40123
教科書文庫
4
412
41-1916
20000
81267
T.5
1916

NEW

ALGEBRA

T. TAKAGI.

広島大学図書
2000081267

TOKYO KAISEIKAN COMPANY

4a
412
大5

資　料　室

教科書文庫
4
412
41-1916
2000081267

文部省檢定濟

大正五年十二月十二日　中學校數學科用

新式

代數教科書

［續卷］

補習科用

東京帝國大學理科大學教授

理學博士

高木貞治

著

開成館藏版

広島大学図書

2000081267

広島大学
教
81267
図書

例言

本書は中學校に於て補習科を設くる場合の教科用として,新に編纂したるものなり。

本書第一章には上下兩卷の補遺として分數方程式,不等式,極大極小等に關する事項を收めて,之を首尾一貫せる『二次方程式の續篇』となし,更に之に連絡して『量の變動及び其圖解』と題せる一章を置き,一次式及び二次式の變動を幾何學的に說明して函數の觀念を啓發することを圖れり。又別に整式の開法及び二項式定理を添へて代數的計算の補遺となしたり。

本書の末尾には雜題と題せる一章

を置き,二三の重要なる問題の特別なる解法を示し,又總複習用として雜題集を添ふ。此集の問題は,其範圍及び程度に於ては,上下兩卷に附載せる補習問題集と異なることなし,但中學校と高等諸學校との連絡の現況に鑑み,成るべく材料を入學試驗問題集中より選擇し,且つ類題を同一番號の下に收め,必要なる場合には解法の指針を略記して,一層補習の目的に適切ならしむることを期したり。

大正五年十月　　編　者

續卷目次

第一章

方程式ノ續キ　不等式

1. 剩餘ノ定理。

x ナル文字ノ降冪ニ排列セラレタル整式,例ヘバ $2x^3-7x^2+3x+5$ ヲ $x-1$ ノ如キ『一次式』ニテ割ルトキハ,剩餘ハ法ヨリモ低次ナルベキガ故ニ,x ナル文字ヲ含マズ。實際割リ算ヲ行フトキハ,次ノ結果ヲ得。

$$2x^3-7x^2+3x+5=(x-1)(2x^2-5x-2)+3$$

上ノ割リ算ノ剩餘 3 ハ,割リ算ヲ實行セズトモ,次ノ如クニシテ直接ニ求ムルコトヲ得。

上ノ恒等式ニテ $x=1$ トナストキハ,右邊ノ數値ハ $(0\times-5)+3$ トナル。サテ其第一ノ項ハ 0 ニ等シキガ故ニ,此數値ハ卽チ割リ算ノ剩餘 3 ニ外ナラズ。故ニ $x=1$ トナストキハ,左邊ノ整式ノ數値モ亦此剩餘 3 ニ等シクナルベシ。實際

$$2\times1^3-7\times1^2+3\times1+5=3$$

卽チ整式 $2x^3-7x^2+3x+5$ ヲ $x-1$ ニテ割ルトキノ

剩餘ハ,$x=1$トナストキノ此整式ノ數值ニ等シ。

一般ニ

xノ降冪ニ排列セラレタル整式Pヲ一次式$x-a$ニテ割ルトキハ,剩餘ハxヲ含マズ。此剩餘ハ,$x=a$トナストキノ整式Pノ數值ニ等シ。特ニ$x=a$トナストキ,Pノ數值ガ0トナルトキハ,Pハ$x-a$ニテ割リ切レル(剩餘ノ定理)。

例ヘバ,$3x^2-10x+7$ニテ,$x=1$トスルトキハ,此式ノ數值ハ0トナル。故ニ$3x^2-10x+7$ハ$x-1$ニテ割リ切レル。實際

$$3x^2-10x+7=(x-1)(3x-7)$$

又$3x^3+x^2-9x+2$ニテ$x=-2$トナストキハ,此式ノ數值ハ0トナル。故ニ此式ハ$x-(-2)$即チ$x+2$ニテ割リ切レル。

又$3x^3+x^2-9x$ニテ$x=-2$トナストキハ,此式ノ數值ハ-2トナル。故ニ此式ハ$x+2$ニテ割リ切レズ。此式ヲ$x+2$ニテ割ルトキハ,剩餘-2ヲ得ベシ。實際

$$3x^3+x^2-9x+2=(x+2)(3x^2-5x+1)$$

$$3x^3+x^2-9x\quad=(x+2)(3x^2-5x+1)-2$$

【注意】 未知數xヲ含メル整式Fノ一次因數ヲ知ルトキハ,方程式$F=0$ノ一ツノ根ヲ求ムルコトヲ得(下卷第110節參照)。

逆ニ方程式$F=0$ノ一ツノ根ヲ知ルトキハ整式Fヲ因數ニ分解スルコトヲ得。例ヘバ$x=a$ガ方程式$F=0$ノ根ナルトキハ,整式Fニ於テxヲaトスルトキ,Fノ數值ハ0トナル。故ニ本節ノ定理ニヨリテ,整式Fハ$x-a$ニテ割リ切レルコトヲ知ルベシ。

故ニ方程式$F=0$ヲ解クコトト,整式Fヲ一次因數ニ分解スルコトトハ,畢竟同一ノ問題ナリト謂フベシ。

例題

1. $6x^3-7x+1$ハ$x-1$ニテ割リ切レルコトヲ確メヨ。

2. $2x^4-9x^3+x^2-3x-5$ヲ$x+1$ニテ割ルトキハ,剩餘如何。又此式ハ$2x-1$ニテ割リ切レルカ。

3. n ガ正ノ整數ナルトキハ, x^n-a^n ハ $x-a$ ニテ割リ切レルコトヲ證明セヨ。

4. n ガ正ノ整數ナルトキ, x^n+a^n ハ $x+a$ ニテ割リ切レルカ。

5. $3x^3-7x^2+4$ ハ $x-1$ ニテ割リ切レルコトヲ證明シ,是ニヨリテ方程式

$$3x^3-7x^2+4=0$$

ヲ解ケ。

6. x^3-2x+1 ヲ因數ニ分解セヨ。

2. 分數式ノ數値ノ特別ノ場合。

$\frac{a}{0}$ ナル形。

例ヘバ,分數式 $\frac{1}{x}$ ニテ, x ヲ0トナストキハ,意味ナキ記號ヲ得。サレド, x ヲ0トハナサズシテ, 0ニ近キ數,卽チ絕對値ノ小ナル正數又ハ負數トナストキハ, $\frac{1}{x}$ ハ絕對値ノ大ナル正數又ハ負數トナル。x ヲ漸次絕對値ノ愈〻小ナル數トナシ行クトキハ, $\frac{1}{x}$ ノ數値ハ,絕對値ニ於テ漸次大キクナリ行キテ,竟ニハ如何程ニテモ大キクナルベシ。

又 $\frac{x+2}{x-1}$ ナル式ニテ, $x=1$ トナストキハ,此式ハ意味ヲ有セザルモノトナレドモ, x ヲ1トハナサズシテ,漸次1ニ近キ數トナシ行クトキハ,上ノ式ノ分子ハ漸次3ニ近キ數トナリ,分母ハ絕對値ニ於テ漸次小クナリ行クガ故ニ, $\frac{x+2}{x-1}$ ノ數値ハ絕對値ニ於テ漸次大キクナリ行キテ,竟ニハ如何程ニテモ大キクナルベシ。(試ニ x ヲ 1.001, 1.00001, 0.999, 0.99999 等トナシテ上ノ式ノ値ヲ求メヨ)。

3. $\frac{0}{0}$ ナル形。

又例ヘバ

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

ナル式ニ於テ, $x=1$ トナストキハ,分母モ分子モ共ニ0トナリテ,此式ハ意味ヲ有セズ。サレド, x ガ1ニ等シカラザルトキニハ,上ノ式ハ常ニ $x+1$ ニ等シキガ故ニ, x ヲ愈〻1ニ近キ數トナスニ從ヒ,上ノ式 $\frac{x^2-1}{x-1}$ ノ數値ハ愈〻 $1+1$ 卽チ2ニ近キ數トナリ行クベシ。

又 $$\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$$

ナル式ニテモ,$x=1$トナストキハ,分母モ分子モ共ニ0トナル。サテ此式ハxガ1ニ等シカラザルトキハ,常ニ$\dfrac{x+1}{x-1}$ニ等シ。ヨリテxヲ愈々1ニ近キ數トナスニ從ヒ,上ノ式$\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$ノ數値ハ,絶對値ニ於テ限ナク大キクナリ行クベシ。

一般ニ,xナル文字ヲ含メル分數式ニテ,$x=a$トナストキ,分母モ分子モ共ニ0トナルトキハ,剩餘ノ定理ニヨリ分母モ分子モ共ニ$x-a$ニテ割リ切レル。ヨリテ約分ヲ行ヒテ此分數式ヲ既約分數ニ改メタル後,$x=a$トナストキハ,xガaニ近ヅクトキ,此分數式ノ數値ガ或定マリタル値ニ近ヅクカ,又ハ絶對値ニ於テ限ナク大キクナルカヲ定ムルコトヲ得。

4. $\dfrac{a}{0}\pm\dfrac{b}{0}$ノ如キ形。

次ニ又

$$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}$$

ニテモ,$x=1$トナスコトヲ得ザレド,xガ1ニ等シカラザルトキハ,上ノ式ハ$\dfrac{x^2-1}{x-1}$卽チ$x+1$ニ等シキ

ガ故ニ,xヲ愈々1ニ近キ數トナスニ從ヒ,上ノ式ノ數値ハ愈々2ニ近キ數トナル。卽チxガ愈々1ニ近キ數トナルニ從ヒ,$\dfrac{x^2}{x-1}$及ビ$\dfrac{1}{x-1}$ハイヅレモ絶對値ニ於テ愈々大キクハナレドモ,其差ハ漸次2ニ近ヅキ行クナリ。(xヲ1.01, 1.001, 1.0001又0.9, 0.99, 0.999等トナシテ上ノ式ノ數値ヲ計算セヨ)。

又例ヘバ

$$\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}+\frac{x+1}{x+3}-\frac{2x-1}{x-2} \qquad (1)$$

ニ於テ,$x=-3$トナストキハ,第一第二ノ二ツノ分數式ハ分母ノミ0トナル。今此等二ツノ分數式ヲ一ツノ既約分數ニマトムルトキハ,上ノ式ハ

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{2x-1}{x-2}\quad\left(\text{卽チ}\ \frac{-x}{x-2}\right)$$

トナル。ヨリテxガ-3ニ近ヅクトキハ,上ノ式(1)ノ數値ハ限ナク

$$\frac{-3-1}{-3-2}-\frac{-6-1}{-3-2}\ \text{卽チ}\ -\frac{3}{5}$$

ニ近ヅク。

同ジヤウニシテ,xガ2ニ近ヅクトキ,上ノ式(1)ノ絶對値ハ限ナク大クナルコトヲ知ルベシ。

5. 分數式ノ數値ヲ求ムル規則。

分母ガ x ナル文字ヲ含メル分數式又ハカヤウノ分數式ヨリ組立テラレタル式ニ於テ, x ニ或數 a ヲ當テハメテ其數値ヲ計算セントスルトキ,分母ガ 0 トナルトキニハ,此式ハ意味ヲ有セズ。サレド, x ニ a ヲ當テハムル前ニ,此等ノ分數ヲ一ツノ既約分數ニマトメテ後, x ヲ漸次 a ニ近キ數トナストキ,此式ノ數値ガ絶對値ニ於テ限ナク大キクナルカ,又ハ或定マリタル數ニ近ヅクカヲ定ムルコトヲ得。

例　題

1. x ヲ漸次 0 ニ近キ數トナシ行クトキ,

$$\frac{x+1}{x}, \quad \frac{x^2+x}{x}, \quad \frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x}$$

ノ數値ハ如何ヤウニナルカ。

2. $x=2$ ナルトキ, $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$ ノ數値如何。

3. $x=2$ ナルトキ, $\dfrac{x(3x-2)}{2x-4}+\dfrac{x-6}{x-2}$ ノ數値如何。

4. $x=0$, $x=3$, $x=-2$ ナルトキ,

$$\frac{3x-4}{(x-3)(x+2)}-\frac{3}{x^2-3x}-\frac{2-x}{4+2x}$$

ノ數値如何。

5. $x=a$, $x=-a$ ナルトキ,

(1) $(x^2-a^2)\left(\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}\right)$　(2) $\left(\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x+a}\right)\div\dfrac{1}{x^2-a^2}$

ノ數値如何。

6. 分數式ヲ含メル方程式ノ特別ノ場合。

例一。
$$\frac{x^2}{x-2}=\frac{4(x-1)}{x-2} \qquad (1)$$

兩邊ニ $x-2$ ヲ乘ジテ分母ヲ拂ヒ,整頓シテ,

$$x^2-4x+4=0 \text{ 卽チ } (x-2)^2=0 \qquad (2)$$

ヲ得。ヨリテ

$$x=2$$

サテ方程式(1)ニテ, x ニ 2 ヲ當テハメテ見ルニ,分母ガ 0 トナル分數兩邊ニ出デ來ルガ故ニ, $x=2$ ハ本來ハ棄テ去ルベキモノナリ。

サレド前節ニイヘルガ如クニシテ,方程式(1)ノ兩邊ノ差ガ$x=2$ナルトキ,如何ヤウニナルカヲ見ルガタメニ,(1)ノ項ヲ左邊ニ集メ,之ヲ一ツノ既約分數ニ改ムルトキハ,

$$x-2=0 \qquad (3)$$

ヲ得。$x=2$ハ此方程式ヲ滿足セシム。故ニxガ漸次2ニ近ヅキ行クトキ,(1)ノ兩邊ノ分數式$\dfrac{x^2}{x-2}$, $\dfrac{4(x-1)}{x-2}$ハイヅレモ絶對値ニ於テ限ナク大キクハナレド,兩邊ノ差

$$\frac{x^2}{x-2}-\frac{4(x-1)}{x-2} \quad 即チ \quad x-2$$

ハ限ナク小クナル。即チxニ漸次2ニ近キ値ヲ與フルトキハ,方程式(1)ノ兩邊ノ數値ハ漸次相近ヅキテ,竟ニハ其差ガ如何程ニテモ小クナル。此意味ニ於テ$x=2$ヲ方程式(1)ノ根トイフコトヲ得。

例二。 $$\frac{x+2}{x+1}+\frac{3}{(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x(x-2)} \qquad (1)$$

$x(x-2)(x+1)$ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヒ,整頓シテ,

$$x^3-3x-2=0 \qquad (2)$$

ヲ得。此方程式ノ左邊ヲ因數ニ分解シテ,

$$(x+1)^2(x-2)=0$$

ヲ得。故ニ(2)ノ根ハ

$$x=-1 \quad 及ビ \quad x=2$$

ナリ。此等ノ値ハイヅレモ方程式(1)ニ現ハレタル分數式ノ分母ヲ0トナスモノナリ。

サテ此等ノ値ガ上ニ言ヘルガ如キ意味ニテ,方程式(1)ノ根ナルカヲ驗スガタメニ,(1)ノ項ヲ一邊ニ集メ,之ヲ一ツノ分數式ニ改ムルトキハ,

$$\frac{x^3-3x-2}{x(x-2)(x+1)}=0 \qquad (1_a)$$

ヲ得。約分シテ,

$$\frac{x+1}{x}=0 \qquad (3)$$

ヲ得,$x=-1$ハ此方程式(3)ヲ滿足セシム。故ニxガ漸次-1ニ近ヅキ行クトキハ,(1_a)ノ左邊,即チ(1)ノ兩邊ノ差ノ數値ハ如何程ニテモ小クナル。故ニ$x=-1$ヲ方程式(1)ノ根ナリト言フコトヲ得。

$x=2$ハ方程式(3)ヲ滿足セシメズ,$x=2$トナ

ストキハ(3)ノ左邊ハ $\frac{3}{2}$ トナル。卽チ x ガ漸次2ニ近ヅキ行クトキ,(1)ノ兩邊ノ數値ノ差ハ漸次 $\frac{3}{2}$ ニ近ヅクナリ。故ニ $x=2$ ハ,如何ナル意味ニテモ,方程式(1)ノ根ナリト言フコトヲ得ズ。

分數式ヲ含メル方程式(1)ノ分母ヲ拂ヒテ作レル方程式(2)ヲ解キテ得タル根ヲ,與ヘラレタル方程式(1)ノ未知數ニ當テハメテ試テ,分母ガ0トナル分數式アルトキハ,此等ノ分數式ヲ一ツノ既約分數ニマトメ,カヤウニシテ得タル方程式(3)ニ此根ヲ當テハメテ試ルベシ。根ガ(3)ヲ滿足セシメザルトキハ,是ハ如何ナル意味ニテモ與ヘラレタル方程式(1)ノ根ナリト言フコトヲ得ザルガ故ニ,之ヲ棄ツベシ。又根ガ(3)ヲ滿足セシムルトキハ,是ハ方程式ノ兩邊ノ數値ヲ限ナク相近ヅカ

シムトイフ意味ニテ與ヘラレタル方程式(1)ノ根ナリト言フコトヲ得。

問題第一

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}$

2. $\frac{(x+1)^2}{x}=2+\frac{1}{x}$

3. $\frac{x}{x-2}=\frac{4(x-1)}{x(x-2)}$

4. $\frac{x^2-x-1}{x^2-x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-1}$

5. $\frac{3x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{2}{5}$

6. $6+\frac{1}{x-1}=\frac{3}{x+1}+\frac{10x-8}{x^2-1}$

7. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{2x+1}{x(x+1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x(x-2)}$

8. $3x+9-\frac{3x-2}{x-2}+\frac{10(x+4)}{x-5}=\frac{3x^2}{(x-2)(x-5)}$

7. 不等式。

二ツノ數ノ大小ヲ表スニ,次ノ式ヲ用フ。

a ハ b ヨリモ大ナリ: $a>b$

a ハ b ヨリモ小ナリ: $a<b$

カヤウノ式ヲ**不等式**トイフ。

a, b ハ正數ニテモ,又ハ負數ニテモ,

$a>b$ ナルトキハ, $a-b$ ハ正數

$a<b$ ナルトキハ, $a-b$ ハ負數

ナリ。例ヘバ

$5>3,\qquad 5-3=2$

$2>-3,\qquad 2-(-3)=5$

$-2>-3,\qquad (-2)-(-3)=1$

【注意一】 $a>0$ トハ,a ハ正數ナリトイフコト,又 $a<0$ トハ, a ハ負數ナリトイフコトナリ。

不等式ハ大體ニ於テ,等式ト同ジヤウニ取扱フコトヲ得。即チ

不等式ノ兩邊ニ同ジ數ヲ加ヘ,又ハ兩邊ヨリ同ジ數ヲ引クモ,差支ナシ。故ニ不等式ノ一邊ニアル項ノ符號ヲ變ヘテ,之ヲ他ノ邊ニ移スコトヲ得。

不等式ノ兩邊ニ同ジ『正數』ヲ掛ケ,又ハ兩邊ヲ同ジ『正數』ニテ割ルモ,差支ナシ。サレド,

不等式ノ兩邊ニ同ジ負數ヲ掛ケ,又ハ兩邊ヲ同ジ負數ニテ割ルトキハ,同時ニ不等記號ノ向キヲ變フルコト必要ナリ。

例ヘバ,$5>3$ ノ兩邊ニ 2 ヲ乘ジテ,$10>6$ ヲ得。若シ兩邊ニ -2 ヲ乘ズルトキハ $-10<-6$ トナスコトヲ要ス。

【注意二】 符號ヲ變フルハ, -1 ヲ乘ズルニ同ジ。故ニ不等式ノ兩邊ノ符號ヲ變フルトキハ,同時ニ不等記號ノ向キヲモ變フルコトヲ忘ルベカラズ。例ヘバ $5>3$ ノ兩邊ノ符號ヲ變フルトキハ, $-5<-3$ ヲ得。

例。 不等式 $3x+84>8x-36$ ヲ解ケ。

『不等式ヲ解ク』トハ,未知數ニ如何ナル數値ヲ與フルトキ,此不等式ガ滿足セシメラルルカヲ定ムルコトナリ。

未知項ヲ右邊ニ,既知項ヲ左邊ニ集メテ,

$$84+36>8x-3x$$

卽チ $120>5x$

兩邊ヲ正數 5 ニテ割リ,

$$24>x$$

ヲ得。卽チ x ガ 24 ヨリモ小ナルトキニ限リ,上ノ不等式ハ正シキナリ。

8. 二次ノ不等式。

二次式 ax^2+bx+c ニ於テ, a, b, c ハ與ヘラレタル常數,x ハ變數ナリトシ,此二次式ヲ F ト名ヅケ,

$$F=ax^2+bx+c \qquad (1)$$

ト置クベシ。是ヨリ下卷第98節ノ如クニシテ,

$$4aF=(2ax+b)^2-D \qquad (2)$$

$$(D=b^2-4ac)$$

ヲ得。

(一) D ガ負數ナルトキハ,x ニ如何ナル數値ヲ與フルトモ(2)ノ右邊ハ恒ニ正ナルガ故ニ,$4aF$ ハ恒ニ正,卽チ F ハ恒ニ a ト同一ノ符號ヲ有ス。

(二) D ガ 0 ナルトキハ,

$$4aF=(2ax+b)^2$$

故ニ F ハ

$$2ax+b=0 \quad 卽チ \quad x=-\frac{b}{2a}$$

ナルトキ 0 トナル外,恒ニ a ト同ジ符號ヲ有ス。

(三) D ガ正ナルトキハ,二次方程式 $F=0$ ハ二ツノ實根ヲ有ス。其大ナル方ヲ α,小ナル方ヲ β トスルトキハ,

$$F=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

故ニ

$$x>\alpha$$

ナルトキハ,又 $x>\beta$, 卽二ツノ因數 $x-\alpha$, $x-\beta$ ハ共ニ正,從テ F ハ a ト同一ノ符號ヲ有ス。又

$$x<\beta$$

ナルトキハ,又 $x<\alpha$, 卽チ $x-\alpha$, $x-\beta$ ハ共ニ負,從テ F ハ a ト同一ノ符號ヲ有ス。

次ニ

$$\alpha>x>\beta$$

ナルトキハ, $x-\alpha$ ハ負, $x-\beta$ ハ正,從テ F ハ a ト反對ノ符號ヲ有ス。

以上ノ結果ヲ綜合シテ次ノ定理ヲ得。

二次式 ax^2+bx+c ハ一般ニ x^2 ノ係數 a ト同ジ符號ノ數値ヲ有ス。但二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ガ二ツノ實根ヲ有スルトキ,x ガ此等二ツノ根ノ間ニアルトキニ限リ,二次式ハ a ト反對ノ符號ノ數値ヲ採ル。(x ガ上ノ二次方程式ノ根ナルトキハ,二次式ハ勿論 0 トナル)。

