=n+loga.$$

$$log(a\div 10^n)=loga-log10^n=-n+loga.$$

故ニ $(a\times 10^n)$, a, $(a\div 10^n)$ ノ對數ノ假數ハ異ナルコトナシ.

定理二. 整數 n 位ヲ有スル數ノ對數ノ指標ハ $(n-1)$ ニシテ小數點以下有意數字ニ到ルマデニ n 個ノ零ヲ有スル小數ノ對數ノ指標ハ $-(n+1)$ ナリ.

證.

整數 n 位ヲ有スル數ハ 10^{n-1} ト 10^n トノ間ニ在ルヲ以テ其ノ對數ハ $(n-1)$ ト n トノ間ニ在リ,故ニ其ノ指標ハ $(n-1)$ ナリ.

小數點以下有意數字ニ到ルマデニ n 個ノ零ヲ有スル小數ハ $10^{-(n+1)}$ ト 10^{-n} トノ間ニ在ルヲ以テ其ノ對數ハ $-(n+1)$ ト $-n$ トノ間ニ在リ,故ニ其ノ指標ハ $-(n+1)$ ナリ.

定理三. 一數ノ餘對數ハ其ノ對數ノ假數ヲ 1 ヨリ減ジタルモノヲ假數トシ,其ノ指標ノ符號ヲ變ジテ -1 ニ加ヘタルモノヲ指標トスルモノナリ.

證.

任意ノ對數ノ指標ヲ a, 假數ヲ b トセバ

$$-(a+b)=-a-b=(-1-a)+(1-b).$$

40. 對數四則.

第一. 對數ノ加法.

對數ノ假數ハ常ニ正ナルヲ以テ直ニ其ノ和ヲ作リ,指標ハ符號ニ注意シテ其ノ代數和ヲ作ルベシ.

例一.	例二.	例三.
3.6428	$\bar{2}.9326$	3.5637
2.5364	$\bar{1}.6785$	$\bar{5}.7456$
6.1792	$\bar{2}.6111$	$\bar{1}.3093$

第二. 對數ノ減法.

對數ヲ減ズルニハ餘對數ヲ加フレバ可ナリ.

例. 2.6389, $\bar{3}.5463$ ノ和ヨリ $\bar{2}.5713$, 2.2105 ノ和ヲ減ゼヨ.

運算.

$$\begin{array}{r} 2.6389 \\ \bar{3}.5463 \\ 1.4287 \\ \underline{\bar{3}.7895} \\ \bar{1}.4034 \end{array}$$

第三. 對數ニ整數ヲ乘ズル法.

對數ガ正ナルトキハ普通ノ數ノ如ク乘法ヲ行ヒ負ナルトキハ假數ト指標トニ就キテ別々ニ乘法ヲ行ヒ,其ノ結果ヲ加フベシ(規約二ニ從ヒ).

例一.	例二.
2.3576	$\bar{3}.6782$
3	2
7.0728	$\bar{5}.3564$

第四. 對數ヲ整數ニテ除スル法.

對數ガ正ナルトキハ普通ノ數ノ如ク除法ヲ行ヒ,負ナルトキハ適當ノ數ヲ指標ヨリ減ジ,同數ヲ假數ニ加ヘテ指標ヲ整除シ得ベキモノトシ然ル後除法ヲ行フベシ.

例一.	例二.
2.7539 (4	$\bar{5}.9287$ (3
0.6885	$\bar{2}.6429$

41. 數ノ對數表.

數ノ對數表ニハ若干ノ數ニ到ル諸整數ノ對數ノ假數ヲ載ス. 本書卷尾ノ表ニハ 1009 マデノ整數ノ對數ノ假數四桁ヲ列擧セリ,其ノ用法次ノ如シ.

第一. 數ノ對數ヲ求ムル法.

例.

1. $\log 83.2$ ヲ求ム.

解.

83·2 ノ對數ノ假數ハ表ニヨリ 9201 ナルコトヲ知リ,又指標ハ 39 條ニヨリ 1 ナルコトヲ知ル.

∴ $log 83{\cdot}2 = 1{\cdot}9201$

2. $log\,0{\cdot}000357$ ヲ求ム.

解.

0·000357 ノ對數ノ假數ハ表ニヨリ 5527 ナルコトヲ知リ,指標ハ 39 條ニヨリ −4 ナルコトヲ知ル.

∴ $log\,0{\cdot}000357 = \bar{4}{\cdot}5527.$

3. $log\,5{\cdot}118$ ヲ求ム.

解.

$log\,5{\cdot}12 - log\,5{\cdot}11 = 0{\cdot}7093 - 0{\cdot}7084 = 0{\cdot}0009$

$0{\cdot}01 : 0{\cdot}008 :: 0{\cdot}0009 : x$

$x = 0{\cdot}0007.$

∴ $log\,5{\cdot}118 = 0{\cdot}7084 + 0{\cdot}0007 = 0{\cdot}7091.$

4. $log\,0{\cdot}7332$ ヲ求ム.

解.

$log\,0{\cdot}734 - log\,0{\cdot}733 = \bar{1}{\cdot}8657 - \bar{1}{\cdot}8651 = 0{\cdot}0006.$

$0{\cdot}001 : 0{\cdot}0002 :: 0{\cdot}0006 : x$

$x = 0{\cdot}0001.$

∴ $log\,0{\cdot}7332 = \bar{1}{\cdot}8651 + 0{\cdot}0001 = \bar{1}{\cdot}8652.$

5. $log\,456{\cdot}78$ ヲ求ム.

解.

$log\,457 - log\,456 = 2{\cdot}6599 - 2{\cdot}6590 = 0{\cdot}0009.$

$1 : 0{\cdot}78 :: 0{\cdot}0009 : x$

$x = 0{\cdot}0007.$

∴ $log\,456{\cdot}78 = 2{\cdot}6590 + 0{\cdot}0007 = 2{\cdot}6597.$

第二. 對數ヲ知リテ之ニ應ズル數ヲ求ムル法.

例.

1. $log\,a = 0{\cdot}4579$ ナルトキ a(卽 $log^{-1}0{\cdot}4579$) ヲ求ム.

解.

0·4579 ヲ對數トセル數ノ數字ノ排列ハ表ニヨリ 287 ナルコトヲ知リ,此ノ數ハ指標ニヨリ整數一位ノモノナルコトヲ知ル.

∴ $a = 2{\cdot}87.$

2. $log\,a = \bar{1}{\cdot}3766$ ナルトキ a ヲ求ム.

$\bar{1}\cdot3766$ ヲ對數トセル數ノ數字ノ排列ハ表ニヨリ238ニシテ,此ノ數ハ指標ニヨリ小數點以下有意數字マデニ０ヲ有セザル小數ナルコトヲ知ル.

$$\therefore \quad a=0\cdot238.$$

3. $\log a=2\cdot7516$ ナルトキ a ヲ求ム.

解.

$$\log565-\log564=2\cdot7520-2\cdot7513=0\cdot0007.$$

$$\log a-\log564=2\cdot7516-2\cdot7513=0\cdot0003.$$

$$0\cdot0007 : 0\cdot0003 :: 1 : x$$

$$x=0\cdot4$$

$$\therefore \quad a=564+0\cdot4=564\cdot4.$$

4. $\log a=\bar{3}\cdot8314$ ナルトキ a ヲ求ム.

解.

$$\log0\cdot00679-\log0\cdot00678=\bar{3}.8319-\bar{3}\cdot8312=0\cdot0007.$$

$$\log a-\log0\cdot00678=\bar{3}\cdot8314-\bar{3}.8312=0\cdot0002.$$

$$0\cdot0007 : 0\cdot0002 :: 0\cdot00001 : x$$

$$x=0\cdot000003.$$

$$\therefore \quad a=0\cdot00678+0\cdot000003=0\cdot006783.$$

注意一. 表中ニ在ラザル數ノ對數ヲ求ムル法及

ビ對數ニ應ズル數ヲ求ムル法ハ次ノ定理ニヨリタルナリ.

數ノ小變化ト其ノ對數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド相比例ス.

但此ノ定理ノ成立及ビ限界ヲ論ズルコトハ本書ノ程度ヲ超ユルヲ以テ之ヲ省ク.

注意二. 比例部分(P.P.)ヲ使用スルトキハ前ノ如キ比例ノ運算ヲ略スルコトヲ得ベシ.

42. 三角函數ノ對數表.

三角函數ノ對數表ニハ0°ヨリ90°ニ至ルマデノ諸角ノ三角函數ノ對數又ハ之ニ10ヲ加ヘタルモノ(之ヲ表對數ト云ヒLヲ以テ其ノ記號トス)ヲ載ス.

注意. 表對數ヲ用フルハ單ニ植字ノ便ヲ計ランガタメノミ.

本書卷尾ノ表ニハ0°ヨリ90°マデノ$10'$置キノ諸角ノ三角函數ノ對數ヲ列擧セリ,其ノ用法次ノ如シ.

第一. 角ノ三角函數ノ對數ヲ求ムル法.

例.

1. $\log\sin 23^\circ 34'.6$ ヲ求ム.

解.

$$\log\sin 23^\circ 40' - \log\sin 23^\circ 30' = \bar{1}\cdot 6036 - \bar{1}\cdot 6007 = 0\cdot 0029.$$

$$10 : 4\cdot 6 :: 0\cdot 0029 : x$$

$$x = 0\cdot 0013.$$

$$\therefore\quad \log\sin 23^\circ 34'.6 = \bar{1}\cdot 6007 + 0\cdot 0013 = \bar{1}\cdot 6020.$$

2. $\log\tan 72^\circ 53'.3$ ヲ求ム.

解.

$$\log\tan 73^\circ - \log\tan 72^\circ 50' = 0\cdot 5147 - 0\cdot 5102 = 0\cdot 0045.$$

$$10 : 3\cdot 3 :: 0\cdot 0045 : x$$

$$x = 0\cdot 0015.$$

$$\therefore\quad \log\tan 72^\circ 53'.3 = 0\cdot 5102 + 0\cdot 0015 = 0\cdot 5117.$$

3. $\log\cos 35^\circ 42'.7$ ヲ求ム.

解.

$$\log\cos 35^\circ 40' - \log\cos 35^\circ 50' = \bar{1}\cdot 9098 - \bar{1}\cdot 9089 = 0\cdot 0009.$$

$$10 : 2\cdot 7 :: 0\cdot 0009 : x$$

$$x = 0\cdot 0002.$$

$$\therefore\quad \log\cos 35^\circ 42'.7 = \bar{1}\cdot 9098 - 0\cdot 0002 = \bar{1}\cdot 9096.$$

4. $\log\cot 64^\circ 18'.6$ ヲ求ム.

解.

$$\log\cot 64^\circ 10' - \log\cot 64^\circ 20' = \bar{1}\cdot 6850 - \bar{1}\cdot 6817 = 0\cdot 0033$$

$$10 : 8\cdot 6 :: 0\cdot 0033 : x$$

$$x = 0\cdot 0028.$$

$$\therefore\quad \log\cot 64^\circ 18'.6 = \bar{1}\cdot 6850 - 0\cdot 0028 = \bar{1}\cdot 6822.$$

5. $\log\sec 21^\circ 37'.4$ ヲ求ム.

解.

$$\log\cos 21^\circ 37'.4 = \bar{1}\cdot 9683.$$

$$\therefore\quad \log\sec 21^\circ 37'.4 = 0\cdot 0317.$$

6. $\log\operatorname{cosec} 16^\circ 42'.3$ ヲ求ム.

解.

$$\log\sin 16^\circ 42'.3 = \bar{1}\cdot 4586.$$

$$\therefore\quad \log\operatorname{cosec} 16^\circ 42'.3 = 0\cdot 5414.$$

第二. 三角函數ノ對數ヲ知リテ之ニ應ズル角ヲ求ムル法.

例.

1. $\log\sin A = \bar{1}\cdot 3035$ ナルトキ A ヲ求ム.

解.

$$\log\sin 11^\circ 40' - \log\sin 11^\circ 30' = \bar{1}\cdot 3058 - \bar{1}\cdot 2997 = 0\cdot 0061.$$

$$\log\sin A - \log\sin 11^\circ 30' = \bar{1}\cdot 3035 - \bar{1}\cdot 2997 = 0\cdot 0038.$$

$$0\cdot 0061 : 0\cdot 0038 :: 10 : x$$

$$x = 6\cdot 2.$$

$$A = 11^\circ 30' + 6'\cdot 2 = 11^\circ 36'\cdot 2.$$

2. $\log\tan A = 0\cdot 4782$ ナルトキAヲ求ム.

解.

$$\log\tan 71^\circ 40' - \log\tan 71^\circ 30' = 0\cdot 4797 - 0\cdot 4755 = 0\cdot 0042.$$

$$\log\tan A - \log\tan 71^\circ 30' = 0\cdot 4782 - 0\cdot 4755 = 0\cdot 0027.$$

$$0\cdot 0042 : 0\cdot 0027 :: 10 : x$$

$$x = 6\cdot 4.$$

$$\therefore \quad A = 71^\circ 30' + 6'\cdot 4 = 71^\circ 36'\cdot 4.$$

3. $\log\cos A = \bar{1}\cdot 9349$ ナルトキAヲ求ム.

解.

$$\log\cos 30^\circ 30' - \log\cos 30^\circ 40' = \bar{1}\cdot 9353 - \bar{1}\cdot 9346 = 0\cdot 0007.$$

$$\log\cos 30^\circ 30' - \log\cos A = \bar{1}\cdot 9353 - \bar{1}\cdot 9349 = 0\cdot 0004.$$

$$0\cdot 0007 : 0\cdot 0004 :: 10 : x$$

$$x = 5\cdot 7.$$

$$\therefore \quad A = 30^\circ 30' + 5'\cdot 7 = 30^\circ 35'\cdot 7.$$

4. $\log\cot A = \bar{1}\cdot 8253$ ナルトキAヲ求ム.

解.

$$\log\cot 56^\circ 10' - \log\cot 56^\circ 20' = \bar{1}\cdot 8263 - \bar{1}\cdot 8235 = 0\cdot 0028.$$

$$\log\cot 56^\circ 10' - \log\cot A = \bar{1}\cdot 8263 - \bar{1}\cdot 8253 = 0\cdot 0010.$$

$$0\cdot 0028 : 0\cdot 0010 :: 10 : x$$

$$x = 3\cdot 6.$$

$$\therefore \quad A = 56^\circ 10' + 3'\cdot 6 = 56^\circ 13'\cdot 6.$$

5. $\log\sec A = 0\cdot 0566$ ナルトキAヲ求ム.

解.

$$\log\cos A = \bar{1}\cdot 9434.$$

$$\therefore \quad A = 28^\circ 37'\cdot 1.$$

6. $\log\mathrm{cosec}\, A = 0\cdot 2668$ ナルトキAヲ求ム.

解.

$$\log\sin A = \bar{1}\cdot 7332.$$

$$\therefore \quad A = 32^\circ 45'.$$

注意一. 表中ニ在ラザル鋭角ノ三角函數ノ對數ヲ求ムル法及ビ三角函數ノ對數ヲ知リテ角ヲ求ムル法ハ次ノ定理ニヨリタルナリ.

$0°$ 又ハ $90°$ ニ近カラザル角ノ小變化ト其ノ三角函數ノ對數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド相比例ス.

此ノ定理ノ成立及ビ限界ヲ論ズルコトハ本書ノ程度ヲ超ユルヲ以テ之ヲ省ク.

注意二. 比例部分ノ表ヲ使用スルトキハ比例ノ運算ヲ略スルコトヲ得ベシ.

43. 諸計算ニ於ケル對數ノ應用.

例.

1. $x=2{\cdot}582\times345{\cdot}7$ ヲ計算セヨ.

解.

$$\log 2{\cdot}582=0{\cdot}4119$$
$$\log 345{\cdot}7=2{\cdot}5387$$
$$\log x=2{\cdot}9506$$
$$x=892{\cdot}4.$$

2. $x=\dfrac{0{\cdot}07438}{129{\cdot}5}$ ヲ計算セヨ.

解.

$$\log 0{\cdot}07438=\bar{2}{\cdot}8715$$
$$-\log 129{\cdot}5=\bar{3}{\cdot}8877$$
$$\log x=\bar{4}{\cdot}7592$$
$$x=0{\cdot}0005744.$$

3. $x=(3{\cdot}072)^3$ ヲ計算セヨ.

解.

$$\log 3{\cdot}072=0{\cdot}4874$$
$$3$$
$$\log x=1{\cdot}4622$$
$$x=28{\cdot}99.$$

4. $x=\sqrt[4]{0{\cdot}007654}$ ヲ計算セヨ.

解.

$$\log 0{\cdot}007654=\bar{3}{\cdot}8839\,(4$$
$$\log x=\bar{1}{\cdot}4710$$
$$x=0{\cdot}2958.$$

5. $(1{\cdot}2)^x=1{\cdot}1$ ヲ解ケ.

解.

$$x\log 1{\cdot}2=\log 1{\cdot}1$$
$$x=\frac{\log 1{\cdot}1}{\log 1{\cdot}2}=\frac{0{\cdot}0414}{0{\cdot}0792}=\frac{23}{44}=0{\cdot}5227.$$

注意. 本題ノ如キモノヲ指數方程式ト云フ.

設題十二.

次ノ方程式ヲ解ケ.

156. $\left(\frac{203}{200}\right)^{2x}=2.$

157. $8^{5-3x}=12^{4-2x}.$

158. $\left.\begin{aligned} 2^x \times 5^y &= 1 \\ 5^{x+1} \times 2^y &= 2 \end{aligned}\right\}$

次ノ二式ヲ計算セヨ.

159. $x=\frac{(2\cdot013)^2 \times (0\cdot0593)^{\frac{3}{2}}}{(0\cdot9123)^4}.$

160. $x=\frac{(34\cdot73)^{\frac{4}{5}} \times \sqrt[6]{2\cdot539}}{\sqrt[4]{4\cdot397} \times (3\cdot456)^3}.$

第五編

一般ノ三角形

第十章

三角形ノ性質

44. 三角形ノ角ノ關係.

一ツノ三角形ノ三ツノ角ヲ A, B, C トセバ A+B+C ハ 180° トナルヲ以テ其ノ三角函數ノ間ニ種々ノ關係アリ,例ヘバ次ノ如シ.

$$\left.\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin(180^\circ-C) = \sin C \\ \cos(A+B) &= \cos(180^\circ-C) = -\cos C \\ \tan(A+B) &= \tan(180^\circ-C) = -\tan C \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{A+B}{2} &= \sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2} \\ \cos\frac{A+B}{2} &= \cos\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2} \\ \tan\frac{A+B}{2} &= \tan\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} \end{aligned}\right\}$$

注意. 上式ノ A+B ノ代リニ B+C 或ハ C+A ヲ取

ルトキハCノ代リニA或ハBヲ取ルコトヲ要ス.

設題十三

A, B, C ガ一ツノ三角形ノ三ツノ角ナルトキ次ノ諸式ヲ證セヨ.

***161.** $\begin{cases} \sin(2A+2B) = -\sin 2C. \\ \cos(2A+2B) = \cos 2C. \\ \tan(2A+2B) = -\tan 2C. \end{cases}$

***162.** $\begin{cases} \sin\dfrac{3A+3B}{2} = -\cos\dfrac{3C}{2}. \\ \cos\dfrac{3A+3B}{2} = -\sin\dfrac{3C}{2}. \\ \tan\dfrac{3A+3B}{2} = \cot\dfrac{3C}{2}. \end{cases}$

***163.** $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

***164.** $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1.$

***165.** $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$

***166.** $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C - 1.$

***167.** $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

$$= 4\cos\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{C}{4}\right).$$

***168.** $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$

$$= 4\sin\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ - \frac{C}{4}\right) + 1.$$

169. $\begin{cases} \sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = 1 - 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}. \\ \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C. \end{cases}$

170. $\dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

171. $\sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C)$

$$= 4\sin A\sin B\sin C.$$

172. $\sin A(\cos B + \cos C) + \sin B(\cos C + \cos A)$

$$+ \sin C(\cos A + \cos B) = \sin A + \sin B + \sin C.$$

173. $\sin^2 A + 2\sin B\sin C\cos A = \sin^2 B + \sin^2 C.$

174. $\sin A\sin(A+2C) + \sin B\sin(B+2A)$

$$+ \sin C\sin(C+2B) = 0.$$

175. $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = -4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$

***176.** $\begin{cases} \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C. \\ \cot\dfrac{A}{2} + \cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} = \cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}. \end{cases}$

$$\text{*177.}\quad \begin{cases} \cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1. \\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1. \end{cases}$$

178. $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6},\ \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ ナルトキハ $\tan C=\frac{20}{21}$.

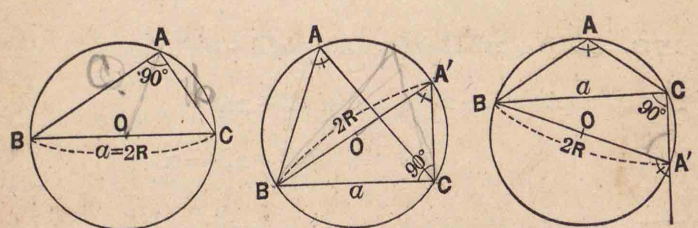
179. $\cot\frac{A}{2},\ \cot\frac{B}{2},\ \cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ

$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$.

180. $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$.

45. 外接圓ノ半徑及ビ正弦比例式.

$\hat{ABC}$ ノ各角 A, B, C ノ對邊ヲ a, b, c トシ外接圓ノ半徑ヲRトセバ



(i) A=90° ナルトキハ $\sin A=1,\ a=2R$ ナルヲ以テ

$$\sin A=\frac{a}{2R}.$$

$$\therefore\quad 2R=\frac{a}{\sin A}.$$

(ii) A$\neq$90° ナルトキ BO ヲ延長シテ其ノ圓周ト交ル點A′ヲ C ニ連ヌルトキハ A ト $B\hat{A'}C$ トハ相等シキカ或ハ補角ヲナスヲ以テ

$$\sin A=\sin BA'C=\frac{a}{2R}.$$

$$\therefore\quad 2R=\frac{a}{\sin A}.$$

故ニ A ノ如何ニ拘ラズ $2R=\frac{a}{\sin A}$.

同様ニ $2R=\frac{b}{\sin B},\quad 2R=\frac{c}{\sin C}$.

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}(=2R)\ \cdots\cdots(40)$$

之ヲ正弦比例式ト云ヒ三角形ノ性質中最モ重要ナルモノナリ.

三角形ノ邊ト角トノ關係ハ $a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$ ヲ利用シテ解キ得ル場合極メテ多シ.

46. 餘弦式.

$$a=2R\sin A=2R\sin(B+C)=2R(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$$
$$=2R\sin B\cos C+2R\sin C\cos B.$$

$$\therefore \quad \text{同樣ニ} \left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

之ヲ餘弦第一式ト云フ. (1) (2)---- (3)----

(41) ノ各式ニ $a, -b, -c$ ヲ乘ジテ相加フレバ

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$$

$$\therefore \quad \text{同樣ニ} \left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

此ノ各式ヲ變ジテ次ノ形トナスコトヲ得.

$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (42)'$$

(42) 及ビ (42)′ ヲ餘弦第二式ト云ヒ正弦比例式ニ次デ必要ノモノナリ.

