中學

代數教科書

千本福隆著

大正七年版

THE KOFUKWAN.

文部省檢定濟
大正七年一月廿一日　中學校數學科教科書

中學代數教科書

卷下

理學士
千本福隆
著

東京
光風館藏版

巻上摘要

生徒諸子は幾度となく,此の摘要によりて,巻上所説の大要を復習し,代數學智識の基本を確立すること肝要なり. 各自の計算の結果を照合する便利を謀りて,答を各問の傍に或は本摘要の終りに掲げ置きたり.

1. 代數學上の數(巻上の)を分類して,其例を示せ.

$$
\text{代數學上の數} = \begin{cases} \text{負の數} = \begin{cases} -\frac{5}{8} \quad -8.6 \quad (\text{負の分數小數}) \\ -1 \quad -365 \quad (\text{負の整數}) \end{cases} \\ \text{零} = 0, \quad 3-1-1-1 \quad a-a \\ \text{正の數} = \begin{cases} \frac{5}{12} \quad 3.14 \quad (\text{正の分數,小數}) \\ 1 \quad 100 \quad (\text{正の整數}) \end{cases} \end{cases}
$$

2. 代數式の定義を述べよ. 代數式とは,數字にて書きたる數及び代數文字を演算記號,括弧等にて結び付けたるものにして或數を表すものなり.

3. (一) $\frac{a+b}{2}$, b, $\frac{a-b}{2}$ の (二) $\frac{a+b}{2}$, a, $\frac{a-b}{2}$ の關係式を各六通りの等式にて表せ,又各其一つを言葉に飜譯せよ(差額平分算)

4. $\frac{a}{x}=b$ に就て, a. b, x の間の關係式を種種に作れ.

5. 還元法 $[(x+a)\times b-c]\div d=m$ なれば,

$$x=(m\times d+c)\div b-a$$

6. 54, 252, 648, 2662 を各素因數に分解せよ.

$$
\begin{array}{r} 2\,\underline{)\;54} \\ 3\,\underline{)\;27} \\ 3\,\underline{)\;\;9} \\ 3 \end{array}
$$

$$54=2\times 3^3$$

7. 次の各題に就て,其不等式を聯立せしむる x の値の限界を求む.

(一) $\begin{cases} x+2>0 \\ x-3>0 \end{cases}$　(二) $\begin{cases} x+2<0 \\ x-3<0 \end{cases}$　(三) $\begin{cases} x+2>0 \\ x-3<0 \end{cases}$

8. (一) x の値が如何なるとき $7x-56$ の數値は, $4x+13$ の數値より大となり,或は等しくなり,或は小となるべきか.

即ち　不等式 $7x-56 >=< 4x+13$ を解け.

(二)　不等式 $(x+2)(x-3) >=< 0$ を解け.

9. 或年度に於ける吾帝國歳出豫算總計の中,陸軍省の分は總額の一割七分より 114 (拾萬圓) 多く,海軍省の分は總額の二割より 108 少なしといふ. 陸軍省の分と,海軍省の分とは何れが多きか.

10. 次式を x の降冪に整頓せよ.　答 $x^2-(y+z)x+(y^2-yz+z^2)$

$(x+n)^2+(y+n)^2+(z+n)^2-(y+n)(z+n)-(z+n)(x+n)-(x+n)(y+n)$

11. 實地に計算を行ひて次の各の恒等式を驗證せよ.

(一) $(x^2-3x+2)(x^2+px+q)$

$$=x^4+(p-3)x^3-(3p-q-2)x^2+(2p-3q)x+2q$$

(二) $\{a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)\}\times\{a+(b+c)\}=a^3-3abc+b^3+c^3$

(三) $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+z^3)\div(x+y+z)=x^2+(2y-z)x+(y^2-yz+z^2)$

12. $8034\times7508=60319272$ なることによりて次の各を求む.

(一) 8035×7509　(二) 8033×7507

13. 方程式とは如何.