例一。不等式 $3x^2>4x+55$ ヲ解ケ。

項ヲ左邊ニ集メテ,

$$3x^2-4x-55>0$$

此場合ニハ判別式 D ハ正ニシテ,二次方程式

$$3x^2-4x-55=0$$

ノ二ツノ根ハ 5 及ビ $-\frac{11}{3}$ ナリ。

又 x^2 ノ係數 3 ハ正ナルガ故ニ

$$x>5 \text{ 又ハ } x<-\frac{11}{3}$$

ナルトキ,上ノ不等式ハ滿足セシメラル。

【注意】 不等式 $3x^2<4x+55$ ノ解ハ次ノ如シ。

$$5>x>-\frac{11}{3}$$

例二。不等式 $6x>2x^2+13$ ヲ解ケ。

項ヲ一邊ニ集メテ,

$$2x^2-6x+13<0$$

ヲ得。此場合ニハ D ハ負數ニシテ $a=2$ ハ正數ナルガ故ニ,コノ不等式ノ左邊ハ恒ニ正ナリ。故ニ上ノ不等式ハ不可能ナリ。

例三。不等式 $\frac{3-2x}{3x-5}>0$ ヲ解ケ。

兩邊ヲ $-\frac{2}{3}$ ニテ割リ,(同時ニ不等記號ノ向キヲ變ヘ)

$$\frac{x-\frac{3}{2}}{x-\frac{5}{3}}<0$$

コノ不等式ハ左邊ノ分母ト分子トガ反對ノ符號ヲ有スルトキニ限リ,即チ x ガ $\frac{3}{2}$ ト $\frac{5}{3}$ トノ間ニアルトキニ限リ滿足セシメラル。即チ

$$\frac{5}{3}>x>\frac{3}{2}$$

例四。次ノ不等式ヲ解ケ。

$$\frac{3x}{2x-1}>\frac{2}{x+2}$$

項ヲ左邊ニ集メ,整頓シテ,

$$\frac{3x^2+2x+2}{2(x-\frac{1}{2})(x+2)}>0$$

ヲ得。左邊ノ分子ハ恒ニ正ナルガ故ニ,

$$\frac{1}{2(x-\frac{1}{2})(x+2)}>0$$

ヲ解ケバヨシ。

又ハ $$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)>0$$

故ニ $$x>\frac{1}{2} \quad 又ハ \quad x<-2$$

9. 應用問題。

例一。kガ如何ナル限界ノ内ニアルトキ,二次方程式

$$kx^2-(5k-3)x+(3k-2)=0$$

ハ實根ヲ有スルカ。

上ノ二次方程式ガ實根ヲ有スルハ,其判別式ガ負ナラサルトキニ限ル,卽チ

$$(5k-3)^2-4k(3k-2)\geqq 0$$

整頓シテ,

$$13k^2-22k+9\geqq 0$$

此不等式ヲ解キテ,

$$k\geqq 1 \quad 又ハ \quad k\leqq\frac{9}{13}$$

ヲ得。卽チkガ1ヨリモ小ナラズ,又ハ$\frac{9}{13}$ヨリモ大ナラザルトキニ限リ,上ノ二次方程式ハ實根ヲ有スベシ。

【注意】 $k=1$ 又ハ $k=\frac{9}{13}$ ナルトキハ,上ノ二次方程式ハ等根ヲ有ス。

例二。l, m, nハ正數,a, b, cハ相異ナル實數ナルトキハ,方程式

$$\frac{l}{x-a}+\frac{m}{x-b}+\frac{n}{x-c}=0$$

ノ根ハ二ツノ實數ナルコトヲ證明セヨ。

上ノ方程式ノ根ハ其分母ヲ拂ヒテ作レル二次方程式

$$l(x-b)(x-c)+m(x-a)(x-c)+n(x-a)(x-b)=0$$

ノ根ニ同ジ。此二次方程式ノ左邊ノ二次式ニ於テx^2ノ係數ハ$l+m+n$ニシテ,假定ニヨリ正數ナリ。今

$$a<b<c$$

トシ,$x=b$ト置クトキハ,上ノ二次式ハ

$$m(b-a)(b-c)$$

トナリ,即チ負數ニシテx^2ノ係數ト反對ノ符號ヲ有ス。故ニ第18頁ノ定理ニヨリ,上ノ二次方程式ハ實根ヲ有スルコト(而モbガ二ツノ實根ノ間ニアルコト)ヲ知ルベシ。

【注意】 又$x=a$, $x=c$ト置クトキハ上ノ二次式ハソレゾレ

$$l(a-b)(a-c),\ n(c-a)(c-b)$$

トナリ,イヅレモ正數ナリ,即チx^2ノ係數ト同ジ符號ヲ有ス。故ニa及ビcハ二ツノ實根ノ間ニアル數ニアラズ。是ニヨリテ二ツノ實根ノ中一ツハaトbトノ間ニ,又一ツハbトcトノ間ニアルコトヲ知ルベシ。

問題第二

次ノ不等式ヲ解ケ。[1—14]

1. $4x-5>7-2x$　　**2.** $16-7x<7-2x$

3. $\dfrac{2x-11}{3}>\dfrac{3x-5}{2}$　　**4.** $3x^2-4x>7$

5. $3x+2>5x^2$　　**6.** $x(7x-3)>2x-9$

7. $\dfrac{x-2}{x+1}>0$　　**8.** $\dfrac{3-4x}{2x-3}>0$

9. $(x-1)(x-2)(x-3)>0$　　**10.** $(x^2-1)(x^2+2)>0$

11. $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-6)(x-7)}>0$　　**12.** $\dfrac{2x^2-6x+7}{3-4x-8x^2}<0$

13. $\dfrac{x}{x-1}>\dfrac{x-2}{x+1}$　　**14.** $\dfrac{3x^2-7x+6}{5x-7}<1$

15. 二ツノ數ノ平方ノ和ハ,決シテ其積ノ二倍ヨリモ小ナラザルコトヲ證明セヨ。

16. kガ如何ナル限界內ニアルトキ,次ノ方程式ハ實根ヲ有スルカ。

(1) $(k-1)x^2+2(k-2)x+(k-5)=0$

(2) $(2k+1)x^2-(6k-1)x+4k-3=0$

(3) $5x^2-2(4k+1)x+(5k^2-2k+3)=0$

(4) $\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-2x-3}=k$

17. 次ノ方程式ハ恒ニ(a, b, c, k等ノ文字ガ如何ナル實數ナルトキニモ)實根ヲ有スルコトヲ示セ。

(1) $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-2)}=k$

(2) $(x-a)(x-b)=c^2$

(3) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}=0$

18. kニ如何ナル値ヲ與フルトキ,次ノ二次式ハ

xノ値ノ如何ニ拘ハラズ恒ニ正ノ數値ヲ有スルカ。

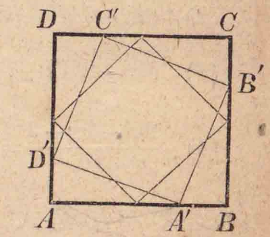
(1) $3x^2-7x+k$

(2) $(k-1)x^2+(k-2)x+(k-2)$

10. 極大極小。

例一。 邊ノ長サaナル正方形ニ,面積ノ最モ小サキ正方形ヲ内接セシメヨ。

ABCDヲ與ヘラレタル正方形トシ,先ヅ之ニA′B′C′D′ナル正方形ヲ内接セシメタリトシ,AA′ノ長サヲxニテ表ストキハ,



$$BB'=x,\quad A'B=a-x$$

故ニA′B′C′D′ノ面積ヲyニテ表ストキハ,

$$y=x^2+(a-x)^2$$

ヨリテxニ如何ナル値ヲ與フルトキ,y即チ$x^2+(a-x)^2$ガ最モ小サキ値ヲ採ルカヲ定ムルトキハ,此問題ハ解カレタルナリ。

サテ

$$y=x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{2}$$

即チyハ定マレル數$\frac{a^2}{2}$ト$2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$トノ和ニ等シ。ヨリテ$2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ガ小サクナルニ從ヒテ,$y$モ亦小サクナル。

サテ$2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ノ最モ小サクナルハ,$x=\frac{a}{2}$ナルトキニテ,此時$y$ハ$\frac{a^2}{2}$ナル値ヲ採ル。

故ニ與ヘラレタル正方形ノ各邊ノ中點ヲ頂點トセル正方形ハ,内接正方形ノ中ニテ面積ノ最モ小キモノニシテ,其面積ハ與ヘラレタル正方形ノ面積ノ半分ニ等シ。

例二。 二ツノ數ノ和ガ與ヘラレタルトキ,其積ヲ最モ大キクセヨ。

與ヘラレタル和ヲa,一ツノ數ヲxトスルトキハ,他ノ一ツノ數ハ$a-x$ナリ。ヨリテ二ツノ數ノ積ヲyニテ表ストキハ,

$$y=x(a-x)=ax-x^2=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

サテ被減數$\frac{a^2}{4}$ハ定マレル數ナルガ故ニ,減數$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ガ小サクナルニ從ヒテ,$y$ハ大キクナル。

又$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$ハ負數トナルコトナキガ故ニ,$x=\frac{a}{2}$

ナルトキノ數値0ガ最小ノ數値ナリ。此時yハ其最大ノ數値$\frac{a^2}{4}$ヲ採ル。

$x-\frac{a}{2}$ハ二ツノ數x及ビ$a-x$ノ差ノ半分ナリ。故ニ次ノ結果ヲ得。

二ツノ數ノ和ガ定マレルトキハ,其差ノ絶對値ガ小サクナルニ從ヒテ,其積ハ大キクナリ,二ツノ數ガ相等シクナルトキニ,積ハ最大トナル。

【注意】 二ツノ數ノ和ヲ$2a$トシ,二ツノ數ヲ$a+x$, $a-x$ニテ表ストキハ,一層簡單ナル解法ヲ得ベシ。

一般ニ二次式

$$ax^2+bx+c$$

ヲ次ノヤウニ書クコトヲ得。

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}\quad(D=b^2-4ac)$$

故ニ次ノ定理ヲ得。

二次式ax^2+bx+cニ於テ$x=-\frac{b}{2a}$トスルトキハ,二次式ハ$-\frac{D}{4a}$ナル値ヲ採ル。此値ハ二次式ニ於ケルxノ係數aガ正ナルカ負ナルカニ從ヒテ,二次式ノ極小又ハ極大ノ値ナリ。

例三。 xニ如何ナル數値ヲ與フルトキ,分數式

$$\frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$$

ノ數値ガ最モ大キクナルカ,又ハ最モ小サクナルカ。

分數式ノ値ヲyニテ表ストキハ,此分數式ガyナル値ヲ採ルハ,xガ次ノ値ヲ採ルトキナルベシ。

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-(y-5)(y+1)}}{y-5}$$

サテxハ固ヨリ虚數ニテハアリ得ザルニヨリ,

$$16-(y-5)(y+1)\geqq 0$$

卽チ $y^2-4y-21\leqq 0$

又ハ $(y-7)(y+3)\leqq 0$

ナルコトヲ要ス。卽チyハ7ヨリモ大ナルコトヲ得ズ,又-3ヨリモ小ナルコトヲ得ズ。

サテyガ7ナルトキハ,$x=\frac{4}{7-5}=2$, 故ニ$x=2$

ナルトキ, y ハ其最大ナル値 7 ヲ採ル。

又 y ガ -3 ナルトキハ, $x=\frac{4}{-3-5}=-\frac{1}{2}$, 故ニ $x=-\frac{1}{2}$ ナルトキ y ハ其最小ナル値 -3 ヲ採ル。

(上ノ方法ニヨリテ,例一及ビ例二ヲ解ケ)。

問題第三

次ノ式ノ極大又ハ極小ノ數値ヲ求メヨ。[1—6]

1. $(3-x)(2+x)$　　**2.** $(x+4)(x-1)$

3. $5x^2-2x+7$　　**4.** $\frac{6x-7}{x^2+5}$

5. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$　　**6.** $\frac{x^2+px+q}{x^2+1}$

7. $\frac{x^2+10x+65}{2x+4}$ ハ 10 ト -4 トノ間ノ數値ヲ有シ得ザルコトヲ示セ。

8. 次ノ式ノ數値ニ如何ナル制限アルカ。

(1) x^2-1　(2) $\frac{1}{x^2-1}$　(3) $\frac{1}{1-x^2}$

次ノ式ノ數値ノ限界ヲ定メヨ。[9—12]

9. $\frac{x^2+3}{x-1}$　　**10.** $\frac{1}{2x^2-8x+5}$

11. $\frac{1}{3x^2-7x+5}$　　**12.** $\frac{2x-3}{x-2}+\frac{x-6}{x-5}$

13. 次ノ方程式ヲ滿足セシムベキ x 及ビ y ノ極大及ビ極小ノ數値ヲ求メヨ。

$$x^2+y^2=6x-8y$$

14. 與ヘラレタル三角形ニ內接スル矩形ノ面積ノ極大ノ値ヲ求メヨ。

15. 直角三角形ノ周圍ガ $2p$ ナルトキ,其面積ノ最大ナル値ヲ求メヨ。

第二章
量ノ變動及ビ其圖解

11. 量ノ變動ヲ示ス圖。

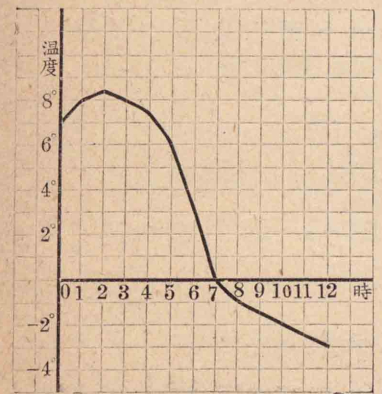
某日某測候所ニ於ケル正午ヨリ夜半ニ至ル溫度ノ每時觀測ノ結果次ノ如シ。

正午	7°	7時	0°
1時	8°	8時	−1°
2時	8°.5	9時	−1°.5
3時	8°	10時	−2°
4時	7°.5	11時	−2°.5
5時	6°	12時	−3°
6時	3°		

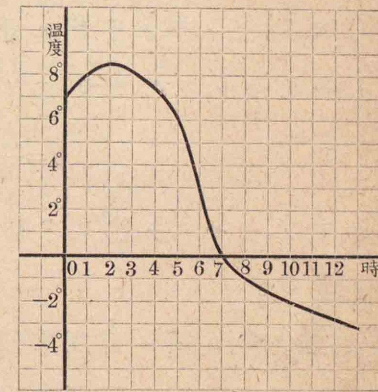
此表ニヨリテ氣溫ガ時ト共ニ變動セル模樣ヲ知リ得ベシト雖モ,次ノ如ク之ヲ圖ニ表ストキハ,變動ノ狀況一層明瞭ナルベシ(第一圖)。

若シ觀測ノ時刻ノ間隔ヲ一層短縮シテ,カヤウノ圖ヲ書クトキハ,更ニ精確ニ氣溫ノ變動ヲ示ス

コトヲ得ベク,又自記寒暖計ヲ用フルトキハ,器械ノ仕掛ニヨリテ直ニ時時刻刻ノ氣溫ノ變動ヲ示スベキ『曲線』ヲ紙上ニ書カシムルコトヲ得ベシ(第二圖)



(第一圖)



(第二圖)

例題

某日某所ニ於ケル氣溫ノ觀測ノ結果次ノ如シ。溫度ノ變動ノ狀況ヲ圖ニ表セ。

午後	6時	3°	午後	10時	−2°.5
,,	7時	2°.2	,,	11時	−3°.5
,,	8時	1°	,,	12時	−5°
,,	9時	−0°.8			

12. 相伴ヒテ變動スル量。函數。

相伴ヒテ變動スル二ツノ量ノ相對應スル數値ヲx, yニテ表ストキ,**變數**x, yヲ各ゝ他ノ**函數**トイフ。

例ヘバ一邊ノ長サx寸ナル正三角形ノ面積ヲy平方寸トスルトキハ,

$$y=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

ニシテ,yハxニ伴ヒテ變動ス。卽チyハxノ函數ナリ。

又毎秒v糎ノ速度ヲ以テ上方ニ投ゼラレタル物體ガt秒間ニ通過スベキ距離ヲs糎トスルトキハ,物理學ノ法則ニヨリ,

$$s=vt-\frac{g}{2}t^2$$

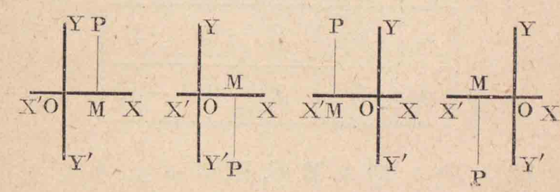
(但gハ重力ノ强サヲ示ス數ニシテ,約980ニ等シ)。故ニsハtニ伴ヒテ變動ス,卽チsハtノ函數ナリ。

一般ニxナル文字ヲ含メル一ツノ代數式ヲyニテ表ストキハ,yハ卽チxノ函數ナリ。

13. 一次式ノ圖。

yガxノ函數ナルトキ,xノ變動ニ伴ヒテyノ變動スル狀況ヲ第11節ニ於ケルガ如ク圖ニ表スコトヲ得。

(x正, y正) (x正, y負) (x負, y正) (x負, y負)



今定點(**基點**)Oニ於テ直交スル直線(**橫軸**,**縱軸**)XX′, YY′ヲ引キ,長サノ單位ヲ適宜ニ定メ,XX′ノ上ニ於テxノ數値ガ正ナルトキハOXノ向キニ,又xノ數値ガ負ナルトキハOX′ノ向キニ,xノ絕對値ダケノ長サOMヲ採ルトキハ,M點ノ位置ニヨリテxノ數値ヲ示スコトヲ得ベシ。

又xニ對應スルyノ數値ガ正ナルトキハOYノ方向ニ,又負ナルトキハOY′ノ方向ニ,yノ絕對値ダケノ長サMPヲYY′ニ平行ニ採ルトキハ,P點ノ

位置ニヨリテx, yノ相對應スル數値ヲ示スコトヲ得。

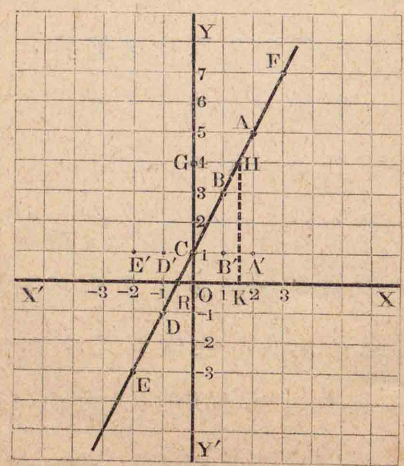
例ヘバ

$$y=2x+1$$

ナルトキ,xニ二三ノ數値ヲ與ヘテ之ニ對應スルyノ數値ヲ求ムルトキハ,次ノ如シ。

x	2	1	0	−1	−2
y	5	3	1	−1	−3

次ノ圖ニ於テ點A, B, C, D, Eハ上ノ表ニ掲ゲタルx, yノ相對應スル値ヲ示セルモノナリ。



サテ
$$\frac{y-1}{x}=2$$

即チ$y-1$ハxニ比例スルガ故ニ,

$$\frac{AA'}{CA'}=\frac{BB'}{CB'}=\frac{DD'}{CD'}=\frac{EE'}{CE'}=2$$

故ニ幾何學ノ定理ニヨリ點A, B, C, D, Eハ盡ク同一直線上ニアリ。又一般ニxノ任意ノ値ニ對應スルyノ値ヲ示スベキ點ハ盡ク此直線上ニアリ。故ニ此直線ハ即チxノ任意ノ値ニ對應スルyノ値ヲ示スモノナリ。例ヘバ圖ニ於テ點Fガ此直線ノ上ニアルハ,即チ$x=3$ナルトキ之ニ對應スルyノ値ガ7ナルコトヲ示ス。

此圖ニヨリテ一次式$2x+1$ニ關スル種々ノ問題ヲ解クコトヲ得。例ヘバ

(一) 直線AEガXX′ニ交ハル點RハOヨリOX′ノ方向ニ$\frac{1}{2}$ノ距離ニアリ。故ニ$x=-\frac{1}{2}$ナルトキ,之ニ對應スルyノ値ハ0ナリ。是レ即チ一次方程式

$$2x+1=0$$

ノ根ハ$x=-\frac{1}{2}$ナルコトヲ示スモノナリ。

(二) OYノ上ニOG=4ナル點Gヲ採リ,GヨリXX′ニ平行ニGHヲ引キ直線AEトHニ於テ交

ハラシメ, H ヨリ XX' ニ垂線 HK ヲ下ストキハ, $OK=GH=\frac{3}{2}$ ナリ。故ニ $y=4$ ハ $x=\frac{3}{2}$ ニ對應スル値ナリ。是レ卽チ一次方程式

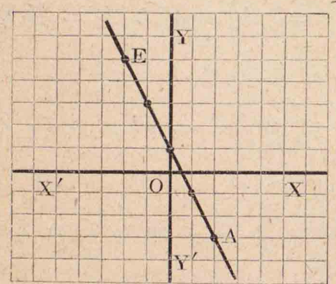
$$2x+1=4$$

ノ根ハ $x=\frac{3}{2}$ ナルコトヲ示スモノナリ。

同ジヤウニ一次式

$$1-2x$$

ノ圖ハ次ニ示スガ如キ直線 AE ナリ。



x	y
-2	5
-1	3
0	1
1	-1
2	-3

一般ニ任意ノ一次式

$$y=ax+b$$

ノ圖ハ一ツノ直線ニシテ, b ハ此直線ト YY' トノ交點ノ位置ヲ定メ,係數 a ハ此直線ノ XX' ニ對スル傾斜ヲ定ムルモノナリ。

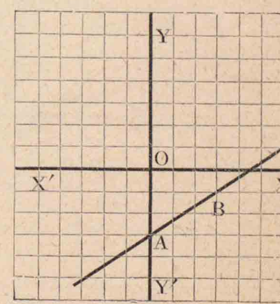
一次式ノ圖ハ直線ナルガ故ニ,此直線ヲ書クニハ,其二ツノ點,卽チ x, y ノ相對應スル二組ノ値ヲ知レバ充分ナリ。

