NEW

GEOMETRY

T. TAKAGI.

TOKYO KAISEIKAN COMPANY

文部省檢定濟
大正四年一月十八日　中學校數學科用

新　式

幾何教科書

〔平　面〕

東京帝國大學教授
理學博士
高木貞治
著

東京開成館藏版

修正改版例言

本書編纂の趣意は第一版例言に詳なり。

今回の改版に於て修正したる要點は次の如し。

一　全編を通じて,説明は平易にして簡要を得るを期し,特に最初の部分にありては,嚴密なる論證の方法を避け,直覺的に圖形の性質を會得せしむることを務めたり。

二　練習問題の選擇は最愼重を盡し,特に補習問題に於ては,初版編纂の際混入せる不適當なる者を淘汰し,且

つ問題の言明と排列の順序との裡より,自ら解法の暗示を得べきやうに仕組みて,一層補習の目的に適切ならしめんことを期したり。

大正三年十二月　著者

例言

本書は中學校の教科用として編纂したるものにして,材料の選擇及び排置は,明治四十四年改定の教授要目に準據したり。題して平面幾何といふと雖も,從來算術にて授けたる求積の計算を包括す。

中等學科に於ける數學,特に幾何學の教授は二重の目的を有す,卽ち幾何學上の知識を授くると共に,演繹推理の訓練を與ふべきものなり。而も從來稍前者を犧牲として後者を偏重し過ぎたるかの觀あり。此弊を矯めんことは編者の力を致したる所なり。

本書の內容に於て別に奇を弄し異を樹つる所なしと雖も,一二特に注意を請ふべき點を擧ぐれば,次の如し。

一　第一篇,第二篇は直線圖形及び圓の性質を論ず。此部分に於ては,特に嚴密なる推理に練れしむることを主としたり。

又第二篇に於て,先づ圓と直線及び二つの圓の位置の關係を說きて,直に作圖題に連續せり。是れ第一篇と作圖題とを成るべく近接せしめんが爲に外ならず。

二　第三篇は面積及び比例を論ず。長さ,面積又は其比を,其數値を離れて直に之を一つの量として取扱ふこと,多年の因習なるが如しと雖も,此方法は中等敎育に於て決して完全に遂行せらるべきものに非ざるが故に,實際の敎授は皮相的となり,徒に生徒の思想を混亂せしむるに終るべく,且つ算術及代數と幾何學との連絡を斷ち,數學科の統一的敎授の趣意に違背せるものなり。

是故に本書に於ては長さ,面積及び比の數値を用ふることに躊躇せず,通約すべからざる量の比は,無限小數を用ひて之を表はし生徒の常識に訴へて,理會を確實ならしむることを期せり。

圓周及び圓の面積の計算に於ても極限の概念

の淺薄なる說明を避け,專ら常識を基礎となしたり。

三　卷末に附錄として補習問題集を添ふ。其中一,二には本文に關聯せる練習問題を補充するの用に供すべきものを集め,又三には調和列點,及び圖形の對稱相似等に關するものを秩序的に排列して補習の用に供せり。

又別に定理の關係に關する簡單なる說明を載せ參考の資とせり。

明治四十四年十月

著　者

目　次

定理及作圖題索引

記號

∠ 角	△ 三角形	▭ 矩形
⊥ 垂直		∥ 平行
≡ 合同		∽ 相似

平面幾何學

緒論

1. 立體。面。線。點。

凡テ物體ハ**空間**ノ一部分ヲ占有ス。物體ノ物質上ノ性質ヲ離レテ,單ニ其占有スル空間ノ一部分ノ形狀,大小,位置ノミヲ考フルトキハ,之ヲ**立體**トイフ。

立體ノ境界ヲ**面**トス。

面又ハ面ノ一部分ヲ限ル境界(卽チ其邊端)ヲ**線**トス。

線又ハ線ノ一部分ヲ限ル境界(卽チ其端)ヲ**點**トス。

面ニハ廣サアレドモ,厚サナシ。線ニハ長サアレドモ,廣サ厚サナシ。點ハ全ク形狀,大小ヲ有セズ,唯位置アルノミ。

運動スル點ノ通過セル跡ハ線,運動スル線ノ掃過セル跡ハ面,運動スル面ノ掃過セル跡ハ立體ナリ。

立體,面,線,點又ハ其集リヲ**圖形**トイフ。

公理。圖形ハ其形及ビ大サヲ變ゼズシテ,其位置ヲ變ズルコトヲ得。

2. 直線。

線ノ中最モ簡單ナルヲ**直線**トス。緊張シタル細キ絲ハ直線ノ形狀ヲナス。

公理。二ツノ定點ヲ通リ一ツノ直線ヲ引クコトヲ得,而モ唯一ツニ限ル。

卽チ二ツノ點ヲ共有スル直線ハ全ク相一致スベシ。故ニ直線ハ其何レノ部分ヲ如何ヤウニ他ノ部分ノ上ニ重ヌルトモ全ク重ナリ合フ線ナリト言フコトヲ得。

又同一ノ點ヲ通ル直線ハ全ク相一致セザル限リ,再ビ他ノ點ニ於テ出會フコトナシ。

カヤウノ直線ハ共通ノ點ニ於テ**相交ハル**トイフ。

直線ハ二ツノ向キニ限リナク**延長**スルコトヲ得。

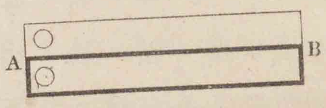
又方ニ限界ナキ直線ノ全體ト,兩端ヲ限界トセル直線ノ一部分トノ區別ヲ明ニスル必要アルトキハ,前者ヲ**無限直線**,後者ヲ**有限直線**又ハ**線分**トイフ。

二ツノ點ヲ兩端トスル直線ヲ引クコトヲ此等ノ點ヲ**結ビ付ク**トイフ。

二點間ノ**距離**トハ卽チ之ヲ結ビ付クル直線ノ長サヲ言フナリ。

二ツ以上ノ直線ガ連續シテ作レル線ヲ**折線**又ハ**屈折線**トイヒ,イヅレノ部分モ直線ニアラザル線ヲ**曲線**トイフ。

【注意】 直線ヲ書クニハ定木ヲ用フ。定木ノ正否ヲ驗スニハ,先ヅ定木ヲ用ヒテ紙上ニ直線ABヲ引キ,次ニ定木ヲ裏返シテ其邊端ガ前ニ書ケル直線ABト全ク一致スルカ否カヲ檢スベシ。



3. 平面。

面ノ中最モ簡單ナルヲ**平面**トス。靜止セル水面,善ク削ラレタル板ノ面ナドハ平面ノ形狀ヲナス。

平面上ノ二點ヲ通ル直線ハ全ク此平面上ニアリ。

一ツノ平面ノ上ニアル線及ビ點ヨリ成レル圖形ヲ**平面圖形**トイフ。

平面圖形ハ其ママ,或ハ裏返シテ,之ヲ他ノ平面上ニ重ヌルコトヲ得。而モ圖形ニ屬スル任意ノ直線ヲシテ平面上ノ任意ノ直線ニ重ナラシムルコトヲ得。

折線及ビ曲線ハ必ズシモ平面圖形ニアラズ。全ク一ツノ平面上ニアル曲線ヲ**平面曲線**トイフ。

4. 幾何學。

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ論ズル數學ノ一分科ニシテ,專ラ平面圖形ヲ論ズルヲ**平面幾何學**トイヒ,空間ニ於ケル圖形ヲ論ズルヲ**立體幾何學**トイフ。

幾何學ニ於ケル講究ノ方法ハ圖形ヲ觀察シテ其性質ヲ推測スルニハアラズ,經驗又ハ觀察ニヨリテ眞正ト認メラレタル少數ノ簡單ナル原則卽チ**公理**ヲ基礎トシ,專ラ推理ニヨリテ他ノ事項ノ

眞正ナルコトヲ斷定スルナリ,之ヲ**證明**トイフ。

證明スベキ事項ヲ言ヒ表ハセル命題ヲ**定理**トイヒ,一ツノ定理ヨリ直ニ推知シ得ベキ命題ヲ其**系**トイフ。

幾何學ノ學習ハ啻ニ重要ナル知識ヲ獲得スルニ止マラズ,精確ナル推理ノ練習トシテ教育上最モ尊重セラルルモノナリ。

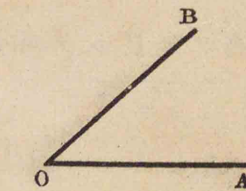
第一篇

直線圖形

第一章 角 平行線

5. 角。

同一ノ點ヨリ出ヅル二ツノ直線ハ**角**ヲ作ル。此點ヲ角ノ**頂點**トイヒ,二ツノ直線ヲ**角ノ邊**トイフ。



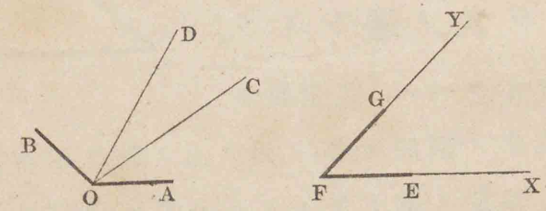
角ヲ示スニハ,其頂點ヲ示ス文字ノ兩側ニ各〻ノ邊ノ上ノ點ヲ示ス文字ヲ書ク。誤解ノ虞ナキトキニハ,單ニ頂點ヲ示ス文字ノミヲ用ヒテ角ヲ示スコトヲ得。例ヘバ圖ニ示セル角ヲ角 AOB (∠AOB) 又ハ單ニ角 O (∠O) ト書ク。

角 AOB ノ頂點 O ヨリ出ヅル直線ガ初メ OA ノ

位置ニアリ,ソレヨリ此平面上ニ於テ,Oヲ中心トシテ同ジ向キニ廻轉シ,終ニOBノ位置ニ至リテ止マリタリト考フルトキハ,此直線ハ角AOBダケ廻轉セリトイヒ,直線ガ廻轉セル際ニ掃過セル平面ノ部分ヲ此**角ノ内部**トイフ。

角ノ**大小**ハ卽チ此廻轉ノ分量ノ大小ヲ言フモノナリ。

故ニ邊ノ長サハ少シモ角ノ大サニ關係ナシ,卽チ邊ヲ延長シテモ角ノ大サハ變ハラズ。

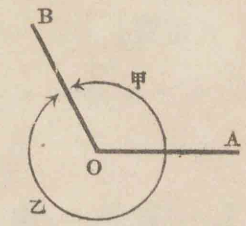


例ヘバ圖ニ於テ∠AOBハ∠CODヨリモ大キク,又∠EFGト∠XFYトハ同一ノ角ナリ。

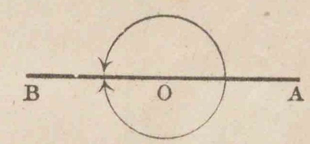
6. 共軛角。平角

點Oヨリ出ヅル直線ガOAノ位置ヨリOBノ

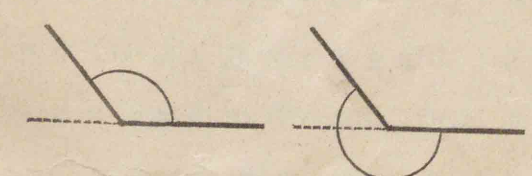
位置マデ廻轉スル向キハ甲,乙二通リアリ。故ニ同一ノ點ヨリ出ヅル二ツノ直線ハ甲,乙二ツノ角ヲ作ル。此二ツノ角ヲ**共軛角**トイフ。



角Oノ一邊OBガ他ノ一邊OAノ延長ナルトキ,卽チAOBガ一直線ヲナストキハ,此角ヲ**平角**トイフ。平角ノ共軛角モ亦平角ナリ。



OA, OBノ作レル角ガ平角ニアラザルトキハ,二ツノ共軛角ノ中一ツハ其邊ノ延長ヲ内部ニ含マズ,從テ平角ヨリモ小ナリ。之ヲ**劣角**トイフ。



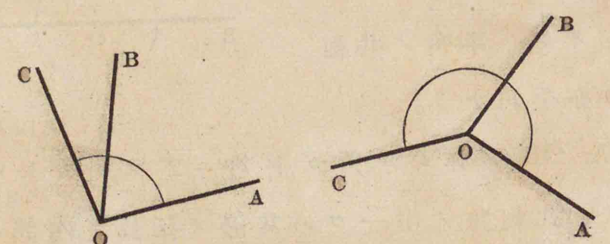
又一ツハ其邊ノ延長ヲ内部ニ含ム,從テ平角ヨリ

モ大ナリ。之ヲ優角トイフ。

【注意】 是ヨリ後,單ニ角トアルハ,劣角ヲ指スモノト知ルベシ。

7. 接角。角ノ和。

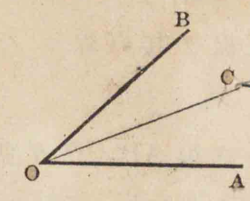
定義。 頂點及ビ一邊ヲ共有シ,共通ノ邊ノ兩側ニアル二ツノ角ヲ**接角**又ハ**隣角**トイフ。



圖ニ於テ ∠AOB, ∠BOC ハ接角ナリ。此場合ニ二ツノ角ニ共通ナラザル邊 OA, OC ノ作ル二ツノ共軛角 AOC ノ中,OB ヲ内部ニ含メルモノガ二ツノ角 AOB, BOC ノ和ナリ。

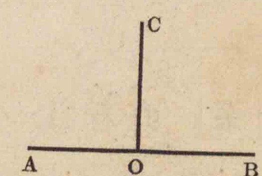
$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

角 AOB ノ頂點 O ヲ通リ此角ヲ二ツノ相等シキ接角 AOC, COB ニ分ツ直線 OC ヲ角 AOB ノ二等分線トイフ。



8. 直角。

定義。 直線 AB ノ上ノ點 O ヨリ直線 OC ヲ引クトキ,接角 AOC, BOC ガ相等シキトキハ,此等ノ角ヲ**直角**トイフ。故ニ



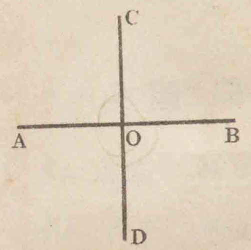
直角トハ其一邊ヲ延長スルトキニ生ズル接角ニ等シキ角ニシテ,卽チ平角ノ半分ニ等シ。

定理一 凡テ直角ハ相等シ。

【證】 凡テ平角ハ全ク重ネ合ハセ得ベキガ故ニ相等シ。直角ハ平角ノ半分ナルガ故ニ相等シ。

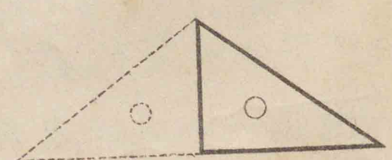
定義。一ツノ直線ト交ハリテ之ト直角ヲ作ル直線ヲ其直線ヘノ**垂線**トイヒ、交點ヲ**垂線ノ足**トイフ。

直線AB, CDガ點Oニ於テ相交ハルトキ、∠AOCガ直角ナルトキハ、CDハABヘノ垂線ニシテ、ABハCDヘノ垂線ナリ。故ニAB, CDハ**互ニ垂直**(AB⊥CD)ナリトイフ。



[系] 直線上ノ一點ニ於テ之ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

【注意】 製圖ニ於テ直角ヲ作リ、又ハ垂線ヲ引クニハ**三角定木**ヲ用フ。(三角定木ノ正否ヲ驗ス方法如何)。

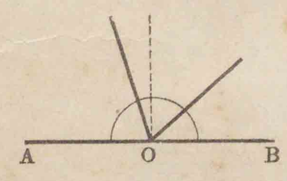


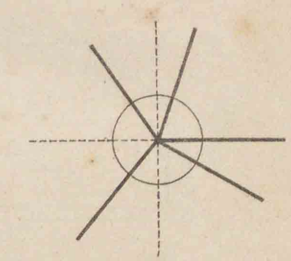
定義。直角ヨリモ小ナル角ヲ**鋭角**トイヒ、直角

ヨリモ大キク、平角ヨリモ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。

9. 角ノ單位

直角ハ一定ノ大サノ角ナルガ故ニ、之ヲ單位トシテ角ヲ計ルコトヲ得。例ヘバ平角ハ二直角ニ等シク、共軛角ノ和ハ四直角ニ等シ。





直線ABノ上ノ一點Oヨリ此直線ノ同ジ側ニ幾ツカノ直線ヲ引クトキハ、平角AOBハ幾ツカノ角ニ分タルベシ。此等ノ角ノ和ハ二直角ニ等シ。

又一ツノ點ヨリ幾ツカノ直線ヲ引クトキハ、次次ノ直線ノ作ル角ノ總和ハ四直角ニ等シ。

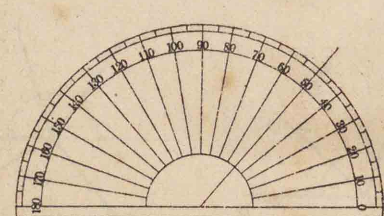
直角ハ角ノ單位トシテハ大キ過グルニヨリ、實用上ニハ**度**、**分**、**秒**ヲ角ノ單位トス。一度ハ直角ノ

九十分ノ一,一分ハ一度ノ六十分ノ一,一秒ハ一分ノ六十分ノ一ナリ。

例ヘバ二直角ハ180度,四直角ハ360度ナリ。

度,分,秒ヲ示スニハ記號°′″ヲ用ヒ,例ヘバ57度26分30秒ヲ57° 26′ 30″ト書ク。

【注意】 實用上角度ヲ計ルニハ**分度器**ヲ用フ。



問 題

1. 次ノ角度ヲ直角ヲ單位トシテ示セ。

30° 60° 45° 135° 67°30′

2. $\frac{4}{5}$直角ハ幾度ナルカ。 72°

3. 正午ヨリ午後一時半マデニ時計ノ分針ガ廻轉スル角度幾許ナルカ。

10. 補角。

定義。 二ツノ角ノ和ガ二直角ニ等シキトキハ,此等ノ角ヲ互ニ補角トイフ。

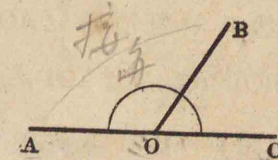
直線上ノ一點ヨリ一ツノ直線ヲ引クトキニ出來ル二ツノ接角ハ互ニ補角ヲナス。

相等シキ角ノ補角ハ相等シ。

定理二 互ニ補角ヲナス二ツノ接角ニ共通ナラザル二ツノ邊ハ一直線ヲナス。

【說明】 接角 AOB, BOC ガ互ニ補角ヲナストセヨ。

然ラバ邊 OA, OC ハ一直線ヲナスベシ。



【證】 ∠AOB, ∠BOC ハ互ニ補角ナルガ故ニ,其和ハ二直角ニ等シ。

サテ接角 ∠AOB, ∠BOC ノ和ハ ∠AOC ニ等シ。

故ニ ∠AOC ハ二直角ニ等シク,卽チ平角ナリ。

故ニ共邊 OA, OC ハ一直線ヲナス。

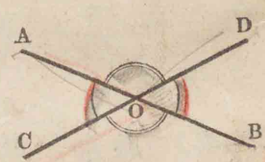
11. 對頂角。

定義。 相交ハル二直線ノナス四ツノ角ノ中,相接セザル二ツヲ**對頂角**トイフ。

即チ相交ハル二直線ハ二組ノ對頂角ヲ作ル。

$\boxed{\textbf{定理三}}$ 對頂角ハ相等シ。

【說明】 二直線 AB, CD ガ點 O ニ於テ相交ハルトセヨ。



然ラバ對頂角 ∠AOC, ∠BOD (又ハ ∠AOD, ∠BOC) ハ相等シカルベシ。

【證】 AOB ハ直線ナルガ故ニ, ∠AOC ハ ∠BOC ノ補角ナリ。又 COD ハ直線ナルガ故ニ, ∠BOD ハ ∠BOC ノ補角ナリ。

即チ對頂角 ∠AOC, ∠BOD ハ同一ノ角 ∠BOC ノ補角ナリ。故ニ相等シ。

同ジヤウニ對頂角 ∠AOD, ∠BOC ハ相等シ。

問　　題

1. 角ノ二等分線ノ延長ハ其對頂角及ビ共輭角ヲ二等分ス。

2. 直線 AB ノ上ノ一點 O ヨリ此直線ノ兩側ニ直線 OC, OD ヲ引クトキ, ∠AOC, ∠BOD ガ相等シキトキハ, OC, OD ハ一直線ヲナス。

3. 二ツノ接角ノ二等分線ノ作ル角ハ此等ノ接角ノ和ノ半分ニ等シ。

4. 互ニ補角ヲナス二ツノ接角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

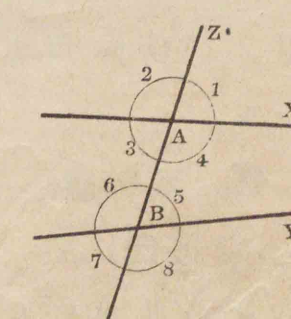
12. 同位角。錯角。同傍角。

二ツノ直線 X, Y ガ第三ノ直線 Z トソレゾレ A, B ニテ交ハルトキハ, A 及ビ B ニ於テ各四ツノ角ヲ生ズ。此等ノ八ツノ角ノ中

1, 2, 7, 8 ヲ**外角**

3, 4, 5, 6 ヲ**内角**

トイフ。



A ニ於ケル外角(又ハ内角)ト B ニ於ケル内角(又ハ

外角)トノ中,直線 Z ノ同ジ側ニアルモノヲ**同位角**トイフ。

1,5　2,6　3,7　4,8

ハ即チ是ナリ。

A 及ビ B ニ於ケル内角ノ中,直線 Z ニ對シテ反對ノ側ニアルモノヲ**錯角**(内錯角)トイフ。3,5 及ビ 4,6 ハ即チ是ナリ。

又 A 及ビ B ニ於ケル内角ノ中,直線 Z ニ對シテ同ジ側ニアルモノヲ**同傍内角**トイフ。3,6 及ビ 4,5 ハ即チ是ナリ。

四組ノ同位角ノ中,一組ガ相等シキトキハ,同位角ハ各組トモ相等シク,錯角ハ相等シク,同傍内角ハ補角ヲナス。

一組ノ錯角ガ相等シキトキ,又ハ一組ノ同傍内角ガ補角ヲナストキモ亦同ジ。

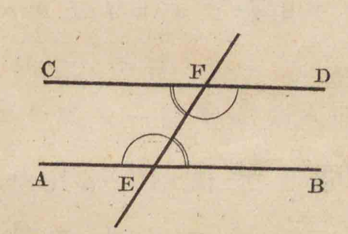
13. 平行線。

定理四 二ツノ直線ガ他ノ一直線ト交ハリテ作レル錯角カ相等シキトキハ,此等ノ直線ハ如何程延長スルトモ,決シテ出會フコトナシ。

【説明】 二ツノ直線 AB, CD ガ第三ノ直線ト E 及ビ F ニ於テ交ハルトキ

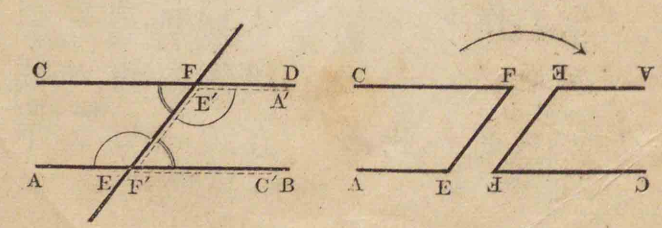
$$\angle FEA = \angle EFD$$

從テ又 $\angle FEB = \angle EFC$ トセヨ。



然ラバ直線 AB, CD ヲ双方ヘ如何程延長スルトモ,決シテ同一ノ點ヲ通ルコトナカルベシ。

【證】 圖形 AEFC ヲ廻轉セシメ,之ヲ A'E'F'C' ノ如ク圖形 DFEB ノ上ニ置ケ。



然ラバ E'F' ハ FE ニ重ナリ,且錯角ノ相等シキガタメニ E'A' ハ FD ニ重ナリ, F'C' ハ EB ニ重ナル。即チ二ツノ圖形ハ全ク相重ナル。

カヤウニ,圖形 AEFC ハ全ク DFEB ニ重ネ得ベキガ故ニ,假ニ EB, FD ノ延長ガ或點ニテ出會フトスレバ FC, EA モ亦或點ニテ出會フベシ。即チ二ツノ直線 AB, CD ヲ双方ニ延長スルトキニ二ツノ點ニ於テ出會フコトトナルベシ。是レ不合理ナリ。

故ニ AB, CD ハ決シテ同一ノ點ヲ通ルコトナシ。

定義。同一平面上ニアル二直線ヲ如何ヤウニ延長スルトモ決シテ出會ハザルトキハ,此等ノ直線ハ互ニ平行ナリトイフ。

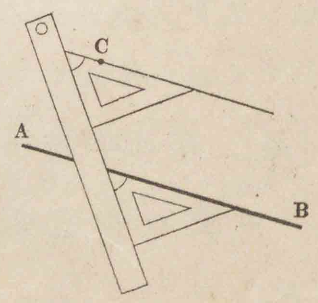
系一 二ツノ直線ガ他ノ一直線ト交ハリテ作レル一組ノ同位角ガ相等シキトキ,又ハ一組ノ同傍内角ガ補角ヲナストキハ,此等ノ直線ハ互ニ平行ナリ。

系二 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

系三 直線外ノ一點ヨリ此直線ヘ一ツヨリ多クノ垂線ヲ引クコトヲ得ズ。

系四 直線外ノ一點ヨリ此直線ニ一ツノ平行線ヲ引クコトヲ得。

【注意】 定木ト三角定木トヲ用ヒテ,點 C ヲ通リ直線 AB ニ平行ナル直線ヲ引クコトヲ得。

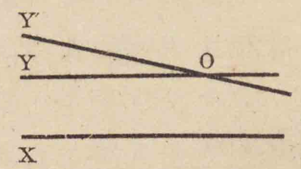


14. 平行線ノ公理。

公理。一ツノ點ヲ通リ,一ツノ直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

定理五 同ジ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

【說明】 直線Y, Y'ハイヅレモ直線Xニ平行ナリトセヨ。然ラバY, Y'ハ互ニ平行ナルベシ。



【證】 假ニY, Y'ガ點Oニテ出會フトセヨ。

然ラバ點Oヲ通リ直線Xニ平行ナル直線ガ二ツアルコトトナリ,上ノ公理ニ反ス。

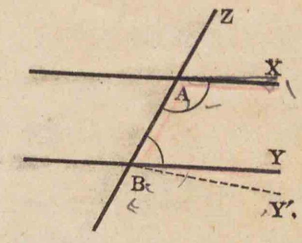
故ニY, Y'ハ決シテ同一ノ點ヲ通ラズ,卽チ互ニ平行ナリ。

系 互ニ平行ナル二ツノ直線ノ中,一ツニ交ハル直線ハ他ノ一ツニモ交ハル。

定理六 互ニ平行ナル二ツノ直線ガ他ノ一直線ト交ハリテ作ル同傍內角ハ補角ヲナシ,同位角ハ相等シク,錯

角ハ相等シ。

【說明】 互ニ平行ナル直線X, Yガ直線ZトソレゾレA, Bニテ交ハルトセヨ。然ラバ同傍內角$\angle XAB$, $\angle YBA$ハ補角ヲナスベシ。



【證】 Bヨリ直線Zニ對シテAXト同ジ側ニ$\angle ABY'$ガ$\angle BAX$ノ補角ニ等シクナルヤウニ直線BY'ヲ作レ。 然ラバ,BY'ハAXニ平行ナリ(定理四,系一)。

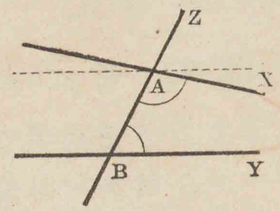
サテBヲ通リAXニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ルガ故ニ,BY'ハBYト一致ス。

故ニ$\angle ABY'$, $\angle ABY$ハ相等シク,從テ$\angle ABY$ハ$\angle BAX$ノ補角ナリ。

【注意】 二直線X, Yガ直線ZトソレゾレA, Bニテ交ハリテ作レル同傍內角ガ補角ヲナサザルトキハ,X, Yハ必ズ或點ニテ出會フ。

サテ二組ノ同傍內角ノ中,一組ハ其和二直角ヨリ小ニシテ,又一組ハ二直角ヨリ大ナリ。而

シテX,Yノ出會フ點ハ直線Zニ對シテ,和ガ二直角ヨリ小ナル同傍內角ノアル側ニアリ。



問題

1. 互ニ平行ナル二直線ノ一ツニ垂直ナル直線ハ他ノ一ツニモ垂直ナリ。

2. 相交ハル二直線ニソレゾレ垂直ナル二直線ハ相交ハル。

3. 互ニ平行ナル二直線ガ互ニ平行ナル他ノ二直線ト交ハリテ作ル鋭角ハ皆相等シク,鈍角モ皆相等シ。其鈍角ト鋭角トハ補角ヲナス。

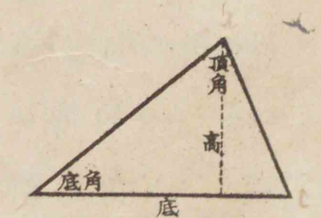
4. 邊ガソレゾレ互ニ平行ナル二ツノ角ハ相等シキカ,又ハ補角ヲナス。此二ツノ角ノ二等分線ハ前ノ場合ニハ互ニ平行ナルカ,又ハ相一致シ,後ノ場合ニハ互ニ垂直ナリ。

第二章　三角形

15. 定義。

同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ二ツヅツ結ビ付クル三ツノ直線(線分)ヲ引クトキハ,一ツノ三角形ヲ生ズ。其三ツノ點ヲ三角形ノ**頂點**トイヒ,三ツノ直線ヲ**邊**トイフ。各頂點ヨリ出ヅル二ツノ邊ノ作ル角ヲ三角形ノ**角**(又ハ**內角**)トイヒ,又一ツノ邊ト他ノ一ツノ邊ノ延長トノ作ル角ヲ三角形ノ**外角**トイフ。

三角形ノ三ツノ邊ハ平面ノ一部分ヲ圍メリ。之ヲ三角形ノ**內部**トイフ。

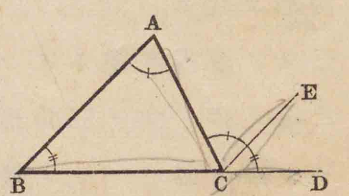


三角形ヲ其任意ノ一邊ノ上ニ立テルモノト見做シ,其邊ヲ**底邊**,之ニ對スル角ヲ**頂角**,底邊ニ接スル二ツノ角ヲ**底角**トイフ。頂角ノ頂點ヨリ底邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ三角形ノ**高サ**トイフ。

16. 三角形ノ內角ノ和。

定理七 三角形ノ內角ノ和ハ二直角ニ等シ。

【證】 三角形 ABC ノ一邊 BC ヲ延長シテ作レル外角 ACD ノ內部ニ於テ, C ヨリ BA ニ平行ニ CE ヲ引ケ。



然ラバ錯角 ∠A, ∠ACE ハ相等シク,同位角 ∠B, ∠ECD ハ相等シ(定理六)。

故ニ三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ

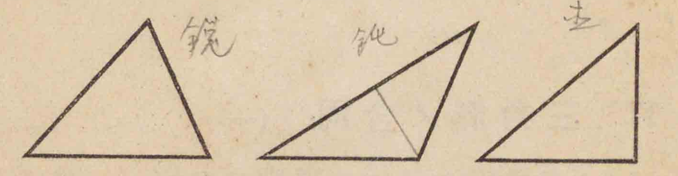
∠BCA, ∠ACE, ∠ECD

ノ和ニ等シ,從テ二直角ニ等シ。

系 三角形ノ外角ハ,之ニ接セザル二ツノ內角(內對角)ノ和ニ等シ,從テ其イヅレヨリモ大ナリ。

定義。三角形ノ三ツノ內角ノ中,少クトモ二ツハ必ズ銳角ナルヲ要ス。三ツノ角ガイヅレモ銳角ナル三角形ヲ**銳角三角形**トイヒ,一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ。

一ツノ角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ。



【注意】 二ツノ角ノ和ガ直角ニ等シキトキハ,此等ノ角ヲ互ニ**餘角**トイフ。

直角三角形ノ二ツノ銳角ハ互ニ餘角ヲナス。

問 題

1. 直角三角形ニ於テ,一ツノ銳角ガ他ノ銳角ノ半分ニ等シキトキハ,各角ノ大サ幾許ナルカ。

2. 一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ニ等シキ三角形ハ直角三角形ナリ。一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ヨリモ大ナル三角形ハ鈍角三角形ナリ。

一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ヨリモ小ナルト

キハ如何。

3. 三角形 ABC ノ角 A ノ二等分線ガ邊 BC ト交ハル點ヲ D トスルトキ, $\angle B$ ガ $\angle C$ ヨリ大ナルトキハ, $\angle ADB$ ガ鋭角, $\angle ADC$ ガ鈍角ナリ。又 $\angle B$, $\angle C$ ガ相等シキトキハ, AD ハ BC ニ垂直ナリ。

17. 三角形ノ合同。(一)

一ツノ三角形ノ三ツノ頂點ヲソレゾレ他ノ三角形ノ三ツノ頂點ト重ネ合ハセ得ベキトキハ,三ツノ邊モ亦ソレゾレ相重ナリ(第2節公理),二ツノ三角形ハ全ク相重ナル。カヤウノ三角形ハ**全ク相等シ**トイフ。

全ク相等シキ二ツノ三角形ニ於テ,三ツノ角,三ツノ邊ハソレゾレ相等シク,相等シキ邊ハ相等シキ角ニ對ス。

定理八 二邊ト其夾角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

【説明】* $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

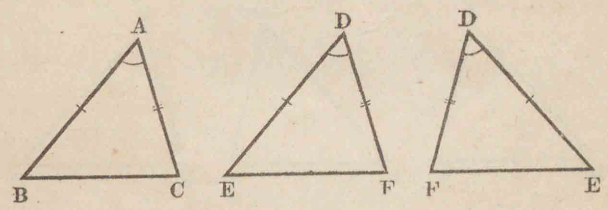
$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A=\angle D$$

トセヨ。

然ラバ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ハ全ク相等シク

$$(\triangle ABC\equiv\triangle DEF)$$

$$BC=EF,\quad \angle B=\angle E,\quad \angle C=\angle F$$



【證】 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ置キ,角 D ヲ之ニ等シキ角 A ニ重ネ,其邊 DE, DF ヲソレゾレ之ニ等シキ邊 AB, AC ニ重ナラシムルコトヲ得。然ラバ頂點 D, E, F ハソレゾレ頂點 A, B, C ニ合ス。

故ニ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

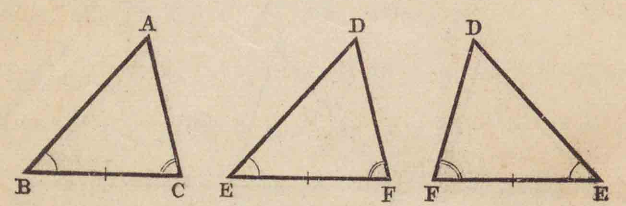
從テ $BC=EF,\quad \angle B=\angle E,\quad \angle C=\angle F$

* △ハ三角形ノ記號, ≡ハ全ク相等シキコトノ記號ナリ。

18. 三角形ノ合同。(二)

定理九 一ツノ邊ト之ニ接スル二ツノ角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

【說明】 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ



$$BC=EF,\quad \angle B=\angle E,\quad \angle C=\angle F$$

トセヨ。

然ラバ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A=\angle D$$

ナルベシ

【證】 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ置キ,邊 EF ヲ之ニ等シキ邊 BC ニ(E ヲ B ニ, F ヲ C ニ)重ネ, A, D ガ直線 BC ノ同ジ側ニアルヤウニセヨ。

然ラバ $\angle E$ ハ $\angle B$ ニ等シキガ故ニ, ED ハ BA

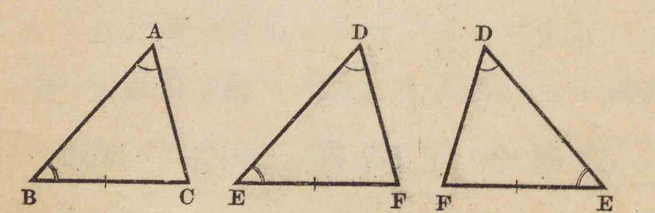
ノ上ニ重ナリ,又 $\angle F$ ハ $\angle C$ ニ等シキガ故ニ FD ハ CA ノ上ニ重ナル。

故ニ直線 ED, FD ノ交點 D ハ直線 BA, CA ノ交點 A ニ重ナル。

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

從テ $AB=DE,\quad AC=DF,\quad \angle A=\angle D$

系 二ツノ角ト其一ツニ對スル邊トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。



【證】 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$\angle A=\angle D,\quad \angle B=\angle E,\quad BC=EF$$

トセヨ。然ラバ $\angle C=\angle F$ (定理七)。故ニ本定理ニヨリテ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

問題

1. 一ツノ鋭角ト斜邊(又ハ此鋭角ニ接スル他ノ一邊,又ハ此鋭角ニ對スル邊)トガソレゾレ相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ。

2. 角ノ二等分線ノ上ノ一點ヨリ其二邊ヘ下セル垂線ハ相等シ。

19. 二等邊三角形。

定義。 二ツノ邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ。

二等邊三角形ニ於テハ相等シキ二邊ノ夾角ヲ**頂角**トイヒ,從テ之ニ對スル邊ヲ**底邊**トイフ。

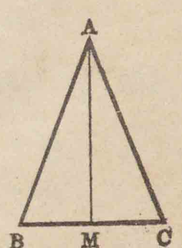
定理十 二等邊三角形ノ底角ハ相等シ。

【説明】 $\triangle ABC$ ニ於テ

$AB=AC$

トセヨ。

然ラバ $\angle B=\angle C$ ナルベシ。



【證】 $\triangle ABC$ ノ頂角 $\angle A$ ノ二等分線ガ底邊 BC ト交ハル點ヲ M トセヨ。

然ラバ $\triangle ABM$, $\triangle ACM$ ニ於テ

AM ハ共通

$AB=AC$ (假設)

$\angle BAM=\angle CAM$ (作圖)

即チ二邊ト其夾角トガソレゾレ相等シ。

故ニ $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$

從テ $\angle B=\angle C$

【注意一】 AM ヲ折目トシテ平面ヲ折返ストキハ $\triangle ABM$, $\triangle ACM$ ハ全ク相重ナル。

系 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ垂直ニ二等分ス。

【注意二】 二等邊三角形ニ於テ (一)頂角ノ二等分線,(二)頂角ノ頂點ヨリ底邊ヘ下セル垂線,(三)頂角ノ頂點ト底邊ノ中點トヲ結ビ付クル直線(底邊ニ對スル**中線**),(四)底邊ノ垂直二等分線ハ,皆同一ノ直線ナリ。

定理十一 二ツノ角ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ニシテ相等シキ角ニ對スル邊ハ相等シ。

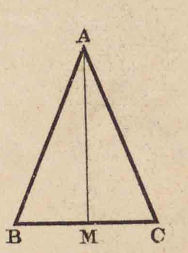
【說明】 △ABC ニ於テ

$\angle B = \angle C$

トセヨ。

然ラバ　AB＝AC

ナルベシ。



【證】 △ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ邊 BC ニ交ハル點ヲ M トセヨ。

然ラバ　△ABM, △ACM ニ於テ

AM ハ共通

$\angle B = \angle C$　（假設）

$\angle BAM = \angle CAM$　（作圖）

即チ二ツノ角ト其一ツニ對スル邊トガソレゾレ相等シ。

故ニ　△ABM≡△CAM　（定理九,系）

從テ　AB＝AC

定義。 三角形ノ三ツノ邊ガ相等シキトキハ,三ツノ角モ亦相等シ（定理十）。又三角形ノ三ツノ角ガ相等シキトキハ,三ツノ邊モ亦相等シ（定理十一）。

カヤウノ三角形ヲ**正三角形**トイフ。

問　題

1. 頂角ノ二等分線ガ底邊ニ垂直ナル三角形ハ二等邊三角形ナリ。

2. 一ツノ線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ノ點ハ,線分ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニアリ。

3. 二ツノ點ヨリ相等シキ距離ニアル點ハ,此等ノ二ツノ點ヲ結ビ付クル直線ノ垂直二等分線ノ上ニアリ。

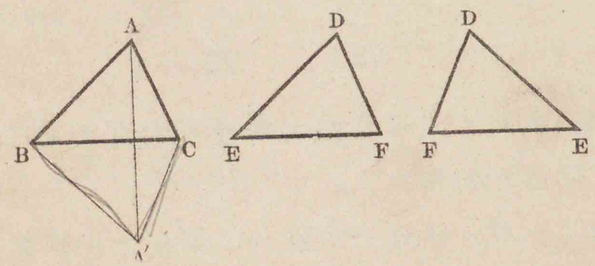
4. 斜邊ト他ノ一邊トガソレゾレ相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ。

5. 二ツノ鋭角ガ 30° 及ビ 60° ノ角ナル直角三角形ノ斜邊ハ 30° ノ角ニ對スル邊ノ二倍ニ等シ。

6. 角ノ内部ニアル一點ヨリ其二邊ヘ下セル垂線ガ相等シキトキハ,此點ハ角ノ二等分線上ニアリ。

20. 三角形ノ合同。(三)

定理十二 三ツノ邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。



【說明】 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$$AB=DE,\quad AC=DF,\quad BC=EF$$

トセヨ。

然ラバ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

ナルベシ。

【證】 $\triangle DEF$ ヲ $\triangle ABC$ ノ平面ノ上ニ置キ,邊 EF ヲ之ニ等シキ邊 BC ノ上ニ(E ヲ B ニ, F ヲ C ニ)重ネ,頂點 D, A ハ直線 BC ノ反對ノ側ニアルヤウニスルトキ, D ハ A' ノ位置ニ來レリトセヨ。AA' ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ

$$DE=A'B,\quad DF=A'C$$

サテ假設ニヨリ

$$DE=AB,\quad DF=AC$$

故ニ $AB=A'B,\quad AC=A'C$

卽チ $\triangle ABA'$, ACA' ハ二等邊三角形ナリ。

故ニ $\angle BAA'=\angle BA'A,\quad \angle CAA'=\angle CA'A$ (定理十)

故ニ $\angle BAC=\angle BA'C$

然ルニ $\angle BA'C=\angle D$

故ニ $\angle BAC=\angle D$

卽チ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ二邊ト其夾角トガソレゾレ相等シ。

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

(上ノ圖ニ於テハ AA' ハ邊 BC ノ上ノ點ヲ通ルモノトシタリ。AA' ガ邊 BC ノ延長ノ上ノ點ヲ通リ,又ハ邊 BC ノ一端ヲ通ルトキハ,如何)

問題

1. 線分ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニアル二ツノ點ヲ通ル直線ハ此線分ヲ垂直ニ二等分ス。

2. 角 A ノ一ツノ邊ノ上ニ線分 AB, AC ヲ取リ,他ノ邊ノ上ニソレゾレ之ニ等シキ線分 AB', AC'

ヲ取ルトキハ, BC', B'C ハ相等シク,又其交點トA トヲ結ビ付クル直線ハ角 A ヲ二等分ス。

21. 三角形ニ於ケル邊及ビ角ノ大小ノ關係。

定理十三 三角形ノ二ツノ邊ガ相等シカラザルトキハ,之ニ對スル二ツノ角モ亦相等シカラズシテ,大ナル邊ニ對スル角ノ方ガ大ナリ。

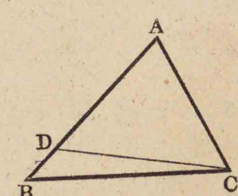
【説明】 △ABC ニ於テ

AB>AC

トセヨ。

然ラバ　∠C>∠B

ナルベシ。



【證】 邊 AB ノ上ニ邊 AC ニ等シク AD ヲ取リ, CD ヲ結ビ付ケヨ。

* 甲>乙ハ「甲ハ乙ヨリモ大」ナルコトノ記號, 又甲<乙ハ「甲ハ乙ヨリモ小」ナルコトノ記號ナリ。

然ラバ　∠ACB>∠ACD

又 ∠ADC ハ三角形 BCD ノ外角ナリ。

故ニ

∠ADC>∠B　(定理七,系)

サテ AC=AD, 故ニ

∠ADC=∠ACD　(定理十)

故ニ　∠ACD>∠B

卽チ　∠ACB>∠ACD>∠B

故ニ　∠ACB>∠B

定理十四 三角形ノ二ツノ角ガ相等シカラザルトキハ,之ニ對スル二ツノ邊モ亦相等シカラズシテ,大ナル角ニ對スル邊ノ方ガ大ナリ。

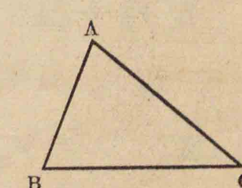
【説明】 △ABC ニ於テ

∠B>∠C

トセヨ。

然ラバ　AC>AB

ナルベシ。



【證】 假ニ AC ハ AB ヨリモ大ナラズトセヨ。

然ラバ AC ハ AB ニ等シキカ,又ハ AC ハ AB ヨリモ小ナルベシ。

若シ $AC=AB$ トスルトキハ $\angle B=\angle C$　(定理十)