注意一. 餘弦式ハ正弦比例式ニヨラズシテ幾何學上ノ性質ヨリ獨立ニ作ルコトヲ得ベシ.

注意二. 三角形ノ邊ト角ノ正切或ハ餘切トノ關係ノ問題ハ $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = \dfrac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$, $\cot A = \dfrac{R(b^2+c^2-a^2)}{abc}$ ノ如キ變形法ニヨリ解シ得ル場合多シ.

設題十四.

次ノ諸式ニ於テ A, B, C ハ一ツノ三角形ノ角ヲ表シ a, b, c ハ各對邊ヲ表シ p ハ三邊ノ和ノ半分ヲ表ス.

181. 底邊12寸頂角60°ナル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求ム.

182. $\sin A + \sin B > \sin C$.

183. $c(\sin^2 A + \sin^2 B) = \sin C(a\sin A + b\sin B)$.

184. $b\cos B + c\cos C = a\cos(B - C)$.

185. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$.

186. $\dfrac{b^2 - c^2}{a^2} = \dfrac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$.

187. $B = 60°$ ナルトキハ $\dfrac{a+c}{2b} = \sin(30° + C)$.

188. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0.$

189. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$

190. $C=2B$ ナルトキハ $c^2-b^2=ab.$

以上十題ハ正弦比例式ノ應用ナリ.

191. $(a+b)\cos C+c(\cos A+\cos B)>a\cos B+b\cos A.$

192. $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{b}{a}.$

193. $a(\cos B+\cos C)=2(b+c)\sin^2\dfrac{A}{2}.$

194. $a(b^2+c^2)\cos A+b(c^2+a^2)\cos B+c(a^2+b^2)\cos C=3abc.$

以上四題ハ餘弦第一式ノ應用ナリ, 194 ハ公式(41)ノ各式ノ左右邊ヲ置キ換ヘ兩邊ニ同ジモノヲ乘ジテ右邊ニ abc ヲ作リ然ル後三ツノ式ヲ加ヘテ之ヲ得ベシ.

***195.** $$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}. \\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{ca}}. \\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}. \end{cases}$$

***196.** $$\begin{cases} \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}. \\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ca}}. \\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}}. \end{cases}$$

197. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$

198. $3, 4, \sqrt{37}$ ナル三邊ヲ有スル三角形ノ最大角ヲ求ム.

199. A, B, C ガ等差級數ヲナストキハ $b=\sqrt{c^2-ca+a^2}.$

200. a 邊ニ對スル中線ノ長サハ $\dfrac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$ ナリ.

201. $b\cos A=a\cos B$ ナルトキハ $a=b.$

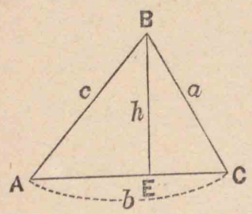
202. $a\cos A=b\cos B$ ナルトキハ $a=b$ 或ハ $C=90°.$

203. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

以上九題ハ餘弦第二式ノ應用ナリ. 但終リノ三題ハ正弦比例式ニヨリテモ證スルコトヲ得.

47. 面積ノ式.

$\hat{ABC}$ ニ於テ一角頂 B ヨリ對邊 CA ニ垂線 BE ヲ



作リ其ノ數値ヲhトシSヲ面積トセバ幾何學ニヨリ $S=\frac{1}{2}bh$ナリ;然ルニ $h=c\,sinA$ ナルヲ以テ之ヲ上式ニ代入スレバ

$$
同様ニ\quad \left.\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}bc\,sinA\\
S&=\frac{1}{2}ca\,sinB\\
S&=\frac{1}{2}ab\,sinC
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(43)
$$

餘弦第二式ニヨリ正弦ヲ邊ニテ表ス式ヲ作レバ次ノ如シ.

$$
\begin{aligned}
sin^2A&=1-cos^2A=(1+cosA)(1-cosA)\\
&=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\\
&=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\\
&=\frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2c^2}\\
&=\frac{2p(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{4b^2c^2}
\end{aligned}
$$

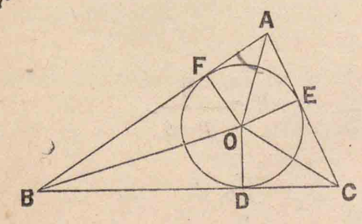
$$
=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad & sinA=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\
同様ニ\quad & sinB=\frac{2}{ca}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\\
& sinC=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
\end{aligned}
$$

之ヲ(43)ニ代入スレバ

$$
S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\cdots\cdots\cdots\cdots(44)
$$

48. 内接圓ノ半徑及ビ半角ノ正切ノ式.



$\hat{ABC}$ノ面積ヲS,内接圓ノ中心ヲO,半徑ヲr,各邊トノ切點ヲD,E,Fトセバ $sin\frac{A}{2}=\frac{FO}{AF}$

$$
S=O\hat{B}C+O\hat{C}A+O\hat{A}B=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr
$$

$$
=\frac{a+b+c}{2}\times r=pr
$$

$$
\therefore\quad r=\frac{S}{p}=\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\cdots\cdots(45)
$$

$$
=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}
$$

$$
=\frac{''}{\sqrt{p^2}}=\sqrt{\frac{p(-)(-)}{p^2}}
$$

次ニ $tan\text{FAO}=\dfrac{\text{FO}}{\text{AF}}$, 而シテ FO$=r$, AF$=p-a$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad tan\frac{\text{A}}{2}&=\frac{r}{p-a}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \\ \text{同様ニ}\ tan\frac{\text{B}}{2}&=\frac{r}{p-b}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \\ tan\frac{\text{C}}{2}&=\frac{r}{p-c}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \end{aligned}\right\}\quad(46)$$

注意此ノ式ハ $tan\dfrac{\text{A}}{2}=\sqrt{\dfrac{1-cos\text{A}}{1+cos\text{A}}}$ ニ餘弦第二式ヲ應用シテ之ヲ求ムルコトヲ得.

系. $\hat{\text{A}}, \hat{\text{B}}, \hat{\text{C}}$ 內ニ在ル傍接圓ノ半徑ヲ夫々 r', r'', r''' トセバ

$$r'=\frac{\text{S}}{p-a},\quad r''=\frac{\text{S}}{p-b},\quad r'''=\frac{\text{S}}{p-c}.$$

設題十五.

次ノ諸問題ニ用ヒタル文字ハ前ニ説明セル意義ヲ有スルモノトス.

***204.** $\text{S}=\dfrac{a^2sin\text{B}sin\text{C}}{2sin(\text{B}+\text{C})}$.

***205.** $\text{S}=p^2tan\dfrac{\text{A}}{2}tan\dfrac{\text{B}}{2}tan\dfrac{\text{C}}{2}$.

206. $\text{S}=\dfrac{abc}{4\text{R}}$.

***207.** $\text{A}\hat{\text{B}}\text{C}$ ノ A ニ於ケル內角ノ二等分線及ビ外角ノ二等分線ハ夫々 $\dfrac{2bc\ cos\dfrac{\text{A}}{2}}{b+c}$ 及ビ $\dfrac{2bc\ sin\dfrac{\text{A}}{2}}{b\sim c}$ ナリ.

***208.** $r=4\text{R}\ sin\dfrac{\text{A}}{2}sin\dfrac{\text{B}}{2}sin\dfrac{\text{C}}{2}$.

209. a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ $cot\dfrac{\text{A}}{2}$, $cot\dfrac{\text{B}}{2}$, $cot\dfrac{\text{C}}{2}$ モ亦然リ.

***210.** 平行四邊形ノ一角ヲ A トシ其ノ兩邊ヲ k, l トセバ其ノ面積ハ $kl\ sin\text{A}$ ニ等シ.

***211.** 四邊形ノ對角線ヲ m, n トシ θ ヲ其ノ夾角トセバ其ノ面積ハ $\dfrac{1}{2}mn\ sin\theta$ ニ等シ.

***212.** n 邊ノ正多角形ノ一邊 a, 外接圓ノ半徑 R, 內接圓ノ半徑 r ノ中何レカ一ツヲ知ルトキハ其ノ面積ハ次式ノ一ツニテ計算セラル.

(i) $\dfrac{1}{4}na^2cot\dfrac{180°}{n}$, (ii) $\dfrac{1}{2}n\text{R}^2sin\dfrac{360°}{n}$, (iii) $nr^2tan\dfrac{180°}{n}$.

第十一章

三角形ノ解法及ビ應用

49. 三角形ノ解法ノ基礎ノ場合.

一般三角形ノ解キ方ノ基礎ノ場合ハ次ノ四種ナリ.

第一. 一邊及ビ二角(例ヘバ a, B, C)ヲ知ル場合.

解.

$A=180°-(B+C)$ ニヨリ A ヲ求メ,

$b=\dfrac{a\,\sin B}{\sin A}$ ニヨリ b ヲ求メ,

$c=\dfrac{a\,\sin C}{\sin A}$ ニヨリ c ヲ求ム.

例.

$A=50°58'{\cdot}7$, $B=32°50'{\cdot}8$, $c=169{\cdot}4$ ナルトキ a, b ヲ求ム.

算式

$$\left\{\begin{aligned} C&=180°-(A+B)\\ a&=\frac{c\,\sin A}{\sin C}\\ b&=\frac{c\,\sin B}{\sin C}\end{aligned}\right.$$

運算.

$$\begin{array}{r} A=\ 50°58'{\cdot}7\\ B=\ 32°50'{\cdot}8\\ \hline A+B=\ 83°49'{\cdot}5\\ 180°=179°60'\\ \hline C=\ 96°10'{\cdot}5\end{array}$$

$$\begin{array}{rr} \log c=2{\cdot}2289 & \log c=2{\cdot}2289\\ \log\sin A=\bar{1}{\cdot}8904 & \log\sin B=\bar{1}{\cdot}7344\\ -\log\sin C=0{\cdot}0025 & -\log\sin C=0{\cdot}0025\\ \hline \log a=2{\cdot}1218 & \log b=1{\cdot}9658\\ a=132{\cdot}4. & b=92{\cdot}43.\end{array}$$

第二. 二邊及ビ其ノ夾角(例ヘバ b, c, A)ヲ知ル場合.

解.

先ヅ $\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}$ ニヨリ $\dfrac{B+C}{2}$ ヲ求ム.

次ニ $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{2R\sin B-2R\sin C}{2R\sin B+2R\sin C}=\dfrac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

此ノ式ニヨリ $\frac{B-C}{2}$ ヲ求ム.

又 $$\frac{a}{b+c}=\frac{2R\sin A}{2R\sin B+2R\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

$$\frac{a}{b-c}=\frac{2R\sin A}{2R\sin B-2R\sin C}=\frac{\sin A}{\sin B-\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}=\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

$$\therefore\quad a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\quad \text{或ハ}\quad a=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}$$

此ノ二式ノ何レカニヨリ a ヲ求ム.

最後ニ $B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}$ 及ビ $C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$ ニヨリ B 及ビ C ヲ求ム.

注意. B, C ヲ求メタル後 $\frac{b\sin A}{\sin B}$ 或ハ $\frac{c\sin A}{\sin C}$ ニヨリ a ヲ求ムルモ可ナリ.

例.

$b=4{\cdot}567,\ c=3{\cdot}456,\ A=56^\circ7'{\cdot}8$ ナルトキ B, C, a ヲ求ム.

算式.

$$\left\{\begin{aligned}
&\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.\\
&a=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.\\
&B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}.\\
&C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}.
\end{aligned}\right.$$

運算.

$$\begin{array}{rcl}
b=4{\cdot}567 & \qquad & A=56^\circ7'{\cdot}8\\
c=3{\cdot}456 & & \frac{A}{2}=28^\circ3'{\cdot}9\\
\hline
b-c=1{\cdot}111 & & 90^\circ=89^\circ60'\\
b+c=8{\cdot}023 & & \frac{B+C}{2}=61^\circ56'{\cdot}1
\end{array}$$

$$\log(b-c)=0.0457 \qquad \log(b+c)=0.9044$$

$$\log\cot\frac{A}{2}=0.2731 \qquad \log\sin\frac{A}{2}=\bar{1}.6725$$

$$-\log(b+c)=\bar{1}.0956 \qquad -\log\cos\frac{B-C}{2}=0.0142$$

$$\log\tan\frac{B-C}{2}=\bar{1}.4144 \qquad \log a=0.5911$$

$$\frac{B-C}{2}=14°33'.3 \qquad a=3.90.$$

$$\frac{B+C}{2}=61°56'.1$$

$$B=76°29'.4$$

$$C=47°22'.8$$

第三. 二邊及ビ其ノ一ツニ對スル角(例ヘバ a, b, A)ヲ知ル場合.

解.

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ ニヨリ B ヲ求メ,

$C=180°-(A+B)$ ニヨリ C ヲ求メ,

$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$ ニヨリ c ヲ求ムベシ.

然ルニ正弦ノ値ヨリBヲ定ムルニヨリ次ノ場合アリ.

(i) $\sin B>1$ 卽 $\log\sin B>0$ ナルトキハ解ナシ.

(ii) $\sin B=1$ 卽 $\log\sin B=0$ ナルトキハ $B=90°$ ナルヲ以テ唯一ツノ解アリ (但 $A<90°$ ナル時ニ限ル).

(iii) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ ニシテ $a \not< b$ ナルトキハ $A \not< B$, 故ニ $B<90°$ 從ツテ唯一ツノ解アリ.

(iv) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ ニシテ $a<b$ ナルトキハ $A<B$, 故ニ B ハ鋭角或ハ鈍角ナルコトヲ得ルヲ以テ B ニハ互ニ補角ナル二ツノ値アリ,從ツテ二ツノ解アリ. 之ヲ兩意ノ場合ト云フ.

例

$a=182.1$, $b=236.8$, $A=32°29'.6$ ナルトキ B, C, c ヲ求ム.

運算.		算式.
$\log b=2.3743$		$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}.$
$\log\sin A=\bar{1}.7301$		$C=180°-(A+B).$
$-\log a=\bar{3}.7397$		$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}.$
$\log\sin B=\bar{1}.8441$		

$B=44°\ 17'.7$	或ハ	$135°\ 42'.3$
$A=32°\ 29'.6$		$32°\ 29'.6$
$A+B=76°\ 47'.3$	或ハ	$168°\ 11'.9$
$180°=179°\ 60'$		$179°\ 60'$
$C=103°\ 12'.7$	或ハ	$11°\ 48'.1$

$\log\sin C=\bar{1}\cdot9883$	或ハ	$\bar{1}\cdot3107$
$\log b=2\cdot3743$		$2\cdot3743$
$-\log\sin B=0\cdot1559$		$0\cdot1559$
$\log c=2\cdot5185$	或ハ	$1\cdot8409$
$c=330$	或ハ	$69\cdot33.$

第四. 三邊 a, b, c ヲ知ル場合.

解.

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}},$$

$$\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}$$

ニヨリ A, B ヲ求メ, $C=180°-(A+B)$ ニヨリ C ヲ求ムベシ.

例.

$a=273\cdot9$, $b=198\cdot6$, $c=236\cdot8$ ナルトキ A, B, C ヲ求ム.

算式.

$$\left\{\begin{aligned}&\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}.\\&\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}.\\&C=180°-(A+B).\end{aligned}\right.$$

運算.

$a=273\cdot9$	$p-a=80\cdot8$
$b=198\cdot6$	$p-b=156\cdot1$
$c=236\cdot8$	$p-c=117\cdot9$
$2p=709\cdot3$	
$p=354\cdot7$	

$\log(p-a)=1\cdot9074$

$\log(p-b)=2\cdot1934$

$\log(p-c)=2\cdot0715$

$-\log p=\bar{3}\cdot4502$

$\log r^2=3\cdot6225$

$\log r=1\cdot8113$

$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}\cdot9039$

$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}\cdot6179$

$\frac{A}{2}=38°\ 42'\cdot69$

$\frac{B}{2}=22°\ 31'\cdot94$

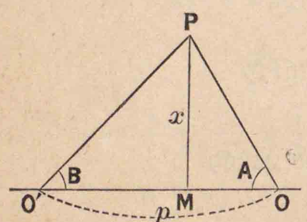
$$A=77°\ 25'\cdot4$$
$$B=45°\ \ 3'\cdot9$$
$$A+B=122°\ 29'\cdot3$$
$$180°=179°\ 60'$$
$$C=57°\ 30'\cdot7$$

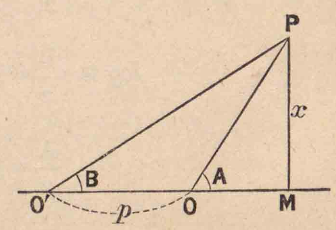
50. 測量問題.

直角三角形ノ解法ヲ應用シテ距離及ビ高サヲ測ル法ノ數例ハ既ニ之ヲ揭ゲタリ. 一般三角形ノ解法ヲ應用スルトキハ前ノモノヨリハ便利ナルコト多シ; 次ニ其ノ數例ヲ擧グ.

例.

1. 達シ得ベカラザル一點ヨリ達シ得ベキ一直線ニ到ル距離ヲ求ムル法.





直線上ニ二點O, O'ヲ取リ其ノ距離(p)ヲ測リ達シ

得ベカラザル點Pヨリ此ノ線ニ作レル(假想)垂線PMノ數値ヲxトシ角O'OP, OO'PヲA, Bトセバ

$O\hat{O'}P$ ニ於テ $OP=\dfrac{OO'\sin OO'P}{\sin OPO'}=\dfrac{p\sin B}{\sin(A+B)}$.

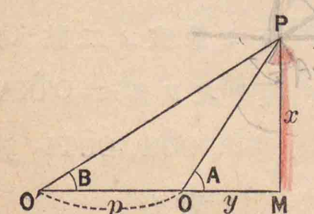
又 $O\hat{M}P$ ニ於テ $MP=OP\sin MOP=OP\sin A$

$$\therefore\quad x=\frac{p\sin A\sin B}{\sin(A+B)}.$$

2. 直立セル物體ノ基礎ニ達シ得ザルトキ地上ノ二點ニ於テ之ヲ觀測シ其高サ及ビ距離ヲ求ムル法.

MPヲ物體トシO, O'ヲ觀測點トシOO', MP, OMノ數値ヲp, x, yトス. O, O'ガMPト同平面上ニ在ルカ然ラザルカニ從ヒ次ノ方法ノ一ツヲ用フ.

(i) O, O'ガMPト同平面上ニ在ルトキハ角MOP, MO'Pヲ測リ之ヲA, Bトセバ



$O\hat{O'}P$ ニ於テ $OP=\dfrac{OO'\sin OO'P}{\sin OPO'}$

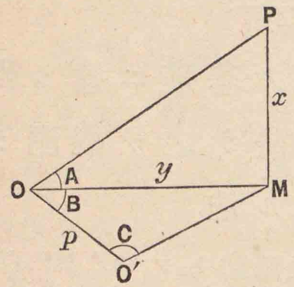
$=\dfrac{p\sin B}{\sin(A-B)}$. 次ニ $O\hat{M}P$ ニ於テ $MP=OP\sin MOP$

$=OP\sin A.$

$OM=OP\cos MOP=OP\cos A$

∴ $x=\frac{p\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$, $y=\frac{p\cos A\sin B}{\sin(A-B)}$.

(ii) O, O′ ガ MP ト同平面上ニ在ラザルトキハ角 MOP, MOO′, OO′M ヲ測リ之ヲ A, B, C トセバ



$O\hat{M}O'$ ニ於テ

$$OM=\frac{OO'\sin OO'M}{\sin OMO'}.$$

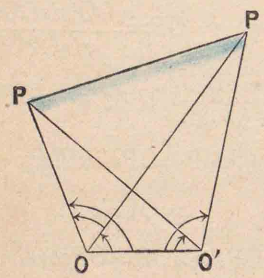
$$\therefore\ y=\frac{p\sin C}{\sin(B+C)}.$$

次ニ $O\hat{M}P$ ニ於テ

$$MP=OM\tan MOP.$$

$$\therefore\ x=\frac{p\tan A\sin C}{\sin(B+C)}.$$

3. 達シ得ベカラザル二點ノ距離ヲ求ムル法.

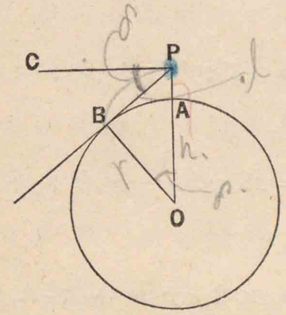


達シ得ベカラザル二點ヲ P, P′ トシ便宜ノ二點 O, O′ ニ於テ之ヲ望ミ $O'\hat{O}P'$, $O'\hat{O}P$, $P'\hat{O}P$, $O\hat{O'}P$, $O\hat{O'}P'$ 及ビ OO′ ヲ測リ $O\hat{O'}P$ ニ於テ OP ヲ求メ,

$O\hat{O'}P'$ ニ於テ OP′ ヲ求メ, $P\hat{O}P'$ ニ於テ PP′ ヲ求ムベシ

注意. P, P′, O, O′ ガ同平面上ニ在ルトキハ O ニ於ケル角ハ二ツヲ測レバ可ナリ

4. 視水平ノ距離及ビ伏角.



左圖ニ於テ O ヲ地球ノ中心, P ヲ或高サノ觀測點, PB ヲ切線トスルトキ B ノ軌跡ナル圓周ヲ視水平ト云ヒ, PB 及ビ $B\hat{P}C$(PC ハ水平線)ヲ其ノ距離及ビ伏角ト云フ. 今地球ノ半徑ヲ r, 觀測點ノ高サヲ h, 視水平ノ距離及ビ伏角ヲ l 及ビ δ トセバ次ノ關係アリ.

(i) $\cos\delta=\cos BOP=\frac{OB}{OP}=\frac{r}{r+h}$.

$r\cos\delta+h\cos\delta=r$.
$(r+h)\cos\delta=r$.

(ii) 上式ヲ變形スレバ $h\cos\delta=r(1-\cos\delta)$

$$\therefore\ h=\frac{r(1-\cos\delta)}{\cos\delta}.$$

(iii) $r=\frac{h\cos\delta}{1-\cos\delta}$.

(iv) $l=r\tan\delta=\dfrac{h\sin\delta}{1-\cos\delta}=h\cot\dfrac{\delta}{2}.$

設題十六.

213. $A=78°\,23'{\cdot}2,\quad B=52°\,16'{\cdot}3,\quad a=796{\cdot}3$ ナルトキ b, c ヲ求ム.

214. $b=295{\cdot}6,\quad c=999{\cdot}2,\quad A=108°\,29'{\cdot}6$ ナルトキ C, a ヲ求ム.

215. $a=23{\cdot}46,\quad b=35{\cdot}79,\quad A=28°\,35'{\cdot}4$ ナルトキ C, c ヲ求ム.

216. $a=375{\cdot}9,\quad b=298{\cdot}7,\quad c=400{\cdot}8$ ナルトキ A, B ヲ求ム.

217. A, B, p ヲ知リテ $A\hat{B}C$ ヲ解ク法ヲ問フ.

218. 四邊形ノ三邊及ビ二對角線ヲ知リテ殘リノ一邊ヲ求ムル法ヲ問フ.