例一。 一次式 $y=\frac{2}{3}x-3$ ノ圖ヲ書ケ。

$x=0$ ナルトキハ, $y=-3$ (A)

$x=3$ ナルトキハ, $y=-1$ (B)

故ニ求ムル直線ハ此等ノ二組ノ x, y ノ相對應スル値ヲ示ス點 A, B ヲ通ル直線ナリ。



例二。 x, y ガ方程式

$$3x+2y=12 \qquad (1)$$

ヲ滿足セシムルトキ, x ノ變動ニ伴フ y ノ變動ヲ示ス圖ヲ書ケ。

上ノ方程式ヨリ

$$y=6-\frac{3}{2}x \qquad (2)$$

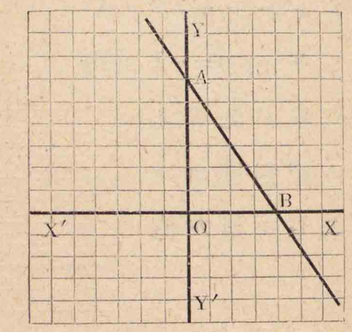
ヲ得,故ニ y ハ x ノ一次式,從テ求ムル圖ハ此一次式ノ變動ヲ示ス直線ニ外ナラズ。故ニ方程式(1)ヲ(2)ノ如ク書キ改ムルマデモナク,(1)ヨリ直ニ x, y ノ相對應スル二組ノ値ヲ求メテ,此直

線ヲ書クコトヲ得。例ヘバ

$x=0$ トスルトキ, $y=6$ (A)

$y=0$ トスルトキ, $x=4$ (B)

故ニ求ムル直線ハ次ノ圖ニ示スガ如シ。



例 題

次ノ一次式ノ圖ヲ書ケ。[1–6]

1. $y=x+1$

2. $y=1-x$

3. $y=2x-3$

4. $y=\frac{x-3}{2}$

5. $y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$

6. $y=-2x+3$

7. x, y ガ方程式 $3x+4y=12$ ヲ滿足セシムルトキ x, y ノ相伴ヒテ變動スル狀況ヲ圖ニ表セ。又其圖ヲ用ヒテ次ノ問ニ答ヘヨ。

(1) $x=4$, 及ビ $x=-4$ ナルトキ,之ニ對應スル y ノ値如何。

(2) $y=3$ 及ビ $y=6$ ナルトキ,之ニ對應スル x ノ値如何。

(3) x ノ如何ナル値ニ對應スル y ノ値ガ正ナルカ。

(4) y ノ如何ナル値ニ對應スル x ノ値ガ正ナルカ。

8. 一次式 ax ヲ示ス直線ハ基點 O ヲ通ルコトヲ說明セヨ。又此直線ヲ OA トスルトキハ,一次式 $ax+3$ ヲ示ス直線ハ OA ニ平行ナルコトヲ說明セヨ。

又一次式 $ax-2$ ノ圖ハ如何。

9. 一次式 ax, $a(x-1)$, $a(x-1)+2$ ヲ示ス直線ハ互ニ平行ナルコトヲ說明セヨ。

10. 一次式 $ax+b$ ヲ示ス直線ト $-ax-b$ ヲ示ス直線トハ, XX′ ヲ軸トシテ互ニ對稱ナルコトヲ說明セヨ。

14. 應用問題。

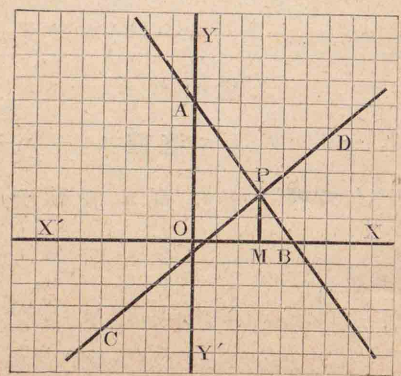
例一。作圖ニヨリテ次ノ聯立二元一次方程式ヲ解ケ。

$$4x+3y=18 \qquad (1)$$

$$6x-7y=4 \qquad (2)$$

前節例二ノ如クニシテ『方程式(1)(2)ヲ表ス』直線AB, CDヲ引キ,其交點Pヲ求メ, PヨリXX′ヘ垂線PMヲ下セ。然ラバ圖ニヨリテOM=3, MP=2ナリ。卽チ$x=3$ナルトキ(1),(2)ニ於テ之ニ對應スルyノ値ハイヅレモ$y=2$ナリ。故ニ求ムル根ハ

$$x=3,\quad y=2$$



ナリ。(計算ニヨリテ此結果ヲ驗セ)。

【注意】カヤウノ方法ニヨリテ聯立方程式ヲ解クトキハ,實際ハ根ノ近似値ヲ得ルニ過ギズ。成ルベク精密ナル結果ヲ得ントト欲セバ細密ナル方眼紙ヲ用ヒ,且ツ長サノ單位ヲ成ルベク大キク採ルベシ。例ヘバ方眼紙ノ十罫ヲ以テ1ヲ表ストキハ,目測ニヨリテ結果ヲ約小數第二位マデ求ムルコトヲ得ベシ。

例二。甲乙兩驛間ノ距離9哩ナリ。正午ニ甲驛ヲ發シ,午後零時三十分乙驛ニ着セル第一號列車ト,午後零時十分ニ乙驛ヲ發シ,同四十分甲驛ニ着セル第二號列車トハ,何時何處ニテ出會ヒタルカ。

列車ハ運轉中,恒ニ一様ノ速度ヲ以テ進行スルモノト假定シ,時間tハ分ヲ單位トシテ正午ヨリ,距離sハ哩ヲ單位トシテ甲驛ヨリ,計ルモノトスルトキハ,一般ニ正午ニ,甲驛ヨリa哩ノ距離ニアリシ列車ガ毎分v哩ノ速度ヲ以テ進行シ,t分ノ後此列車ガ甲驛ヲ距ルコトs哩ノ處ニアリトスレバ,

$$s=vt+a$$

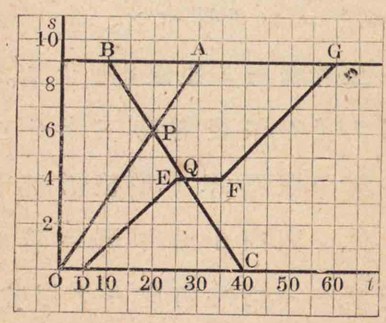
卽チ s ハ t ノ一次式ナリ。

サテ第一列車ニテハ,

$t=0$ ナルトキ $s=0$　　(O)

$t=30$ ナルトキ $s=9$　　(A)

ナルガ故ニ,次ノ圖ニ於テ,直線OAハ其進行ノ狀況ヲ示スモノナリ。又第二列車ニテハ,



$t=10$ ナルトキ $s=9$　　(B)

$t=40$ ナルトキ $s=0$　　(C)

故ニ直線BCハ其進行ヲ示ス。

直線OA, BCノ交點Pハ

$t=20$　　$s=6$

ニ該當スルガ故ニ,二ツノ列車ハ午後零時二十分,甲驛ヨリ6哩ノ處ニ於テ出會ヒタルコトヲ

知ルベシ。

【注意】今ナホ第三號列車ハ午後零時五分ニ甲驛ヲ發シ,同二十五分甲驛ヲ距ルコト4哩ナル丙驛ニ達シ,其處ニ於テ十分間停車シ,午後一時乙驛ニ着シタリトスルトキハ,其進行ノ狀況ハ折線DEFGニテ示サルベシ。卽チ直線DE及ビFGハ甲丙間,丙乙間ノ運轉ヲ示スコト前ノ場合ニ同ジク,直線EFガOCニ平行ナルハ卽チ零時二十五分ヨリ十分間,停車中,列車ト甲驛トノ距離ノ變ゼザリシコトヲ示スモノナリ。

此折線ト直線BCトノ交點Qハ卽チ第二號列車ハ第三號列車停車中(約零時二十七分頃)丙驛ヲ通過スルコトヲ示スモノナリ。

例　　題

作圖ニヨリテ,次ノ聯立方程式ヲ解ケ。[1—4]

1. $x+y=7$　　**2.** $y-2x=4$

$x-y=3$　　$y+3x=7$

3. $3y=4x$　　**4.** $4y=x+60$

$3x+2y=18$　　$y=2x-3$

5. 甲乙兩驛間ノ距離5.8哩ナリ。午前九時二十分甲驛ヲ發シ,同十時五十五分乙驛ニ着セル列車ト,午前十時三十五分乙驛ヲ發シ,同十一時甲驛ニ着セル列車トノ出會ヘル時刻及ビ場處ヲ,作圖ニヨリテ求メヨ。

6. 午前六時三十分甲驛ヲ發シ,同七時,15哩ヲ隔ツル乙驛ニ着シ,七時五分乙驛ヲ發シ,七時二十分ニ乙驛ヲ距ルコト2.25哩ナル丙驛ニ着セル列車ノ進行ヲ示スベキ圖ヲ書キ,且午前六時四十分及ビ七時十五分ニ於ケル此列車ノ位置ヲ求メヨ。

7. 國有鐵道ノ三等乗車賃金ハ,一哩ニツキ五十哩マデハ16.5厘,五十哩ヲ超過シタル分ハ13厘,百哩ヲ超過シタル分ハ12厘,二百哩ヲ超過シタル分ハ8厘,三百哩ヲ超過シタル分ハ7厘ナリ。距離ニ應ジテ賃錢ノ増加スル模様ヲ圖ニテ示セ。又其圖ニヨリ(1) 150哩分ノ乗車賃金及ビ(2)乗車賃金2圓ナル哩數ノ概略ノ値ヲ求メヨ。

15. 二次式ノ圖。

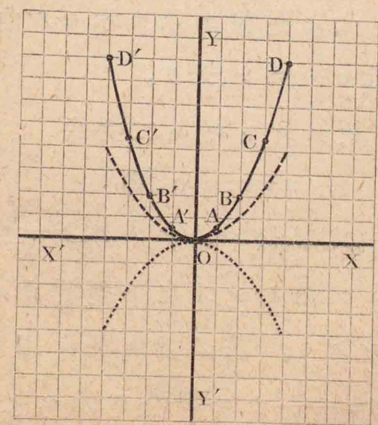
(一) 二次式

$$y=x^2$$

ノ圖ヲ書クガタメニ,x,yノ相對應スル値ヲ求メ,次ノ表ヲ得。

x	0	±1	±2	±3	±4
y	0	1	4	9	16

所要ノ圖ハ此等ノ相對應スル値ヲ示ス點O;A, A'; B, B'; C, C'; D, D'ヲ通ル曲線ナリ。(圖ニ於テハ曲線ノ形狀ノ甚ダシク扁長トナルヲ拒クガタ



メニ,yノ値ヲ示ス長サノ單位ヲ半ニ減ジタリ)。

xノ符號ヲ變ズルトキ,yハ變ゼザルガ故ニYY'ハ此曲線ノ對稱軸ナリ。

又xガ絕對値ニ於テ漸次增大スルニ伴ヒテ,yハ限ナク增大スルガ故ニ,曲線ハ點D, D'ヲ超エテ,限ナク左右上方ニ擴ガルベシ。

此曲線ハ所謂**拋物線**ニシテ,對稱軸YY'ヲ其**軸**トイヒ,軸ト曲線トノ交點Oヲ其**頂點**トイフ。

(二) aガ正數ナルトキハ,二次式

$$y=ax^2 \quad (a>0)$$

ノ圖ヲ得ルニハ(一)ノ曲線上ノ各點ヲ$1:a$ノ比ニXX'ニ近ヅケ$(a<1)$又ハ遠ザク$(a>1)$レバ可ナリ。前ノ圖ニ於テ太キ點線ヲ以テ示セル曲線ハ$a=\frac{1}{2}$ナル場合ヲ示セルモノナリ。

(三) aガ負數ナルトキハ,二次式

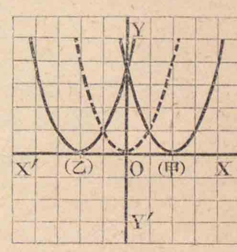
$$y=ax^2 \quad (a<0)$$

ヲ表ス曲線ハ,其形狀ニ於テハ全ク(二)ノ曲線ニ同ジク,唯XX'ヲ軸トシテ之ト對稱ナル位置ニアルヲ異トスルノミ。前ノ圖ニ於テ細キ點線ヲ以テ示セルハ$a=-\frac{1}{2}$ナル場合ヲ示セルモノナリ。

(四) 二次式

$$y=a(x-m)^2$$

ヲ示ス曲線ハ,$y=ax^2$ヲ示ス曲線ノ各點ヲ,XX'ニ平行ニ,mニ等シキ距離ダケ(mガ正ナラバOXノ方向ニ,又mガ負ナラバOX'ノ方向ニ)ヅラシタルモノナリ。例ヘバ,右ノ圖ニ於テ



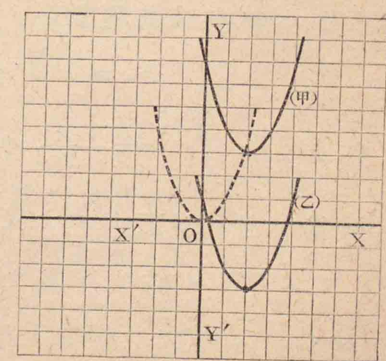
甲ハ $y=(x-2)^2$

乙ハ $y=(x+2)^2$

ヲ示スモノナリ。

(五) 二次式

$$y=a(x-m)^2+n$$



ヲ示ス曲線ハ(四)ノ曲線ヲYY'ニ平行ニ,nニ等シキ距離ダケ(nノ符號ニ從ヒテOY又ハOY'ノ方向ニ)ヅラシタルモノナリ。例ヘバ,上ノ圖ニ於テ

甲ハ $y=(x-2)^2+3$

乙ハ $y=(x-2)^2-3$

ヲ示スモノナリ。

一般ニ,二次式

$$y=ax^2+bx+c \qquad (1)$$

ハ之ヲ

$$y=a(x-m)^2+n$$

ナル形ニ書キ改ムルコトヲ得,即チ

$$m=-\frac{b}{2a},\quad n=-\frac{D}{4a}$$

ナリ。

故ニ二次式(1)ヲ示ス曲線ハ拋物線ニシテ,其軸ハ YY′ ニ平行,又其頂點ハ

$$x=m,\qquad y=n$$

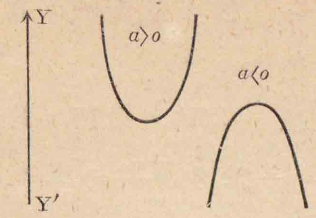
即チ

$$x=-\frac{b}{2a},\quad y=-\frac{D}{4a}$$

ニ該當シ,且 a ガ正ナルカ又ハ負ナルカニ從ヒテ,OY 又ハ OY′ ノ向キニ限ナク擴大ス(即チ a ガ正ナルトキハ,頂點ハ曲線ノ最下方ニアリ,又 a ガ負ナルトキハ最上方ニアリ)。

故ニ二次式

$$ax^2+bx+c$$



ハ a ガ正ナルトキハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナルトキ,其極小値 $-\frac{D}{4a}$ ヲ採リ,x ガ $-\frac{b}{2a}$ ヨリモ漸次增大又ハ減少スルニ從ヒテ,二次式ノ數値ハ限ナク增大ス。

又 a ガ負ナルトキハ,二次式ハ $x=-\frac{b}{2a}$ ナルトキ,其極大値 $-\frac{D}{4a}$ ヲ採リ,x ガ $-\frac{b}{2a}$ ヨリモ漸次增大又ハ減少スルニ從ヒテ,二次式ノ數値ハ(代數的ニ)限ナク減少ス。

例一。 二次式 x^2+x-1 ノ圖ヲ書ケ。

此二次式ヲ y ト置クトキハ,

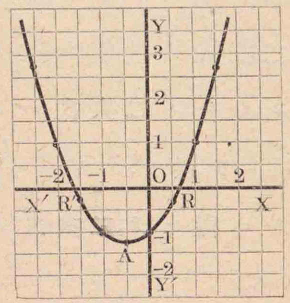
$$y=x^2+x-1$$
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

故ニ $x=-\frac{1}{2}$ ナルトキ,二次式ハ其極小値 $-\frac{5}{4}$ ヲ採ル,此値ハ圖(50頁)ニ於テ點Aニテ示サルルモノニシテ,是レ即チ求ムル拋物線ノ頂點ナリ。

又x^2ノ係數ハ1卽チ正ナルガ故ニ,拋物線ハ上方ニ向ヒテ擴大セリ。

故ニ拋物線ハXX′ノ兩側ニ跨ガリ,從ヒテ二ツノ點R, R′ニ於テXX′ニ交ハル。是レ二次方程式

$$y=0 \quad 卽チ \quad x^2+x-1=0$$



ガ二ツノ實根ヲ有スルコトヲ示スモノナリ。

$$OR=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=約\ 0.62$$

$$OR'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=約\ -1.62$$

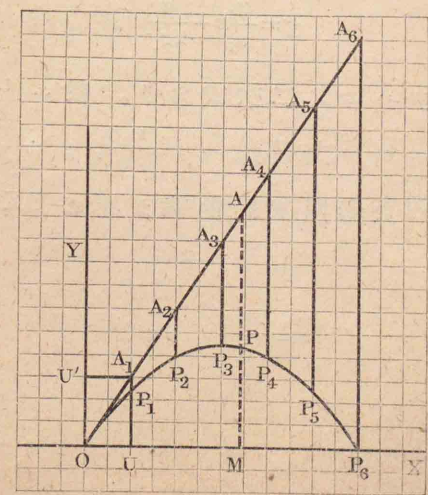
又曲線ハRR′ノ間ニ於テノミXX′ノ下方ニアリ。是レ卽チ不等式

$$x^2+x-1<0$$

ガ$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ナルトキニ限リ滿足セシメラルルコトヲ示ス。

例二。點OヨリOA$_1$ノ方向ニ毎秒v米ノ速度ヲ以テ投ゼラレタル物體ガ重力ノ作用ノ下ニ進行スル徑路ヲ書ケ。

OA$_1$ヲ含メル鉛直面内ニ於テOXヲ水平線, OYヲ鉛直線トスルトキハ,物理學ノ法則ニヨリt秒後ニ於ケル此物體ノ位置ハOA$_1$ノ方向ニvtノ距離ニアル點Aヨリ下方$\frac{1}{2}gt^2$米(g=約9.8)ナル點Pナリ。卽チ求ムル徑路ハtノ變動



ニ伴フ此點 P ノ軌跡ナリ。故ニ $t=1, 2, 3,$ ……ノ値ヲ與ヘテ,之ニ應ズル P ノ位置 P_1, P_2, P_3……ヲ求メ,此等ノ點ヲ通ル曲線 OP_1P_2……ヲ書クトキハ,求ムル徑路ノ概形ヲ得ベシ。

今 $OA_1=v$ トシ XX′, YY′ ノ上ニ於ケル OA_1 ノ正射影 OU, OU′ ヲソレゾレ v_1, v_2 ニテ表シ,又 P ヨリ OX ヘ下セル垂線ノ足ヲ M トシ, OM, MP ノ長サヲソレゾレ x, y トスルトキハ,

$$x=\mathrm{OM}=v_1t, \qquad y=\mathrm{MP}=\mathrm{MA}-\mathrm{PA}=v_2t-\frac{1}{2}gt^2$$

故ニ

$$y=\frac{v_2}{v_1}x-\frac{g}{2{v_1}^2}x^2$$

卽チ y ハ x ノ二次式ナリ。故ニ上ノ曲線ハ拋物線ニシテ,其頂點ハ $x=\frac{v_1v_2}{g}$, $y=\frac{{v_2}^2}{2g}$, $\left(t=\frac{v_2}{g}\right)$ ニ該當シ(48頁參照)又此曲線ガ再ビ OX ニ交ハル點ハ

$$x=\frac{2v_1v_2}{g}, \quad y=0$$

ニ該當ス。

例　題

次ノ二次式ノ圖ヲ書ケ。[1–5]

1. $y=\frac{2}{3}x^2$　　**2.** $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$

3. $y=\frac{1}{2}(x+1)^2-3$　　**4.** $y=x-\frac{x^2}{2}$

5. $y=1-x+x^2$

6. 二次式 x^2+2x-1 ノ圖ヲ書キテ,次ノ方程式及ビ不等式ヲ解ケ。

$$x^2+2x-1=0, \ x^2+2x-1=2$$

$$x^2+2x-1<0, \ x^2+2x-1>2$$

7. 二次式 $\frac{x^2}{2}$ 及ビ一次式 $2x-\frac{3}{2}$ ノ圖ヲ書キテ,次ノ方程式及ビ不等式ヲ解ケ。

$$\frac{x^2}{2}=2x-\frac{3}{2}, \qquad \frac{x^2}{2}>2x-\frac{3}{2}$$

8. 二次式 $2x^2-5x+3$ ガ x ニ伴ヒテ變動スル狀況ヲ圖ニヨリテ說明セヨ。

9. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-2}$ ヲ示スベキ圖ヲ書ケ。

10. 每秒 v 糎ノ速度ヲ以テ眞上ニ投ゲラレタル物ガ, t 秒ノ後最初ノ位置ノ上方 s 糎ニアリトスルトキハ,

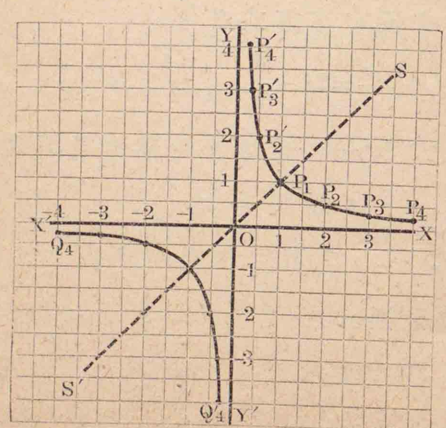
$$s=vt-\frac{1}{2}gt^2$$

ナリ。$v=1500, g=980$ トシテ,t ニ伴ヒテ s ノ變動スル狀況ヲ示スベキ圖ヲ作レ。又其圖ニヨリテ,此物ガ達スベキ最高ノ距離及ビ再ビ最初ノ位置ニ復ル時刻ヲ求メヨ。

16. 互ニ逆比例スル量ノ變動ヲ示ス圖。

x, y ガ互ニ逆比例スル量ナルトキ,其相伴ヒテ變動スル狀況ヲ圖ニ示サンガタメニ,先ヅ

$$xy=1$$



ナル場合ヲ論ズベシ。

x, y ノ相對應スル値

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	……
y	4	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	……