又 $AC<AB$ トスルトキハ $\angle B<\angle C$　(定理十三)

イヅレニシテモ $\angle B$ ハ $\angle C$ ヨリモ大ナラザルコトトナリ,假設ニ合ハズ。

故ニ AC ハ AB ヨリモ大ナリ。

系一 直角三角形ニ於テ,斜邊ハ他ノ邊ヨリモ長シ。

系二 鈍角三角形ニ於テ,鈍角ニ對スル邊ハ他ノ邊ヨリモ長シ。

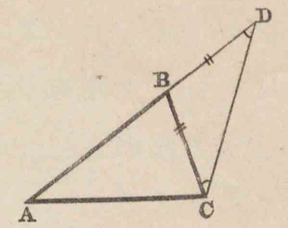
22. 最短距離トシテノ直線。

定理十五 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリモ大ナリ。

【證】 $\triangle ABC$ ノ邊 AB ノ延長ノ上ニ於テ, BC ニ等シク BD ヲ取リ, CD ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ $\triangle BCD$ ハ二等邊三角形ナリ。

故ニ　$BCD=\angle D$　(定理十)



又 D ハ AB ノ延長ノ上ニアルガ故ニ, CB ハ角 ACD ノ内部ニア　。

故ニ　$\angle ACD>\angle BCD$

故ニ　$\angle ACD>\angle D$

故ニ $\triangle ACD$ ニ於テ

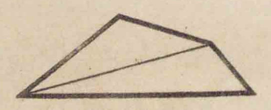
$AD>AC$　(定理十四)

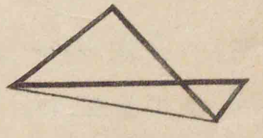
サテ　$AD=AB+BD=AB+BC$

故ニ　$AB+BC>AC$

系一 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリモ小ナリ。

系二 二ツノ點ヲ結ビ付クル直線ハ同ジ二ツノ點ヲ兩端トセル屈折線ヨリモ短シ。





23. 垂線及ビ斜線

直線XYノ上ニアラザル點Pヨリ直線上ノ一點Qヘ引ケル直線PQガXYニ垂直ナラザルトキハ,PQヲ直線XYヘ引ケル斜線トイヒ,Qヲ此斜線ノ足トイフ。

定理十六 直線外ノ一點ヨリ此直線上ノ一點ヘ引ケル直線ノ中,垂線ハ最モ短シ。

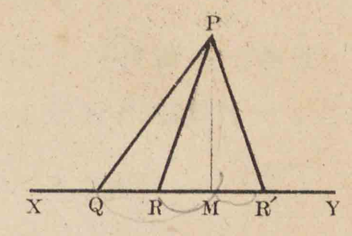
二ツノ斜線ノ足ト垂線ノ足トノ距離ガ相等シキトキハ,此等ノ斜線ハ相等シ。又二ツノ斜線ノ足ト垂線ノ足トノ距離ガ相等シカラザルトキハ,其距離ノ大ナル斜線ハ,其距離ノ小ナル斜線ヨリモ長シ。

【說明】 直線XYノ外ナル點Pヨリ此直線ヘ垂線PM及ビ斜線PQ, PR, PR′ヲ引キ, Q, Rハ直線XYノ上ニテMノ同ジ側, R, R′ハMノ反對ノ

側ニアリテ

$$MR=MR'<MQ$$

ナリトセヨ。



然ラバ

(一) $PQ>PM$

(二) $PR=PR'$

(三) $PQ>PR,\quad PQ>PR'$

ナルベシ。

【證】 (一) $\triangle PMQ$ハ直角三角形ニシテPQハ其斜邊ナリ。

故ニ　$PQ>PM$　(定理十四,系一)

(二) 直角三角形PMR, PMR'ニ於テ

PMハ共通, $MR=MR'$

故ニ　$PR=PR'$　(定理八)

(三) 假設ニヨリ$MQ>MR$ナルニヨリQハMRノ延長ノ上ニアリ。故ニ$\angle PRQ$ハ直角三角形PMRノ外角,從テ鈍角ナリ。

故ニ鈍角三角形PRQニ於テ

$PQ>PR$　(定理十四,系二)

又$PR'=PR$ナルガ故ニ

$PQ > PR'$

定義。直線外ノ一點ヨリ此直線へ引ケル垂線ノ長サヲ此點ト直線トノ距離トイフ。

系　一直線上ノ二ツヨリ多クノ點ガ,同一ノ點ヨリ相等シキ距離ニアルコトナシ。

24. 相等シカラザル三角形ノ特別ノ場合

定理十七　一ツノ三角形ノ二邊ガソレゾレ他ノ三角形ノ二邊ニ等シク其夾角ガ相等シカラザルトキハ,大ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ガ小ナル夾角ヲ有スル三角形ノ第三邊ヨリモ大ナリ。

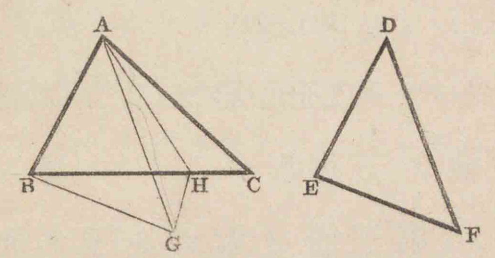
【說明】　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ

$AB = DE$,　$AC = DF$,　$\angle A > \angle D$

トセヨ。

然ラバ　　$BC > EF$

ナルベシ。



【證】　$\angle BAC$ ノ內部ニ $\angle BAG$ ガ $\angle D$ ニ等シクナルヤウニ AG ヲ引キ,其上ニ DF ニ等シク AG ヲ取リ, BG ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　　$\triangle ABG \equiv \triangle DEF$,

$BG = EF$,　$AG = DF$,　　(定理八)

サテ點 G ガ BC ノ上ニアルトキハ, AG ハ $\angle BAC$ ノ內部ニアルガ故ニ, G ハ B ト C トノ間ニアルベシ。

故ニ　　$BC > BG$　從テ　$BC > EF$

又點 G ガ BC ノ上ニアラザルトキハ, $\angle GAC$ ノ二等分線ガ BC ニ交ハル點ヲ H トシ, HG ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ $\triangle AHG \equiv \triangle AHC$ (定理八)

$HG = HC$

故ニ $BC = BH + HC = BH + HG > BG$ (定理十五)

故ニ $BC > EF$

系 一ツノ三角形ノ二ツノ邊ガソレゾレ他ノ三角形ノ二ツノ邊ニ等シキトキハ第三邊ノ大ナル三角形ニ於ケル其對角ハ,第三邊ノ小ナル三角形ニ於ケル其對角ヨリモ大ナリ。

(定理十四ノ證ニ倣ヒテ,之ヲ證明セヨ)。

問 題

1. 三角形 ABC ノ内部ノ一點ヲ P トスルトキハ,折線 BPC ハ折線 BAC ヨリモ短カク,角 BPC ハ角 BAC ヨリモ大ナリ。

2. P ヲ直線 AB ノ垂直二等分線ニ對シテ A ト同ジ側ニアル任意ノ點トスルトキハ,PA ハ PB ヨリモ小ナリ。

3. 直線外ノ一點ヨリ此直線ヘ引ケル二ツノ斜線ノ中,大ナル方ノ足ガ垂線ノ足ヲ距ルコト大ナリ。

4. 三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ出ヅル中線ガ之ニ對スル邊ノ半分ヨリモ大ナルカ,小ナルカ又ハ之ニ等シキカニ從ヒテ此角ハ鋭角,鈍角又ハ直角ナリ。

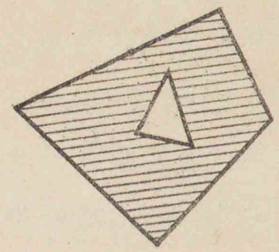
5. 三角形 ABC ニ於テ AB>AC ナルトキ,中線 AD ガ邊 BC ト作ル二ツノ角ノ中, ∠ADB ハ鈍角, ∠ADC ハ鋭角ナリ。

25. 多角形ノ内角ノ和

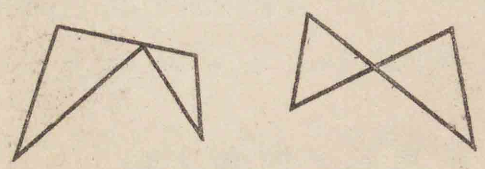
直線ヲ以テ圍マレタル平面ノ一部分ヲ**直線形**又ハ**多角形**トイヒ,其直線ヲ多角形ノ**邊**トイヒ,邊ノ端即チ相隣レル二邊ノ交點ヲ多角形ノ**頂點**トイフ。

多角形ノスベテノ邊ハ起點ト終點トノ一致セル一ツノ屈折線ヲナスコトヲ要ス。次ノ圖ニテ陰影ヲ附シタル場所ハ,直線ニテ圍マレタル平面

ノ一部分ニハ相違ナケレドモ,其境界ハ二ツノ全ク相離レタル屈折線ヨリ成レリ。カヤウノ圖形ハ之ヲ多角形ノ中ヘハ入レザルモノトス。



又多角形ノ相隣ラザル邊ハ同一ノ點ヲ通ラザルコトヲ要ス。例ヘバ次ノ圖ニ示セルガ如キ屈

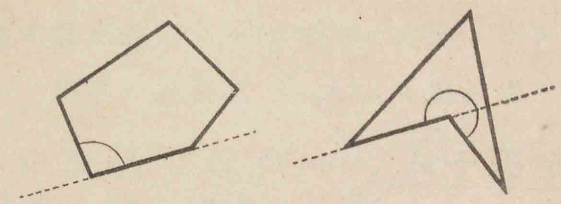


折線ハ一ツヨリ多クノ多角形ヲ作レルモノト見做スナリ。

多角形ノ頂點ニ於テ相隣レル二邊ガ作レル二ツノ共軛角ノ中,多角形ノ内部ニ向ヘル方ヲ多角形ノ**角**トイフ。

多角形ノ角ガイヅレモ二直角ヨリモ小ナルトキハ,邊ノ延長ハ全ク多角形ノ外部ニアリ,又多角

形ハ各ゝノ邊(ヲ含メル無限直線)ノ一側ニアリ。カ



ヤウノ多角形ヲ**凸多角形**トイフ。サレド多角形ノ一ツノ角ガ二直角ヨリモ大ナルトキハ,此角ニ隣レル邊ノ延長ハ一部分多角形ノ内部ニ入ルベキガ故ニ,多角形ハ此邊ヲ含メル無限直線ノ兩側ニ跨ルベシ。カヤウノ多角形ヲ**凹多角形**トイフ。

スベテ三角形ハ凸多角形ナリ。サレド四角形ハ一ツノ優角ヲ有シ得ベク,從テ凹四角形ナルコトヲ得。

凸多角形ノ一邊ト之ニ隣レル一邊ノ延長トノ作ル角ハ多角形ノ外部ニアリ。之ヲ多角形ノ**外角**トイフ。外角ニ對シテ特ニ多角形ノ角ヲ**内角**トイフ。

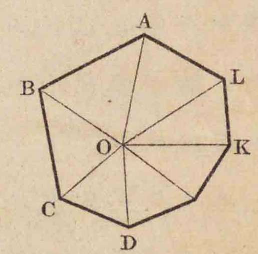
多角形ノ頂點ノ數ト邊ノ數トハ相等シ。此數

ニヨリテ多角形ヲ三角形,四角形ナドトイフ。n角形ヲ又n邊形トモイフ。

多角形ノ相隣ラザル二ツノ頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ**對角線**トイフ。

定理十八 n角形ノ內角ノ和ハ$2n-4$直角ニ等シ。

【證】 n角形ABC……KLノ內部ノ點Oヲ各頂點ニ結ビ付クルトキハ,多角形ノ邊ト同數ノ三角形OAB, OBC, ……, OKL, OLAヲ生ジ,其內角ノ總和ハ$2n$直角ニ等シク,多角形ノ內形ノ和ハ,之ヨリOヲ頂點トセルn個ノ角$\angle AOB$, $\angle BOC$, ………, $\angle LOA$ノ和ヲ引キタル殘ニ等シ。即チ$2n-4$直角ニ等シ。

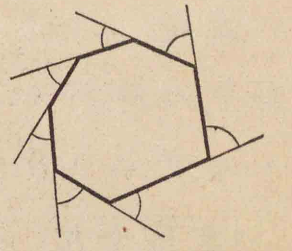


系 凸多角形ノ各頂點ニ於テ一ツヅツ外角ヲ作ルトキハ,其和ハ四直角

ニ等シ。

【證】 各頂點ニ於ケル內角ト外角トハ合ハセテ2直角ニ等シキガ故ニ,n角形ニアリテハ內角ト外角トノ總和ハ$2n$直角ニ等シ。

サテ內角ノ和ハ$2n-4$直角ニ等シキガ故ニ,外角ノ和ハ4直角ニ等シ。



問 題

凸多角形ノ一ツノ頂點ヲ通ルスベテノ對角線ハ此多角形ヲ幾個ノ三角形ニ分割スルカ。又是ニヨリテ多角形ノ內角ノ和ヲ計算セヨ。

第三章　平行四邊形

26. 平行四邊形ノ性質。

定義。二組ノ相對スル邊ガソレゾレ互ニ平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。

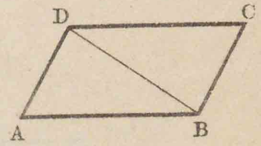
定理十九 平行四邊形ニ於テ相對スル角ハ相等シク,相對スル邊ハ相等シ。

【證】 ABCD ヲ平行四邊形トセヨ。

即チ　AB ∥ CD

AD ∥ BC

トセヨ。*



對角線 BD ヲ引ケ。

然ラバ △ABD, △CDB ニ於テ

BD ハ共通 ∠ABD＝∠CDB, ∠ADB＝∠CBD

* ∥ハ平行ノ記號ナリ。

故ニ　△ABD≡△CDB　(定理九)

故ニ　AB＝CD,　AD＝BC

∠A＝∠C

同ジヤウニ他ノ二ツノ相對スル角 ∠B, ∠D モ亦相等シ。

系 互ニ平行ナル二ツノ直線ニ垂直ニシテ其間ニ夾マレタル線分ハ,スベテ相等シ。

此線分ヲ平行ナル**二直線ノ距離**トイフ。

定理二十 四邊形ニ於テ

(一) 相對スル角ガ二組トモ相等シキトキ,又ハ

(二) 相對スル邊ガ二組トモ相等シキトキ,又ハ

(三) 一組ノ相對スル邊ガ平行ニシテ且相等シキトキハ,

此四邊形ハ平行四邊形ナリ。

【證】 四邊形 ABCD ニ於テ

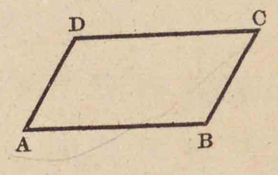
(一) $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ トセヨ。然ラバ

$\angle A=\angle C$
$\angle B=\angle D$ +
$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$$

サテ　$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4$ 直角

故ニ　$\angle A+\angle B=2$ 直角



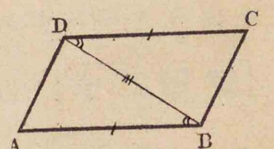
故ニ　$AD \parallel BC$

$\hat{C}+\hat{D}=2R\angle$

同ジヤウニ　$AB \parallel CD$

(二) 次ニ $AB=CD$, $AD=BC$ トセヨ。然ラバ

$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (定理十二)



故ニ　$\angle ADB=\angle DBC$

$\angle ABD=\angle BDC$

故ニ　$AD \parallel BC$　$AB \parallel CD$

(三) 次ニ又 $AB \parallel CD$, $AB=CD$ トセヨ。然ラバ

$\triangle ABD$, $\triangle CDB$ ニ於テ

$AB=CD$, BD ハ共通

又　$\angle ABD=\angle CDB$　$(DC \parallel AB)$

故ニ　$\triangle ABD \equiv \triangle CDB$　(定理八)

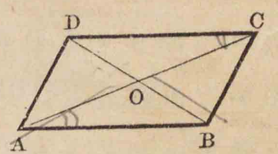
$\angle ADB=\angle CBD$

故ニ　$AD \parallel BC$

定理二十一 平行四邊形ノ對角線ハ各他ノ對角線ヲ二等分ス。

又逆ニ二ツノ對角線ガ其交點ニ於テ二等分セラルル四邊形ハ平行四邊形ナリ。

【證】 (一) 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ O ニ於テ相交ハルトセヨ。



然ラバ　$AB=CD$,

$\angle ABO=\angle CDO$,

$\angle BAO=\angle DCO$

故ニ　$\triangle BAO \equiv \triangle CDO$　(定理九)

$AO=CO$,　$BO=DO$

即チ對角線 AC, BD ハ其交點 O ニ於テ二等分セラル。

(二) 四邊形 ABCD ニ於テ

$AO=CO$,　$BO=DO$

トセヨ。然ラバ $\angle AOB=\angle COD$ ナルガ故ニ

$\triangle ABO \equiv \triangle CDO$　(定理八)

故ニ　$AB=CD$

同ジヤウニ　　AD＝BC

故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。(定理二十)

問題

1. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通リ,一双ノ相對スル邊ノ間ニ夾マルル線分ハ此點ニ於テ二等分セラル。

2. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AB, CD ノ上ニ相等シキ線分 AE, CG ヲ取リ,又 BC, DA ノ上ニ相等シキ線分 BF, DH ヲ取ルトキハ, EFGH ハ平行四邊形ニシテ,其對角線ノ交點ハ ABCD ノ對角線ノ交點ト一致ス。

27. 正方形。矩形。菱形。

四邊形ノ四ツノ角ガ相等シキトキハ,各ノ角ガ直角ニシテ,此四邊形ハ平行四邊形ナリ。

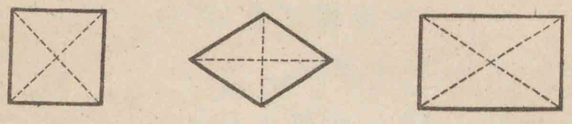
定義。四ツノ角ガ直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ。

定義。四ツノ邊ガ相等シキ四邊形ヲ**菱形**トイフ。

菱形モ亦平行四邊形ナリ(定理二十)。

定義。四ツノ角,四ツノ邊ガ共ニ相等シキ四邊形卽チ正四角形ヲ特ニ**正方形**トイフ。

正方形ハ矩形ニシテ同時ニ菱形ナリ。



問題

1. 矩形ノ對角線ハ相等シ。　定21

2. 對角線ガ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ。　21

3. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ニシテ,且菱形ノ角ヲ二等分ス。

4. 對角線ガ互ニ垂直ナル平行四邊形ハ菱形ナリ。

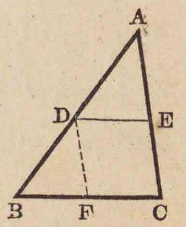
5. 對角線ガ相等シク,且互ニ垂直ニ二等分スル四邊形ハ正方形ナリ。

28. 三角形ノ邊ノ中點ヲ連ヌル直線。

定理二十二 三角形ノ一邊ノ中點ヲ通リ,第二ノ邊ニ平行ナル直線ハ,第三ノ邊ヲ二等分ス。

【說明】 △ABC ニ於テ邊 AB ノ中點 D ヲ通リ,邊 BC ニ平行ナル直線ガ邊 AC ニ交ハル點ヲ E トセヨ。

然ラバ E ハ AC ノ中點ナルベシ。



【證】 D ヨリ AC ニ平行ニ DF ヲ引キ, BC ト F ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ △ADE, △DBF ニ於テ

AD=DB,　∠ADE=∠DBF,　∠DAE=∠BDF

故ニ　AE=DF　(定理九)

又 DFCE ハ平行四邊形ナルガ故ニ

DF=EC　(定理十九)

故ニ　AE=EC

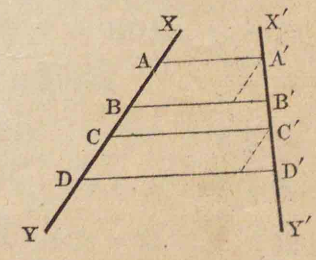
即チ E ハ AC ノ中點ナリ。

系一 三角形ノ二ツノ邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三ノ邊ニ平行ナリ。

【證】 邊 AB ノ中點 D ヲ通リ, BC ニ平行ナル直線ハ本定理ニヨリテ AC ノ中點 E ヲ通ル。即チ DE ハ二邊 AB, AC ノ中點ヲ結ビ付クル直線ニシテ,第三邊 BC ニ平行ナリ。

系二 三角形ノ二ツノ邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三ノ邊ノ半分ニ等シ。

系三 直線 XY ノ上ニ任意ノ相等シキ線分 AB, CD ヲ取リ, A, B, C, D ヲ通ヽリ互ニ平行ナル直線ヲ引キテ他ノ直線 X′Y′ トソレゾレ A′, B′, C′, D′ ニ於テ

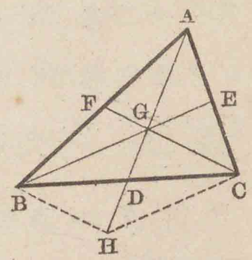


交ハラシムルトキハ,線分 A'B', C'D' ハ相等シ。

29. 三角形ノ重心。

定理二十三 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ヲ通ル。

【說明】 △ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ D, E, F トセヨ。



然ラバ中線 AD, BE, CF ハ同一ノ點ヲ通ルベシ。

【證】 中線 BE, CF ハ相交ハル,其交點ヲ G トセヨ。 AG ヲ結ビ付ケ,其延長ノ上ニ GH ヲ AG ニ等シク取リ, BH, CH ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ △ACH ニ於テ E, G ハ邊 AC, AH ノ中點ナルガ故ニ　EG ∥ CH　卽チ　GB ∥ CH

同ジヤウニ　GC ∥ BH

故ニ BGCH ハ平行四邊形ニシテ, BC, GH ハ其對角線ナリ。故ニ直線 GH ハ BC ノ中點 D ヲ通ル。卽チ AD ハ G ヲ通ル。

故ニ中線 AD, BE, CF ハ同一ノ點 G ヲ通ル。

定義。三角形ノ三ツノ中線ノ交ハル點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。

系 三角形ノ重心ト各頂點トノ距離ハ各中線ノ長サノ三分ノ二ニ等シ。

【證】 上ノ圖ニテ BE=BG+GE, BG=CH=2.GE, 從テ BE=3GE, 故ニ $BG=\frac{2}{3}BE$

問題

1. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クル直線ハ一ツノ平行四邊形ヲ作ル。

2. 直角三角形ノ斜邊ニ對スル中線ハ斜邊ノ半分ニ等シ。

3. 平行四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AB, CD ノ中點ヲソレゾレ E, F トスルトキハ AF, CE ハ對角線 BD ヲ三等分ス。

4. 四邊形ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線及ビ對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ同一ノ點ヲ通リ且其點ニ於テ二等分セラル。

5. [**定義**。相對スル二邊ガ互ニ平行ナル四邊

形ヲ**梯形**トイヒ,此等ノ二邊ヲ其**底邊**トイフ。]

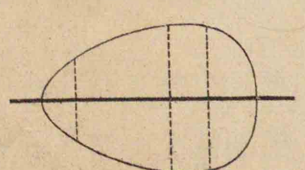
梯形ノ底邊ナラザル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊ニ平行ニシテ且其和ノ半分ニ等シ。

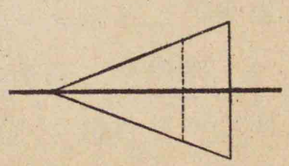
6. 梯形ノ對角線ノ中點ノ距離ハ底邊ノ差ノ半分ニ等シ。

30. 對稱軸。

定義。二ツノ點ハ之ヲ結ビ付クル直線ノ垂直二等分線ヲ**軸**トシテ**互ニ對稱**ナリトイフ。

一ツノ圖形ニ屬スル點ガ同一ノ直線ヲ軸トシテ二ツヅツ互ニ對稱ナルトキハ,此直線ヲ圖形ノ**對稱軸**(又ハ單ニ**軸**)トイフ。





例ヘバ,二等邊三角形 頂角ノ二等分線ハ其對

稱軸ナリ。

對稱軸ヲ折目トシテ圖形ヲ折返ストキハ,圖形ノ一部ハ全ク他ノ一部ト重ナリ合フベシ。

問題

1. 菱形ノ對角線ハ其對稱軸ナリ。

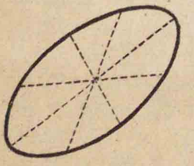
2. 矩形ノ相對スル邊ノ中點ヲ通ル直線ハ矩形ノ對稱軸ナリ。

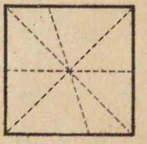
3. 正方形ハ四ツノ對稱軸ヲ有ス。

31. 對稱ノ中心。

定義。二ツノ點ハ之ヲ結ビ付クル直線ノ中點ヲ**中心**トシテ互ニ對稱ナリトイフ。

一ツノ圖形ニ屬スル點ガ,同一ノ點ヲ中心トシテ二ツヅツ互ニ對稱ナルトキハ,此點ヲ圖形ノ**對稱ノ中心**(又ハ單ニ**中心**)トイフ。





對稱 中心ヲ固定シテ,圖形ヲ其平面上ニ於テ

二直角ダケ廻轉セシムルトキハ,圖形ハ全ク其舊位置ニ合シ,唯互ニ對稱ナル點ノ位置ガ彼是交換セラルルノミ。

問題

1. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ハ其對稱ノ中心ナリ。

2 平行四邊形ノ對稱ノ中心ヲ通ル任意ノ直線ハ之ヲ全ク相等シキ二ツノ部分ニ分ツ。

問題

(第一篇雜題)

• 1. 邊ガソレゾレ互ニ垂直ナル二ツノ角ハ相等シキカ,又ハ補角ヲナス。

2. 三角形ABCノ邊AC又ハ其延長ノ上ニABニ等シクADヲ取リ, BDヲ結ビ付クルトキハ, ∠ABDハ內角∠B, ∠Cノ和ノ半分ニ等シク, ∠CBDハ內角∠B, ∠Cノ差ノ半分ニ等シ。

3. 角ノ一邊上ノ任意ノ點ニ於テ此邊ニ垂線ヲ角ノ內部ヘ引キ又此點ヨリ他ノ邊ヘ垂線ヲ下ストキハ,二ツノ垂線ガ作ル角ノ二等分線ハ原ノ角ノ二邊ト相等シキ角ヲ作ル。

• 4. 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底邊ニ平行ナリ。

5. 四邊形ノ相對スル角ノ二等分線ガ互ニ平行ナルトキハ,他ノ二ツノ相對スル角ハ相等シ。

6. 四邊形ニ於テ最大ナル邊ト最小ナル邊トガ相對スルトキハ,最大ナル邊ニ接スル二ツノ角ハ各之ニ對スル角ヨリモ小ナリ。

7. 三角形ノ內部ノ一點ヨリ三ツノ頂點ニ至ル距離ノ和ハ,三角形ノ周圍ヨリモ小ニシテ,周圍ノ半分ヨリモ大ナリ。

8. 平行四邊形ノ內角ノ二等分線ガ相交ハリテ作ル四邊形ハ矩形ニシテ,其對角線ハ平行四邊形ノ邊ニ平行ナリ。

9. 二ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ。又三角形ノ二ツノ相等シカラザル邊ニ對スル中線ノ中,大ナル邊ニ對スル方ガ小ナリ。

10. 四邊形ABCDニ於テAB=AD, CB=CDナルトキハ,對角線ACハ四邊形ノ對稱軸ナリ。

11. 平行ナラザル二邊ガ相等シキ梯形ノ底邊

ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ梯形ノ對稱軸ナリ。

12. 直線 XY ヲ軸トシテ其兩側ニアル點 A, B トソレゾレ對稱ナル點ヲ A′, B′ トスルトキハ AB, A′B′ ハ相等シク, 且 XY ノ上ニ於テ相交ハル。

13. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ頂角ノ二等分線ノ上ノ一點ヲ通リテ對邊ニ至ル二ツノ線分ハ相等シ。

14. 二等邊三角形ノ底邊ノ上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ニ平行ナル直線ヲ引クトキニ生ズル平行四邊形ノ周圍ハ一定ナリ。

15. 二等邊三角形ノ底邊ノ上ノ任意ノ點ヨリ他ノ二邊ヘ下セル垂線ノ和ハ一定ナリ。底邊ノ延長ノ上ノ點ヨリ垂線ヲ下ストキハ如何。

16. 正三角形ノ内部ノ任意ノ點ヨリ三ツノ邊ヘ下セル垂線ノ和ハ一定ナリ。外部ノ點ヨリ垂線ヲ下ストキハ如何。

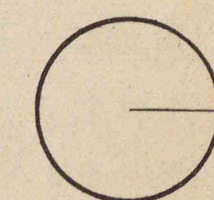
第二篇

圓

第一章　圓作圖ノ問題

32. 定義。

線分ノ一端ヲ固定シテ此線分ヲ平面上ニ於テ廻轉セシメ,遂ニ最初ノ位置ニ復ラシムルトキ,線分ノ掃過セル平面ノ部分ヲ**圓**トイヒ,線分ノ固定セル一端ヲ此圓ノ**中心**トイフ。線分ノ他ノ一端ガ此廻轉ニ際シ通過セル跡ハ一ツノ線ニシテ,卽チ圓ノ境界ナリ。之ヲ**圓周**トイフ。



中心ヨリ圓周上ノ任意ノ點ニ至ル直線ハスベテ相等シ。之ヲ圓ノ**半徑**トイフ。

中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ小ナル點ハ圓ノ內部ニアリ,中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ大ナル點ハ圓ノ外部ニアリ。

【注意】 圓周ハ圓ノ內部ト外部トノ境界ナルガ故ニ,圓ノ內部ナル一點ヨリ外部ナル一點ニ至ル任意ノ線(直線,屈折線又ハ曲線)ハ必ズ圓周上ノ點ヲ通過スベシ。

定義。 圓周上ノ二點ヲ結ビ付クル直線ヲ弦トイヒ,中心ヲ通ル弦ヲ直徑トイフ。

直徑ハ半徑ノ二倍ニ等シ。

定理二十四 半徑ノ相等シキ二ツノ圓ハ全ク相等シ。

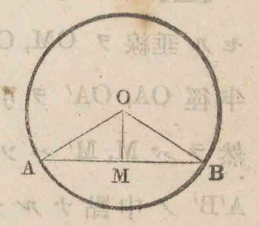
【證】 相等シキ半徑ヲ有スル二ツノ圓ノ平面ヲ中心ガ相合スルヤウニ重ネ置クトキハ,二ツノ圓ハ全ク相重ナルベシ。

系 一ツノ直徑ヲ共有スル二ツノ圓ハ全ク相重ナル。

33. 弦。

定理二十五 中心ヨリ弦ヘ下セル垂線ハ弦ヲ二等分ス。

【說明】 圓ノ中心Oヨリ弦ABヘ下セル垂線ノ足ヲMトセヨ。



然ラバMハABノ中點ナルベシ。

【證】 半徑OA, OBヲ引ケ。然ラバOMハ二等邊三角形OABノ頂點Oヨリ底邊ABヘ下セル垂線ナルガ故ニ,MハABノ中點ナリ。

系 直徑ハ圓ヲ全ク相等シキ二ツノ部分ニ分ツ。

直徑ハ圓ノ對稱軸ナリ。

直徑ニヨリテ分タレタル圓ノ二ツノ部分ヲ半圓トイフ。

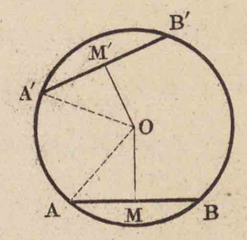
定理二十六 相等シキ弦ハ中心ヨ

リ相等シキ距離ニアリ。

弦ハ小クナルニ從ヒテ,中心ニ遠ザカル。

【證】(一) 中心Oヨリ相等シキ弦AB, A′B′ヘ下セル垂線ヲOM, OM′トセヨ。

半徑OA, OA′ヲ引ケ。



然ラバM, M′ハソレゾレAB, A′B′ノ中點ナルガ故ニ

$$AM=A'M'$$

又　　$OA=OA'$

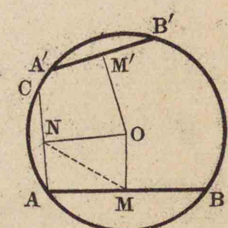
故ニ直角三角形OAM, OA′M′ハ全ク相等シ,

從テ　　$OM=OM'$

(二) 中心Oヨリ弦AB, A′B′ヘ垂線OM, OM′ヲ下シ,又

$$AB>A'B'$$

トセヨ。



Aヲ通ル直徑ニ對シテABト反對ノ側ニA′B′ニ等シキ弦ACヲ引キ,OヨリACヘ垂線ONヲ下シ,MNヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ(一)ニヨリ　$ON=OM'$

又AB>AC且AM, ANハソレゾレAB, ACノ半分ナルガ故ニ　　$AM>AN$

故ニ三角形AMNニ於テ

$\angle ANM>\angle AMN$　　(定理十三)

從テ　　$\angle ONM<\angle OMN$

故ニ三角形OMNニ於テ

$OM<ON$　　(定理十四)

從テ　　$OM<OM'$

系一 中心ヨリノ距離ガ相等シキ弦ハ相等シ。

弦ハ中心ヲ遠ザカルニ從ヒテ小サクナル。

系二 直徑ハ最大ナル弦ナリ。

問　題

1. 弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ通過ス。
2. 二ツノ弦ノ相交ハル點ガ各弦ノ中點ナルトキハ,此等ノ弦ハ直徑ナリ。

3. 二ツノ相等シキ弦(又ハ其延長)ノ交點ヲ中心ニ結ビ付クル直線ハ此等ノ弦ガ作ル角ヲ二等分ス。

又此交點ヨリ各弦ノ兩端ニ至ル距離ハ二ツヅツ相等シ。

4. 圓內ノ定點ヲ通ル弦ノ中,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナルモノガ最モ短シ。

34. 圓ト直線トノ位置ノ關係。

定理二十七 直線ト圓周トハ二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ。

中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ大ナル直線ハ圓周ニ交ハラズ。

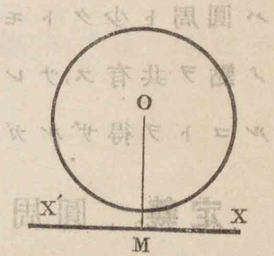
中心ヨリノ距離ガ半徑ニ等シキ直線ハ圓周ト唯一ツノ點ヲ共有ス。

中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリモ小ナル直線ハ二ツノ點ニ於テ圓周ト交ハ

ル。

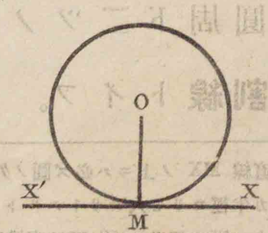
【證】 Oヲ圓ノ中心,Oヨリ直線XX′ヘ下セル垂線ノ足ヲMトセヨ。直線XX′ト圓周トニ共通ナル點ハ即チ直線XX′上ニ於テOヨリ半徑ニ等シキ距離ニアル點ナリ。故ニカヤウノ點ハ二ツヨリ多クアルコトヲ得ズ(定理十六,系)。サテ

(一) 垂線OMハ半徑ヨリモ大ナリトセヨ。然ラバMハ圓ノ外部ニアリ。



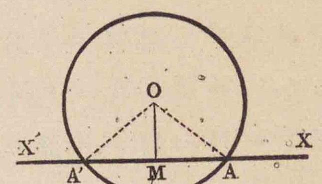
又直線XX′ノ上ノ他ノ點ハOトノ距離OMヨリモ大(定理十六),從テ半徑ヨリモ大ナルガ故ニ盡ク圓ノ外部ニアリ。故ニ直線XX′ハ全ク圓ノ外部ニアリ,從テ圓周ニ交ハラズ。

(二) 次ニOMハ半徑ニ等シトセヨ。然ラバMハ圓周上ノ點ナリ。直線XX′ノ上ノ他ノ點ハ,上ト同ジヤウニ,盡ク圓ノ外部ニアリ。故ニ直線XX′ハ點Mニ於テ一



タビ圓周ニ觸ルル外,全ク圓ノ外部ニアリ。(圓ハ全ク此直線ノ一側ニアリ)。

(三) 次ニ OM ハ半徑ヨリモ小ナリトセヨ。然ラバ M ハ圓ノ内部ニアリ。故ニ直線 MX, MX′ ハ各〻圓周上ノ點 A, A′ ヲ通過シテ圓ノ外部ニ出ヅベシ。* 即チ直線 XX′ ハ圓周ト少クトモ二ツノ點ヲ共有ス,サレド二ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトヲ得ザルガ故ニ,共通ノ點ハ二ツナリ。



定義。 圓周ト唯一ツノ點ヲ共有スル直線ヲ其點ニ於テ圓ニ**切ス**,又ハ圓ノ**切線**ナリトイヒ,其點ヲ**切點**トイフ。

圓周ト二ツノ點ニ於テ交ハル直線ヲ**割線**トイフ。

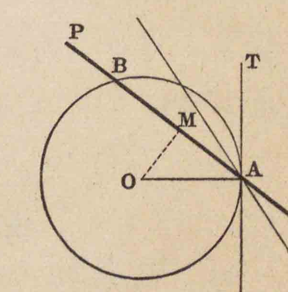
---

* 直線 MX ノ上ニハ必ズ圓ノ外部ニアル點アリ。(例ヘバ點 X ト M トノ距離カ半徑ヨリモ大ナリトスルトキハ X ハ圓ノ外部ニアリ)。故ニ MX ハ圓周上ノ點ヲ通過ス(68 頁注意參照)。

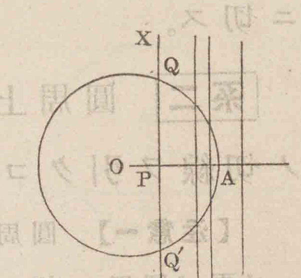
系一 圓周上ノ一點ヲ通ル直線ハ再ビ圓周ト交ハル,唯此點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ノミハ此點ニ於テ圓ニ切ス。

系二 圓周上ノ一點ニ於テ唯一ツノ切線ヲ引クコトヲ得。

【注意一】 圓周上ノ定點 A ヲ通ル割線 AP ガ再ビ圓周ニ交ハル點ヲ B トシ,中心 O ヨリ此直線ヘ下セル垂線ノ足ヲ M トセヨ。今 A ヲ固定シテ割線 AP ヲ廻轉セシムルモノト考フルニ,∠OAP ガ漸次大クナルニ伴ヒ,垂線 OM ハ漸次大クナリ,從テ弦 AB ハ漸次小クナリ行キ,竟ニ ∠OAP ガ直角トナルトキ,B ハ A ニ合シ,直線 AP ハ A ニ於ケル切線 AT ニ合スベシ。



【注意二】 Oヲ圓ノ中心,Pヲ半徑OAノ上ノ一點,XヲPニ於テOAニ垂直ナル直線Q, Q'ヲ此直線ガ圓周ニ交ハル二ツノ點トセヨ。今點PハOヨリAニ向ヒテ半徑ノ上ヲ動クモノト考フルニ,Pガ漸次中心Oニ遠ザカルニ從ヒ,弦QQ'ハ小クナリ(卽チ二ツノ點Q, Q'ハ相接近シ),竟ニPガAニ合スルトキ,Q, Q'ハ共ニAニ合シ,垂線XハAニ於ケル切線ニ合ス。



問題

1. 中心ヨリ割線ヘ下セル垂線ノ足ハ割線ト圓周トノ二ツノ交點ヨリ相等シキ距離ニアリ。

中心ヨリ切線ヘ下セル垂線ノ足ハ切點ニ合ス。

2. 二ツノ定點ヲ通ル圓ノ中心ハ盡ク同一直線上ニアリ。

3. 定點ニ於テ定直線ニ切スル圓ノ中心ハ盡ク同一直線上ニアリ。

4. 定直線ニ平行ナル弦ノ中點及ビ切線ノ切點ハ同一ノ直徑上ニアリ。

5. 一ツノ圓ニ於テ相等シキ弦ハ盡ク他ノ一ツノ圓ニ切ス。

6. 二ツノ同心圓(共通ノ中心ヲ有スル圓)ニ於テ外圓ノ弦ABガC及ビDニ於テ內圓ノ周ニ交ハルトキハ,AC, BDハ相等シ。

又外圓ノ弦ABガ內圓ニ切スルトキハ,切點ハ弦ノ中點ナリ。

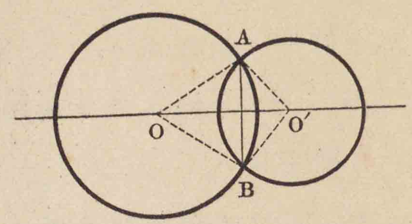
35. 相交ハル圓。

定理二十八 二ツノ圓周ガ二ツノ點ヲ共有スルトキハ,其中心ヲ通ル直線(中心線)ハ共通ノ弦ヲ垂直ニ二等分ス。

二ツノ圓周ハ三ツノ點ヲ共有スル

コトヲ得ズ。

【證】 (一) O, O′ヲ二ツノ圓ノ中心, A, Bヲ二ツノ圓周ニ共通ナル點トセヨ。



然ラバO, O′ハイヅレモA, Bヨリ相等シキ距離ニアリ。

故ニOO′ハABヲ垂線ニ二等分ス(37頁問題1參照)。

(二) 又二ツノ圓周ガAノ外ニ點Cヲ共有ストセヨ。然ラバ(一)ニヨリ中心線OO′ハACヲ垂直ニ二等分スベキニヨリ, CハBニ合ス。卽チ二ツノ圓周ハAトBトノ外ニ共通ノ點ヲ有スルコトナシ。

定義。 二ツノ圓周ガ二ツノ點ヲ共有スルトキハ,二ツノ圓ハ**相交ハル**トイフ。

【注意】 相交ハル二ツノ圓ハ一部分相重ナル。

系 二ツノ圓ガ相交ハルトキハ,中

心ノ距離ハ半徑ノ和ヨリハ小サク,差ヨリハ大ナリ。

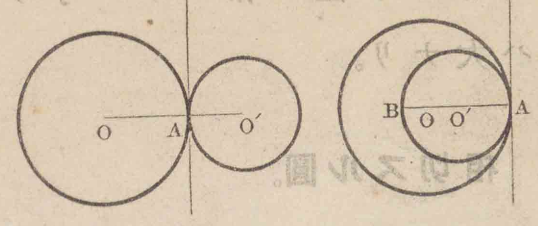
36. 相切スル圓。

定義。 二ツノ圓周ガ唯一ツノ點ヲ共有スルトキハ,二ツノ圓ハ**相切ス**トイヒ,共通ノ點ヲ**切點**トイフ。

定理二十九 二ツノ圓周ガ中心線上ノ一點ヲ共有スルトキハ,此等ノ圓ハ相切ス。

【證】 二ツノ圓* O, O′ガ中心線上ノ一點Aヲ共有ストセヨ。假ニ二ツノ圓ガAヨリ外ノ點Pヲ共有スト考フルトキハ,此點Pガ若シ中心線上ニアラバ,二ツノ圓ハ一ツノ直徑APヲ共有スルコトトナリ,從テ全ク相合スベク,又Pガ中心線ノ上ニアラズバ,中心線OO′ヲ軸トシテPト對稱ナル點モ亦二ツノ圓周ニ共通ナルベク,從テ二ツノ

* 不明ノ處ナキトキニハ,中心ヲ表ス文字ヲ以テ圓ヲ示スナリ。



圓周ガ三ツノ點ヲ共有スルコトトナルベシ。

故ニ二ツノ圓ハAヨリ外ノ點ヲ共有スルコトヲ得ズ,卽チAニ於テ相切ス。

系一 相切スル二ツノ圓ノ切點ハ中心線ノ上ニアリ。

系二 相切スル二ツノ圓ハ切點ニ於テ共通ノ切線ヲ有ス。

定義。 二ツノ圓O, O′ガAニ於テ相切スルトキ,中心O, O′ガ中心線上ニ於テ切點Aノ兩側ニアルトキハ,二ツノ圓ハ點Aニ於テ一タビ相觸ルル外各,全ク他ノ外部ニアリ。此場合ニハ二ツノ圓ハ**外切ス**トイフ。

又中心O, O′ガ中心線上ニ於テ切點Aノ同ジ

側ニアルトキハ,小ナル圓ハ點Aニ於テ一タビ大ナル圓ニ觸ルル外,全ク其內部ニアリ。此場合ニハ二ツノ圓ハ**內切ス**トイフ。

系三 外切スル二ツノ圓ノ中心ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シク,內切スル二ツノ圓ノ中心ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シ。