219. 河ノ一岸ニ於テ 100 間ノ距離ニ在ル二點 A, B ヨリ對岸ノ一點 P ヲ望ミ $P\hat{A}B=60°$, $P\hat{B}A=45°$ ナルコトヲ知リタリ;河幅幾何.

220. 一人アリ前方ニ立テル塔頂ノ仰角ヲ測リ $30°$ ヲ得,夫レヨリ塔ニ向ヒテ 100 尺ヲ進ミテ再ビ其ノ

頂ノ仰角ヲ測リ $75°$ ヲ得タリ;塔ノ高サ及ビ初メノ觀測點ニ到ル距離幾何.

221. 人アリ北及ビ北 $30°$ 西ノ方向ニ二物體 A, B ヲ望ミ夫レヨリ北西ノ方向ニ 10 町ヲ進ミタレバ A, B ノ方向ハ北東及ビ東トナレリ;A, B ノ距離幾何.

222. 高サ h ナル石臺上ニ立テル紀念碑アリ;之ヨリ a ナル距離ノ一地ニ於テ之ヲ望ミ紀念碑ノ上端ノ仰角ハ下端ノ仰角ノ 2 倍ナルコトヲ知レリ;臺上ニ於ケル碑ノ高サ幾何.

223. 地球ノ半徑ヲ r トセバ高サ h ナル一點ニ於テノ視水平ノ距離ハ凡ソ $\sqrt{2rh}$ ニ等シ.

224. 海面ヨリ 64 呎ノ高サノ檣ノ上ヨリ燈臺ノ光リヲ始メテ發見シ夫レヨリ之ニ向ヒテ 30 分間航走シテ 16 呎ノ高サノ甲板上ヨリ光リヲ見得ルニ到レリ;地球ノ半徑ヲ 4000 哩トセバ船ノ一時間ノ速度ハ凡ソ 9·85 哩ナリ. (前題ヲ應用ス).

225. 塔ノ南ノ一地ニ於テ其ノ頂ノ仰角ヲ測リ $30°$ ヲ得,次ニ此ノ地ヨリ西ノ方向ニ 40 間歩ミテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リ $18°$ ヲ得タリトセバ塔ノ高サハ

$10\sqrt{(2\sqrt{5}-2)}$間ナリ.

226. 高サh尺ナル塔ノ頂上ヨリ其ノ一方ニ於テ塔脚ヲ過グル一水平線上ノ二物體ヲ望ミ俯角$45°-A$及ビ$45°+A$ヲ得タリトセバ二物體ノ距離ハ$2h\tan 2A$尺ナリ.

227. 湖水面上高サh尺ノ處ヨリ停止セル雲ノ一點ヲ望ミ仰角αヲ得,同時ニ湖水ニ於ケル其ノ像ヲ望ミ俯角βヲ得タリ;雲ノ高サ幾何.

228. 人アリ塔頂及ビ塔上ニ立テル高サl尺ノ旗竿ノ上端ヲ望ミ仰角B及ビAヲ得タリ;塔ノ高サ幾何.

***229.** 人アリ丘上ニ立テル塔ノ頂及ビ基礎ノ仰角ヲ測リA及ビBヲ得,次ニ後方ニlナル距離ヲ退キテ再ビ塔頂ノ仰角ヲ測リCヲ得タリ;丘上ニ於ケル塔ノ高サ及ビ丘ノ高サ幾何.

230. 山麓ニ於テ其ノ頂上ニ立テル巖ノ上端ノ仰角ヲ測リ$47°$ヲ得,夫レヨリ之ニ向ヒテ$32°$ノ傾斜角ヲナス直線狀ノ坂路ヲ登ルコト1000尺ニシテ再ビ巖ノ仰角ヲ測リ$77°$ヲ得タリ;初メノ測點ヨリ巖ノ高キコト幾何.

231. 或港ノ南$\frac{5\sqrt{6}}{3}$海里ノ沖ニ我封鎖艦隊ノ一部淀泊セリ. 敵ノ一艦港口ヨリ南$60°$東ノ方向ニ遁竄スルヲ見テ直ニ我一艦或方向ニ15[ノット]ノ速度ニテ進行シ20分ノ後ニ追及セリト云フ; 我艦進行ノ方向及ビ敵艦ノ速度ヲ求ム.

232. 北ニ走ル船ヨリ二個ノ燈臺ヲ北東及ビ北北東ノ方向ニ望ミ,夫レヨリ20哩走リタル後再ビ二燈臺ヲ望ミタルニ何レモ東ノ方向ニ在リタリ,二燈臺ノ距離幾何.

233. ALBナル塔ノ基礎Aヨリ48尺ノ距離ニ在ル高サ14尺ノ臺上Cヨリ此ノ塔ヲ望ミ$A\hat{C}L=L\hat{C}B$ナルコトヲ知リタリ; $AL=30$尺ナルトキ塔ノ高サ幾何.

234. 南西ノ方向ニ走ル船ヨリ碇泊セル二船ヲ北北西及ビ西北西ニ望ミ,夫レヨリ5哩ヲ走リテ再ビ二船ヲ望ミタルニ其ノ方向ハ北及ビ北西トナレリ; 二船ノ距離幾何.

235. 塔BC上ニ立テル旗竿ABガ塔脚Cヲ過ル

一水平線上ニ於テCヨリ20尺及ビ30尺ナル距離ニ在ル二點D, Eニ對シ等角15°ヲ張ルトキ竿ノ長サヲ求ム.

236. EDナル塔ノ上ニ立テル旗竿DCアリ,塔脚Eヲ過グル水平線上ノ一點Pヨリ之ヲ望ミ $E\hat{P}D=B$, $D\hat{P}C=A$ ナルコトヲ知リ,次ニPヨリEニ向ヒテlヲ進ミテQニ到リ再ビ之ヲ望ミ $D\hat{Q}C=A$ ナルコトヲ知レリ; 塔ノ高サハ $\dfrac{l\sin B\cos(A+B)}{\cos(A+2B)}$ ナリ.

($Q\hat{D}E=A+B$ ナルコトヲ利用ス).

237. 人アリ直線狀ノ道路上ノ點Aニ於テ二物體P, Qヲ最大角距(α)ニ望ミ,夫レヨリlヲ歩ミテBニ到リBQPガ路トβナル角ヲナス一直線ナルコトヲ知レリ;二物體ノ距離幾何.

(圓PQAガAニ於テABニ切スルコトヲ利用ス).

畢

附錄

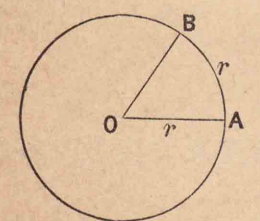
第一

弧度法

1. 定義.

任意ノ圓ニ於テ半徑ニ等シキ弧ノ上ノ中心角ハ一定ノ大サヲ有ス.　此ノ角ヲ *Radian* ト云フ.

證.



中心 O, 半徑 r ナル圓ニ於テ $\widehat{AB}=r$ トセバ

$$\frac{A\hat{O}B}{2\text{直角}}=\frac{\widehat{AB}}{\text{半圓周}}=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore\quad 1\ radian=\frac{1}{\pi}(2\text{直角})$$

Radian ヲ單位トシテ角ヲ計リ θ ナル値ヲ得タルトキハ此ノ角ハ θ *radian* ナリ或ハ其ノ弧度ハ θ ナリト云ヒ,此ノ計リ方ヲ弧度法ト云フ.

弧度法ハ理論上ノ講究ニ於テ一般ニ之ヲ用フ

注意一. 半徑 r ナル圓ニ於テ l ナル弧ノ上ノ中心角ノ弧度ハ $\frac{l}{r}$ ナリ,從ツテ θ *radian* ナル中心角ニ對スル弧ハ $r\theta$ ナリ.

注意二. 二直角ノ弧度ハ π ナリ從ツテ $\frac{\pi}{2}$ 及ビ 2π ハ直角及ビ四直角ノ弧度ナリ.

注意三. 1 *radian* ハ凡ソ $57°17'44''.8$ ナリ

2. 弧度法ト六十分法トノ關係.

或一角ノ弧度及ビ度數ヲ θ 及ビ D トセバ前條ニヨリ次ノ關係ヲ得.

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180}.$$

此ノ式ニヨリ任意ノ角ノ弧度及ビ度數ヲ相轉化スルコトヲ得.

設 題.

1. $35'30''$ ノ弧度ヲ求ム. 答. 0·01033.

2. $\frac{\pi}{13}$ ノ度數ヲ求ム. 答. $13°.\dot{8}4615\dot{3}$.

3. n 邊ヲ有スル正多角形ノ一內角ノ弧度幾何. 答 $\frac{(n-2)\pi}{n}$.

4. 半徑 4 尺ノ圓ニ於テ 10 尺ノ弧ノ上ノ中心角ヲ六十分法ニテ表セ. 答. $143°14'22''$.

5. 地球ノ直徑ヲ 7900 哩トシ此ノ直徑ガ太陽ニ於テ張ル角ヲ $17''.8$ トシ太陽ノ光リガ $8^m13^s.3$ ニシテ地球ニ達ストセバ光リノ速度幾何.

答. 每秒凡 185600 哩.

6. 正鋭角ノ弧度ヲ θ トセバ

(i) $\sin\theta<\theta<\tan\theta$.

(ii) θ ガ微小ナルトキハ $\sin\theta$, θ, $\tan\theta$ ハ殆ンド相等シク $\cos\theta$ ハ凡ソ $1-\frac{\theta^2}{2}$ ニ等シ.

第二
逆三角函數

1. 定義.

aナル正弦ヲ有スル角ヲaノ逆正弦ト云ヒ $Sin^{-1}a$ ヲ以テ之ヲ表ス. 逆餘弦,逆正切,逆餘切,逆正割,逆餘割之ニ準ズ. 此ノ六種ノモノヲ總稱シテaノ逆三角函數或ハ逆圓函數ト云フ.

一數ノ逆三角函數ハ無數ノ値ヲ有ス;其ノ中ノ最小數値ノモノ(若シ正負同數値ノモノアルトキハ正ヲ取リ)ヲ主値ト云フ.

主値或ハ其ノ他ノ特別ナル値ハ $sin^{-1}a$ 等ヲ以テ之ヲ表ス.

注意一. 逆三角函數ノ一般ノ値ヲ $sin^{-1}a$ 等ニテ表シ主値ヲ $Sin^{-1}a$ 等ニテ表ス一派アリ,然レドモ逆三角函數ノ性質ハ其ノ特別ナル値ニ關スルモノ多

キヲ以テ之ヲ小文字ニテ表ス方遙ニ便利ナリ,故ニ本書ニハ便ナル方ヲ採用シタリ.

注意二. 逆三角函數ノ主値ヲ視察ニヨリ求メ得ザルトキハ表ニヨリテ之ヲ求ムベシ.

2. $Sin^{-1}a$ ノ値.

等シキ正弦ヲ有スル角ノ廻線ノ位置ハ二ツヨリモ多キコトナク $sin(\pi-A)=sinA$, $sin(2n\pi+A)=sinA$ ナルヲ以テ $2n\pi+sin^{-1}a$ 或ハ $2n\pi+(\pi-sin^{-1}a)$ ハ悉ク a ナル正弦ヲ有シ其ノ他ノ角ハ然ラズ.

$$\therefore \quad Sin^{-1}a=2n\pi+sin^{-1}a$$

$$\text{或ハ} \quad 2n\pi+(\pi-sin^{-1}a)$$

$$=2n\pi+sin^{-1}a$$

$$\text{或ハ} \quad (2n+1)\pi-sin^{-1}a$$

$$=n\pi+(-1)^n sin^{-1}a$$

例.

1. $Sin^{-1}0=n\pi+(-1)^n sin^{-1}0=n\pi+0=n\pi.$

2. $Sin^{-1}1=n\pi+(-1)^n sin^{-1}1=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}.$

而シテ $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$ ハ n ガ任意ノ偶數 $(2m)$ ナルトキ $2m\pi+\frac{\pi}{2}$ 即 $(4m+1)\frac{\pi}{2}$ トナリ, n ガ任意ノ奇數 $(2m+1)$ ナルトキモ亦 $(2m+1)\pi-\frac{\pi}{2}$ 即 $(4m+1)\frac{\pi}{2}$ トナル. 故ニ $Sin^{-1}1=(4n+1)\frac{\pi}{2}$ ト記スルコトヲ得.

3. $Sin^{-1}(-1)=n\pi+(-1)^n sin^{-1}(-1)$

$$=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

而シテ $n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ハ n ガ任意ノ偶數 $(2m)$ ナルトキ $2m\pi-\frac{\pi}{2}$ 即 $(4m-1)\frac{\pi}{2}$ トナリ, n ガ任意ノ奇數 $(2m-1)$ ナルトキモ亦 $(2m-1)\pi+\frac{\pi}{2}$ 即 $(4m-1)\frac{\pi}{2}$ トナル. 故ニ $Sin^{-1}(-1)=(4n-1)\frac{\pi}{2}$ ト記スルコトヲ得.

系. $Cosec^{-1}a=n\pi+(-1)^n cosec^{-1}a.$

3. $Cos^{-1}a$ ノ値.

等シキ餘弦ヲ有スル角ノ廻線ノ位置ハ二ツヨリモ多キコトナク $cos(-A)=cosA$, $cos(2n\pi+A)=cosA$ ナルヲ以テ $2n\pi+cos^{-1}a$ 或ハ $2n\pi+(-cos^{-1}a)$ ハ悉ク a ナル餘弦ヲ有シ其ノ他ノ角ハ然ラズ.

$$\therefore\quad Cos^{-1}a=2n\pi+cos^{-1}a$$

$$\text{或ハ}\quad 2n\pi+(-cos^{-1}a)$$

$$=2n\pi+cos^{-1}a$$

$$\text{或ハ}\quad 2n\pi-cos^{-1}a$$

$$=2n\pi\pm cos^{-1}a$$

例.

1. $Cos^{-1}0=2n\pi\pm cos^{-1}0=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}=(4n\pm1)\frac{\pi}{2}$

而シテ $4n+1$ 及ビ $4n-1$ ニテ表サルル諸數ハ双方ニテ總ベテノ奇數トナル. 故ニ $Cos^{-1}0=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ト記スルコトヲ得.

2. $Cos^{-1}1=2n\pi\pm cos^{-1}1=2n\pi\pm0=2n\pi.$

3. $Cos^{-1}(-1)=2n\pi\pm cos^{-1}(-1)=2n\pi\pm\pi.$

$$=(2n\pm1)\pi.$$

而シテ $2n+1$, $2n-1$ ハ何レモ總ベテノ奇數ヲ表ス.

$\therefore\quad Cos^{-1}(-1)=(2n+1)\pi$ ト記スルコトヲ得.

系. $Sec^{-1}a=2n\pi\pm sec^{-1}a.$

4. $Tan^{-1}a$ ノ値.

等シキ正切ヲ有スル角ノ廻線ノ位置ハ二ツヨリモ多キコトナク $tan(\pi+A)=tanA$, $tan(2n\pi+A)=tanA$ ナ

ルヲ以テ $2n\pi+tan^{-1}a$ 或ハ $2n\pi+(\pi+tan^{-1}a)$ ハ悉ク a ナル正切ヲ有シ其ノ他ノ角ハ然ラズ.

$$\therefore \quad Tan^{-1}a=2n\pi+tan^{-1}a$$

$$\text{或ハ} \quad 2n\pi+(\pi+tan^{-1}a)$$

$$=2n\pi+tan^{-1}a$$

$$\text{或ハ} \quad (2n+1)\pi+tan^{-1}a$$

$$=n\pi+tan^{-1}a$$

例.

1. $Tan^{-1}0=n\pi+tan^{-1}0=n\pi+0=n\pi.$

2. $Tan^{-1}1=n\pi+tan^{-1}1=n\pi+\frac{\pi}{4}=(4n+1)\frac{\pi}{4}.$

3. $Tan^{-1}(-1)=n\pi+tan^{-1}(-1)=n\pi+(-\frac{\pi}{4})$

$$=(4n-1)\frac{\pi}{4}.$$

系. $Cot^{-1}a=n\pi+cot^{-1}a.$

設題.

次ノ諸式ヲ證セヨ.

*1. (i) $sin^{-1}a=cos^{-1}\sqrt{1-a^2}=tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}=cot^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$$=sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}=cosec^{-1}\frac{1}{a}.$$

(ii) $cos^{-1}a=sin^{-1}\sqrt{1-a^2}=tan^{-1}\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}=cot^{-1}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

$$=sec^{-1}\frac{1}{a}=cosec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}.$$

(iii) $tan^{-1}a=sin^{-1}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=cot^{-1}\frac{1}{a}$

$$=sec^{-1}\sqrt{1+a^2}=cosec^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

(iv) $cot^{-1}a=sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=tan^{-1}\frac{1}{a}$

$$=sec^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=cosec^{-1}\sqrt{1+a^2}.$$

(v) $sec^{-1}a=sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=cos^{-1}\frac{1}{a}=tan^{-1}\sqrt{a^2-1}$

$$=cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}=cosec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(vi) $cosec^{-1}a=sin^{-1}\frac{1}{a}=cos^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

$$=cot^{-1}\sqrt{a^2-1}=sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

*2. (i) $sin^{-1}a\pm sin^{-1}b=sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\}.$

(ii) $cos^{-1}a\pm cos^{-1}b=cos^{-1}\{ab\mp\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\}.$

(iii) $tan^{-1}a \pm tan^{-1}b = tan^{-1}\frac{a\pm b}{1\mp ab}$.

(iv) $cot^{-1}a \pm cot^{-1}b = cot^{-1}\frac{ab\mp 1}{b\pm a}$.

*3. (i) $2sin^{-1}a = sin^{-1}2a\sqrt{1-a^2}$.

(ii) $2cos^{-1}a = cos^{-1}(2a^2-1)$.

(iii) $2tan^{-1}a = tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}$.

(iv) $2cot^{-1}a = cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}$.

第三

三角方程式

1. 定義.

未知角ノ三角函數ト已知數トノ關係ヲ表ス方程式ヲ三角方程式ト云ヒ,之ニ適スル角ヲ求ムルコトヲ之ヲ解クト云ヒ,所得ノ角ヲ其ノ根或ハ解ト云フ.

2. 三角方程式ノ解法.

三角方程式ハ次ノ方法ニヨリ之ヲ解クベシ.

第一. 普通方程式ノ解法ヲ應用シテ未知角ノ三角函數ノ値ヲ求ム.

第二. 所得ノ三角函數ノ値ニ應ズル逆三角函數ノ一般ノ値ヲ求ム. 此ノ値ハ卽所要ノ解ナリ.

例.

1. $sin\theta = a$ ヲ解ケ.

解.

$$\theta = Sin^{-1}a = n\pi + (-1)^n sin^{-1}a.$$

或ハ次ノ如ク解クモ可ナリ.

$$cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$\theta - \frac{\pi}{2} = 2n\pi \pm cos^{-1}a$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \pm cos^{-1}a$$

$$= (4n+1)\frac{\pi}{2} \pm cos^{-1}a.$$

2. $cos\theta = a$ ヲ解ケ.

解.

$$\theta = Cos^{-1}a = 2n\pi \pm cos^{-1}a.$$

3. $tan\theta = a$ ヲ解ケ.

解.

$$\theta = Tan^{-1}a = n\pi + tan^{-1}a.$$

4. $sin^2\theta = a$ ヲ解ケ.

解.

$$cos2\theta = 1 - 2sin^2\theta$$

$$= 1 - 2a$$

$$2\theta = 2n\pi \pm cos^{-1}(1-2a)$$

$$\therefore \quad \theta = n\pi \pm \frac{1}{2}cos^{-1}(1-2a).$$

5. $cos^2\theta = a$ ヲ解ケ.

解.

$$cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

$$= 2a - 1$$

$$2\theta = 2n\pi \pm cos^{-1}(2a-1)$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{1}{2}cos^{-1}(2a-1).$$

6. $tan^2\theta = a$ ヲ解ケ.

解.

$$cos2\theta = \frac{1 - tan^2\theta}{1 + tan^2\theta}$$

$$= \frac{1-a}{1+a}$$

$$2\theta = 2n\pi \pm cos^{-1}\frac{1-a}{1+a}$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{1}{2}cos^{-1}\frac{1-a}{1+a}$$

7. $sec\theta + tan\theta = \sqrt{3}$ ヲ解ケ.

解.

$$tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} = n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\theta}{2}=n\pi+\frac{\pi}{12}$$

$$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{6}$$

$$=(12n+1)\frac{\pi}{6}.$$

8. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ ヲ解ケ.

解.

$$\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\theta-\frac{\pi}{4}=2n\pi$$

$$\theta=2n\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$=(8n+1)\frac{\pi}{4}.$$

9. $\sin\theta+\sin3\theta+\sin5\theta=0$ ヲ解ケ

解.

$$2\sin3\theta\cos2\theta+\sin3\theta=0$$

$$\sin3\theta(2\cos2\theta+1)=0$$

$\therefore$ $\sin3\theta=0$ ……………………………(i)

或ハ $\cos2\theta=-\frac{1}{2}$ ……………………………(ii)

(i) ヨリ $3\theta=n\pi$

$$\theta=\frac{n\pi}{3}$$

(ii) ヨリ $2\theta=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

$$\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$=(3n\pm1)\frac{\pi}{3}$$

而シテ $3n\pm1$ ハ n ノ中ニ含有セラルルヲ以テ

$\theta=\frac{n\pi}{3}$ ハ完全ノ解ナリ.

設 題.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $2\cos^2x+3\sin x=3.$ 答. $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{6}.$

2. $\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0.$ 答. $(6n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

3. $3\tan\theta+\cot\theta=5\operatorname{cosec}\theta.$ 答. $(6n\pm1)\frac{\pi}{3}.$

4. $9\sin x+\operatorname{cosec}x=5.$

答. $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{6}$, $n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\frac{1}{3}.$

5. $3\operatorname{cosec}^2\theta-8\cot\theta+2=0.$

答. $(4n+1)\frac{\pi}{4}$, $n\pi+\cot^{-1}\frac{5}{3}$.

6. $3\tan^2x-\sec^2x=1.$ 答. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

7. $2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\theta.$ 答. $n\pi$.

8. $\cos2\theta-\cos4\theta=\sin\theta.$ 答. $n\pi$, $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{18}$.

9. $\sin7\theta-\sin\theta=\sin3\theta.$ 答. $\frac{n\pi}{3}$, $(6n\pm1)\frac{\pi}{12}$.

10. $\cos\theta\cos3\theta-\sin3\theta\sin5\theta=0.$ 答. $(2n+1)\frac{\pi}{12}$.

11. $\tan\theta+\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2.$ 答. $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{12}$.

12. $\cot\theta-\tan\theta=\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta.$

答. $(2n+1)\pi$, $(4n-1)\frac{\pi}{2}$, $(4n+1)\frac{\pi}{4}$.

13. $\sin^2x+\cos2x=\cos x.$ 答. $2n\pi$, $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

14. $\cos2x+\cos x=0.$ 答. $(2n+1)\pi$, $(6n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

15. $\sin2x-\cos x=0.$ 答. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{6}$.

16. $5\sin x=\cos2x+2.$ 答. $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{6}$.