ヲ示ス點 P_4' P_3' P_2' P_1 P_2 P_3 P_4 ……

ヲ通ル曲線ハ,x ガ正,從テ y ガ正ナルトキ,其相伴ヒテ變動スル狀況ヲ示ス。

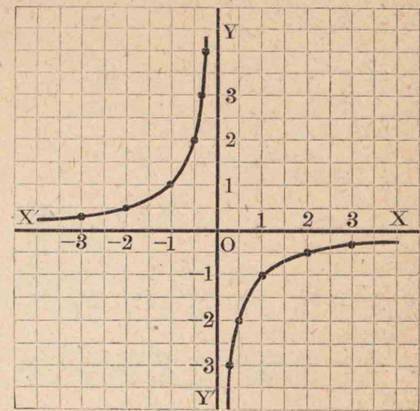
x, y ノ中,一方ガ漸次増大スルニ從ヒテ他ノ一方ハ限リナク減少スルガ故ニ曲線ハ P_4, P_4' ヲ超エテ次第ニ OX 及ビ OY ニ接近シ行クコトヲ知ルベシ。

x 及ビ y ガ負ナル場合ニ於ケル曲線 Q_4'……Q_4 ハ O ヲ中心トシテ P_4'……P_4 ト對稱ナルコトハ睹易キ所ナリ。

又 x ノ變動ニ伴フ y ノ變動ハ全ク,y ノ變動ニ伴フ x ノ變動ニ同ジキガ故ニ角 XOY ヲ二等分スル直線 SS′ ハ曲線ノ對稱軸ナルコト明ナリ。

$xy=p$ ナル場合ニモ曲線ノ形ハ同様ナリ。但 p

ガ負數ナルトキニハ,曲線ハ角 XOY′ 及ビ X′OY ノ内部ニアリ。右ノ圖ハ $p=-1$ ナル場合ヲ示ス。$(xy=-1)$



分數式 $$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

ノ圖モ亦同樣ノ曲線ナリ。例ヘバ

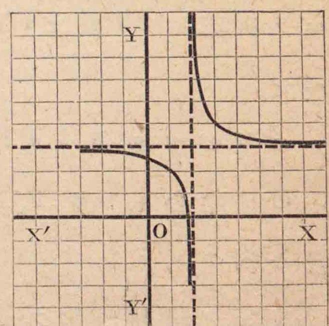
$$y=\frac{3x-5}{x-2}$$

ナルトキハ,

$$y-3=\frac{1}{x-2}$$

即チ

$$y=\frac{1}{x-2}+3$$



此場合ニハ,求ムル曲線ハ $y=\frac{1}{x}$ ヲ示ス曲線ヲ OX ノ方向ニ 2 ダケ,又 OY ノ方向ニ 3 ダケヅラシタルモノナリ。

例題

次ノ分數式ノ圖ヲ書ケ。[1—4]

1. $y=\frac{4}{x}$　　2. $y=-\frac{16}{x}$

3. $y=\frac{x+1}{x}$　　4. $y=\frac{3x+4}{2x+3}$

5. $(x-1)(y-2)=4$ ナルトキ, x, y ノ相伴ヒテ變動スル狀況ヲ示スベキ圖ヲ書ケ。

6. 作圖ニヨリテ,次ノ方程式及ビ不等式ヲ解ケ。

$$\frac{x-2}{3x-1}=7$$

$$\frac{x-2}{3x-1}>1$$

$$10>\frac{x-2}{3x-1}>7$$

作圖ニヨリテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。[7—8]

7. $xy=4,\quad x+y=5$　　8. $xy=10,\quad x-2y=1$

第三章
冪根ノ續キ

17. 冪根ノ算術上ノ意味及ビ代數上ノ意味。

n 乘冪ガ正數 a ニ等シクナルベキ正數 x, 卽チ方程式 $x^n=a$ ヲ滿足セシムベキ正數 x ハ唯一ツアリ。是レ卽チ算術上ノ意味ニ於ケル a ノ n 乘根ナリ。

サレド,代數上ノ意味ニテハ,方程式 $x^n=a$ ノ根ハ,スベテ之ヲ a ノ n 乘根トイフ。

例ヘバ, 1 ノ平方根ハ $x^2=1$ ノ二ツノ根 $+1$ 及ビ -1 ナリ。又 1 ノ立方根ハ $x^3=1$ ノ根ニシテ,此方程式ノ根ハ $x=1$ 及ビ次ノ二ツノ虛數ナリ。

$$\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

之ヲ 1 ノ虛數立方根トイフ。此等ノ虛數ノ立方ヲ器械的ニ計算スルトキハ 1 ヲ得ベシ。卽チ

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{(-1)^3\pm3(-1)^2\sqrt{-3}+3(-1)(\sqrt{-3})^2\pm(\sqrt{-3})^3}{8}$$

$$=\frac{-1\pm3\sqrt{-3}+9\mp3\sqrt{-3}}{8}=1$$

一般ニ a^3 ノ立方根,卽チ方程式 $x^3=a^3$ ノ根ハ a, $\dfrac{-a\pm\sqrt{-3a^2}}{2}$ ノ三ツナリ。

次ニ 1 ノ四乘根ハ方程式 $x^4=1$ ノ根,卽チ

$$1,\quad -1,\quad \sqrt{-1},\quad -\sqrt{-1}$$

ノ四ツナリ。一般ニ a^4 ノ四乘根ハ $\pm a$, $\pm\sqrt{-a^2}$ ノ四ツナリ。

18. 多項式ノ開法。

多項式ノ開法ハ應用ノ機會極メテ稀ナリ。其方法ハ數ノ開法ト同樣ナリ。

例一。 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$ ノ平方根ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{l|l}
 & x^2+x+1\ (\text{平方根}) \\
 & \sqrt{x^4+2x^3+3x^2+2x+1} \\
 & x^4 \\
2x^2+x & \quad 2x^3+3x^2 \\
 & \quad 2x^3+\ \ x^2 \\
2x^2+2x+1 & \qquad 2x^2+2x+1 \\
 & \qquad 2x^2+2x+1
\end{array}$$

例二。$x^6+6x^5+18x^4+32x^3+36x^2+24x+8$ ノ立方根ヲ求メヨ。

$$
\begin{array}{lrr}
 & & x^2+2x+2 \quad (\text{立方根}) \\
 & & \overline{x^6+6x^5+18x^4+32x^3+36x^2+24x+8} \\
 & 3x^4 & x^6 \\
3x^2+2x & 6x^3+4x^2 & \\
 & \overline{3x^4+6x^3+4x^2} & 6x^5+18x^4+32x^3 \\
 & 4x^2 & 6x^5+12x^4+8x^3 \\
 & \overline{3x^4+12x^3+12x^2} & 6x^4+24x^3+36x^2+24x+8 \\
3x^2+6x+2 & 6x^2+12x+4 & \underline{6x^4+24x^3+36x^2+24x+8} \\
 & \overline{3x^4+12x^3+18x^2+12x+4} &
\end{array}
$$

問題第四

次ノ式ノ平方根ヲ求メヨ。[1—3]

1. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$
2. $4x^4-4x^3+9x^2-4x+4$
3. $x^6+4x^5+4x^4-2x^3-4x^2+1$

次ノ式ノ立方根ヲ求メヨ。[4—5]

4. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$
5. $x^6-3ax^5+6a^2x^4-7a^3x^3+6a^4x^2-3a^5x+a^6$

第四章

順列及ビ組合ハセ。二項式定理

19. 順列。

例ヘバ,甲乙丙ナル三ツノ物アリ。此中ヲ二ツヅツ取リテ,ソレヲ種種ノ順序ニ並ブル仕方ハ幾通リアルカ。

先ヅ甲ヲ始ニ置キ,殘レル乙丙ノ中ノ一ツヲ其次ニ置キテ,

甲乙　　甲丙

ナル二通リノ竝ベ方アリ。

同ジヤウニ,乙ヲ始ニ置キテ,

乙甲　　乙丙

ナル二通リノ竝ベ方アリ。又丙ヲ始ニ置キテ,

丙甲　　丙乙

ナル二通リノ竝ベ方アリ。

ヨリテ都合 2×3 卽チ 6 通リノ竝ベ方アリ。

相異ナルn個ノ物ノ中ヨリr個ヅツヲ取リ,之ヲ種種ノ順序ニ竝ブルコトヲn個ノ物ヨリr個ヅツノ**順列**ヲ作ルトイヒ,其數ヲ表スニ

$$_nP_r$$

ナル記號ヲ用フ。

例ヘバ

$$_3P_2=6$$

20. 順列ノ數。

n個ノ物ヨリ1個ヅツノ順列ノ數ハ

$$_nP_1=n$$

ナリ。

次ニn個ノ物ヨリ2個ヅツノ順列ノ數ヲ求メンガタメニ,此等n個ノ物ヲa, b, c,………l ナル文字ニテ表シ,先ヅaヲ始ニ置キ,殘レル$n-1$個ノ文字ノ中ノ一ツヲ其次ニ置キテ,

ab, ac, ad,………al

ナル$n-1$個ノ順列ヲ得。而シテn個ノ文字ノ中,イヅレノ一ツヲ始ニ置クトモ,殘レル$n-1$個ノ文字ヲ一ツヅツ其次ニ置キテ,$n-1$個ノ順列ヲ作ルコトヲ得ベシ。故ニn個ノ文字ヨリ2個ヅツ取ルトキハ,全體ニテ$n(n-1)$個ノ順列ヲ得。卽チ

$$_nP_2=n(n-1)$$

又n個ノ物ヨリ3個ヅツノ順列ヲ作ランニ,先ヅ2個ヅツノ順列ノ中ノ一ツ,例ヘバabヲ取リ,殘レル$n-2$個ノ文字ヲ一ツヅツ其次ニ置キテ,abニ始マル順列$n-2$個,卽チ

abc, abd,……, abl

ヲ得。2個ヅツノ順列ノ一ツ一ツヨリ,上ノ如クニシテ3個ヅツノ順列$n-2$個ヲ得ルガ故ニ

$$_nP_3={}_nP_2(n-2)=n(n-1)(n-2)$$

一般ニ,n個ノ物ヨリ$r-1$個ヅツノ順列$_nP_{r-1}$個アル其各順列ノ次ニ,殘ノ$n-(r-1)$卽チ$n-r+1$個ノ物ノ中ノ一ツヲ添ヘテ,r個ヅツノ順列$n-r+1$個ヅツヲ得。又カヤウニシテn個ノ物ヨリr個ヅツノ順列ヲ重複モナク遺漏モナク作リ得ベキガ故ニ,全體ニテハ

$$_nP_r={}_nP_{r-1}(n-r+1)$$

此式ニテ,rヲ順次$r-1$, ……3, 2ニ代ヘ,

$$ {}_nP_{r-1}={}_nP_{r-2}(n-r+2) $$

....

$$ {}_nP_3={}_nP_2(n-2) $$

$$ {}_nP_2={}_nP_1(n-1) $$

又 $$ {}_nP_1=n $$

此等ノ式ヨリ掛ケ算ニヨリテ,次ノ公式ヲ得。

$$ {}_nP_r=n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1) $$

特ニ n 個ノ物ノ全體ヲ,アラユル順序ニ竝ブルトキハ,其順列ノ數ハ次ノ如シ。

$$ {}_nP_n=n(n-1)\ldots\ldots3.2.1 $$

卽チ ${}_nP_n$ ハ 1 ヨリ n マデノ整數ノ累乘積ニ等シ。カヤウノ累乘積ヲ n ノ**階乘**トイヒ, $\underline{|n}$ (又ハ $n!$) ナル記號ニテ之ヲ表ス。卽チ

$$ {}_nP_n=\underline{|n} $$

例ヘバ

$$ {}_3P_3=\underline{|3}=1\times2\times3=6 $$

又 $$ {}_4P_4=\underline{|4}=1\times2\times3\times4=24 $$

例 題

1. a, b, c, d ナル四ツノ文字ヲ二ツヅツ採リテ作リ得ベキ順列ノ數ヲ計算セヨ。又此等ノ順列ヲ書ケ。

2. 甲乙丙ナル三ツノ物ヲ盡ク採リテ作リ得ベキ順列ノ數ヲ求メヨ。又此等ノ順列ヲ書ケ。

3. 十人ノ生徒ヲ一列ニ竝バシムル仕方ハ幾通リアルカ。

4. 五種ノ色ヲ用ヒテ三箇國ノ地圖ニ,國別ニ著色スル仕方ハ幾通リアルカ。

21. 盡クハ異ナラザル物ノ順列。

例ヘバ,a ナル文字 3 個,b ナル文字 2 個,合ハセテ 5 個ノ文字アルトキ,此等ノ文字ヲ盡ク取リテ,之ヲ種種ノ順序ニ竝ブル仕方ハ幾通リアルカ。

求ムル順列ノ數ヲ x トス。

今此等ノ順列ノ中ノ一ツ,例ヘバ

aabab (1)

ヲ取リ,此中 b ハ其ママトナシ,三個ノ a ノ代ニ a_1,

a_2, a_3 ヲ入ルル仕方ハ $\underline{|3}$ 即チ6通リアリ。(1)ノ如キ順列 x 個アル其一ツ一ツニツキテ,カヤウニスルトキハ,全體ニテ $x\times\underline{|3}$ 個ノ相異ナル順列ヲ生ズ。是レ即チ a_1, a_2, a_3 及ビ二個ノ b, 合ハセテ五個ノ文字ノ順列ノ全體ナリ。此等ノ順列ノ中一ツ,例ヘバ

$$a_3a_1ba_2b \qquad (2).$$

ヲ採リ,此中ノ二個ノ b ノ代ニ b_1, b_2 ヲ入ルル其仕方ハ $\underline{|2}$ 即チ2通リアリ。(2)ノ如キ順列 $x\times\underline{|3}$ 個アル其一ツ一ツニツキテ,カヤウニスルトキハ,全體ニテ $x\underline{|3}\,\underline{|2}$ 個ノ相異ナル順列ヲ生ズ。是レ即チ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 ナル五個ノ相異ナル文字ノ順列ノ全體ナリ。而シテ五個ノ相異ナル文字ノ順列ノ數ハ $\underline{|5}$ ナリ。

ヨリテ, $$x\underline{|3}\,\underline{|2}=\underline{|5}$$

故ニ $$x=\frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\,\underline{|2}}=10$$

即チ求ムル順列ノ數ハ十個ナリ。(此等ノ順列ヲ書ケ)。

一般ニ,

a ナル文字 p 個, b ナル文字 q 個, c ナル文字 r 個....ヲ,盡ク取リテ作リ得ベキ順列ノ數ハ

$$\frac{\underline{|p+q+r+\ldots\ldots}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}\ldots\ldots\ldots}$$

ナリ。

例ヘバ 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3 ナル九個ノ數字ヲ盡ク竝ベテ作リ得ベキ九桁ノ數ハ,

$$\frac{\underline{|9}}{\underline{|2}\,\underline{|4}\,\underline{|3}}=1260$$

個アリ。

例題

1. a, b ナル文字各〻三個ヲ一列ニ竝ブル仕方幾通リアルカ。又此等ノ順列ヲ盡ク書キ列ベヨ。

2. Akasaka ナル語ノ文字ヲ種々ニ並ベ換フル仕方幾通リアルカ。

22. 組合ハセ。

例ヘバ五錢,二錢,一錢ナル三種ノ貨幣一個ヅツアルトキ,此中,二ツノ貨幣ヲ取リテ,幾通リノ金高ヲ作リ得ベキカ。

カヤウノ場合ニハ,三ツノ物ヨリ二ツノ物ヲ選ミ出ス仕方ガ幾通リアルカヲ問フモノニシテ,選ミ出シタル二ツノ物ノ順序ハ問フ所ニアラズ。

一般ニ甲乙丙ナル三ツノ物ノ中ヨリ,二ツノ物ヲ選ミ出ス仕方ハ,

甲乙　　甲丙　　乙丙

ノ三通リノ外ニナシ。

相異ナル n 個ノ物ノ中ヨリ,r 個ノ物ヲ選ミ出スコトヲ,n 個ノ物ヨリ r 個ヅツノ**組合ハセ**ヲ作ルトイヒ,其數ヲ表スニ

$${}_nC_r$$

ナル記號ヲ用フ。

例ヘバ　　${}_3C_2=3$

23. 組合ハセノ數。

組合ハセノ數ヲ求ムルニハ,之ヲ順列ノ數ト比較スルヲ便ナリトス。

n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ヅツ選ミ出シテ,${}_nC_r$ ダケノ組合ハセヲ得。サテ此等ノ組合ハセノ一ツ一ツヲ取リ,其 r 個ノ物ヲ種種ノ順序ニ竝ブルトキハ,n 個ノ物ノ r 個ヅツノ順列ヲ,重複モナク遺漏モナク作リ得ベシ。

ヨリテ　　$({}_nC_r)(\underline{|r}) = {}_nP_r$

故ニ　　$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{\underline{|r}} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots r}$$

是レ組合ハセノ數ヲ求ムル公式ナリ。或ハ此公式ノ右邊ノ商ノ除數及ビ被除數ニ $\underline{|n-r}$ ヲ乘ジ,

$${}_nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}$$

ヲ得。

例　題

1. a, b, c, d ナル四ツノ物ヨリ二ツヅツノ組合ハセノ數ヲ求メヨ。又此等ノ組合ハセヲ書キ竝ベヨ。

2. 二十人ノ生徒ノ中ヨリ運動會ノ委員三人ヲ選ミ出ス仕方ハ幾通リアルカ。

3. n 個ノ物ノ中ヨリ r 個ヅツヲ選ミ出スモ,又ハ $n-r$ 個ヅツヲ選ミ出スモ,其仕方ハ同數ナルコトヲ説明セヨ。

問　題　第　五

1. $\dfrac{|\underline{22}}{|\underline{17}}$, $\dfrac{|\underline{7}}{|\underline{3}\ |\underline{4}}$ ヲ計算セヨ。

2. ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$ ナルコトヲ示セ。

3. 書籍十二冊ノ中,二冊物二部,三冊物一部アリ。續キ物ガ順序正シク一所ニアルヤウニ,之ヲ並ブル仕方幾通リアルカ。

4. 二十人ノ生徒ノ中ヨリ,五人ヲ選ミ出スニ,太郎,二郎ナル兄弟ガ同時ニ選ニ入ラヌヤウニセントス。此選ミ方幾通リアルカ。

5. 七ツノ珠ヲ輪ニ繋グ仕方幾通リアルカ。

6. 會員三十人ノ中ヨリ會長一人,委員四人ヲ選ミ出ス仕方ハ幾通アルカ。

7. 1, 2, 3, 4, 5 ナル數字ノミヲ用ヒテ,三桁ノ數幾ツヲ作リ得ルカ。

8. 白赤青三種ノ色ノ中,二ツヲ取リ,之ヲ左右ニ竝ブルトキ,白白,白赤,赤白等ノ如キ配合ハ幾ツ出來ルカ。

9. Mississippi トイフ語ノ文字ヲ竝ベテ幾通リノ順列ヲ得ベキカ。又其中 i トイフ文字ガ續キテ竝ベルモノヲ省クトキハ,如何。

10. 甲組五人,乙組六人ニテろんてにすヲナストキノ番組ハ幾ツ出來ルカ。

11. 將校五人,兵卒百人ノ中ヨリ或任務ノタメニ,將校一人,兵卒十五人ヲ選ミ出サントス。其選ミ方幾通リアルカ。

12. 二十錢貨幣三個,十錢貨幣二個,五錢貨幣四個,一錢貨幣五個ノ中ヨリ二個ノ貨幣ヲ取リテ,幾通リノ金高ヲ作ルコトヲ得ルカ。

13. n 角形ノ對角線ハ幾ツアルカ。

14. 平面上ニ n 個ノ直線ヲ引クトキハ,幾個ノ三角形ガ出來ルカ。但此等ノ直線ノ中,互ニ平行ナルモノナク,又三ツ以上同一ノ點ヲ通ルモノナシトス。

15. $2n$ 個ノ物ヲ n 對ニ分ツ仕方幾通リアルルカ。

24. 二項式ノ連乗積。

例ヘバ,

$$(x+a)(x+b)\dots\dots\dots(x+l)$$

ノ如キ n 個ノ二項式ノ連乗積ヲ求ムルニハ,各〻ノ因數ヨリ一ツヅツノ項ヲ取リ出シ,之ヲ掛ケ合ハセテ得タル,アラユル積ノ和ヲ作レバヨシ。

サテ,カヤウニシテ作リタル積ヲ x ノ降冪ニ排列セントス。

先ヅ各〻ノ因數ヨリ x ヲ採ルトキハ,x^n ヲ得。是レ卽チ連乗積ニ於ケル x ノ最高冪ナリ。

次ニ x^{n-1} ノ項ヲ求ムルニ,n 個ノ因數ノ中 $n-1$ 個ヨリハ x ヲ採リ,殘レル一ツノ因數ヨリハ x ニアラザル項ヲ採リテ,

$$ax^{n-1},\ bx^{n-1},\ cx^{n-1},\ \dots\dots,\ lx^{n-1}$$

ナル積ヲ作リ,之ヲ集メテ,

$$(a+b+c+\dots\dots\dots+l)x^{n-1}$$

ヲ得。

次ニ又 x^{n-2} ノ項ヲ求ムルニハ,$n-2$ 個ノ因數ヨリ x ヲ採リ,殘レル二ツノ因數ヨリハ x ニアラザル項ヲ採リタル積

$$abx^{n-2},\ acx^{n-2},\ \dots\dots,\ bcx^{n-2},\ \dots\dots$$

ヲ集ムベシ。カヤウニシテ,

$$(ab+ac+\dots\dots+bc+\dots\dots)x^{n-2}$$

ヲ得。此係數ヲ組立ツル項 $ab,\ ac,\ \dots\dots,\ bc,\ \dots\dots$ ハ $a,\ b,\ c,\ \dots\dots,\ l$ ナル n 個ノ文字ヲ二ツヅツ採リテ作レル,スベテノ組合ハセニ外ナラズ。故ニ其項ノ數ハ ${}_nC_2$ ナリ。

一般ニ,x^{n-k} ノ係數ハ $a,\ b,\ c,\ \dots\dots,\ l$ ナル n 個ノ文字ノ中ヨリ k 個ヅツノ文字ヲ採リテ作リ得ベキ,スベテノ積ノ和ニシテ,其項ノ數ハ ${}_nC_k$ ナリ。