問題

1. 共通ノ點ニ於テ共通ノ切線ヲ有スル二ツノ圓ハ相切ス。

2. 相切スル二ツノ圓ノ切點ヲ通ル割線ガ再ビ此等ノ圓ニ交ハル點ヲ一端トセル各圓ノ直徑ハ互ニ平行ナリ。

37. 二ツノ圓ノ位置ノ關係。

二ツノ圓ノ位置ノ關係ハ五通リアリ。卽チ二ツノ圓ニ共通ノ部分ナキトキハ,各圓ハ他ノ圓ノ外部ニアリ。二ツノ圓ガ一部分相重ナルトキハ,

此等ノ圓ハ相交ハル。又二ツノ圓ノ中,一ツガ全ク他ノ一ツノ內部ニアルコトアリ。此外ナホ二ツノ圓ガ唯一ツノ點ニ於テ相接觸スルコトアリ,外切及ビ內切ノ場合卽チ是ナリ。

此等ノ五ツノ場合ヲ二ツノ圓ノ半徑及ビ其中心ノ距離ノ大小ノ關係ニヨリテ區別スルコトヲ得ルコト,次ノ如シ。

定理三十 (一) 二ツノ圓ガ各〻他ノモノノ外部ニアルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

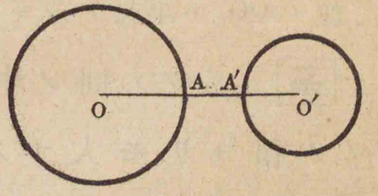
(二) 二ツノ圓ガ外切スルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シ。

(三) 二ツノ圓ガ相交ハルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナリ。

(四) 二ツノ圓ガ內切スルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シ。

(五) 二ツノ圓ノ中,一ツガ全ク他ノ一ツノ內部ニアルトキハ,中心ノ距離ハ半徑ノ差ヨリモ小ナリ。

【證】 (一) 二ツノ圓 O, O′ ガ各〻他ノ外部ニアリトセヨ。然ラバ圓 O′ ノ中心 O′ モ亦圓 O ノ外部ニアリテ,線分 OO′ ハ先ヅ圓周 O ニ交ハリ,



次ニ圓周 O′ ニ交ハルベシ。此等ノ交點ヲ A, A′ トセヨ。然ラバ

$$OO'=OA+AA'+O'A'$$

故ニ

$$OO'>OA+O'A'$$

卽チ OO′ ハ半徑ノ和ヨリモ大ナリ。

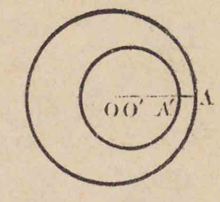
(二) 定理二十九,系三。

(三) 定理二十八,系。

(四) 定理二十九,系三。

(五) 圓 O′ ガ全ク圓 O ノ內部ニアルトキハ,OO′

ノ延長ハ先ヅ圓周 O′ ニ交ハリ，次ニ圓周 O ニ交ハルベシ，此等ノ點ヲ A′, A トセヨ。



然ラバ　$OA = OO' + O'A' + A'A$

故ニ　$OA > OO' + O'A'$

故ニ　$OO' < OA - O'A'$

卽チ OO′ ハ半徑ノ差ヨリモ小ナリ。

系 二ツノ圓ノ中心ノ距離ガ(一)半徑ノ和ヨリモ大ナルカ，(二)半徑ノ和ニ等シキカ，(三)半徑ノ和ヨリモ小ニシテ，半徑ノ差ヨリモ大ナルカ，(四)半徑ノ差ニ等シキカ，(五)半徑ノ差ヨリモ小ナルカニ從ヒテ，二ツノ圓ハ(一)各々全ク他ノモノノ外部ニアリ，又ハ(二)外切シ，又ハ(三)相交ハリ，又ハ(四)內切シ，又ハ(五)二ツノ圓ノ中，一ツハ全ク他ノ一ツノ內部ニアリ。

【注意】 二ツノ相等シキ圓ハ，其中心ノ距離ガ半徑ノ二倍ヨリモ小ナルトキニ限リ，相交ハル。

問題

圓周ノ上ニ於テ，中心以外ノ一定點ニ最モ近キ點及ビ最モ遠キ點ハ定點ヲ通ル直徑ノ兩端ナリ。

38. 作圖ノ問題。

與ヘラレタル性質ヲ有スル圖形ヲ作ルコトヲ**作圖**トイフ。

初等幾何學ノ作圖ニ於テ用フルコトヲ許ス器械ハ**定木**及ビ**兩脚規**(こんぱす)ニ限ル。定木ハ直線ヲ引クニ用ヒ，兩脚規ハ圓ヲ作ルニ(又ハ「距離ヲ移ス」ニ)用フ。卽チ初等幾何學ニ於テ最初ヨリ爲シ得ルモノトシテ承認セラルルハ，次ノ三ツノ作圖ニ限ル。

(一) 任意ノ一點ヨリ他ノ任意ノ一點ヘ直線ヲ引クコト。

(二) 任意ノ直線ヲ任意ニ延長スルコト。

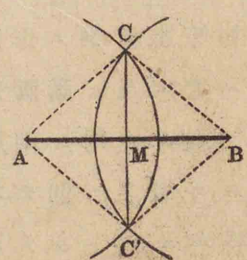
(三) 任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ作ルコト。

之ヲ**作圖ノ公法**トイフ。

他ノ作圖ハスベテ上ノ三ツノ作圖ヲ反復應用シテ,之ヲ解クコトヲ要スルナリ。

39. 直線及ビ角ヲ二等分スル作圖。

作圖題一 與ヘラレタル直線ヲ二等分スルコト。



【作圖】 ABヲ與ヘラレタル直線トセヨ。

A及ビBヲ中心トシ,任意ノ相等シキ半徑ヲ以テ圓周ヲ作リ,點C及ビC′ニ於テ相交ハラシメヨ。CC′ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバCC′トABトノ交點MハABノ中點ナルベシ。

【證】 作圖ニヨリACBC′ハ菱形ナリ。故ニCC′ハABヲ(垂直ニ)二等分ス。

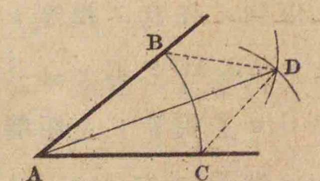
【注意一】 圓ノ半徑ガ小サ過ギルトキニハ,二ツノ圓周ハ相交ハラザルコトアルベシ。サレド半徑ヲ適當ニ大キク(實ハABノ半分ヨリモ大キク,例ヘバABニ等シク)取ルトキハ,二ツノ圓周ハ必ズ二ツノ點ニ於テ相交ハルベシ(第85頁注意參照)。

【注意二】 A,Bヨリ相等シキ距離ニアル點二ツヲ求ムルトキハ,之ヲ結ビ付クル直線ハABノ垂直二等分線ナリ(37頁問題1參照)。上ノ作圖ニテ二ツノ圓ヲ作レルハ,カヤウノ點(C,C′)ヲ求ムルガ爲ナリ。

作圖題二 與ヘラレタル角ヲ二等分スルコト。

【作圖】 BACヲ與ヘラレタル角トセヨ。

二ツノ邊AB,ACノ上ニ於テ,任意ノ相等シキ長サAB,ACヲ取レ。B及ビCヨリ相等シキ距離ニアル點Dヲ求メヨ。



(B及ビCヲ中心トシ,

相等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,其交點ヲ D トセヨ)。AD ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ AD ハ ∠BAC ヲ二等分スベシ。

【證】 作圖ニヨリ, BA=CA, BD=CD

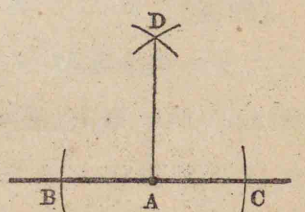
故ニ $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

從テ AD ハ ∠BAC ヲ二等分ス(定理十二)。

40. 垂線ノ作圖。

作圖題三 與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル一點ニ於テ,此直線ニ垂線ヲ引クコト。

【作圖】 BC ヲ與ヘラレタル直線, A ヲ其上ニ與ヘラレタル點トセヨ。



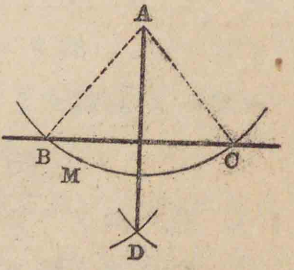
直線 BC ノ上ニ於テ A ノ兩側ニ任意ノ相等シキ長サ AB, AC ヲ取レ。B 及ビ C ヨリ相等シキ距離ニアル點 D ヲ求メヨ。AD ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ AD ハ BC ニ垂直ナルベシ(第19節,注意ニ參照)。

【注意】 上ノ作圖ハ前節ノ作圖題二ヲ平角 BAC ニ應用セルモノト考フルコトヲ得。

作圖題四 與ヘラレタル直線外ノ與ヘラレタル一點ヨリ,此直線ニ垂線ヲ引クコト。

【作圖】 BC ヲ與ヘラレタル直線, A ヲ其上ニアラザル與ヘラレタル點トセヨ



A ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ作リ,直線 BC ト二ツノ點 B, C ニ於テ交ハラシメヨ。B 及ビ C ヨリ相等シキ距離ニアル點 D ヲ求メヨ。

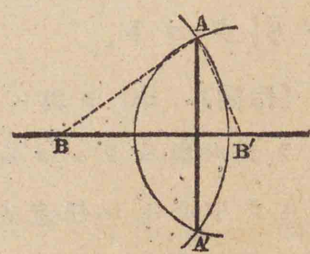
然ラバ AD ハ BC ニ垂直ナルベシ。

【注意一】 圓ノ半徑ガ小サ過ギルトキハ圓ガ直線 AB ニ交ハラザルコトアルベシ。サレド半徑ヲ適當ニ大キク取ルトキハ(例ヘバ BC

ニ對シテAト反對ノ側ニ任意ノ點Mヲ取リ，半徑ヲAMニ等シクスルトキハ，圓ハ必ズ二ツノ點ニ於テBCニ交ハルベシ(定理二十七)。

【注意二】 上ノ作圖ハ作圖題三ト全ク同一ナルコトニ注意スベシ。次ノ作圖ハ唯二ツノ圓ヲ要スルニ止マル點ニ於テ一層簡單ナリ。

直線上ノ任意ノ點B, B′ヲ中心トシ，ソレゾレBA, B′Aヲ半徑トシテ圓ヲ作リ，A及ビA′ニ於テ交ハラシメヨ。AA′ヲ結ビ付ケヨ。然ラバAA′ハ求ムル垂線ナリ(定理二十八)。



問　　題

1. 邊ヲ知リテ正方形ヲ作ルコト。

2. 對角線ヲ知リテ正方形ヲ作ルコト。

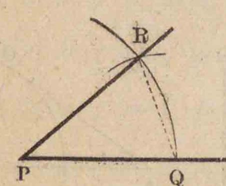
3. 頂角及ビ高サヲ知リテ二等邊三角形ヲ作ルコト。

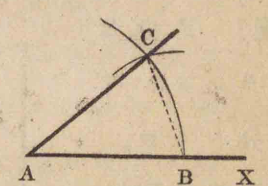
4. 與ヘラレタル直線ヲ軸トシテ與ヘラレタル點ト對稱ナル點ヲ作ルコト。

41. 角及ビ三角形ノ作圖。

作圖題五 與ヘラレタル直線ヲ一邊トシ，與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ作ルコト。

【作圖】 Pヲ與ヘラレタル角，AXヲ與ヘラレタル直線トセヨ。





Pヲ中心トシ，任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ，$\angle P$ノ二邊トQ及ビRニ於テ交ハラシメヨ。Aヲ中心トシ，同ジ長サノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ，又Bヲ中心トシテQRニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ，AXノ任意ノ側ニ於テ，前ノ圓周トCニ於テ交ハラシメヨ，ACヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ$\angle A$ハ$\angle P$ニ等シカルベシ。

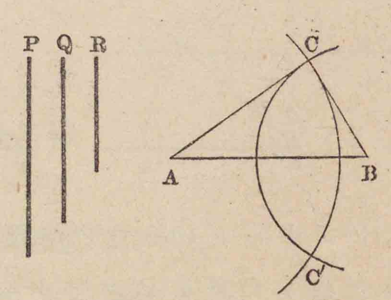
【證】 作圖ニヨリ $AB=PQ$, $AC=PR$, $BC=QR$

故ニ　$\triangle ABC \equiv \triangle PQR,\ \angle A = \angle P$

【注意】 上ノ作圖ニ於テA, Bヲ中心トシテ二ツノ圓ヲ作レルハ,△PQRヲABノ上ニ「移ス」ガタメナリ。同様ノ方法ニヨリテ,次ノ問題ヲ解クコトヲ得。

作圖題六 三ツノ邊ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

【作圖】 P, Q, Rヲ與ヘラレタル三ツノ線分トセヨ。任意ノ直線ヲ引キ,其上ニPニ等シキ線分ABヲ取レ。Aヲ中心,Qヲ半徑トシテ,又Bヲ中心,Rヲ半徑トシテ,圓周ヲ作レ。Cヲ此等二ツノ圓周ノ交點トセヨ。AC, BCヲ結ビ付ケヨ。



然ラバABCハ求ムル三角形ナルベシ。

【注意一】 PガQ, Rノ和ヨリモ小ニシテ,差ヨリモ大ナルトキノ外ハ二ツノ圓周ハ相交ハ

ラズ。此場合ニハ,問題ニ解ナシ。

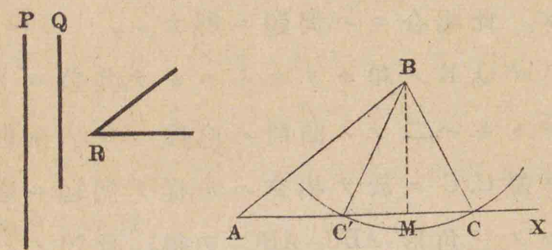
PガQ, Rノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナルトキハ,二ツノ圓周ハ直線ABノ兩側ニ二ツノ點C, C'ニ於テ相交ハル,從テ問題ニ適スル二ツノ三角形ABC, ABC'ヲ得。此等ノ三角形ハ全ク相等シ。

【注意二】 三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナリ。逆ニ三ツノ線分ノ中ノ一ツガ他ノ二ツノ和ヨリモ小ニシテ,其差ヨリモ大ナルトキハ,此等ノ線分ニ等シキ邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコトヲ得(定理三十,系)。

作圖題七 二ツノ邊ト其一ツニ對スル角トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

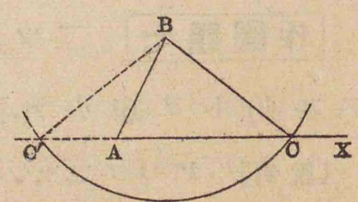
【説明】 P, Qヲ二ツノ與ヘラレタル線分,∠Rヲ與ヘラレタル角トセヨ。二ツノ邊ハソレゾレ線分P, Qニ等シク,Qニ等シキ邊ニ對スル角ハ∠Rニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ要ス。

【作圖】 Pニ等シク線分ABヲ取リ,∠Rニ等



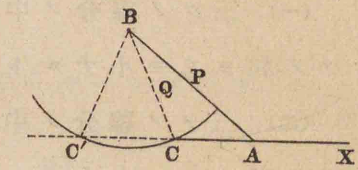
シク ∠BAX ヲ作レ。Bヲ中心トシ,Qニ等シキ半徑ヲ以テ圓周ヲ作リ,直線 AX ト C 及ビ C′ ニ於テ交ハラシメヨ。然ラバ ABC 及ビ ABC′ ハ求ムル三角形ナルベシ。

【注意】 Q ガ B ヨリ AX ヘ下セル垂線 BM ヨリモ小ナルトキハ,圓周ハ直線 AX ニ交ハラズ。此場合ニハ問題ニ解ナシ。



サレド,圓周ガ(無限)直線 AX ニ交ハリテモ,交點 C (又ハ C′) ガ A ニ對シテ X ト同ジ側(卽チ ∠BAX ノ邊 AX ノ上)ニアラザルトキハ, ∠BAX ハ三角形 ABC (又ハ ABC′) ノ外角トナルガ故ニ,此三角形ハ問題ニ適セズ。

Q ガ P ヨリモ大ナルトキニハ,圓周ハ直線 AX ニ交ハレドモ,一ツノ交點 C′ ハ A ニ對シテ X ト反對ノ側ニアリ。問題ニ適スル三角形ハ ABC 唯一ツナリ。



Q ガ P ヨリモ小ナル場合ニハ, A ガ銳角ナルトキニ限リ C, C′ ハイヅレモ A ニ對シテ X ト同ジ側ニアリ。三角形 ABC, ABC′ ハイヅレモ問題ニ適ス。A ガ鈍角ナルトキハ C, C′ ハイヅレモ A ニ對シテ X ト反對ノ側ニアリ。問題ニ適スル三角形ナシ。

(P=Q ナルトキ,及ビ Q=BM ナルトキハ,如何)。

問　題

1. 二邊ト其夾角トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

2. 一邊ト之ニ接スル二ツノ角トヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

3. 一邊ヲ知リテ,正三角形ヲ作ルコト。

4. 直角ヲ三等分スルコト。

5. 斜邊及ビ他ノ一邊ヲ知リテ直角三角形ヲ作ルコト。

6. 次ノ條件ノ中,一ツニ適合スル三ツノ線分ニ等シキ邊ヲ有スル三角形ヲ作ルコトヲ得。

(一) 三ツノ線分ノ中最モ大ナルモノガ,他ノ二ツノ和ヨリモ小ナルトキ。

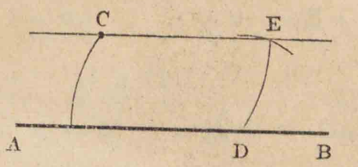
(二) 三ツノ線分ノ中最モ小ナルモノガ他ノ二ツノ差ヨリモ大ナルトキ。

7. 二邊ト其一ツニ對スル角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ニ於テ,相等シキ他ノ邊ニ對スル角ハ相等シキカ,又ハ補角ヲナス。

8. 二ツノ邊ト其大ナル方ニ對スル角トガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ。

42. 平行線ノ作圖。

作圖題八 與ヘラレタル直線外ノ一點ヲ通リ,此直線ニ平行ナル直線ヲ作ルコト。



【作圖】 ABヲ與ヘラレタル直線,Cヲ其上ニアラザル與ヘラレタル點トセヨ。

ABノ上ニ任意ノ點Dヲ取リ,Cヲ頂點,CDヲ一邊トシテ,CDニ對シテAト反對ノ側ニ,∠CDAニ等シク∠DCEヲ作レ。

然ラバCEハABニ平行ナルベシ。(定理四)。

問　　題

1. 與ヘラレタル直線ヨリ與ヘラレタル距離ニアル平行線ヲ引クコト。

2. 與ヘラレタル點ヲ通リ與ヘラレタル直線ト與ヘラレタル角ヲ作ル直線ヲ引クコト。

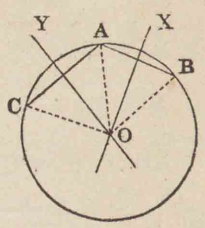
43. 三ツノ點ヲ通ル圓。

作圖題九 同一直線上ニアラザル三ツノ點ヲ通ル圓ヲ作ルコト。

【作圖】 A, B, Cヲ同一直線上ニアラザル三ツ

ノ點トセヨ。

AB, AC ヲ結ビ付ケヨ。AB, AC ヲ垂直ニ二等分スル直線 X, Y ヲ作リ(作圖題一),其交點ヲ O トセヨ(AB, AC ハ同一直線上ニアラザルガ故ニ,其垂線 X, Y ハ相交ハル)。O ヲ中心, OA ヲ半徑トシテ圓ヲ作レ。是即チ求ムル圓ナリ。



【證】 O ハ AB ノ垂直二等分線ノ上ニアルガ故ニ OA=OB, 又 O ハ AC ノ垂直二等分線ノ上ニアルガ故ニ OA=OC, 故ニ O ヲ中心, OA ヲ半徑トセル圓周ハ A, B, C ヲ通ル。

定義。 多角形ノスベテノ頂點ヲ通ル圓ヲ其**外接圓**トイヒ,多角形ハ此圓ニ**内接**ストイフ。

系 三角形ノ三ツノ邊ヲ垂直ニ二等分スル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。此點ハ三角形ノ外接圓ノ中心(三角形ノ**外心**)ナリ。

系二 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ下セル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル。

此點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

(垂心ハ三角形ノ各々ノ頂點ヲ通リ,之ニ對スル邊ニ平行ニ引ケル三ツノ直線ガ作ル三角形ノ外心ナリ)。

問題

1. 與ヘラレタル圓ノ中心ヲ求ムルコト。

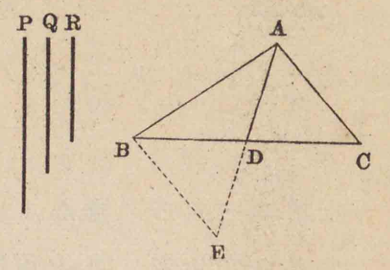
2. 與ヘラレタル點ヲ通リ,且與ヘラレタル點ニ於テ與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切スル圓ヲ作ルコト。

3. 圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ,之ニ切線ヲ引クコト。

44. 問題解法ノ例。

例一。二ツノ邊及ビ第三邊ニ對スル中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

P, Q ヲ與ヘラレタル二ツノ邊, R ヲ中線トセヨ。



假ニ ABC ヲ求ムル三角形ト考ヘ, AB=P, AC=Q トセヨ。又 D ヲ BC ノ中點, 從テ AD=R トセヨ。AD ヲ延長シ, AD ニ等シク DE ヲ取リ, BE ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　$\triangle EDB \equiv \triangle ADC$

故ニ　$BE=AC$

即チ AE, BE ハ知ラレタル長サニシテ, ABE ハ三ツノ邊ノ知レタル三角形ナリ。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

【作圖】 三ツノ邊 AB, BE, AE ガソレゾレ與ヘラレタル線分 P, Q 及ビ線分 R ノ二倍ニ等シキ三角形 ABE ヲ作レ。AE ノ中點 D ヲ B ニ結ビ付ケ, BD ノ延長ノ上ニ BD ニ等シク DC ヲ取レ。AC ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ ABC ハ求ムル三角形ナルベシ。

【證】 作圖ニヨリ

$$DA=DE,\quad DB=DC$$

又　$\angle ADC=\angle EDB$

故ニ　$\triangle ADC \equiv \triangle EDB,\quad AC=BE=Q$

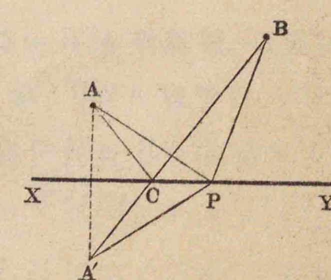
又作圖ニヨリ　$AB=P,\quad AD=R$

且 D ハ BC ノ中點, 從テ AD ハ △ABC ノ中線ナリ。

故ニ ABC ハ求ムル三角形ナリ。

例二。定直線ノ同ジ側ニ與ヘラレタル二點ヨリ, 此直線上ノ一點ニ至ル距離ノ和ヲ最モ小ナラシムルコト。

XY ヲ定直線, A, B ヲ其同ジ側ニ與ヘラレタル二點トセヨ。直線 XY ノ上ニ於テ點 C ヲ求メ, 屈折線 ACB ヲシテ, XY ノ上ノ他ノ任意ノ點 P ヲ通ル屈折線 APB ヨリモ小ナラシムルコトヲ要ス。



XY ノ上ノ任意ノ點 P ヲ A 及ビ B ニ結ビ付ケ

ヨ。XY ヲ軸トシテ A ト對稱ナル點ヲ A′ トシ, A′P ヲ結ビ付クルトキハ,

$$AP = A'P$$

故ニ屈折線 APB ノ長サハ屈折線 A′PB ノ長サニ等シ。

故ニ問題ハ A′ ヨリ XY ノ上ノ一點ヲ經テ B ニ至ル最短距離ヲ求ムルコトニ歸着ス。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

【作圖】 XY ヲ軸トシテ A ト對稱ナル點 A′ ヲ作レ。A′B ヲ結ビ付ケ, C ニ於テ XY ト交ハラシメヨ。AC ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ ACB ハ求ムル屈折線ナルベシ。

【證】 屈折線 ACB ハ直線 A′B ト等長,又屈折線 APB ハ屈折線 A′PB ト等長ナリ。

サテ直線 A′B ハ屈折線 A′PB ヨリモ短シ。

故ニ $$AC + CB < AP + PB$$

問 題

1. 二ツノ相隣レル邊及ビ一ツノ對角線ヲ知リテ平行四邊形ヲ作ルコト。

2. 二ツノ對角線及ビ一邊ヲ知リテ平行四邊形ヲ作ルコト。

3. 二邊ト其一ツニ對スル高サトヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

4. 二邊ト第三邊ニ對スル高サトヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

5. 與ヘラレタル直線ヲ任意ノ數ニ等分スルコト(定理二十二,系三參照)。

6. 三ツノ中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

7. 與ヘラレタル角ノ二邊ノ間ヘ,與ヘラレタル直線ニ平行ニ,與ヘラレタル長サノ直線ヲ入ルルコト。

8. 頂角及ビ底邊ヲ知リテ二等邊三角形ヲ作ルコト。

9. 與ヘラレタル角ノ内部ニアル定點ヲ中點トスル直線ヲ角ノ二邊ノ間ヘ入ルルコト。

10. 底邊,一ツノ底角及ビ他ノ二邊ノ和(又ハ差)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

11. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和(又ハ差)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

12. 與ヘラレタル直線ニ平行ニ,與ヘラレタル圓ノ切線ヲ引クコト。

13. 與ヘラレタル點ヲ中心トシテ,與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切スル圓ヲ作ルコト。

14. 與ヘラレタル點ニ於テ與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切スル定半徑ノ圓ヲ作ルコト。

15. 與ヘラレタル直線ノ兩側ニアル二ツノ定點ヨリ此直線上ノ一點ニ至ル距離ノ差ヲ最大ナラシムルコト。

第二章 中心角及ビ圓周角

45. 弧。中心角。

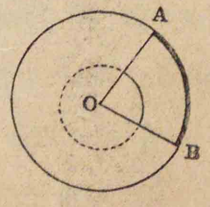
定義。 圓周ノ一部分ヲ弧トイフ。

同ジ圓又ハ相等シキ圓ノ弧ハ其大小ヲ比較スルコトヲ得。即チ重ネ合ハセ得ベキ二ツノ弧ハ相等シク,又甲ノ弧ヲ乙ノ弧ノ一部分ト重ネ合セ得ベキトキハ,甲ハ乙ヨリモ小ナリ。

圓周上ノ二點 A, B ハ圓周ヲ二ツノ**共軛弧**ニ分ツ。

定義。 二ツノ半徑ノ作レル角ヲ**中心角**トイフ。

二ツノ半徑 OA, OB ハ互ニ共軛ナル二ツノ中心角ヲ作ル。此等ノ中心角ハ A, B ヲ兩端トセル二ツノ共軛弧ノ上ニ立ツ。

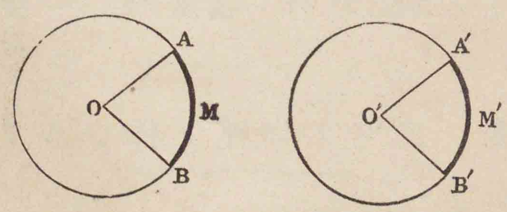


定理三十一 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シク,又相等シカラザル中心角ノ中,大ナル方ニ對スル弧ガ,小ナル方ニ對スル弧ヨリモ大ナリ。

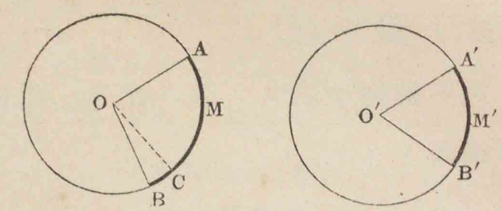
【證】 O,O′ ヲ相等シキ二ツノ圓トシ,

(一) $\angle AOB = \angle A'O'B'$

トセヨ。



$\angle A'O'B'$ ヲ $\angle AOB$ ニ重ネ,邊 O′A, O′B′ ヲソレゾレ邊 OA, OB ノ上ニ重ヌルトキハ,點 A′ B′, ハ點 A, B ニ重ナリ,二ツノ圓周ハ全ク相重ナリ,弧 A′M′B′ ハ弧 AMB ニ重ナル。故ニ二ツノ弧ハ相等シ。



(二) 次ニ $\angle AOB > \angle A'O'B'$

トセヨ。O′A′ ガ OA ノ上ニ重ナリ, $\angle A'O'B'$ ガ $\angle AOB$ ノ内部ニ落ツルヤウニ,二ツノ圓ヲ重ネ合ハセ,O′B′ ヲ OC ノ位置ニ來ラシメヨ。然ラバ OC ハ角 AOB ノ内部ニアリ,從テ C ハ弧 AMB ノ上ノ一點ナリ。故ニ弧 A′M′B′ ハ弧 AMC ニ重ナリ,從テ弧 AMB ヨリモ小ナリ。

系 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シク,相等シカラザル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ中,大ナル弧ノ上ニ立ツ方ガ,小ナル弧ノ上ニ立ツ方ヨリモ大ナリ。

定義。 劣角ナル中心角ニ對スル弧ハ半圓周ヨリモ小ナリ,之ヲ**劣弧**トイフ。優角ナル中心角ニ對スル弧ハ半圓周ヨリモ大ナリ,之ヲ**優弧**トイフ。

46. 弦ノ張ル弧。

定義。 弦ハ圓周ヲ二ツノ弧ニ分ツ。此弦ハ此等ノ弧ヲ張ルトイフ。

一ツノ弧ト之ヲ張ル弦トニテ圍マレタル平面形ヲ**弓形**トイフ。

弦ハ圓ヲ二ツノ**共軛弓形**ニ分ツ。優弧ノ屬スル弓形ハ半圓ヨリモ大ナリ,之ヲ**優弓形**トイフ。

劣弧ノ屬スル弓形ハ半圓ヨリモ小ナリ,之ヲ**劣弓形**トイフ。(劣弧ハ之ヲ張ル弦ニ對シテ中心ト反對ノ側ニアリ,優弧ハ弦ニ對シテ中心ト同ジ側ニアリ。即チ中心ハ劣弓形ノ外部,優弓形ノ內部ニアリ)。

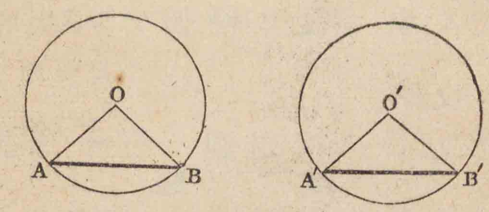
定理三十二 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ヲ張ル弦ハ相等シ。相等シカラザル二ツノ劣弧ヲ張ル弦ノ大小ハ劣弧ノ大小ニ從ヒ,相等シカラザル二ツノ優弧ヲ張ル弦ノ大

小ハ優弧ノ大小ニ反ス。

【證】 相等シキ二ツノ圓 O, O′ ニ於テ

(一) 弧 $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ ハ相等シトセヨ。

然ラバ $\angle AOB=\angle A'O'B'$ (定理三十一,系)



故ニ $\triangle OAB\equiv\triangle O'A'B'$ (定理八)

從テ $AB=A'B'$

(二) 次ニ劣弧 $\widehat{AB}$ ハ劣弧 $\widehat{A'B'}$ ヨリモ大ナリトセヨ。

然ラバ $\angle AOB>\angle A'O'B'$ (定理三十一,系)

故ニ $\triangle OAB$, $\triangle O'A'B'$ ニ於テ

$AB>A'B'$ (定理十七)

(三) 最後ニ,優弧 $\widehat{AB}$ ハ優弧 $\widehat{A'B'}$ ヨリモ小ナリトセヨ。

然ラバ劣弧 $\widehat{AB}$ ハ劣弧 $\widehat{A'B'}$ ヨリモ大ナリ。故ニ(二)ニヨリテ

$AB>A'B'$

系 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弦ハ相等シキ劣弧ヲ張ル。相等シカラザル弦ノ張ル劣弧ノ大小ハ弦ノ大小ニ從ヒ,優弧ノ大小ハ弦ノ大小ニ反ス。

問題

1. 弦ノ中點ヲ通ル直徑ハ其弦ガ張ル弧ヲ二等分ス。
2. 與ヘラレタル弧ヲ二等分スルコト。
3. 同ジ圓ニ於テ,一ツノ弧ヲ張ル弦ハ,其半分ニ等シキ弧ヲ張ル弦ノ二倍ヨリモ小ナリ。

47. 圓周角。

定義。 圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ガ作ル角ヲ**圓周角**トイフ。

圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マレタル**弧ノ上ニ立ツ**トイフ。

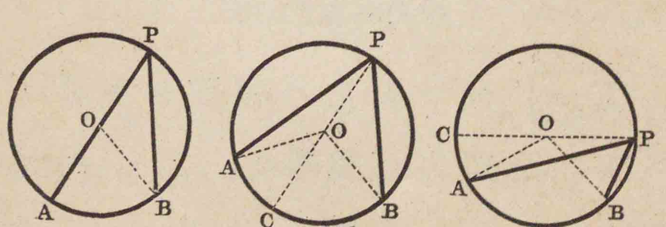
弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲ弦ノ兩端ニ結ビ付クル直線ガ作ル圓周角ヲ此**弓形ノ含ム角**又ハ**弓形內ノ角**トイフ。

故ニ弓形ガ含ム角ハ卽チ弓形ノ弧ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角ナリ。

定理三十三 圓周角ハ同ジ弧(又ハ之ニ等シキ弧)ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ。

【證】 圓Oノ弧ABノ上ニ立ツ圓周角ヲAPB, 中心角ヲAOBトセヨ。

中心Oガ(一) ∠APBノ一邊例ヘバPAノ上ニアルカ,又ハ(二) ∠APBノ內部ニアルカ,又ハ(三) ∠APB



ノ外部ニアルカニヨリ,三ツノ場合ヲ生ズ。

(一) 中心 O ガ PA ノ上ニアルトキハ,中心角 AOB ハ二等邊三角形 OPB ノ頂角ニ接セル外角ナリ。故ニ

$$\angle AOB = \angle OPB + \angle OBP = 2.\angle APB$$

故ニ $\angle APB$ ハ $\angle AOB$ ノ半分ニ等シ。

(二) 中心 O ガ圓周角 APB ノ内部ニアルトキハ,直徑 POC ヲ引ケ。然ラバ(一)ニヨリ

$$\angle APC = \frac{1}{2}\angle AOC, \quad \angle BPC = \frac{1}{2}\angle BOC$$

故ニ

$$\angle APB = \angle APC + \angle BPC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC)$$

即チ $$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

(三) 中心 O ガ $\angle APB$ ノ外部ニアルトキハ

$$\angle APB = \angle BPC - \angle APC = \frac{1}{2}(\angle BOC - \angle AOC)$$

即チ $$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

系一 同ジ弧(又ハ相等シキ弧)ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ。同ジ弓形ニ含マルル角ハ相等シ。

系二 半圓ガ含ム角ハ直角ナリ。

又劣弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鋭角,優弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鈍角ナリ。

問題

1. 互ニ平行ナル二ツノ弦ハ圓周ノ上ニ相等シキ二ツノ弧ヲ夾ム。

2. 三角形ノ二ツノ邊ヲ直徑トスル二ツノ圓周ハ第三邊ノ上ニ於テ相交ハル。

3. 二ツノ圓ガ A 及ビ B ニ於テ相交ハルトキハ,A ヲ通ル二ツノ直徑ノ他ノ端トBトハ同一直線上ニアリ。

4. 圓內ノ一點ニ於テ相交ハル二ツノ弦ガ作ル角ハ,其角及ビ其對頂角ノ邊ノ間ニ夾マレタル二ツノ弧ノ和ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

5. 圓外ノ一點ヨリ引ケル二ツノ割線ガ作ル角ハ,此等ノ割線ノ間ニ夾マレタル二ツノ弧ノ差ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

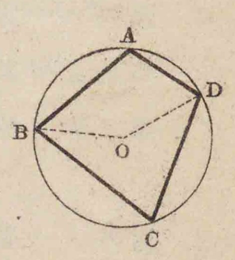
6. 圓ノ內接三角形ノ一ツノ頂點ニ於ケル內角及ビ外角ノ二等分線ガ再ビ圓周ニ交ハル點ハ，此頂點ニ對スル邊ヲ垂直ニ二等分スル直徑ノ兩端ナリ。

48. 內接四角形。

定理三十四 圓ニ內接スル四角形ノ相對スル角ハ補角ヲナス。

又逆ニ相對スル角ガ補角ヲナス四角形ハ圓ニ內接シ得ベキモノナリ。

【證】(一) ABCD ヲ圓 O ニ內接セル四角形トセヨ。中心 O ヲ B, D ニ結ビ付ケヨ。

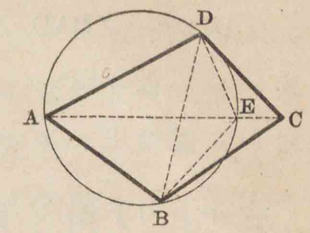


然ラバ $\angle A$, $\angle C$ ハ互ニ共軛ナル二ツノ角 BOD ノ半分ニ等シ(定理三十三)。

故ニ $\angle A$, $\angle C$ ノ和ハ二直角ニ等シ，卽チ $\angle A$, $\angle C$ ハ補角ヲナス。

同ジヤウニ $\angle B$, $\angle D$ モ補角ヲナス。

(二) 次ニ四角形ABCD ノ相對スル角 $\angle A$, $\angle C$ ガ互ニ補角ナリトセヨ。



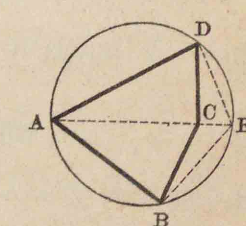
三ツノ頂點 A, B, D ヲ通ル圓周ヲ作レ。然ラバ BD ニ對シテ A ト反對ノ側ニアル弓形 BED ノ含ム角ハ(一)ニヨリテ $\angle A$ ノ補角ニ等シ。

サテ假ニ頂點 C ハ弧 BED ノ上ニアラズシテ，弓形 BED ノ外部ニアリトスルトキハ，對角線 AC ハ弧 BED ト交ハルベシ。其交點ヲ E トセヨ。

然ラバ $\angle ACB < \angle AEB$, $\angle ACD < \angle AED$

故ニ $\angle BCD < \angle BED$

卽チ $\angle BCD$ ハ $\angle BAD$ ノ補角ヨリモ小ナルベシ。



又假ニ C ハ弓形 BED ノ內部ニアリトスルトキハ，對角線AC ノ延長ガ弧 BED ニ交ハル點ヲ E トセヨ。

然ラバ　∠ACB＞∠AEB,　∠ACD＞∠AED

故ニ　　∠BCD＞∠BED

卽チ ∠BCD ハ ∠BAD ノ補角ヨリモ大ナルベシ。

故ニ C ハ弧 BED ノ上ニアリ。卽チ A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアリ。

系一 弓形ノ弦ガ弓形ノ內部ニアル點ニ於テ張ル角ハ,弓形ノ含ム角ヨリモ大ナリ。又弦ガ弓形ト同ジ側ニテ其外部ニアル點ニ於テ張ル角ハ弓形ノ含ム角ヨリモ小ナリ。

系二 一ツノ線分ガ其同ジ側ナル二ツノ點ニ於テ相等シキ角ヲ張ルトキハ,此等ノ二ツノ點ト線分ノ兩端トハ同一ノ圓周上ニアリ。

問　題

1. 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナリ。

2. 互ニ平行ナラザル二ツノ邊ガ相等シキ梯形ハ圓ニ內接スルコトヲ得。

3. 圓ニ內接スル四角形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,對角線ノ交點ヨリ各邊ヘ下セル垂線ノ延長ハ之ニ對スル邊ノ中點ヲ通ル。

4. 三角形ノ頂點ヨリ對邊ヘ下セル三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル(本節ノ定理ヲ用ヒテ之ヲ證明セヨ)。又垂線ノ足ヲ頂點トセル三角形(**垂足三角形**)ノ邊ハ二ツヅツ原ノ三角形ノ邊ト相等シキ角ヲナス。

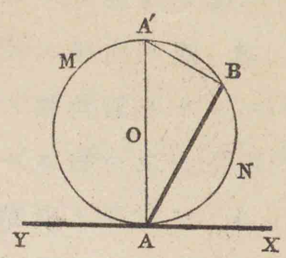
5. 三角形ABCノ外接圓ノ周ノ上ノ點Mヨリ邊 BC, CA, AB (又ハ其延長)ヘ下セル垂線ノ足 D, E, F ハ同一直線上ニアリ(此直線ヲ三角形ABCニ於ケル點Mノ**しむそん線**トイフ)。

49. 切線ト弦トノ作ル角。

定理三十五 切線ト其切點ヨリ引ケル弦トノ作ル角ハ,其角ノ內ニ夾マレタル弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

【說明】 AB ヲ圓 O ノ弦, XY ヲ A ニ於ケル切

線トセヨ。然ラバ$\angle BAX$ハ弧ANBノ上ニ立ツ圓周角ニ等シク，$\angle BAY$ハ弧AMBノ上ニ立ツ圓周角ニ等シカルベシ。



【證】 直徑AOA'ヲ引キ，A'Bヲ結ビ付ケヨ。切線XAYト弦ABトノ作ル二ツノ角ノ中，$\angle BAX$ガ鋭角ナリトセヨ。

然ラバ$\angle XAA'$ハ直角ナルガ故ニ，AA'ハ$\angle XAB$ノ外部ニアリ。從テ角AA'Bハ弧ANBノ上ニ立ツ圓周角ナリ。

サテ$\angle XAB$ハ$\angle BAA'$ノ餘角ナリ。

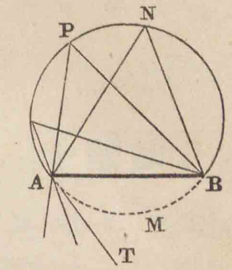
又三角形ABA'ニ於テ$\angle B$ハ直角ナルガ故ニ$\angle AA'B$ハ$\angle BAA'$ノ餘角ナリ。

故ニ $\angle XAB=\angle AA'B$

卽チ$\angle XAB$ハ弧ANBノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

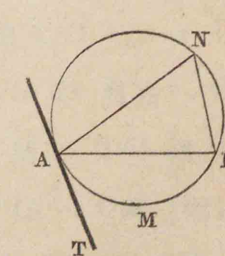
次ニ切線ト弦ABトノ作ル鈍角$\angle YAB$ハ$\angle XAB$ノ補角ナリ。又弧AMBノ上ニ立ツ圓周角ハ共軛弧ANBノ上ニ立ツ圓周角ノ補角ナリ。故ニ$\angle YAB$ハ弧AMBノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ。

【注意】 Pヲ弧ANBノ上ノ任意ノ一點トスルトキハ，$\angle APB$ハ共軛弧AMBノ上ニ立ツ圓周角$\angle ANB$ニ等シ。今Pガ弧ANBノ上ヲ動キ，漸次Aニ近ヅキ行クト考フルトキ，直線PBハ漸次ABノ位置ニ近ヅキ直線PAハ漸次Aニ於ケル切線ATノ位置ニ近ヅキ，其際角APBノ大サハ變ラズシテ常ニ$\angle ANB$ニ等シ。



サテPガ竟ニAニ合スルトキ，直線PBハ弦ABニ合シ，PAハAニ於ケル切線ATニ合ス。故ニ$\angle TAB$ハ$\angle ANB$ニ等シキヲ知ルベシ。

系 弦(AB)ト其一端ヲ通ル直線(AT)トノ作ル角($\angle BAT$)ガ,此角ト同ジ側ニ於テ弦ノ張ル弧(AMB)ノ上ニ立ツ圓周角($\angle ANB$)

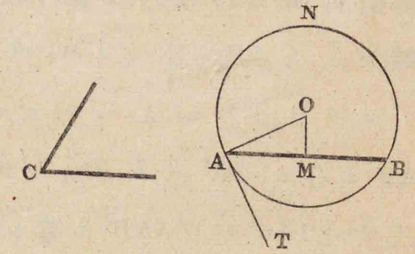


ニ等シキトキハ,直線(AT)ハAニ於テ圓ニ切ス。

作圖題十 與ヘラレタル線分ノ上ニ,與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ作ルコト。

【作圖】 ABヲ與ヘラレタル線分,Cヲ與ヘラレタル角トセヨ。

$\angle C$ ニ等シキ角 $\angle BAT$ ヲ作レ。AT ニ垂直ニ AO ヲ引キ,又 AB ヲ垂直ニ二等分スル直線 MO ヲ引ケ。AO, MO ハ相交ハル,其交點ヲ O トセヨ。O ヲ中心, OA ヲ半徑トシテ圓ヲ作レ。然ラバ直線 AB ニ對シテ $\angle BAT$ ト反對ノ側ニアル弓形 ANB ハ,卽チ求ムル弓形ナルベシ。



【證】 MO ハ AB ヲ垂直ニ二等分スルガ故ニ, $OA=OB$ 故ニ圓 O ハ點 A, B ヲ通ル。又作圖ニヨ

リ $AT \perp OA$ 故ニ圓 O ハ A ニ於テ AT ニ切ス。故ニ弓形 $\angle ANB$ ノ含ム角ハ $\angle BAT$ ニ等シ(定理三十五)卽チ $\angle C$ ニ等シ。

問題

1. 與ヘラレタル圓ニ,角ノ與ヘラレタル三角形ヲ內接セシムルコト。

2. 割線ト切線トガ作ル角ハ,切線ト割線トノ間ニ夾マレタル二ツノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ノ差ニ等シ。