17. $2\sin^2x+\sin^22x=2.$ 答. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $(3n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

18. $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2}, \\ \sin x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ y=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Sin}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2\sin(x+y)=\sqrt{3}, \\ 2\cos(x-y)=\sqrt{3}. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=\{6(m+2n)+2(-1)^m\pm1\}\frac{\pi}{12}, \\ y=\{6(m-2n)+2(-1)^m\mp1\}\frac{\pi}{12}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(x-y)=\frac{1}{2}. \end{cases}$

答. $\begin{cases} x=\{12(2m+n)\pm3+2(-1)^n\}\frac{\pi}{24}, \\ y=\{12(2m-n)\pm3-2(-1)^n\}\frac{\pi}{24}. \end{cases}$

第四

加法定理ノ完全ノ證明

1. 加法定理.

任意ノ二角A,Bノ正弦及ビ餘弦ヲ用ヒテ此ノ二角ノ和A+Bノ正弦ト餘弦トヲ表ス式ハ次ノ如シ.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

證.

第一. A,B共ニ零ナル場合.

$$\sin(A+B)=\sin(0+0)=\sin 0=0,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin 0\cos 0+\cos 0\sin 0$

$$=0\times 1+1\times 0=0.$$

$\therefore$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次ニ $\cos(A+B)=\cos(0+0)=\cos 0=1,$

又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0\cos 0-\sin 0\sin 0$

$$=1\times 1-0\times 0=1.$$

$\therefore$ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

第二. A,Bノ中一ツ(例ヘバA)ハ零ニシテ他ノ一ツハ零ナラザル場合.

$$\sin(A+B)=\sin(0+B)=\sin B,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin 0\cos B+\cos 0\sin B$

$$=0\times\cos B+1\times\sin B=\sin B.$$

$\therefore$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次ニ $\cos(A+B)=\cos(0+B)=\cos B,$

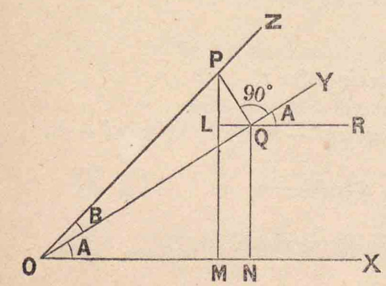
又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0\cos B-\sin 0\sin B$

$$=1\times\cos B-0\times\sin B=\cos B.$$

$\therefore$ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

同様ニ $A\neq 0$, $B=0$ ノ場合ニ於テモ上ノ關係ノ成立スルコト明カナリ.

第三. A,B,A+B共ニ正鋭角ナル場合.



$X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$, $X\hat{O}Z$ ヲ各A,B,A+BトシOZ上ノ一點PヨリOY,OXニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲQ,MトシQヨリMP,OXニ垂線ヲ作リ其ノ足ヲL,NトシLQ

ノ延長ヲ QR トセバ $R\hat{Q}P$ ハ $90°+A$ ニシテ次ノ關係アリ.

$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{ML+LP}{OP}=\frac{NQ+LP}{OP}=\frac{NQ}{OP}+\frac{LP}{OP}$$

$$=\frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{LP}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\sin(90°+A)\sin B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON-MN}{OP}=\frac{ON+QL}{OP}=\frac{ON}{OP}+\frac{QL}{OP}$$

$$=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{QL}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\cos(90°+A)\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

第四. A, B 共ニ正鋭角ニシテ A+B ガ直角ナル場合.

$$\sin(A+B)=\sin 90°=1,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A\cos(90°-A)+\cos A\sin(90°-A)$

$$=\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

∴ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次ニ $\cos(A+B)=\cos 90°=0,$

又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos A\cos(90°-A)-\sin A\sin(90°-A)$

$$=\cos A\sin A-\sin A\cos A=0.$$

∴ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

第五. A, B 共ニ正鋭角ニシテ A+B ガ鈍角ナル場合.

$90°-A$, $90°-B$, $(90°-A)+(90°-B)$ ハ共ニ正鋭角トナルヲ以テ

$$\sin(A+B)=\sin\{180°-(A+B)\}=\sin\{(90°-A)+(90°-B)\}$$

$$=\sin(90°-A)\cos(90°-B)+\cos(90°-A)\sin(90°-B)$$

$$=\cos A\sin B+\sin A\cos B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=-\cos\{180°-(A+B)\}=-\cos\{(90°-A)+(90°-B)\}$$

$$=-\{\cos(90°-A)\cos(90°-B)-\sin(90°-A)\sin(90°-B)\}$$

$$=-\{\sin A\sin B-\cos A\cos B\}$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

第六. A, B ガ任意ノ正角ナル場合.

此ノ二式ガ A, B ノ或値ノトキ合理ナラバ A, B ノ中一ツ(例ヘバ A)ヲ 90° 増シタル場合ニモ合理ナル

コト次ノ如シ.

$$\sin\{(90^\circ+A)+B\}=\sin\{90^\circ+(A+B)\}=\cos(A+B)$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$=\sin(90^\circ+A)\cos B+\cos(90^\circ+A)\sin B.$$

$$\cos\{(90^\circ+A)+B\}=\cos\{90^\circ+(A+B)\}=-\sin(A+B)$$
$$=-\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
$$=\cos(90^\circ+A)\cos B-\sin(90^\circ+A)\sin B.$$

然ルニ加法定理ハA, Bガ任意ノ正鋭角ナル場合ニ合理ナルコト已ニ證シタルガ如シ故ニ此ノA, Bノ一ツ或ハ双方ニ 90° ノ整數倍ヲ加ヘテ如何ナル正角トナセル場合ニモ其ノ合理ナルコトヲ推定ス.

第七. A, Bノ一ツ又ハ双方ガ負角ナル場合.

A, Bノ中一ツ(例ヘバA)ガ負角ナルトキ之ニ 360° ノ適當ナル倍量ヲ加ヘテ其ノ和 $n.360^\circ+A$ ヲ正角ナラシメバ

$$\sin(A+B)=\sin(n.360^\circ+A+B)$$
$$=\sin(n.360^\circ+A)\cos B+\cos(n.360^\circ+A)\sin B$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\cos(n.360^\circ+A+B)$$
$$=\cos(n.360^\circ+A)\cos B-\sin(n.360^\circ+A)\sin B$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

同様ニBガ負角ナルトキ及ビA, B共ニ負角ナルトキ公式ノ合理ナルコトヲ知リ得ベシ.

故ニ加法定理ハ一般ニ合理ナリ.

2. 減法定理.

任意ノ二角A, Bノ正弦及ビ餘弦ヲ用ヒテ此ノ二角ノ差A−Bノ正弦ト餘弦トヲ表ス式ハ次ノ如シ.

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$
$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

$$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$$
$$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

此ノ二式ハ減法定理ト名ヅケ加法定理中ニ含マルルモノナリ,特ニ之ヲ掲ゲタルハ唯参照ニ便ナラシメンガタメノミ.

第五
補充問題

第一編ノ問題.

1. 四邊形ノ四ツノ角ガ等差級數ヲナシ最大角ガ最小角ノ二倍ナルトキ各角ヲ求ム.

答. 60°, 80°, 100°, 120°.

2. 三角形ABCニ於テCヨリ對邊ヘノ中線ガACニ垂線ナルトキハ角ACBノ補角ノ正切ハAノ正切ノ二倍ナリ.

次ノ恒等式ヲ證セヨ(3)—(15).

3. $\sin^2 A\cos^2 A=(\cos A-\cos^3 A)^2+(\sin A-\sin^3 A)^2$.

4. $(1+\sin A+\cos A)^2(1-\sin A-\cos A)^2=4\sin^2 A\cos^2 A$.

5. $(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\cos A-\sin A)^2=4(1-\sin A\cos A)$.

6. $\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec} A+1$.

7. $\sin^3 A+\cos^3 A+\sec^3 A+\operatorname{cosec}^3 A$

$$=(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)(1+\sec^3 A\operatorname{cosec}^3 A).$$

8. $\dfrac{1-\sin A\cos A}{\cos A(\sec A-\operatorname{cosec}A)}\cdot\dfrac{\sin^2 A-\cos^2 A}{\sin^3 A+\cos^3 A}=\sin A.$

9. $1+\tan^6 A+3\tan^2 A\sec^2 A=\sec^6 A.$

10. $1-\tan^2 A+\tan^4 A=\cos^2 A(1+\tan^6 A).$

11. $\cot^2 A\dfrac{\sec A-1}{1+\sin A}-\sec^2 A\dfrac{1-\sin A}{1+\sec A}=0.$

12. $(3-4\sin^2 A)(1-3\tan^2 A)=(3-\tan^2 A)(4\cos^2 A-3).$

13. $\left(\dfrac{1}{\cos A+\tan^2 A\sin A}-\dfrac{1}{\cos A\cot^2 A+\sin A}\right)\dfrac{\sec A\operatorname{cosec}A-1}{\operatorname{cosec}A-\sec A}=1.$

14. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A-\cot A}-\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin A}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A+\cot A}.$

15. $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}.$

次ノ諸式ヨリ θ ヲ消去セヨ. (16)—(18).

16. $\begin{cases} a\sin\theta+b\cos\theta-m=0, \\ b\tan\theta-a-n\sec\theta=0. \end{cases}$ 答. $a^2+b^2=m^2+n^2.$

17. $\begin{cases} a\sin\theta+b\cos\theta=1, \\ b\sin\theta+a\cos\theta=2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$ 答. $a^2+b^2=1.$ (但 $\sin\theta, \cos\theta$ ノ絶對値ハ不等トス)

18. $\begin{cases} \tan\theta+\sin\theta=m, \\ \tan\theta-\sin\theta=n. \end{cases}$ 答. $(m^2-n^2)^2=16mn.$

19. $a\cos^2 x+b\sin^2 x=p\cos^2 y,\ a\sin^2 x+b\cos^2 x=q\sin^2 y$ ヨリ

$\sin x, \sin y$ ヲ求ム. 答. $\sqrt{\dfrac{pq-aq-bp}{(a-b)(p-q)}}, \sqrt{\dfrac{p-a-b}{p-q}}.$

20. $\cot A=\dfrac{p}{q}$ ナルトキ $\dfrac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ ノ値ヲ求ム.

答. $\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}.$

21. $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$ ナルトキ $\sin A$ ヲ求ム.

答. $\dfrac{p}{q}.$

22. $\sin A=\dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ ナルトキ $\tan A$ ヲ求ム.

答. $\dfrac{m(m+2n)}{2n(m+n)}.$

23. $\tan A=\dfrac{2m(m+1)}{2m+1}$ ナルトキ $\cos A$ ヲ求ム.

答. $\dfrac{2m+1}{2m^2+2m+1}.$

24. $\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\operatorname{cosec}^2 A}\cdot\dfrac{\operatorname{cosec}(90^\circ-A)\cot^3 A}{\sin^2(90^\circ-A)}=\sec A.$ ヲ證セヨ.

25. $3\tan^2 30^\circ+\dfrac{1}{4}\sec 60^\circ+5\cot^2 45^\circ-\dfrac{2}{3}\sin^2 60^\circ$ ノ値ヲ求ム.

答. 6.

26. 直角三角形ノ一鋭角ノ正切0·75ニシテ其ノ周ガ1尺2寸ナルトキ斜邊如何. 答. 5寸.

27. 直角三角形ノ斜邊ト他ノ二邊ノ和トヲ知リ

テ之ヲ解ク公式ヲ作レ.

28. 毎時10哩ノ速度ニテ東北ニ航走スル船アリ;此ノ船ハ毎時幾哩ヅヽ北ニ移動スルカ.

答. 7·07 哩.

29. 一直線上ニ之トAナル角ヲナスa尺ノ直線ノ正射影ヲ作ルトキハ其ノ長サ幾尺.

答. $a\cos A$ 尺.

30. 高サ 388尺ノ山ノ麓ヨリ其ノ頂上ニ通ズル一直線狀ノ坂路ヲ作リシニ其ノ長サハ1275尺ナリキ;坂路ノ傾斜角幾何. 答. $16°\ 50'.6$.

31. 160尺ノ高サナル船檣ノ頂上ニ於テ一小艇ノ俯角ヲ測リ 30° ヲ得タリ;船ト艇トノ距離幾何.

答. 277·12 尺.

32. 塔脚ヨリ 86·6 尺ノ距離ノ地ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タリ;塔頂ト觀測地トノ距離幾何.

答. 100 尺.

33. 長サ45尺ノ梯ノ一端ヲ壁ノ頂ニ縁ラシメ他ノ一端ヲ地上ニ置キタルニ壁ト梯トハ 60° ノ角ヲナセリ;壁ノ高サ及ビ之ヨリ梯脚ニ到ル距離幾何.

答. 22·5 尺, 38·97 尺.

34. 二ツノ煙突アリテ其ノ一ツハ他ヨリモ15間高ク,頂ヲ連ヌル直線ハ水平面ト $27°2'$ ノ角ヲナシ,小煙突ヨリ50間ノ處ニ於テ地面ニ交ルベシト云フ;$\tan 27°2'=0·51$ トシテ大煙突ノ高サヲ求ム.

答. 40·5 間.

35. 60尺及ビ40尺ノ高サヲ有スル二檣ノ頂ヲ連ヌル直線ガ水平面ト $33°41'$ ノ角ヲナストキ二檣ノ距離幾何. (但 $\cot 33°41'=1·5$ トス) 答. 30 尺.

36. 2500米ヲ距ツル二點 A, B ヨリ直線 BA ノ眞上ニ在ル飛行船 C ヲ望ミ各仰角 45° 及ビ 60° ヲ得タリ;飛行船ノ高サヲ求ム. 答. 1585尺 或ハ 5915尺.

37. 眞直ナル道路ヲ歩メル人ガ或地點ニ於テ路ト 30° ノ角ヲナス方向ニ或物ヲ認メ夫レヨリ1里進ミテ同ジ物ヲ望ミタルニ其ノ方向ハ路ト 60° ノ角ヲナスコトヲ知レリ,物ト路トノ距離ヲ求ム.

答. 0·866 里.

38. 某所ニ於テ小丘ノ高度ヲ測リテ 60° ヲ得,更ニ其ノ上ニ立テル100尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ 75° ヲ

得タリト云フ;丘ノ高サ幾何(但 $\tan 75^\circ = 2+\sqrt{3}$).

答. 86·6 尺.

39. 山ノ麓ヨリ頂ヲ望ミ仰角 45° ヲ得,夫レヨリ 30° ノ傾斜角ヲナス直線狀ノ坂路ヲ頂ニ向ツテ上ルコト 1 哩ニシテ再ビ頂ヲ望ミ仰角 60° ヲ得タリ;山ノ高サ幾何.　答. 1.366 哩.

40. 人アリ圓壔狀ノ塔ヲ望ミ其ノ張ル角ガ α ナルコトヲ知リ次ニ塔ニ向ツテ l 尺進ミテ再ビ其ノ張ル角ヲ測リ β ヲ得タリ;塔ノ半徑ハ $\dfrac{l}{\operatorname{cosec}\frac{\beta}{2} - \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}}$ 尺ナリ.

41. 高サ h ナル塔ヨリ a ナル距離ノ地ニ於テ塔頂ト山頂トヲ一直線上ニ見,塔脚ニ於テ山頂ノ仰角 α ヲ得タリ;山ノ高サ幾何.　答. $\dfrac{ah}{a - h\cos\alpha}$.

第二編ノ問題.

次ノ諸式ヲ簡單ニセヨ (42)—(48).

42. $\cos A + \sin(270^\circ + A) - \sin(270^\circ - A) + \cos(180^\circ + A)$.

答. 0.

43. $\sec(270^\circ - A)\sec(90^\circ - A) - \tan(270^\circ - A)\tan(90^\circ + A)$.

答. -1.

44. $\cot A + \tan(180^\circ + A) + \tan(90^\circ + A) + \tan(360^\circ - A)$.

答. 0.

45. $\dfrac{\sin(180^\circ - A)}{\tan(180^\circ + A)} \cdot \dfrac{\cot(90^\circ - A)}{\tan(90^\circ + A)} \cdot \dfrac{\sin(270^\circ + A)}{\sin(-A)}$.

答. $-\sin A$.

46. $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(180^\circ + A)} - \dfrac{\tan(90^\circ + A)}{\cot A} - \dfrac{\sin(270^\circ - A)}{\sin(90^\circ + A)}$.

答. 3.

47. $\dfrac{\operatorname{cosec}(180^\circ - A)}{\sec(180^\circ + A)} \cdot \dfrac{\cos(-A)}{\cos(90^\circ + A)}$.　答. $\cot^2 A$.

48. $\dfrac{\cos(90^\circ + A)\operatorname{cosec}(270^\circ + A)\tan(180^\circ + A)}{\sec(360^\circ - A)\sin(180^\circ + A)\cot(90^\circ - A)}$.　答 -1.

次ノ三角函數ノ値ヲ求ム (49)—(54).

49. $\sin(-870^\circ)$　答. $-\dfrac{1}{2}$.

50. $\cos 4005^\circ$ 答. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

51. $\tan(-855^\circ)$ 答. 1.

52. $\cot 840^\circ$ 答. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

53. $\operatorname{cosec}(-5895^\circ)$ 答. $-\sqrt{2}$.

54. $\operatorname{cosec}(-660^\circ)$ 答. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

次ノ諸式ノ値ヲ求ム (55)—(57).

55. $\sin 590^\circ \sin(-490^\circ)+\cos 1130^\circ \cos 670^\circ$. 答. 1.

56. $\cos 570^\circ \sin 510^\circ - \sin 330^\circ \cos 390^\circ$. 答. 0.

57. $\tan 225^\circ \cot 405^\circ + \tan 765^\circ \cot 675^\circ$. 答. 0.

第三編ノ問題.

58. $\cos A=\frac{40}{41}$, $\cos B=\frac{60}{61}$ ナルトキ $\sin(A+B)$ ヲ求ム.

答. $\frac{980}{2501}$.

59. $\sin A=\frac{2}{3}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin(A+B)$ 及ビ $\cos(A-B)$ ヲ求ム. 答. $\frac{6+4\sqrt{5}}{25}$, $\frac{8+3\sqrt{5}}{15}$.

60. $\sin A=\frac{12}{13}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ $\tan(A+B)$ ヲ求ム.

答. $-\frac{56}{33}$.

上ノ三題ニ於テハ A, B ヲ鋭角トス.

61. $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ $\tan\alpha, \tan\beta$ トセバ $\tan(\alpha+\beta)$ ノ値幾何. 答. $\frac{b}{c-a}$.

62. $x^2+6x+7=0$ ノ根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トセバ $\sin(\alpha+\beta)$ ハ $\cos(\alpha+\beta)$ ニ等シ.

63. $\tan B=\frac{2\sin A \sin C}{\sin(A+C)}$ ナルトキハ $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ハ等差級數ヲナス.

次ノ諸式ヲ證セヨ.

64. $\sin 360^\circ \sin 30^\circ = \sin^2 33^\circ - \sin^2 3^\circ.$

65. $\dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2(A+B)} = \dfrac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B}.$

66. $\cos^2 A + \cos^2(A+B) - 2\cos A \cos B \cos(A+B) = \sin^2 B.$

67. $\sin A \sin B = \sin^2\dfrac{A+B}{2} - \sin^2\dfrac{A-B}{2}.$

68. $\cos A \cos B = \cos^2\dfrac{A+B}{2} + \cos^2\dfrac{A-B}{2} - 1.$

69. $\tan\dfrac{A+B}{2} - \tan\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{2\sin B}{\cos A + \cos B}.$

70. $1 + \tan\alpha \tan\dfrac{\alpha}{2} = \sec\alpha.$

71. $\sin 3\theta + \sin 2\theta + 2\sin\dfrac{3\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = 4\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin 2\theta.$

72. $\cos\dfrac{180^\circ}{7} + \cos\dfrac{540^\circ}{7} + \cos\dfrac{900^\circ}{7} = \dfrac{1}{2}.$

73. $\sin\theta \sin 2\theta + \sin 3\theta \sin 6\theta = \sin 4\theta \sin 5\theta.$

***74.** $\begin{cases} 4\sin A \sin B \sin C = \Sigma \sin(B+C-A) - \sin\Sigma A. \\ 4\cos A \cos B \cos C = \Sigma \cos(B+C-A) + \cos\Sigma A. \end{cases}$

75. $\cos 108^\circ \cos 132^\circ + \cos 132^\circ \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cos 108^\circ = -\dfrac{3}{4}.$

76. $\sin x = \dfrac{3}{5}$ ナルトキ $\tan 2x$ ヲ求ム.

答. $\pm\dfrac{24}{7}.$

77. $\sin\theta : \sin\dfrac{\theta}{2} = 8 : 5$ ナルトキハ $\cos\theta = \dfrac{7}{25}.$

78. $2\{\sin(30^\circ + x) + \cos(60^\circ + x)\}^2 - \{\cos(45^\circ - x) - \sin(45^\circ - x)\}^2$

$= 2\cos 2x.$

79. $\cot^2 A - \tan^2 A = \dfrac{4\cot 2A}{\sin 2A}.$

80. $\cot 22^\circ{\cdot}5 - \tan 22^\circ{\cdot}5 = 2.$

81. 矩形ノ二邊ガ m 寸及ビ n 寸ナルトキ其ノ對角線ノ夾ム鋭角ノ正切ハ $\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ ニ等シ(但 $m>n$ トス). (半角ノ正切ガ $\dfrac{n}{m}$ ナルコトヨリ導ク).

82. $\cos^2 A + \cos^2(60^\circ + A) + \cos^2(120^\circ + A) = \dfrac{3}{2}.$

83. $\dfrac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \tan\dfrac{\theta}{2}.$

84. $\sin^2\dfrac{A+B}{2}\cos^2\dfrac{A-B}{2} + \cos^2\dfrac{A+B}{2}\sin^2\dfrac{A-B}{2}$

$= 1 - \dfrac{\cos^2 A}{2} - \dfrac{\cos^2 B}{2}.$

85. $2\sin^2 A \sin^2 B + 2\cos^2 A \cos^2 B = 1 + \cos 2A \cos 2B.$

86. $\operatorname{cosec} 2A + \cot 4A = \cot A - \operatorname{cosec} 4A.$

87. $\cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta}{1 - \cos\alpha \cos\beta}$ ナルトキハ

$\tan^2\dfrac{A}{2} = \tan^2\dfrac{\alpha}{2}\cot^2\dfrac{\beta}{2}.$

88. $x^2-2px+q^2=0$ ニ於テ $p=\dfrac{sec\theta}{2}$, $q=\dfrac{tan\theta}{2}$ トセバ

兩根ハ $\dfrac{1}{1-tan^2\dfrac{\theta}{2}}$, $\dfrac{1}{cot^2\dfrac{\theta}{2}-1}$ ナリ.