方程式とは等式中の未知數を表す文字に如何なる値を代入すれば其兩邊の値が相等しくなるべきかを求むるものなり.

14. 諳算によりて,次の各の方程式の根を求めよ.

$8x=3x$　$5(x-3)=0$　$8(x-3)=x(x-3)$　$(x-3)(x+3)=0$

15. (一) $\frac{2}{7}\left[\frac{5}{12}\left\{\frac{7}{8}\left(\frac{3}{2}x+5\right)-10\right\}+3\right]-3=5$　答 $x=50$

(二) $\frac{4(13x-0.6)}{5}+\frac{3(1.2-x)}{10}=\frac{9x+0.2}{20}+\frac{7x+5}{4}+x$　答 $x=0.2$

16. 次の各の聯立二元一次方程式を解け.　答 (9, 5), (7, 5)

(一) $\begin{cases} 18x-35y=-13 \\ 15x+28y=275 \end{cases}$　(二) $\begin{cases} \frac{2x-y+3}{3}-\frac{x-2y+3}{4}=4 \\ \frac{3x-4y+3}{4}+\frac{4x-2y-9}{3}=4 \end{cases}$

17. 次の各は代入法にて解け.　答 (7, 4), (9, 4)

$\begin{cases} 6y-1=4y+7 \\ 5y-3(y-2)=x(2y-6) \end{cases}$　$\begin{cases} x-2y=1 \\ (x-2y)(x+y)=2x-3y+7 \end{cases}$

18. (一) $\left[\frac{3}{x}-\frac{1}{y}+\frac{2}{z}=\frac{1}{2}\quad -\frac{6}{x}+\frac{5}{y}+\frac{4}{z}=\frac{5}{2}\quad \frac{9}{x}+\frac{7}{y}-\frac{8}{z}=3\right]$

答 (6, 2, 4)

(二) $\left.\begin{array}{l} 25.9x-60.1y=2\ldots\ldots(1) \\ 24.1x-55.9y=2\ldots\ldots(2) \end{array}\right\}$　本題は先づ(1)−(2)により未知元の比を求め $x=7z$, $y=3z$ によりて解け.　答 (14, 6)

19. 剰餘の定理とは如何.

x の多項式を $x-a$ にて割りて得べき剰餘は,除數を零ならしむべき x の値 a を,被除數の中の x に代入して得べき値に等し. 又 x の多項式の値を零ならしむべき x の値が a なれば,其の多項式は $x-a$ を因數とする積の式に分解せらる,之を剰餘の定理といふ.

20. ax^3+bx^2+cx+d を $x-1$ にて割りて得べき剰餘如何.

21. $px^3-qx^2+2x+12$ が $x-2$, $x-3$ の倍數となる様に p, q の値を定めよ.

答 $p=2$, $q=8$

22. 乗法の公式によりて,次の各を展開せよ.

$(a-b+c-d)(a+b-c-d)$　$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}+\frac{y}{b}-\frac{b}{y}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}-\frac{y}{b}+\frac{b}{y}\right)$

23. 次の三つの公式を驗證し,且つ之を應用して其傍にある式の値を計算せよ.

(一) $A.B=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2-\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$ 63×57 312×288

(二) $A^2+B^2=2\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+2\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$ 63^2+57^2 312^2+288^2

(三) $(x+a)(x+b)=x\{(x+a)+b\}+ab$ 65×65 72×78 83×87

24. 因數分解法とは如何. 幾つかの項の代數和を表せる式を,一つの積の式に變形することを因數分解法といふ.

25. 次の**因數分解法**の八つの公式をよく諳誦すべし.

(一) $AN-BN+CN=N(A-B+C)$

(二) $X^2+(A+B)X+A.B=(X+A)(X+B)$

(三) $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$ (四) $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$

(五) $(A+B)^2-4AB=(A-B)^2$

(六) $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(七) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

(八) $x+a$ が x^3+px^2+qx+r の約數なれば, a は r の約數.