3. 弦ト切線トガ作ル角ノ二等分線ハ此角ノ內ニ夾マレタル弧ノ中點ヲ通ル。

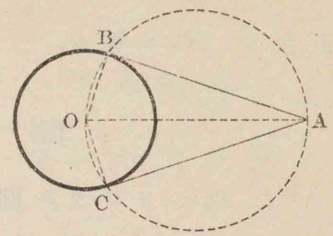
4. 二等邊三角形ノ底邊ト底角ノ二等分線トガ作ル三角形ノ外接圓ハ原ノ三角形ノ二ツノ邊ニ切ス。

50. 一點ヲ通ル切線。

作圖題十一 與ヘラレタル圓外ノ一點ヨリ,此圓ニ切線ヲ引クコト。

【作圖】 Oヲ與ヘラレタル圓, Aヲ其外部ニ與ヘラレタル點トセヨ。

OA ヲ結ビ付ケ, OA ヲ直徑トシテ圓周ヲ作レ。此圓周ハ圓周 O ニ交ハル。其交點ヲ B 及ビ C トセヨ。



AB, AC ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ AB, AC ハソレゾレ B, C ニ於テ圓 O ニ切スベシ。

【證】 作圖ニヨリ $\angle OBA$, $\angle OCA$ ハ直角ナリ(定理三十三,系二)。サテ B, C ハ圓周 O ノ上ニアリ。故ニ AB ハ B ニ於テ, 又 AC ハ C ニ於テ圓 O ニ切ス(定理二十七,系一)。

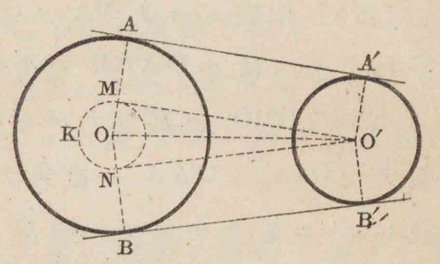
系 圓外ノ一點ヨリ此圓ニ二ツノ切線ヲ引クコトヲ得。而モ唯二ツニ限ル。此等ノ切線ハ相等シク,且與ヘラレタル點ト圓ノ中心トヲ結ビ付クル直線ヲ軸トシテ互ニ對稱ナリ。

51. 二ツノ圓ノ共通切線。

作圖題十二 二ツノ與ヘラレタル圓ニ共通ノ切線ヲ引クコト。

O, O′ ヲ與ヘラレタル圓, R, R′ ヲ其半徑トセヨ。

(第一) AA′ ヲ共通ノ切線, A, A′ ヲ其切點ト假定シ,又二ツノ圓ガ共ニ共通ノ切線 AA′ ノ同ジ側ニアリトセヨ。(AA′ ヲ**外側共通切線**トセヨ)。



圓 O ハ圓 O′ ヨリモ大ナリトシ ($R>R'$), O′ ヨリ AA′ ニ平行ナル直線ヲ引キ, M ニ於テ OA ト交ハラシメヨ。然ラバ O′A′AM ハ矩形ニシテ

$$OM=OA-O'A'=R-R'$$

從テ O′M ハ M ニ於テ, O ヲ中心, OM 卽チ $R-R'$ ヲ半徑トセル圓 K ニ切ス。ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

【作圖】 O ヲ中心トシ, $R-R'$ ニ等シキ半徑ヲ

以テ圓 K ヲ作リ, O′ ヨリ此圓ニ切線 O′M, O′N ヲ引キ, M, N ヲ共切點トセヨ。OM, ON ヲ延長シテ圓周 O ト A, B ニ於テ交ハラシメヨ。O′ ヨリソレゾレ OA, OB ト同ジ向キニ平行ナル半徑 O′A′, O′B′ ヲ引ケ。AA′, BB′ ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ AA′ BB′ ハ圓 O, O′ ノ外側共通切線ナルベシ。

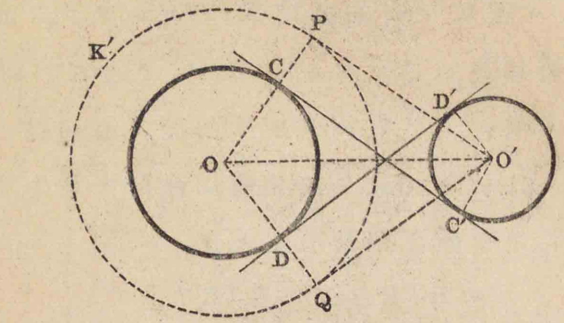
【證】 作圖ニヨリ MA ハ O′A′ ニ等シク,且之ニ平行ナリ。故ニ O′A′AM ハ平行四邊形ナリ。

サテ ∠OMO′ ハ直角ナルガ故ニ O′A′AM ハ矩形, 從テ ∠OAA′, ∠O′A′A ハ直角ナリ。故ニ AA′ ハ A 及ビ A′ ニ於テ,ソレゾレ圓 O 及ビ O′ ニ切ス。

同ジヤウニ BB′ ハ B 及ビ B′ ニ於テ,ソレゾレ圓 O 及ビ O′ ニ切ス。

(第二) 與ヘラレタル圓ガ共通ノ切線 CC′ ノ兩側ニアリトセヨ。(CC′ ヲ**內側共通切線**トセヨ)。此場合ニハ上ト同ジヤウニシテ,次ノ作圖法ヲ得。

【作圖】 O ヲ中心トシ,二ツノ圓 O, O′ ノ半徑ノ和 R+R′ ニ等シキ半徑ヲ以テ圓 K′ ヲ作リ, O′ ヨリ此圓ニ切線 O′P, O′Q ヲ引ケ。OP, OQ ヲ結ビ付ケ,圓周 O トソレゾレ C, D ニ於テ交ハラシメヨ。



O′ ヨリソレゾレ OC, OD ト反對ノ向キニ平行ナル半徑 O′C′, O′D′ ヲ引ケ。CC′, DD′ ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ CC′, DD′ ハ二ツノ圓 O, O′ ノ內側共通切線ナルベシ。

【注意】 二ツノ圓ノ位置ノ關係ノ五ツノ場合ニ於ケル共通切線ノ數ハ次ノ如シ。

(一) 二ツノ圓ガ各〻他ノ外部ニアルトキハ

$$OO'>R+R'$$

從テ O′ ハ圓 K 及ビ K′ ノ外部ニアリ。故ニ O′ ヨリ圓 K 及ビ K′ ヘ各〻二ツノ切線ヲ引クコトヲ得,從テ外側及ビ內側共通切線ハ各〻二ツアリ。

(二) 二ツノ圓ガ外切スルトキハ,

$$OO'=R+R'$$

從テ O' ハ圓 K ノ外部,圓周 K' ノ上ニアリ。故ニ外側共通切線ハ二ツアレドモ,O' ヲ通ズル圓 K' ノ切線ハ唯一ツニ限ルガ故ニ,內側共通切線ハ唯一ツアリ。切點ニ於ケル共通切線卽チ是ナリ。

(三) 二ツノ圓ガ相交ハルトキハ,

$$R+R'>OO'>R-R'$$

從テ O' ハ圓 K ノ外部,圓 K' ノ內部ニアリ。故ニ外側共通切線ハ二ツアレドモ,O' ヨリ圓 K' ヘ切線ヲ引クコトヲ得ザルガ故ニ,內側共通切線ハナシ。

(四) 二ツノ圓ガ內切シ,圓 O' ガ圓 O ノ內部ニアルトキハ

$$OO'=R-R'$$

從テ O' ハ圓周 K ノ上,圓 K' ノ內部ニアリ。故ニ外側共通切線ハ切點ニ於ケル共通切線唯一ツニシテ,內側共通切線ハナシ。

(五) 二ツノ圓ノ中,圓 O' ガ圓 O ノ內部ニアルトキハ,

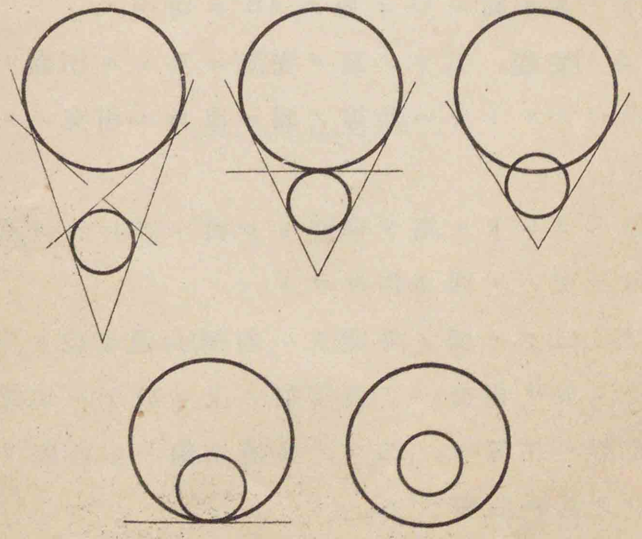
$$OO'<R-R'$$

從テ O' ハ圓 K 及ビ K' ノ內部ニアリ。故ニ共通切線ハ一ツモナシ。

以上ノ結果ヲ綜合スルトキハ次ノ表ヲ得。

二ツノ圓ノ位置ノ關係	外側共通切線ノ數	內側共通切線ノ數	共通切線ノ總數
隔離	二	二	四
外切	二	一	三
交會	二	○	二
內切	一	○	一
包容	○	○	○

(二ツノ圓ガ相等シキ場合ハ如何)。



問　　題

1. 圓ニ外切スル四邊形(各邊ガ圓ニ切スル四邊形)ノ相對スル邊ノ和ハ相等シク,又相對スル邊ガ中心ニ於テ張ル角ハ補角ヲナス。

2. 相等シキ二ツノ弧ノ兩端ニ於ケル四ツノ切線ガ作ル外切四邊形ノ相隣レル邊ハ二ツヅツ相等シ。

3. 圓 O ノ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ガ第三ノ切線ト交ハル點ヲ C, D トスルトキハ, CD ヲ直徑トスル圓ハ O ニ於テ AB ニ切ス。

4 [**定義**。二ツノ圓ノ交點ニ於ケル切線ガ互ニ垂直ナルトキハ,此等ノ圓ハ直角ニ相交ハルトイフ]。

與ヘラレタル點ヲ中心トシ,與ヘラレタル圓ト直角ニ交ハル圓ヲ作ルコト。

5. 二ツノ圓ノ外側(又ハ內側)共通切線ハ中心線上ニ於テ相交ハリ,各切線ノ上ニ於ケル切點間ノ距離ハ相等シ。(二ツノ共通切線ハ中心線ヲ軸トシテ互ニ對稱ナリ)。

6. 二ツノ圓ノ外側共通切線ト內側共通切線トガ相交ハル四ツノ點ハ二ツノ圓ノ中心ヲ通ル同一圓周上ニアリ。

二ツノ圓ガ外切スルトキハ如何。

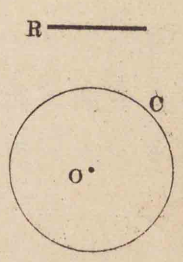
7. 與ヘラレタル點ヲ通リ,與ヘラレタル圓內ニ定長ノ弦ヲ引クコト。

8. 二ツノ與ヘラレタル圓ヘ一ツノ割線ヲ引キテ,各圓ガ此割線ヨリ截リ取ル弦ヲソレゾレ與ヘラレタル直線ニ等シカラシムルコト。

第三章 軌 跡

52. 軌跡ノ定義。

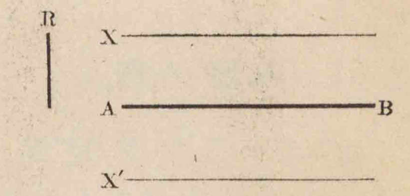
定點Oヲ中心トシ,定直線Rニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ヲCトスルトキハ,圓周Cノ上ノ任意ノ點トOトノ距離ハ必ズRニ等シク,圓周Cノ上ニアラザル點トOトノ距離ハ決シテRニ等シカラズ。カヤウノ狀態ヲ次ノ如ク簡單ニ言ヒ表ハスコトヲ得。



定點ヨリ定距離ニアル點ノ軌跡ハ,定點ヲ中心トシ,定距離ニ等シキ半徑ヲ有スル圓周ナリ。

或點ガ「定點OヨリRニ等シキ距離ニアリ」トイフ性質ヲ保有シツツ平面ノ上ヲ動クト考フルトキハ,此點ガ通過スベキ軌道ハOヲ中心トセル圓周Cニシテ,決シテ其外ニ逸出スルコトヲ得ザルヲ言フナリ。

軌跡ハ又一ツヨリモ多クノ線ノ集マリナルコトアリ。例ヘバ定直線ABヨリ定距離Rニアル點ノ軌跡ハABノ兩側ニ於テ,ABヨリRニ等シキ距離ニアル二ツノ平行線X, X'ナリ。卽チ(第一)X又ハX'ノ上ノ點ハ必ズABヨリRニ等シキ距離ニアリ,又(第二)X又ハX'ノ上ニ(Xノ上ニモ,又X'ノ上ニモ)アラザル點ハ,ABヨリノ距離Rニ等シカラズ。



或線(一ツノ線又ハ一ツヨリモ多クノ線)ガ或性質ヲ有スル點ノ軌跡ナリトハ

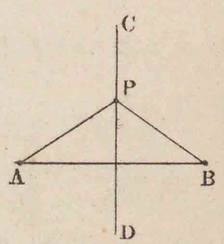
(第一) 此線ノ上ニアル點ハ必ズ此性質ヲ有シ,又

(第二) 此線ノ上ニアラザル點ハ決シテ此性質ヲ有セザルコト(換言スレバ此性質ヲ有スル點ハ必ズ此線ノ上ニアルコト)ヲイフ。

53. 軌跡ノ例。

例一。 二ツノ定點ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ,此等ノ定點ヲ結ビ付クル直線ノ垂直二等分線ナリ。

【證】 A, B ヲ二ツノ定點, CD ヲ AB ノ垂直二等分線トセヨ。



然ラバ(第一) CD ノ上ノ任意ノ點ヲ P トスルトキハ

$$PA=PB$$

即チ CD ノ上ノ點ハ必ズ A, B ヨリ相等シキ距離ニアリ。

(第二) 逆ニ P ヲ A, B ヨリ相等シキ距離ニアル點トスルトキハ, P ハ直線 CD ノ上ニアリ。

故ニ直線 CD ノ上ニアラザル點ハ,決シテ A, B ヨリ相等シキ距離ニアルコトヲ得ズ。

(第一)及ビ(第二)ニヨリ,直線 CD ハ A, B ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ナルコトヲ知ル。

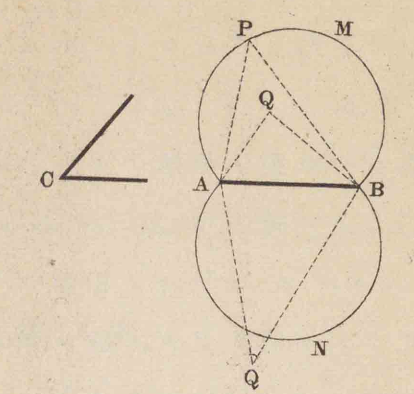
【注意】 上ノ證ノ中(第一)ノミニテハ,直線 CD ノ外ニモ,ナホ A, B ヨリ相等シキ距離ニアル點ガアラズヤ,明ナラズ。故ニ(第二)ガ必要ナリ。又(第二)ノミニテハ,直線 CD ノ上ニ A, B ヨリ相等シキ距離ニアラザル點ガ混ジテハアラズヤ,疑ハシ。故ニ(第一)ガ必要ナリ。

例二。 定直線ヲ見込ム角ガ定角ニ等シキ點ノ軌跡ハ,定直線ヲ弦トシ,定角ニ等シキ角ヲ含ム二ツノ弓形ノ弧ナリ。

【說明】 AB ヲ定直線, $\angle C$ ヲ定角トセヨ。AB ヲ弦トシ,其兩側ニ於テ $\angle C$ ニ等シキ角ヲ含ム弓形 AMB, ANB ヲ作レ(作圖題十)。

然ラバ $\angle APB=\angle C$ ナル點 P ノ軌跡ハ弧 AMB

及ビ ANB ナルベシ。



【證】 (第一) P ヲ弧 AMB 又ハ ANB ノ上ノ任意ノ點トスルトキハ,

$\angle APB = \angle C$ (定理三十三,系一)

(第二) 弧 AMB ノ上ニモ, ANB ノ上ニモアラザル點ハ, Q ノ如ク弓形 AMB 又ハ ANB ノ内部ニアルカ,又ハ Q′ ノ如ク AMB 及ビ ANB ノ外部ニアルカ,イヅレカナリ。

サテ $\angle AQB > \angle C$, $AQ'B < \angle C$ (定理三十四,系一) イヅレニシテモ,カヤウノ點ヨリ AB ヲ見込ム角ハ $\angle C$ ニ等シカラズ。

故ニ AB ヲ $\angle C$ ニ等シキ角ヲ見込ム點ノ軌跡ハ弧 AMB 及ビ ANB ナリ。

系 定直線ヲ直角ニ見込ム點ノ軌跡ハ,此直線ヲ直徑トセル圓周ナリ。

例三。 相交ハル二ツノ直線ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ,此等ノ二ツノ直線ガ作ル角ヲ二等分スル二ツノ直線ナリ。

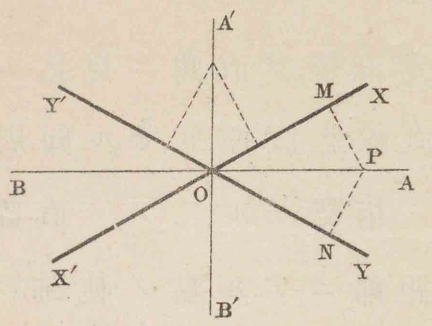
【說明】 XX′, YY′ ヲ O ニ於テ相交ハル二直線, AB, A′B′ ヲ $\angle XOY$, $\angle XOY'$ ノ二等分線トセヨ。

然ラバ

(第一) AB 又ハ A′B′ ノ上ニアル點 P ハ XX′, YY′ ヨリ相等シキ距離ニアルコト,

(第二) AB ノ上ニモ, A′B′ ノ上ニモアラザル點ハ XX′, YY′ ヨリ相等シキ距離ニアラザルコト,換言スレバ XX′, YY′ ヨリ相等シキ距離ニアル點ハ必ズ AB 又ハ A′B′ ノ上ニアルコト

ヲ證明スルヲ要ス。



【證】 (第一) P ヲ AB ノ上ノ任意ノ一點トシ, P ヨリ XX', YY' ヘ垂線 PM, PN ヲ下セ。

然ラバ直角三角形 OPM, OPN ニ於テ,斜邊 OP ハ共通,又 ∠POM, ∠PON ハ相等シキガ故ニ PM, PN ハ相等シ

卽チ直線 AB ノ上ノ點ハ直線 XX' 及ビ YY' ヨリ相等シキ距離ニアリ。

同ジヤウニ直線 A'B' ノ上ノ點モ亦 XX' 及ビ YY' ヨリ相等シキ距離ニアリ。

(第二) 次ニ P ヲ直線 XX' 及ビ YY' ヨリ相等シキ距離ニアル點トセヨ。P ヨリ XX' 及ビ YY' ヘ垂線 PM, PN ヲ下セ。

然ラバ直角三角形 OPM, OPN ニ於テ,斜邊 OP ハ

共通ニシテ,他ノ一ツノ邊 PM PN ハ相等シ。故ニ OP ハ ∠MON ヲ二等分ス。

サテ M, N ハソレゾレ直線 XX', YY' ノ上ノ點ナルガ故ニ ∠MON ハ XX', YY' ガ作ル四ツノ角ノ中ノイヅレカニ同ジ。故ニ P ハ直線 AB 又ハ A'B' ノ上ニアリ。

(第一) 及ビ (第二) ニヨリ,求ムル軌跡ハ二直線 AB, A'B' ナルコトヲ知ル。

問　題

1. 二ツノ定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト。

2. 定點ニ於テ定直線(又ハ定圓)ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト。

3. 二ツノ定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト。

4. 一ツノ圓ニ於テ,定直線ニ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

5. 一ツノ圓ニ於テ,定マレル長サノ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

6. 一ツノ圓ニ於テ定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

7. 定點ヨリ,他ノ定點ヲ中心トスル任意ノ圓ヘ引ケル切線ノ切點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

8. 定點ヨリ定直線上ノ任意ノ點ニ至ル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

9. 定直線ヲ對稱軸トシ,他ノ定直線上ノ點ト對稱ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

10. 定圓ニ於テ,定直徑ト定長ノ弦トヲ一双ノ相對スル邊トセル內接四角形ノ對角線ノ交點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

54. 軌跡ノ交リ。

例ヘバ,與ヘラレタル直線 X ノ上ニ於テ,與ヘラレタル二ツノ點 A, B ヨリ相等シキ距離ニアル點ヲ求メントスルニ,A, B ヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ AB ヲ垂直ニ二等分スル直線 Y ナルガ故ニ,求ムル點ハ此直線 Y ノ上ニアルコトヲ要ス。又求ムル點ハ直線 X ノ上ニアルコトヲ要スルガ故ニ,求ムル點ハ直線 X, Y ニ共通ナル點ナルコトヲ要ス。

故ニ直線 X, Y ガ共通ノ點ヲ有セザルトキ,卽チ X, Y ガ平行ナルトキニハ,問題ニ適スル點ハ存在セズ。

サテ直線 X, Y ニ共通ナル點ガアルトキ,其點ハ果シテ問題ニ適スルカト考フルニ,此點ハ直線 Y ノ上ニアルガ故ニ,A, B ヨリ相等シキ距離ニアリ。又此點ハ直線 X ノ上ニアルガ故ニ,此點ハ果シテヨク問題ニ適合ス。

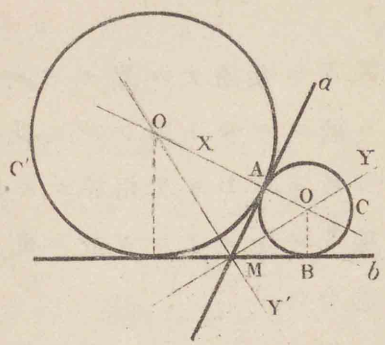
故ニ X, Y ガ相交ハルトキハ,其交點ハ卽チ求ムル點ニテ,此外ニハ問題ニ適スル點ナシ。

(X, Y ガ一致スルトキハ如何)。

軌跡ヲ應用スル例トシテ次ノ作圖問題ヲ解クベシ。

與ヘラレタル直線 a ノ上ノ與ヘラレタル點 A ニ於テ此直線ニ切シ,ナホ他ノ與ヘラレタル直線 b ニモ切スル圓ヲ作ルコト。

點Aニ於テ直線aニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハAニ於テ直線aニ垂直ナル直線Xナリ。又直線a, bニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ハa, bガ其交點M



ニ於テ作ル角ノ二等分線Y, Y'ナリ。故ニ求ムル圓ノ中心ハXノ上ニアリテ,同時ニ又Y或ハY'ノ上ニアル點ナルコトヲ要ス。卽チXトYトノ交點O,又ハXトYトノ交點O'トヨリ外ノ點ナルコトヲ得ズ。

サテO又ハO'ヲ中心トシテ,果シテ問題ニ適スル圓ヲ作リ得ルカトイフニ,Oヲ中心,OAヲ半徑トシテ圓Oヲ作ルトキ,OAハaニ垂直ナルガ故ニ,此圓ハAニ於テ直線aニ切ス。又Oハa及ビ

bヨリ相等シキ距離ニアルガ故ニ,Oヨリbヘ下セル垂線ヲOBトスルトキハ

$$OA=OB$$

故ニ此圓ハBヲ通リ,且Bニ於テ直線bニ切ス。

卽チCハ問題ニ適スル圓ナリ。

同樣ニO'ヲ中心,O'Aヲ半徑トシテ圓C'ヲ作ルトキ,此圓C'モ亦問題ニ適ス。

卽チ求ムル圓ハ二ツアリ。而モ唯二ツニ限ル。

(上ニ說キタルハ直線a,bガ相交ハル場合ナリ。a, bガ平行ナル場合ハ如何)。

一般ニ,甲ノ性質ヲ有スル點ノ軌跡ハ線X, X',...ニシテ,乙ノ性質ヲ有スル點ノ軌跡ハ線Y, Y',...ナルトキハ甲,乙二ツノ性質ヲ兼ネ有スル點ハ線X, X',...ノ各々ト線Y, Y',...ノ各々トノ交點ナリ。

(此等ノ線ニ交點ナキトキハ甲,乙二ツノ性質ヲ兼ネ有スル點ハ存在セズ。又例ヘバXトYトガ一致スルトキニ

ハ,此線ノ上ノ點ハ盡ク甲,乙二ツノ性質ヲ兼ネ有スベシ)。

問題

1. 與ヘラレタル直線ノ上ニ中心ヲ有シ,且二ツノ與ヘラレタル點ヲ通ル圓ヲ作ルコト。

2. 與ヘラレタル點ヲ通リ,且與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ其上ノ與ヘラレタル點ニ於テ切スル圓ヲ作ルコト。

3. 與ヘラレタル直線ニ切シ,與ヘラレタル點ヲ通ル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ作ルコト。

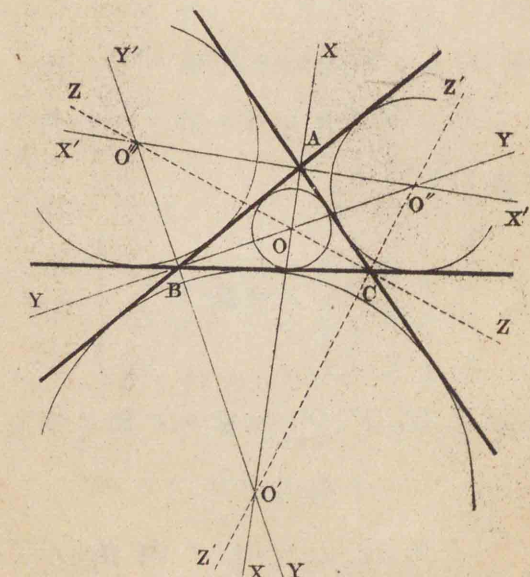
4. 與ヘラレタル二直線ヨリノ距離ガソレゾレ與ヘラレタル長サニ等シキ點ヲ求ムルコト。

5. 頂角,底邊及ビ高サヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

6. 頂角,底邊及ビ之ニ對スル中線ヲ知リテ,三角形ヲ作ルコト。

55. 三角形ノ内切圓,傍切圓。

作圖題十三 三角形ノ三ツノ邊ニ切スル圓ヲ作ルコト。



三角形ABCノ三ツノ邊ニ切スル圓ヲ作ルコトハ,此圓ノ中心ヲ求ムルコト,即チ三ツノ邊ヨリ相等シキ距離ニアル點ヲ求ムルコトニ歸ス。カヤウノ點ハ二ツノ邊AB, ACヨリ相等シキ距離ニア

リテ,又同時ニBA, BCヨリモ相等シキ距離ニアル點ニ外ナラズ。

サテAB, ACヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ三角形ABCノ角A及ビAニ於ケル外角ヲ二等分スル直線X, X′ナリ。

又BA, BCヨリ相等シキ距離ニアル點ノ軌跡ハ三角形ABCノ角B及ビBニ於ケル外角ヲ二等分スル直線Y, Y′ナリ。

$$\text{サテ}\quad \left.\begin{array}{l} X\ \text{ト}\ Y\ \text{ト} \\ X\ \text{ト}\ Y'\ \text{ト} \\ X'\ \text{ト}\ Y\ \text{ト} \\ X'\ \text{ト}\ Y'\ \text{ト} \end{array}\right\}\ \text{ノ交點}^{*}\text{ヲ}\ \left.\begin{array}{l} O \\ O' \\ O'' \\ O''' \end{array}\right\}\ \text{トセヨ。}$$

然ラバO, O′, O″, O‴ハ求ムル圓ノ中心ナルベシ。

系 三角形ノ三ツノ內角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。又一ツノ內角

* 此等ノ直線ハ平行ナラズ。X, Yガ直線ABト作ル一組ノ同傍內角ハ三角形ノ二ツノ角A, Bノ半分ナルガ故ニ,其和ハ直角ヨリモ小ナリ。又例ヘバX, Y′ガABト作ル一組ノ同傍內角ノ和ハ,コレヨリモ一直角ダケ大ナルガ故ニ,ナホ二直角ヨリモ小ナリ。

及ビ之ニ接セザル二ツノ外角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル。

上ノ圖ニ於テ∠C及ビCニ於ケル外角ノ二等分線ヲZ, Z′トスルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} X,\ Y,\ Z \\ X,\ Y',\ Z' \\ X',\ Y,\ Z' \\ X',\ Y',\ Z \end{array}\right\}\ \text{ハ}\ \left.\begin{array}{l} O \\ O' \\ O'' \\ O''' \end{array}\right\}\ \text{ヲ通ル。}$$

定義。 Oヲ中心トシ,三ツノ邊ニ切スル圓ハ三角形ABCノ內部ニアリ。之ヲ三角形ノ**內切圓**トイヒ,其中心Oヲ三角形ノ**內心**トイフ。

O′, O″, O‴ヲ中心トシ,三ツノ邊(一ツノ邊及ビ他ノ二ツノ邊ノ延長)ニ切スル圓ハ三角形ABCノ外部ニアリ。之ヲ三角形ノ**傍切圓**トイヒ,其中心O′, O″, O‴ヲ三角形ノ**傍心**トイフ。

問題

1. 互ニ平行ナル二ツノ直線及ビ之ニ交ハル一ツノ直線ニ切スル圓ヲ作ルコト。

2. 三角形ABCノ內切圓ガ邊BC, CA, ABニ切

スル點ヲソレゾレ D, E, F トスルトキハ, AE, AF ハ三角形ノ周圍ノ半分ト BC トノ差ニ等シク, BF, BD ハ半周ト CA トノ差ニ, CD, CE ハ半周ト AB トノ差ニ等シ。卽チ各頂點ヨリ之ニ接スル邊ノ上ノ切點ニ至ル距離ハ,半周ト此頂點ニ對スル邊トノ差ニ等シ。

3. 三角形 ABC ノ角 A ニ對スル傍切圓ガ邊 BC ニ切スル點ヲ D′, 又邊 AB, AC ノ延長ニ切スル點ヲソレゾレ E′, F′ トスルトキハ, AE′, AF′ ハ三角形ノ半周ニ, BD′ ハ半周ト AB トノ差ニ, 又 CD′ ハ半周ト AC トノ差ニ等シ。

4. 周圍,高サ及ビ一ツノ底角(又ハ頂角)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

問　　題

(第二編雜題)

1. 圓ニ內接スル四角形ノ對角線ガ作ル角ノ二等分線ハ相對スル邊ト相等シキ角ヲナス。

2. 弧ノ中點ヲ通ル二直線ガ再ビ圓周ニ交ハル點及ビ此弧ヲ張ル弦(又ハ其延長)ニ交ハル點ハ同一圓周上ニアリ。

3. 圓ニ內接スル六角形ノ相對スル邊ノ中,二組ガ互ニ平行ナルトキハ,他ノ一組モ亦互ニ平行ナリ。

4. 圓周上ノ任意ノ點ヨリ,二ツノ定マレル直徑ヘ下セル垂線ノ足ノ間ノ距離ハ不易ナリ

5. 二ツノ圓ガ相交ハル點 A, B ヲ通リ割線 PAQ, RBS ヲ引キテ二ツノ圓トソレゾレ P, R 及ビ Q, S ニ於テ交ハラシムルトキハ, PR, QS ハ互ニ平行ナリ。

6. 前ノ問題ニ於テ,割線 PAQ, PBS ガ一ツノ圓周ノ上ノ一點 P ヲ通ルトキハ, QS ハ P ニ於ケル切線ニ平行ナリ。

7. 二ツノ圓ノ相交ハル點 A ヲ通リ割線 PAQ ヲ引キ, P 及ビ Q ニ於テ二ツノ圓周ト交ハラシメ

(一) PQ ヲ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト。

(二) PQ ヲ最大ナラシムルコト。

(三) AP, AQ ヲ相等シカラシムルコト。

8. 與ヘラレタル點ニ於テ與ヘラレタル直線(又ハ圓)ニ切シ,且他ノ與ヘラレタル圓(又ハ直線)ニ切スル圓ヲ作ルコト。

9. 三角形ノ頂點ヲ中心トシテ,二ツヅツ相切スル三ツノ圓ヲ作ルコト。

10. 定直線上ノ二ツノ定點ニ於テソレゾレ之ニ切シ,且互ニ相切スル二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

11. 四ツノ直線ガ相交ハリテ作ル四ツノ三角形ノ外接圓ハ同一ノ點ヲ通ル。

12. 二ツノ定圓ハA, Bニ於テ相交ハリ, Aヲ通ル定割線CADハ此等ノ圓トソレゾレC, Dニ於テ相交ハル。Aヲ通リ任意ノ割線PAQヲ引キ,二ツノ圓トソレゾレP, Qニ於テ交ハラシムルトキハ,弦PC, QD又ハ其延長ノ交點Rノ軌跡ハB, C, Dヲ通ル圓周ナリ。

第三篇

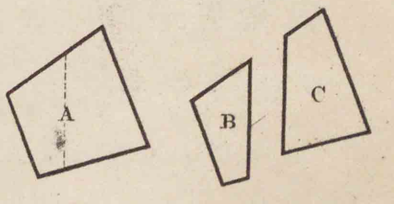
面積及ビ比例

第一章　多角形ノ面積

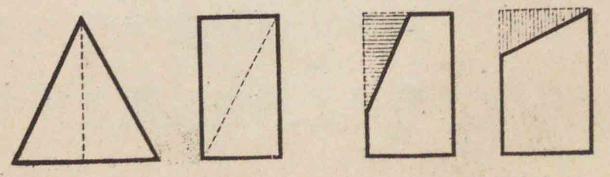
56. 等積ナル多角形。

全ク相等シキ,卽チ重ネ合ハセ得ベキ二ツノ多角形ハ相等シキ**面積**ヲ有ス。

多角形Aヲ多角形B,Cト等シキ部分ニ分チ得ベキトキハ,Aノ面積ハB,Cノ**面積ノ和**ニ等シク,Bノ面積ハAノ面積トCノ面積トノ差ニ等シ。



二ツノ多角形ガ重ネ合ハセ得ベカ



ラザル場合ニモ,此等ノ多角形ガ一ツ一ツ重ネ合ハセ得ベキ多角形ノ和又ハ差ナルトキハ,二ツノ多角形ハ相等シキ面積ヲ有スベシ。

57. 矩形ノ面積。

矩形ヲ其一邊ノ上ニ立テルモノト見做シ,此邊ヲ矩形ノ**底邊**(又ハ**底**)トイフ。底邊ト之ニ對スル邊トノ間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。高サハ底邊ニ隣レル邊ニ等シ。

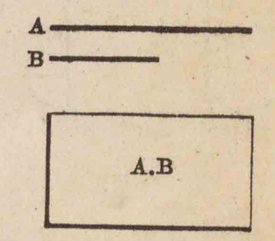
定理三十六 底邊及ビ高サガソレゾレ相等シキ二ツノ矩形ハ相等シ。

カヤウノ矩形ハ重ネ合ハセ得ベキナリ。(之ヲ證明セヨ)。

系一 相等シキ高サヲ有スル幾ツカノ矩形ノ面積ノ和ハ,之ニ等シキ高サト,此等ノ矩形ノ底邊ノ和ニ等シキ底邊トヲ有スル一ツノ矩形ノ面積ニ等シ。

系二 底邊ト面積トガソレゾレ相等シキ二ツノ矩形ノ高サハ相等シ。

A, B ナル二ツノ線分ニ等シキ底邊及ビ高サヲ有セル矩形ハスベテ相等シ。



カヤウノ矩形ヲ**線分** A, B ノ**包メル矩形**トイヒ,之ヲ表スニ記號 □A. B 又ハ A. B ヲ用フ。

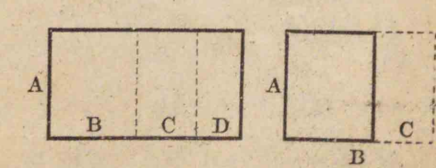
A. B, B. A ハ相等シキ矩形ナリ。

上ノ系一ヲ次ノ如ク書キ表スコトヲ得。

$$A.(B+C+D)=A.B+A.C+A.D$$

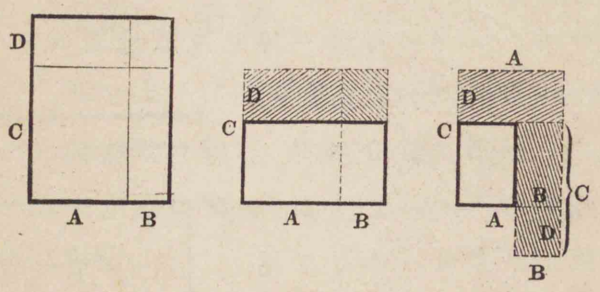
同ジヤウニ

$$A.(B-C)=A.B-A.C$$



此等ノ定理ヲ應用シテ次ノ諸定理ヲ證明スルコトヲ得。

$$(A+B).(C+D)=A.C+B.C+A.D+B.D$$
$$(A+B).(C-D)=A.C+B.C-A.D-B.D$$
$$(A-B).(C-D)=A.C+B.D-A.D-B.C$$



有限直線Aニ等シキ邊ヲ有スル正方形,即チ矩形A.Aヲ**線分Aノ上ノ平方**トイヒ,之ヲ表スニ記號A^2ヲ用フ。

上ノ定理ノ特別ノ場合トシテ,次ノ定理ヲ得。

$$(A+B)^2=A^2+B^2+2.A.B$$
$$(A-B)^2=A^2+B^2-2.A.B$$
$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

問　題

直線ABノ中點ヲM, AB又ハ其延長ノ上ノ點

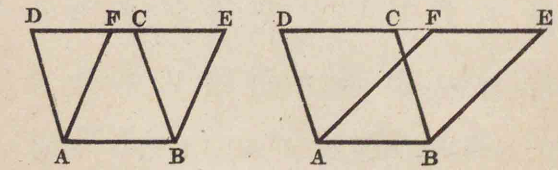
ヲCトスルトキハ,矩形$\overline{AC}.\overline{BC}$ハ$\overline{AM}^2$ト$\overline{CM}^2$トノ差ニ等シ。

58. 平行四邊形及ビ三角形ノ面積。

定義。 平行四邊形ヲ其一ツノ邊ノ上ニ立テルモノト見做シ,此邊ヲ**底邊**トイヒ,底邊及ビ之ニ平行ナル邊ノ間ノ距離ヲ**高サ**トイフ。

定理三十七 同ジ底邊(又ハ相等シキ底邊)ノ上ニ立チ,相等シキ高サヲ有スル二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ。

【證】 同ジ底邊ABノ上ニ立チテ,其同ジ側ニ



アル二ツノ平行四邊形ABCD, ABEFガ相等シキ高サヲ有ストセヨ。然ラバABニ對スル邊CD, EFハ(ABニ平行ナル)同一ノ直線上ニアリ。サテ

$$DF=DE-EF,\qquad CE=DE-DC$$

$EF = DC (= AB)$

故ニ $DF = CE$

又 $AF = BE, \quad AD = BC$

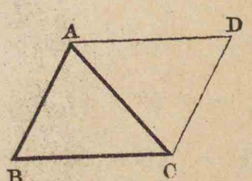
故ニ $\triangle AFD \equiv \triangle BEC$

サテ平行四邊形 ABCD ハ四邊形 ABED ト三角形 BEC トノ差ニ等シク,平行四邊形 ABEF ハ同ジ四邊形ト三角形 AFD トノ差ニ等シ。故ニ平行四邊形 ABCD, ABEF ハ等積ナリ。

系 平行四邊形ハ底邊及ビ高サヲソレゾレ等シクセル矩形ト等積ナリ

定理三十八 三角形ノ面積ハ底邊及ビ高サヲソレゾレ等シクセル平行四邊形(特ニ矩形)ノ面積ノ半分ニ等シ。

〔證〕 △ABC ノ頂點 A 及ビ底邊ノ一端 C ヨリソレゾレ之ニ對スル邊 BC 及ビ BA ニ平行ナル直線ヲ引キ,D ニ於テ相交ハラシメヨ。



然ラバ平行四邊形 ABCD ハ △ABC ト相等シキ底邊(BC)及ビ相等シキ高サヲ有ス。

サテ $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

故ニ △ABC ノ面積ハ平行四邊形 ABCD ノ面積ノ半分ニ等シク,從テ底 BC ノ上ニ立チテ △ABC ト同ジ高サヲ有スル任意ノ平行四邊形ノ面積ノ半分ニ等シ(定理三十七)。

系一 底邊及ビ高サガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ等積ナリ。

系二 底邊及ビ面積ガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ノ高サハ相等シ。

問題

1. 同ジ底邊ノ上ニ立チテ其同ジ側ニアル等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ通ル直線ハ共通ノ底邊ニ平行ナリ。

2. 同ジ底邊ノ上ニ立チテ其兩側ニアル等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル線分ハ共

通ノ底邊又ハ其延長ニ二等分セラル。

3. 三角形ノ中線ハ其面積ヲ二等分ス。又三角形 ABC ノ中線 AD 又ハ其延長ノ上ノ一點 O ヲ B, C ニ結ビ付クルトキハ, △ABO=△ACO

4. 三角形ノ三ツノ中線ハ,之ヲ六ツノ等積ナル三角形ニ分ツ。

5. 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ヨリ他ノ二邊(又ハ其延長)ガ截リ取ル線分ハ,底邊ニ對スル中線(又ハ其延長)ニ二等分セラル。

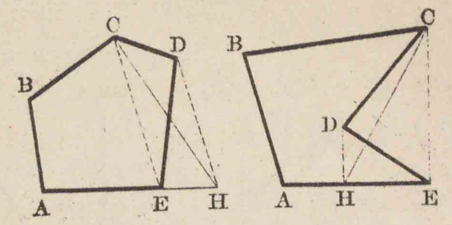
59. 多角形ト等積ナル矩形。

作圖題十四 與ヘラレタル多角形ト等積ニシテ,且一ツノ邊ガ與ヘラレタル矩形ヲ作ルコト。

此問題ヲ數段ニ分チテ解クコト,次ノ如シ。

(第一) 與ヘラレタル多角形ト等積ニシテ,邊ノ數ガ一ツ少キ多角形ヲ作ルコト。

【作圖】 ABCDE ヲ與ヘラレタル多角形トセヨ。



一ツノ頂點 D ヨリ,之ニ隣レル二ツノ頂點 C, E ヲ結ビ付クル對角線 CE ニ平行ニ DH ヲ引キ,邊 EA 又ハ其延長ト H ニ於テ交ハラシメ, CH ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ多角形 ABCH ハ ABCDE ト等積ニシテ,且邊ノ數ハ ABCDE ヨリモ一ツ少シ。

【證】 ABCDE=ABCDH∓DHE

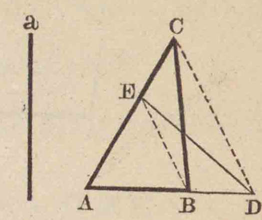
ABCH=ABCDH∓DHC

サテ DHE=DHC (定理三十八系一)

故ニ ABCDE=ABCH

(第二) 與ヘラレタル三角形ト等積ニシテ,且一ツノ邊ガ與ヘラレタル三角形ヲ作ルコト。

【作圖】 ABC ヲ與ヘラレタル三角形, a ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

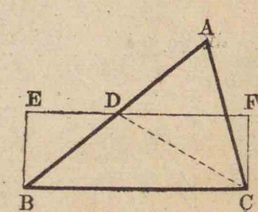


ABC ノ一邊 AB 又ハ其延長ノ上ニ a ニ等シク AD ヲ取レ。邊 AB ニ對スル頂點 C ト D トヲ結ビ付ケ, B ヨリ DC ニ平行ニ BE ヲ引キ B ニ對スル邊 AC 又ハ其延長ト E ニ於テ交ハラシメヨ。DE ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ ADE ハ求ムル三角形ナルベシ。