89. $\dfrac{sin3A}{sinA}-\dfrac{cos3A}{cosA}=2.$

90. $cos^3Asin3A+sin^3Acos3A=\dfrac{3sin4A}{4}.$

91. $\dfrac{cos3A}{cosA}-\dfrac{cos6A}{cos2A}+\dfrac{cos9A}{cos3A}-\dfrac{cos18A}{cos6A}$

$$=2(cos2A-cos4A+cos6A-cos12A).$$

92. $sin3Asin^3A+cos3Acos^3A=cos^32A.$

93. $tanAtan(60°+A)tan(120°+A)=-tan3A.$

94. $cotA+cot(60°+A)+cot(120°+A)=3cot3A.$

95. $\dfrac{sin3A+cos3A}{sin3A-cos3A}=tan(A-45°)\left(\dfrac{1+2sin2A}{1-2sin2A}\right).$

96. $cosecA+cosec(120°+A)+cosec(240°+A)=3cosec3A.$

97. $cos^3A+cos^3(120°+A)+cos^3(120°-A)=\dfrac{3}{4}cos3A.$

98. $cos\left(\beta+\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right)$, $cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$, $cos\left(\beta-\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right)$ ガ等比級

數ヲナストキハ $sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}+\beta\right)$, $sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}$, $sin\left(\dfrac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)$

モ亦然リ.

第四編ノ問題.

99. $log_5\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$, $log_{\sqrt{3}}81$, $log_{49}343\sqrt{7}$, $log_4\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}$

$log_4\sqrt[3]{0{\cdot}015625}$ ノ値ヲ求ム.

答. $-1{\cdot}1\dot{6}$, 8, 1·75, −0·1, −1.

100. $log_ax=log_by=log_cz$ ナルトキハ此ノ對數ハ $a^pb^qc^r$

ヲ底トスル $x^py^qz^r$ ノ對數ニ等シ.

101. $log_89=a$, $log_{25}5=b$ ナルトキ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ノ常

用對數ヲ求ム.

答. 0, $\dfrac{1}{b+1}$, $\dfrac{3a}{2b+2}$, $\dfrac{2}{b+1}$, $\dfrac{b}{b+1}$, $\dfrac{3a+2}{2b+2}$.

102. 8, 14, 21 ノ常用對數ヲ知リテ 1 ヨリ 10 マデ

ノ諸整數ノ常用對數ヲ求ムル式ヲ作レ.

103. $2log_ax+2log_ax^2+2log_ax^3+\dots\dots\dots\dots+2log_ax^n$

$=n(n+1)log_ax$ ヲ證セヨ.

104. $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ ガ等差級數ヲナストキハ

$log(a+c-2b)$, $log(a-c)$, $log(a+c)$ モ亦等差級數ヲナス.

105. $log_ab\times log_bc\times log_cd\times log_de=log_ae$ ヲ證セヨ.

106. $log_\alpha a$, $log_\beta b$, $log_\gamma c$ ガ等差級數ヲナストキハ $\dfrac{1}{log_a\alpha}$,

$\dfrac{1}{log_b\beta}$, $\dfrac{1}{log_c\gamma}$ モ亦然リ.

107. a, b, c ガ等比級數ヲナシ $log_c a$, $log_b c$, $log_a b$ ガ等差級數ヲナストキハ其ノ公差ハ $\dfrac{3}{2}$ ナリ.

108. $x=\sqrt{\dfrac{854\times\sqrt[3]{{\cdot}042}}{7{\cdot}985\times\sqrt[4]{{\cdot}0005}}}$ 及ビ $y=\sqrt[6]{\dfrac{7^{\frac{1}{4}}\times 92^{\frac{1}{5}}\times({\cdot}01)^{\frac{1}{2}}}{({\cdot}00026)^5\times 5968^{\frac{1}{3}}}}$ ヲ計算セヨ. 答. $x=15{\cdot}77$, $y=514{\cdot}9$.

109. 次ノ指數方程式ヲ解ケ.

(i) $3^x=5$. 答. $1{\cdot}465$.

(ii) $\begin{cases} 2^x\times 3^y=18, \\ 5^x\times 7^y=245. \end{cases}$ 答. $x=1$, $y=2$.

110. 次ノ對數方程式ヲ解ケ.

(i) $log(x+12)-log x=0{\cdot}8451+log(6-5x)$.

答. $\dfrac{4}{7}$, $\dfrac{3}{5}$.

(ii) $x^{log x}=100x$. 答. 100, $0{\cdot}1$.

第五編ノ問題.

三角形ノ三ツノ角ヲ A, B, C トシ其ノ對邊ヲ a, b, c トシ S ヲ面積トシ p ヲ $\dfrac{a+b+c}{2}$ トシ R, r, r', r'', r''', ヲ外接圓內接圓傍接圓ノ半徑トシ次ノ諸式ヲ證セヨ.

111. $cos(B+C-A)+cos(C+A-B)+cos(A+B-C)-1$

$$=4cosA\,cosB\,cosC.$$

112. $cos2A+cos2B+sin2C=-4cos\,C\,cos(45^\circ+A)\,sin(45^\circ-B)$.

113. $sinA\,sinB+cos^2\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=cos^2\dfrac{C}{2}$.

114. $sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)=n\,sin\dfrac{C}{2}$ ナルトキハ

$$tan\frac{A}{2}\,tan\frac{B}{2}=\frac{n-1}{n+1}.$$

115. $\dfrac{cotB+cotC}{tanB+tanC}+\dfrac{cotC+cotA}{tanC+tanA}+\dfrac{cotA+cotB}{tanA+tanB}=1$.

116. $\dfrac{tanB}{tanC}+\dfrac{tanC}{tanB}+\dfrac{tanC}{tanA}+\dfrac{tanA}{tanC}+\dfrac{tanA}{tanB}+\dfrac{tanB}{tanA}$

$$=secA\,secB\,secC-2.$$

117. $\dfrac{1-tanB\,tanC}{cos^2A}+\dfrac{1-tanC\,tanA}{cos^2B}+\dfrac{1-tanA\,tanB}{cos^2C}$

$$=-3secA\,secB\,secC.$$

118. $\tan p\mathrm{A}+\tan p\mathrm{B}+\tan p\mathrm{C}=\tan p\mathrm{A}\tan p\mathrm{B}\tan p\mathrm{C}$.

119. $\cot p\mathrm{B}\cot p\mathrm{C}+\cot p\mathrm{C}\cot p\mathrm{A}+\cot p\mathrm{A}\cot p\mathrm{B}=1$.

但 p ハ任意ノ正整數.

120. $\cos\mathrm{B}=\dfrac{\sin\mathrm{A}}{2\sin\mathrm{C}}$ ナルトキハ $\mathrm{B}=\mathrm{C}$.

121. $b\sin\mathrm{B}-c\sin\mathrm{C}=a\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})$.

122. $a\cos\dfrac{\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}=(b+c)\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}$.

123. $2(a\cos\mathrm{A}-b\cos\mathrm{B})\sin\mathrm{C}=c(\sin2\mathrm{A}-\sin2\mathrm{B})$.

124. $\dfrac{a}{2\sin\mathrm{A}}=\dfrac{a\cos\mathrm{A}+b\cos\mathrm{B}+c\cos\mathrm{C}}{\sin2\mathrm{A}+\sin2\mathrm{B}+\sin2\mathrm{C}}$.

125. $\tan\mathrm{A}=\dfrac{a\sin\mathrm{C}}{b-a\cos\mathrm{C}}$.

126. $\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=c\left(\dfrac{\cos\mathrm{B}}{b}-\dfrac{\cos\mathrm{A}}{a}\right)$.

127. $\dfrac{a}{\cos\mathrm{B}}-\dfrac{b}{\cos\mathrm{A}}=\cos\mathrm{C}\left(\dfrac{b}{\cos\mathrm{B}}-\dfrac{a}{\cos\mathrm{A}}\right)$.

128. $a\sec\mathrm{A}+b\sec\mathrm{B}+c\sec\mathrm{C}=a\sec\mathrm{A}\tan\mathrm{B}\tan\mathrm{C}$.

129. $\mathrm{B}=60^\circ$ ナルトキハ $\dfrac{3}{a+b+c}=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}$.

130. $\mathrm{B}=60^\circ$ ナルトキハ $2\cos\dfrac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{2}=\dfrac{a+c}{\sqrt{a^2-ac+c^2}}$.

131. $\dfrac{b^2}{a}\cos\mathrm{A}+\dfrac{c^2}{b}\cos\mathrm{B}+\dfrac{a^2}{c}\cos\mathrm{C}=\dfrac{a^4+b^4+c^4}{2abc}$.

132. $\cot\mathrm{A}$, $\cot\mathrm{B}$, $\cot\mathrm{C}$ ガ等差級數ヲナストキハモ a^2, b^2, c^2, モ亦然リ.

133. 三角形ノ二邊ヲ $x+y\cos\mathrm{A}$, $y+x\cos\mathrm{A}$ トセバ第三邊ハ $\sin\mathrm{A}(x^2+y^2+2xy\cos\mathrm{A})^{\frac{1}{2}}$ ナリ.

134. $a^2=(b+c)^2\sin^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}+(b-c)^2\cos^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}$.

135. $\mathrm{S}=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$.

136. $\mathrm{S}=2\mathrm{R}^2\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$.

137. $\mathrm{S}=\dfrac{abc}{p}\cos\dfrac{\mathrm{A}}{2}\cos\dfrac{\mathrm{B}}{2}\cos\dfrac{\mathrm{C}}{2}$.

138. $\tan\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{5}{6}$, $\tan\dfrac{\mathrm{B}}{2}=\dfrac{20}{37}$ ナルトキハ a, b, c ハ等差級數ヲナス.

139. $(b-c)\cot\dfrac{\mathrm{A}}{2}+(c-a)\cot\dfrac{\mathrm{B}}{2}+(a-b)\cot\dfrac{\mathrm{C}}{2}=0$.

140. $r'+r''+r'''-r=4\mathrm{R}$.

141. 圓ニ內接セル四邊形ノ四ツノ邊ヲ夫々 a, b, c, d トシ其ノ和半ヲ p トセバ面積ハ

$\sqrt{\{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\}}$ ニ等シ.

142. 四邊形ノ對角線ヲ h, k トシ其ノ夾角ヲ θ トシ各角頂ヨリ對角線ヘノ垂線ヲ a, b, c, d トセバ

$$sin\theta=\sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{hk}}.$$

143. 次ノ要件ニヨリ $\hat{ABC}$ ヲ解ク方法ヲ問フ.

(i) a, b, A−B.

(ii) $a+b$, A, B.

(iii) a, $b+c$, A.

144. 高サ h 尺ナル塔ノ頂上ヨリ其ノ兩方ニ於テ塔脚ヲ過ル一水平線上ノ二物體ヲ望ミ俯角 $45°-A$ 及ビ $45°+A$ ヲ得タリ;二物體ノ距離幾何.

答. $2h\,sec2A$ 尺.

145. 塔ノ基礎ニ於テ樹頂ヲ望ミ仰角 α ヲ得次ニ塔ヲ登ルコト h 尺ニシテ再ビ其ノ仰角ヲ測リ β ヲ得タリ,樹ノ高サ幾何. 答. $\dfrac{h\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ 尺.

146. 高サ h ナル塔ノ頂ヨリ地上ノ一直線ヲ直角ニ見且其ノ兩端ノ俯角 α 及ビ β ヲ得タリ;直線ノ長サ及ビ塔頂ヨリ之ヘノ距離ヲ求ム.

答. $h\sqrt{cosec^2\alpha+cosec^2\beta}$, $\dfrac{h\,cosec\alpha\,cosec\beta}{\sqrt{cosec^2\alpha+cosec^2\beta}}$.

147. 塔ノ周圍ニ其ノ高サト等シキ幅ノ堀アリ,此ノ堀ヨリ c 尺ノ處ニ高サ a 尺ノ塔アリ,第一ノ塔ガ

第二ノ塔頂ニ於テ張ル角ハ 45° ナリト云フ;第一ノ塔ノ高サ幾何. 答. $\dfrac{a^2+c^2}{a-c}$ 尺.

148. 南 59°5′ 東ノ方向ニ走ル高サ 20 尺ノ土壁アリ,太陽ガ南ノ方向 30° ノ高度ニ在ルトキ此ノ壁ノ影ノ幅ヲ求ム. (但 $log2=0{\cdot}30103$, $log3=0{\cdot}47712$, $log29719=4{\cdot}47303$, $logsin59°5'=\bar{1}{\cdot}93344$ トス) 答. 29·7 尺.

149. 二點 P, Q アリ; P ノ南ノ一地ニ於テ之ヲ望ミ $P\hat{L}Q=A$ ナルコトヲ知リ,次ニ L ヨリ西ニ a ヲ歩ミテ M ニ到リ $P\hat{M}Q=A$ ナルコトヲ知リ,猶同方向ニ b ヲ進ミテ Q ノ南ノ地 N ニ達シタリ. P, Q ノ距離ハ $\sqrt{\{(a+b)^2+b^2tan^2A\}}$ ナリ.

150. BC ナル塔ノ上ニ立テル旗竿 CD ガ B ヨリ l ナル距離ノ地ニ於テ最大角 A ヲ張ルトキハ $CD=2l\,tanA$, $BC=l\,tan\left(45°-\dfrac{A}{2}\right)$ ナリ.

附錄ノ問題.

151. 三角形ノ一角ハ45°, 一角ハ$\frac{1}{2}$radian ナルトキ第三角ノ度數及ビ弧度ヲ求ム. 答. 106°·332, $\frac{3\pi-2}{4}$.

152. 25尺ノ半徑ヲ有スル圓ニ於テ15尺ノ弧ノ上ノ中心角ノ度數及ビ弧度ヲ求ム.

答. $\frac{3}{5}$radion, 34°22′39″.

153. 地球ノ軌道ヲ半徑92700000哩ノ圓ト假定シ此ノ軌道ガ〔シリヤス〕星ニ於テ.4″ノ角ヲ張ルトセバ此ノ星ノ距離如何. 答 凡 478×10^{11} 哩.

次ノ諸式ヲ證セヨ.

154. $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$.

155. $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{\pi}{4}$.

156. $\cot^{-1}\frac{3}{4}+\cot^{-1}\frac{1}{7}=\frac{3\pi}{4}$.

157. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=\frac{\pi}{4}$.

158. 次ノ諸式ハ何レモ$\frac{\pi}{4}$ニ等シ.

$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$, $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$, $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$,

$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$, $4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$.

次ノ方程式ヲ解ケ.

159. $2\sin(x+30^\circ)=\cos x$. 答. $n\pi$.

160. $\cot\theta-\tan\theta=\cot\alpha-\tan\alpha$. 答. $\frac{n\pi}{2}+\alpha$.

161. $\cos2\theta-\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\theta-\cos\frac{\pi}{3}$.

答. $(2n+1)\frac{\pi}{2},(6n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

162. $\sec^2\theta+3\operatorname{cosec}^2\theta=8$. 答. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, $(3n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

163. $\tan\theta+\tan3\theta=2\tan2\theta$. 答. $n\pi$.

164. $2\cot2\theta-\tan2\theta=3\cot3\theta$. 答. $n\pi$

165. $\tan\theta+\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$. 答. $(3n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

166. $6\cot^2\theta=1+4\cos^2\theta$. 答. $(3n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

167. $3(\sin^4\theta-\cos^4\theta)+4\cos^6\theta=\cos^32\theta$. 答. $n\pi$.

168. $\sin5\theta=16\sin^5\theta$. 答. $n\pi$, $(6n\pm1)\frac{\pi}{6}$.

169. $4\sin\theta\cos\theta+1-2(\sin\theta+\cos\theta)=0$.

答. $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{6}$, $(6n\pm1)\frac{\pi}{3}$.

170. $\sin\theta-\cos\theta=4\cos^2\theta\sin\theta$.

答. $(4n-1)\frac{\pi}{4}$, $(4n-1)\frac{\pi}{8}$.

171. $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}$. 答. $(24n+4\pm3)\frac{\pi}{12}$.

172. $\tan 2\theta=8\cos^2\theta-\cot\theta$.

答. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\{6n+(-1)^n\}\frac{\pi}{24}$.

173. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1+\sin 2\theta$. 答. $n\pi$, $(4n-1)\frac{\pi}{4}$.

174. $\cot\frac{\pi}{12}\cos\theta+\sin\theta=1$. 答. $(4n+1)\frac{\pi}{2}$, $(6n-1)\frac{\pi}{3}$.

175. $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2$. 答. $(2n+1)\frac{\pi}{10}$.

176. $\tan\theta+\sec 2\theta=1$. 答. $n\pi$, $(4n-1)\frac{\pi}{8}$.

177. $(1-\tan\theta)(1+\sin 2\theta)=1+\tan\theta$.

答. $n\pi$, $(4n-1)\frac{\pi}{4}$.

178. $2\sin 2\theta-4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$.

答. $(6n-1)\frac{\pi}{6}$, $(12n+1)\frac{\pi}{6}$.

179. $\sin 5\theta+\sin 3\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0$.

答. $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $(8n-1)\frac{\pi}{20}$, $(8n+5)\frac{\pi}{12}$.

180. $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$. 答. $(8n-1)\frac{\pi}{4}\pm\cos^{-1}\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

畢.

附　表

第一

數ノ對數表

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	43	41
1	4·3	4·1
2	8·6	8·2
3	12·9	12·3
4	17·2	16·4
5	21·5	20·5
6	25·8	24·6
7	30·1	28·7
8	34·4	32·8
9	38·7	36·9

	35	33
1	3·5	3·3
2	7·0	6·6
3	10·5	9·9
4	14·0	13·2
5	17·5	16·5
6	21·0	19·8
7	24·5	23·1
8	28·0	26·4
9	31·5	29·7

	27	25
1	2·7	2·5
2	5·4	5·0
3	8·1	7·5
4	10·8	10·0
5	13·5	12·5
6	16·2	15·0
7	18·9	17·5
8	21·6	20·0
9	24·3	22·5

	19	17
1	1·9	1·7
2	3·8	3·4
3	5·7	5·1
4	7·6	6·8
5	9·5	8·5
6	11·4	10·2
7	13·3	11·9
8	15·2	13·6
9	17·1	15·3

	11	9
1	1·1	0·9
2	2·2	1·8
3	3·3	2·7
4	4·4	3·6
5	5·5	4·5
6	6·6	5·4
7	7·7	6·3
8	8·8	7·2
9	9·9	8·1

P. P.

	39	37
1	3·9	3·7
2	7·8	7·4
3	11·7	11·1
4	15·6	14·8
5	19·5	18·5
6	23·4	22·2
7	27·3	25·9
8	31·2	29·6
9	35·1	33·3

	31	29
1	3·1	2·9
2	6·2	5·8
3	9·3	8·7
4	12·4	11·6
5	15·5	14·5
6	18·6	17·4
7	21·7	20·3
8	24·8	23·2
9	27·9	26·1

	23	21
1	2·3	2·1
2	4·6	4·2
3	6·9	6·3
4	9·2	8·4
5	11·5	10·5
6	13·8	12·6
7	16·1	14·7
8	18·4	16·8
9	20·7	18·9

	15	13
1	1·5	1·3
2	3·0	2·6
3	4·5	3·9
4	6·0	5·2
5	7·5	6·5
6	9·0	7·8
7	10·5	9·1
8	12·0	10·4
9	13·5	11·7

	7	6
1	0·7	0·6
2	1·4	1·2
3	2·1	1·8
4	2·8	2·4
5	3·5	3·0
6	4·2	3·6
7	4·9	4·2
8	5·6	4·8
9	6·3	5·4

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	666	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996
100	0000	004	009	013	017	022	026	030	035	039
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	6
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

	5
1	0·5
2	1·0
3	1·5
4	2·0
5	2·5
6	3·0
7	3·5
8	4·0
9	4·5

	4
1	0·4
2	0·8
3	1·2
4	1·6
5	2·0
6	2·4
7	2·8
8	3·2
9	3·6

第二

三角函數ノ對數表

角	*logsin*	*logtan*	*logcot*	*logcos*	
0° 0′	−∞	−∞	∞	0·0000	0′ **90°**
10′	$\bar{3}$·4637	$\bar{3}$·4637	2·5363	0·0000	50′
20′	$\bar{3}$·7648	$\bar{3}$·7648	2·2352	0·0000	40′
30′	$\bar{3}$·9408	$\bar{3}$·9409	2·0591	0·0000	30′
40′	$\bar{2}$·0658	$\bar{2}$·0658	1·9342	0·0000	20′
50′	$\bar{2}$·1627	$\bar{2}$·1627	1·8373	0·0000	10′
1° 0′	$\bar{2}$·2419	$\bar{2}$.2419	1·7581	$\bar{1}$·9999	0′ **89°**
10′	$\bar{2}$·3088	$\bar{2}$·3089	1·6911	$\bar{1}$·9999	50′
20′	$\bar{2}$·3668	$\bar{2}$·3669	1·6331	$\bar{1}$·9999	40′
30′	$\bar{2}$·4179	$\bar{2}$·4181	1·5819	$\bar{1}$·9999	30′
40′	$\bar{2}$·4637	$\bar{2}$·4638	1·5362	$\bar{1}$·9998	20′
50′	$\bar{2}$·5050	$\bar{2}$·5053	1·4947	$\bar{1}$·9998	10′
2° 0′	$\bar{2}$·5428	$\bar{2}$·5431	1·4569	$\bar{1}$·9997	0′ **88°**
10′	$\bar{2}$·5776	$\bar{2}$·5779	1.4221	$\bar{1}$·9997	50′
20′	$\bar{2}$·6097	$\bar{2}$·6101	1.3899	$\bar{1}$·9996	40′
30′	$\bar{2}$·6397	$\bar{2}$·6401	1.3599	$\bar{1}$·9996	30′
40′	$\bar{2}$·6677	$\bar{2}$·6682	1.3318	$\bar{1}$·9995	20′
50′	$\bar{2}$·6940	$\bar{2}$·6945	1.3055	$\bar{1}$·9995	10′
3° 0′	$\bar{2}$·7188	$\bar{2}$·7194	1.2806	$\bar{1}$·9994	0′ **87°**
10′	$\bar{2}$.7423	$\bar{2}$.7429	1·2571	$\bar{1}$·9993	50′
20′	$\bar{2}$·7645	$\bar{2}$.7652	1·2348	$\bar{1}$·9993	40′
30′	$\bar{2}$·7857	$\bar{2}$.7865	1·2135	$\bar{1}$·9992	30′
40′	$\bar{2}$·8059	$\bar{2}$.8067	1·1933	$\bar{1}$·9991	20′
50′	$\bar{2}$·8251	$\bar{2}$.8261	1·1739	$\bar{1}$·9990	10′
4° 0′	$\bar{2}$·8436	$\bar{2}$·8446	1·1554	$\bar{1}$·9989	0′ **86°**
10′	$\bar{2}$·8613	$\bar{2}$·8624	1·1376	$\bar{1}$·9989	50′
20′	$\bar{2}$·8783	$\bar{2}$·8795	1·1205	$\bar{1}$·9988	40′
30′	$\bar{2}$·8946	$\bar{2}$·8960	1·1040	$\bar{1}$·9987	30′
40′	$\bar{2}$·9104	$\bar{2}$·9118	1·0882	$\bar{1}$·9986	20′
50′	$\bar{2}$·9256	$\bar{2}$·9272	1·0728	$\bar{1}$·9985	10′
5° 0′	$\bar{2}$·9403	$\bar{2}$.9420	1·0580	$\bar{1}$·9983	0′ **85°**
	logcos	*logcot*	*logtan*	*logsin*	角