例ヘバ

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$$

25. 二項式定理。

前節ニテ求メタル連乗積ニテ,$a,\ b,\ c,\ \dots\dots,\ l$ ヲ盡ク a ニ等シトスルトキハ,x^{n-1} ノ係數ハ a ナル項 ${}_nC_1$ 個ノ和,卽チ

$${}_nC_1\,a$$

又 x^{n-2} ノ係數ハ aa ナル積 ${}_nC_2$ 個ノ和,卽チ

$${}_nC_2\ a^2$$

ニシテ,一般ニ x^{n-k} ノ係數ハ a^k ナル項 ${}_nC_k$ 個ノ和,即チ

$${}_nC_k\ a^k$$

ナリ, 故ニ

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+\ldots\ldots$$
$$+{}_nC_ka^kx^{n-k}+\ldots\ldots+{}_nC_{n-1}a^{n-1}x+a^n$$

又ハ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)}{1.2\ldots\ldots k}a^kx^{n-k}+\ldots+na^{n-1}x+a^n$$

指數 n ノ小ナル値ニ對スル $(x+a)^n$ ノ展開ノ係數ヲ順次ニ並ベ書クトキハ,次ノ如シ。

n	係　　數
1	1, 1
2	1, 2, 1
3	1, 3, 3, 1
4	1, 4, 6, 4, 1
5	1, 5, 10, 10, 5, 1
6	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1
7	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1
8	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

例一。 $(x\pm a)^5=x^5\pm 5ax^4+10a^2x^3\pm 10a^3x^2+5a^4x\pm a^5$

例二。 $19^5=(20-1)^5$

$$=20^5-5\times 20^4+10\times 20^3-10\times 20^2+5\times 20-1$$
$$=3280100-804001=2476099$$

例三。 $(1-x+x^2)^4=\{(1-x)+x^2\}^4$

$$=(1-x)^4+4(1-x)^3x^2+6(1-x)^2x^4+4(1-x)x^6+x^8$$
$$=1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$$

問　題　第　六

1. $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ ヲ x ノ降冪ニ展開セヨ。

2. $(x+m)(x-n)(x+p)(x-q)$ ヲ x ノ降冪ニ展開セヨ。

3. 次ノ式ヲ展開セヨ。

(1) $(x-y)^5$　(2) $(a^2-1)^4$　(3) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$

(4) $(a+xy)^6$　(5) $(1+a+a^2)^3$　(6) $\left(x+1+\frac{1}{x}\right)^4$

4. 次ノ數ヲ計算セヨ。

(1) 99^4　(2) 102^5

5. $\{x+\sqrt{x^2-1}\}^6+\{x-\sqrt{x^2-1}\}^6$ ヲ簡單ニセヨ。

6. $(x-1+x^{-1})^5$ ノ展開ニ於テ, x ヲ含マザル項ヲ求メヨ。

第五章

雜　題

26. 齊次式及ビ對稱式。

二ツ以上ノ文字ニツキテノ整式ニ於テ,其各項ノ次數ガ齊シキトキハ此整式ハ此等ノ文字ニツキテ**齊次**ナリトイフ(下卷139頁)。

例ヘバ $3x+2y$, $ax^2+2bxy+cy^2$ ハ x, y ニツキテ齊次,又 x^2-yz ハ x, y, z ニツキテ齊次ナリ。

齊次式ノ積ハ齊次ナリ。又因數ノ中齊次ナラザルモノアルトキハ,積モ亦齊次ナラズ。故ニ齊次ノ多項式ガ齊次ナラザル因數ヲ有スルコトナシ。

二ツ以上ノ文字ニツキテノ整式(又ハ分數式)ガ此等ノ文字ヲ如何ヤウニ交換シテモ變ゼザルトキハ,此整式ヲ此等ノ文字ノ**對稱式**トイフ。

例ヘバ $x+y$, xy, $(x-y)^2$ ハ x, y ノ對稱式ニシテ, $x^3+y^3+z^3-3xyz$, $(y+z)(z+x)(x+y)$ ハ x, y, z ノ對稱式

ナリ。

又 $(a-c)(b-c)$ ハ a, b, c ノ對稱式ニアラズ,サレド a, b ナル二ツノ文字ノミニツキテイフトキハ,此式ハ a, b ノ對稱式ナリ。

同ジ文字ニツキテノ對稱式ノ和,差,積,商ハ對稱式ナリ。サレド其逆ハ必ズシモ眞ナラズ。例ヘバ, $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ ナル積ハ x, y, z ノ對稱式ナレドモ各因數ハ然ラズ。

式ノ齊次ナルコト,又ハ對稱ナルコトニ着眼シテ,計算ノ誤ヲ避ケ,又ハ計算ノ結果ヲ豫知シテ其手續ヲ短縮シ得ベキ場合少カラズ。

例一。 $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$ ヲ簡單ニセヨ。

此式ハ a, b, c ニツキテ齊次二次,且對稱ナルガ故ニ,之ヲ整頓スルトキハ必ズ

$$M(a^2+b^2+c^2)+N(ab+ac+bc)$$

ナル形トナルベシ。但 M, N ハ數字係數ニシテ,問題ハ此等二ツノ數 M, N ヲ定ムルコトニ歸着ス。サテ與ヘラレタル式ヲ一見シテ a^2 ノ係數ハ4,又 ab ノ係數ハ 0ナルコトヲ知ルベシ。

故ニ上ノ式ハ

$$4(a^2+b^2+c^2)$$

ニ等シ。

例二。$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

此式ノ始メノ二項ト終リノ二項トヲ別々ニ括リ,共各々 $y+z$ ニテ割リ切レルコトヲ知ル。故ニ $(y+z)$ ハ一ツノ因數ナリ。サテ上ノ式ハ x, y, z ニツキテ對稱ナルガ故ニ, $z+x$, $x+y$ ニテモ割リ切レルコトヲ知ル。且上ノ式ハ三次式ナルガ故ニ,因數分解ノ結果ハ次ノ如クナルベシ。

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=M(y+z)(z+x)(x+y)$$

但 M ハ或數字係數ナリ。M ヲ求ムルニハ x, y, z ニ隨意ノ數値ヲ與ヘテ上ノ等式ノ兩邊ヲ比較スベシ。今 $x=y=z=1$ ト置クトキハ

$$27-1-1-1=M\times 8$$

故ニ
$$M=3$$

ヨリテ

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(y+z)(z+x)(x+y)$$

例　　題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。[1—2]

1. $(x+y+z)^2-(y+z)^2-(z+x)^2-(x+y)^2+x^2+y^2+z^2$

2. $(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3+x^3+y^3+z^3$

3. 次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ。

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3x^2z+3xz^2$$
$$+3y^2z+3yz^2+6xyz$$

27. 因數分解ノ續キ。(一)

整式ノ項ヲ適當ニ排列シテ其因數ヲ發見シ得ル場合ハ上卷第四編ノ問題ニ於テ屢々遭遇セル所ナリ。サテ項ヲ如何ヤウニ排列スベキカハ場合ニヨリテ異ナリ,一般ノ方法ヲ示スコト難シ。サレド多クノ場合ニ於テハ整式ヲ或文字ノ降冪ニ排列スルヲ最合理的トスベシ。特ニ或文字ノ二次式ハ二次方程式ノ解法ヲ應用シテ因數ニ分解スルコトヲ得(下卷,第103節,參照)。

例一。$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ ヲ因數ニ分解セヨ。

x ノ降冪ニ排列シテ,

$$(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+(y^2z-z^2y)$$
$$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$$
$$=(y-z)(x-y)(x-z)$$

例二。 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$ ヲ因數ニ分解セヨ。

此式ハ x ノ二次式ナリ。x ノ降冪ニ排列シテ

$$(y+z)x^2+\{(y+z)^2+yz\}x+yz(y+z)$$

ヲ得。此式ヲ 0 ニ等シト置キテ作レル二次方程式ヲ解キテ x ヲ求ムルトキハ,

$$\frac{-\{(y+z)^2+yz\}\pm\sqrt{\{(y+z)^2+yz\}^2-4yz(y+z)^2}}{2(y+z)}$$
$$=\frac{-\{(y+z)^2+yz\}\pm\{(y+z)^2-yz\}}{2(y+z)}$$
$$=\frac{-yz}{y+z} \text{ 又ハ } -(y+z)$$

ヲ得。故ニ與ヘラレタル式ハ

$$(y+z)\left\{x+\frac{yz}{y+z}\right\}\{x+(y+z)\}$$

卽チ $$(xy+xz+yz)(x+y+z)$$

ニ等シ。(下卷,第103節,57頁ノ定理ニ於ケル α, α,β ガ $y+z$, $-\frac{yz}{y+z}$, $-(y+z)$ ニ該當ス)。

【注意】 上ニ示セルハ合理的ノ方法ナレドモ,或ハ又與ヘラレタル式ガ對稱式ナルコトニ着眼シテ,$x+y+z$ ナル因數ヲ有セズヤト猜シ,其推察ニ基キテ次ノ如キ計算ヲ試ムルコトヲ得。

今便利ノ爲メ,$x+y+z=s$ ト置クトキハ,

$$(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(s-x)(s-y)(s-z)+xyz$$
$$=s^3-s^2(x+y+z)+s(xy+xz+yz)-xyz+xyz$$
$$=s^3-s^3+s(zy+xz+yz)$$
$$=(x+y+z)(xy+xz+yz)$$

斯ノ如キ方法ハ僥倖ニシテ所要ノ結果ニ達シ得タルモノト謂フベシ。

例三。 $x^2-5xy-x+6y^2+y-2$ ヲ因數ニ分解セヨ。

與ヘラレタル式ヲ 0 ニ等シト置キテ作レル二次方程式ニ於テ x ヲ未知數ト見做シ,解クトキハ,根ハ

$$\frac{1}{2}\{5y+1\pm\sqrt{(5y+1)^2-4(6y^2+y-2)}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{5y+1\pm\sqrt{y^2+6y+9}\}$$
$$=\frac{1}{2}\{5y+1\pm(y+3)\}$$

即チ

$$3y+2 \quad 及ビ \quad 2y-1$$

ナリ。故ニ因數分解ノ結果ハ次ノ如シ。

$$\{x-(3y+2)\}\{x-(2y-1)\}$$

例　　　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

1. $(a^2-b^2)(x^2-1)+4abx$
2. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
3. $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

28. 因數分解ノ續キ。(二)

二次方程式ヲ用ヒテ二次式ヲ因數ニ分解スルトキハ因數ハ根數(又ハ虛數)ヲ含ムコトアルベシ。次ニ因數ニ於ケル數字係數ガ根數又ハ虛數ナル一二ノ例ヲ示スベシ。

例一。x^4+1 ヲ實數ヲ係數トセル因數ニ分解セヨ。

$$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2$$
$$=\{(x^2+1)-x\sqrt{2}\}\{(x^2+1)+x\sqrt{2}\}$$
$$=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

例二。x^4-x^2+1 ヲ二ツノ二次因數ニ分解セヨ。

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2$$
$$=(x^2+1-x\sqrt{3})(x^2+1+x\sqrt{3})$$
$$=(x^2-x\sqrt{3}+1)(x^2+x\sqrt{3}+1)$$

又ハ

$$x^4-x^2+1=(x^2-1)^2+x^2=(x^2-1)^2-(-x^2)$$
$$=(x^2-1-x\sqrt{-1})(x^2-1+x\sqrt{-1})$$
$$=(x^2-x\sqrt{-1}-1)(x^2+x\sqrt{-1}-1)$$

例　　　題

次[illegible]ヲ實係數ヲ有スル因數ニ分解セヨ。

1. x^2+x-1　　　2. x^4+4
3. x^4+25y^4　　　4. $3x^4+8x^2y^2+12y^4$

29. 因數分解ノ續キ。(三)

整式ノ因數分解ニ剰餘ノ定理(1頁)ヲ應用スルコトヲ得。

例一。$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ヲ因數ニ分解セヨ。

此式ヲ a ニツキテノ整式ト見做シ, $a=b$ ト置クトキハ此式ハ 0 トナル。故ニ上ノ式ハ $a-b$ ニテ割リ切レル。同ジヤウニシテ上ノ式ハ $a-c$, $b-c$ ニテ割リ切レルコトヲ知ルベシ。

サテ上ノ式ハ a, b, c ニツキテ三次式ナルガ故ニ因數分解ノ結果ハ次ノ如クナルベシ。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=M(a-b)(a-c)(b-c) \qquad (1)$$

但 M ハ數字係數ナリ。兩邊ニ於ケル a^2b ノ係數ヲ比較シテ $M=1$ ナルコトヲ知ル。故ニ次ノ結果ヲ得。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$$

【注意】 a, b, c ニ特別ナル數値ヲ與ヘテ上ノ恒等式(1)ノ兩邊ヲ比較シテ M ヲ求ムルコトヲ得。

例ヘバ $a=0, b=1, c=2$ トスルトキハ

$$-2=M\times -2$$

故ニ $\qquad M=1$

a, b, c ニ與フベキ數値ハ隨意ナリ。但 a, b, c ヲ盡ク相異ナル數トナスコトヲ要ス。然ラザレバ(1)ノ兩邊ハ 0 トナリ, M ノ値ヲ定ムルコトヲ得ザルベシ。

例二。 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ヲ因數ニ分解セヨ。

前ノ例ト同ジヤウニシテ上ノ式ハ $(a-b)(a-c)(b-c)$ ニテ割リ切レルコトヲ知ル。又其商ガ a, b, c ニツキテ一次ノ齊次式ナルコトハ睹易キ所ナリ。即チ

$$\mathrm{A}=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$\mathrm{P}=(a-b)(a-c)(b-c)$$

ト置クトキハ,

$$\mathrm{A}=\mathrm{P}.\mathrm{Q} \qquad (1)$$

ニシテ Q ハ a, b, c ノ齊次一次式,即チ

$$La+Mb+Nc$$

ノ如キ形ヲナスベシ。但 L, M, N ハ或數字係數ナリ。

サテ(1)ハ恒等式ナルコトヲ要スルガ故ニ a, b ナル二ツノ文字ヲ彼是交換スルトモ,其結果ハ仍正シ。a, b ヲ交換スルトキハ A モ P モ共ニ其符號ヲ變ズルニ止マルガ故ニ, Q ハ a, b ヲ

交換スルトモ變ズルコトナシ。故ニ $L=M$ 同ジヤウニ a, c ヲ交換シテ $L=N$ ナルコトヲ知ル。卽チ $L=M=N$ ニシテ Q ハ a, b, c ノ對稱式ナリ。故ニ

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=L(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$

兩邊ニ於ケル a^3b ノ係數ヲ比較シテ數字係數 L ハ 1 ナルコトヲ知ル。

ヨリテ

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$

例三。 $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ ヲ因數ニ分解セヨ。

例二ト同ジヤウニシテ,上ノ式ハ $(a-b)(a-c)(b-c)$ ニテ割リ切レ,其商ハ a, b, c ニツキテ齊次二次ノ對稱式ナルコトヲ知ルベシ。卽チ

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+ac+bc)\}$$

數字係數 L, M ヲ定ムルニハ,次ノヤウニスルコトヲ得。上ノ等式ニ於テ $c=0$ トスルトキハ,此等式ハ二ツノ文字 a, b ヲ含メル恒等式トナルベシ。ヨリテ

$$a^4b-b^4a=ab(a-b)\{L(a^2+b^2)+Mab\}$$

左邊ヲ因數ニ分解シ

$$a^4b-b^4a=ab(a-b)\{(a^2+b^2)+ab\}$$

故ニ $L=1,\quad M=1$

ヨリテ

$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$$

一般ニ指數 n ガ任意ノ正ノ整數ナルトキ

$$a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$$

ハ $(a-b)(a-c)(b-c)$ ニテ割リ切レ,其商ハ a, b, c ノ齊次對稱式ナリ。(之ヲ證明セヨ)。

n ノ小ナル値ニ對スル次ノ恒等式ヲ記憶スベシ。

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$$
$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$$
$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$$

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$$
$$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$$
$$=(a-b)(a-c)(b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$$

【注意】上ノ等式ニ於テ a, c ノ差ハ左邊ニ於テハ $c-a$, 右邊 於テハ $a-c$ ナルコトニ注意スベシ。

例　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

1. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$
2. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
3. n ガ奇數ナルトキハ
$$(b-c)^n+(c-a)^n+(a-b)^n$$
ハ $(a-b)(a-c)(b-c)$ ニテ割リ切レルコトヲ證明セヨ。
4. 因數分解ニヨリテ次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ
$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$$

30. 前節ノ應用。

分數式ノ計算ニ於テ,因數分解ヲ應用スベキ場合少カラズ。次ノ等式ハヨク知ラレタルモノニシテ,第87頁ノ公式ニヨリテ直ニ其正シキコトヲ驗證スルコトヲ得。

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$

又

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

次ノ問題ハ此等ノ公式ノ應用ナリ。

例一。 次ノ分數式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{bc(x-a)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(x-b)^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(x-c)^2}{(c-a)(c-b)}$$

此式ヲ x ノ降冪ニ排列スルニ,先ヅ

x^2 ノ係數ハ

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

x ノ係數ハ

$$-2abc\left\{\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right\}=0$$

x ヲ含マザル項ハ

$$abc\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\right\}=0$$

故ニ上ノ分數式ハ x^2 ニ等シ。

例二。$\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)}+$

$\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$ ヲ簡單ニセヨ。

與ヘラレタル式ヲ次ノ如ク書クコトヲ得。

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}\left\{\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}\right.$$

$$\left.+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

大ナル括弧ノ中ノ式ヲ例一ニ於ケルガ如クx ノ降冪ニ排列スルトキハ

x^2 ノ係數ハ

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=0$$

x ノ係數ハ

$$-\left\{\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$=-\left\{\frac{a+b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{a+b+c}{(b-a)(b-c)}+\frac{a+b+c}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$+\left\{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\right\}$$

$$=0$$

x ヲ含マザル項ハ

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1$$

故ニ上ノ分數式ハ

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

ニ等シ。

例　題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

1. $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$

2. $\dfrac{x^4}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}+\dfrac{a^4}{(a^2-x^2)(a^2-b^2)}+\dfrac{b^4}{(b^2-x^2)(b^2-a^2)}$

3. $\dfrac{b+c-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a-b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b-c}{(c-a)(c-b)}$

4. $\dfrac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(c+a-b)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}$

5. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$

6. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$

31. 恒等式ニ關スル定理。

(一) 一ツノ文字 x ニツキテ n 次ノ整式

$$(\mathrm{P})\quad ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+kx+l$$

ガ x ニ n 個ノ相異ナル値 $\alpha,\beta\ldots\ldots\lambda$ ヲ與フルトキ, 0 トナルトキハ,此ノ整式ハ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)\ldots\ldots(x-\lambda)$$

ニ等シ。

證。剩餘ノ定理ニヨリ整式 P ハ $x-\alpha, x-\beta, \ldots\ldots x-\lambda$ ニテ割リ切レル。サテ $\alpha,\beta,\ldots\ldots\lambda$ ハ盡ク相異ナルガ故ニ P ハ $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots\ldots(x-\lambda)$ ニテ割リ切レル。其商ノ a ニ等シキコトハ睹易シ。

(二) P ノ如キ整式ニ於テ x ニ n 個ヨリモ多クノ相異ナル値 $\alpha,\beta\ldots\ldots\lambda,\mu$ ヲ與フルトキ, P ガ 0 トナルトキハ, P ニ於ケル各係數 $a,b,\ldots\ldots k,l$ ハ 0 ニ等シ。

證。假ニ係數 a ハ 0 ニ等シカラズトスルトキハ上ノ定理ニヨリ

$$\mathrm{P}=a(x-\alpha)(x-\beta)\ldots\ldots(x-\lambda)$$

サテ x ヲ μ トスルトキニモ, P ハ 0 トナルトイフガ故ニ

$$0=a(\mu-\alpha)(\mu-\beta)\ldots\ldots(\mu-\lambda)$$

然ルニ $a, \mu-\alpha, \mu-\beta\ldots\ldots\mu-\lambda$ ハ 0 ニ等シカラズトセルガ故ニ是レ不合理ナリ。

故ニ a ハ 0 ニ等シ。同ジヤウニ $b,\ldots\ldots k, l$ ノ 0 ニ等シキコトヲ知ルベシ。

(三) 一ツノ文字 x ニツキテ n 次ノ整式

$$(\mathrm{P})\quad ax^n+bx^{n-1}+\ldots\ldots+kx+l$$

$$(\mathrm{Q})\quad a'x^n+b'x^{n-1}+\ldots\ldots+k'x+l'$$

ニ於テ x ニ n ヨリモ多クノ相異ナル値ヲ與フルトキ, P, Q ノ値ガ相等シキトキハ, P, Q ハ同一ノ整式ナリ。即チ

$$a=a',\ b=b',\ldots\ldots k=k',\ l=l'$$

證。$\mathrm{P}-\mathrm{Q}=(a-a')x^n+(b-b')x^{n-1}+\ldots\ldots+(k-k')x+(l-l')$ ハ x ニ n ヨリモ多クノ相異ナル値ヲ與フルトキ 0 トナル。故ニ(二)ニヨテ,各係數

$$a-a',\ b-b',\ldots\ldots l-l'$$

ハ 0 ニ等シ。即チ $a=a',\ b=b',\ldots\ldots l=l'$

之ヨリ推シテ次ノ定理ヲ得。

二ツノ多項式ガ文字ニ如何ナル數値ヲ與フルトモ,恒ニ相等シキ値ヲ採ルトキハ此等ノ多項式ヲ整頓スルトキハ全ク同一ノ式トナル。

例一。次ノ式ガ恒等式トナルヤウニ數字係數 $a,\ b,\ c$ ヲ定メヨ。

$$x^2-4x+3=a+b(x-1)+c(x-1)^2$$

右邊ヲ整頓スルトキハ

$$cx^2+(b-2c)x+(a-b+c)$$

故ニ

$$c=1,\ b-2c=-4,\ a-b+c=3$$

即チ $\qquad a=0,\ b=-2,\ c=1$

或ハ上ノ等式ノ兩邊ハ x ニ如何ナル値ヲ與フルトモ相等シクナルコトニ着眼シテ $x=0$, $x=1$, $x=3$ トスルトキハ

$$a-b+c=3,\ a=0,\ a+2b+4c=0$$

是ヨリ $\qquad a=0,\ b=-2,\ c=1$

例二。p,q ニ如何ナル値ヲ與フルトキ次ノ式ハ完全ナル平方トナルカ。

$$4x^4+12x^3y+px^2y^2+qxy^3+y^4$$

與ヘラレタル式ヲ

$$(2x^2+axy+by^2)^2$$

ニ等シト置キ,展開シテ係數ヲ比較シ

$$4a=12 \qquad (1)$$

$$a^2+4b=p \qquad (2)$$

$$2ab=q \qquad (3)$$

$$b^2=1 \qquad (4)$$

(1)(4) ヨリ $a,\ b$ ヲ求メ之ヲ (2)(3) ニ代入シ

$$a=3,\ b=1;\ p=13,\ q=6$$

又ハ $\qquad a=3,\ b=-1;\ p=5,\ q=-6$

ヲ得。

例 題

次ノ恒等式ニ於テ數字係數 $a,\ b,\ c\ldots\ldots$ ノ値如何。

1. $x^2-6x-15=a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+c(x-3)(x+2)$

2. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$

3. $\dfrac{5x^2+9x-32}{(x-1)(x-3)(x+2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-3}+\dfrac{c}{x+2}$

4. $\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$

5. p, q ガ如何ナル値ヲ有スルトキ,次ノ式ハ完全ナル平方ナルカ。

(1) $x^4-6x^3+px^2+qx+4$

(2) $4x^4+8x^3+px^2-24x+q$

(3) $x(x+1)(x-1)(x-p)+q$

32. 最大公約數。

例。次ノ整式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(A) $2x^4+x^3-2x^2+2x-1$　　(B) $3x^3+2x^2-4x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x,\ 1 \\
3x^3+2x^2-4x+1 & 2x^4+x^3-2x^2+2x-1 \\
 & 6x^4+3x^3-6x^2+6x-3 \quad (\times 3 \\
 & 6x^4+4x^3-8x^2+2x \\
 & -x^3+2x^2+4x-3 \quad (\times -3 \\
 & 3x^3-6x^2-12x+9 \\
 & 3x^3+2x^2-4x+1 \\
 & -8x^2-8x+8 \quad (\div -8 \\
 & x^2+x-1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-1 \\
x^2+x-1 & 3x^3+2x^2-4x+1 \\
 & 3x^3+3x^2-3x \\
 & -x^2-x+1 \\
 & -x^2-x+1
\end{array}
$$

最大公約數 x^2+x-1

(驗)

$$(2x^4+x^3-2x^2+2x-1)\div(x^2+x-1)=2x^2-x+1$$

$$(3x^3+2x^2-4x+1)\div(x^2+x-1)=3x-1$$

上ノ演算ニ於テ (A) ヲ (B) ニテ割ラントスルニ,商ノ係數ハ分數トナル。ヨリテ A ニ 3 ヲ掛ケテ後割ルナリ。其割リ算ノ第一段ノ殘ヲ B ニテ割ラントスルニ,再ビ商ノ係數ガ分數トナルニヨリ,此殘ニ -3 ヲ掛ケテ後割リ,殘 $-8x^2-8x+8$ ヲ得。此式ヲ其各項ニ共通ナル數字因數 -8 ニテ割リ x^2+x-1 ヲ得。是ニテ B ヲ割ルニ殘ナシ。ヨリテ x^2+x-1 ヲ求ムル最大公約數トスルナリ。

カヤウニ最大公約數ヲ求ムル演算ニ於テ,除數又ハ被除數ヲ適當ナル數字因數ニテ乘除シテ,分數ノ數字係數ヲ避クルコトヲ得。

【注意】 A, B ガ一ツノ未知數 x ニツキテノ整式ナルトキハ,二ツノ方程式

$$A=0,\ B=0$$

ハ必ズシモ共通ノ根ヲ有スルモノニアラズ。サレド若シ此等ノ方程式ニ共通ノ根アルトキ

ハ,即チ例ヘバ$x=\alpha$ガ共通ノ根ナルトキハ,整式A,Bハ各$x-\alpha$ニテ割リ切レル(第1節,3頁參照)即チ$x-\alpha$ハ整式A, Bノ公約數ナリ。又逆ニ$x-\alpha$ガ整式A,Bノ公約數ナルトキハ$x=\alpha$ハ方程式A=0, B=0ニ共通ナル根ナリ(同上參照)。故ニ二ツノ方程式A=0, B=0ノ共通ノ根ヲ求ムルニハA, Bノ最大公約數Gヲ求メ,方程式G=0ヲ解ケバヨシ。

上ノ例ニ擧ゲタル整式A, Bヲ0ニ等シト置キテ作レル方程式

$$2x^4+x^3-2x^2+2x-1=0$$

$$3x^3+2x^2-4x+1=0$$

ニ共通ナル根ハ,其最大公約數x^2+x-1ヲ0ニ等シト置キテ作レル方程式

$$x^2+x-1=0$$

ノ根ニ外ナラズ。即チ上ノ二ツノ方程式ハ二ツノ根ヲ共有ス。

$$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

即チ是ナリ。

例　題

次ノ式ノ最大公約數ヲ求メヨ。[1-4]

1. $x^3-2x-1,\ x^3-2x^2+1$

2. $8x^3+1,\ 16x^4+4x^2-2$

3. $3x^3-13x^2+23x-21,\ 6x^3+x^2-44x+21$

4. $24x^4-2x^3-60x^2-32x,\ 18x^4-6x^3-39x^2-18x$

次ノ分數式ヲ約分セヨ。[5-6]

5. $\dfrac{3x^3-13x^2+20x-14}{15x^3-38x^2-2x+21}$

6. $\dfrac{6x^3-x^2+16}{8x^3-14x^2+19x-4}$

7. 次ノ二ツノ方程式ニ共通ナル根ヲ求メ,且各方程式ヲ解ケ。

$$x^3-7x+6=0,\ 5x^3-7x^2+2=0$$

33. 整數ノ平方及ビ立方ノ和。

1ヨリnニ至ル整數ノ平方ノ和ハ次ノ公式ニヨリテ求ムルコトヲ得。

$$1^2+2^2+\ldots\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

此公式ハ次ノヤウニシテ證明スルコトヲ得。

先ヅnガ1, 2等ノ如キ小ナル整數ナルトキハ,

上ノ公式ノ兩邊ヲ計算シテ容易ニ共正シキコトヲ驗スコトヲ得。卽チ

$$n=1,\qquad 1^2=1,\ \frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$$

$$n=2,\ 1^2+2^2=5,\ \frac{1}{6}\times2\times3\times5=5$$

サレド,カヤウニシテハ上ノ公式ガ果シテ恒ニ正シキカ否カヲ確ムルコトヲ得ズ。

今$n=m$ナルトキ上ノ公式ガ正シキコトヲ假定スルトキハ,是ヨリ $n=m+1$ ナルトキニモ上ノ公式ノ正シキコトヲ證明スルコトヲ得ベシ。卽チ假定ニヨリ

$$1^2+2^2+\ldots\ldots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

故ニ

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+m^2+(m+1)^2&=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+(m+1)^2\\&=\frac{1}{6}(m+1)\{m(2m+1)+6(m+1)\}\\&=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)\end{aligned}$$

卽チ

$$1^2+2^2+\ldots\ldots+(m+1)^2$$
$$=\frac{1}{6}(m+1)\{(m+1)+1\}\{2(m+1)+1\}$$

是レ卽チ上ノ公式ガ$n=m+1$ナルトキニモ正シキコトヲ示スモノナリ。卽チ一般ニ,若シ上ノ公式ガ $n=m$ ナルトキニ正シカラバ,$n=m+1$ナルトキニモ上ノ公式ノ正シキコトヲ知ルベシ。

サテ上ノ公式ハ$n=1$ナルトキニ正シキガ故ニ,$n=2$ ナルトキニモ亦然リ。從テ$n=3$ナルトキニモ亦正シ。次第ニカヤウニシテ,上ノ公式ハnガ如何ナル整數ナリトモ,恒ニ正シキコトヲ知ルベシ。

カヤウノ證明ノ方法ヲ**數學的歸納法**トイフ。

同ジヤウニシテ次ノ公式ヲ證明スルコトヲ得。

$$1^3+2^3+\ldots\ldots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

例 題

次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ。

1. $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

2. $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

34. 相加及ビ相乘平均數。

n 個ノ正數ノ和ノ n 分ノ一及ビ積ノ n 乘根(ノ正ノ値)ヲ此等ノ正數ノ相加平均數及ビ相乘平均數トイフ。

定理。 n 個ノ正數ノ相加平均數ハ一般ニ其相乘平均數ヨリモ大ナリ。但此等ノ正數ガ盡ク相等シキトキニ限リ,兩者相等シ。

卽チ $a, b, c, \ldots\ldots l$ ガ盡クハ相等シカラザル n 個ノ正數ナルトキハ

$$\frac{a+b+c+\ldots\ldots+l}{n}>\sqrt[n]{abc\ldots\ldots l}$$

證。 二個ノ正數ノ場合ニ此定理ヲ證明スルコトハ容易ナリ。

卽チ $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2>0$$

故ニ $$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>ab$$

從テ $$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

今數學的歸納法ニヨリ此定理ノ一般ニ正シキコトヲ證明セントス。

卽チ n 個ヨリモ少數ノ正數ニツキテハ上ノ定理ハ正シト假定シ,此假定ニ基キテ n 個ノ正數ノ場合ニモ上ノ定理ノ正シキコトヲ證明スルナリ。

$a, b, c, \ldots\ldots l$ ヲ盡クハ相等シカラザル n 個ノ正數トシ,a ヲ其中最大ナル者(又ハ最大ナル者ノ中ノ一ツ)トセヨ。然ラバ

$$a>\frac{b+c+\ldots\ldots+l}{n-1} \tag{1}$$

サテ假定ニヨリ $n-1$ 個ノ正數 $b, c, \ldots\ldots l$ ニツキテハ上ノ定理ハ正シ,卽チ

$$\frac{b+c+\ldots\ldots+l}{n-1}\geqq\sqrt[n-1]{bc\ldots\ldots l} \tag{2}$$

今 $$\sqrt[n-1]{bc\ldots\ldots l}=p \tag{3}$$

ト置クトキハ (2) ニヨリテ

$$b+c+\ldots\ldots+l\geqq(n-1)p \tag{4}$$

又 (1)(2) ヨリ $$a>p \tag{5}$$

故ニ今

$$\frac{a-p}{np}=r$$

ト置クトキハ

r ハ正數

$$a=p(1+nr) \tag{6}$$

故ニ (6)(4) ニヨリ

$$a+b+c+\dots\dots l \geqq p(1+nr)+(n-1)p$$

故ニ
$$\frac{a+b+c\ \dots\dots+l}{n} \geqq p(1+r) \tag{7}$$

又 (3) ニヨリ $abc\dots\dots l=ap^{n-1}$

故ニ (6) ニヨリ

$$abc\dots\dots l=p^n(1+nr) \tag{8}$$

故ニ今

$$(1+r)^n>1+nr \tag{9}$$

ナルコトヲ證明シ得ベキトキハ (7), (8) ニヨリ

$$\left(\frac{a+b+c+\dots\dots+l}{n}\right)^n>abc\dots\dots l$$

又ハ
$$\frac{a+b+c+\dots\dots+l}{n}>\sqrt[n]{abc\dots\dots l}$$

卽チ上ノ定理ハ n 個ノ正數 $a, b, c, \dots\dots l$ ニツキテモ正シキコトヲ知ルベシ。

r ハ正數ナルガ故ニ, (9) ノ正シキコトハ容易ニ(二項式定理ニヨリテ,又ハ數學的歸納法ヲ用ヒテ)證明スルコトヲ得ベシ。

雜 題 集

次ノ式ヲ簡單ニセヨ。[1—3]

1. $(x+y+z)^2-x(y+z-x)-y(z+x-y)-z(x+y-z)$

2. $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+abc)-(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)$

3. $(a+b)^2(x+a-b)(x-a+b)$

$$+(a-b)^2(a+b+x)(a+b-x)$$

[x^2, x ノ係數及ビ x ヲ含マヌ項ヲ別々ニ整頓セヨ。x ヲ含マヌ項ハ上ノ式ニ於テ $x=0$ ト置キテ求メ得ベシ。]

次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ。[4—5]

4. $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$

$$=(bc'-b'c)^2+(ca'-c'a)^2+(ab'-a'b)^2$$

[兩邊ハイヅレモ a, b, c ノ齊次二次ノ式ナルコトニ着眼スベシ]。

5. $abcd(a+b+c+d)^2-(bcd+acd+abd+abc)^2$

$$=(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc)$$

6. $x=b+c-2a,\ y=c+a-2b,\ z=a+b-2c$ ナルトキ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

ノ値ヲ求メヨ。

7. $2s=a+b+c$ ナルトキ次ノ等式ノ正シコトヲ示セ。

(1) $s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2$

(2) $s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)$

$$-(s-a)(s-b)(s-c)=abc$$

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。[8—9]

8. (1) $(a+b)^2x^4-2(a^2+b^2)x^2y^2+(a-b)^2y^4$

(2) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

(3) $(x+y+z)(yz+xz+xy)-xyz$

9. (1) $x^2-xy-x+2y-2$

(2) $6x^2-11xy+3y^2-3x+8y-3$

(3) $2x^2-5xy+2y^2-ax-ay-a^2$

10. k ガ如何ナル數値ヲ有スルトキ

$$x^2-y^2+3x-7y+k$$

ヲ二ツノ一次因數ニ分解スルコトヲ得ルカ。

11. 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$

(2) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$

(3) $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ。[12—13]

12. (1) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

(2) $(bc+ca+ab)^3-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$

13. (1) $1-3x^2+2x^3$

(2) x^4-4x+3

14. $(x+y)^7-x^7-y^7$ ハ x^2+xy+y^2 ニテ割リ切レル。其商ヲ求メヨ。[二項式定理(73頁)ヲ用ヒ,因數分解ヲ應用セヨ]。

15. 次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ。

$$(a^2+b^2+c^2)^3+2(bc+ca+ab)^3-3(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)^2$$

$$=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$$

[左邊ハ $X^3+2Y^3-3XY^2$ ノ形ヲナセリ。其因數分解ヲ利用セヨ]。

16. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2}{ax^2+bx+c}$

(2) $\dfrac{x^3+3x^2-4x}{7x^3-18x^2+6x+5}$

(3) $\dfrac{3x^5-5x^3+2}{2x^5-5x^2+3}$

17. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $$\frac{bc(a+x)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(b+x)}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab(c+x)}{(c-a)(c-b)}$$

(2) $$\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$+\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{(c-a)(c-b)}$$

(3) $$a^2\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)}$$

(4) $$\frac{(1+xy)(1+xz)}{(x-y)(x-z)}+\frac{(1+yz)(1+yx)}{(y-z)(y-x)}+\frac{(1+zx)(1+zy)}{(z-x)(z-y)}$$

(5) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}$$

$$+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

(6) $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)(x-b)}$$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

18. 次ノ等式ノ正シキコトヲ示セ。

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$$

次ノ方程式ヲ解ケ。[19–39]

19. (1) $2(x+y+z)-3x=6$

$3(x+y+z)-2y=12$

$5(x+y+z)+4z=34$

[$x+y+z=s$ ト置キ, x, y, z ヲ s ノミヲ含メル式ニテ表ハシ, $x=\frac{2}{3}s-2,\ y=\frac{3}{2}s-6,\ z=-\frac{5}{4}s+\frac{17}{2}$ ヲ得。加ヘテ $s=\frac{11}{12}s+\frac{1}{2}$, 故ニ $s=6$, 前ノ式ニ代入シテ x, y, z ノ値ヲ得]。

(2) $x-3=2y-3=3z+2=xy+xz+yz$

20 (1) $x+y+z=a+b+c$

$bx+cy+az=a^2+b^2+c^2$

$cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2$

[$x-a=x',\ y-b=y',\ z-c=z'$ ト置キ, x', y', z' ヲ未知數トスルトキハ,幾分カ計算ヲ短縮スルコトヲ得]。

(2) $ax+by+cz=bx+cy+az=cx+ay+bz=a+b+c$

(3) $x+y+z=a+b+c$

$ax+by+cz=bc+ca+ab$

$bcx+cay+abz=3abc$

21. $x+ay+a^2z+a^3=0$

$x+by+b^2z+b^3=0$

$x+cy+c^2z+c^3=0$

[是ハ t ノ三次式 t^3+zt^2+yt+x ガ $t=a,\ t=b,\ t=c$ トナストキ0トナルヤウニ x, y, z ヲ定メントスルナリ。卽チ

$$t^3+zt^2+yt+x=(t-a)(t-b)(t-c)$$

ハ恒等式ナルベシ。ヨリテ右邊ヲ展開シ,左邊ト比較シテ $x=-abc,\ y=ab+ac+bc,$ $z=-(a+b+c)$ ヲ得]。

22. (1) $\dfrac{x}{a+m}+\dfrac{y}{b+m}=\dfrac{x}{a+n}+\dfrac{y}{b+n}=1$

[是ハ t ノ分數式

$$\frac{x}{a+t}+\frac{y}{b+t}-1$$

ガ $t=m,\ t=n$ ナルトキ0トナルヤウニ x, y ヲ定メントスルナリ。サテ上ノ式ハ

$$\frac{-t^2+\mathrm{A}t+\mathrm{B}}{(a+t)(b+t)}$$

ノ如キ形ヲナシ, $t=m,\ t=n$ トナストキ其分子ガ0トナルベキガ故ニ上ノ式ハ

$\dfrac{-(t-m)(t-n)}{(a+t)(b+t)}$ ニ等シカルベシ。卽チ

$$\frac{x}{a+t}+\frac{y}{b+t}-1=\frac{-(t-m)(t-n)}{(a+t)(b+t)}$$

分母ヲ拂ヒテ後 $t=-a$, 又 $t=-b$ トナシ

$$x=\frac{(a+m)(a+n)}{a-b},\quad y=\frac{(b+m)(b+n)}{b-a}$$ ヲ得]。

(2) $\dfrac{x}{a+k}+\dfrac{y}{b+k}=\dfrac{x}{a-k}+\dfrac{y}{b-k}=a-b$

23. (1) $x+y+z=1,\ ax+by+cz=p,\ a^2x+b^2y+c^2z=p^2$

[適當ナル數 l, m, n ヲ掛ケテ加ヘ y 及ビ z ヲ消去セントス。卽チ

$$l+mb+nb^2=0$$

$$l+mc+nc^2=0$$

是ヨリ $l:m:n=bc:-(b+c):1$ ヲ得。故ニ

$$\{bc-a(b+c)+a^2\}x=bc-p(b+c)p^2$$

$$x=\frac{(b-p)(c-p)}{(b-a)(c-a)}$$

同ジヤウニシテ y, z ヲ得]。

(2) $x+y+z+u=1,\qquad ax+by+cz+du=p,$

$a^2x+b^2y+c^2z+d^2u=p^2,\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u=p^3$

(3) $x+y+z=1,\ ax+by+cz=a+b+c,$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$$

24. (1) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}$

[先ヅ各分數式ヨリ 1 ヲ引ケ]。

(2) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x+6}{x-6}+\dfrac{x+9}{x-9}+3=0$

(3) $\dfrac{4x-3}{x-1}+\dfrac{3x-8}{x-3}=\dfrac{7x+2}{x}$

(4) $\dfrac{5x-21}{x-4}+\dfrac{8x-10}{2x-3}=\dfrac{6x-23}{2x-7}+\dfrac{6x-5}{x-1}$

25. (1) $\dfrac{1}{x-7}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+7}=0$

[先ヅ第一,第四ノ分數,第二,第三ノ分數ヲ別別ニ通分セヨ]。

(2) $\dfrac{a-x}{b}+\dfrac{b-x}{a}=\dfrac{a}{b-x}+\dfrac{b}{a-x}$

(3) $\dfrac{a-k}{x+2b}+\dfrac{b-k}{x+2a}=\dfrac{a+b-2k}{x+a+b}$

[右邊ヲ $\dfrac{a-k}{x+a+b}+\dfrac{b-k}{x+a+b}$ トシテ,項ヲ適當ニ集メヨ]。

26. (1) $x(x+a)(x+b)=k(k+a)(k+b)$

[$x=k$ ガ一ツノ根ナルコトニ注意スベシ]。

(2) $x(x-1)(x-3)=12$

27. (1) $\dfrac{2x-3}{3x-5}+\dfrac{3x-5}{2x-3}=\dfrac{5}{2}$

$\left[\dfrac{2x-3}{3x-5}=\mathrm{X}\right.$ ト置ケ$\left.\right]$。

(2) $\left(\dfrac{3x+4}{5}\right)^2-\dfrac{12}{5}x=8\dfrac{1}{5}$

$\left[\dfrac{3x+4}{5}\right.$ ヲ未知數トセヨ$\left.\right]$。

(3) $x^2+\sqrt{x^2-7x+18}=24+7x$

(4) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{3}{2}(x+1)$

28. (1) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=144$

[$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=h$ ノ如キ形ノ方程式ニ於テ $a+b=c+d$ ナルトキハ, $x^2+(a+b)x=\mathrm{X}$ ト置キテ先ヅ X ヲ求ムベシ]。

(2) $(x+a)(x+2a)(x-3a)(x-4a)=6a^4$

29. (1) $x^3+px^2+px+1=0$

(2) $ax^3+bx^2-bx-a=0$

(3) $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$

(4) $12(x^4+1)+89x^2=56x(x^2+1)$

30. (1) $(x+a)^4+(x-a)^4=16a^4$

[右邊ハ $\{(x+a)-(x-a)\}^4$ ニ等シキコトヲ利用セヨ]。

(2) $(a-x)^4+(b-x)^4=(a+b-2x)^4$

(3) $(a-x)^5+(b-x)^5=(a+b-2x)^5$

31. (1) $x+y+(x+y)^{\frac{1}{2}}=12,\ x^3+y^3=189$

[第一ノ方程式ハ $\sqrt{x+y}$ ヲ未知數トセル一元二次方程式ト見做スコトヲ得]。

(2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}=3,\ x^2-y^2=2x-1$

(3) $xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3},\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{20}{3}$

(4) $xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=13$

$xy-\dfrac{1}{xy}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=12$

(5) $ax^2+xy=2x+6,\ y^2+axy=2y-3$

32. (1) $x^2+y^2-xy+2(x+y)=17$

$3(x^2+y^2)-2xy+3(x+y)=42$

[カヤウニ二ツノ方程式ガ x, y ニツキテ對稱ナル場合ニハ $x+y=u,\ xy=v$ ト置キ,先ヅ u, v ヲ求ムベシ]。

(2) $(x^2+y^2)(x+y)=15,\ x^2+x+y^2+y=8$

(3) $x^3+x^2y+xy^2+y^3=888,\ x^2+y^2=74$

(4) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=9,\quad \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4}$

(5) $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=20,\ x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=65$