(第一ト同ジヤウニシテ之ヲ證明セヨ)。

(第三) 與ヘラレタル三角形ト同ジ底邊ノ上ニ立チ,且之ト等積ナル矩形ヲ作ルコト

【作圖】 ABC ヲ與ヘラレタル三角形トセヨ。



邊 AB ノ中點 D ヨリ底邊 BC ニ平行ナル直線ヲ引キ, B, C ヨリ此直線ヘ垂線 BE,

CF ヲ下セ。然ラバ BCFE ハ求ムル矩形ナルベシ。

【證】 △ABC 及ビ ▭BCFE ハイヅレモ △BDC ノ二倍ニ等シク,從テ相等シ。

(第四) 本題ノ作圖。 P ヲ與ヘラレタル多角形, a ヲ與ヘラレタル一邊トセヨ。

先ヅ第一ノ作圖ヲ繰返シテ, P ト等積ナル三角形 Q ヲ作レ。

次ニ第二ノ作圖ニヨリ, Q ト等積ニシテ a ニ等シキ底邊ヲ有スル三角形 Q′ ヲ作レ。

サテ第三ノ作圖ニヨリ Q′ ト同ジ底邊ノ上ニ立チ,之ト等積ナル矩形 R ヲ作レ。

然ラバ R ハ即チ求ムル矩形ナリ。

問題

1. 三角形ノ一邊上ノ與ヘラレタル點ヲ通リ,此三角形ヲ二等分スル直線ヲ引クコト。

2. 底邊及ビ一ツノ底角ヲ知リテ,與ヘラレタル三角形ト等積ナル三角形ヲ作ルコト。

3. 與ヘラレタル多角形ト等積ニシテ,且一ツノ邊及ビ一ツノ角ガ與ヘラレタル平行四邊形ヲ作ルコト。

60. 長サ及ビ面積ノ數値。

直線ノ長サハ一定ノ長サヲ**單位**ト定メテ之ヲ計リ,其**數値**ヲ求ムルコトヲ得。

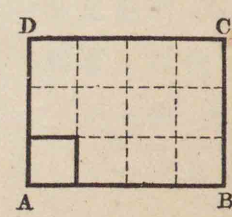
面積ヲ計ルニハ,長サノ單位ニ等シキ邊ヲ有スル正方形ノ面積ヲ單位トス。

定理三十九　矩形ノ面積ノ數値ハ其相隣レル二ツノ邊(底及ビ高サ)ノ數値ノ積ニ等シ。

或ハ略シテ

矩形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シ。

【證】　先ヅ底及ビ高サノ數値ガイヅレモ整數ナル場合ヲ考フルガタメニ,矩形ABCDノ底ABノ數値ヲ4,高サADノ數値ヲ3トセヨ。



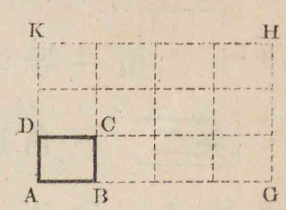
然ラバABヲ四等分シ,

定理　多角形面積

ADヲ三等分スルトキハ,長サノ單位ニ等シキ線分ヲ得。此等ノ各分點ヲ通ジ,AD又ハABニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,矩形ABCDハ4×3即チ12個ノ相等シキ正方形ニ分タレ,此等ノ正方形ノ邊ハイヅレモ長サノ單位ニ等シ。

故ニ矩形ABCDノ面積ハ面積ノ單位ノ12倍ニ等シ。即チ其數値ハ12ナリ。

次ニ底及ビ高サノ中,一方又ハ双方ガ分數(又ハ小數)ナル場合ヲ考ヘンガタメニ,矩形ABCDノ底ABノ數値ヲ$\frac{m}{n}$,高サADノ數値ヲ$\frac{p}{q}$トセヨ。



ABヲ延長シ,ABノn倍ニ等シクAGヲ取リ,又ADヲ延長シテADノq倍ニ等シクAKヲ取リ,矩形AGHKヲ作レ。然ラバABノ數値ハ$\frac{m}{n}$ナルガ故ニ,AGノ數値ハm,又ADノ數値ハ$\frac{p}{q}$ナルガ故ニ,AKノ數値ハpナリ。

故ニ矩形AGHKノ面積ノ數値ハmpナリ。

サテ矩形AGHKヲ矩形ABCDニ等シキnq個ノ

矩形ニ分チ得ベキガ故ニ,矩形 ABCD ノ面積ハ矩形 AGHK ノ面積ノ nq 分ノ一ニ等シク,從テ其數値ハ $\frac{mp}{nq}$ 卽チ

$$\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}$$

ニ等シ。

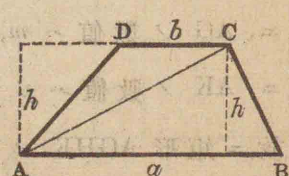
(底及ビ高サノ數値ヲ 3.57 及ビ 3.25 トシテ上ノ證明ヲ反復セヨ。

系一 平行四邊形ノ面積ハ底ト高サトノ積ニ等シ。

系二 三角形ノ面積ハ底ト高サトノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

系三 梯形ノ面積ハ二ツノ底ノ和ト高サトノ積ノ二分ノ一ニ等シ。

【證】 ABCD ヲ梯形 AB, CD ヲ二ツノ底, a, ヲ其數値 h ヲ高サノ數値トセヨ。



梯形 ABCD ハ △ABC, △CDA ノ和ニ等シク,此等ノ三角形ノ面積ノ數値ハソレゾレ $\frac{ah}{2}$, $\frac{bh}{2}$ ニ等シ。故ニ梯形ノ面積ノ數値ハ $\frac{ah}{2}+\frac{bh}{2}$ 卽チ $\frac{(a+b)h}{2}$ ナリ。

問　　題

1. 底邊一尺八寸高サ一尺二寸ナル三角形ノ面積幾平方尺ナカ。

又此三角形ノ他ノ一邊ガ一尺三寸五分ナルトキハ,之ニ對スル高サ幾許ナルカ。

2. 圖ニ示セル五角形 ABCDE ニ於テ,對角線 AD ヘ垂線 BP, EQ, CR ヲ下ストキ,

AP＝ 2間3尺

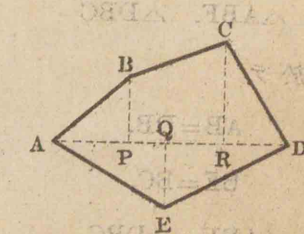
AQ＝ 4間2尺

AR＝ 6間5尺

AD＝12間

BP＝ 3間

CR＝ 4間4尺,　　EQ＝3間2尺



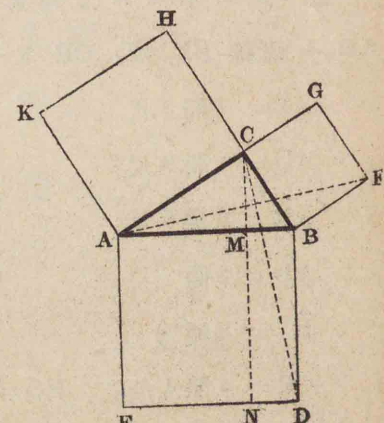
ナリ。面積ヲ計算セヨ。

61. ぴたごらすノ定理。

定理四十 直角三角形ノ斜邊ノ上ノ平方ハ,直角ヲ夾メル二邊ノ上ノ平方ノ和ニ等シ。

【證】 ABC ヲ直角三角形, C ヲ直角, ABDE, BCGF, ACHK ヲ三ツノ邊ノ上ノ平方トセヨ。

C ヨリ AB ヘ垂線ヲ下シ, AB 及ビ DE トソレゾレ M 及ビ N ニ於テ交ハラシメヨ。 AF, CD ヲ結ビ付ケヨ。



然ラバ

$\triangle ABF$, $\triangle DBC$

ニ於テ

$AB = DB$,

$BF = BC$,

$\angle ABF = \angle DBC$

故ニ

$\triangle ABF \equiv \triangle DBC$

サテ $\square BCGF = 2.\triangle ABF$

$\square DBMN = 2.\triangle DBC$

故ニ $\square DBMN = \square BCGF$

同ジヤウニ $\square EAMN = \square ACHK$

サテ $\square ABDE = \square DBMN + \square EAMN$

故ニ $\square ABDE = \square BCGF + \square ACHK$

卽チ $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

問題

1. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ和(又ハ差)ニ等シキ正方形ヲ作ルコト。

2. 直角三角形ノ直角ヲ夾メル二邊ガ 3 寸及ビ 4 寸ナルトキ,斜邊ハ幾許ナルカ。

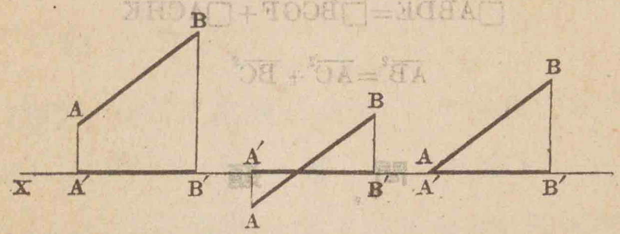
3. 邊ガ長サノ單位ニ等シキ正方形ノ對角線ノ數値幾許ナルカ。

4. 邊ノ長サ a ナル正三角形ノ高サ及ビ面積ヲ計算セヨ。

5. 直徑 26 糎ノ圓ニ於テ,長サ 24 糎ナル弦ノ中心ヨリノ距離幾許ナルカ。

62. 三角形ノ三邊ノ上ノ平方ノ關係。

定義。 線分ABノ直線Xノ上ニ於ケル正射影



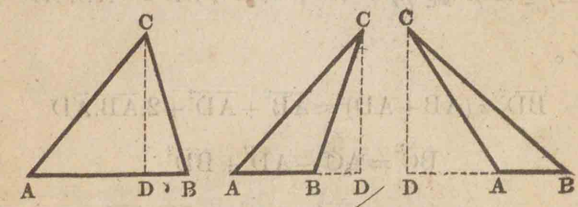
トハA, BヨリXヘ下セル垂線AA′, BB′ノ足ノ間ニ夾マレタル線分A′B′ヲイフ。

定理四十一 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ平方ハ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ヨリモ小サク,鈍角ニ對スル邊ノ上ノ平方ハ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ヨリモ大ナリ。* イヅレノ場合ニ於テモ,一邊ノ上ノ平方ト他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和トノ差ハ,此等ノ二邊ノ中ノ一ツト其上ニ於ケル他ノ一邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ニ等シ。

* 定理十七參照。

【説明】 三角形ABCニ於テ,邊ABノ上ニ於ケル邊ACノ正射影ヲADトセヨ。卽チDヲCヨリABヘ下セル垂線ノ足トセヨ。

(一) (二)



然ラバ(一)∠Aガ鋭角ナルトキハ

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

又(二)∠Aガ鈍角ナルトキハ

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

ナルベシ。

【證】 直角三角形BCDニ於テ

$$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2+\overline{BD}^2$$

又直角三角形ACDニ於テ

$$\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2$$

故ニ
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$$

サテ(一)∠Aガ鋭角ナルトキハ,BDハAB,ADノ差ニ等シ。

故ニ
$$\overline{BD}^2=(AB-AD)^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}.\overline{AD}$$

故ニ
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

又(二)∠Aガ鈍角ナルトキハ,BDハAB,ADノ和ニ等シ。

故ニ
$$\overline{BD}^2=(AB+AD)^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2+2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

故ニ
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2.\overline{AB}.\overline{AD}$$

【注意】 鋭角Aガ漸次小サクナリ行キテ,竟ニ頂點CガAB又ハ其延長ノ上ニ落ツルトキハ,上ノ定理ハ二ツノ線分ノ差ノ上ノ平方ニ關スル第57節ノ定理(152頁)ニ歸着スベシ。又鈍角Aガ漸次大クナリ行キテ,竟ニ二直角トナルトキハ,上ノ定理ハ二ツノ線分ノ和ノ上ノ平方ニ關スル第57節ノ定理(152頁)ニ歸着スベシ。

又鋭角Aガ漸次大クナリ,又ハ鈍角Aガ漸次小クナリ行キテ,竟ニ直角トナルトキハ,Dハ漸次Aニ近ツキ行キテ,ADハ竟ニ消滅シ,上ノ定理ハ定理四十ニ歸着スベシ。

系 三角形ノ一邊ノ上ノ平方ガ他ノ二邊ノ上ノ平方ノ和ヨリモ大ナルカ,之ニ等シキカ,又ハ之ヨリモ小ナルカニ從テ,此邊ニ對スル角ハ鈍角,直角,又ハ鋭角ナリ。

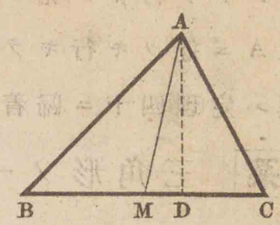
63. 中線ノ長サ。

定理四十二 三角形ノ二ツノ邊ノ上ノ平方ノ和ハ,第三邊ノ半分ノ上ノ平方ト之ニ對スル中線ノ上ノ平方トノ和ノ二倍ニ等シ。

【說明】 △ABCニ於テMヲBCノ中點トセヨ。然ラバ

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)$$

ナルベシ。



【證】 AB, AC ガ相等シカラザルトキハ, AM ハ BC ニ垂直ナラズ。今 ∠AMB ハ鈍角, ∠AMC ハ鋭角ナリトセヨ。A ヨリ BC ヘ垂線 AD ヲ下セ。

然ラバ △ABM ニ於テ

$$\overline{AB}^2=\overline{AM}^2+\overline{MB}^2+2.\overline{MB}.\overline{MD}$$

又 △ACM ニ於テ

$$\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{MC}^2-2.\overline{MC}.\overline{MD}$$

サテ　$MB=MC$

故ニ　$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

【注意一】 AB, AC ガ相等シキトキニモ,上ノ定理ハ成リ立ツベシ(之ヲ證明セヨ)。

【注意二】 三角形ABCノ三ツノ邊BC, CA, ABノ數値ヲa, b, c又三ツノ中線AD, BE, CFノ數値ヲl, m, nトスルトキハ

$$l^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

$$m^2=\frac{c^2+a^2}{2}-\frac{b^2}{4}$$

$$n^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

問題

1. 平行四邊形ノ四ツノ邊ノ上ノ平方ノ和ハ對角線ノ上ノ平方ノ和ニ等シ。

2. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ定マレル點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ。

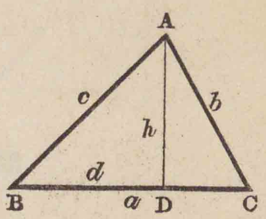
3. 與ヘラレタル直線ノ上ニ於テ,二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ最モ小ナル點ヲ求ムルコト。

4. 三角形ノ中線ノ上ノ平方ノ和ハ三邊ノ上ノ平方ノ和ノ四分ノ三ニ等シ。

又頂點ヨリ重心ニ至ル距離ノ平方ノ和ハ三邊ノ上ノ平方ノ和ノ三分ノ一ニ等シ。

64. 三邊ヲ知リテ三角形ノ面積ヲ計算スルコト。

△ABC ニ於テ頂點 A, B, C ニ對スル邊 BC, CA, AB ノ數値ヲ a, b, c; 又 A ヨリ BC ヘ下セル垂線 AD ノ數値ヲ h, BC ノ上ニ於ケル AB ノ正射影 BD ノ數値ヲ d トセヨ。



然ラバ $$b^2=a^2+c^2\pm 2ad$$

故ニ $$\pm 2ad=b^2-a^2-c^2$$

サテ $$h^2=c^2-d^2=(c+d)(c-d)$$

$$\begin{aligned}4a^2h^2&=(2ac+2ad)(2ac-2ad)\\&=\{2ac+b^2-a^2-c^2\}\{2ac-b^2+a^2+c^2\}\\&=\{b^2-(a-c)^2\}\{(a+c)^2-b^2\}\\&=(b+a-c)(b-a+c)(a+c+b)(a+c-b)\\&=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\end{aligned}$$

今 $$2s=a+b+c$$

ト置クトキハ(卽チ s ヲ三角形ノ周圍ノ半分ノ數値トスルトキハ),

$$\begin{aligned}a+b+c&=2s\\-a+b+c&=2(s-a)\\a-b+c&=2(s-b)\\a+b-c&=2(s-c)\end{aligned}$$

故ニ $$a^2h^2=4s(s-a)(s-b)(s-c)$$

故ニ面積ノ數値ヲ S トスルトキハ,

$$S=\frac{ah}{2}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

問題

1. 三角形ABCノ內切圓ノ半徑ヲ r, 又頂點 A, B, C ニ對スル傍切圓ノ半徑ヲソレゾレ r', r'', r''' トスルトキハ

$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r'=\frac{S}{s-a}=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

$$r''=\frac{S}{s-b}=\sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$$

$$r'''=\frac{S}{s-c}=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$$

2. 三角形ノ三邊ガ 13寸, 14寸, 15寸ナルトキ面積,三ツノ高サ,三ツノ邊ノ上ヘノ他ノ二邊ノ正射影,內切圓及ビ傍切圓ノ半徑ヲ求メヨ。

問　題

(第三篇雜題一)

1. 四邊形ノ面積ハ,其二ツノ對角線及ビ其作ル角ニソレゾレ等シキ二邊及ビ其夾角ヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

2. 平行四邊形 ABCD ノ內部ニアル點 P ヲ通リ邊 AB, BC ニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,平行四邊形 PB, PD* ハ, P ガ對角線 AC ノ上ニアルトキニハ,等積ナリ。又 P ガ對角線 AC ノ上ニアラザルトキニハ,此等ノ平行四邊形ノ面積ノ差ハ,三角形 ACP ノ面積ノ二倍ニ等シ。

3. 定長ノ二邊ヲ有スル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノヲ求ムルコト。

4. 底邊及ビ頂角ガ一定ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノヲ求ムルコト。

5. 底邊及ビ面積ガ一定ナル三角形ノ中,周圍ノ最小ナルモノハ,二等邊三角形ナリ。

* 誤解ノ虞ナキトキニハ,相對スル頂點ヲ示ス文字ヲ以テ平行四邊形ヲ示スナリ。

底邊及ビ周圍ガ一定ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノハ,二等邊三角形ナリ。

6. 四邊形ノ二ツノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ,相對スル邊ノ上ノ平方ノ和ハ相等シ。又四邊形ノ相對スル邊ノ上ノ平方ノ和ガ相等シキトキハ,二ツノ對角線ハ互ニ垂直ナリ。

7. 互ニ垂直ナル二直線ガ,圓周トソレゾレ A, B 及ビ C, D ニ於テ交ハルトキハ, AC, BD ノ上ノ平方ノ和ハ直徑ノ平方ニ等シ。

8. 三角形ノ二邊ノ上ノ平方ノ差ハ,第三邊ノ上ヘノ其正射影ノ上ノ平方ノ差ニ等シ。又第三邊ト,之ニ對スル中線ノ第三邊ヘノ正射影トガ包ム矩形ノ二倍ニ等シ。

9. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AC ノ垂直二等分線ガ邊 AB 又ハ其延長ニ交ハル點ヲ D トスルトキハ

$$\overline{AD}^2-\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$$

10. 與ヘラレタル線分 AB 又ハ其延長ノ上ニ點 P ヲ求メ, AP, BP ノ上ノ平方ノ差ヲシテ,與ヘラレタル正方形ニ等シカラシムルコト。

11. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ上ノ平方ノ差ガ,與ヘラレタル正方形ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

12. 四邊形ノ邊ノ上ノ平方ノ和ハ,對角線ノ上ノ平方ノ和ヨリモ,對角線ノ中點ヲ結ビ付クル線分ノ上ノ平方ノ四倍ダケ大ナリ。

13. 平行四邊形ノ二邊ハ 10 糎, 11 糎ニシテ,一ツノ對角線ハ 19 糎ナリ。他ノ對角線ノ長サ幾許ナルカ。

14. 梯形ノ底ハ 12 寸, 28 寸,他ノ二ツノ邊ハ共ニ 17 寸ナリ。高サ及ビ對角線ヲ求メヨ。

15. 四邊形 ABCD ニ於テ, AB ハ 10 間, BC ハ 17 間, CD ハ 20 間, DA ハ 13 間ニシテ,對角線 AC ハ 21 間ナリ。面積ヲ求メヨ。又對角線 BD ノ長サヲ求メヨ。

16. 半徑 15 寸, 13 寸ナル二ツノ圓ノ中心ノ距離 4 寸ナリ。共通ノ弦ノ長サヲ求メヨ。

第二章 比例線

65. 比。比ノ値。

同ジ種類ノ二ツノ量(例ヘバ二ツノ長サ,二ツノ面積,又ハ二ツノ角)ノ**比**トハ,甲ガ乙ノ幾倍又ハ幾分ノ幾ツナルカトイフ點ヨリ見タル其關係ナリ

二ツノ量 A, B ノ比ヲ示スニハ,記號 A : B $\left(\text{又ハ } \frac{A}{B}\right)$ ヲ用ヒ, A ヲ此比ノ**前項**, B ヲ**後項**トイフ。

後項ヲ單位トシテノ前項ノ數値ヲ**比ノ値**トイフ。故ニ比ノ値ハ一ツノ數ナリ。

二ツノ量 A, B ガ同一ノ量 C ノ整數倍ナルトキハ, C ヲ A, B ノ**公度**トイフ。此場合ニハ,比 A : B ノ値ハ整數又ハ分數ナリ。

例ヘバ A, B ガソレゾレ C ノ 3 倍及ビ 5 倍ニ等

シキトキハ, A ハ B ノ五分ノ三ニ等シク,比 A : B ノ値ハ $\frac{3}{5}$ ナリ。 又 A ガ B ノ 3 倍ニ等シキトキハ, A : B ノ値ハ 3 ニシテ,此場合ニハ B ガ A, B ノ公度ナリ。

A, B ガ公度ヲ有セザルトキハ,比 A : B ノ値ハ,所謂無理數ニシテ,整數又ハ分數ニ等シカラズ。サレド比 A : B ノ値ニ如何程ニテモ思フママ近キ分數(又ハ小數)ヲ求ムルコトヲ得。

例ヘバ此比ノ値ヲ小數第四位マデ求ムルニハ, B ノ $\frac{1}{10000}$ ヲ單位トシテ A ヲ計ルベシ。今 A ハ B ノ $\frac{31415}{10000}$ ヨリハ大キク, B ノ $\frac{31416}{10000}$ ヨリハ小ナリトスルトキハ,比 A : B ノ値ハ 3.1415...... ニ等シ。

同一ノ單位 C ヲ用ヒテ二ツノ量 A, B ヲ計ルトキ,其數値ガソレゾレ a, b ナルトキハ,比 A : B ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ナリ。

今 $\qquad a=\frac{m}{n},\qquad b=\frac{p}{q}$

トスルトキハ

A ハ C ノ $\frac{m}{n}$ 即チ C ノ $\frac{mq}{nq}$

B ハ C ノ $\frac{p}{q}$ 即チ C ノ $\frac{np}{nq}$

ニ等シ。

故ニ C ノ $\frac{1}{nq}$ ハ A, B ノ公度ニシテ, A ハ其 mq 倍ニ, B ハ其 np 倍ニ等シ。

故ニ比 A : B ノ値ハ $\frac{mq}{np}$ ニ等シ。

サテ $\qquad \frac{mq}{np}=\frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{a}{b}$

即チ A : B ノ値ハ $\frac{a}{b}$ ニ等シ。

(a, b ガ無理數ナルトキニハ, $\frac{m}{n}$ 又ハ $\frac{p}{q}$ ヲ其近似値ト考フベシ)。

66. 比例式。

二ツノ比ガ相等シトハ其値ガ同ジ數ナルヲイフ。

二ツノ比ノ相等シキコトヲ表ハセル等式ヲ比例式トイフ。例ヘバ

$$A:B=C:D$$

ノ如シ。此場合ニハ四ツノ量 A, B, C, D ハ比例

ヲナストイフ。

比例式　　　$A:B=C:D$

ガ成リ立ツトキハ,又次ノ比例式ガ成リ立ツ。

$$A+B:B=C+D:D$$

$$A-B:B=C-D:D \qquad (A>B)$$

$$A+B:A-B=C+D:C-D$$

(第一ノ比例式ニ於ケル相等シキ比ノ値ヲ r トスルトキハ,次ノ三ツノ比例式ノ兩邊ノ比ノ値ハソレゾレ $r+1$, $r-1$, $\frac{r+1}{r-1}$ ニ等シ)。

【注意】 比ノ兩項ハ同ジ種類ノ量タルベキコト勿論ナレドモ,比例式 $A:B=C:D$ ニ於テハ,四ツノ量 A, B, C, D ガ盡ク同ジ種類ノ量タルコトヲ要セズ。例ヘバ A, B ハ共ニ長サ　C, D ハ共ニ面積ナルコトアルベシ。

67. 互ニ比例スル二組ノ量。

同ジ種類ノ一組ノ量

$$A,\ B,\ C,\ D,\ \dots\dots\dots$$

ニ對應シテ他ノ一組ノ量

$$A',\ B',\ C',\ D',\ \dots\dots\dots$$

アリテ

$$A:B,\quad B:C,\quad C:D,\ \dots\dots\dots$$

ガソレゾレ

$$A':B',\quad B':C',\quad C':D',\ \dots\dots\dots$$

ニ等シキトキハ,一ツノ組ニ於ケル任意ノ二ツノ量ノ比ト,他ノ組ニ於テ之ニ對應スル二ツノ量ノ比トハ相等シ。例ヘバ

$$A:C=A':C',\qquad B:D=B':D'$$

カヤウノ場合ニハ,二組ノ量 $A, B, C, D, \dots\dots$ 及ビ $A', B', C', D', \dots\dots$ ハ**互ニ比例ス**トイヒ,之ヲ次ノ如ク書キ表ハスコトヲ得。

$$A:B:C:D\dots\dots=A':B':C':D'\dots\dots$$

甲ノ組ト乙ノ組トハ必ズシモ同ジ種類ノ量ナルコトヲ要セズ。サレド二組ノ量ガ同ジ種類ノ量ナルトキニハ,此等ノ量ノ間ニハ,次ノ關係アルベシ。

$$A:A'=B:B'=C:C'=D:D'\dots\dots$$

卽チ甲ノ組ノ任意ノ量ト乙ノ組ニ於テ之ニ對應スル量トノ比ノ値ハ一定ナリ。

例ヘバ相等シキ比 $A:B$, $A':B'$ ノ値ヲ r, $A:A'$ ノ値ヲ k トスルトキハ,

$$A=rB,\qquad A'=rB$$

$$A=kA'$$

故ニ
$$rB=krB'$$

従テ
$$B=kB'$$

即チ $B:B'$ ノ値ハ k ニ等シ。同ジヤウニ $C:C'$, $D:D'$, ... ノ値モ亦 k ニ等シ。

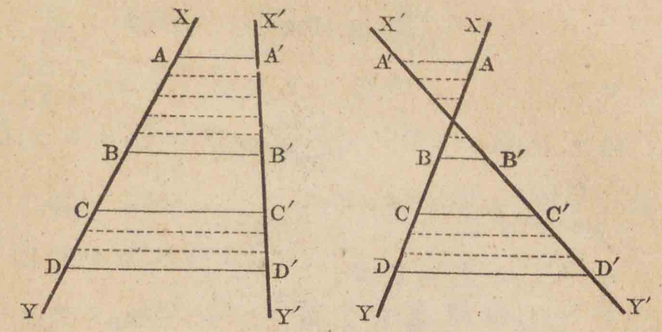
68. 比例線ノ基本定理。

定理四十三 互ニ平行ナル直線ガ之ト交ハル二ツノ定直線ヨリ截リ取ル線分ハ互ニ比例ヲナス。

【説明】 平行線 AA', BB', CC', DD' ガ二ツノ定直線 XY, $X'Y'$ ト交ハル點ヲソレゾレ A, A'; B, B'; C, C'; D, D' トセヨ。

然ラバ
$$AB:CD=A'B':C'D'$$

ナルベシ。



【證】
$$AB:CD=m:n$$

トセヨ。但 m, n ハ二ツノ整數ナリトス。然ラバ AB ヲ m 等分シ, CD ヲ n 等分スルトキハ,各分ハ相等シ。此等ノ分點ヲ通リ AA' ニ平行ニ引ケル直線ハ $A'B'$ 及ビ $C'D'$ ヲソレゾレ m 等分及ビ n 等分シ,其各分ハ相等シ(定理二十二,系三)。

故ニ
$$A'B':C'D'=m:n$$

故ニ
$$AB:CD=A'B':C'D'$$

【注意】 上ノ證ニ於テハ AB, CD ハ公度ヲ有スト假定セリ。

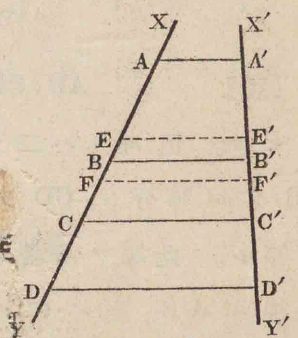
AB, CD ガ公度ヲ有セザルトキ,即チ $AB:CD$ ノ値ガ,無理數ナル場合ニハ, $AB:CD$ ノ値ヲ,例ヘバ小數第四位マデ採リテ

$$\frac{AB}{CD}=1.4142\ldots\ldots$$

トセヨ。

然ラバ AB ハ CD ノ $\frac{14142}{10000}$ ヨリハ大ニシテ, CD ノ $\frac{14143}{10000}$ ヨリハ小ナリ。

今 XY ノ上ニ於テ, CD ノ $\frac{14142}{10000}$ ニ等シク AE ヲ, 又 CD ノ $\frac{14143}{10000}$ ニ等シク AF ヲ取ルトキハ, B ハ E ト F トノ間ニアリ。



E, F ヲ通リ AA′ ニ平行ナル直線ガ X′Y′ ニ交ハル點ヲ E′, F′ トスルトキハ, B′ ハ E′ ト F′ トノ間ニアリ。

サテ上ノ證ニヨリ

$$AE : CD = A'E' : C'D' = 14142 : 10000$$

又 $$AF : CD = A'F' : C'D' = 14143 : 10000$$

即チ A′E′ ハ C′D′ ノ $\frac{14142}{10000}$, A′F′ ハ C′D′ ノ $\frac{14143}{10000}$ ニ等シ。

故ニ A′B′ ハ C′D′ ノ $\frac{14142}{10000}$ ヨリハ大ニシテ, $\frac{14143}{10000}$ ヨリハ小ナリ。即チ

$$A'B' : C'D'$$

ノ値ハ 1.4142...... ニシテ AB : CD ノ値ト小數第四位マデハ合フ。

サテ AB : CD ノ値ヲ小數幾位マデ採ルトモ, A′B′ : C′D′ ノ値ハ其位マデハ AB : CD ノ値ト合フ。

即チ AB : CD ト A′B′ : C′D′ トノ値ハ小數幾位マデニテモ合フ。

故ニ $$AB : CD = A'B' : C'D'$$

定義。 線分 AB ノ上ノ (A ト B トノ間ニアル) 點 P ハ此線分ヲ AP, BP ナル二ツノ部分ニ**內分**ストイヒ, 線分 AB ノ延長ノ上ノ點 P ハ, 此線分ヲ AP, BP ナル二ツノ部分ニ**外分**ストイフ。

線分 AB ハ, 內分ノ場合ニハ, 二ツノ部分 AP, BP ノ和ニ等シク, 外分ノ場合ニハ, 二ツノ部分 AP, BP ノ差ニ等シ。

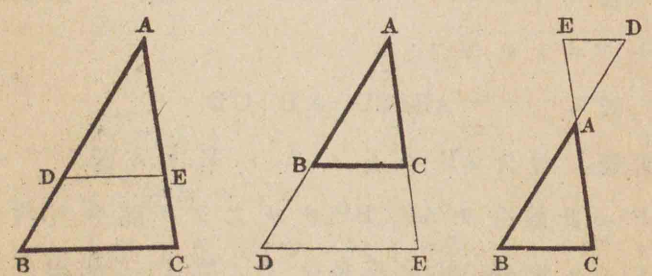
系 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線

ハ他ノ二ツノ邊ヲ相等シキ比ニ内分又ハ外分ス。

△ABC ノ底邊 BC ニ平行ナル直線 DE ガ他ノ二ツノ邊 AB, AC 又ハ其延長ニ交ハル點ヲ D, E トセヨ。

然ラバ　AD : DB = AE : EC

ナルベシ。

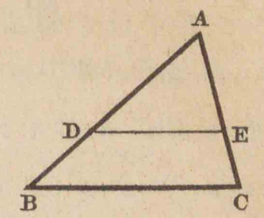


定理四十四　三角形ノ二ツノ邊ヲ相等シキ比ニ内分(又ハ外分)スル直線ハ第三邊ニ平行ナリ。

【說明】　直線 DE ガ△ABC ノ二邊 AB, AC 又ハ其延長ト交ハル點ヲ D, E トシ,

AD : DB = AE : EC

トセヨ。



然ラバ　DE ‖ BC

ナルベシ。

【證】　B ヨリ DE ニ平行ニ直線 BC′ ヲ引キ, AC ト C′ ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ　AD : DB = AE : EC′　(定理四十三,系)

然ルニ假定ニヨリテ

AD : DB = AE : EC

故ニ　AE : EC = AE : EC′

故ニ　EC = EC′

サテ C′ ハ DE ニ對シテ C ト同ジ側ニアルベキガ故ニ, C ハ C′ ト合ス。故ニ BC ハ DE ニ平行ナリ。

【注意】 上ノ圖ニ於テ AB : AD = AC : AE ナルトキハ, DE ハ BC ニ平行ナリ。

問　題

1. 四邊形 ABCD ノ邊 AB ノ上ノ點 B′ ヨリ BC ニ平行ニ B′C′ ヲ引キテ C′ ニ於テ對角線 AC ニ交ハラシメ, C′ ヨリ CD ニ平行ニ C′D′ ヲ引キテ D′ ニ於テ邊 AD ニ交ハラシムルトキハ, B′D′ ハ BD ニ平行ナリ。

2. 定直線外ノ定點ヨリ此直線上ノ任意ノ點ニ至ル直線ヲ定マレル比ニ内分(又ハ外分)スル點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

69. 比例線ノ作圖。

定義。 四ツノ量 A, B, C, D ノ間ニ比例式

$$A:B=C:D$$

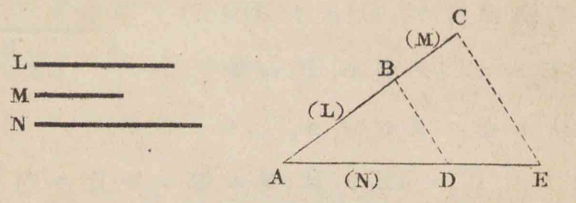
ガ成リ立ツトキハ, D ヲ A, B, C ノ**第四比例項**トイフ。

作圖十五 三ツノ與ヘラレタル直線ノ第四比例項ヲ作ルコト。

【作圖】 L, M, N ヲ與ヘラレタル直線トセヨ。

Catōn

L ニ等シク AB ヲ取リ,其延長ノ上ニ M ニ等シク BC ヲ取レ。A ヨリ任意ノ直線ヲ引キ,其上ニ N ニ等シク AD ヲ取レ。BD ヲ結ビ付ケ, C ヨリ BD ニ平行ニ CE ヲ引キ, AD ノ延長ト E ニ於テ交ハラシメヨ。



然ラバ DE ハ求ムル直線ナルベシ。

【證】 作圖ニヨリ　BD ∥ CE

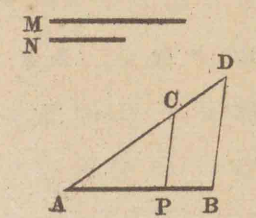
故ニ　$AB:BC=AD:DE$　(定理四十三)

即チ　$L:M=N:DE$

作圖題十六 與ヘラレタル直線ヲ與ヘラレタル比ニ内分又ハ外分スルコト

【作圖】 AB ヲ與ヘラレタル直線トシ,比ハ二ツノ直線 M, N ノ比トシテ與ヘラレタリトセヨ。

(一) 内分ノ場合。AB ノ一端 A ヨリ任意ノ直



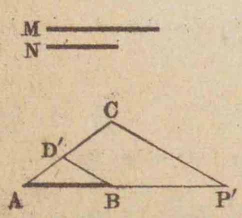
線ヲ引キ,其上ニMニ等シク AC ヲ取リ, AC ノ延長ノ上ニNニ等シク CD ヲ取レ。DB ヲ結ビ付ケ, C ヨリ DB ニ平行ニ CP ヲ引キ, P ニ於テ AB ト交ハラシメヨ。

然ラバ P ハ AB ヲ M:N ニ等シキ比ニ内分スベシ,卽チ

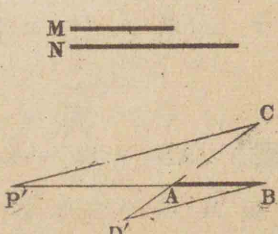
$$AP:PB=M:N$$

ナルベシ(定理四十三)。

(二) 外分ノ場合。A ヨリ任意ノ直線ヲ引キ,其上ニMニ等シク AC ヲ取リ, CA 或ハ其延長ノ上ニNニ等シク CD′ ヲ取リ, D′B ヲ結ビ付ケ, C ヨリ D′B ニ平行ニ CP′ ヲ引キ, P′ ニ於テ AB ノ延長ト交ハラシメヨ。



(M>N)



(M<N)

然ラバ P′ ハ AB ヲ M:N ニ等シキ比ニ外分スベシ,卽チ

$$AP':P'B=M:N$$

ナルベシ(定理四十三)。

【注意】 M=N ナルトキハ, D′ ハ A ニ合シ,上ノ作圖(二)ハ成立セズ。

系 與ヘラレタル線分ヲ與ヘラレタル比ニ内分又ハ外分スル點ハ各唯一ツニ限ル。

問題

1. 與ヘラレタル直線ヲ 3:2 ノ比ニ内分及ビ外分スルコト。

2. 與ヘラレタル直線ヲ與ヘラレタル三ツノ直線ニ比例スル三ツノ部分ニ分ツコト。

3. 與ヘラレタル直線ヲ三分シ,甲ト乙トノ比ハ與ヘラレタル線分M,Nノ比ニ等シク,乙ト丙トノ比ハ與ヘラレタル線分P,Qノ比ニ等シクナルヤウニスルコト。

4. 前ノ問題ニ於テ M, N, P, Q ガソレゾレ m 寸, n 寸, p 寸, q 寸ナルトキ,各部分ノ全直線ニ對スル比ノ値各〻幾許ナルカ。

70. 比例線ノ性質。

定理四十五 四ツノ直線ガ比例ヲナストキハ,外項ノ包ム矩形ト内項ノ包ム矩形トハ等積ナリ。

又逆ニ二ツノ矩形ガ等積ナルトキハ,其一ツヲ包ム二ツノ直線ヲ外項トシ,他ノ一ツヲ包ム二ツノ直線ヲ内項トセル比例ガ成リ立ツ。

(一) 【説明】 A, B, C, D ヲ四ツノ線分トシ

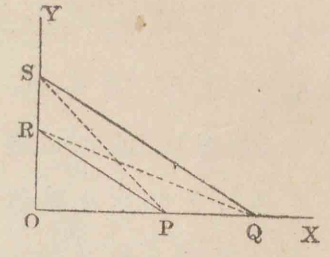
$$A:B=C:D$$

トセヨ。然ラバ

$$A.D=B.C$$

ナルベシ。

【證】 點 O ニ於テ垂直ニ相交ハル二ツノ直線 OX, OY ヲ引キ, OX ノ上ニ A, B ニ等シク OP, OQ ヲ取リ,又 OY ノ上ニ C, D ニ等シク OR, OS ヲ取レ。然ラバ



$$OP:OQ=OR:OS$$

故ニ　PR ∥ QS　(定理四十四)

故ニ　△PRS=△PRQ　(定理三十八,系一)

故ニ　△OPS=△OQR

サテ A, D ノ包ム矩形ハ △OPS ノ二倍ニ等シク B, C ノ包ム矩形ハ △OQR ノ二倍ニ等シ。故ニ

$$A.D=B.C$$

(二) 【説明】 次ニ

$$A.D=B.C$$

トセヨ。然ラバ

$$A:B=C:D$$

ナルベシ。

【證】 假定ニヨリ A.D=B.C

故ニ上ノ圖ニ於テ　△OPS=△OQR

故ニ　$\triangle PRS = \triangle PRQ$

故ニ　$PR \parallel QS$　(定理三十八系二)

故ニ　$OP:OQ=OR:OS$　(定理四十三)

即チ　$A:B=C:D$

【注意】 四ツノ線分 A, B, C, D ヲ同一ノ單位ヲ用ヒテ計レル數値ヲ a, b, c, d トスルトキハ，上ノ定理ヲ次ノ如クニシテ證明スルコトヲ得。

$$A:B=a:b,\quad C:D=c:d$$

故ニ四ツノ數 a, b, c, d ノ間ニ次ノ比例式ガ成リ立ツ。

$$a:b=c:d$$

故ニ　$ad=bc$

サテ ad, bc ハソレゾレ矩形 A.D, B.C ノ面積ノ數値ナリ。故ニ

$$A.D=B.C$$

同ジヤウニ(二)ヲ證明スルコトヲ得。

定義。 同ジ種類ノ三ツノ量 A, B, C, ノ間ニ比例式

$$A:B=B:C$$

ガ成リ立ツトキハ，B ヲ A, C ノ**比例中項**トイフ。

(又 C ヲ A, B ノ**第三比例項**トイフ)。

系一 二ツノ直線ノ包ム矩形ハ其比例中項ナル直線ノ上ノ平方ト等積ナリ。又正方形ノ邊ハ之ト等積ナル矩形ノ相隣レル二ツノ邊ノ比例中項ナリ。

系二 四ツノ直線 A, B, C D ガ比例ヲナス (A:B=C:D) トキハ，A, C, B, D モ亦比例ヲナス (A:C=B:D)

問　題

1. 與ヘラレタル矩形ト等積ニシテ，且一ツノ邊ガ與ヘラレタル線分ニ等シキ矩形ヲ作ルコト。

2. 二ツノ等積ナル矩形ノ底ノ比ハ高サノ反比ニ等シ。

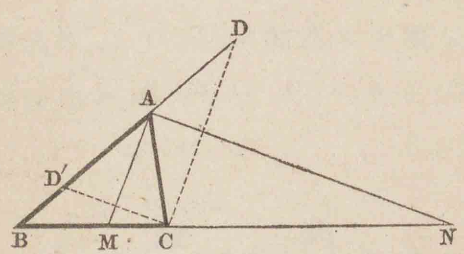
二ツノ等積ナル三角形ニツキテモ亦然リ。

3. 三角形ノ二邊ノ比ハ之ニ對スル高サノ反比ニ等シ。

71. 三角形ノ角ノ二等分線ノ性質。

定理四十六 三角形ノ頂角及ビ之ニ隣レル外角ノ二等分線ハ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分又ハ外分ス。

【說明】 △ABC ノ頂角 BAC ノ二等分線ガ底邊



BC ニ交ハル點ヲ M, 又外角 CAD ノ二等分線ガ底邊 BC ノ延長ニ交ハル點ヲ N トセヨ。然ラバ

$$BM:MC=BN:NC=AB:AC$$

ナルベシ。

【證】 BA ノ延長ノ上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ, DC ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ

$$\angle D(=\tfrac{1}{2}\angle BAC)$$

故ニ $AM \parallel DC$

故ニ $BM:MC=BA:AD=AB:AC$ (定理四十三)

又 AB ノ上ニ AC ニ等シク AD′ ヲ取リ, D′C ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ

$$CD' \perp AM,\quad AN \perp AM$$

故ニ $AN \parallel CD'$

故ニ $BN:NC=BA:AD'=AB:AC$ (定理四十三)

系 三角形ノ底邊ヲ他ノ二邊ノ比ニ內分及ビ外分スル點ヲ頂點ニ結ビ付クル二ツノ直線ハ頂角及ビ其外角ヲ二等分ス。

(作圖題十六,系)

問題

1. 三角形ノ二邊及ビ其夾角ヲ二等分シテ第三邊ニ至ル直線ヲ知リテ此三角形ヲ作ルコト。

2. 四邊形 ABCD ニ於テ,相對スル角 A, C ノ二等分線ガ對角線 BD ノ上ノ同一ノ點ヲ通ルトキ

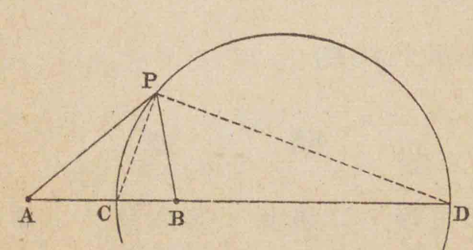
ハ,角 B, D ノ二等分線モ亦對角線 AC ノ上ノ同一ノ點ヲ通ル。

72. 二點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡。

定理四十七 二ツノ定點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ハ此等ノ二點ヲ通ル直線ノ上ニ中心ヲ有スル一ツノ圓周ナリ。

【證】 二ツノ定點ヲ A, B トセヨ。

AB ヲ與ヘラレタル比ニ内分及ビ外分スル點



ヲ C, D トセヨ。然ラバ C, D ハ求ムル軌跡ノ上ノ點ナリ。

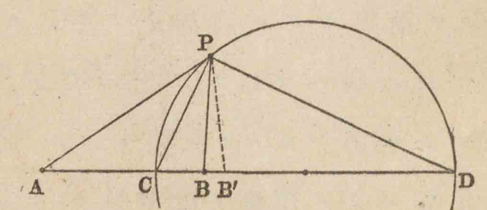
サテ P ヲ求ムル軌跡ノ上ノ任意ノ一點トセヨ。

然ラバ $PA:PB=CA:CB=DA:DB$

故ニ CP, DP ハ三角形 ABP ノ頂角 P 及ビ其外角ノ二等分線ナリ(定理四十六,系), 故ニ $\angle CPD$ ハ直角ナリ。

故ニ A, B ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點 P ハ CD ヲ直徑トセル圓周ノ上ニアリ。