$\log\sin a' = \log a + \bar{4}\cdot4637 + \frac{1}{3}\log\cos a'$

$\log\tan a' = \log a + \bar{4}\cdot4637 - \frac{2}{3}\log\cos a'$

$\log\cot a' = -\log a + 3\cdot5363 + \frac{2}{3}\log\cos a'$

角	*logsin*	*logtan*	*logcot*	*logcos*	
5° 0′	$\bar{2}$·9403	$\bar{2}$·9420	1·0580	$\bar{1}$·9983	0′ **85°**
10′	$\bar{2}$·9545	$\bar{2}$·9563	1·0437	$\bar{1}$·9982	50′
20′	$\bar{2}$·9682	$\bar{2}$·9701	1·0299	$\bar{1}$·9981	40′
30′	$\bar{2}$·9816	$\bar{2}$·9836	1·0164	$\bar{1}$·9980	30′
40′	$\bar{2}$·9945	$\bar{2}$·9966	1·0034	$\bar{1}$·9979	20′
50′	$\bar{1}$·0070	$\bar{1}$·0093	0·9907	$\bar{1}$·9977	10′
6° 0′	$\bar{1}$·0192	$\bar{1}$·0216	0·9784	$\bar{1}$·9976	0′ **84°**
10′	$\bar{1}$·0311	$\bar{1}$·0336	0·9664	$\bar{1}$·9975	50′
20′	$\bar{1}$·0426	$\bar{1}$·0453	0·9547	$\bar{1}$·9973	40′
30′	$\bar{1}$·0539	$\bar{1}$·0567	0·9433	$\bar{1}$·9972	30′
40′	$\bar{1}$·0648	$\bar{1}$·0678	0·9322	$\bar{1}$·9971	20′
50′	$\bar{1}$·0755	$\bar{1}$·0786	0·9214	$\bar{1}$·9969	10′
7° 0′	$\bar{1}$·0859	$\bar{1}$·0891	0·9109	$\bar{1}$·9968	0′ **83°**
10′	$\bar{1}$·0961	$\bar{1}$·0995	0·9005	$\bar{1}$·9966	50′
20′	$\bar{1}$·1060	$\bar{1}$·1096	0·8904	$\bar{1}$·9964	40′
30′	$\bar{1}$·1157	$\bar{1}$·1194	0·8806	$\bar{1}$·9963	30′
40′	$\bar{1}$·1252	$\bar{1}$·1291	0·8709	$\bar{1}$·9961	20′
50′	$\bar{1}$·1345	$\bar{1}$·1385	0·8615	$\bar{1}$·9959	10′
8° 0′	$\bar{1}$·1436	$\bar{1}$·1478	0·8522	$\bar{1}$·9958	0′ **82°**
10′	$\bar{1}$·1525	$\bar{1}$·1569	0·8431	$\bar{1}$·9956	50′
20′	$\bar{1}$·1612	$\bar{1}$·1658	0·8342	$\bar{1}$·9954	40′
30′	$\bar{1}$·1697	$\bar{1}$·1745	0·8255	$\bar{1}$·9952	30′
40′	$\bar{1}$·1781	$\bar{1}$·1831	0·8169	$\bar{1}$·9950	20′
50′	$\bar{1}$·1863	$\bar{1}$·1915	0·8085	$\bar{1}$·9948	10′
9° 0′	$\bar{1}$·1943	$\bar{1}$·1997	0·8003	$\bar{1}$·9946	0′ **81°**
10′	$\bar{1}$·2022	$\bar{1}$·2078	0·7922	$\bar{1}$·9944	50′
20′	$\bar{1}$·2100	$\bar{1}$·2158	0·7842	$\bar{1}$·9942	40′
30′	$\bar{1}$·2176	$\bar{1}$·2236	0·7764	$\bar{1}$·9940	30′
40′	$\bar{1}$·2251	$\bar{1}$·2313	0·7687	$\bar{1}$·9938	20′
50′	$\bar{1}$·2324	$\bar{1}$·2389	0·7611	$\bar{1}$·9936	10′
10° 0′	$\bar{1}$·2397	$\bar{1}$·2463	0·7537	1·9934	0′ **80°**
	logcos	*logcot*	*logtan*	*logsin*	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
10° 0′	Ī·2397		Ī·2463		0·7537		Ī·9934	0′80°
10′	Ī·2468	71	Ī·2536	73	0·7464	3	Ī·9931	50′
20′	Ī·2538	70	Ī·2609	73	0·7391	2	Ī·9929	40′
30′	Ī·2606	68	Ī·2680	71	0·7320	2	Ī·9927	30′
40′	Ī·2674	68	Ī·2750	70	0·7250	3	Ī·9924	20′
50′	Ī·2740	66	Ī·2819	69	0·7181	2	Ī·9922	10′
11° 0′	Ī·2806	66	Ī·2887	68	0·7113	3	Ī·9919	0′79°
10′	Ī·2870	64	Ī·2953	66	0·7047	2	Ī·9917	50′
20′	Ī·2934	64	Ī·3020	67	0·6980	3	Ī·9914	40′
30′	Ī·2997	63	Ī·3085	65	0·6915	2	Ī·9912	30′
40′	Ī·3058	61	Ī·3149	64	0·6851	3	Ī·9909	20′
50′	Ī·3119	61	Ī·3212	63	0·6788	2	Ī·9907	10′
12° 0′	Ī·3179	60	Ī·3275	63	0·6725	3	Ī·9904	0′78°
10′	Ī·3238	59	Ī·3336	61	0·6664	3	Ī·9901	50′
20′	Ī·3296	58	Ī·3397	61	0·6603	2	Ī·9899	40′
30′	Ī·3353	57	Ī·3458	61	0·6542	3	Ī·9896	30′
40′	Ī·3410	57	Ī·3517	59	0·6483	3	Ī·9893	20′
50′	Ī·3466	56	Ī·3576	59	0·6424	3	Ī·9890	10′
13° 0′	Ī·3521	55	Ī·3634	58	0·6366	3	Ī·9887	0′77°
10′	Ī·3575	54	Ī·3691	57	0·6309	3	Ī·9884	50′
20′	Ī·3629	54	Ī·3748	57	0·6252	3	Ī·9881	40′
30′	Ī·3682	53	Ī·3804	56	0·6196	3	Ī·9878	30′
40′	Ī·3734	52	Ī·3859	55	0·6141	3	Ī·9875	20′
50′	Ī·3786	52	Ī·3914	55	0·6086	3	Ī·9872	10′
14° 0′	Ī·3837	51	Ī·3968	54	0·6032	3	Ī·9869	0′76°
10′	Ī·3887	50	Ī·4021	53	0·5979	3	Ī·9866	50′
20′	Ī·3937	50	Ī·4074	53	0·5926	3	Ī·9863	40′
30′	Ī·3986	49	Ī·4127	53	0·5873	4	Ī·9859	30′
40′	Ī·4035	49	Ī·4178	51	0·5822	3	Ī·9856	20′
50′	Ī·4083	48	Ī·4230	52	0·5770	3	Ī·9853	10′
15° 0′	Ī·4130	47	Ī·4281	51	0·5719	4	Ī·9849	0′75°
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	73	71	65	63	57	55	49	47	41	39
1	7·3	7·1	6·5	6·3	5·7	5·5	4·9	4·7	4·1	3·9
2	14·6	14·2	13·0	12·6	11·4	11·0	9·8	9·4	8·2	7·8
3	21·9	21·3	19·5	18·9	17·1	16·5	14·7	14·1	12·3	11·7
4	29·2	28·4	26·0	25·2	22·8	22·0	19·6	18·8	16·4	15·6
5	36·5	35·5	32·5	31·5	28·5	27·5	24·5	23·5	20·5	19·5
6	43·8	42·6	39·0	37·8	34·2	33·0	29·4	28·2	24·6	23·4
7	51·1	49·7	45·5	44·1	39·9	38·5	34·3	32·9	28·7	27·3
8	58·4	56·8	52·0	50·4	45·6	44·0	39·2	37·6	32·8	31·2
9	65·7	63·9	58·5	56·7	51·3	49·5	44·1	42·3	36·9	35·1

P. P.

	69	67	61	59	53	51	45	43	37	35
1	6·9	6·7	6·1	5·9	5·3	5·1	4·5	4·3	3·7	3·5
2	13·8	13·4	12·2	11·8	10·6	10·2	9·0	8·6	7·4	7·0
3	20·7	20·1	18·3	17·7	15·9	15·3	13·5	12·9	11·1	10·5
4	27·6	26·8	24·4	23·6	21·2	20·4	18·0	17·2	14·8	14·0
5	34·5	33·5	30·5	29·5	26·5	25·5	22·5	21·5	18·5	17·5
6	41·4	40·2	36·6	35·4	31·8	30·6	27·0	25·8	22·2	21·0
7	48·3	46·9	42·7	41·3	37·1	35·7	31·5	30·1	25·9	24·5
8	55·2	53·6	48·8	47·2	42·4	40·8	36·0	34·4	29·6	28·0
9	62·1	60·3	54·9	53·1	47·7	45·9	40·5	38·7	33·3	31·5

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
15° 0′	Ī·4130		Ī·4281		0·5719		Ī·9849	0′75°
10′	Ī·4177	47	Ī·4331	50	0·5669	3	Ī·9846	50′
20′	Ī·4223	46	Ī·4381	50	0·5619	3	Ī·9843	40′
30′	Ī·4269	46	Ī·4430	49	0·5570	4	Ī·9839	30′
40′	Ī·4314	45	Ī·4479	49	0·5521	3	Ī·9836	20′
50′	Ī·4359	45	Ī·4527	48	0·5473	4	Ī·9832	10′
16° 0′	Ī·4403	44	Ī·4575	48	0·5425	4	Ī·9828	0′74°
10′	Ī·4447	44	Ī·4622	47	0·5378	3	Ī·9825	50′
20′	Ī·4491	44	Ī·4669	47	0·5331	4	Ī·9821	40′
30′	Ī·4533	42	Ī·4716	47	0·5284	4	Ī·9817	30′
40′	Ī·4576	43	Ī·4762	46	0·5238	3	Ī·9814	20′
50′	Ī·4618	42	Ī·4808	46	0·5192	4	Ī·9810	10′
17° 0′	Ī·4659	41	Ī·4853	45	0·5147	4	Ī·9806	0′73°
10′	Ī·4700	41	Ī·4898	45	0·5102	4	Ī·9802	50′
20′	Ī·4741	41	Ī·4943	45	0·5057	4	Ī·9798	40′
30′	Ī·4781	40	Ī·4987	44	0·5013	4	Ī·9794	30′
40′	Ī·4821	40	Ī·5031	44	0·4969	4	Ī·9790	20′
50′	Ī·4861	40	Ī·5075	44	0·4925	4	Ī·9786	10′
18° 0′	Ī·4900	39	Ī·5118	43	0·4882	4	Ī·9782	0′72°
10′	Ī·4939	39	Ī·5161	43	0·4839	4	Ī·9778	50′
20	Ī·4977	38	Ī·5203	42	0·4797	4	Ī·9774	40′
30′	Ī·5015	38	Ī·5245	42	0·4755	4	Ī·9770	30′
40′	Ī·5052	37	Ī·5287	42	0·4713	5	Ī·9765	20′
50′	Ī·5090	38	Ī·5329	42	0·4671	4	Ī·9761	10′
19° 0′	Ī·5126	36	Ī·5370	41	0·4630	4	Ī·9757	0′71°
10′	Ī·5163	37	Ī·5411	41	0·4589	5	Ī·9752	50′
20′	Ī·5199	36	Ī·5451	40	0·4549	4	Ī·9748	40′
30′	Ī·5235	36	Ī·5491	40	0·4509	5	Ī·9743	30′
40′	Ī·5270	35	Ī·5531	40	0·4469	4	Ī·9739	20′
50′	Ī·5306	36	Ī·5571	40	0·4429	5	Ī·9734	10′
20° 0′	Ī.5341	35	Ī·5611	40	0·4389	4	Ī·9730	0′70°
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
20° 0′	$\bar{1}$·5341		$\bar{1}$·5611		0·4389		$\bar{1}$·9730	0′ 70°
10′	$\bar{1}$·5375	34	$\bar{1}$·5650	39	0·4350	5	$\bar{1}$·9725	50′
20′	$\bar{1}$·5409	34	$\bar{1}$·5689	39	0·4311	4	$\bar{1}$·9721	40′
30′	$\bar{1}$·5443	34	$\bar{1}$·5727	38	0·4273	5	$\bar{1}$·9716	30′
40′	$\bar{1}$·5477	34	$\bar{1}$·5766	39	0·4234	5	$\bar{1}$·9711	20′
50′	$\bar{1}$·5510	33	$\bar{1}$·5804	38	0·4196	5	$\bar{1}$·9706	10′
21° 0′	$\bar{1}$·5543	33	$\bar{1}$·5842	38	0·4158	4	$\bar{1}$·9702	0′ 69°
10′	$\bar{1}$·5576	33	$\bar{1}$·5879	37	0·4121	5	$\bar{1}$·9697	50′
20′	$\bar{1}$·5609	33	$\bar{1}$·5917	38	0·4093	5	$\bar{1}$·9692	40′
30′	$\bar{1}$·5641	32	$\bar{1}$·5954	37	0·4046	5	$\bar{1}$·9687	30′
40′	$\bar{1}$·5673	32	$\bar{1}$·5991	37	0·4009	5	$\bar{1}$·9682	20′
50′	$\bar{1}$·5704	31	$\bar{1}$·6028	37	0·3972	5	$\bar{1}$·9677	10′
22° 0′	$\bar{1}$·5736	32	$\bar{1}$·6064	36	0·3936	5	$\bar{1}$·9672	0′ 68°
10′	$\bar{1}$·5767	31	$\bar{1}$·6100	36	0·3900	5	$\bar{1}$·9667	50′
20′	$\bar{1}$·5798	31	$\bar{1}$·6136	36	0·3864	6	$\bar{1}$·9661	40′
30′	$\bar{1}$·5828	30	$\bar{1}$·6172	36	0·3828	5	$\bar{1}$·9656	30′
40′	$\bar{1}$·5859	31	$\bar{1}$·6208	36	0·3792	5	$\bar{1}$·9651	20′
50′	$\bar{1}$·5889	30	$\bar{1}$·6243	35	0·3757	5	$\bar{1}$·9646	10′
23° 0′	$\bar{1}$·5919	30	$\bar{1}$·6279	34	0·3721	6	$\bar{1}$·9640	0′ 67°
10′	$\bar{1}$·5948	29	$\bar{1}$·6314	35	0·3686	5	$\bar{1}$·9635	50′
20′	$\bar{1}$·5978	30	$\bar{1}$·6348	34	0·3652	6	$\bar{1}$·9629	40′
30′	$\bar{1}$·6007	29	$\bar{1}$·6383	35	0·3617	5	$\bar{1}$·9624	30′
40′	$\bar{1}$·6036	29	$\bar{1}$·6417	34	0·3583	6	$\bar{1}$·9618	20′
50′	$\bar{1}$·6065	29	$\bar{1}$·6452	35	0·3548	5	$\bar{1}$·9613	10′
24° 0′	$\bar{1}$·6093	28	$\bar{1}$·6486	34	0·3514	6	$\bar{1}$·9607	0′ 66°
10′	$\bar{1}$·6121	28	$\bar{1}$·6520	34	0·3480	5	$\bar{1}$·9602	50′
20′	$\bar{1}$·6149	28	$\bar{1}$·6553	33	0·3477	6	$\bar{1}$·9596	40′
30′	$\bar{1}$·6177	28	$\bar{1}$·6587	34	0·3413	6	$\bar{1}$·9590	30′
40′	$\bar{1}$·6205	28	$\bar{1}$·6620	33	0·3380	6	$\bar{1}$·9584	20′
50′	$\bar{1}$·6232	27	$\bar{1}$·6654	34	0·3346	5	$\bar{1}$·9579	10′
25° 0′	$\bar{1}$·6259	27	1.6687	33	0.3313	6	$\bar{1}$·9573	0′ 65°
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	39	38
1	3·9	3·8
2	7·8	7·6
3	11·7	11·4
4	15·6	15·2
5	19·5	19.0
6	23·4	22·8
7	27·3	26·6
8	31·2	30·4
9	35·1	34·2

	35	34
1	3·5	3·4
2	7·0	6·8
3	10·5	10·2
4	14·0	13·6
5	17·5	17·0
6	21·0	20·4
7	24·5	23·8
8	28·0	27·2
9	31·5	30·6

	31	29
1	3.1	2·9
2	6·2	5·8
3	9·3	8·7
4	12·4	11·6
5	15·5	14·5
6	18·6	17·4
7	21·7	20·3
8	24·8	23·2
9	27·9	26·1

	26	25
1	2·6	2·5
2	5·2	5·0
3	7·8	7·5
4	10·4	10·0
5	13·0	12·5
6	15·6	15·0
7	18·2	17·5
8	20·8	20·0
9	23·4	22·5

	22	8
1	2·2	0·8
2	4·4	1·6
3	6·6	2·4
4	8·8	3·2
5	11·0	4·0
6	13·2	4·8
7	15·4	5·6
8	17.6	6·4
9	19·8	7·2

P. P.

	37	36
1	3·7	3·6
2	7·4	7·2
3	11·1	10·8
4	14·8	14·4
5	18·5	18·0
6	22·2	21·6
7	25·9	25·2
8	28·0	28·8
9	31·5	32·4

	33	32
1	3·3	3·2
2	6·6	6·4
3	9·9	9·6
4	13·2	12·8
5	16·5	16·0
6	19·8	19·2
7	23·1	22·4
8	26·4	25·6
9	29·7	28·8

	28	27
1	2·8	2·7
2	5·6	5·4
3	8·4	8·1
4	11·2	10·8
5	14·0	13·5
6	16·8	16·2
7	19·6	18·9
8	22·4	21·6
9	25·2	24·3

	24	23
1	2·4	2·3
2	4·8	4·6
3	7·2	6·9
4	9·6	9·2
5	12·0	11·5
6	14·4	13·8
7	16·8	16·1
8	19·2	18·4
9	21·6	20·7

	6	4
1	0·6	0·4
2	1·2	0·8
3	1·8	1·2
4	2·4	1·6
5	3·0	2·0
6	3·6	2·4
7	4·2	2·8
8	4·8	3·2
9	5·4	3·6

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
25° 0′	$\bar{1}$.6259		$\bar{1}$·6687		0·3313		$\bar{1}$·9573	0′ 65°
10′	$\bar{1}$·6286	27	$\bar{1}$·6720	33	0·3280	6	$\bar{1}$·9567	50′
20′	$\bar{1}$·6313	27	$\bar{1}$·6752	32	0·3248	6	$\bar{1}$·9561	40′
30′	$\bar{1}$·6340	27	$\bar{1}$·6785	33	0·3215	6	$\bar{1}$·9555	30′
40′	$\bar{1}$·6366	26	$\bar{1}$·6817	32	0·3183	6	$\bar{1}$·9549	20′
50′	$\bar{1}$·6392	26	$\bar{1}$·6850	33	0·3150	6	$\bar{1}$·9543	10′
26° 0′	$\bar{1}$·6418	26	$\bar{1}$·6882	32	0.3118	6	$\bar{1}$·9537	0′ 64°
10′	$\bar{1}$·6444	26	$\bar{1}$·6914	32	0·3086	7	$\bar{1}$·9530	50′
20′	$\bar{1}$·6470	26	$\bar{1}$·6946	32	0·3054	6	$\bar{1}$·9524	40′
30′	$\bar{1}$·6495	25	$\bar{1}$·6977	31	0·3023	6	$\bar{1}$·9518	30′
40′	$\bar{1}$·6521	26	$\bar{1}$·7009	32	0·2991	6	$\bar{1}$·9512	20′
50′	$\bar{1}$·6546	25	$\bar{1}$·7040	31	0·2960	7	$\bar{1}$·9505	10′
27° 0′	$\bar{1}$·6570	26	$\bar{1}$·7072	32	0·2928	6	$\bar{1}$·9479	0′ 63°
10′	$\bar{1}$·6595	25	$\bar{1}$·7103	31	0·2897	7	$\bar{1}$·9492	50′
20′	$\bar{1}$·6620	25	$\bar{1}$·7134	31	0·2866	6	$\bar{1}$·9486	40′
30′	$\bar{1}$·6644	24	$\bar{1}$·7165	31	0·2835	7	$\bar{1}$·9479	30′
40′	$\bar{1}$·6668	24	$\bar{1}$·7196	31	0·2804	6	$\bar{1}$·9473	20′
50′	$\bar{1}$·6692	24	$\bar{1}$·7226	30	0·2774	7	$\bar{1}$·9466	10′
28° 0′	$\bar{1}$·6716	24	$\bar{1}$·7257	31	0·2743	7	$\bar{1}$·9459	0′ 62°
10′	$\bar{1}$·6740	24	$\bar{1}$·7287	30	0·2713	6	$\bar{1}$·9453	50′
20′	$\bar{1}$·6763	23	$\bar{1}$·7317	30	0·2683	7	$\bar{1}$·9446	40′
30′	$\bar{1}$·6787	24	$\bar{1}$·7348	31	0·2652	7	$\bar{1}$·9439	30′
40′	$\bar{1}$·6810	23	$\bar{1}$·7378	30	0·2622	7	$\bar{1}$·9432	20′
50′	$\bar{1}$·6833	23	$\bar{1}$·7408	30	0·2592	7	$\bar{1}$·9425	10′
29° 0′	$\bar{1}$·6856	23	1·7438	30	0·2562	7	$\bar{1}$·9418	0′ 61°
10′	$\bar{1}$·6878	22	$\bar{1}$·7467	29	0·2533	7	$\bar{1}$·9411	50′
20′	$\bar{1}$·6901	23	$\bar{1}$·7497	30	0·2503	7	$\bar{1}$·9404	40′
30′	$\bar{1}$·6923	22	$\bar{1}$·7526	29	0·2474	7	$\bar{1}$·9397	30′
40′	$\bar{1}$·6946	23	$\bar{1}$·7556	30	0·2444	7	$\bar{1}$·9390	20′
50′	$\bar{1}$·6968	22	$\bar{1}$·7585	29	0·2415	7	$\bar{1}$·9383	10′
30° 0′	$\bar{1}$·6990	22	$\bar{1}$·7614	29	0·2386	8	$\bar{1}$·9375	0′ 60°
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
30° 0′	1̄·6990		1̄·7614		0·2386		1̄·9375	0′**60°**
10′	1̄·7012	22	1̄·7644	30	0·2356	7	1̄·9368	50′
20′	1̄·7033	21	1̄·7673	29	0·2327	7	1̄·9361	40′
30′	1̄·7055	22	1̄·7701	28	0·2299	8	1̄·9353	30′
40′	1̄·7076	21	1̄·7730	29	0·2270	7	1̄·9346	20′
50′	1̄·7097	21	1̄·7759	29	0·2241	8	1̄·9338	10′
31° 0′	1̄·7118	21	1̄·7788	29	0·2212	7	1̄·9331	0′**59°**
10′	1̄·7139	21	1̄·7816	28	0·2184	8	1̄·9323	50′
20′	1̄·7160	21	1̄·7845	29	0·2155	8	1̄·9315	40′
30′	1̄·7181	21	1̄·7873	28	0·2127	7	1̄·9308	30′
40′	1̄·7201	20	1̄·7902	29	0·2098	8	1̄·9300	20′
50′	1̄·7222	21	1̄·7930	28	0·2070	8	1̄·9292	10′
32° 0′	1̄·7242	20	1̄·7958	28	0·2042	8	1̄·9284	0′**58°**
10′	1̄·7262	20	1̄·7986	28	0·2014	8	1̄·9276	50′
20′	1̄·7282	20	1̄·8014	28	0·1986	8	1̄·9268	40′
30′	1̄·7302	20	1̄·8042	28	0·1958	8	1̄·9260	30′
40′	1̄·7322	20	1̄·8070	28	0·1930	8	1̄·9252	20′
50′	1̄·7342	20	1̄·8097	27	0·1903	8	1̄·9244	10′
33° 0′	1̄·7361	19	1̄·8125	28	0·1875	8	1̄·9236	0′**57°**
10′	1̄·7380	19	1̄·8153	28	0·1847	8	1̄·9228	50′
20′	1̄·7400	20	1̄·8180	27	0·1820	9	1̄·9219	40′
30′	1̄·7419	19	1̄·8208	28	0·1792	8	1̄·9211	30′
40′	1̄·7438	19	1̄·8235	27	0·1765	8	1̄·9203	20′
50′	1̄·7457	19	1̄·8263	28	0·1737	9	1̄·9194	10′
34° 0′	1̄·7476	19	1̄·8290	27	0·1710	8	1̄·9186	0′**56°**
10′	1̄·7494	18	1̄·8317	27	0·1683	9	1̄·9177	50′
20′	1̄·7513	19	1̄·8344	27	0·1656	8	1̄·9169	40′
30′	1̄·7531	18	1̄·8371	27	0·1629	9	1̄·9160	30′
40′	1̄·7550	19	1̄·8398	27	0·1602	9	1̄·9151	20′
50′	1̄·7568	18	1̄·8425	27	0·1575	9	1̄·9142	10′
35° 0′	1̄·7586	18	1̄·8452	27	0·1548	8	1̄·9134	0′**55°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	30	29
1	3·0	2·9
2	6·0	5·8
3	9·0	8·7
4	12·0	11·6
5	15·0	14·5
6	18·0	17·4
7	21·0	20·3
8	24·0	23·2
9	27·0	26·1