(6) $x^2+3xy+y^2=11,\ x^4-x^2y^2+y^4=13$

33. (1) $x+y=7,\ x^4+y^4=337$

[x^4+y^4 ヲ $(x+y)^4+pxy(x+y)^2+qx^2y^2$ ノ如キ形ニ書キ表ハシ,先ヅ xy ヲ求メヨ]。

(2) $x-y=4,\ x^4+y^4=82$

(3) $x+y=5,\ x^5+y^5=275$

(4) $(x+y)(x^3+y^3)=19,\ x^2+y=13$

(5) $x-y=2,\ (x^2+y^2)(x^3-y^3)=260$

34. (1) $5x^2+xy+2y^2=11x+2y$

$x^2-xy+4y^2=7x+4y$

[一ツノ方程式ノ左右兩邊ヲ交換シテ後邊邊掛ケ合ハセ x, y ノ齊次方程式ヲ得]。

(2) $3x^2-2xy+3y^2-x-12y=0$

$6x^2+3xy-2y^2-2x-29y=0$

(3) $x^2+xy+y^2=7(x+y)$

$x^2-xy+y^2=9(x-y)$

35. (1) $x+y-2z=1$

$x-2y+z=1$

$3x^2+y^2-4z^2=9$

(2) $x+y+z=a+b+c$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$

(3) $2x+y=5z$

$8x^2-4xy+y^2=10z^2$

$x^2+y^2+z^2=69$

[先ヅ第一,第二ノ方程式ヨリ $x:y:z$ ヲ求メヨ]。

36. (1) $xy-x-7y+2=0$

$5yz+3y+10z-3=0$

$6xz-6x+3z+1=0$

[第一,第二ノ方程式ニヨリテ y ヲ x, z ノミヲ含メル式ニテ表ハシ,ヨリテ y ヲ消去スルコトヲ得。其結果ヲ第三ノ方程式ト組ミ合ハセ x 及 z ヲ求ムベシ]。

(2) $xy+x+y=19,\ yz+y+z=29,\ xz+z+x=23$

[(1)ト同ジヤウニシテ解キ得ベシ。又ハ兩邊ニ1ヲ加ヘ因數ニ分解シテ $(x+1)(y+1)=20$, $(y+1)(z+1)=30$, $(x+1)(z+1)=24$ ヲ得。是ヨリ $x+1,\ y+1,\ z+1$ ヲ得]。

(3) $xy=a(x+y),\ yz=b(y+z),\ zx=c(z+x)$

(4) $yz=y-2z,\ xz=6z-x,\ xy=x-y$

(5) $x=\dfrac{3y-2}{2y-1},\ y=\dfrac{2z-1}{5z-2},\ z=\dfrac{4x-5}{13x-16}$

37. (1) $x^2-yz=a,\ y^2-zx=b,\ z^2-xy=c$

[恒等式 $y(x^2-yz)+z(y^2-zx)+x(z^2-xy)=0$, $z(x^2-yz)+x(y^2-zx)+y(z^2-xy)=0$ ヲ用ヒテ x, y, z ノ齊次一次ノ方程式二ツヲ得,ヨリテ $x:y:z$ ノ比ヲ定ムルコトヲ得]。

(2) $x^2-yz=ax,\ y^2-zx=by,\ z^2-xy=cz$

38. (1) $y^2+yz+z^2=1,\ z^2+zx+x^2=3,\ x^2+xy+y^2=7$

[$(y^2+yz+z^2)-(z^2+zx+x^2)=(y-x)(x+y+z)$ ヲ利用シ, $x+y+z=s$ ト置キ, x, y, z ヲ s ノミヲ含メル式ニテ表ハスコトヲ得。之ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入シテ s ヲ求ムベシ。37 (1) ノ問題モ同ジヤウニシテ解キ得ベシ]。

(2) $3x^2+2(y^2+z^2)=yz+12$

$3y^2+2(z^2+x^2)=zx+11$

$3z^2+2(x^2+y^2)=xy+14$

(3) $x(y+z-x)=9$

$y(x+z-y)=8$

$z(x+y-z)=5$

39. (1) $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}=2xyz$

(2) $\dfrac{y+z-x}{b+c}=\dfrac{z+x-y}{c+a}=\dfrac{x+y-z}{a+b}=\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$

(3) $\dfrac{yz}{bz+cy}=\dfrac{zx}{cx+az}=\dfrac{xy}{ay+bx}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$

40. (1) a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ

$abcd(a+b+c+d)^2=(abc+abd+acd+bcd)^2$ ナル

コトヲ證明セヨ。

(2) 次ノ方程式ヲ解ケ。

$abcx(a+b+c+x)^2=(abc+abx+acx+bcx)^2$

41. (1) c ガ a, b ノ比例中項ナルトキハ

$abc(a+b+c)^3=(ab+ac+bc)^3$

(2) 次ノ方程式ヲ解ケ。

$abx(a+b+x)^3=(ab+ax+bx)^3$

42. 次ノ聯立方程式ヲ滿足セシムル x, y ノ値ヲ求メヨ。

$x^2+2xy-4y^2=20,\ 2x^2+xy-20y^2=16,$

$xy-4x+2y=8$

[方程式ノ數ガ未知數ノ數ヨリモ多キトキハ，此等ノ方程式ヲ同時ニ滿足セシムル未知數ノ値ハ極メテ特別ナル場合ノ外存在セズ。此問題ニテハ第一,第二ノ方程式ヨリ x, y ヲ求ムルコトヲ得。其値ガ果シテ第三ノ方程式ヲモ滿足セシムルカ否カハ驗ヲ行フテ後始メテ知リ得ベシ]。

43. 聯立方程式

$x=cy+b,\ y=a+cx,\ bx+ay=1$

ガ根ヲ有スルトキハ

$a^2+b^2+c^2+2abc=1$

ナルコトヲ證明セヨ。

44. 次ノ聯立方程式ヲ滿足セシムル y ノ値ガ x ノ値ノ 3 倍ニ等シキガ爲ニハ，k ニ如何ナル値ヲ與フベキカ。

$$(6-5k)x-(3-k)y+12=0$$

$$(14-k)x-(3+2k)y-20=0$$

45. 方程式 $ax+b=0$, $cx+d=0$ ガ共通ノ根ヲ有スルトキハ, $ad-bc=0$ ナルコトヲ證明セヨ。

46. 方程式

$$ax^2+bx+c=0,\ lx^2+mx+n=0$$

ガ共通ノ根ヲ有スルトキハ,

$$(am-bl)(bn-cm)=(an-cl)^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

47. 次ノ聯立方程式ガ根ヲ有スルガ爲ニハ, a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルコトヲ要スルカ。

$$x+y+z=a,\ x^2+y^2+z^2=b,$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=c$$

48. $x+\dfrac{1}{y}=1$, $y+\dfrac{1}{z}=1$ ナルトキハ $z+\dfrac{1}{x}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。又 $xyz+1=0$ ナルコトヲ示セ。

次ノ方程式ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。[49–50]

49. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}=a$, $\dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}=b$, $\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}=c$

50. $x+y+z=0$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0$,

$$\frac{a}{x}(x-l)=\frac{b}{y}(y-m)=\frac{c}{z}(z-n)$$

51. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$ ナルトキハ,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

52. $\dfrac{x}{l}=\dfrac{y}{m}=\dfrac{z}{n}$, $ax^2+by^2+cz^2=t^2$, $l^2+m^2+n^2=1$ ナルトキハ,

$$(al^2+bm^2+cn^2)(x^2+y^2+z^2)=t^2$$

ナルコトヲ示セ。

53. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{y-b}=\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{y-a}$ ナルトキハ, 此等ノ相等シキ式ハ $\dfrac{a+b}{ab}$ ニ等シキコトヲ示セ。

54. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\left(\dfrac{lx+my}{n}\right)^2$ ガ完全ナル平方ナルトキハ,

$$a^2l^2+b^2m^2=n^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

55. ax^2+bx+c ガ $2ax+b$ ニテ割リ切レルトキハ,前ノ式ハ完全ナル平方ナルコトヲ示セ。

56. $ax^3+3bx^2+3cx+d$ ガ完全ナル立方ナルトキハ,

$$ac=b^2,\ bd=c^2$$

ナルコトヲ證明セヨ。

57. $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ ガ完全ナル平方ナルトキハ,

$$r^2=p^2s,\ (4q-p^2)^2=64s$$

ナリ。之ヲ證明セヨ。

58. α, β, γ ガ方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

ノ根ナルトキハ,

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=q,\ \alpha\beta\gamma=-r$$

ナルコトヲ證明セヨ。

59. $x^3-2x^2-x+k=0$ ノ三ツノ根ガ $\alpha, \alpha+3, \beta$ ナルトキ, k, α, β ヲ求メヨ。

[α 及ビ $\alpha+3$ ガ上ノ方程式ノ根ナルベキコトヨリ, α ヲ定ムベキ二次方程式ヲ得。α ノ値ヲ上ノ方程式ニ代入シテ k ヲ得]。

60. 二次方程式 $x^2+lx+m=0$, $x^2+l'x+m'=0$ ガ一ツノ根ヲ共有スルトキ,共通ナラザル他ノ二ツノ根ヲ根トセル二次方程式ヲ作レ。

61. 方程式 $\dfrac{7}{x-1}-\dfrac{5}{x+1}=k^2$ ハ恒ニ絕對值ガ1ヨリモ大ナル二ツノ實根ヲ有スルコトヲ示セ。

62. 方程式

$$x^2-4(k+1)x+(3k+2)=0$$

ハ k ノ値ノ如何ニ拘ハラズ,恒ニ絕對值ガ1ヨリモ大ナラザル一ツノ實根ト絕對值ガ1ヨリモ小ナラザル一ツノ實根トヲ有スルコトヲ證明セヨ。

[方程式ノ左邊ノ二次式ニ於テ $x=1, x=-1$ トナストキ,二次式ノ數値カ一ハ正,一ハ負ナルコトニ着眼セヨ。第8節參照]。

63. 方程式

$$x^2+a^2+b^2+2abx=1$$

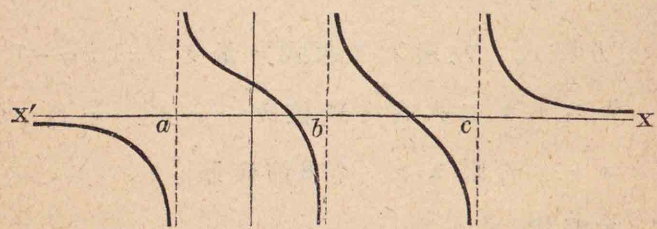
ガ相異ナル二ツノ實根ヲ有スルトキハ, a, b 及ビ二ツノ根ハ絕對值ニ於テ,イヅレモ1ヨリモ大,又ハイヅレモ1ヨリモ小ナルコトヲ示セ。

64. l, m, n ハ正數ニシテ, $a<b<c$ ナルトキハ,方程式

$$\frac{l}{x-a}+\frac{m}{x-b}+\frac{n}{x-c}=0$$

ノ根ハ a ト b トノ間及ビ b ト c トノ間ニアル二ツノ實數ナルコトヲ證明セヨ。

[此問題ハ第9節ニ於テ解キタルモノナリ。サレド又上ノ方程式ノ左邊ノ分數式ノ値ノ變動ヲ示スベキ圖ヲ作ルトキハ,一層明瞭ナル解ヲ得ベシ。圖ハ概略次ノ如シ。



此方法ニヨルトキハ,方程式ノ左邊ガ $\frac{l}{x-a}$, $\frac{m}{x-b}$ ノ如キ分數式ヲ三個ヨリモ多ク含ム場合ニモ,容易ニ同様ノ定理ヲ證明スルコトヲ得ベク,又方程式ノ右邊ガ0ニアラザル數 k ナルトキニモ根ノ性質ヲ知リ得ベシ。上ノ方程式ノ右邊ガ正數 k ナルトキハ, c ヨリモ大ナル第三ノ實根アリ,又右邊ガ負數 k ナルトキハ, a ヨリモ小ナル第三ノ實根アルベキコト明白ナリ]。

65. k ガ如何ナル限界ノ内ニアルトキ方程式

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=\sqrt{k}$$

ハ實根ヲ有スルカ。

66. (1) 聯立方程式

$$x^2+xy+y^2=9,\ x^2+y^2=k$$

ハ, k ノ値ガ如何ナル限界ノ内ニアルトキ,實根ヲ有スルカ。

(2) x, y ガ方程式

$$x^2+xy+y^2=9$$

ヲ滿足セシムルトキ, x^2+y^2 ノ極大及ビ極小ノ値ヲ求メヨ。

67. 次ノ方程式ヲ滿足セシムル x, y ノ實數ノ値ヲ求メヨ。

(1)　$(x^2-2xy-24)^2+(xy-2y^2-4)^2=0$

[x, y ヲ實數ニ限ルトキハ,二ツノ平方ガ各0ニ等シキトキニ限リ,其和ハ0トナルベシ]。

(2)　$6(x^2-y^2-9)^2+17(x^2+y^2-6x)^2=0$

68. 次ノ方程式ヲ滿足セシムル實數 x 及ビ y ノ値ニ如何ナル制限アルカ。

$$x^2+2xy+3y^2-2(x+y)+1=0$$

69. $x^2+x-1=0$ ナルトキ,

$$3x^4+2x^3-x^2+5x-4$$

ノ値ヲ求メヨ。

[割リ算ニヨリテ一般ニ

$$3x^4+2x^3-x^2+5x-4=(x^2+x-1)(3x^2-x+3)+x-1$$

ナルコトヲ知ル。故ニ $x^2+x-1=0$ ナルトキハ,與ヘラレタル式ハ $x-1$ ニ等シ。サテ $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ ナルニヨリ,容易ニ求ムル値ヲ得ベシ]。

70. $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ナルトキ

$$\frac{2x^3-6x-3}{x^4-11x^2+14}$$

ノ値ヲ求メヨ。

[$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ト $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ トヲ根トセル二次方程式ヲ作リ,前ノ問題ノ方法ヲ用ヒヨ]。

71. α, β ガ二次方程式 $2x^2-4x+1=0$ ノ根ナルトキ $\frac{\alpha}{\beta-2}$ ノ値ヲ求メヨ。

[先ヅ $\frac{\alpha}{\beta-2}$ ノ分母及ビ分子ニ $\alpha-2$ ヲ掛ケテ分母ヲ有理化セヨ]。

72. x ガ 0 ニ近ヅクトキ

$$\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

ノ數値ハ如何ヤウニナルカ。

73. 次ノ根數ノ分母ヲ有理化セヨ。

(1) $\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

[公式 $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$ ヲ用ヒヨ]。

(2) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

[公式 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$
$=x^3+y^3+z^3-3xyz$ ヲ用ヒヨ]。

74. 甲ノ桶ニハ酒精 3 水 2 ノ混合液,乙ノ桶ニハ酒精 2 水 3 ノ混合液アリ。今此二種ノ液ヲ混ジテ酒精 8 水 7 ノ混合液 30 立ヲ得ントス。二ツノ桶ヨリ汲ミ取ルベキ分量ヲ求メヨ。

[甲ヨリ $3x+2x$ 立,乙ヨリ $2y+3y$ 立ヲ汲ミ取ル

ベキモノトシテx, yヲ含メル二ツノ方程式ヲ作ルトキハ分數ヲ避クルコトヲ得]。

75. 商船ヨリモa時間遲ク甲港ヲ出發シタル巡洋艦ガb時間ノ後商船ヲ追ヒ越シ,商船ヨリモc時間早ク乙港ニ到着セリ。二ツノ船ガ此航海ニ費セル時間各幾許ナルカ。

[此問題ハ第14節ノ圖解ノ方法ニ適ス]。

76. ぜんまいアリ,其一端ヲ固定シ他ノ一端ニ重リヲ懸クルトキハ其長サ$a+bx$トナルトイフ。但a, bハ常數ニシテxハ重リノ目方ナリトス。今重サガ8瓩ナルトキぜんまいノ長サ13.6糎,又重サガ20瓩ナルトキ,長サ18.4糎ナルトキハ,重サ幾瓩ノトキ,長サ15.2糎ナルカ。又常數a, bノ値ヲ求メ,且其意味ヲ說明セヨ。

77. 或冊子ノ印刷費ハ印刷部數千部ナラバ一部七錢,二千部ナラバ一部六錢ノ割ナリトイフ。此冊子五千部ノ印刷費幾許ナルカ。

[印刷費ノ中,組版代ハ定額,紙代,印刷手間代等ハ部數ニ比例ス]。

78. 直角ニ交叉セル甲乙二直線上ヲ,ソレゾレ每秒p糎,q糎ノ速度ニテ運動スル二ツノ點ガ只今交叉點ヨリソレゾレa糎,b糎ノ距離ニアリ。此等二點間ノ距離ガ最小サクナルトキハ何時ナルカ。又其距離ハ幾許ナルカ。

79. 甲乙二船ノ速サノ比ハ2:3ニシテ甲ハ正東ニ,乙ハ正南ニ向ヒテ進航ス。二船ノ距離正午ニハ20浬ナリシガ,午後一時ニハ8浬トナリ,午後二時ニハ12浬トナレリ。二船ノ距離ノ最小ナリシハ何時ナルカ。又其最小距離ハ如何。

80. 無稅ノ輸入品アリ。今之ニp割ノ輸入稅ヲ課スルトキハ輸入額ハcp割ヲ減ズルモノト假定スルトキ,最多クノ輸入稅ヲ得ルニハ稅率ヲ幾許トスベキカ。(但cハ常數ナリトス)。

81. 某市電車ノ乘車券一枚ノ價4錢ナリシトキ,平均一日ノ發賣數n枚ナリシニ,一枚ノ價5錢トナリタルヨリ一日ノ發賣數p枚ヲ減ジタリトイフ。今發賣數ノ減少ハ乘車券ノ價ノ增加ニ比例スルモノト假定スルトキハ,此

電車ノ收入ヲ最多クスルニハ乘車券一枚ノ價ヲ幾許ト定ムベキカ。

82. 二ツノ底ハ a, b 高サハ h ナル梯形ノ面積ヲ底ニ平行ナル二ツノ直線ニテ三等分セントス。此等二直線ト底トノ距離ヲ計算セヨ。

83. 長サ a ナル直線ヲ二ツノ部分ニ分チ其比ヲ r ニ等シカラシメントス。各部ノ長サヲ求メヨ。

又此結果ニ於テ r ヲ負數トスルトキハ,外分ノ場合ニ於ケル二ツノ部分ノ長サヲ得ベキコトヲ示セ。

84. 長サ a ナル直線ヲ二ツノ部分ニ分チ,其一ツガ全部ト他ノ一部トノ比例中項ニ等シクナルヤウニセントス。各部ノ長サヲ求メヨ。

85. 與ヘラレタル三角形ニ面積ノ與ヘラレタル矩形ヲ內接セシムルトキ,矩形ノ邊ノ長サヲ求メヨ。

又內接矩形ノ面積ノ極大ノ値ヲ求メヨ。

86. 三角形ノ底邊 a, 高サ h, 他ノ二邊ノ比 $m:n$ ナルトキ,此等二ツノ邊ヲ求メヨ。又 a, 及ビ

$m:n$ ガ定マレルトキ, h ノ極大ノ値ヲ求メヨ。

87. $\dfrac{ax+by}{x+y}=\dfrac{by+cz}{y+z}=\dfrac{cz+ax}{z+x}$ ナルトキハ $a=b=c$ ナルコトヲ示セ。

88. a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ

$$\frac{a^n+b^n+c^n+d^n}{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}+d^{-n}}=(abcd)^{\frac{n}{2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

89. $\dfrac{a^m}{x^n}=\dfrac{b^m}{y^n}=\dfrac{c^m}{z^n}=x^{m-n}+y^{m-n}+z^{m-n}$ ナルトキ, x, y, z ヲ求メヨ。

90. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x^y=y^x,\ x^b=y^a$$

[先ヅ $x=y=1$ 又ハ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$ ナルコトヲ確メヨ]。

91. $\dfrac{a'}{a}$, $\dfrac{b'}{b}$, $\dfrac{c'}{c}$......ノ分母 a, b, c.. ...ガ正ナルトキハ,

$$\frac{a'+b'+c'+\ldots\ldots}{a+b+c+\ldots\ldots\ldots}$$

ハ此等ノ分數ノ中最大ナルモノト最小ナルモノトノ間ニアルコトヲ證明セヨ。

92. t ガ 0 ヨリ漸次增大スルトキ

$$\frac{2+3t}{3+5t}$$

ノ値ハ如何ヤウニ變動スルカ。

93. 1ヨリ始メ,n個ノ奇數ノ平方ノ和ヲ求メヨ。

94. nガ奇數ナルトキ,nヨリモ小ニシテ$\frac{n}{2}$ヨリモ大ナル偶數ハ幾ツアルカ。

95. $0<a<b$ナルトキ,初項a,次項bナル等差級數ト等比級數トニ於テ,第三項以上同シ番號ノ項ハ,等比級數ノ方ガ等差級數ノ方ヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ。

[數學的歸納法ヲ用フルトキハ,證明ハ容易ナリ]。

96. n項ノ和ガ$n(pn+q)$ニ等シキ等差級數ノ初項及ビ公差ヲ求メヨ。

97. nノ如何ニ拘ハラズ第n項ガan^2+bn+cナル級數ニ於テ

(1) 連續セル二項ノ差ハ等差級數ナルコトヲ示セ。

(2) n項ノ和ヲ求メヨ。

98. 次ノ級數ノ和ヲ求メヨ。

$$(1\times2)+(2\times3)+\ldots\ldots+n(n+1)$$

99. 級數0, 1, 5, 12,……ニ於テ各項ヲ得ルガ爲ニ,其前ノ項ニ加フベキ數1, 4, 7,……ガ等差級數ヲナセリ。此級數ノ第n項及ビn項ノ和ヲ求メヨ。

100. 角錐(又ハ圓錐)ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ,截面ノ面積ハ頂點ト截面トノ距離ノ平方ニ比例ス。底ニ平行ナル平面ニテ底面積A,高サhナル角錐ノ高サヲn等分スルトキハ

(1) 頂點ヨリ數ヘテk番目ノ截面ノ面積幾許ナルカ。

(2) 此等ノ平面ハ角錐ヲn個ノ部分ニ分ツ。其各部ヲ假ニ角壔ト見做シテ其體積ノ總和ヲ求ムルトキハ,角錐ノ體積ノ近似値トシテ

$$\frac{Ah}{6}\cdot\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}$$

ヲ得ルコトヲ示セ(下卷158頁參照)。

(3) nヲ限リナク增ストキハ,上ノ近似値ハ如何ヤウニナルカ。

101. (1) n個ノ正數ノ和ガ定マレル數(s)ニ等シキトキハ,此等ノ正數ノ積ハ此等ノ數ガ盡ク相等シキトキ最大ナリ。卽チ積ノ最大ノ値ハ$\left(\frac{s}{n}\right)^n$ナリ。之ヲ證明セヨ。