26. 次の各式を因數に分解せよ.

(一) $12px-15q-36qx+5p$ $(ax+by)^2-(bx+ay)^2$

(二) $a^2(b-c)+b^2(c-a)$ $p^2(q-r)+q^2(r-p)+r^2(p-q)$

(三) x^4+4x^2+16 $x^3+4x^2-7x-10$ x^6-y^6

(四) $7x^2+39x-18$ $6x^2-19x+15$ $x^2-xy-x+2y-2$

(五) $(2a-b)^2+4ax-2bx$ $(x^2-x)^2-14(x^2-x)+24$

27. $a+b=30,\ a-b=6$ $\therefore\ ab=216$ とす. 次の各式の値如何.

$4a+4b$ $3a-3b$ $\frac{5}{3}a^2-\frac{5}{3}b^2$ a^2+b^2 a^3+b^3

28. $x^2+mx+24,$ $x^2+nx+18$ が $x+a$ なる形の公約數を有する樣に m, n, a (皆正或は負の整數)の値を定めよ.

29. 次の各組の最大公約數を求む.

$(1209,\ 651)$ $[3x^3+5x^2-15x+4,\ 6x^3+27x^2+21x-9]$

30. 次の各組の最小公倍數を求む.

$(276,\ 560,\ 805)$ $\left(\frac{19}{24}\text{秒},\ 2\frac{1}{28}\text{秒},\ \frac{38}{45}\text{秒}\right)$

$(y^3+y^2-4y-4,\ y^3+2y^2-y-2,\ y^3-2y^2-y+2)$

例
$$\begin{array}{r|rrr}
3 & 627 & 663 & 969 \\ \hline
19 & 209 & 221 & 323 \\ \hline
17 & 11 & 221 & 17 \\ \hline
 & 11 & 13 & 1
\end{array}$$

L.C.M.$=3.19.17.11.13$

31. 次の各を帶分數或は眞分數にて答へよ(既約にして).

$\frac{494}{481}$ $6\left(\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{4x-2}{3x-2}-\frac{1}{6}\right)$ $\frac{x^4+4ax^3-12a^3x-9a^4}{x^3+3ax^2-a^2x-3a^3}$

32. 或數の逆數とは如何. 或數の逆數とは,之と元の數との積が1に等しくなるものなり.

33. $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}$ $\frac{17}{y-16}+\frac{15}{y-18}=\frac{32}{y-17}$ 答 $x=5,\ y=33$

34. $\dfrac{\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}}{1-\frac{1+x^2}{(1+x)^2}}+\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\frac{x-1}{x}}}$ $\dfrac{3\frac{2}{3}-5\frac{1}{4}\div 3\frac{1}{2}+y}{3\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}-3\frac{1}{2}\times y}=3$ 答 $\begin{cases}\frac{1+3x+x^2}{1-x^2}\\ y=4\frac{5}{6}\end{cases}$

35. $\dfrac{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2+\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-2}{\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2-\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2}$ $\dfrac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+2}{\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}-3\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)}\div\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}-2}$ 答 $\begin{cases}\frac{2ax}{x^2+a^2}\\ \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\end{cases}$