	26	25
1	2·6	2·5
2	5·2	5·0
3	7·8	7·5
4	10·4	10·0
5	13·0	12·5
6	15·6	15·0
7	18·2	17·5
8	20·8	20·0
9	23·4	22·5

	20	19
1	2·0	1·9
2	4·0	3·8
3	6·0	5·7
4	8·0	7·6
5	10·0	9·5
6	12·0	11·4
7	14·0	13·3
8	16·0	15·2
9	18·0	17·1

	16	15
1	1·6	1·5
2	3·2	3·0
3	4·8	4·5
4	6·4	6·0
5	8·0	7·5
6	9·6	9·0
7	11·2	10·5
8	12·8	12·0
9	14·4	13·5

	9	8
1	0·9	0·8
2	1·8	1·6
3	2·7	2·4
4	3·6	3·2
5	4·5	4·0
6	5·4	4·8
7	6·3	5·6
8	7·2	6·4
9	8·1	7·2

P. P.

	28	27
1	2·8	2·7
2	5·6	5·4
3	8·4	8·1
4	11·2	10·8
5	14·0	13·5
6	16·8	16·2
7	19·6	18·9
8	22·4	21·6
9	25·2	24·3

	22	21
1	2·2	2·1
2	4·4	4·2
3	6·6	6·3
4	8·8	8·4
5	11·0	10·5
6	13·2	12·6
7	15·4	14·7
8	17·6	16·8
9	19·8	18·9

	18	17
1	1·8	1·7
2	3·6	3·4
3	5·4	5·1
4	7·2	6·8
5	9·0	8·5
6	10·8	10·2
7	12·6	11·9
8	14·4	13·6
9	16·2	15·3

	11	10
1	1·1	1·0
2	2·2	2·0
3	3·3	3·0
4	4·4	4·0
5	5·5	5·0
6	6·6	6·0
7	7·7	7·0
8	8·8	8·0
9	9·9	9·0

	7
1	0·7
2	1·4
3	2·1
4	2·8
5	3·5
6	4·2
7	4·9
8	5·6
9	6·3

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
35° 0′	1̄·7586		1̄·8452		0·1548		1̄·9134	0′**55°**
10′	1̄·7604	18	1̄·8479	27	0·1521	9	1̄·9125	50′
20′	1̄·7622	18	1̄·8506	27	0·1494	9	1̄·9116	40′
30′	1̄·7640	18	1̄·8533	27	0·1467	9	1̄·9107	30′
40′	1̄·7657	17	1̄·8559	26	0·1441	9	1̄·9098	20′
50′	1̄·7675	18	1̄·8586	27	0·1414	9	1̄·9089	10′
36° 0′	1̄·7692	17	1̄·8613	27	0·1387	9	1̄·9080	0′**54°**
10′	1̄·7710	18	1̄·8639	26	0·1361	10	1̄·9070	50′
20′	1̄·7727	17	1̄·8666	27	0·1334	9	1̄·9061	40′
30′	1̄·7744	17	1̄·8692	26	0·1308	9	1̄·9052	30′
40′	1̄·7761	17	1̄·8718	26	0·1282	10	1̄·9042	20′
50′	1̄·7778	17	1̄·8745	27	0·1255	9	1̄·9033	10′
37° 0′	1̄·7795	17	1̄·8771	26	0·1229	10	1̄·9023	0′**53°**
10′	1̄·7811	16	1̄·8797	26	0·1203	9	1̄·9014	50′
20′	1̄·7828	17	1̄·8824	27	0·1176	10	1̄·9004	40′
30′	1̄·7844	16	1̄·8850	26	0·1150	9	1̄·8995	30′
40′	1̄·7861	17	1̄·8876	26	0·1124	10	1̄·8985	20′
50′	1̄·7877	16	1̄·8902	26	0·1098	10	1̄·8975	10′
38° 0′	1̄·7893	16	1̄·8928	26	0.1072	10	1̄·8965	0′**52°**
10′	1̄·7910	17	1̄·8954	26	0.1046	10	1̄·8955	50′
20′	1̄·7926	16	1̄·8980	26	0.1020	10	1̄·8945	40′
30′	1̄·7941	15	1̄·9006	26	0.0994	10	1̄·8935	30′
40′	1̄·7957	16	1̄·9032	26	0.0968	10	1̄·8925	20′
50′	1̄·7973	16	1̄·9058	26	0.0942	10	1̄·8915	10′
39° 0′	1̄·7989	16	1̄·9084	26	0·0916	10	1̄·8905	0′**51°**
10′	1̄·8004	15	1̄·9110	26	0·0890	10	1̄·8895	50′
20′	1̄·8020	16	1̄·9135	25	0·0865	11	1̄·8884	40′
30′	1̄·8035	15	1̄·9161	26	0·0839	10	1̄·8874	30′
40′	1̄·8050	15	1̄·9187	26	0·0813	10	1̄·8864	20′
50′	1̄·8066	16	1̄·9212	25	0·0788	11	1̄·8853	10′
40° 0′	1̄·8081	15	1̄·9238	26	0·0762	10	1̄·8843	0′**50°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
40° 0′	$\bar{1}$·8081	15	$\bar{1}$·9238	26	0·0762	11	$\bar{1}$·8843	0′ **50°**
10′	$\bar{1}$·8096	15	$\bar{1}$·9264	25	0·0736	11	$\bar{1}$·8832	50′
20′	$\bar{1}$·8111	14	$\bar{1}$·9289	26	0·0711	11	$\bar{1}$·8821	40′
30′	$\bar{1}$·8125	15	$\bar{1}$·9315	26	0·0685	10	$\bar{1}$·8810	30′
40′	$\bar{1}$·8140	15	$\bar{1}$·9341	25	0·0659	11	$\bar{1}$·8800	20′
50′	$\bar{1}$·8155	14	$\bar{1}$·9366	26	0·0634	11	$\bar{1}$·8789	10′
41° 0′	$\bar{1}$·8169	15	$\bar{1}$·9392	25	0·0608	11	$\bar{1}$·8778	0′ **49°**
10′	$\bar{1}$·8184	14	$\bar{1}$·9417	26	0·0583	11	$\bar{1}$·8767	50′
20′	$\bar{1}$·8198	15	$\bar{1}$·9443	25	0·0557	11	$\bar{1}$·8756	40′
30′	$\bar{1}$·8213	14	$\bar{1}$·9468	26	0·0532	12	$\bar{1}$·8745	30′
40′	$\bar{1}$·8227	14	$\bar{1}$·9494	25	0·0506	11	$\bar{1}$·8733	20′
50′	$\bar{1}$·8241	14	$\bar{1}$·9519	25	0·0481	11	$\bar{1}$·8722	10′
42° 0′	$\bar{1}$·8255	14	$\bar{1}$·9544	26	0·0456	12	$\bar{1}$·8711	0′ **48°**
10′	$\bar{1}$·8269	14	$\bar{1}$·9570	25	0·0430	11	$\bar{1}$·8699	50′
20′	$\bar{1}$·8283	14	$\bar{1}$·9595	26	0·0405	12	$\bar{1}$·8688	40′
30′	$\bar{1}$·8297	14	$\bar{1}$·9621	25	0·0379	11	$\bar{1}$·8676	30′
40′	$\bar{1}$·8311	13	$\bar{1}$·9646	25	0·0354	12	$\bar{1}$·8665	20′
50′	$\bar{1}$·8324	14	$\bar{1}$·9671	26	0·0329	12	$\bar{1}$·8653	10′
43° 0′	$\bar{1}$·8338	13	$\bar{1}$·9697	25	0·0303	12	$\bar{1}$·8641	0′ **47°**
10′	$\bar{1}$·8351	14	$\bar{1}$·9722	25	0·0278	11	$\bar{1}$·8629	50′
20′	$\bar{1}$·8365	13	$\bar{1}$·9747	25	0·0253	12	$\bar{1}$·8618	40′
30′	$\bar{1}$·8378	13	$\bar{1}$·9772	26	0·0228	12	$\bar{1}$·8606	30′
40′	$\bar{1}$·8391	14	$\bar{1}$·9798	25	0·0202	12	$\bar{1}$·8594	20′
50′	$\bar{1}$·8405	13	$\bar{1}$·9823	25	0·0177	13	$\bar{1}$·8582	10′
44° 0′	$\bar{1}$·8418	13	$\bar{1}$·9848	26	0·0152	12	$\bar{1}$·8569	0′ **46°**
10′	$\bar{1}$·8431	13	$\bar{1}$·9874	25	0·0126	12	$\bar{1}$·8557	50′
20′	$\bar{1}$·8444	13	$\bar{1}$·9899	25	0·0101	13	$\bar{1}$·8545	40′
30′	$\bar{1}$·8457	12	$\bar{1}$·9924	25	0·0076	12	$\bar{1}$·8532	30′
40′	$\bar{1}$·8469	13	$\bar{1}$·9949	26	0·0051	13	$\bar{1}$·8520	20′
50′	$\bar{1}$·8482	13	$\bar{1}$·9975	25	0·0025	12	$\bar{1}$·8507	10′
45° 0′	$\bar{1}$·8495		0·0000		0·0000		$\bar{1}$·8495	0′ **45°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	26	25	24	15	14	13	12	11
1	2·6	2·5	2·4	1·5	1·4	1·3	1·2	1·1
2	5·2	5·0	4·8	3·0	2·8	2·6	2·4	2·2
3	7·8	7·5	7·2	4·5	4·2	3·9	3·6	3·3
4	10·4	10·0	9·6	6·0	5·6	5·2	4·8	4·4
5	13·0	12·5	12·0	7·5	7·0	6·5	6·0	5·5
6	15·6	15·0	14·4	9·0	8·4	7·8	7·2	6·6
7	18·2	17·5	16·8	10·5	9·8	9·1	8·4	7·7
8	20·8	20·0	19·2	12·0	11·2	10·4	9·6	8·8
9	23·4	22·5	21·6	13·5	12·6	11·7	10·8	9·9

第三

三角函數ノ眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0° 0′	·0000	·0000	1·000	∞	∞	1·000	0′**90°**
10′	·0029	·0029	1·000	343·8	343·8	1·000	50′
20′	·0058	·0058	1·000	171·9	171·9	1·000	40′
30′	·0087	·0087	1·000	114·6	114·6	1·000	30′
40′	·0116	·0116	1·000	85·95	85·94	·9999	20′
50′	·0145	·0145	1·000	68·76	68·75	·9999	10′
1° 0′	·0175	·0175	1·000	57·30	57·29	·9998	0′**89°**
10′	·0204	·0204	1·000	49·11	49·10	·9998	50′
20′	·0233	·0233	1·000	42·98	42·96	·9997	40′
30′	·0262	·0262	1·000	38·20	38·19	·9997	30′
40′	·0291	·0291	1·000	34·38	34·37	·9996	20′
50′	·0320	·0320	1·001	31·26	31·24	·9995	10′
2° 0′	·0349	·0349	1·001	28·65	28·64	·9994	0′**88°**
10′	·0378	·0378	1·001	26·45	26·43	·9993	50′
20′	·0407	·0407	1·001	24·56	24·54	·9992	40′
30′	·0436	·0437	1·001	22·93	22·90	·9990	30′
40′	·0465	·0466	1·001	21·49	21·47	·9989	20′
50′	·0494	·0495	1·001	20·23	20·21	·9988	10′
3° 0′	·0523	·0524	1·001	19·11	19·08	·9986	0′**87°**
10′	·0552	·0553	1·002	18·10	18·07	·9985	50′
20′	·0581	·0582	1·002	17·20	17·17	·9983	40′
30′	·0610	·0612	1·002	16·38	16·35	·9981	30′
40′	·0640	·0641	1·002	15·64	15·60	·9980	20′
50′	·0669	·0670	1·002	14·96	14·92	·9978	10′
4° 0′	·0698	·0699	1·002	14·34	14·30	·9976	0′**86°**
10′	·0727	·0729	1·003	13·76	13·73	·9974	50′
20′	·0756	·0758	1·003	13·23	13·20	·9971	40′
30′	·0785	·0787	1·003	12·75	12·71	·9969	30′
40′	·0814	·0816	1·003	12·29	12·25	·9967	20′
50′	·0843	·0846	1·004	11·87	11·83	·9964	10′
5° 0′	·0872	·0875	1·004	11·47	11·43	·9962	0′**85°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
5° 0′	·0872	·0875	1·004	11·47	11·43	·9962	0′**85°**
10′	·0901	·0904	1·004	11·10	11·06	·9959	50′
20′	·0929	·0934	1·004	10·76	10·71	·9957	40′
30′	·0958	·0963	1·005	10·43	10·39	·9954	30′
40′	·0987	·0992	1·005	10·13	10·08	·9951	20′
50′	·1016	·1022	1·005	9·839	9·788	·9948	10′
6° 0′	·1045	·1051	1·006	9·567	9·514	·9945	0′**84°**
10′	·1074	·1080	1·006	9·309	9·255	·9942	50′
20′	·1103	·1110	1·006	9·065	9·010	·9939	40′
30′	·1132	·1139	1·006	8·834	8·777	·9936	30′
40′	·1161	·1169	1·007	8·614	8·556	·9932	20′
50′	·1190	·1198	1·007	8·405	8·345	·9929	10′
7° 0′	·1219	·1228	1·008	8·206	8·144	·9925	0′**83°**
10′	·1248	·1257	1·008	8·016	7·953	·9922	50′
20′	·1276	·1287	1·008	7·834	7·770	·9918	40′
30′	·1305	·1317	1·009	7·661	7·596	·9914	30′
40′	·1334	·1346	1·009	7·496	7·429	·9911	20′
50′	·1363	·1376	1·009	7·337	7·269	·9907	10′
8° 0′	·1392	·1405	1·010	7·185	7·115	·9903	0′**82°**
10′	·1421	·1435	1·010	7·040	6·968	·9899	50′
20′	·1449	·1465	1·011	6·900	6·827	·9894	40′
30′	·1478	·1495	1·011	6·765	6·691	·9890	30′
40′	·1507	·1524	1·012	6·636	6·561	·9886	20′
50′	·1536	·1554	1·012	6·512	6·435	·9881	10′
9° 0′	·1564	·1584	1·012	6·392	6·314	·9877	0′**81°**
10′	·1593	·1614	1·013	6·277	6·197	·9872	50′
20′	·1622	·1644	1·013	6·166	6·084	·9868	40′
30′	·1650	·1673	1·014	6·059	5·976	·9863	30′
40′	·1679	·1703	1·014	5·955	5·871	·9858	20′
50′	·1708	·1733	1·015	5·855	5·769	·9853	10′
10° 0′	·1736	·1763	1·015	5·759	5·671	·9848	0′**80°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
10° 0′	·1736	·1763	1·015	5·759	5·671	·9848	0′ **80°**
10′	·1765	·1793	1·016	5·665	5·576	·9843	50′
20′	·1794	·1823	1·016	5·575	5·485	·9838	40′
30′	·1822	·1853	1·017	5·487	5·396	·9833	30′
40′	·1851	·1883	1·018	5·403	5·309	·9827	20′
50′	·1880	·1914	1·018	5·320	5·226	·9822	10′
11° 0′	·1908	·1944	1·019	5·241	5·145	·9816	0′ **79°**
10′	·1937	·1974	1·019	5·164	5·066	·9811	50′
20′	·1965	·2004	1·020	5·089	4·989	·9805	40′
30′	·1994	·2035	1·020	5·016	4·915	·9799	30′
40′	·2022	·2065	1·021	4·945	4·843	·9793	20′
50′	·2051	·2095	1·022	4·876	4·773	·9787	10′
12° 0′	·2079	·2126	1·022	4·810	4·705	·9781	0′ **78°**
10′	·2108	·2156	1·023	4·745	4·638	·9775	50′
20′	·2136	·2186	1·024	4·682	4·574	·9769	40′
30′	·2164	·2217	1·024	4·620	4·511	·9763	30′
40′	·2193	·2247	1·025	4·560	4·449	·9757	20′
50′	·2221	·2278	1·026	4·502	4·390	·9750	10′
13° 0′	·2250	·2309	1·026	4·445	4·331	·9744	0′ **77°**
10′	·2278	·2339	1·027	4·390	4·275	·9737	50′
20′	·2306	·2370	1·028	4·336	4·219	·9730	40′
30′	·2334	·2401	1·028	4·284	4·165	·9724	30′
40′	·2363	·2432	1·029	4·232	4·113	·9717	20′
50′	·2391	·2462	1·030	4·182	4·061	·9710	10′
14° 0′	·2419	·2493	1·031	4·134	4·011	·9703	0′ **76°**
10′	·2447	·2524	1·031	4·086	3·962	·9696	50′
20′	·2476	·2555	1·032	4·039	3·914	·9689	40′
30′	·2504	·2586	1·033	3·994	3·867	·9681	30′
40′	·2532	·2617	1·034	3·950	3·821	·9674	20′
50′	·2560	·2648	1·034	3·906	3·776	·9667	10′
15° 0′	·2588	·2679	1·035	3·864	3·732	·9659	0′ **75°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
15° 0′	·2588	·2679	1·035	3·864	3·732	·9659	0′ **75°**
10′	·2616	·2711	1·036	3·822	3·689	·9652	50′
20′	·2644	·2742	1·037	3·782	3·647	·9644	40′
30′	·2672	·2773	1·038	3·742	3·606	·9636	30′
40′	·2700	·2805	1·039	3·703	3·566	·9628	20′
50′	·2728	·2836	1·039	3·665	3·526	·9621	10′
16° 0′	·2756	·2867	1·040	3·628	3·487	·9613	0′ **74°**
10′	·2784	·2899	1·041	3·592	3·450	·9605	50′
20′	·2812	·2931	1·042	3·556	3·412	·9596	40′
30′	·2840	·2962	1·043	3·521	3·376	·9588	30′
40′	·2868	·2994	1·044	3·487	3·340	·9580	20′
50′	·2896	·3026	1·045	3·453	3·305	·9572	10′
17° 0′	·2924	·3057	1·046	3·420	3·271	·9563	0′ **73°**
10′	·2952	·3089	1·047	3·388	3·237	.9555	50′
20′	·2979	·3121	1·048	3·356	3·204	.9546	40′
30′	·3007	·3153	1·049	3·326	3·172	.9537	30′
40′	·3035	·3185	1·049	3·295	3·140	.9528	20′
50′	·3062	·3217	1·050	3·265	3·108	.9520	10′
18° 0′	·3090	·3249	1·051	3·236	3.078	·9511	0′ **72°**
10′	·3118	·3281	1·052	3·207	3·047	·9502	50′
20′	·3145	·3314	1·053	3·179	3·018	·9492	40′
30′	·3173	·3346	1·054	3·152	2·989	·9483	30′
40′	·3201	·3378	1·056	3·124	2·960	·9474	20′
50′	·3228	·3411	1·057	3·098	2·932	·9465	10′
19° 0′	·3256	·3443	1·058	3·072	2·904	·9455	0′ **71°**
10′	·3283	·3476	1·059	3·046	2·877	·9446	50′
20′	·3311	·3508	1·060	3·021	2·850	·9436	40′
30′	·3338	·3541	1·061	2·996	2·824	·9426	30′
40′	·3365	·3574	1·062	2·971	2·798	·9417	20′
50′	·3393	·3607	1·063	2·947	2·773	·9407	10′
20° 0′	·3420	·3640	1·064	2·924	2.747	·9397	0′ **70°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
20° 0′	·3420	·3640	1·064	2·924	2·747	·9397	0′**70°**
10′	·3448	·3673	1·065	2·901	2·723	·9387	50′
20′	·3475	·3706	1·066	2·878	2·699	·9377	40′
30′	·3502	·3739	1·068	2·855	2·675	·9367	30′
40′	·3529	·3772	1·069	2·833	2·651	·9356	20′
50′	·3557	·3805	1·070	2·812	2·628	·9346	10′
21° 0′	·3584	·3839	1·071	2·790	2·605	·9336	0′**69°**
10′	·3611	·3872	1·072	2·769	2·583	·9325	50′
20′	·3638	·3906	1·074	2·749	2·560	·9315	40′
30′	·3665	·3939	1·075	2·729	2·539	·9304	30′
40′	·3692	·3973	1·076	2·709	2·517	·9293	20′
50′	·3719	·4006	1·077	2·689	2·496	·9283	10′
22° 0′	·3746	·4040	1·079	2·669	2·475	·9272	0′**68°**
10′	·3773	·4074	1·080	2·650	2·455	·9261	50′
20′	·3800	·4108	1·081	2·632	2·434	·9250	40′
30′	·3827	·4142	1·082	2·613	2·414	·9239	30′
40′	·3854	·4176	1·084	2·595	2·394	·9228	20′
50′	·3881	·4210	1·085	2·577	2·375	·9216	10′
23° 0′	·3907	·4245	1·086	2·559	2·356	·9205	0′**67°**
10′	·3934	·4279	1·088	2·542	2·337	·9194	50′
20′	·3961	·4314	1·089	2·525	2·318	·9182	40′
30′	·3987	·4348	1·090	2·508	2·300	·9171	30′
40′	·4014	·4383	1·092	2·491	2·282	·9159	20′
50′	·4041	·4417	1·093	2·475	2·264	·9147	10′
24° 0′	·4067	·4452	1·095	2·459	2·246	·9135	0′**66°**
10′	·4094	·4487	1·096	2·443	2·229	·9124	50′
20′	·4120	·4522	1·097	2·427	2·211	·9112	40′
30′	·4147	·4557	1·099	2·411	2·194	·9100	30′
40′	·4173	·4592	1·100	2·396	2·177	·9088	20′
50′	·4200	·4628	1·102	2·381	2·161	·9075	10′
25° 0′	·4226	·4663	1·103	2·366	2·145	·9063	0′**65°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
25° 0′	·4226	·4663	1·103	2·366	2·145	·9063	0′**65°**
10′	·4253	·4699	1·105	2·352	2·128	·9051	50′
20′	·4279	·4734	1·106	2·337	2·112	·9038	40′
30′	·4305	·4770	1·108	2·323	2·097	·9026	30′
40′	·4331	·4806	1·109	2·309	2·081	·9013	20′
50′	·4358	·4841	1·111	2·295	2·066	·9001	10′
26° 0′	·4384	·4877	1·113	2·281	2.050	·8988	0′**64°**
10′	·4410	·4913	1·114	2·268	2·035	·8975	50′
20′	·4436	·4950	1·116	2·254	2·020	·8962	40′
30′	·4462	·4986	1·117	2·241	2·006	·8949	30′
40′	·4488	·5022	1·119	2·228	1·991	·8936	20′
50′	·4514	·5059	1·121	2·215	1·977	·8923	10′
27° 0′	·4540	·5095	1.122	2·203	1·963	·8910	0′**63°**
10′	·4566	·5132	1·124	2·190	1·949	·8897	50′
20′	·4592	·5169	1·126	2·178	1·935	·8884	40′
30′	·4617	·5206	1·127	2·166	1·921	·8870	30′
40′	·4643	·5243	1·129	2·154	1·907	·8857	20′
50′	·4669	·5280	1·131	2·142	1·894	·8843	10′
28° 0′	·4695	·5317	1·133	2·130	1·881	·8829	0′**62°**
10′	·4720	·5354	1·134	2·118	1·868	·8816	50′
20′	·4746	·5392	1·136	2·107	1·855	·8802	40′
30′	·4772	·5430	1·138	2·096	1·842	·8788	30′
40′	·4797	·5467	1·140	2·085	1·829	·8774	20′
50′	·4823	·5505	1·142	2·074	1·816	·8760	10′
29° 0′	·4848	·5543	1·143	2·063	1·804	·8746	0′**61°**
10′	·4874	·5581	1·145	2·052	1·792	·8732	50′
20′	·4899	·5619	1·147	2·041	1·780	·8718	40′
30′	·4924	·5658	1·149	2·031	1·767	·8704	30′
40′	·4950	·5696	1·151	2·020	1·756	·8689	20′
50′	·4975	·5735	1·153	2·010	1·744	·8675	10′
30° 0′	·5000	.5774	1·155	2·000	1·732	·8660	0′**60°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	45
30° 0′	.5000	·5774	1·155	2·000	1·732	·8660	0′**60°**
10′	·5025	·5812	1·157	1·990	1.720	·8646	50′
20′	·5050	·5851	1·159	1·980	1·709	·8631	40′
30′	·5075	·5890	1·161	1·970	1·698	·8616	30′
40′	·5100	·5930	1·163	1·961	1·686	·8601	20′
50′	·5125	·5969	1·165	1·951	1·675	·8587	10′
31° 0′	·5150	·6009	1·167	1·942	1·664	·8572	0′**59°**
10′	·5175	·6048	1·169	1·932	1·653	·8557	50′
20′	·5200	·6088	1·171	1·923	1·643	·8542	40′
30′	·5225	·6128	1·173	1·914	1·632	·8526	30′
40′	·5250	·6168	1·175	1·905	1·621	·8511	20′
50′	·5275	·6208	1·177	1·896	1·611	·8496	10′
32° 0′	·5299	·6249	1·179	1·887	1·600	·8480	0′**58°**
10′	·5324	·6289	1·181	1·878	1·590	·8465	50′
20′	·5348	·6330	1·184	1·870	1·580	·8450	40′
30′	·5373	·6371	1·186	1·861	1·570	·8434	30′
40′	·5398	·6412	1·188	1·853	1·560	·8418	20′
50′	·5422	·6453	1·190	1·844	1·550	·8403	10′
33° 0′	·5446	·6494	1·192	1·836	1·540	·8387	0′**57°**
10′	·5471	·6536	1·195	1·828	1·530	·8371	50′
20′	·5495	·6577	1·197	1·820	1·520	·8355	40′
30′	·5519	·6619	1·199	1·812	1·511	·8339	30′
40′	·5544	·6661	1·202	1·804	1·501	·8323	20′
50′	·5568	·6703	1·204	1·796	1·492	·8307	10′
34° 0′	·5592	·6745	1·206	1·788	1·483	·8290	0′**56°**
10′	·5616	·6787	1·209	1·781	1·473	·8274	50′
20′	·5640	·6830	1·211	1·773	1·464	·8258	40′
30′	·5664	·6873	1·213	1·766	1·455	·8241	30′
40′	·5688	·6916	1·216	1·758	1·446	·8225	20′
50′	·5712	·6959	1·218	1·751	1·437	·8208	10′
35° 0′	·5736	·7002	1·221	1.743	1·428	·8192	0′**55°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
35° 0′	·5736	·7002	1·221	1·743	1·428	·8192	0′**55°**
10′	·5760	·7046	1·223	1·736	1·419	·8175	50′
20′	·5783	·7089	1·226	1·729	1·411	·8158	40′
30′	·5807	·7133	1·228	1·722	1·402	·8141	30′
40′	·5831	·7177	1·231	1·715	1·393	·8124	20′
50′	·5854	·7221	1·233	1·708	1·385	·8107	10′
36° 0′	·5878	·7265	1·236	1·701	1·376	·8090	0′**54°**
10′	·5901	·7310	1·239	1·695	1·368	·8073	50′
20′	·5925	·7355	1·241	1·688	1·360	·8056	40′
30′	·5948	·7400	1·244	1·681	1·351	·8039	30′
40′	·5972	·7445	1·247	1·675	1·343	·8021	20′
50′	·5995	·7490	1·249	1·668	1·335	·8004	10′
37° 0′	·6018	·7536	1·252	1·662	1·327	·7986	0′**53°**
10′	·6041	·7581	1·255	1·655	1·319	·7969	50′
20′	·6065	·7627	1·258	1·649	1·311	·7951	40′
30′	·6088	·7673	1·260	1·643	1·303	·7934	30′
40′	·6111	·7720	1·263	1·636	1·295	·7916	20′
50′	·6134	·7766	1·266	1·630	1·288	·7898	10′
38° 0′	·6157	·7813	1·269	1·624	1·280	·7880	0′**52°**
10′	·6180	·7860	1·272	1·618	1·272	·7862	50′
20′	·6202	·7907	1·275	1·612	1·265	·7844	40′
30′	·6225	·7954	1·278	1·606	1·257	·7826	30′
40′	·6248	·8002	1·281	1·601	1·250	·7808	20′
50′	·6271	·8050	1·284	1·595	1·242	·7790	10′
39° 0′	·6293	·8098	1·287	1·589	1·235	·7771	0′**51°**
10′	·6316	·8146	1·290	1·583	1·228	·7753	50′
20′	·6638	·8195	1·293	1·578	1·220	·7735	40′
30′	·6361	·8243	1·296	1·572	1·213	·7716	30′
40′	·6383	·8292	1·299	1·567	1·206	·7698	20′
50′	·6406	·8342	1·302	1·561	1·199	·7679	10′
40° 0′	·6428	·8391	1·305	1·556	1·192	·7660	0′**50°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
40° 0′	·6428	·8391	1·305	1·556	1·192	·7660	0′ 50°
10	·6450	·8441	1·309	1·550	1·185	·7642	50′
20′	·6472	·8491	1·312	1·545	1·178	·7623	40′
30′	·6494	·8541	1·315	1·540	1·171	·7604	30′
40′	·6517	·8591	1·318	1·535	1·164	·7585	20
50′	·6539	·8642	1·322	1·529	1·157	·7566	10′
41° 0′	·6561	·8693	1·325	1·524	1.150	·7547	0′ 49°
10′	·6583	·8744	1·328	1·519	1·144	·7528	50′
20′	·6604	·8796	1·332	1·514	1·137	·7509	40′
30′	·6626	·8847	1·335	1·509	1·130	·7490	30′
40′	·6648	·8899	1·339	1·504	1·124	·7470	20′
50′	·6670	·8952	1·342	1·499	1·117	·7451	10′
42° 0′	·6691	·9004	1·346	1·494	1·111	·7431	0 48°
10′	·6713	·9057	1·349	1·490	1·104	·7412	50′
20′	·6734	·9110	1·353	1·485	1·098	·7392	40′
30′	·6756	·9163	1·356	1·480	1·091	·7373	30′
40′	·6777	·9217	1·360	1·476	1·085	·7353	20′
50′	·6799	·9271	1·364	1·471	1·079	·7333	10′
43° 0′	·6820	·9325	1·367	1·466	1·072	·7314	0′ 47°
10′	·6841	·9380	1·371	1·462	1·066	·7294	50′
20′	·6862	·9435	1·375	1·457	1·060	·7274	40′
30′	·6884	·9490	1·379	1·453	1·054	·7254	30′
40′	·6905	·9545	1·382	1·448	1·048	·7234	20′
50′	·6926	·9601	1·386	1·444	1·042	·7214	10′
44° 0′	·6947	·9657	1·390	1·440	1·036	·7193	0′ 46°
10′	·6967	·9713	1·394	1·435	1·030	·7173	50′
20′	·69[illegible]8	·9770	1·398	1·431	1·024	·7153	40′
30′	·7009	·9827	1·402	1·427	1·018	·7133	30′
40′	·7030	·9884	1·406	1·423	1·012	·7112	20′
50′	·7050	·9942	1·410	1·418	1·006	·7092	10′
45° 0′	·7071	1·000	1·414	1·414	1·000	·7071	0′ 45°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