逆ニ P ヲ此圓周上ノ一點トセヨ。PC ニ對シテ



PA ト反對ノ側ニ

$$\angle CPB'=\angle CPA$$

ナルヤウニ PB' ヲ引キ, B' ニ於テ AD ト交ハラシメヨ。然ラバ PC ハ $\triangle APB'$ ノ頂角 APB' ノ二等分線ニシテ, 又 PD ハ PC ニ垂直ナルガ故ニ $\angle APB'$ ニ接スル外角ノ二等分線ナリ。

故ニ $AC:CB'=AD:DB'$ (定理四十六)

然ルニ作圖ニヨリ

$$AC:CB=AD:DB$$

故ニ　$CB':CB=DB':DB$　(第67節參照)

故ニ　$CB':DB'=CB:DB$　(定理四十五,系二)

卽チB, B′ハイヅレモCDヲ同ジ比ニ內分スル點ナリ。故ニB′ハBト一致ス(作圖題十六,系)。

故ニCPハ∠APBノ二等分線,從テ

$$PA:PB=AC:CB$$

卽チCDヲ直徑トスル圓周上ノ點PノA, Bヨリノ距離ノ比ハ與ヘラレタル比ニ等シ。

故ニ求ムル軌跡ハCDヲ直徑トスル圓周ナリ。

卽チ二定點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル(1ニ等シカラザル)比ニ等シキ點ノ軌跡ハ二定點ヲ結ビ付クル直線ノ上ニ中心ヲ有スル一ツノ圓周ナリ。

【注意】 上ニ說キタルハ,與ヘラレタル比ノ値ガ1ニ等シカラザル場合ナリ。比ノ値ガ1ニ等シキトキハ,軌跡ハABノ垂直二等分線ナリ。

問題

1. 同一直線上ノ線分AB, BCヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

2. 同一直線上ノ接續セル三ツノ線分AB, BC, CDヲ相等シキ角ニ見込ム點ヲ求ムルコト。

3. 198頁ノ圖ニ於テ,PBノ延長ガ圓周ニ交ハル點ヲQトスルトキハ,ABハ∠PAQヲ二等分ス。

4. 直徑ABノ延長ノ上ノ點Cヨリ引ケル二ツノ切線ノ切點ヲ結ビ付クル弦ガABニ交ハル點ヲDトスルトキハ,CDハA及ビBニ於テ相等シキ比ニ內分及ビ外分セラル。

5. 底邊,高サ及ビ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

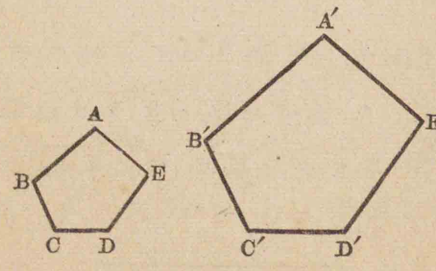
6. 定理四十七ニ於テAB,ノ長サヲa,比ノ値ヲrトスルトキ,直徑CDノ長サヲ計算セヨ。(aヲ16,比ヲ5:3トシテ結果ヲ求メヨ)。

第三章　相似多角形

73. 定義。

邊數ノ相等シキ二ツノ多角形 ABCD ..., A'B'C'D'... ニ於テ角 A, B, C, ... ガ順次ニ角 A', B', C', ... ニ等シク,邊 AB, BC, CD, ... ガ邊 A'B', B'C', C'D', ... ニ比例スルトキハ,此等ノ多角形ハ互ニ**相似**ナリトイフ。

相似多角形ニ於テ相等シキ角,相等シキ角ノ頂點ヲ連ヌル邊又ハ對角線ハ**相對應**ストイフ。



相似多角形ニ於テ相對應スル邊ノ比ハ一定ナリ。

$$(AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' \dots\dots)$$

(第67節參照)

此比ヲ相似多角形ノ**相似ノ比**トイフ。

全ク相等シキ多角形ハ相似ナル多角形ノ特別ノ場合(相似ノ比ノ値ガ 1 ニ等シキ場合)ナリ。

同一ノ多角形ト(又ハ全ク相等シキ多角形トソレゾレ)相似ナル二ツノ多角形ハ互ニ相似ナリ。

74. 三角形ノ相似。(一)

定理四十八　等角ナル二ツノ三角形ハ相似ナリ。

【說明】　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, 從テ $\angle C = \angle C'$

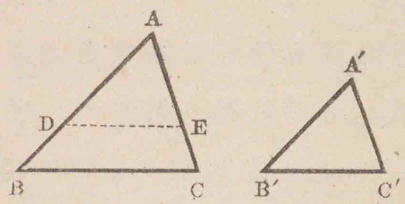
トセヨ。

然ラバ　$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

$\triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$*

ナルベシ。

【證】 $\triangle ABC$ ノ邊 AB 又ハ其延長ノ上ニ $A'B'$



ニ等シク AD ヲ取リ, AC 又ハ其延長ノ上ニ $A'C'$ ニ等シク AE ヲ取リ, DE ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ $\angle A = \angle A'$ ナルガ故ニ

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

$$\angle ADE = \angle B' = \angle B$$

故ニ　$DE \parallel BC$

故ニ　$AB : AD = AC : AE$　(定理四十三)

卽チ　$AB : A'B' = AC : A'C'$

同ジヤウニ　$BA : B'A' = BC : B'C'$

故ニ　$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$

* 二ツノ三角形ガ相似ナルコトナカヤウニ書ク。但相對應スル頂點ガ同ジ位置ニ來ルヤウニ, 二ツノ三角形ヲ書キ表ハスヲヨシトス。

從テ　$\triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$

系　三角形ハ其二邊ト第三邊ニ平行ナル直線トガ作ル三角形ト相似ナリ。

75. 三角形ノ相似。(二)

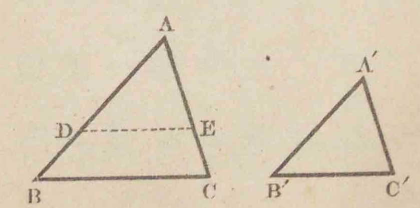
定理四十九　二邊ノ比及ビ其夾角ガソレゾレ相等シキ二ツノ三角形ハ相似ナリ。

【說明】 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$$\angle A = \angle A', \quad AB : AC = A'B' : A'C'$$

トセヨ。

然ラバ　$\triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$　ナルベシ。



【證】 AB 又ハ其延長ノ上ニ $A'B'$ ニ等シク AD

ヲ取リ, AC 又ハ其延長ノ上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲ取リ, DE ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ADE$

$\angle B' = \angle ADE,\quad \angle C' = \angle AED$

サテ假定ニヨリ

$AB : AC = A'B' : A'C'$

故ニ　$AB : A'B' = AC : A'C'$

故ニ　$AB : AD = AC : AE$

故ニ　$DE \parallel BC$　(定理四十四)

故ニ　$\triangle ABC \backsim \triangle ADE$　(定理四十八,系)

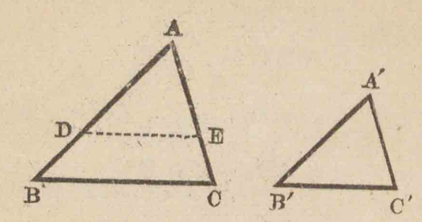
從テ　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

76. 三角形ノ相似。(三)

定理五十　三ツノ邊ガソレゾレ比例ヲナス二ツノ三角形ハ相似ニシテ, 比例ニ於テ相對應スル邊ニ對スル角ガ相等シ。

【説明】　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$



トセヨ。

然ラバ　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

$\angle A = \angle A',\quad \angle B = \angle B',\quad \angle C = \angle C'$

ナルベシ。

【證】　AB 又ハ其延長ノ上ニ A′B′ ニ等シク AD ヲ取リ, AC 又ハ其延長ノ上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲ取リ, DE ヲ結ビ付ケヨ。

假定ニヨリ　$AB : A'B' = AC : A'C'$

故ニ　$AB : AD = AC : AE$

故ニ　$DE \parallel BC$　(定理四十四)

故ニ　$\angle B = \angle ADE,\quad \angle C = \angle AED$

又　$BC : DE = AB : AD = AB : A'B'$

然ルニ假定ニヨリ

$BC : B'C' = AB : A'B'$

故ニ $B'C'=DE$

卽チ $\triangle A'B'C'$, $\triangle ADE$ ハ三ツノ邊ガソレゾレ相等シ,故ニ $\triangle A'B'C' \cong \triangle ADE$

$\angle A'=\angle A$, $\angle B'=\angle ADE=\angle B$, $\angle C'=\angle AED=\angle C$

故ニ $\triangle ABC \backsimeq \triangle A'B'C'$

問題

1. 頂角ノ相等シキ二ツノ二等邊三角形ハ相似ナリ。

2. 斜邊ト他ノ一邊トノ比ガ相等シキ二ツノ形角三角形ハ相似ナリ。

3. 二ツノ相似三角形ニ於テ,相對應スル邊ニ對スル高サノ比ハ相似ノ比ニ等シ。內切圓ノ半徑ノ比,外接圓ノ半徑ノ比,又ハ相對應スル邊ニ對スル中線ノ比モ亦然リ。

4. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ半徑トシ, B ヲ中心トシテ圓ヲ作リ D ニ於テ AC ニ交ハラシムルトキハ, BC ハ AC, CD ノ比例中項ナリ。

5. 三角形ノ二邊ノ包ム矩形ハ,第三邊ニ對スル高サト外接圓ノ直徑トノ包ム矩形ニ等シ。

6. 點 O ヲ通ル三ツノ直線ガ二ツノ平行線トソレゾレ A, A′; B, B′; C, C′ ニ於テ交ハルトキハ

$$AB:A'B'=BC:B'C'$$

7. 二ツノ平行線ノ上ニ各〻三ツノ點 A, B, C; A′, B′, C′ ガ順次ニアリテ.

$$AB:A'B'=BC:B'C'$$

ナルトキハ,直線 AA′, BB′, CC′ ハ同一ノ點ヲ通ルカ,又ハ互ニ平行ナリ。

8. 與ヘラレタル點ヲ通リテ一ツノ直線ヲ引キ,他ノ二ツノ與ヘラレタル點ヨリ此直線ヘノ距離ノ比ヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシムルコト。

9. 二邊ノ比,其夾角及ビ第三邊(又ハ第三邊ニ對スル高サ)ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

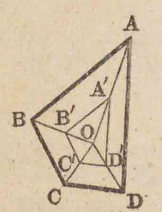
10. 二邊ノ比,其一ツニ對スル角,及ビ第三邊ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

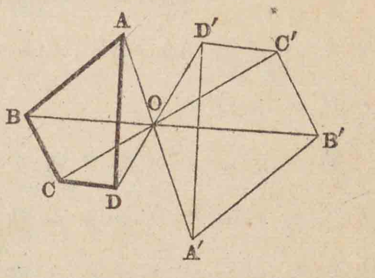
77. 相似形ノ作圖。

作圖題十七 與ヘラレタル多角形ト相似ニシテ,且之ト與ヘラレタル相

似ノ比ヲ有スル多角形ヲ作ルコト。

【作圖】 ABCD ヲ與ヘラレタル多角形, O ヲ任意ノ一點トセヨ。OA, OB, OC, OD 又ハ其延長ノ上ニ $OA:OA'$, $OB:OB'$, $OC:OC'$, $OD:OD'$ ガ與ヘラレタル比ニ等シクナルヤウニ點 A', B', C', D' ヲ





取レ(作圖題十六)。然ラバ A'B'C'D' ハ求ムル多角形ナルベシ。

【證】 作圖ニヨリ

$$OA:OA'=OB:OB'$$

故ニ $AB \parallel A'B'$

同ジヤウニ $AD \parallel A'D'$

故ニ $\angle BAD=\angle B'A'D'$

同ジヤウニ ABCD ノ角ハ順次 A'B'C'D' ノ角ニ等シ。

又 $AB:A'B'=OA:OA'$

即チ $AB:A'B'$ ハ與ヘラレタル比ニ等シ。同ジヤウニ $BC:B'C'$, $CD:C'D'$, $DA:D'A$ モ亦與ヘラレタル比ニ等シ。

即チ

$$AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DA:D'A'$$

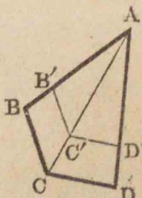
從テ $ABCD \backsim A'B'C'D'$

ニシテ相似ノ比ハ與ヘラレタル比ニ等シ。

定義。 二ツノ相似多角形ノ相對應スル頂點ヲ通ル直線ガ同一ノ點ヲ通ルトキハ,此點ヲ此等ノ多角形ノ**相似ノ中心**トイフ。

上ノ圖ニ於テ,O ハ多角形 ABCD, A'B'C'D' ノ相似ノ中心ナリ。

【注意】 上ノ作圖ニ於テ,多角形 ABCD ノ一ツノ頂點ヲ點 O ニ代用スルコトヲ得。

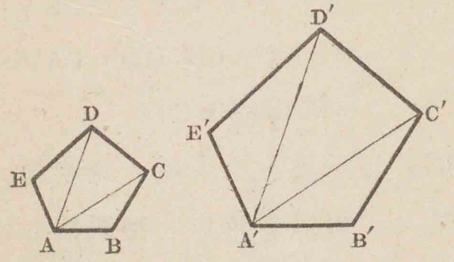


作圖題十八 與ヘラレタル直線ヲ邊トシテ,與ヘラレタル多角形ト相似ナル多角形ヲ作ルコト。

【作圖】 ABCDE ヲ與ヘラレタル多角形, A'B' ヲ與ヘラレタル直線トセヨ。

對角線 AC, AD ヲ引ケ。

$\angle BAC=\angle B'A'C'$, $\angle CAD=\angle C'A'D'$, $\angle DAE=\angle D'A'E'$



トナルヤウニ直線 A'C', A'D', A'E' ヲ引ケ。

$$\angle ABC=\angle A'B'C'$$

トナルヤウニ直線 B'C' ヲ引キ, C' ニ於テ A'C' ト交ハラシメヨ。

$$\angle ACD=\angle A'C'D'$$

トナルヤウニ C'D' ヲ引キ, D' ニ於テ A'D' ニ交ハラシメヨ。

$$\angle ADE=\angle A'D'E'$$

トナルヤウニ D'E' ヲ引キ, E' ニ於テ A'E' ニ交ハラシメヨ。

然ラバ A'B'C'D'E' ハ求ムル多角形ナルベシ。

【證】 作圖ニヨリ A'B'C'D'E' ノ角ハ順次 ABCDE ノ角ニ等シ。

又 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$

故ニ $A'B' : AB = B'C' : BC$

$= A'C' : AC$

又 $\triangle A'C'D' \backsim \triangle ACD$

故ニ $A'C' : AC = C'D' : CD$

故ニ $A'B' : AB = C'D' : CD$

同ジヤウニ $A'B' : AB = D'E' : DE = A'E' : AE$

故ニ $A'B'C'D'E' \backsim ABCDE$

問　題

1. 二ツノ相似多角形ニ於テ相對應スル對角線ノ比ハ相似ノ比ニ等シ。

2. 二ツノ相似多角形ヲ相對應スル對角線ニテ各二ツノ部分ニ分ツトキ,各部分ハソレゾレ互ニ相似ナリ。

3. 四角形 ABCD, A'B'C'D' ガ互ニ相似ナルトキ,對角線 AC, BD ノ交點ヲ O, A'C', B'D' ノ交點ヲ

O′トスルトキハ,三角形 OAB, OBC, OCD, ODA ハソレゾレ三角形 O′A′B′, O′B′C′, O′C′D′, O′D′A′ ト相似ナリ。

4. 圓ニ內接セル多角形ト相似ナル多角形ハ又圓ニ內接スルコトヲ得。

5. 凸四角形 ABCD, A′B′C′D′ ニ於テ邊 AB, BC, CD, DA 及ビ對角線 AC ガ邊 A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ 及ビ對角線 A′C′ ニ比例スルトキハ,此等ノ四角形ハ互ニ相似ナリ。

6. 互ニ相似ナル多角形ニ於テ,相對應スル邊ガソレゾレ互ニ平行ナルトキハ,相對應スル頂點ヲ連ヌル直線ハ盡ク同一ノ點ヲ通ル(又ハ互ニ平行ナリ)。

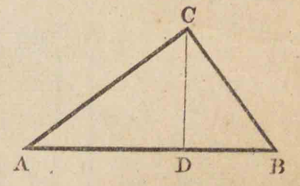
7. 二ツノ直線ヘノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

8. 直線 AB, CD ノ位置及ビ大サガ與ヘラレタルトキ,三角形 PAB, PCD ガ等積ナルヤウナル點 P ノ軌跡ヲ求ムルコト。

78. 直角三角形ニ於ケル比例線。

定理五十一 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ,其足ニヨリテ分タレタル斜邊ノ二ツノ部分ノ比例中項ナリ。又直角ヲ夾メル各ノ邊ハ斜邊ト斜邊ノ上ニ於ケル其正射影トノ比例中項ナリ。

【證】 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊 AB ヘ下セル垂線ノ足ヲ D トセヨ。



然ラバ △ABC, △ACD, △CBD ハ互ニ等角ナリ。

故ニ $\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD$

從テ $AD : CD = CD : DB$

$AB : AC = AC : AD$

$AB : BC = BC : BD$

又ハ $\overline{CD}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BA} \cdot \overline{BD}$$

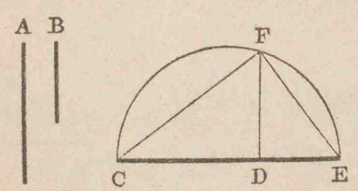
【注意】 第二,第三ノ等式ハ既ニ定理四十ノ證ノ中ニテ證明セラレタルモノナリ。

79. 比例中項ノ作圖。

作圖題十九 與ヘラレタル二ツノ線分ノ比例中項ヲ求ムルコト。

【作圖】 A, B ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

A ニ等シキ任意ノ線分 CD ヲ作リ,其延長ノ上



ニ B ニ等シク DE ヲ取レ。CE ヲ直徑トシテ半圓周ヲ作リ, D ニ於テ CE ニ垂線 DF ヲ作リ,圓周ト F ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ DF ハ求ムル線分ナルベシ(定理五十一)。

問　題

1. 與ヘラレタル矩形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト。

2. 與ヘラレタル多角形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト。

3. 二ツノ相等シカラザル線分ノ比例中項ハ,此等ノ線分ノ和ノ半分ヨリモ小ナリ。

4. 一定ノ周圍ヲ有スル矩形ノ中,正方形ノ面積ガ最大ナリ。一定ノ面積ヲ有スル矩形ノ中,正方形ノ周圍ガ最小ナリ。

80. 圓ニ於ケル比例線。

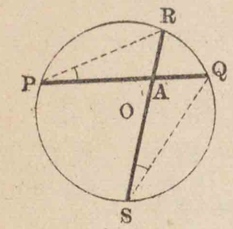
定理五十二 圓周上ニアラザル一ツノ定點ヲ通ル弦ガ此點ニ於テ内分又ハ外分セラルル二ツノ部分ノ包ム矩形ハ一定ノ面積ヲ有ス。

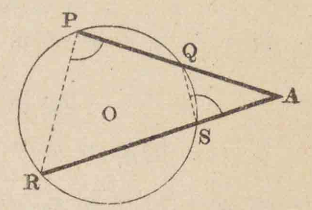
【說明】 圓周 O ノ上ニアラザル定點ヲ A, PQ, RS ヲ A ヲ通ル二ツノ弦トセヨ。

然ラバ　$\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AR}.\overline{AS}$

ナルベシ。

【證】PR, QS ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ △APR,





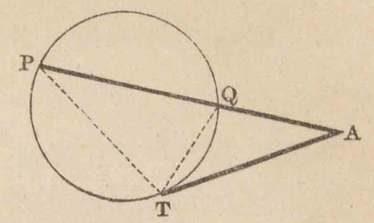
△ASQ ニ於テ ∠PAR=∠SAQ, ∠APR=∠ASQ, 故ニ △APR, △ASQ ハ等角,從テ相似ニシテ, AP ト AS ト又 AR ト AQ トハ相對應スル邊ナリ。

故ニ　AP : AR=AS : AQ

故ニ　$\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AR}.\overline{AS}$　(定理四十五)

系一 二ツノ線分ガ同一ノ點ニ於テ雙方共ニ內分又ハ外分セラルル兩部分ノ包ム矩形ガ相等シキトキハ,二ツノ線分ノ兩端ナル四ツノ點ハ同一ノ圓周上ニアリ。

系二 圓外ノ一點(A)ヨリ此圓ニ引ケル切線(AT)ノ長サハ,同ジ點ヲ通ル割線(AQP)上ノ弦(PQ)ガ此點ニ於テ外分セラルル二ツノ部分(AP, AQ)ノ比例中項ナリ。



系三 圓外ノ一點(A)ヨリ圓周上ノ一點(T)ニ至ル直線(AT)ガ,同ジ點ヲ通ル割線(AQP)上ノ弦(PQ)ガ此點ニ於テ外分セラルル二ツノ部分(AP, AQ)ノ比例中項ニ等シキトキハ,第一ノ直線(AT)ハ其一端(T)ニ於テ圓ニ切ス。

問題

1. 定點ヲ通ル弦ガ其點ニ於テ内分又ハ外分セラルル二ツノ部分ノ包ム矩形ハ,半徑ト中心ヨリ定點ニ至ル距離トノ上ノ平方ノ差ニ等シ。

2. 相交ハル二ツノ圓ノ共通弦上ノ同一ノ點ニ於テ二等分セラルル各圓ノ弦ハ相等シ。

3. 直線 AB ノ延長ノ上ノ定點ヨリ A, B ヲ通ル任意ノ圓ヘ引ケル切線ノ長サハ一定ナリ。

4. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ通リ,一ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ作ルコト。

5. 一ツノ圓ガ他ノ二ツノ圓 O, O′ トソレゾレ A, B; A′, B′ ニ於テ交ハルトキ, AB, A′B′ (又ハ其延長) ノ交點 E ヨリ圓 O, O′ ヘ引ケル切線ハ等長ナリ。

6. 三ツノ圓ガ二ツヅツ相交ハルトキハ,三ツノ共通ノ弦ハ同一ノ點ヲ通ル。

7. 二ツノ相切スル圓ガ各〻第三ノ圓ニ交ハルトキハ,切點ニ於ケル共通切線ト相交ハル圓ニ共通ナル二ツノ弦トハ同一ノ點ヲ通ル。

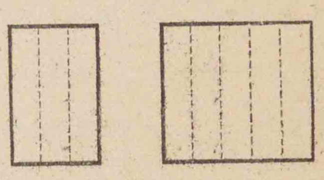
8. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ通リ,一ツノ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ作ルコト。

第四章　比例線ノ續キ

81. 面積ノ比較。

定理五十三　一定ノ高サヲ有スル矩形ノ面積ハ其底ニ比例ス。

【說明】　一定ノ高サヲ有スル任意ノ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其底邊ノ比ニ等シ。



【證】　定理四十三ト同ジヤウニシテ此定理ヲ證明スルコトヲ得。(又代數教科書第九篇ヲ參照セヨ)。

【注意】　本定理ニヨリ,作圖題十四ヲ應用シテ,任意ノ二ツノ多角形ノ面積ノ比ニ等シキ比ヲ有スル二ツノ直線ヲ作ルコトヲ得。

系　一定ノ高サ(又ハ底)ヲ有スル三角形又ハ平行四邊形ノ面積ハ其底(又ハ高サ)ニ比例ス。

定理五十四　一ツノ角ガ相等シキ二ツノ三角形ノ面積ノ比ハ相等シキ角ヲ夾メル二邊ノ包ム矩形ノ比ニ等シ。

【說明】　$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

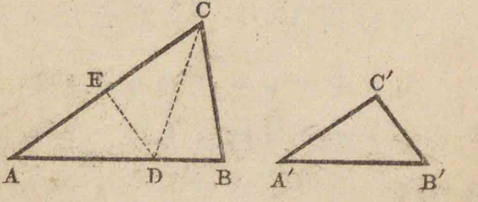
$$\angle A = \angle A'$$

トセヨ。

然ラバ

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}.\overline{AC} : \overline{A'B'}.\overline{A'C'}$$

ナルベシ。



【證】　AB ノ上ニ A′B′ ニ等シク AD ヲ取リ, AC ノ上ニ A′C′ ニ等シク AE ヲ取リ, DE, DC ヲ結ビ付ケヨ。

然ラバ　　$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$

サテ　$\triangle ABC : \triangle ADC = AB : AD$

$= AB . AC : AD . AC$

(定理五十三及系)

又　$\triangle ADC : \triangle ADE = AC : AE$

$= AD . AC : AD . AE$　(同上)

故ニ　$\triangle ABC : \triangle ADE = AB . AC : AD . AE$

故ニ　$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = AB . AC : A'B' . A'C'$

【注意】 AB, AC ノ長サヲ x, y; $A'B'$, $A'C'$ ノ長サヲ x', y' トスルトキハ

$$\triangle ABC : A'B'C' = xy : x'y' = \begin{cases} x : x' \\ y : y' \end{cases}$$

故ニ上ノ定理ヲ次ノ如クニ言ヒ表ハスコトヲ得。

一ツノ角ガ定マレル三角形ノ面積ハ此角ヲ夾メル二邊ノ長サニ複比例ス。(代數教科書第九篇參照)

問　題

1. 同ジ底邊ノ上ニ立テル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ共通ノ底邊又ハ其延長ニテ二ツノ三角形ノ面積ノ比ニ等シク內分又ハ外分セラル。

2. 三角形ABCノ中線AD(又ハ其延長)ノ上ノ一點OトC, Bトヲ連ヌル直線ガ邊AB, AC(又ハ其延長)トソレゾレE, Fニテ交ハルトキハ、EFハBCニ平行ナリ。

3. 三角形ABCノ底邊BCニ平行ナル直線ガ他ノ二邊AB, AC又ハ其延長ニ交ハル點ヲソレゾレE, Fストルトキハ、BF, CEハBCニ對スル中線又ハ其延長ノ上ニ於テ相交ハル。

4. 平行四邊形ABCDノ對角線ACノ上ノ點Pヲ通リ邊AB及ビADニ平行ナル直線ヲ引クトキハ,平行四邊形PDハ平行四邊形PA, PCノ比例中項ナリ。

5. 與ヘラレタル三角形ト共通ナル頂角ヲ有シ,且之ト等積ナル二等邊三角形ヲ作ルコト。

6. 頂角及ビ之ヲ夾メル二邊ノ和ガ一定ナル三角形ノ中,面積ノ最大ナルモノヲ求ムルコト。

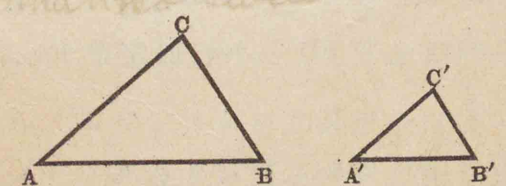
7. 三角形ABCノ邊BC, CA, ABノ上ニソレゾレ其邊ノ三分ノ一ニ等シクBD, CE, AFヲ取ルト

キ,三角形 DEF, ABC ノ面積ノ比ヲ求メヨ。

82. 相似多角形ノ面積ノ比。

定理五十五 二ツノ相似三角形ノ面積ノ比(ノ値)ハ相似ノ比(ノ値)ノ平方ニ等シ。

【證】 ABC, A′B′C′ ヲ互ニ相似ナル三角形トシ,頂點 A, B, C ハ A′, B′, C′ ニ對應ストセヨ。又相似ノ比ノ値ヲ r トセヨ。



然ラバ

$$\angle A=\angle A',\quad AB:A'B'=AC:A'C'=r:1$$

故ニ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB}{A'B'}\times\frac{AC}{A'C'}=r^2$$

(第 224 頁,注意參照)

系 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ハ相似ノ比ノ平方ニ等シ。

(相似多角形ヲ一組ヅツ互ニ相似ナル三角形ニ分割スルコトヲ得ベキガ故ニ,本定理ヲ應用シテ此系ヲ證明スルコトヲ得)。

上ノ系ヲ次ノ如ク言ヒ表ハスコトヲ得。

相似多角形ノ面積ハ對應邊ノ上ノ平方ニ比例ス。

問題

1. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ガ二ツノ線分 A, B ノ比ニ等シキトキ, A, B ノ比例中項ヲ M トスレバ,相似ノ比ハ A : M (又ハ M : B) ニ等シ。

2. 直角三角形ノ斜邊ノ上ニ於ケル他ノ二邊ノ正射影ノ比ハ,此等ノ二邊ノ比ノ平方ニ等シ。

3. 二ツノ相似多角形ノ面積ノ比ガ,二ツノ與ヘラレタル線分ノ比ニ等シキトキ,一ツノ多角形ヲ知リテ,他ノ多角形ヲ作ルコト。

4. 與ヘラレタル矩形ト等積ニシテ,與ヘラレタル多角形ト相似ナル多角形ヲ作ルコト。

5. 與ヘラレタル多角形ト等積ニシテ,他ノ與ヘラレタル多角形ト相似ナル多角形ヲ作ルコト。

6. 與ヘラレタル正方形ト等積ナル正三角形ヲ作ルコト。

7. 與ヘラレタル直線ニ平行ナル直線ヲ引キテ,與ヘラレタル三角形 ABC ノ邊 AB, AC 又ハ其延長ト D, E ニテ交ハラシメ,三角形 ADE ヲシテ ABC ト等積ナラシムルコト。

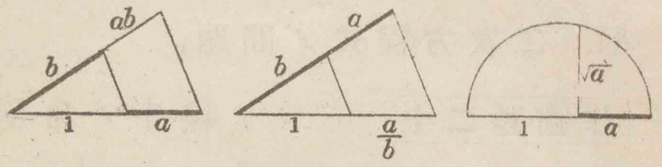
8. 直角三角形ノ三邊ノ上ニ,其邊ヲ對應邊トセル三ツノ相似多角形ヲ作ルトキハ,斜邊ノ上ノ多角形ハ他ノ二邊ノ上ノ多角形ノ和ニ等シ。

83. 作圖ニヨリテ四則及ビ開平ノ問題ヲ解クコト。

數値ガ a, b ナル線分ガ與ヘラレタルトキハ,數値ガ $a+b$ 又ハ $a-b(a>b)$ ナル線分ハ,作圖ニヨリテ容易ニ求メ得ベシ。又長サノ單位ト數値ガ a, b ナル線分トガ與ヘラレタルトキハ,第四比例項ノ作圖(作圖題十五)ニヨリテ,數値ガ ab 又ハ $\frac{a}{b}$ ナル

線分ヲ作ルコトヲ得。

$$\left(1:a=b:ab,\ 又\ b:a=1:\frac{a}{b}\right)$$



次ニ又長サノ單位ト數値ガ a ナル線分トガ與ヘラレタルトキ,比例中項ノ作圖(作圖題十七)ヲ應用シテ,數値ガ $\sqrt{a}$ ナル線分ヲ作ルコトヲ得。

$$(1:\sqrt{a}=\sqrt{a}:a)$$

問　題

1. 與ヘラレタル線分ヲ長サノ單位トシテ,數値ガ $\frac{2}{3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ナル線分ヲ作ルコト。

2. 數値ガ a, b ナル線分ヲ知リテ,數値ガ $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$ ナル線分ヲ作ルコト。

3. 數値ガ a, b, c ナル線分ヲ知リテ,數値ガ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ナル線分ヲ作ルコト。

4. 與ヘラレタル正方形ノ 2 倍, 3 倍, ... ノ

面積ヲ有スル正方形ヲ作ルコト。

5. 底邊ニ平行ナル直線ニテ,三角形ノ面積ヲ二等分スルコト,又三等分スルコト。

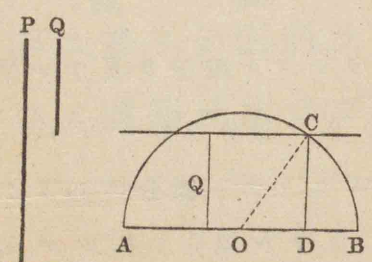
84. 二次方程式ノ問題。

作圖題二十 二ツノ線分ノ和及ビ比例中項ヲ知リテ,此等ノ線分ヲ作ルコト。

【說明】 P, Q ガ與ヘラレタル線分ナルトキ

$$X+Y=P,\qquad X.Y=Q^2$$

ナルガ如キ線分 X, Y ヲ作ルコトヲ要ス。



【作圖】 P ニ等シキ線分 AB ヲ直徑トシテ半圓ヲ作レ。AB ノ上ノ任意ノ一點ニ於テ之ニ垂

直ニ,且半圓ト同ジ側ニ Q ニ等シキ線分ヲ取リ,其端ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引キ,半圓周トCニ於テ交ハラシメヨ。C ヨリ AB ヘ垂線 CD ヲ下セ。

然ラバ AD, DB ハ求ムル線分ナルベシ。

【證】

$$AD+DB=AB=P$$

$$\overline{AD}\,.\,\overline{DB}=\overline{CD}^2=Q^2 \qquad \text{(作圖題十七)}$$

【注意一】 二次方程式

$$x^2-px+q=0$$

ニ於テ p, q ガ正數ナルトキハ,二ツノ根ノ和ハ p, 積ハ q ニ等シ。ヨリテ P ヲ數値 p, Q ヲ數値 $\sqrt{q}$ ナル線分トスルトキハ,上ノ作圖ニヨリテ求メタル線分 X, Y ノ數値ハ卽チ上ノ二次方程式ノ二ツノ根

$$\frac{p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

ナルベシ。

實際圓ノ中心ヲ O トスルトキハ

$$\overline{OD}^2=\overline{OC}^2-\overline{CD}^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-(\sqrt{q})^2=\frac{p^2-4q}{4}$$

故ニ

$$OD=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

從テ　　$AD=AO+OD=\dfrac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

$$DB=OB-OD=\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

【注意二】 上ノ作圖ニ於テ, Q ガ AB ノ半分ヨリモ大ナルトキハ, AB ニ平行ニ引キタル直線ハ圓周ト交ハラズ。此場合ニハ $\sqrt{q}>\dfrac{p}{2}$ 卽チ判別式 p^2-4q ハ負數ニシテ,二次方程式 $x^2-px+q=0$ ハ實根ヲ有セズ。

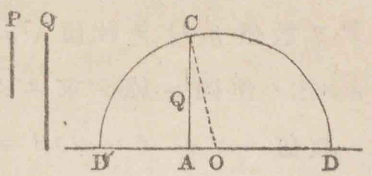
又 Q ガ AB ノ半分ニ等シキトキハ, D ハ圓ノ中心ト一致シ, X, Y ハ相等シクナル。此場合ニハ $\sqrt{q}=\dfrac{p}{2}$ 卽チ判別式 p^2-4q ハ 0 ニ等シク,二次方程式ハ二ツノ等根ヲ有ス。

作圖題二十一 二ツノ線分ノ差及ビ比例中項ヲ知リテ,此等ノ線分ヲ作ルコト。

【說明】 P, Q ヲ與ヘラレタル線分トセヨ。

$$X-Y=P,\qquad X.Y=Q^2$$

ナルガ如キ線分 X, Y ヲ作ルコトヲ要ス。



【作圖】 P ノ半分ニ等シク AO ヲ取リ, A ニ於テ AO ニ垂直ニ Q ト等シク AC ヲ取レ。O ヲ中心, OC ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ, AO ノ延長ト D 及ビ D′ ニ於テ交ハラシメヨ。

然ラバ AD, AD′ ハ求ムル線分ナルベシ。

【證】 作圖ニヨリ

$$AD=OD+OA=OC+OA$$

$$AD'=OD'-OA=OC-OA$$

故ニ　　$AD-AD'=2.AO=P$

又　　$\overline{AD}\,.\,\overline{AD'}=\overline{AC}^2=Q^2$　　(作圖題十七)

【注意】 二次方程式

$$x^2-px-q=0$$

ニ於テ p, q ガ正數ナルトキハ,此方程式ハ一ツノ正根及ビ一ツノ負根ヲ有ス。今其正根ヲ α, 負根ヲ $-\beta$ トスルトキハ

$$\alpha-\beta=p, \qquad \alpha\beta=q$$

ヨリテPヲ數値p, Qヲ數値$\sqrt{q}$ナル線分トスルトキハ,上ノ作圖ニ於テ求メタル線分AD及ビAD$'$ノ數値ハソレゾレα, βニ等シカルベシ。即チ

$$AD=\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2}, \qquad AD'=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$$

ナルベシ。

實際 $\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2+(\sqrt{q})^2=\frac{p^2+4q}{4}$

故ニ
$$OC=\frac{\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

從テ
$$AD=OC+OA=\frac{\sqrt{p^2+4q}+p}{2}$$
$$AD'=OC-OA=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$$

問題

1. 面積ト周圍トヲ知リテ,矩形ヲ作ルコト。

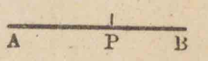
2. 面積ト相隣レル二邊ノ差トヲ知リテ,矩形ヲ作ルコト。

85. 應用。(中末比)

作圖題二十二 與ヘラレタル線分ABヲPニ於テ內分(又ハ外分)シ,其一分APガ他ノ一分PBト與ヘラレタル線分ABトノ比例中項($\overline{AP}^2=\overline{AB}.\overline{BP}$)トナルヤウニスルコト。

(カヤウニ一ツノ線分ヲ分ツコトヲ,此線分ヲ中末比ニ分ツトイフ)。

ABノ長サヲa, APノ長サヲxトセヨ。然ラバ內分ノ場合ニハ,PBノ長サハ$a-x$ナリ。故ニxハ次ノ方程式ヲ滿足セシム。



$$x^2=a(a-x) \qquad (1)$$

又ハ
$$x^2+ax-a^2=0$$

故ニ
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}a$$

サテ正根ヲα, 負根ヲ$-\beta$トスルトキハ

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a, \qquad \beta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}a$$

ニシテαハ即チ求ムル線分 AP ノ長サナリ。

又 $-\beta$ ハ方程式 (1) ヲ満足セシムルガ故ニ

$$\beta^2=\alpha(\alpha+\beta)$$

故ニ BA ノ延長ノ上ニ點 P' ヲ取リ

$$AP'=\beta$$

トスルトキハ

$$BP'=\alpha+\beta$$

故ニ
$$\overline{AP'}^2=\overline{AB}\,.\,\overline{BP'}$$

即チ P' ハ求ムル外分點ナリ。

サテ $\alpha,\ -\beta$ ハ二次方程式

$$x^2+\alpha x-\alpha^2=0$$

ノ二ツノ根ナルガ故ニ

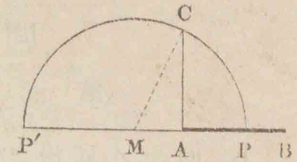
$$\beta-\alpha=\alpha,\qquad \alpha\beta=\alpha^2$$

即チ AP, AP' ハ差ガ AB ニ等シク,比例中項モ AB ニ等シキ二ツノ線分ニ外ナラズ。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得(作圖題二十一)。

【作圖】 BA ノ延長ノ上ニ AM ヲ AB ノ半分ニ等シク取レ。A ヨリ AB ニ垂直ニ且 AB ニ等シク

AC ヲ取レ。M ヲ中心, MC ヲ半徑トシテ圓ヲ作リ, AB 及ビ其延長ト P 及ビ P' ニ於テ交ハラシメヨ。



然ラバ P, P' ハ即チ求ムル點ナリ。

【證】 作圖ニヨリ

$$AP'-AP=AB \qquad \overline{AP}.\overline{AP'}=\overline{AC}^2=\overline{AB}^2$$

故ニ
$$\overline{AP}(AP+AB)=\overline{AB}^2$$
$$\overline{AP}^2+\overline{AP}.\overline{AB}=\overline{AB}^2$$
$$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2-\overline{AP}.\overline{AB}$$
$$=\overline{AB}(AB-AP)=AB.BP$$

同ジヤウニ
$$\overline{AP'}^2=\overline{AB}.\overline{BP'}$$

問題

1. 斜邊ハ與ヘラレタル線分ニ等シク,他ノ一ツノ邊ハ斜邊ト第三邊トノ比例中項ナル直角三角形ヲ作ルコト。

問題

(第三編雜題二)

1. 同一ノ底邊ノ同ジ側ニ立テル等積ナル二ツノ三角形ガ,共通ノ底邊ニ平行ナル一ツノ直線ヨリ截リ取ル二ツノ線分ハ相等シ。

2. 三ツノ互ニ平行ナル定直線ノ上ニ一ツヅツ頂點ヲ有スル任意ノ三角形ノ面積ハ,其三角形ガ中間ノ直線ヨリ截リ取ル線分ニ比例ス。

3. 對應邊ガ互ニ比例スル二ツノ梯形ハ相似ナリ。

4. 二ツノ定圓ヲ相等シキ角ニ見込ム點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

5. 三ツノ與ヘラレタル點ヘノ距離ガ,三ツノ與ヘラレタル線分ニ比例スル點ヲ求ムルコト。

6. 直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ガ任意ノ切線ト交ハル點ヲ P, Q トスルトキハ $\overline{AP}.\overline{BQ}$ ハ一定ナリ。

7. 直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ノ上ニソレゾレ點 P, Q ヲ取リ, PQ ガ圓周ニ交ハル點ヲ M, M ニ於テ PQ ニ垂直ナル直線ガ直徑 AB (又ハ其延長) ニ交ハル點ヲ C トスルトキハ

$$\overline{AP}.\overline{BQ}=\overline{AC}.\overline{BC},\qquad \overline{PM}.\overline{QM}=\overline{CM}^2$$

8. A ハ定點ニシテ, P ハ定圓周上ノ任意ノ點ナルトキ, AP ヲ一定ノ比ニ內分(又ハ外分)スル點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

9. 定三角形ト相似ナル三角形ノ一ツノ頂點ハ固定シ,第二ノ頂點ハ定直線(又ハ定圓周)ノ上ヲ動クトキ,第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

10. 四角形 ABCD ノ內部ニ,三角形 ACD ト相似ナル三角形 ABE ヲ作リ, 頂點 A, C, D ヲソレゾレ頂點 A, B, E ト對應セシムルトキハ, 三角形 ABC. AED モ亦互ニ相似ナリ。

又 $$\overline{AB}.\overline{CD}+\overline{BC}.\overline{AD}=\overline{AC}(BE+ED)$$

11. [とれみーノ定理] 圓ニ內接スル四角形ニ於テ,相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ,對角線ノ包ム矩形ニ等シ。

12. 半徑 25 糎ノ圓ニ於テ,中心ヨリ 17 糎ノ距離ニアル點ヲ通リテ,長サ 40 糎ノ弦ヲ引クトキ,此點ニ於テ分タルル弦ノ二ツノ部分ノ長サ各幾許ナ

ルカ。

13. 圓外ノ一點 O ヨリ二ツノ割線 OAB, OCD ヲ引クトキ, OA=15 寸, OB=28 寸, CD=23 寸ナルトキハ, OC, OD ノ長サ各幾許ナルカ。

又ナホ AC=18 寸ナルトキ, BD ノ長サヲ求メヨ。

14. 三角形 ABC ノ中線 AD ノ中點ヲ E, BE ノ延長ガ邊 AC ニ交ハル點ヲ F トスルトキ, AF : CF ノ値ヲ求メヨ。

15. 比及ビ比例中項ヲ知リテ,二ツノ線分ヲ作ルコト。

16. 二邊ノ比ト對角線トヲ知リテ,矩形ヲ作ルコト。

17. 與ヘラレタル三角形ニ,正方形ヲ内接セシムルコト。

18. 與ヘラレタル三角形ニ,與ヘラレタル矩形ト相似ナル矩形ヲ内接セシムルコト。

第五章　正多角形

86. 正多角形。

スベテノ角ノ相等シキ多角形ヲ等角多角形,スベテノ邊ノ相等シキ多角形ヲ等邊多角形トイフ。

等角ニシテ且等邊ナル多角形ヲ**正多角形**トイフ。

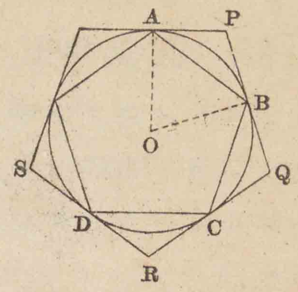
等角三角形ハ同時ニ又等邊,又等邊三角形ハ同時ニ等角,從テイヅレモ正三角形ナリ。

サレド,邊ノ數ガ三ツヨリ多キトキハ,等角多角形,等邊多角形ハ必ズシモ正多角形ナラズ。(等角四邊形,等邊四角形,正四角形ノ別名ハ何ゾ)。

正 n 角形ノ内角ハ各 $\frac{2(n-2)}{n}$ 直角ニ等シ,卽チ二直角ヨリ少キコト $\frac{4}{n}$ 直角ナリ(定理十八)。

定理五十六　圓周ヲ n 等分スル點ヲ順次ニ結ビ付クルトキハ,圓ニ内接セル正 n 角形ヲ得。又此等ノ分點ニ於ケル切線ハ,圓ニ外切セル正 n 角形ヲ作ル。

【證】 圓周 O ガ A, B, C, D, ….. ニ於テ n 等分セラレタリトセヨ。



然ラバ多角形 ABCD…… ノ内角ハイヅレモ圓周ノ $\frac{n-2}{n}$ ニ等シキ弧ノ上ニ立テル圓周角ナルガ故ニ,相等シ。

又此多角形ノ邊 AB, BC, …… ハイヅレモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ヲ張ル弦ナルガ故ニ,相等シ。