(2) n個ノ正數ノ積ガ定マレル數pニ等シキトキハ,此等ノ正數ノ和ハ此等ノ數ガ盡ク相等シキトキ最小ナリ。卽チ和ノ最小ノ値ハ$n\sqrt[n]{p}$ナリ。之ヲ證明セヨ。

[第34節ノ定理ノ應用]。

102. (1) m, nヲ二ツノ正ノ整數,x, yヲ二ツノ正數トスルトキ$mx+ny$ガ定マレル數(s)ニ等シキトキハx^my^nハ$x=y$ナルトキニ最大ナリ。卽チx^my^nノ最大ノ値ハ$\left(\frac{s}{m+n}\right)^{m+n}$ナリ。

[101ノ特別ノ場合]。

(2) 二ツノ正數x, yノ和カ定マレル數(s)ニ等シキトキハ,x^my^nハ$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$ナルトキニ最大ナリ。但m, nハ二ツノ定マレル正ノ整數ナリトス。

[(1)ノ變形]。

103. 周圍ノ與ヘラレタル三角形ノ中,正三角形ノ面積ガ最大ナリ。

[三角形ノ邊ヲa, b, c周圍ヲ$2p$トスルトキハ,面積ノ平方ハ$p(p-a)(p-b)(p-c)$ニ等シク,$p-a, p-b, p-c$ノ和ハpニ等シク,卽チ定マレル數ナルコトニ注意セヨ]。

104. $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ガ正數ナルトキハ

$$\log\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqq \frac{\log x_1+\log x_2+\ldots\ldots+\log x_n}{n}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

105. a及ビ$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ガ正數ナルトキハ

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}+\ldots\ldots+a^{x_n}}{n} \geqq a^{\frac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

106. 次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $\log(x-1)-\log(x^2-5x+4)+1=0$

(2) $\log(2-x)=\log(2x-1)-\log(2x+1)$

(3) $2^{\sqrt{x^2-xy-y^2}}=2y,\ \log(y+1)-2\log y=\log 2$

[記號logノ下ノ數ハ正數ナルコトヲ要スルニ注意スベシ]。

答

答數ハ參考ノ爲ニ掲ゲタレドモ,其數字ニ信賴セズ,驗算ニヨリテ充分結果ヲ確ムルコトヲ要ス。

例題 [3-4]

2. 10 ; $2x-1$ ニテ割リ切レズ,剰餘 $-\dfrac{29}{4}$

4. n ガ奇數ナラバ割リ切レル。n ガ偶數ナラバ剰餘 $2a^n$。

5. $1, 2, -\dfrac{2}{3}$ 　　**6.** $(x-1)(x^2+x-1)$

例題 [8-9]

1. 限リナク大キクナル, 1 ニ近ヅク, 2 ニ近ヅク。

2. $\dfrac{5}{6}$ ニ近ヅク。　　**3.** 6 ニ近ヅク。

4. 限リナク大, $\dfrac{5}{6}$, 0

5. (1) $2a,\ -2a$ 　(2) $2a,\ -2a$

問題第一 [13]

1. -1. 　**2.** 0 　**3.** 2 　**4.** 0

5. -3 **6.** 1 **7.** 0 **8.** $0,\ \frac{2}{3}$

問 題 第 二 [22-24]

1. $x>2$ **2.** $x>\frac{9}{5}$ **3.** $x<-\frac{7}{5}$

4. $x>\frac{7}{3}$ 又ハ $x<-1$ **5.** $1>x>-\frac{2}{5}$

6. 恒ニ正シ。 **7.** $x>2$ 又ハ $x<-1$

8. $\frac{3}{2}>x>\frac{3}{4}$ **9.** $x>3$ 又ハ $2>x>1$

10. $x>1$, 又ハ $x<-1$

11. $x<1$, 又ハ $2<x<6$, 又ハ $7<x$

12. $x>\frac{\sqrt{7}-1}{4}$ 又ハ $x<-\frac{\sqrt{7}+1}{4}$

13. $-1<x<\frac{1}{2}$ 又ハ $1<x$ **14.** $x<\frac{7}{5}$

16. (1) $k\geqq\frac{1}{2}$ (2) k ニ制限ナシ。

(3) k ノ如何ニ拘ハラズ實根ナシ。

(4) $k\geqq\frac{9+3\sqrt{5}}{8}$ 又ハ $k\leqq\frac{9-3\sqrt{5}}{8}$

18. (1) $k>\frac{49}{12}$ (2) $k>2$

問 題 第 三 [28-29]

1. 極大値 $\frac{25}{4}$ **2.** 極小値 $-\frac{25}{4}$

3. 極小値 $\frac{34}{5}$

4. 極大値 $\frac{\sqrt{229}-7}{10}$, 極小値 $-\frac{\sqrt{229}+7}{10}$

5. 極大値 3, 極小値 $\frac{1}{3}$

6. 極大値 $\frac{1}{2}\{q+1+\sqrt{(q-1)^2+p^2}\}$

極小値 $\frac{1}{2}\{q+1-\sqrt{(q-1)^2+p^2}\}$

8. (1) -1 ヨリ小ナラズ。(2) 0 ト -1 トノ間ノ値ヲ採ラズ。(3) 0 ト 1 トノ間ノ値ヲ採ラズ。

9. 6 ヨリ小ナラズ。又 -2 ヨリ大ナラズ。

10. 0 ヨリ小ナラズ。又 $-\frac{1}{3}$ ヨリ大ナラズ。

11. $\frac{12}{11}$ ヨリ大ナラズ又負トナラズ。

12. $\frac{13}{3}$ ヨリモ小ナラズ。又 3 ヨリモ大ナラズ。

13. x 極大値 8, 極小値 -2; y 極大値 1, 極小値 -9

14. 三角形ノ面積ノ半。 **15.** $(3-\sqrt{8})p^2$

問 題 第 四 [60]

1. x^2-x+1 **2.** $2x^2-x+2$ **3.** x^3+2x^2-1

4. x^2+x+1 **5.** x^2-ax+a^2

例 題 [65]

1. 12 2. 6 3. $|\underline{10}$ 4. 60

例 題 [67]

1. 20 2. 105

問 題 第五 [70-71]

1. 3160080, 35 3. $|\underline{8}$ 4. 14688

5. 360 6. 712530 7. 125 8. 9

9. 34650, 7350 10. 150 11. $5\times\dfrac{|\underline{100}}{|\underline{15}\,|\underline{85}}$

12. 10 13. $\dfrac{n(n-3)}{2}$ 14. $\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$

15. $\dfrac{|\underline{2n}}{2^n\,|\underline{n}}$

問 題 第六 [75]

1. $x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$
$-(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$

2. $x^4+(m-n+p-q)x^3+(mp+nq-mn-mq-np-pq)x^2$
$+(mnq+npq-mpq-mnp)x+mnpq$

3 (1) $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

(2) $a^8-4a^6+6a^4-4a^2+1$

(3) $x^5-5x^3+10x-\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}$

(4) $a^6+6a^5xy+15a^4x^2y^2+20a^3x^3y^3+15a^2x^4y^4$
$+6ax^5y^5+x^6y^6$

(5) $1+3a+6a^2+7a^3+6a^4+3a^5+a^6$

(6) $x^4+4x^3+10x^2+16x+19+\dfrac{16}{x}+\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}$

4. (1) 96059601 (2) 11040808032

5. $64x^6-96x^4+36x^2-2$

6. -51

例 題 [79]

1. 0 2. $6xyz$

例 題 [82]

1. $\{(a+b)x-(a-b)\}\{(a-b)x+(a+b)\}$

2. $(a+b)(a+c)(b+c)$

3. $(x+y-8)(x+y+5)$

例 題 [83]

1. $\left(x+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

2. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

3. $(x^2+\sqrt{10}xy+5y^2)(x^2-\sqrt{10}xy+5y^2)$

4. $(\sqrt{3}x^2+2xy+2\sqrt{3}y^2)(\sqrt{3}x^2-2xy+2\sqrt{3}y^2)$

例 題 [88]

1. $(a-b)(a-c)(b-c)$

2. $-(a-b)(a-c)(b-c)$

例 題 [91-92]

1. $x+y+z$ 2. 1 3. 0

4. -2 5. $\dfrac{1}{abc}$ 6. $\dfrac{ab+ac+bc}{a^2b^2c^2}$

例 題 [95-96]

1. $a=3,\ b=-4,\ c=2$ 2. $a=-3,\ b=5$

3. $a=3,\ b=4,\ c=-2$ 4. $a=2,\ b=c=1$

5. (1) $p=13,\ q=-12$ 又ハ $p=5,\ q=12$

(2) $p=-20,\ q=36$ (3) $p=\pm 2,\ q=1$

例 題 [99]

1. x^2-x-1 2. $2x+1$ 3. $3x-7$

4. $3x^2+2x$ 5. $\dfrac{x^2-2x+2}{5x^2-x-3}$

6. $\dfrac{3x+4}{4x-1}$

7. 共通ノ根 1; 其他ノ根 2, 3; $\dfrac{1\pm\sqrt{11}}{5}$

雜 題 集

1. $2(x^2+y^2+z^2)$ 2. $a^4+b^4+c^4$

3. $4abx^2$ 6. 0

8. (1) $(x-y)(x+y)\{(a+b)x-(a-b)y\}$
$\{(a+b)x+(a-b)y\}$

(2) $(a+b)(a+c)(b+c)$

(3) $(x+y)(x+z)(y+z)$

9. (1) $(x-2)(x-y+1)$ (2) $(3x-y-3)(2x-3y+1)$

(3) $(2x-y+a)(x-2y-a)$

10. $k=-10,\ (x-y-2)(x+y+5)$

11. (1) $(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$

(2) $(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$

(3) $(a-b)(a-c)(b-c)$

12. (1) $5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$

(2) $3abc(b+c)(c+a)(a+b)$

13. (1) $(1-x)^2(1+2x)$ (2) $(x-1)^2(x^2+2x+3)$

14. $7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

16. (1) ax^2-bx+c　(2) $\dfrac{x^2+4x}{7x^2-11x-5}$

(3) $\dfrac{3x^3+6x^2+4x+2}{2x^3+4x^2+6x+3}$

17. (1) x　(2) 4　(3) $(a+b+c)^2$　(4) -1

(5) $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$　(6) $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

19. (1) $2,\ 3,\ 1$　(2) $2,\ 1,\ -1;\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{4},\ -\dfrac{7}{6}$

20. (1) $b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$　(2) $1,\ 1,\ 1$

(3) $\dfrac{-a(b-c)^2}{(a-b)(a-c)},\ \dfrac{-b(c-a)^2}{(b-c)(b-a)},\ \dfrac{-c(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$

22. (2) $a^2-k^2,\ k^2-b^2$

23. (2) $\dfrac{(b-p)(c-p)(d-p)}{(b-a)(c-a)(d-a)}$ 等。

(3) $\dfrac{a^2}{(b-a)(c-a)},\ \dfrac{b^2}{(c-b)(a-b)},\ \dfrac{c^2}{(a-c)(b-c)}$

24. (1) -4　(2) $0,\ 6\pm\sqrt{3}$　(3) $\dfrac{3}{2}$　(4) $\dfrac{5}{2}$

25. (1) $0,\ \pm5$　(2) $0,\ a+b,\ \dfrac{a^2+b^2}{a+b}$　(3) $2(k-a-b)$

26. (1) $k,\ \dfrac{1}{2}\{-(k+a+b)\pm\sqrt{(a-b)^2-2(a+b)k-3k^2}\}$

(2) $4,\ \pm\sqrt{-3}$

27. (1) $1,\ \dfrac{7}{4}$　(2) $7,\ -3$　(3) $9,\ -2$　(4) $1,\ \dfrac{1}{2}$

28. (1) $4,\ -5,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{-23}}{2}$　(2) $(1\pm\sqrt{10})a,\ (1\pm\sqrt{3})a$

29. (1) $-1,\ \dfrac{-(p-1)\pm\sqrt{p^2-2p-3}}{2}$

(2) $1,\ \dfrac{-(a+b)\pm\sqrt{b^2+2ab-3a^2}}{2a}$

(3) $2,\ \dfrac{1}{2},\ -3,\ -\dfrac{1}{3}$　(4) $2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3}$

30. (1) $a,\ -a,\ \pm\sqrt{-7a^2}$

(2) $a,\ b,\ \dfrac{7(a+b)\pm\sqrt{-7}(a-b)}{14}$

(3) $a,\ b,\ \dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{3(a+b)\pm\sqrt{-3}(a-b)}{6}$

31. (1) $5,\ 4;\ 4,5$

(2) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2};\ 2,\ 1;\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}$

(3) $\pm\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{1}{3};\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm3$

(4) $\pm2,\ \pm5;\ \pm\dfrac{1}{2},\ \pm5$

(5) $x=\dfrac{2(-1\pm\sqrt{6a-2})}{1-2a},\ y=\dfrac{1\mp\sqrt{6a-2}}{1-2a}$

32. (1) $3,\ -1;\ -1,\ 3;\ 2,\ 3;\ 3,\ 2$

(2) $2,\ 1;\ 1,\ 2;\ \dfrac{1}{2}(5\pm\sqrt{-19}),\ \dfrac{1}{2}(5\mp\sqrt{-19})$

(3) 7, 5; 5, 7

(4) 2, 4; 4, 2; $-1\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$, $-1\mp\sqrt{\frac{11}{3}}$

(5) 16, 1; 1, 16; 此外虛根四組。

(6) ±2, ±1; ±1, ±2;

$\frac{1}{2}(\sqrt{2}\pm\sqrt{-34})$, $\frac{1}{2}(\sqrt{2}\mp\sqrt{-34})$;

$\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\pm\sqrt{-34})$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{2}\mp\sqrt{-34})$

33. (1) 3, 4; 4, 3; $\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{-295})$, $\frac{1}{2}(7\mp\sqrt{-295})$

(2) 3, −1; 1, −3; $2\pm\sqrt{-25}$, $-2\pm\sqrt{-25}$

(3) 2, 3; 3, 2; $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{-51})$, $\frac{1}{2}(5\mp\sqrt{-51})$

(4) ±3, ∓2; ±2, ∓3; $\frac{1}{2}(\sqrt{38}\pm\sqrt{-12})$,

$\frac{1}{2}(\sqrt{38}\mp\sqrt{-12})$;

$\frac{1}{2}(-\sqrt{38}\pm\sqrt{-12})$, $\frac{1}{2}(-\sqrt{38}\mp\sqrt{-12})$

(5) 3, 1; −1, −3; $1\pm\frac{4\sqrt{-3}}{3}$ $-1\pm\frac{4\sqrt{-3}}{3}$

34. (1) 0, 0; 0, 1; 1, 2; 2, −1

(2) 0, 0; $\frac{1}{3}$, 0; $\frac{185}{227}$, $\frac{20}{227}$; 3, 2

(3) 0, 0; 6, 3; 虛根二組。

35. (1) 2, 1, 1

(2) a, b, c; $\frac{1}{3}(2b+2c-a)$, $\frac{1}{3}(2a+2c-b)$,

$\frac{1}{3}(2a+2b-c)$

(3) ±[illegible], ±8, ±2; $\pm3\sqrt{\frac{69}{29}}$, $\pm4\sqrt{\frac{69}{29}}$ $\pm2\sqrt{\frac{69}{29}}$

36. (1) $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$; $\frac{25}{6}$, $-\frac{13}{17}$, $\frac{6}{7}$

(2) 3, 4, 5; −5, −6, −7

(3) 0, 0, 0; $\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, $\frac{2abc}{ac+bc-ab}$, $\frac{2abc}{ab+ac-bc}$

(4) 0, 0, 0; 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ (5) 1, 1, $\frac{1}{3}$

37. (1) $\pm\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$, $\pm\frac{b^2-ac}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$,

$\frac{c^2-ab}{\sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc}}$

(2) 0, 0, 0; $-\frac{(b^2-ac)(c^2-ab)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$,

$-\frac{(c^2-ab)(a^2-bc)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$, $-\frac{(a^2-bc)(b^2-ca)}{a^3+b^3+c^3-3abc}$

38. (1) ±2, ±1, ∓1; $\pm\frac{5}{\sqrt{7}}$, $\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$, $\mp\frac{1}{\sqrt{7}}$

(2) 0, ±1, ∓2; $\pm\frac{11}{\sqrt{70}}$, $\pm\frac{9}{\sqrt{70}}$, $\pm\frac{15}{\sqrt{70}}$

(3) $\pm\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \pm2\sqrt{2},\ \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$

39. (1) 0, 0, 0; $\pm\sqrt{\frac{b+c-a}{(c+a-b)(a+b-c)}}$,

$\pm\sqrt{\frac{c+a-b}{(a+b-c)(b+c-a)}}$; $\pm\sqrt{\frac{a+b-c}{(b+c-a)(c+a-b)}}$

(2) $\pm\frac{2a+b+c}{2\sqrt{2}},\ \pm\frac{a+2b+c}{2\sqrt{2}},\ \pm\frac{a+b+2c}{2\sqrt{2}}$

(3) $\frac{a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{c}{2}$

40. (2) $\frac{bc}{a},\ \frac{ca}{b},\ \frac{ab}{c}$

41. (2) $\pm\sqrt{ab},\ \frac{a^2}{b},\ \frac{b^2}{a}$

42. $-14,\ 4$ **44.** $k=0$

47. $a^3-3ab+2c=0$

49. $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=8$

50. $l+m+n=0$

59. $k=2,\ \alpha=-1,\ \beta=1$ 又ハ $k=\frac{14}{27},\ \alpha=-\frac{2}{3},\ \beta=\frac{1}{3}$

65. $2\geqq k\geqq 0$

66. (1) $18\geqq k\geqq 6$ (2) 18, 6

67. (1) $\pm6,\ \pm1$ (2) $\frac{3+\sqrt{27}}{2},\ \pm3\sqrt[4]{\frac{43}{34}}$

68. $x=1,\ y=0$ ニ限ル。

69. $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ **70.** $\frac{24+7\sqrt{13}}{13}$

71. -1 **72.** 2 ニ近ヅク。

73. (1) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{24}$ (2) $\sqrt[3]{2}-1$

74. 甲 20 立, 乙 10 立。

75. 軍艦 $\frac{b(a+c)}{a}$ 時間,

商船 $\frac{(a+b)(a+c)}{a}$ 時間。

76. 12 瓩。 $a=10.4$ (重ナキトキノ長サ)。

$b=0.4$ (重サ 1 ニツキ延ビル長サ)。

77. 270 圓。

78. $\frac{ap+bq}{p^2+q^2}$ 秒前。 $\pm\frac{aq-bp}{\sqrt{p^2+q^2}}$ 粍(正ノ値ヲ採ル)。

79. 午後 1 時 $18\frac{6}{13}$ 分。 距離 $\frac{24}{\sqrt{13}}=6.66$ (浬) 弱。

80. $\frac{5}{c}$ 割。 **81.** $\left(2+\frac{n}{2p}\right)$ 錢。

82. 底 a ヨリノ距離 $h\times\frac{\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{3}}-a}{b-a}$,

$h\times\frac{\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{3}}-a}{b-a}$

83. $\dfrac{ar}{r+1}$, $\dfrac{a}{r+1}$

84. 內分, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a$, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}a$;

外分, $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$, $\dfrac{\sqrt{5}+3}{2}a$

85. 三角形ノ底ヲ a, 高サヲ k, 矩形ノ面積ヲ s ト

スルトキ, 底ノ上ニアル邊 $\dfrac{a}{2}\left\{1\pm\sqrt{1-\dfrac{4s}{ah}}\right\}$

他ノ邊 $\dfrac{h}{2}\left\{1\mp\sqrt{1-\dfrac{4s}{ah}}\right\}$; 面積ノ極大值 $\dfrac{ah}{4}$

86. 二邊 mt, nt; h ノ極大值 $\dfrac{mna}{m^2-n^2}$

但 $t^2=a^2\dfrac{m^2+n^2\pm2\sqrt{m^2n^2-\dfrac{h^2}{a^2}(m^2-n^2)^2}}{(m^2-n^2)^2}$

89. $a^{\frac{m}{n}}\left(a^{\frac{m(m-n)}{n}}+b^{\frac{m(m-n)}{n}}+c^{\frac{m(m-n)}{n}}\right)^{-\frac{1}{m}}$,

$b^{\frac{m}{n}}(\,{}')$, $c^{\frac{m}{n}}(\,{}'')$

90. $x=y=1$, 又ハ $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$ $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\overline{a-b}}$

92. $\dfrac{2}{3}$ ヨリ次第ニ減少シテ限ナク $\dfrac{3}{5}$ ニ近ヅク。

93. $\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)$

94. $(n+1)\div4$ ノ整數商。

96. 初項 $p+q$, 公差 $2p$

97. (2) $\dfrac{n}{6}\{2n^2a+3n(a+b)+(a+3b+6c)\}$

98. $\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

99. $\dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}$, $\dfrac{n(n-1)^2}{2}$

100. (1) $\dfrac{k^2}{n^2}A$, (3) $\dfrac{Ah}{3}$ ニ近ヅク。

106. (1) 14 (2) $\dfrac{3}{2}$ (3) $x=2,\ -1$ $y=1$

明治三十七年十二月廿七日印刷
明治三十七年十二月三十日發行
明治三十八年三月十四日訂正再版發行
明治四十三年三月十一日訂正七版發行
明治四十五年一月廿五日修正八版發行
明治四十五年三月十二日訂正九版發行
大正五年十一月廿一日修正十版印刷
大正五年十月廿四日修正十版發行
大正五年十一月十四日訂正十一版印刷
大正五年十一月十七日訂正十一版發行

著作權所有

禁問題轉載

著作者　高木貞治
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
發行者　西野虎吉
東京市牛込區市谷加賀町一丁目十二番地
印刷者　高橋郡一郎
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
發行所　開成館
〔振替貯金口座〕東京第五參貳貳番
大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角
西部販賣所　三木佐助
東京市日本橋區數寄屋町九番地
東部販賣所　林平次郎

大正十年度臨時
定價八十八錢

新式
代數教科書
續
定價　金四拾錢

（株式會社秀英舍第一工場印刷）

教
41
20