第四

用法例

第一. 數ノ對數ヲ求ムル法.

例.

$log238{\cdot}4$ ヲ求ム.

$og238{\cdot}0=2{\cdot}3766$ (2頁ニ於テ)

$\quad{\cdot}4 \ldots\ldots\ldots 7{\cdot}2$ (P.P. 18ニ於テ)

$log238{\cdot}4=2{\cdot}3773$

注意　18ハP.P.欄中ニナキヲ以テ19, 17ノ欄ノ4ニ對スル比例部分ノ平均ヲ用フ.

第二. 數ノ對數ヲ知リテ其ノ數ヲ求ムル法.

例.

$log^{-1}\bar{2}{\cdot}7054$ ヲ求ム.

$log^{-1}\bar{2}{\cdot}7050 \;=0{\cdot}0507$ (3頁ニ於テ)

$3{\cdot}6 \ldots\ldots\ldots 0.4$
$0{\cdot}36 \ldots\ldots\ldots 0{\cdot}04$ (P.P. 9ニ於テ)

$log^{-1}\bar{2}{\cdot}7054 \;=0{\cdot}05074$

第三. 角ノ三角函數ノ對數ヲ求ムル法.

例.

1. $logtan28^\circ\ 43'{\cdot}7$ ヲ求ム.

$logtan28^\circ\ 40' \;=\bar{1}{\cdot}7378$ (11頁ニ於テ)

$3' \ldots\ldots\ldots 9$
$0'{\cdot}7 \ldots\ldots\ldots 2{\cdot}1$ (P.P. 30ニ於テ)

$logtan28^\circ\ 43'{\cdot}7=\bar{1}{\cdot}7389$

2. $logsec76^\circ\ 18'{\cdot}7$ ヲ求ム

$logcos76^\circ\ 10' \;=\bar{1}{\cdot}3786$ (8頁ニ於テ)

$8' \ldots\ldots -41{\cdot}6$
$0'{\cdot}7 \ldots\ldots -3{\cdot}64$ (P.P. 52ニ於テ)

$logcos76^\circ\ 18'{\cdot}7=\bar{1}{\cdot}3741$

$logsec76^\circ\ 18'{\cdot}7=0{\cdot}6259$

3. $logsin2^\circ\ 34'{\cdot}6$ ヲ求ム.

$2^\circ\ 34'.6=154'{\cdot}6$

$logsina'=loga+\bar{4}.4637+\frac{1}{3}logcosa'$ (6頁ニ於テ)

$logcos154'{\cdot}6=\underline{\bar{1}\,9996}(3$

$$\left.\begin{array}{r}\bar{1}{\cdot}9999 \\ \bar{4}{\cdot}4637 \\ log154{\cdot}6=2{\cdot}1892\end{array}\right\}+$$

$logsin154'{\cdot}6=\bar{2}{\cdot}6528$

第四. 角ノ三角函數ノ對數ヲ知リテ角ヲ求ムル法.

例.

1. $(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot4995$ ヲ求ム.

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot5031 \quad =72^\circ\ 20'$ (9頁ニ於テ)

$-35\cdot2\ldots\ldots\ldots\ldots8'$ (P.P. 44 ニ於テ)

$-0\cdot88\ldots\ldots\ldots0'\cdot2$

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot4995 \quad =72^\circ\ 28'\cdot2^\circ$

2. $(\log\operatorname{cosec})^{-1}0\cdot2811$ ヲ求ム.

$(\log\operatorname{cosec})^{-1}0\cdot2811=(\log\sin)^{-1}\bar{1}\cdot7189$

$(\log\sin)^{-1}\bar{1}\ 7181=31^\circ\ 30'$ (12頁ニ於テ)

$8\ldots\ldots\ldots4'$ (P.P. 20 ニ於テ)

$(\log\sin)^{-1}\bar{1}\cdot7189=31^\circ\ 34'$

3. $(\log\tan)^{-1}\bar{2}\cdot8882$ ヲ求ム.

$\log a=\log\tan a'-\bar{4}\cdot4637+\frac{2}{3}\log\cos a'$ (6頁ニ於テ)

$\log\cos a'=\bar{1}\cdot9987$

2

$\bar{1}\cdot9974(3$

$\bar{1}\cdot9991$

$\left.\begin{array}{r}\bar{1}\cdot9991\\ -\bar{4}\cdot4637=3\cdot5363\\ \log\tan a'=\bar{2}\cdot8882\end{array}\right\}+$

$\log a=2\cdot4236$

$a'=265'\cdot2$

$(\log\tan)^{-1}\bar{2}\cdot8882=4^\circ25'\cdot2.$

第五. 角ノ三角函數ヲ求ムル法.

例.

$\sin 36^\circ\ 32'\cdot6$ ヲ求ム.

第一法.

$\log\sin 36^\circ\ 30' \quad =\bar{1}\cdot7744$ (13頁ニ於テ)

$2'\ldots\ldots\ldots\ldots3\cdot4$

(P.P. 17 ニ於テ)

$0'\cdot6\ldots\ldots\ldots1\cdot02$

$\log\sin 36^\circ\ 32'\cdot6=\bar{1}\cdot7748$

$\sin 36^\circ\ 32'\cdot6=0\cdot5954$ (3頁ニ於テ)

第二法.

$\sin 36^\circ\ 30' \quad =0\cdot5948$ (23頁ニ於テ)

$2'\cdot6\ldots\ldots\ldots6 \quad \left(24\times\frac{2\cdot6}{10}=6\right)$

$\sin 36^\circ\ 32'\cdot6=0\cdot5954$

第六. 角ノ三角函數ヲ知リテ其ノ角ヲ求ムル法.

例.

$\cot^{-1}0\cdot7463$ ヲ求ム.

第一法.

$$\log 0{\cdot}7463 = \bar{1}{\cdot}8729 \qquad (4\text{頁ニ於テ})$$

$$\therefore\ \cot^{-1}0{\cdot}7463 = (\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8729$$

$$(\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8745 \quad = 53^\circ\ 10' \qquad (13\text{頁ニ於テ})$$

$$-16{\cdot}2 \ldots\ldots 6' \qquad (\text{P.P. } 27\text{ニ於テ})$$

$$(\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8729 \quad = 53^\circ\ 16'$$

第二法.

$$\cot^{-1}0.7490 = 53^\circ\ 10' \qquad (23\text{頁ニ於テ})$$

$$-27 \ldots\ldots 6' \qquad \left(\frac{27}{45} \times 10 = 6\right)$$

$$\cot^{-1}0{\cdot}7463 = 53^\circ\ 16'$$

公式一覧

$$\begin{cases} \sin A \operatorname{cosec} A = 1. \\ \cos A \sec A = 1. \\ \tan A \cot A = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin^2 A + \cos^2 A = 1. \\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A. \\ 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A. \end{cases}$$

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$
$\sin A = x$	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$
$\cos A = x$	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan A = x$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
$\cot A = x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$
$\sec A = x$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{cosec} A = x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x

	$-A$	$90^\circ - A$	$90^\circ + A$	$180^\circ - A$	$180^\circ + A$	$n.360^\circ \pm A$
sin	$-\sin A$	$\cos A$	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$\pm \sin A$
cos	$\cos A$	$\sin A$	$-\sin A$	$-\cos A$	$-\cos A$	$\cos A$
tan	$-\tan A$	$\cot A$	$-\cot A$	$-\tan A$	$\tan A$	$\pm \tan A$
cot	$-\cot A$	$\tan A$	$-\tan A$	$-\cot A$	$\cot A$	$\pm \cot A$
sec	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$	$-\operatorname{cosec} A$	$-\sec A$	$-\sec A$	$\sec A$
cosec	$-\operatorname{cosec} A$	$\sec A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$	$-\operatorname{cosec} A$	$\pm \operatorname{cosec} A$

$$\begin{cases} \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B. \\ \tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\ \cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B \\ \qquad = \cos^2 B - \cos^2 A. \\ \cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ \qquad = \cos^2 B - \sin^2 A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta+\gamma) = \Sigma \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma - \Pi \sin\alpha. \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma) = \Pi \cos\alpha - \Sigma \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma. \\ \tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\Sigma \tan\alpha - \Pi \tan\alpha}{1 - \Sigma \tan\alpha \tan\beta}. \\ \cot(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\Pi \cot\alpha - \Sigma \cot\alpha}{\Sigma \cot\alpha \cot\beta - 1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B). \\ 2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B). \\ 2\cos A \cos B = cas(A+B) + \cos(A-B). \\ 2\sin A \sin B = -\cos(A+B) + \cos(A-B). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin C + \sin D = 2si\ldots \\ \sin C - \sin D = 2co\ldots \\ \cos C + \cos D = 2co\ldots \\ \cos C - \cos D = -2\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2A = \ldots \\ \quad = \ldots \\ \cos 2A = \ldots \\ \quad = \ldots \\ \quad = \ldots \\ \quad = \ldots \\ \tan 2A = \ldots \\ \cot 2A = \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 A = \ldots \\ \cos^2 A = \ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B \\ \cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B. \\ \tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B} \\ \cot(A\pm B)=\dfrac{\cot A\cot B\mp 1}{\cot B\pm\cot A} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B \\ \qquad =\cos^2B-\cos^2A. \\ \cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B \\ \qquad =\cos^2B-\sin^2A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta+\gamma)=\Sigma\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma-\Pi\sin\alpha. \\ \cos(\alpha+\beta+\gamma)=\Pi\cos\alpha-\Sigma\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma. \\ \tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\Sigma\tan\alpha-\Pi\tan\alpha}{1-\Sigma\tan\alpha\tan\beta}. \\ \cot(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\Pi\cot\alpha-\Sigma\cot\alpha}{\Sigma\cot\alpha\cot\beta-1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B). \\ 2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B). \\ 2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B). \\ 2\sin A\sin B=-\cos(A+B)+\cos(A-B). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin C+\sin D=2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}. \\ \sin C-\sin D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}. \\ \cos C+\cos D=2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}. \\ \cos C-\cos D=-2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2A=2\sin A\cos A \\ \qquad =\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2A}. \\ \cos 2A=\cos^2A-\sin^2A \\ \qquad =2\cos^2A-1 \\ \qquad =1-2\sin^2A \\ \qquad =\dfrac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}. \\ \tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2A}. \\ \cot 2A=\dfrac{\cot^2A-1}{2\cot A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2A=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2A). \\ \cos^2A=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2A). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}. \\ \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}. \\ \tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}. \\ \cot\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A} \\ \qquad =\dfrac{1-\cos A}{\sin A}. \\ \cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{1+\cos A}{\sin A} \\ \qquad =\dfrac{\sin A}{1-\cos A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3A=3\sin A-4\sin^3A. \\ \cos 3A=4\cos^3A-3\cos A. \\ \tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}. \\ \cot 3A=\dfrac{3\cot A-\cot^3A}{1-3\cot^2A}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^3A=\dfrac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A). \\ \cos^3A=\dfrac{1}{4}(3\cos A+\cos 3A). \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B. \\ b=c\cos A+a\cos C. \\ c=a\cos B+b\cos A. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B. \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}. \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S=\dfrac{1}{2}bc\sin A \\ \quad =\dfrac{1}{2}ca\sin B \\ \quad =\dfrac{1}{2}ab\sin C \\ \quad =\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r=\dfrac{S}{p}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \\ r'=\dfrac{S}{p-a}. \\ r''=\dfrac{S}{p-b}. \\ r'''=\dfrac{S}{p-c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a}. \\ \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{p-b}. \\ \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{r}{p-c}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b-c}=\dfrac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}. \\ \dfrac{a}{b+c}=\dfrac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}. \\ \dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Sin}^{-1}a=n\pi+(-1)^n\sin^{-1}a. \\ \mathrm{Cos}^{-1}a=2n\pi\pm\cos^{-1}a. \\ \mathrm{Tan}^{-1}a=n\pi+\tan^{-1}a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Sin}^{-1}1 \quad =(4n+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{Sin}^{-1}(-1)=(4n-1)\dfrac{\pi}{2}. \\ \mathrm{Cos}^{-1}0 \quad =(2n+1)\dfrac{\pi}{2}. \\ \mathrm{Cos}^{-1}(-1)=(2n+1)\pi. \end{cases}$$

文部省検定濟

大正四年十一月廿六日　中學校數學科教科書

賣切等にて課業に御差支の際は直接御注文被下候はゞ直に御送附可致候
本館發行の教科書は常に多數の製本準備有之候につき萬一各地賣捌所に

所有
著作權

印刷者　四海民藏
東京市神田區裏神保町六番地

發行所　光風館書店
東京市神田區裏神保町六番地
（振替口座東京三一一七番）
（電話本局二〇三九番）

發行者　上原才一郎
東京市神田區裏神保町六番地

著作者　遠藤又藏
東京市牛込區矢來町八番地

大正四年十月十五日訂正廿三版發行
大正四年十月十二日訂正廿三版印刷
明治四十二年十二月十五日訂正二十版發行
明治四十一年九月廿三日訂正十九版發行
明治三十三年十一月十六日發行
明治三十三年十一月十五日印刷
明治四十三年三月十三日訂正廿一版發行
明治四十三年三月九日訂正廿一版印刷
明治四十四年十二月廿五日訂正廿二版發行
明治四十四年十二月廿三日訂正廿二版印刷

臨時定價 大正六年度 金五拾六錢 六拾錢
定價金五拾二錢

平面三角法教科書

東京秀英舍工場印刷