故ニ多角形 ABCD…….. ハ等角ニシテ等邊,即チ正多角形ナリ。

次ニ A ニ於ケル切線ト B ニ於ケル切線トノ交點ヲ P, B ニ於ケル切線ト C ニ於ケル切線トノ交點ヲ Q, …… トセヨ。

然ラバ ∠PAB, ∠PBA ; ∠QBC, ∠QCB ; ∠RCD, ∠RDC ; ……… ハイヅレモ圓周ノ n 分ノ一ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シ(定理三十五)キガ故ニ相等シ。

又 AB, BC, CD, …… モ相等シキガ故ニ,二等邊三角形

PAB, QBC, RCD, ………

ハ全ク相等シ。

故ニ ∠P = ∠Q = ∠R = ………

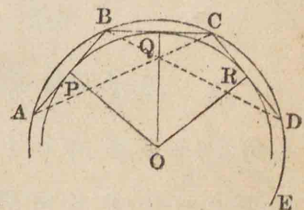
又 AP = PB = BQ = QC = CR = RD = ………

故ニ PQ = QR = RS = ………

即チ多角形 PQRS……… ハ等角ニシテ等邊,即チ正多角形ナリ。

定理五十七 正多角形ニ圓ヲ外接セシメ,又内切セシムルコトヲ得。

【說明】 ABCDE…… ヲ正多角形トセヨ。然ラバ A, B, C, D, E, …… ハ同一ノ圓周上ニアルベク,又 AB, BC, CD, DE, …… ハ同一ノ圓ニ切スベシ。



【證】 AC, BD ヲ結ビ付ケヨ。然ラバ二等邊三角形 BAC, CDB ハ全ク相等シク,從テ ∠BAC = ∠CDB

故ニ A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアリ。

即チ正多角形ノ三ツノ相隣レル頂點ヲ通ル圓ハ尚其次ノ頂點ヲモ通ル。故ニ A, B, C ヲ通ル圓ハ

Dヲ通リ,從テB, C, Dヲ通ルガ故ニ,其次ノ頂點Eヲモ通ル。次第ニカヤウニシテ此圓ハスベテノ頂點ヲ通ル。卽チ正多角形ノ外接圓ナリ。

此圓ノ中心ヲOトセヨ。

然ラバ AB, BC, CD, ... ハ此圓ノ相等シキ弦ナルガ故ニ,Oヨリ此等ノ邊ヘ下セル垂線 OP, OQ, OR ...... モ亦相等シ(定理二十六)。

故ニOヲ中心,OPヲ半徑トシテ作レル圓ハP, Q, R,...... ニ於テ AB, BC, CD,...... ニ切ス。卽チ正多角形 ABCD...... ニ內切ス。

問　　題

1. 圓ニ內接セル等邊多角形,又ハ外切セル等角多角形ハ正多角形ナリ。

內接セル等角多角形,外切セル等邊多角形ハ如何。

2. 邊數ガ偶數ナル正多角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付クルトキハ,邊數ガ半分ナル正多角形ヲ得。

3. 邊數ガ奇數ナル正多角形ノ外接圓ニ於テ,

各頂點ヲ通ル直徑ノ端ハ,邊數二倍ノ內接正多角形ノ頂點ナリ。

4. 邊數ノ同ジキ二ツノ正多角形ハ相似ナリ。

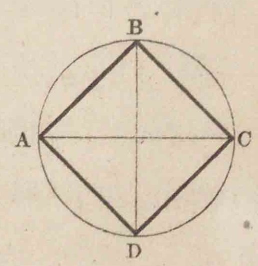
5. 邊數ノ定マレル正多角形ノ周圍ノ長サハ其內切圓(又ハ外接圓)ノ半徑ニ比例ス。

6. 正多角形ノ面積ハ其周圍ニ等シキ底邊及ビ內切圓ノ半徑ニ等シキ高サヲ有スル三角形面積ニ等シ。

87. 正方形。正六角形。

作圖題二十三　與ヘラレタル圓ニ內接スル正方形ヲ作ルコト。

【作圖】　互ニ垂直ナル二ツノ直徑 AC, BD ヲ引ケ。其端 A, B, C, D ハ內接正方形ノ頂點ナリ。

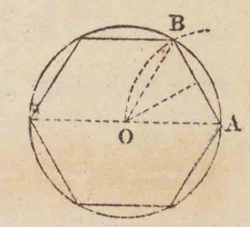


系　直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,內接正方形ノ周圍ノ長サハ $2\sqrt{2}$, 外切正方形ノ周圍

ノ長サハ4ナリ。

作圖題二十四 與ヘラレタル圓ニ内接セル正六角形ヲ作ルコト。

【作圖】 圓周Oノ上ノ任意ノ點Aヲ中心トシ, AOヲ半徑トシテ圓ヲ作リ圓周OトBニ於テ交ハラシメヨ。然ラバABハ内接正六角形ノ一邊ナルベシ。



【證】 作圖ニヨリテAOBハ正三角形ナリ。故ニ∠AOBハ二直角ノ三分ノ一,即チ四直角ノ六分ノ一ニ等シ。故ニ中心角AOBニ對スル弧ABハ圓周ノ六分ノ一,從テ弦ABハ内接正六角形ノ一邊ナリ(定理五十六)。

系 直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,内接正六角形ノ周圍ノ長サハ3,又外切正六角形ノ周圍ノ長サハ $2\sqrt{3}$ ナリ

【證】 内接正六角形ト外切正六角形トノ周圍ノ比ハOヨリABヘ下セル垂線トOAトノ比ニ

等シク,此比ノ値ハ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ニ等シ。故ニ外切正六角形ノ周圍ノ長サハ $3\div\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即チ $2\sqrt{3}$ ニ等シ。

問題

1. 圓ニ内接及ビ外切スル正八角形,正十六角形ヲ作ルコト。

2. 圓ニ内接及ビ外切スル正十二角形ヲ作ルコト。

3. 半徑ノ中點ニ於テ之ニ垂直ナル弦ハ,内接正三角形ノ一邊ニ等シ。

4. 直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,内接正三角形ノ周圍ノ長サハ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 外切正三角形ノ周圍ノ長サハ $3\sqrt{3}$ ナリ。

5. 邊ノ長サ a ナル正三角形ノ内切圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

6. 半徑 r ナル圓ニ内接及ビ外切スル正方形ノ面積ヲ求メヨ。

7. 半徑 r ナル圓ニ内接及ビ外切スル正六角形ノ面積ヲ求メヨ。

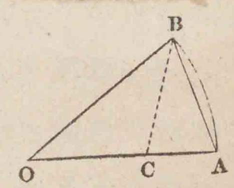
8. 內接正六角形ノ面積ハ內接正三角形ノ面積ノ二倍,外切正三角形ノ面積ノ半分ニ等シ。

88. 正五角形及正十角形。

作圖題二十五 與ヘラレタル圓ニ內接スル正五角形及ビ正十角形ヲ作ルコト。

Oヲ與ヘラレタル圓ノ中心,OAヲ半徑トセヨ。

假ニ內接正十角形ノ一邊ABヲ得タリトセヨ。然ラバ∠Oハ四直角ノ十分ノ一,即チ二直角ノ五分ノ一ニ等シキガ故ニ,二等邊三角形OABノ底角ハイヅレモ二直角ノ五分ノ二ニ等シ。∠OBAヲ二等分スル直線BCヲ引キテOAトCニ於テ交ハラシメヨ。然ラバ



$$\angle CBO=\angle O,$$

又 $$\angle BCA=2\angle O=\angle A$$

故ニ $$OC=CB=AB$$

サテBCハ∠OBAノ二等分線ナルガ故ニ

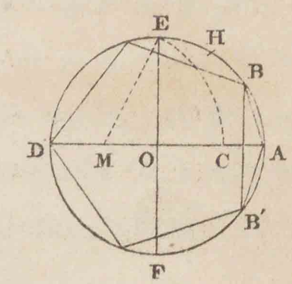
$$OC:CA=OB:BA \quad (定理四十六)$$
$$=OA:OC$$

故ニ $$\overline{OC}^2=\overline{OA}.\overline{CA}$$

即チ內接正十角形ノ一邊ハ,半徑ヲ中末比ニ內分シテ求メラルベキ中項ナリ(作圖題二十二)。

ヨリテ次ノ作圖法ヲ得。

【作圖】 二ツノ互ニ垂直ナル直徑AD, EFヲ引ケ。ODノ中點Mヲ中心トシ,MEヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,Cニ於テMAト交ハラシメヨ。(然ラバCハOAヲ中末比ニ內分スベシ)。Aヲ中心,COヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,與ヘラレタル圓周トB及ビB'ニ於テ交ハラシメヨ。AB, BB'ヲ結ビ付ケヨ。然ラバABハ內接正十角形ノ一邊,從テBB'ハ內接正五角形ノ一邊ナルベシ。



系 半徑rナル圓ニ內接セル正十角形ノ一邊ノ長サハ$\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ナリ。

【注意】　上ノ圖ニ於テ,Aヲ中心,AOヲ半徑トシテ圓ヲ作リ,半圓周ABDトHニ於テ交ハラシムルトキハ,BHハ内接正十五角形ノ一邊ナリ。(弧AHハ圓周ノ$\frac{1}{6}$,弧ABハ圓周ノ$\frac{1}{10}$ニ等シキガ故ニ,弧BHハ圓周ノ$\frac{1}{15}$ニ等シ)。

問　題

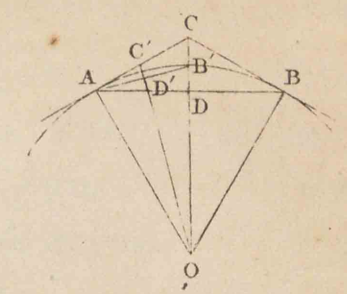
1. 正五角形ABCDEノ對角線AC,BDノ交點ヲGトスルトキハ,AGハ邊ABニ等シク,∠BACハ二直角ノ五分ノ一ニ等シ。(是ニヨリテ一邊ヲ知リテ正五角形ヲ作ルコトヲ得)。

2. 直角ヲ五等分スルコト。

89. 正多角形ノ周圍ヲ計算スルコト。

圓ニ内接及ビ外切セル正n角形ノ周圍ノ長サp,Pヲ知リテ,同ジ圓ニ内接及ビ外切セル正$2n$角形ノ周圍ノ長サp',P'ヲ求ムルコト

Oヲ圓ノ中心,ABヲ内接正n角形ノ一邊トセヨ。A,Bニ於テ切線AC,BCヲ引キ,其交點ヲCトセヨ。然ラバACハ外切正n角形ノ一邊ノ半分ニ等シ。



直線OCハB'ニ於テ弧ABヲ二等分シ,Dニ於テ弦ABヲ垂直ニ二等分ス。故ニAB'ハ内接正$2n$角形ノ一邊ナリ。又∠AOB'ノ二等分線ガACニ交ハル點ヲC',AB'ニ交ハル點ヲD'トセヨ。然ラバAC'ハ外切正$2n$角形ノ一邊ノ半分ニ等シク,D'ハAB'ノ中點ナリ。

サテOC'ハ△AOCノ角Oノ二等分線ナルガ故ニ

$$AC' : C'C = OA : OC \qquad \text{(定理四十六)}$$

然ルニ　$\triangle OAC \sim \triangle ADC$

故ニ　$OA : OC = AD : AC$

$$= p : P$$

故ニ　$AC' : C'C = p : P$

$$AC':AC=p:p+P$$

即チ
$$\frac{P'}{4n}:\frac{P}{2n}=p:p+P$$

ヨリテ
$$P'=\frac{2pP}{p+P} \quad (1)$$

又
$$\angle CAB'=\angle ABB'=\angle BAB'$$

故ニ
$$\triangle AC'D'\backsimeq\triangle AB'D$$

故ニ
$$AC':AD'=AB':AD$$

即チ
$$P':p'=\frac{p'}{2n}:\frac{p}{2n}$$

ヨリテ
$$p'=\sqrt{pP'} \quad (2)$$

是故ニp, Pヲ知ルトキハ,先ヅ(1)ニヨリテP'ヲ求メ次ニ(2)ニヨリテp'ヲ求ムルコトヲ得。

【注意一】 (1),(2)ハ又次ノ如クニ書キ改ムルコトヲ得。

$$\frac{1}{P'}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{p}\right)$$

$$\frac{1}{p'}=\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{P'}}$$

此等ノ公式ヲ反復應用シテ,邊數nナル內接及ビ外切正多角形ノ周圍ヨリ,順次邊數ガn, $2n$, $4n$, $8n$, ……ナル外切及ビ內接正多角形ノ周圍ヲ算出スルコトヲ得。

【注意二】 上ノ圖ヨリ次ノ比例式ヲ得。

$$p:P=AD:AC=OD:OA$$

今圓ノ直徑ヲdトスルトキハ,

$$AD=\frac{p}{2n},\quad \overline{OD}^2=\overline{OA}^2-\overline{AD}^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2n}\right)^2$$

故ニ
$$\frac{p^2}{P^2}=\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2n}\right)^2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2}=1-\frac{p^2}{n^2d^2}$$

即チ
$$\frac{1}{p^2}-\frac{1}{P^2}=\frac{1}{n^2d^2}$$

此式ニヨリ,直徑ガ與ヘラレタルトキ,p, Pノ中一ツヲ知リテ,他ノ一ツヲ求ムルコトヲ得。

問　題

1　直徑1ナル圓ニ內接及ビ外切セル正八角形,正十二角形ノ周圍ヲ計算セヨ。

2.　直徑dナル圓ニ內接及ビ外切セル邊數ノ同ジキ正多角形ノ一邊ノ長サヲソレゾレa, Aトスルトキハ,

$$A=\frac{ad}{\sqrt{d^2-a^2}}, \qquad a=\frac{Ad}{\sqrt{d^2+A^2}}$$

3. 直徑 d ナル圓ニ內接セル正 n 角形及ビ正 $2n$ 角形ノ一邊ノ長サヲソレゾレ a, a' トスルトキハ,

$$a'^2=\frac{1}{2}d(d-\sqrt{d^2-a^2})$$

第六章　圓ニ關スル求積ノ問題

90. 圓周ノ長サ。圓周率。

圓ニ內接スル多角形ノ周圍ハ圓周ヨリハ短ク,圓ニ外切スル多角形ノ周圍ハ圓周ヨリハ長シ。サレド,內接又ハ外切多角形ノ邊ノ數ヲ非常ニ多クシ,且各邊ヲ非常ニ小クナストキハ,多角形ノ周圍ハ甚シク圓周ニ接近スベシ。ヨリテ,カヤウナル多角形ノ周圍ノ長サヲ圓周ノ長サノ近似値ト見做スコトヲ得。

圓ニ內接又ハ外切セル任意ノ正多角形ノ周圍ノ長サヲ知ルトキハ,第89節ノ方法ニヨリテ,順次邊數ガ二倍ナル內接又ハ外切正多角形ノ周圍ノ長サヲ算出シ行キテ,如何程ニテモ精密ニ圓周ノ長サノ近似値ヲ求ムルコトヲ得。

今圓ノ直徑ヲ長サノ單位トスルトキハ,內接正方形ノ周圍ノ數値ハ $2\sqrt{2}$, 外切正方形ノ周圍ノ數値ハ 4 ナリ。是ヨリ次第ニ邊數ガ 8, 16, 32, ……

ナル內接及ビ外切正多角形ノ周圍 p, P ヲ計算シ行クトキハ,次ノ結果ヲ得。

邊數	p	P
4	2.82843	4.00000
8	3.06147	3.31371
16	3.12145	3.18260
32	3.13655	3.15172
64	3.14033	3.14412
128	3.14128	3.14222
256	3.14151	3.14175
512	3.14157	3.14163
1024	3.14159	3.14160

又直徑1ナル圓ニ內接及ビ外切セル正六角形ノ周圍ノ數値3及ビ $2\sqrt{3}$ ヨリ始メテ,同様ノ計算ヲナストキハ次ノ結果ヲ得。

邊數	p	P
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13263	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187
384	3.14156	3.14166
768	3.14158	3.14161
1536	3.14159	3.14160

即チ圓周ハ直徑ノ 3.14159 倍ヨリハ大キク, 3.14160 倍ヨリハ小ナリ。

故ニ圓周ト直徑トノ比ノ近似値トシテ 3.1416 ヲ用フルトキハ,誤差ハ小數第五位ノ1ニ達セズ。

定理五十八 圓周ト直徑トノ比ハ一定ノ値ヲ有ス。此値ハ約 3.1416 ニ等シ。

此比ヲ**圓周率**トイヒ,其値ヲ表ハスニぎりしや文字 π (ぱいト訓ム)ヲ用フ。3.1416 ハ π ノ近似値ナリ。

系一 半徑ノ長サガ r ナル圓周ノ長サハ $2\pi r$ ナリ。

系二 圓周ハ半徑ニ比例ス。

【注意一】 π ノ値ヲ小數第十位マデ示サバ,次ノ如シ。

$$\pi=3.1415926535\ldots\ldots$$

π ノ近似値トシテ $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ 等ヲ用フルコトヲ

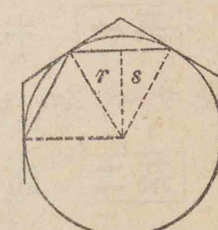
得。此等ハイヅレモπノ眞ノ値ヨリハ大ナリ。

$$\frac{22}{7}=3.142\ldots\ldots,\quad \frac{355}{113}=3.1415929\ldots\ldots$$

91. 圓ノ面積。

圓ノ面積ハ內接多角形ノ面積ヨリハ大キク,外切多角形ノ面積ヨリハ小ナリ。サレド,此等ノ多角形ノ邊ノ數ヲ限リナク增シ,且各邊ヲ限リナク小クナシ行クトキハ,其面積ハ次第ニ圓ノ面積ニ近ヅキ行クベシ。

圓ノ半徑ヲr,內接正多角形ノ周圍ノ長サヲp,圓ノ中心ヨリ其一邊ヘ下セル垂線ノ長サヲsトスルトキハ,內接正多角形ノ面積ノ數値ハ$\frac{ps}{2}$ニ等シク,邊數ヲ限リナク增シ行クトキハ內接正多角形ノ周圍pハ限リナク圓周ノ長サ $2\pi r$ ニ近ヅキ,又sハ限リナク圓ノ半徑rニ近ヅクガ故ニ,內接正多角形ノ面積ハ限リナクπr^2ニ近ヅクベシ。又外切正多角形ノ周圍ノ長サヲPトスルトキハ,其面積



ハ$\frac{Pr}{2}$ニシテ邊ノ數ヲ限リナク增シ行クトキハ,Pハ限リナク $2\pi r$ ニ近ヅクガ故ニ,外切正多角形ノ面積ハ限リナク πr^2 ニ近ヅクベシ。

故ニ圓ノ面積ノ數値ハπr^2ナルコトヲ知ルベシ。

定理五十九 圓ノ面積ハ其周ニ等シキ長サノ底邊及ビ半徑ニ等シキ高サヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

系一 半徑ノ長サガrナル圓ノ面積ハ πr^2 ナリ。

系二 圓ノ面積ハ半徑ノ平方ニ比例ス。

問題

1. 二ツノ與ヘラレタル圓周ノ和ニ等シキ圓周ヲ作ルコト。

2. 二ツノ與ヘラレタル圓ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル圓ヲ作ルコト。

3. 圓ノ面積ヲ同心ノ圓周ニテ二等分スルコト。

4. 二ツノ同心圓ノ周ニテ圍マレタル輪狀ノ圖形ノ面積ハ,小ナル圓ニ切スル大ナル圓ノ弦ヲ直徑トスル圓ノ面積ニ等シ。

92. 中心角,弧,及ビ扇形。

定理六十 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,弧ハ之ニ對スル中心角ニ比例ス。

【證】 同ジ圓ニ於テ,相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シ。故ニ中心角ガ 2倍, 3倍, ... ニナルトキハ之ニ對スル弧モ亦 2倍, 3倍, ... トナル。

故ニ弧ハ中心角ニ比例ス(定理四十三ノ證,又ハ代數教科書第九篇參照)。

定義。 圓ノ二ツノ半徑及ビ其間ニ夾マレタル弧ニテ圍マレタル圖形ヲ**扇形**トイヒ,此弧ヲ扇形ノ弧,之ニ對スル中心角ヲ扇形ノ角,圓ノ半徑ヲ扇形ノ半徑トイフ。

系一 同ジ圓又ハ相等シキ圓ニ於テ,扇形ノ面積ハ其角ニ比例ス。

中心角ガ漸次增大スルトキハ,弧及ビ扇形ノ面積モ亦漸次增大シ,竟ニ中心角ガ四直角トナルトキ,弧ハ全圓周トナリ,扇形ハ全圓トナル。

故ニ弧ノ全圓周ニ對スル比ハ,之ニ對スル中心角ノ四直角ニ對スル比ニ等シ。扇形ノ面積ノ圓ノ面積ニ對スル比モ亦同ジ。

半徑ノ長サガ r, 中心角ガ a 度ナルトキハ,

弧ノ長サハ $2\pi r\times\frac{a}{360}$ 卽チ $\frac{\pi ar}{180}$

扇形ノ面積ハ $\pi r^2\times\frac{a}{360}$ 卽チ $\frac{\pi ar^2}{360}$

ナリ。

系二 扇形ノ面積ハ其弧ニ等シキ底及ビ半徑ニ等シキ高サヲ有スル三角形ノ面積ニ等シ。

問題

1. 直徑 106 糎ナル圓ノ周圍幾糎ナルカ。

2. 周圍 4.2 尺ナル圓ノ面積幾平方寸ナルカ。

3. 面積 S 平方尺ナル圓ノ周ノ長サハ $2\sqrt{\pi S}$ 尺ナリ。

4. 周圍 C 尺ナル圓ノ面積ハ $\frac{C^2}{4\pi}$ 平方尺ナリ。

5. 半徑 1.5 糎,頂角 $22°30'$ ナル扇形ノ弧ノ長サ及ビ面積幾許ナルカ。

6. 半徑 2 尺ノ圓ニ於テ,長サ 3 尺ノ弧ニ對スル中心角幾許ナルカ。

7. 半徑ト等長ナル弧ニ對スル中心角ヲ秒ノ位マデ計算セヨ。

8. $1°$ ノ弧ノ長サガ 1 尺ナル圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

9. 圓 O ノ半徑 OA ヲ直徑トスル圓ヲ作リ,圓 O ノ任意ノ半徑 OB ガ此圓周ニ交ハル點ヲ C トスルトキハ,弧 AB, AC ハ等長ナリ。

10. 直角三角形ノ外接圓ト直角ヲ夾メル二邊ヲ直徑トシテ三角形ノ外部ニ二ツノ半圓トヲ作ルトキニ生ズル,二ツノ新月形ノ面積ノ和ハ,直角三角形ノ面積ニ等シ。

附　錄

附　録　一

定理ノ關係

凡テ幾何學ノ定理ハ次ノ如キ形式ニ言ヒ表ハスコトヲ得。

(一) 或圖形ガ甲ノ性質ヲ有スルトキハ,此圖形ハ乙ノ性質ヲ有ス。

此定理ニ於テ甲ノ性質ヲ有ストイフヲ假設トシ,乙ノ性質ヲ有ストイフヲ終結トス。

例ヘバ

三角形 ABC ニ於テ, AB=AC ナルトキハ, ∠B=∠C ナリ。

トイフ定理ニ於テ,

AB=AC ハ假設　　∠B=∠C ハ終結ナリ。

定理(一)ガ成リ立ツトキハ,次ノ定理ハ當然成リ立ツベキモノナリ。

(二) 乙ノ性質ヲ有セザル圖形ハ,甲ノ性質ヲ有セズ。

此定理(二)ハ(一)ノ終結ノ否定ヲ假設トシ,(一)ノ假設ノ否定ヲ終結トナセルモノナリ。此定理(二)ヲ定理(一)ノ對偶トイフ。定理(一)ハ即チ定理(二)ノ對偶ナリ。

上ノ例ニ擧ゲタル定理ノ對偶ハ次ノ如シ。

三角形ABCニ於テ$\angle B \neq \angle C$ナルトキハ,

$AB \neq AC$ナリ。

一ツノ定理ガ眞ナルトキハ,其對偶ハ必ズ眞ナリ。故ニ直接ニ一ツノ定理ヲ證明スル代ニ,其對偶ヲ證明シテモヨシ。

定理(一)ノ假設ト終結トヲ入レ換フルトキハ,次ノ命題ヲ得。

(三) 乙ノ性質ヲ有スル圖形ハ,甲ノ性質ヲ有ス。

此命題ヲ(一)ノ逆トイフ。(三)ノ逆ハ即チ(一)ナリ。

一ツノ定理ガ眞ナルトキ,其逆ハ必ズ眞ナリトイフコトヲ得ズ。

例ヘバ二ツノ直角ハ相等シト雖,二ツノ相等シキ角ハ必ズシモ直角ナラズ,又矩形ノ對角線ハ相等シト雖,二ツノ對角線ガ相等シキ四邊形ハ必ズシモ矩形ナラズ。(鯨ハ水ニ棲ム哺乳動物ナルコトヲ知レルノミニテハ,未ダ直ニ水ニ棲ム哺乳動物ハ鯨ナリト斷定シ難シ)。是故ニ

本定理ト逆定理トハ別別ニ之ヲ證明スルコトヲ要ス。

例ヘバ定理四ト六ト又ハ定理十ト十一トノ如キ是ナリ。

定理(一)ノ假設ノ否定ヲ假設トシ,終結ノ否定ヲ終結トスルトキハ,次ノ命題ヲ得。

(四) 甲ノ性質ヲ有セザル圖形ハ,乙ノ性質ヲ有セズ。

此命題ヲ(一)ノ裏トイフ。(四)ノ裏ハ即チ(一)ナリ

(四)ハ(三)ノ對偶ニシテ,(二)ノ逆ナリ。故ニ(三)ガ眞ナラバ(四)モ亦當然眞ナルベク,(四)ガ眞ナラバ(三)モ亦眞ナルベシ。是故ニ。

一ツノ定理ノ逆ヲ證明スル代ニ,其裏ヲ證明シテモヨシ。

「甲ノ性質ヲ有スル圖形」トイフコトヲ略シテ單ニ(甲)ト書キ,「甲ノ性質ヲ有セザル圖形」トイフコトヲ略シテ單ニ(非甲)ト書クトキハ,上ニ擧ゲタル四ツノ命題ノ形式ハ次ノ如シ。

(一) 甲ハ乙ナリ。　(本定理)
(二) 非乙ハ非甲ナリ。　(對偶)

(三) 乙ハ甲ナリ。　(逆)
(四) 非甲ハ非乙ナリ。　(裏)

(一),(二)ノ中,イヅレカ一ツヲ證明シタルトキハ,他ノ一ツハ證明ヲ要セズシテ其眞ナルコトヲ知ルベシ,(三),(四)ノ中,イヅレカ一ツガ眞ナラバ,他ノ一ツモ亦眞ナリ。

サレド(一)ヲ證明シタルノミニテハ(三)又ハ(四)ガ眞ナルカ,眞ナラザルカヲ斷定スルコトヲ得ズ。

例一。

(一) 人ハ死スベキモノナリ。

(二) 死セザルモノハ人ニアラズ。

(三) 死スベキモノハ人ナリ。

(四) 人ニアラザルモノハ死セズ。

例二。

(一) 二ツノ角A,Bガ各〻直角ナルトキハ,二ツノ角A,Bハ相等シ。

(二) 二ツノ角A,Bガ相等シカラザルトキハ,A,Bノ中,少クトモ一ツハ直角ニアラズ。

(三) 二ツノ角A,Bガ相等シキトキハ,二ツノ角A,Bハ各〻直角ナリ。

(四) 二ツノ角A,Bノ中,少クトモ一ツガ直角ナラザルトキハ,二ツノ角A,Bハ相等シカラズ。

此例ニ於テ「二ツノ角A,Bガ各〻直角ナリ」ノ否定ハ「A,Bノ中,少クトモ一ツハ直角ニアラズ」ナリ。「A,Bガイヅレモ直角ニアラズ」ニテハナシ。

例三。直線Xノ上ニアラザル一點Oヲ,此直線ノ上ノ二ツノ點A,Bニ結ビ付クルトキ,

(一) OAガXニ垂直ナルトキハ,OBハXニ垂直ナラズ。

(二) OBガXニ垂直ナルトキハ,OAハXニ

垂直ナラズ。

(三) OB ガ X ニ垂直ナラザルトキハ, OA ハ X ニ垂直ナリ。

(四) OA ガ X ニ垂直ナラザルトキハ, OB ハ X ニ垂直ナリ。

例四。 三角形 ABC, DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF ナルトキ,

(一) $\angle A=\angle D$ ナルトキハ　BC=EF

(二) BC$\neq$EF ナルトキハ　$\angle A \neq \angle D$

(三) BC=EF ナルトキハ　$\angle A=\angle D$

(四) $\angle A \neq \angle D$ ナルトキハ　BC$\neq$EF

例五。 同ジ場合ニ於テ,

(一) $\angle A=\angle D$ ナルトキハ　$\angle B=\angle E$

(二) $\angle B \neq \angle E$ ナルトキハ　$\angle A \neq \angle D$

(三) $\angle B=\angle E$ ナルトキハ　$\angle A=\angle D$

(四) $\angle A \neq \angle D$ ナルトキハ　$\angle B \neq \angle E$

例六。

(一) 線分ノ兩端ヨリ等距離ニアル點ハ,此線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアリ。

(二) 線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニ

アラザル點ハ,線分ノ兩端ヨリ等距離ニアラズ。

(三) 線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ノ點ハ,線分ノ兩端ヨリ等距離ニアリ。

(四) 線分ノ兩端ヨリ等距離ニアラザル點ハ,線分ヲ垂直ニ二等分スル直線ノ上ニアラズ。

(第52節軌跡ノ定義,參照)。

「甲ハ乙ナリ」トイフ命題ガ眞ナルトキ,「乙ハ甲ナリ」トイフ逆ノ命題ガ必ズシモ眞ナラザルハ,甲ノ外ニモナホ乙ナルモノ有リ得ベキニヨルナリ。今甲ナルモノモ,乙ナルモノモ各,唯一ツニ限リテ有リ得ベキトキ,甲ハ乙ナリトイフコトヲ證明シタルトキハ,之ヨリシテ直ニ乙ハ甲ナリトイフコトヲ推知シ得ベシ。之ヲ**同一法**トイフ。

例ヘバ定理二十二ヨリ其系一ヲ證明スルニ,此方法ヲ用ヒタリ。

又定理六ノ證明モ此方法ノ應用ト見做スコトヲ得ベシ。

本定理ニヨリテ直ニ逆定理ヲ證明スル方法ノ

他ノ著シキ場合ハ所謂轉換法ニシテ,定理十,十三ヲ用ヒテ定理十四ヲ證明セルハ,其一例ナリ。

三角形 ABC ニ於テ,

(第一) (1) $AC=AB$ ナルトキハ

(a) $\angle B=\angle C$ (定理十)

(第二) (2) $AC>AB$ ナルトキハ

(b) $\angle B>\angle C$

(第三) (3) $AC<AB$ ナルトキハ

(c) $\angle B<\angle C$ (定理十三)

サテ二ツノ邊 AB, AC ノ大サノ關係ハ(1)(2)(3)ノ三ツノ中,イヅレカ一ツナラザルヲ得ズ.且此等三ツノ中,二ツガ同時ニ成リ立ツコトヲ得ズ。又 $\angle B$, $\angle C$ ノ大サノ關係ニ於テモ,(a)(b)(c)ノ中,二ツガ同時ニ成リ立ツコトヲ得ズ。故ニ(第二),(第三)ヲ一括シテ,次ノ如ク言ヒ表ハスコトヲ得。

$AC\neq AB$ ナルトキハ, $\angle B\neq\angle C$ ナリ。

サテ此命題ハ(第一)ノ裏ニ外ナラズ,卽チ(第一)ノ裏ハ眞ナリ。從テ(第一)ノ逆モ亦眞ナリ。卽チ(第二)(第三)ノ眞ナルコトヨリ,(第一)ノ逆ノ眞ナルコトヲ知ル。

同ジヤウニ(第一)(第三)ノ眞ナルコトヨリ(第二)ノ逆ノ眞ナルコトヲ知リ,(第一)(第二)ノ眞ナルコトヨリ(第三)ノ逆ノ眞ナルコトヲ知ル。

卽チ(第一)(第二)(第三)ノ眞ナルコトヨリ,其逆ガ盡ク眞ナルコトヲ知ル。卽チ

三角形 ABC ニ於テ,

$\angle B=\angle C$ ナルトキハ $AC=AB$ (定理十一)

$\angle B>\angle C$ ナルトキハ $AC>AB$

$\angle B<\angle C$ ナルトキハ $AC<AB$ (定理十四)

上ノ場合ニ於テ,

「$AB=AC$ ノ否定」ハ「$AB>AC$ 又ハ $AB<AC$」

「$AB>AC$ ノ否定」ハ「$AB=AC$ 又ハ $AB<AC$」

「$AB<AC$ ノ否定」ハ「$AB=AC$ 又ハ $AB>AC$」

ナルコトニ注意スベシ。

又例ヘバ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$ ニシテ且

$\angle A=\angle D$ ナルトキハ

$BC=EF$ (定理八)

$$\left.\begin{array}{l}\angle A>\angle D \text{ナルトキハ} \\ \quad BC>EF \\ \angle A<\angle D \text{ナルトキハ} \\ \quad BC<EF\end{array}\right\}(\text{定理十七})$$

ナル三ツノ命題ノ眞ナルコトヨリ,直ニ其逆ノ眞ナルコトヲ知ル,即チ

$BC=EF$ ナルトキハ $\angle A=\angle D$ (定理十二)

$$\left.\begin{array}{l}BC>EF \text{ ナルトキハ } \angle A>\angle D \\ BC<EF \text{ ナルトキハ } \angle A<\angle D\end{array}\right\}(\text{定理十七,系})$$

定理二十六,三十三,十一,三十二ヨリ各,其系ヲ證明スルニハ,此方法ヲ用フルコトヲ得。

附 錄 二

補習問題集

一 直線及ビ圓

1. 一點ヨリ出ヅル四ツノ直線ガ順次ニ作ル四ツノ角ノ中,相接セザル二ツガ相等シキトキハ,他ノ二ツノ角ノ二等分線ハ同一直線ナリ。

2. 邊ガソレゾレ互ニ垂直ナル二ツノ角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルカ(相一致スルカ), 又ハ互ニ垂直ナリ。

3. 邊ガソレゾレ互ニ平行ナル二ツノ三角形ノ角ハソレゾレ相等シ。

4. 邊ガソレゾレ互ニ垂直ナル二ツノ三角形ノ角ハソレゾレ相等シ。

5. 三角形 ABC ノ内角 B, C ノ二等分線ノ交點ヲ O, 又外角 B, C ノ二等分線ノ交點ヲ O′ トスルトキハ, BOC, BO′C ハ互ニ補角ヲナシ, 前者ハ鈍角, 後者ハ鋭角ナリ。

6. 三角形ノ外角ノ二等分線ガ作ル三角形,及ビ原三角

形ノ一邊ト其兩端ニ於ケル外角ノ二等分線トガ作ル三ツノ三角形ハ等角ナリ。

7. 四角形ノ相隣レル二ツノ角ノ二等分線ハ他ノ二ツノ角ノ和ノ半分ニ等シキ角ヲ作リ,又相對スル二ツノ角ノ二等分線ハ他ノ二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シキ角ヲ作ル。

8. 凸多角形ノ內角ハ三ツヨリ多ク鋭角ナルコトヲ得ズ。

9 凸多角形ノ周圍ハ之ヲ圍メル任意ノ多角形ノ周圍ヨリモ小ナリ。

10. 矩形ノ周ノ上ノ二ツノ點ノ距離ハ對角線ヨリモ大ナルコトヲ得ズ。

11. 三角形ノ三ツノ中線ノ和ハ周圍ヨリモ小ナリ。

12. 四角形ノ四邊ノ和ハ二ツノ對角線ノ和ヨリハ大キク其二倍ヨリハ小ナリ。

13 四角形ノ內部ノ點ヨリ四ツノ頂點ニ至ル距離ノ和ハ二ツノ對角線ノ和ヨリモ大ナリ。

14. 三角形ノ內角ノ二等分線ト,同ジ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ下セル垂線トノ間ノ角ハ,他ノ二ツノ內角ノ差ノ半分ニ等シ。

15. 三角形ノ一ツノ內角ノ二等分線ハ,此角ノ頂點ヨリ出ヅル中線ト對邊ヘノ垂線トガ作ル角ノ內部ニアリ。此頂點ニ於ケル角ガ直角ナルトキハ,其二等分線ハ中線ト垂線トノ間ノ角ヲ二等分ス。

16. 相對應スル三ツノ邊及二ツノ夾角ガソレゾレ相等シキ二ツノ四邊形ハ全ク相等シ。

17. 相對應スル三ツノ角,及ビ其頂點ノ間ノ二ツノ邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ四邊形ハ全ク相等シ。

18. 相對應スル四ツノ邊ト一ツノ對角線トガ,ソレゾレ相等シキ二ツノ(凸)四邊形ハ全ク相等シ。

19. 相對應スル三ツノ邊ト二ツノ對角線トガ,ソレゾレ相對シキ二ツノ(凸)四邊形ハ全ク相等シ。

20. 相接スル二ツノ邊及ビ一ツノ角ガソレゾレ相等シキ二ツノ平行四邊形ハ全ク相等シ。

矩形及ビ正方形ノ場合ニ於テ之ニ該當スル定理ヲ述ベヨ。

21. 二ツノ相接スル邊ト一ツノ對角線ト,又ハ二ツノ對角線ト一ツノ邊トガ,ソレゾレ相等シキ二ツノ平行四邊形ハ全ク相等シ。

22. 相對應スル四ツノ邊ガソレゾレ相等シキ二ツノ梯形

ハ全ク相等シ。

23. 四ツノ邊ヲ知リテ梯形ヲ作ルコト。

24. 一ツノ邊ト二ツノ高サトヲ知リテ三角形ヲ作ルコト(二ツノ場合)。

25. 一ツノ邊,一ツノ高サ,一ツノ中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト(五ツノ場合)。

26. 一ツノ角,一ツノ高サ,及ビ一ツノ中線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト(五ツノ場合)。

27. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ通リ,且二ツノ與ヘラレタル直線ノ交點ヲ通ルベキ直線ヲ,此交點ヲ求メズシテ引クコト(作圖題九,系二ヲ應用セヨ)。

28. 二ツノ與ヘラレタル直線ガ作ル角ノ二等分線ヲ其交點ヲ求メズシテ引クコト。

29. 與ヘラレタル直線ニ平行ナル直線 DE ヲ引キテ與ヘラレタル三角形 ABC ノ邊 AB, AC トソレゾレ D, E ニ於テ交ハラシメ

(1) DE ヲシテ BD ニ等シカラシムルコト。

(2) DE ト BD トノ差ヲシテ與ヘラレタル線分ニ等シカラシムルコト。

(3) DE ヲシテ BD, CE ノ和(又ハ差)ニ等シカラシ

ムルコト。

30. 三ツノ邊ノ中點ノ位置ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

31. 四邊形ノ三ツノ邊ノ中點ノ位置ヲ知リテ第四ノ邊ノ中點ヲ求ムルコト。又ナホ四邊形ノ一ツノ頂點ヲ知リテ四邊形ヲ作ルコト。

32. 五ツノ邊ノ中點ノ位置ヲ知リテ,五角形ヲ作ルコト。

33. 圓ノ弦ヲ三等分セル點ヲ中心ニ結ビ付ケテ此弦ノ上ニ立テル中心角ヲ三ツノ部分ニ分ツトキハ,兩端ノ二ツノ角ハ相等シク,中間ナル角ハ之ヨリモ大ナリ。

34. 二ツノ圓ガ A ニ於テ內切シ,外圓ノ弦 BC ガ D, E ニ於テ內圓ノ周ニ交ハルトキハ, ∠BAD, ∠CAE ハ相等シ。

BC ガ內圓ニ切スルトキハ如何。

35. 三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 AB, AC ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ內角 A ノ二等分線ニ垂直ナリ。

36. 三角形 ABC ノ各邊ノ上ニ其外側ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ作ルトキハ

(1) AD, BE, CF ハ相等シク,且同一ノ點 O ヲ通ル。

(2) 三ツノ正三角形ノ外接圓ハ O ヲ通リ,此等ノ圓

ノ中心ハ一ツノ正三角形ノ頂點ナリ。

37. 三角形 ABC ノ頂點 A ヨリ邊 BC ヘ下セル垂線ノ延長ガ外接圓ニ交ハル點 K ト垂心 H トハ, BC ヲ軸トシテ互ニ對稱ナリ。

38. (1) 三角形 ABC ノ外接圓ノ周ノ上ノ任意ノ點 P ヨリ邊 BC ヘ下セル垂線ガ外接圓ト交ハル點ヲ L トスルトキハ P ノしむそん線ハ AL ニ平行ナリ(117 頁, 問題 5 參照)。

(2) PQ ヲ外接圓ノ直徑トスルトキハ, P 及ビ Q ノしむそん線ハ互ニ垂直ナリ。

(3) P ノしむそん線ハ P ト垂心 H トヲ結ビ付クル線分ヲ二等分ス。

39. 一點ヨリ三角形ノ三ツノ邊ヘ下セル垂線ノ足ガ同一直線上ニアルトキハ, 此點ハ外接圓ノ周ノ上ニアリ。

40. 二ツヅツ相交ハル四ツノ直線ガ作ル四ツノ三角形ノ外接圓ハ同一ノ點ヲ通ル。

此點ヨリ四ツノ直線ヘ下セル垂線ノ足ハ同一直線上ニアリ。

41. 三角形 ABC ノ邊 BC ニ垂直ナル外接圓ノ直徑ヲ DE トスルトキハ, 弦 AD, AE ハ A ニ於ケル内角及ビ外角ヲ二等分シ, D (又ハ E) ヨリ AB ヘ下セル垂線ノ足ヲ G トスルトキハ, AG, BG ハソレゾレ二邊 AB, AC ノ和及ビ差ノ半分ニ等シ。

42. 高サ, 二底角ノ和(又ハ差)及ビ外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

43. 三角形ノ一ツノ角ノ位置及ビ大サガ與ヘラレタルトキ, 之ヲ夾メル二邊ノ和(又ハ差)ヲ知リテ外心ノ軌跡ヲ求ムルコト。

44. 同一ノ頂點ヨリ出ヅル中線, 内角ノ二等分線, 及ビ高サヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

45. 三角形 ABC ノ内切圓及ビ傍切圓ヲ O, O′, O″ O‴ (第 143 頁圖參照), 邊 BC ノ上ニ於ケル共切點ヲソレゾレ D, D′, D″ D‴ トスルトキハ, D ト D′ ト, 又 D″ ト D‴ トハ, BC ノ中點 M ヲ中心トシテ互ニ對稱ナリ。

又 MD ハ AB, AC ノ差ノ半分ニ等シク, MD″ ハ AB, AC ノ和ノ半分ニ等シ。

46. 一邊, 他ノ二邊ノ和(又ハ差)及ビ内切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

47. 與ヘラレタル圓ニ頂角及ビ高サノ與ヘラレタル三角形ヲ外切セシムルコト。

48. 二ツノ圓ノ外側共通切線ヨリ二ツノ内側共通切線ガ截リ取ル線分ハ,内側共通切線ノ切點間ノ距離ニ等シ。(此問題ニ於テ外側,内側トイフ語ヲ交換シテモ,定理ハ成リ立ツ)。

49. 三角形ノ内心ト傍心及ビ傍心ト傍心トヲ結ビ付クル六ツノ線分ノ中點ハ外接圓ノ周ノ上ニアリ。

50. 三角形ノ各邊ノ中點,各頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ノ足,各頂點ト垂心トノ間ノ線分ノ中點ハ同一圓周上ニアリ　[此圓ヲ三角形ノ**九點圓**トイフ]。

九點圓ノ中心ハ垂心ト外心トヲ結ビ付クル直線ノ中點ニシテ,其半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ニ等シ。

51. 三角形ABC ノ内心ヲ O, 傍心ヲ O′, O″, O‴, 傍切圓 O′, O″, O‴ ガソレゾレ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ D, E, F トスルトキハ O′D, O″E, O‴F ハ同一ノ點 M ヲ通ル。

此點 M ハ △O′O″O‴ ノ外心ニシテ, OM ノ中點ハ △ABC ノ外心ナリ。(△ABC ノ外接圓ハ △O′O″O‴ ノ九點圓ナリ)。

52. 三角形 ABC ノ垂心ヲ H トスルトキハ

(1) A, B, C, ハソレゾレ三角形 HBC, HCA, HAB ノ垂心ナリ。

(2) ABC ノ外心ヲ O トスルトキハ HBC, HCA HAB ノ外心 D, E, F ハソレゾレ BC, CA, AB ヲ軸トシテ O ト對稱ナリ。

(3) HA, HB, HC ハソレゾレ EF, FD, DE ト互ニ垂直ニ二等分ス。

(4) O ハ △DEF ノ垂心, H ハ外心ナリ。

(5) △ABC, △DEF ハ全ク相等シク, AD, BE, CF ハ OH ノ中點ニ於テ二等分セラル。

53. 三角形 ABC ノ垂心ヲ H トスルトキハ, A, B, C 及ビ H ハ垂足三角形(117 頁, 問題 4 參照)ノ内心及ビ傍心ナリ。

又三角形ニ内接スル三角形ノ二邊ガソレゾレ原三角形ノ邊ト相等シキ角ヲ作ルトキハ, 内接三角形ハ原三角形ノ垂足三角形ナリ。

54. 二ツノ對角線ノ間ノ角及ビ一ツノ角,一ツノ邊(又ハ一ツノ對角線)ヲ知リテ平行四邊形ヲ作ルコト。

55. 二ツノ對角線,其間ノ角及ビ (1) 二ツノ邊, 又ハ (2)

二ツノ角又ハ (3) 一ツノ邊及ビ一ツノ角ヲ知リテ四邊形ヲ作ルコト。

56. 互ニ垂直ナル二ツノ直線ノ間ニ,定マレル長サノ線分ヲ引クトキ,其中點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

57. 相交ハル二ツノ直線 OM, ON ノ間ヘ定長ノ直線 MN ヲ引クトキ, M 及ビ N ニ於テソレゾレ OM, ON ニ垂直ナル直線ノ交點 P ノ軌跡ヲ求ムルコト。

58. A, B ハ圓周上ノ定點, M ハ圓周上ノ任意ノ點ナリ。AM ノ延長ノ上ニ MB ニ等シク MP ヲ取ルトキ, P ノ軌跡如何。

59. 定弧 AB ノ上ニ於テ點 P ヲ求メ, AP+BP ヲ最大ナラシムルコト。

60. 三角形ノ底邊ノ位置及ビ頂角ノ大サガ定マレルトキ,垂心ノ軌跡ヲ求ムルコト(37 參照)。

61. 圓ノ互ニ垂直ナル任意ノ二ツノ半徑ノ端ヨリ, ソレゾレ互ニ垂直ナル二ツノ定直線ニ平行ニ引キタル直線ノ交點ノ軌跡ハ,中心ヲ通ル二ツノ直線ナリ。

62. 定マレル直角三角形ノ斜邊ガ互ニ垂直ナル二ツノ直線ノ間ニ夾マレテ動クトキ,直角ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

63 定點 O ヲ定直線 l ノ上ノ任意ノ點 M ニ結ビ付ケ, M ヨリ MO ト定角ヲ作ル直線ヲ引キ O ヨリ之ニ垂線 OP ヲ下ストキハ, P ノ軌跡ハ直線ナリ。

64. 定點 O ヲ頂點トスル定マレル大サノ角 POQ ノ二邊 OP, OQ 又ハ其延長ガ, ゾレゾレ二ツノ定直線 XX′, YY′ ト交ハル點ヲ P, Q トスルトキ, O ヨリ PQ ヘ下セル垂線ノ足ノ軌跡ハ, O ヨリ XX′, YY′ ヘ下セル垂線ノ足ヲ通ル圓周(又ハ直線)ナリ。

二　面積及ビ比例

65. 梯形ノ互ニ平行ナラザル二邊ノ中ノ一ツヲ底トシ,他ノ一ツノ中點ヲ頂點トスル三角形ノ面積ハ梯形ノ面積ノ半分ニ等シ。

66. 共通ノ底邊ノ同ジ側ニアル二ツノ三角形 ABC, A′BC ノ邊 AB, AC, A′B, A′C ノ中點ヲソレゾレ D, E, D′, E′ トスルトキハ DEE′D′ ハ平行四邊形ニシテ,其面積ハ二ツノ三角形ノ面積ノ差ノ半分ニ等シ。

二ツノ三角形ガ共通ノ底邊ノ反對ノ側ニアルトキハ如何。

67. 四角形ノ一双ノ相對スル頂點ヲ同ジ方向ニ同ジ距離ダケ動カストキ,其面積ハ易ハラズ。

六角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ同ジ方向ニ同ジ距離ダケ動カストキ,其面積ハ易ハラズ。

68. 四邊形ノ內部ノ一點ヲ四ツノ頂點ニ結ビ付クルトキニ生ズル四ツノ三角形ガ等積ナルコトヲ得ルカ。

69. 一ツノ頂點ヲ通ル直線ニテ四角形ノ面積ヲ二等分スルコト。

70. 角 BAC ノ內部ノ點 O ヲ通リ,直線 BOC ヲ引キテ,三角形 ABC ノ面積ヲ最小ナラシムルコト。

71. 平行四邊形 ABCD ノ各頂點ヲ點 O ニ結ビ付クルトキ,三角形 OAC ノ面積ハ OAB, OAD ノ面積ノ和又ハ差ニ等シ。

72. 三角形 ABC ノ各邊ノ上ニ其外側ニ正方形 CBEF, ACGH, BAIK ヲ作リ, FG, HI, KE ヲ結ビ付クルトキハ

(1) 三角形 AHI, BEK, CFG ハイヅレモ ABC ト等積ナリ,

(2) HI, FG, EK ノ上ノ平方ノ和ハ三角形 ABC ノ三ツノ邊ノ上ノ平方ノ和ノ三倍ニ等シ。

73. 三角形 ABC ノ邊 AB, AC ノ上ニ三角形ノ外部ニ任意ノ平行四邊形 ABDE, ACGH ヲ作リ, DE, GH ノ交點ヲ I トスルトキハ,此等ノ平行四邊形ノ面積ノ和ハ, BC ヲ底邊トシ,他ノ一邊ハ IA ト平行ニシテ且之ニ等シキ平行四邊形ノ面積ニ等シ。

74. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ上ヘ,一ツノ點 O ヨリ下セル垂線ノ足ヲソレゾレ D, E, F トスルトキハ

$$AE^2+BF^2+CD^2=AF^2+BD^2+CE^2$$

又逆ニ三角形 ABC ノ各邊又ハ其延長ノ上ニソレゾレ點 D, E, F ヲ取ルトキ,上ノ等式ガ成リ立タバ, D, E, F ニ於テソレゾレノ邊ニ垂直ナル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

75. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 又ハ其延長ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取ルトキハ, AB, AP ノ上ノ平方ノ差ハ矩形 BP.CP ニ等シ。

76. 三角形 ABC ノ垂心ヲ H, 外接圓ノ半徑ヲ R トスルトキハ

$$\overline{AH}^2+\overline{BC}^2=\overline{BH}^2+\overline{CA}^2=\overline{CH}^2+\overline{AB}^2=4R^2$$

77. P ヲ直徑 AB ノ上ノ點, CD ヲ AB ニ平行ナル弦トスルトキハ

$$\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$

78. 定點 A ニ於テ垂直ニ相交ハル任意ノ二ツノ直線ガ圓周 O ト交ハル點ヲソレゾレ P, Q トスルトキハ PQ ノ中點ノ軌跡ハ OA ノ中點ヲ中心トスル一ツノ圓周ナリ。

79. 平行四邊形 ABCD ノ頂點 A ヲ通ル直線ガ對角線 BD 及ビ邊 BC, CD トソレゾレ E, F, G ニ於テ交ハルトキハ, AE ハ EF ト EG トノ比例中項ナリ。

80 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ト相等シキ角ヲナス直線ガ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長トソレゾレ D, E, F ニ於テ交ハルトキハ

$$BD:CD=BF:CE$$

81. 三角形 ABC ノ邊 AB, AC 又ハ其延長ノ上ニ相等シキ線分 BD, CE ヲ取リ, DE ト BC トノ交點ヲ F トスルトキハ

$$DF:EF=AC:AB$$

82 與ヘラレタル點 O ヲ通ル直線ヲ引キテ, 與ヘラレタル角 BAC ノ二邊トソレゾレ B, C ニ於テ交ハラシメ BO : CO ヲ與ヘラレタル比ニ等シカラシムルコト。

83. 圓周上ニ與ヘラレタル二ツノ點ヲ通リ, 互ニ平行ニシテ且與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ弦ヲ引クコト。

84. 線分 AB ヲ C ニ於テ $m:n$ ノ比ニ內分シ ($AC:CB=m:n$) A, B, C ヨリ互ニ平行ナル直線 AX, BY, CZ ヲ引キテ, 定直線トソレゾレ X, Y, Z ニ於テ交ハラシムルトキハ $(m+n)CZ$ ハ $n.AX$ ト $m.BY$ トノ和又ハ差ニ等シ。

AB ヲ C ニ於テ外分スルトキハ如何。

85. 全ク三角形ノ外部ニアル直線ヘノ三ツノ頂點ヨリノ距離ノ和ハ, 重心ヨリノ距離ノ三倍ニ等シ。

直線ガ三角形ノ內部ヲ通ルトキ, 特ニ重心ヲ通ルトキハ如何。

86. 三角形 ABC ノ頂點 A ヲ底邊上ノ點 D ニ結ビ付ケ, 三角形 ABC, ABD, ADC ノ重心ヲソレゾレ G, G′, G″ トスルトキハ, G ハ G′G″ ヲ BD, CD ノ反比ニ等シキ比ニ分ツ。

87. 三角形 ABC ノ頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ヲ AD,

BE, CF トスルトキハ $\overline{BC}^2$ ハ $\overline{BA}.\overline{BF}$ ト $\overline{CA}.\overline{CE}$ トノ和又ハ差ニ等シ。

88. 三角形 ABC ノ内部ニ於テ三角形 BCP, CAP, ABP ノ面積ガ, 與ヘラレタル三ツノ線分ニ比例スルヤウナル點 P ヲ求ムルコト。

89. AB, AD 及ビ AC ハ平行四邊形ノ二邊及ビ對角線ニシテ A ヲ通ル圓周ハ此等ノ直線トソレゾレ P, Q, R ニ於テ交ハル。PR ト CD トノ交點ヲ E, QR ト BC トノ交點ヲ F トスルトキハ, BPRF, CERF, DQRE ハイヅレモ圓ニ内接シ得ベキ四邊形ニシテ

$$\overline{AB}.\overline{AP}+\overline{AD}.\overline{AQ}=\overline{AC}.\overline{AR}$$

90. A, B ハ定圓周ノ上ノ二ツノ定點 AC, AD ハ定弦ナリ。A, B ヲ通ル任意ノ圓ガ此等ノ弦トソレゾレ P, Q ニ於テ交ハルトキハ, 三角形 BCP, BQD ハ相似ニシテ. CP : DQ ハ一定ナリ。

91. 三角形 ABC ノ外接圓ノ弦 AE 及ビ頂點 A ヨリ底邊 BC 又ハ其延長ノ上ノ一點 D ニ至ル直線ガ内角 A ノ二等分線ト相等シキ角ヲ作ルトキハ

$$\overline{AB}.\overline{AC}=\overline{AD}.\overline{AE}$$

92. 三角形 ABC ノ内角 A ノ二等分線ガ邊 BC 及ビ外接圓ニ交ハル點ヲソレゾレ D, E トスルトキハ

$$\overline{AB}.\overline{AC}=\overline{AD}.\overline{AE}$$

從テ $\overline{AD}^2=\overline{AB}.\overline{AC}-\overline{BD}.\overline{CD}$

又 $\overline{BE}^2=\overline{ED}.\overline{EA}$

93. 底邊, 頂角及ビ頂角ノ二等分線ヲ知リテ三角形ヲ作ルコト。

94. 與ヘレラタル線分ヲ最大ナル角ニ見込ム點ヲ定直線上ニ於テ求ムルコト。

95. 二ツノ定點ヲ通リ, 定直線ヨリ定長ノ弦ヲ截リ取ル圓ヲ作ルコト。

又定直線ノ兩側ニアル二ツノ定點ヲ通リ, 此直線ヨリ最小ナル弦ヲ截リ取ル圓ヲ作ルコト。

96. 圓ノ直徑ノ上ノ與ヘラレタル二點ヲ通リ一端ヲ共有スル等長ノ弦ヲ引クコト。

97. 三角形 ABC ノ邊 BC ノ上ノ一點ヲ D トスルトキ BD, CD, AD ト二邊 AB, AC ノ比トヲ知リテ此三角形ヲ作ルコト。

98. 第 239 頁問題 **10** ニ於テ, ABCD ヲ圓ニ内接スル四角形トシ, AB$=a$, BC$=b$, CD$=c$, DA$=d$ トスル

トキハ

$$AE:BE=d:c,\qquad AE:ED=a:b$$

故ニ a, b, c, d ヲ知ルトキハ、三角形 ABD ヲ作ルコトヲ得。 從テ四ツノ邊ヲ知リテ圓ニ內接スル四角形ヲ作ルコトヲ得。

99. 二ツノ圓ノ中心ヲ O, O′, 其半徑ヲ R, R′ トスルトキ, $\overline{OP}^2-\overline{O'P}^2=R^2-R'^2$ ナル點 P ノ軌跡ハ中心線ニ垂直ナル一ツノ直線ナリ。

[此直線ヲ二ツノ圓ノ**根軸**トイフ]。

二ツノ圓ガ相交ハルトキハ, 根軸ハ交點ヲ通ル。二ツノ圓ガ相切スルトキハ, 根軸ハ切點ニ於ケル共通ノ切線ナリ。二ツノ圓周ガ共通ノ點ヲ有セザルトキハ, 根軸ハ二ツノ圓ノ外部ニアリ。

100. 二ツノ圓ヘノ切線ノ長サガ相等シキ點ノ軌跡ハ根軸(又ハ其一部分)ナリ。根軸ハ二ツノ圓ノ共通切線ノ切點ノ間ノ距離ヲ二等分ス。

101. 二ツノ圓ト直角ニ交ハル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ムルコト。

102. 三ツノ圓ノ中心ガ同一直線上ニアラザルトキハ　此等ノ圓　二ツヅツノ根軸ハ同一ノ點ヲ通ル。

[此點ヲ三ツノ圓ノ**根心**トイフ]。

103. 三ツノ圓ノ根心ガ各圓ノ外部ニアルトキ, 此點ヲ中心トシテ, 三ツノ圓ト直角ニ交ハル一ツノ圓ヲ作ルコトヲ得。又根心ガ各圓ノ內部ニアルトキハ, 此點ヲ中心トシテ, 三ツノ圓周ニテ二等分セラルル一ツノ圓周ヲ作ルコトヲ得。

104. 同一直線上ニ四ツノ點 A, B, C, D ヲ與フルトキ, A, B ヲ通ル任意ノ圓ト C, D ヲ通ル任意ノ圓トノ共通ノ弦(又ハ其延長)ハ一ツノ定點ヲ通ル。

105. 三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ノ長サヲソレゾレ a, b, c トシ, 邊 BC ヲ D ニ於テ $m:n$ ノ比ニ內分シ, $CD=x$, $BD=y$ $(x:y=n:m)$ 又 $AD=z$ トスルトキハ

$$mb^2+nc^2=mx^2+ny^2+(m+n)z^2$$
$$=\frac{mn}{m+n}a^2+(m+n)z^2.$$

又外分ノ場合ニハ m, n ノ中, 一方ノ符號ヲ變フルトキ, 上ノ公式ガ成立ツ。

106. 三角形 ABC ニ於テ內角 A ヲ二等分スル直線ガ底邊 BC ニ交ハル點ヲ D トスルトキハ, AD ノ長サハ

$$\sqrt{bc\left\{1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right\}} \quad 即チ \quad \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$$

又 A ニ於ケル外角ヲ二等分スル直線カ底邊 BC ノ延長ニ交ハル點ヲ D′ トスルトキハ AD′ ノ長サハ ($b>c$)

$$\sqrt{bc\left\{\frac{a^2}{(b-c)^2}-1\right\}} \quad 即チ \quad \frac{2\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{b-c}$$

但 $2s=a+b+c$ トス。

107. A, B ハ定點 m, n ハ任意ノ數ナルトキ $m.\overline{AP}^2 \pm n.\overline{BP}^2$ ガ不易ナル點 P ノ軌跡ハ AB 又ハ其延長ノ上ニ中心ヲ有スル一ツノ圓周ナリ。

108. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トスルトキハ

$$\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=\tfrac{1}{3}(\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2)$$

又 P ヲ任意ノ點トスルトキハ

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{PG}^2$$

109. 三ツノ定點ヨリノ距離ノ上ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

110. 正三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點ヨリ三ツノ頂點ニ至ル距離ノ平方ノ和ハ一定ナリ。

111. 直角三角形ノ直角ヲ夾メル二邊ノ長サヲ a, b 斜邊

ニ對スル高サヲ h トスルトキハ

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

112. 四邊形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA ノ長サヲソレゾレ a, b, c, d 又對角線 AC, BD ノ長サヲソレゾレ f, g トシ, 面積ヲ S トス。B, D ヨリ AC ヘ下セル垂線ノ足ヲ G, H, 又 B ヨリ D ヲ通リ AC ニ平行ナル直線ヘ下セル垂線ノ足ヲ E トスルトキハ

$$GH=DE=\pm\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{2f}$$

又 S ハ矩形 $\overline{AC}.\overline{BE}$ ノ面積ノ半分ニ等シク, 從テ

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2fg+a^2-b^2+c^2-d^2)(2fg-a^2+b^2-c^2+d^2)}$$

113. 圓ニ內接スル四邊形ノ四ツノ邊ヲ a, b, c, d トスルトキハ面積ハ(239 頁, 問題 **11** 參照)

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

但 $2s=a+b+c+d.$

114. 梯形ノ四ツノ邊ヲ a, b, c, d (a, c ハ底) 二ツノ對角線ヲ f, g トスルトキハ

$$f^2+g^2=b^2+d^2+2ac \qquad (176 頁, 問題 **12** 參照)$$

$$\frac{f^2-g^2}{b^2-d^2}=\frac{a+c}{a-c} \qquad (175 頁, 問題 **8** 參照)$$

$$S=\frac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{\{(b+d+a-c)(b+d+c-a)}$$
$$\overline{\times(a-c+b-d)(a-c+d-b)\}}$$

(第 64 節ノ公式參照)。

115. 三角形 ABC ノ內切圓ノ半徑ヲ r, 傍切圓 O′, O″, O‴ ノ半徑ヲ r', r'', r''', 周ノ半分ヲ s, 面積ヲ S トスルトキハ

$$S=sr=(s-a)r'=(s-b)r''=(s-c)r'''$$

$$S=\sqrt{rr'r''r'''}$$

$$rr'=(s-b)(s-c) \qquad r''r'''=s(s-a)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''}$$

(173 頁, 問題 1 參照)

116. 直角三角形ノ內切圓ノ半徑ハ半周ト斜邊トノ差ニ等シ。

又內切圓ガ斜邊 AB ニ切スル點ヲ D トスルトキハ, 直角三角形ハ矩形 $\overline{\mathrm{AD}}.\overline{\mathrm{BD}}$ ト等積ナリ。

$$S=s(s-c)=(s-a)(s-b)$$

117. 梯形ノ二ツノ底邊ガ a, b 高サガ h ナルトキ, 他ノ二邊ト底トガ作ル二ツノ三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

118. 底邊 a, 高サ h ナル三角形ニ, 其底邊ノ上ニ一邊ヲ有スル周圍 $2p$ ナル矩形ヲ內接セシムルトキハ, 矩形ノ二ツノ邊幾許ナルカ。

119. 前ノ問題ニ於テ矩形ノ周圍ノ代ニ, 其面積 S ガ與ヘラレタルトキハ, 二ツノ邊幾許ナルカ。

120. 二ツノ邊ガ a, b ナル矩形ニ外接スル面積 S ナル二等邊三角形ノ高サ及ビ底邊ヲ計算セヨ。

121. 直角三角形ノ斜邊ト他ノ二邊トノ差ガソレゾレ a, b ナルトキ, 三ツノ邊ヲ計算セヨ。

122. 三角形ノ底邊五尺, 高サ四尺八寸, 他ノ二邊ノ比 6:5 ナリ。二邊ノ長サヲ計算セヨ。

123. 正三角形ニ三ツノ圓ヲ內切セシムル(各圓ガ二ツノ邊及ビ他ノ二ツノ圓ニ切スルヤウニスル)トキハ, 各圓ハ相等シ。又正三角形ノ一邊ヲ長サノ單位トシテ圓ノ半徑ヲ計算セヨ。

124. 半徑 R ナル圓ニ四ツノ相等シキ圓ヲ內切セシムルトキ(前ノ問題參照) 其半徑ノ長サ如何。

125. 直線 AB ガ P 及ビ P′ ニ於テ中末比ニ內分及ビ外分セラルルトキハ, PB ハ A ニ於テ中末比ニ外分セラレ, P′B ハ A ニ於テ中末比ニ內分セラル。

又 AP ヲ中末比ニ內分スルハキハ, 中項ハ PB ニ

等シク，又外分スルトキハ中項ハ AB ニ等シ。

又 AP′ ヲ中末比ニ內分又ハ外分スルトキハ中項ハ AB 又ハ P′B ニ等シ。

126. AB, BB′ ヲ圓 O ニ內接スル正十角形及正五角形ノ一邊トシ(249 頁圖參照)，角 AOB ノ二等分線カ BB′ ニ交ハル點ヲ D トスルトキハ

$$\triangle ABB' \backsim \triangle ABD \qquad \triangle OBB' \backsim \triangle ODB'$$

$$\overline{BB'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{OA}^2$$

127. 圓 O ノ半徑 OA ヲ P 及ヒ P′ ニ於テ中末比ニ內分及ヒ外分シ，OP, OP′ ノ中點ニ於テ OA ニ垂直ナル弦ヲ引クトキハ，其兩端ト A トハ內接正五角形ノ頂點ナリ。

128. 圓ニ內接及ヒ外切セル正 n 角形及正 $2n$ 角形ノ周圍ヲ $p, P; p', P'$ トスルトキハ

$$\frac{p'}{P'} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{p}{P}+1\right)}$$

129. AB, CD ヲ互ニ垂直ナル二ツノ直徑トシ，D ヲ中心 DA ヲ半徑トシテ弧 AUB ヲ作ルトキハ，新月形 ACBU ハ三角形 ADB ト等積ナリ。

三 雜 題

130. [線分 AB ガ P 及ビ Q ニ於テ相等シキ比ニ內分及ビ外分セラルルトキハ，點 P, Q ハ線分 AB ヲ**調和ニ分ツ**トイヒ，又 P, Q ヲ二ツノ點 A, B ニ對シテ互ニ**調和共軛點**トイフ]。

二ツノ點 P, Q ノ中，一ツハ線分 AB ノ上ニ，又一ツハ其延長ノ上ニアリ，而モ P, Q ハ共ニ AB ノ中點ノ同ジ側ニアリ。

又 P, Q ガ AB ヲ調和ニ分ツトキハ，A, B ハ PQ ヲ調和ニ分ツ。

[A, B; P, Q ヲ**調和列點**トイフ。A, B 及ビ P, Q ハ其二組ノ共軛點ナリ]。

131. A, B; P, Q ガ調和列點ナルトキ，AB ノ中點ヲ M トスレバ

$$\overline{MP}\ \overline{MQ}=\overline{MA}^2$$

又逆ニ此關係ガ成リ立ツトキハ A, B; P, Q ハ調和列點ナリ。

又 AP, AQ ノ長サヲ p, q, AB ノ長サヲ h トスル

トキハ

$$\frac{2}{h}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$$

132. 三角形ノ頂角及ビ其外角ノ二等分線ハ底邊ヲ調和ニ分ツ。

133. 三角形ノ二ツノ邊ハ第三邊ニ垂直ナル外接圓ノ直徑ヲ調和ニ分ツ。

134. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點 D ヲ通ル直線ガ二ツノ邊 AB, AC 及ビ A ヲ通リ BC ニ平行ナル直線ト E, F 及ビ G ニ於テ交ハルトキハ、E, F ハ DG ヲ調和ニ分ツ。

135. 圓外ノ一點 P ヨリ此圓ヘ引キタル二ツノ切線 PC, PD ノ切點ヲ結ビ付クル弦 CD ガ, P ヲ通ル直徑 AB ニ交ハル點ヲ Q トスルトキハ, P, Q ハ A, B ニ對シテ調和共軛點ナリ。(CA, CB ハソレゾレ三角形 PCQ ノ C ニ於ケル內角及ビ外角ヲ二等分ス)。

136. A, B; P, Q ガ調和列點ナルトキハ, AB ヲ直徑トスル圓ハ P, Q ヲ通ル任意ノ圓ト直角ニ交ハル。又二ツノ圓ガ直角ニ交ハルトキハ, 一ツノ圓ノ任意ノ直徑ハ他ノ一ツノ圓周ニテ調和ニ分タル。

137. 定點 P ヲ通ル任意ノ割線ガ定圓ニ交ハル點ヲ R, S トスルトキハ, RS ニ對スル P ノ調和共軛點ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ。

[此直線ヲ此圓ニ於ケル點 P ノ**極線**トイヒ、P ヲ此直線ノ**極點**トイフ] (第 201 頁, 問題 3 參照)

138. **めねらうすノ定理。** 任意ノ直線ガ三角形 ABC ノ三ツノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長トソレゾレ D, E, F ニ於テ交ハルトキハ (三ツノ點 D, E, F ノ中, 一ツ又ハ三ツガ邊ノ延長ノ上ニアリ)

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

(A, B, C ヨリ直線ヘ垂線 AA′, BB′, CC′ ヲ下ストキハ, 上ノ式ノ左側ニアル三ツノ比ハソレゾレ $BB':CC'$, $CC':AA'$, $AA':BB'$ ニ等シ)。

逆ニ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ノ上ニソレゾレ點 D, E, F ヲ取ルトキ

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

ニシテ, D, E, F ガ盡ク邊ノ延長ノ上ニアルカ, 又ハ其中, 一ツノミガ邊ノ延長ノ上ニアルトキハ D, E, F ハ同一直線上ニアリ。

139. **ちぇば ノ定理。** 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヲ任意ノ點 O ニ結ビ付クル直線ガ，之ニ對スル邊(又ハ其延長)ニ交ハル點ヲソレゾレ D, E, F トスルトキハ(三ツノ點 D, E, F ハイヅレモ邊ノ上ニアリ，又ハ一ツガ邊ノ上ニアリテ，二ツハ邊ノ延長ノ上ニアリ)

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

(左側ノ三ツノ比ハソレゾレ $\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$ ノ中，二ツノ面積ノ比ニ等シ)。

逆ニ，三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長ノ上ニソレゾレ點 D, E F ヲ取ルトキ

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$$

ニシテ，且三ツノ點 D, E, F ガイヅレモ邊ノ上ニアルカ，又ハ一ツハ邊ノ上ニアリテ二ツハ邊ノ延長ノ上ニアルトキハ，AD, BE, CF ハ同一ノ點ヲ通ル。

140. 一ツノ直線ガ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB 又ハ其延長トソレゾレ點 D, E, F ニ於テ交ハルトキ，BC ニ對スル D ノ調和共軛點ヲ D′ トスルトキハ AD′, BE, CF ハ同一ノ點ヲ通ル。

141. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヲ一ツノ點 O ニ結ビ付クル直線ガ之ニ對スル邊又ハ其延長ニ交ハル點ヲ D, E, F トシ，BC ニ對スル D ノ調和共軛點ヲ D′ トスルトキハ，D′EF ハ同一直線上ニアリ。

142. 三角形 ABC ノ內心ヲ O，傍心ヲ O′, O″, O‴ (143 頁ノ圖參照)トスルトキ

(1) 內切圓(又ハ傍切圓)ガ各邊ニ切スル點ヲ，其邊ニ對スル頂點ニ結ビ付クル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

(2) 傍切圓 O′, O″, O‴ ガソレゾレ邊 BC, CA, AB ニ切スル點ヲ頂點 A, B, C ニ結ビ付クル三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ通ル。

(3) 二ツノ內角ト一ツノ外角ト(又ハ三ツノ外角)ヲ二等分スル直線ガ，其角ニ對スル邊ニ交ハル三ツノ點ハ同一直線上ニアリ。

143. 四邊形 ABCD ノ相對スル邊 AB, CD ノ交點ヲ E, AD, BC ノ交點ヲ F トスルトキハ，二ツノ對角線 AC, BD ハ線分 EF ヲ調和ニ分ツ，卽チ AC, BD ガ EF ニ交ハル點ヲ G, H トスルトキハ G, H ハ E, F ニ對シテ調和共軛點ナリ(問題 140 參照)。

144. 定點 P ヲ通ル任意ノ直線ガ，A ニ於テ相交ハル二

直線 AX, AY ニ交ハル點ヲ R, S トシ, RS ニ對シ P ノ調和共軛點ヲ Q トスルトキハ, Q ノ軌跡ハ A ヲ通ル直線ナリ。

145. 定點 P ヲ通ル任意ノ二ツノ割線ガ圓周ニ交ハル點ヲソレゾレ R, S 及ビ R′, S′ トスルトキハ RR′ ト SS′ ト及ビ RS′ ト R′S トノ交點ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ。

(此直線ハ卽チ P ノ極線ナリ, 問題 137 參照)。

146. [點ハ一ツノ直線上ヲ二ツノ相反セル**方向**ニ動クコトヲ得。直線上ノ方向ヲ示スニハ起點ヲ前ニ, 終點ヲ後ニ, 記スベシ。卽チ AB ト BA トハ相反セル方向ヲ示ス。二ツノ直線 AB, A′B′ ガ互ニ平行ナルトキ B, B′ ガ直線 AA′ ノ同ジ側ニアルトキハ AB, A′B′ ハ**同ジ方向**ヲ有ストイヒ, B, B′ ガ直線 AA′ ノ反對ノ側ニアルトキハ AB, A′B′ ハ**反對ノ方向**ヲ有ストイフ]。

二ツノ邊ガソレゾレ互ニ平行ナル二ツノ角ハ相等シキカ, 又ハ互ニ補角ヲナス。二ツノ邊ガソレゾレ同ジ方向ヲ有スルトキ, 又ハソレゾレ反對ノ方向ヲ有スルトキハ二ツノ角ハ相等シク, 第一ノ邊ハ同ジ方向ヲ有シ第二ノ邊ハ反對ノ方向ヲ有スルトキハ二ツノ角ハ互ニ補角ヲナス。

147. [重ネ合ハセ得ベキ二ツノ圖形ハ全ク相等シ。甲ノ圖形ヲ平面上ニヅラシテ乙ノ圖形ニ重ネ合ハセ得ベキトキハ, 二ツノ圖形ハ同ジ向キニ相等シトイヒ, 圖形ヲ裏返シテ始メテ乙ノ圖形ニ重ネ合ハセ得ベキトキハ, 二ツノ圖形ハ反對ノ向キニ相等シトイフ]。

中心對稱ニ於テ相對應スル圖形ハ同ジ向キニ相等シク, 軸對稱ニ於テ相對應スル圖形ハ反對ノ向キニ相等シ。

148. 同ジ向キニ相等シキ二ツノ圖形ニ於テ, 二組ノ相對應スル點ガソレゾレ一致スルトキハ, 二ツノ圖形ハ全ク相重ナル。

反對ノ向キニ相等シキ二ツノ圖形ニ於テ, 二組ノ相對應スル點ガソレゾレ一致スルトキハ, 二ツノ圖形ハ此等ノ點ヲ通ル直線ヲ軸トシテ互ニ對稱ナリ。

149. 一ツノ圖形ガ互ニ垂直ナル二ツノ對稱軸ヲ有スルトキハ, 其交點ハ圖形ノ對稱中心ナリ。

150. 一ツノ定點ヲ通リ, 二ツノ直線(又ハ一ツノ直線ト, 一ツノ圓, 又ハ二ツノ圓)ノ間ニ, 此定點ヲ中點トスル

線分ヲ入ルルコト。

151. 二ツノ直線(又ハ一ツノ直線ト一ツノ圓,又ハ二ツノ圓)ノ間ニ,一ツノ定直線ニ垂直ニ二等分セラルル線分ヲ入ルルコト。

152. 鋭角ノ內部ニ二ツノ點ヲ與フルトキ,一ツノ點ヨリ此角ノ二邊ノ上ノ點ヲ經テ他ノ點ニ至ル最モ短キ折線ヲ作ルコト。

153. 鋭角三角形ノ一邊ノ上ノ與ヘラレタル點ヲ一ツノ頂點トシ,最小ノ周ヲ有スル三角形ヲ內接セシムルコト。

154. 鋭角三角形ニ內接スル三角形ノ中,周圍ノ最小ナルモノヲ求ムルコト。(此三角形ハ與ヘラレタル三角形ノ垂足三角形ナリ,問題 53 後段參照)。

155. 矩形ノ一邊ノ上ノ定點ヲ一ツノ頂點トスル內接平行四邊形ノ中,周圍ノ最小ナルモノヲ求ムルコト。

156. 一ツノ圖形 F ノ各點 P ヨリ一定ノ方向及ビ一定ノ距離ニアル點 P′ ノ軌跡ハ, F ト同ジ向キニ相等シキ圖形 F′ ナリ。

圖形 F ニ於ケル線分 AB ト F′ ニ於テ之ニ對應スル線分 A′B′ トハ相等シク,且同ジ方向ヲ有ス。

[カヤウニシテ圖形 F ヨリ圖形 F′ ヲ作ルコトヲ平行變位トイヒ,一定ノ方向 AA′ ヲ平行變位ノ方向一定ノ距離 AA′ ヲ平行變位ノ距離トイフ]。

157. 二ツノ直線(又ハ一ツノ直線ト一ツノ圓又ハ二ツノ圓)ノ間ヘ定長定方向ノ線分ヲ入ルルコト。

158. 二ツノ互ニ平行ナル直線ノ外側ニアル二ツノ定點ヲ最短キ折線ニテ結ビ付クルコト。但此折線ノ二ツノ平行線ノ中間ニアル部分ハ,與ヘラレタル方向ヲ有スルコトヲ要ス。

159. 與ヘラレタル二ツノ平行線ノ間ヘ,與ヘラレタル直線ニ平行ニシテ,且ツ與ヘラレタル點ニ於テ,與ヘラレタル角ヲ張ル線分ヲ入ルルコト。

160 定點 O ヲ中心トシ,圖形 F ノ各點 P ト O トヲ結ビ付クル直線 OP ヲ一定ノ角ダケ同ジ向キニ廻轉セシメ, OP′ ノ位置ニ來ラシムルトキハ, P′ ノ軌跡ハ F ト同ジ向キニ相等シキ圖形 F′ ナリ。

[カヤウニシテ圖形 F ヨリ F′ ヲ作ルコトヲ廻轉トイヒ,定點 O ヲ廻轉ノ中心,定角 POP′ ヲ廻轉ノ角トイフ]。

F 及ビ F′ ニ於テ相對應スル直線 AB, A′B′ ノ作ル

角ハ廻轉ノ角ニ等シ。

廻轉ノ中心 O, 相對應スル點 A, A′ 及ビ相對應スル直線 AB, A′B′ ノ交點 I ハ同一ノ圓周上ニアリ。

廻轉ノ角ガ二直角ニ等シキトキハ, 二ツノ圖形 F, F′ ハ O ヲ中心トシテ互ニ對稱ナリ。

161. 同ジ向キニ相等シキ二ツノ圖形 F, F′ ニ於テ, 一組ノ相對應スル線分 AB, A′B′ ガ同ジ方向ヲ有スルトキハ, 平行變位ニヨリテ F ヲ F′ ノ位置ニ來ラシムルコトヲ得。

AB, A′B′ ガ反對ノ方向ヲ有スルトキハ F, F′ ハ中心對稱ノ位置ニアリ。

162. 同ジ向キニ相等シキ二ツノ圖形 F, F′ ニ於テ, 一組ノ相對應スル點ガ一致スルトキハ, 此點ヲ中心トシテ F ヲ廻轉セシメ, F′ ノ位置ニ來ラシムルコトヲ得。

163. 同ジ向キニ相等シキ二ツノ圖形ハ, 廻轉又ハ平行變位ニヨリテ一致セシムルコトヲ得。

164. 反對ノ向キニ相等シキ圖形 F, F′ ニ於テ, 一組ノ相對應スル點ガ一致スルトキハ, F, F′ ハ此點ヲ通ル一ツノ直線ヲ軸トシテ互ニ對稱ナリ。

165. 二ツノ圖形 F, F′ ガ反對ノ向キニ相等シキトキハ, 平行變位ニヨリテ F′ ヲ F ト軸對稱ノ位置ニ來ラシムルコトヲ得, 而モ對稱ノ軸ト平行變位ノ方向トヲ互ニ平行ナラシムルコトヲ得。

166. 圖形 F′ ハ O_1 ヲ中心トシテ, 又 F″ ハ O_2 ヲ中心トシテ同一ノ圖形 F ト對稱ノ位置ニアルトキハ, 平行變位ニヨリテ F′ ヲ F″ ノ位置ニ來ラシムルコトヲ得 (其平行變位ノ方向ハ O_1O_2 ト同ジク, 距離ハ O_1O_2 ノ二倍ニ等シ)。

167. 圖形 F′ ハ x ヲ軸トシテ, 又 F″ ハ y ヲ軸トシテ, 同一ノ圖形 F ト對稱ノ位置ニアルトキハ, x, y ノ交點ヲ中心トシテ F′ ヲ廻轉セシメ之ヲ F″ ト重ヌルコトヲ得 (廻轉ノ角ハ x, y ノ間ノ鋭角ノ二倍ニ等シ)。

又 x, y ガ互ニ平行ナルトキハ, 平行變位ニヨリテ F′ ヲ F″ ノ位置ニ來ラシムルコトヲ得。

168. 圖形 F ノ各點 P ヲ定點 O ニ結ビ付クル線分 OP 又ハ其延長ノ上ニ於テ, OP : OP′ ガ一定ノ値 k ヲ有スルヤウニ點 P′ ヲ取ルトキハ (但 P, P′ ハ恒ニ O ノ同ジ側, 又ハ恒ニ O ノ反對ノ側ニアルコトヲ要ス), P′ ノ軌跡ハ一定ノ圖形 F′ ニシテ, F, F′ ハ

互ニ相似ノ位置ニアリトイヒ，定點 O ヲ相似ノ中心定比 k ヲ相似ノ比トイフ]。

F ガ直線ナルトキハ，F′ ハ F ニ平行ナル直線ナリ。

F ガ圓周ナルトキハ F′ モ亦圓周ニシテ F, F′ ノ半徑ノ比ハ相似ノ比ニ等シ。

F ガ多角形ナルトキハ，F′ ハ F ト相似ナル多角形ナリ。

F, F′ ニ於テ相對應スル線分 AB, A′B′ ハ互ニ平行ニシテ，其比ハ相似ノ比ニ等シ。

169. 二ツノ圖形 F, F′ ノ點ガ一ツ一ツ相對應シ，相對應スル一組ノ點 O, O′ ヲ任意ノ他ノ對應點 P, P′ ニ結ビ付クル線分 OP, O′P′ ガ互ニ平行ニシテ，且一定ノ比ヲ有スルトキハ，F, F′ ハ相似ノ位置ニアリ。

170. 二ツノ圖形 F, F′ ノ點ガ一ツ一ツ相對應シ，相對應スル各線分ガ互ニ平行ナルトキハ F, F′ ハ相似ノ位置ニアリ。

171. 圖形 F′ ハ O_1 ヲ中心トシテ，又 F″ ハ O ヲ中心トシテ F ト相似ノ位置ニアルトキハ，F′ ト F″ トモ亦相似ノ位置ニアリ，其相似ノ中心ハ直線 O_1O_2 ノ上ニアリ。

172. 三角形ノ三ツノ邊ハソレゾレ定マレル方向ヲ有シ，二ツノ頂點ハソレゾレ二ツノ定直線ノ上ヲ動クトキ，第三ノ頂點ノ軌跡ヲ求ムルコト。

173. 與ヘラレタル三角形ニ，三ツノ邊ガ與ヘラレタル方向ヲ有スル三角形ヲ內接セシムルコト。

174. 與ヘラレタル三ツノ平行線ノ上ニ頂點ヲ有スル正三角形ヲ作ルコト。

175. 與ヘラレタル三角形ノ一邊ノ上ノ定點ヲ一ツノ頂點トシテ，此三角形ニ他ノ與ヘラレタル三角形ト相似ナル三角形ヲ內接セシムルコト。

176. 與ヘラレタル點ヲ一ツノ頂點トシ，他ノ二ツノ頂點ハソレゾレ二ツノ與ヘラレタル直線又ハ圓周ノ上ニアル定角ノ三角形ヲ作ルコト。

177. 二ツノ圓ハ其中心線ヲ半徑ノ比ニ等シク內分又ハ外分スル點ヲ中心トシテ相似ノ位置ニアリ。

178. 三ツノ圓ガ與ヘラレタルトキ，二ツヅツノ圓ノ相似ノ中心ハ合ハセテ六ツアリ，此等ハ三ツヅツ同一直線上ニアリ(171 參照)。

179. 二ツノ圓ノ共通切線ハ其相似ノ中心ヲ通ル。

180. 二ツノ與ヘラレタル直線ニ切シ，且一ツノ與ヘラレ

タル點ヲ通ル圓ヲ作ルコト。

181 二ツノ與ヘラレタル直線及ビ一ツノ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ作ルコト。(作圖題十二ノ方法ニヨリ，此問題ヲ前ノ問題ニ歸着セシムルコトヲ得)。

182. 二ツノ圓 O, O′ ノ相似ノ中心 S ヲ通ル任意ノ割線ガ圓 O, O′ ニ交ハル點ヲソレゾレ A, B; A′, B′ トスルトキハ OA, OB ト O′A′, OB′ トハ二ツヅツ互ニ平行ナリ。

S ヲ通ル第二ノ割線ガ圓 O, O′ ニ交ハル點ヲソレゾレ C, D; C′, D′ トシ

$OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$,

$OC \parallel O'C'$, $OD \parallel O'D'$

トスルトキハ

(1) $AC \parallel A'C'$ $BD \parallel B'D'$

(2) A, C, B′, D′ 及ビ B, D, A′, C′ ハイヅレモ同圓周上ニアリ。

(3) $\overline{SA}.\overline{SB'}$, $\overline{SB}.\overline{SA'}$ ハ相等シク，且割線ノ位置ニ關係ナキ一定ノ大サヲ有ス。

(4) AC ト B′D′ ト及ビ BD ト A′C′ トハ二ツノ圓ノ根軸(問題 **99** 參照)ノ上ニ於テ相交ハル。

183. 二ツノ圓 O, O′ ガ第三ノ圓 O″ ニ切スルトキハ，切點 M, N′ ヲ連ヌル直線ハ，圓 O, O′ ノ相似ノ中心ヲ通ル。

又逆ニ圓 O, O′ ノ相似ノ中心ヲ通ル割線ガ，此等ノ圓トソレゾレ M, N′ ニ於テ交ハリ，OM, O′N′ ガ互ニ平行ナラザルトキハ，M, N′ ニ於テ，ソレゾレ圓 O, O′ ニ切スル圓ヲ作ルコトヲ得。

184. 一ツノ與ヘラレタル點 A ヲ通リ，二ツノ與ヘラレタル圓 O, O′ ニ切スル圓ヲ作ルコト。

(S ヲ圓 O, O′ ノ相似ノ中心，求ムル切點ヲ M, N′ トスルトキハ，**182** (3) ニヨリ $\overline{SM}.\overline{SN'}$ ハ既知ナリ，從テ SA ガ再ビ求ムル圓ニ交ハル點ヲ B トスルトキ $\overline{SA}.\overline{SB}$ ハ既知ナリ。故ニ點 B ヲ求ムルコトヲ得，問題ハ 221 頁問題 **8** ニ歸着ス)。

185. 三ツノ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ作ルコト

(作圖題十二ニ於テ用ヒタル方法ニヨリテ此問題ヲ前ノ問題ニ歸着セシムルコトヲ得)。

186. 定直線 l ニ垂直ナル定圓 O ノ直徑ノ一端 S ヲ通ル任意ノ割線ガ，直線 l 及ビ圓 O トソレゾレ A, B ニ於テ交ハルトキハ，$\overline{SA}.\overline{SB}$ ハ一定ナリ。

187. 定直線 l 及ビ定圓 O ニ切スル任意ノ圓ノ切點ヲ A, B トスルトキハ, AB ガ再ビ定圓ニ交ハル點ハ l ニ垂直ナル直徑ノ一端ナリ。

188. 與ヘラレタル點ヲ通リ，與ヘラレタル直線及ビ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ作ルコト。

189. 二ツノ與ヘラレタル圓及ビ一ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ作ルコト。

明治四十四年十二月一日印刷
明治四十四年十二月四日發行
大正三年十二月一日修正再版印刷
大正三年十二月四日修正再版發行
大正三年十二月廿一日訂正三版印刷
大正三年十二月廿四日訂正三版發行

新式幾何教科書（平面）
定價 金七拾七錢

大正十三年度臨時定價
金一圓卅九錢

著作者　高木貞治
發行者　東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社東京開成館
代表者　渡邊良助
印刷者　東京市小石川區久堅町百八番地
倉科一二郎
發行所　東京市小石川區小日向水道町八十四番地
株式會社東京開成館
（振替口座東京第五參貳貳番）
西部販賣所　大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角
三木佐助
東部販賣所　東京市日本橋區數寄屋町九番地
林平次郎

（株式會社精美堂印刷）

松永禮作

~~赤坂中学校二年A~~

山脇植太郎