答　**3.** (一) $\frac{a+b}{2}=b+\frac{a-b}{2}$, $b=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$, $\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}-b$, $b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$, $\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}$, 第五をば,二つの數の和半と,差半との差は小なる數に等し. (二)も同様. **4.** $\frac{a}{x}=b$, $a=bx$, $x=\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}=x$, $bx=a$, $b=\frac{a}{x}$. **6.** $3^3.2$, $2^2.3^2.7$, $2^3.3^4$, $11^3.2$. **7.** (一) $x>3$ (二) $x<-2$ (三) $3>x>-2$. **8.** (一) $x>=<23$ に從つて(左邊)$>=<$(右邊) (二) ($x<-2$ 或は $x>3$) なれば(左邊)>0, ($x=-2$ 或は $x=3$) なれば(左邊)$=0$, ($-2<x<3$) なれば(左邊)<0. **9.** (歳出豫算總計)$<=>7400$ に從つて(陸軍省の分)$>=<$(海軍省の分),本題は大正五年度の豫算(經常費,臨時費合計)に就て考ふ. 此年歳出總額は5.535億圓なり. **12.** 60334815, 60303731. **14.** 0, 3, (8, 3), (3, −3). **20.** $a+b+c+d$. **22.** $a^2-2ad+d^2-b^2+2bc-c^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^4}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{b^2}{y^2}$. **23.** (一) 3591, 89856 (二) 7218, 180288. (三) 4225, 5616, 7221. **26.** (一) $(p-3q)(12x+5)$, $(a+b)(a-b)(x+y)(x-y)$.
(二) $(a-b)\times(ab-ac-bc)$, $(q-r)(p-r)(p-q)$. (三) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$, $(x+1)(x-2)(x+5)$, $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.
(四) $(7x-3)(x+6)$, $(2x-3)(3x-5)$, $(x-2)(x-y+1)$.
(五) $(2a-b)(2a-b+2x)$, $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$. **27.** 120, 18, 300, 468, 7560. **28.** (a, m, n) の組は, $(\pm1, \pm25, \pm19)$, $(\pm2, \pm14, \pm11)$, $(\pm3, \pm11, \pm9)$, $(\pm6, \pm10, \pm9)$ 複號は共に〔+〕, 或は共〔−〕を取るものとす. **29.** 93, x^2+3x-1. **30.** 2^4 3.5.7.23, 1分54秒. $(y+1)(y-1)(y+2)(y-2)$. **31.** $1\frac{1}{37}$, $\frac{x-2}{6(2x-1)(3x-2)}$, $x+a-\frac{2a^2}{x-a}$.

中學

代數教科書

巻下

目次

第六篇　開平及び開立

第七篇　二次方程式

一元二次方程式

聯立二次方程式

第八篇 比,比例

基本の性質

比,比例の應用

第九篇 級 數

第十篇 一般の指數,對數,歩合算

一般の指數

對 數

步合算

卷下內容一覽表

篇	節	例	公式法則	問題	頁數	授業時數
第六篇	4	20	9	78	43	18
第七篇	7	35	8	227	86	50
第八篇	5	21	6	107	50	24
第九篇	3	13	7	112	34	20
第十篇	7	22	5	98	47	29
計	26	111	35	622	260	141

著者は第四學年に於て對數迄を終へ,第五學年に於ては步合算(9時間)及び附錄に就て代數教科全般の復習を豫定せるものなり.

中學

代數教科書

第六篇

開平及び開立

31. 自乘(羃法)の公式

乘羃 乘羃(羃)とは同じ數を幾つか取りて,次第に掛けたる積を表す式なり

a^5 ハ a ノ第五羃ニシテ,a ハ羃ノ底數,5ハ羃ノ指數ナリ. $a^5=a.a.a.a.a$ ノ如ク,羃ノ指數トハ,其羃ヲ積ノ式ニテ表ストキニ於テ,其底數ヲ因數トシテ幾ツ取ルベキカヲ表ス數ナリ.

$a^1=a$ 羃指數ガ1ナル乘羃ハ底數ニ等シ.

自乘(或は羃法) 或數の乘羃を求め,或は或式の乘羃を展開することを自乘或は羃法といふ.

自乘ハ乘法ノ特別ノ場合ニ過ギザレドモ,開法

及ビ對數法(第十篇)ノ基本トナルモノナリ.

底數,冪指數及ビ冪ヲ自乘の三元トイフ.

〔1〕 指數の定則

$$a^5.a^3=a^8 \qquad a^m.a^n=a^{m+n}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{a^9}{a^4}=a^5 \qquad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(a.b)^4=a^4b^4 \qquad (a.b)^n=a^nb^n\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a^4}{b^4} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$(a^3)^4=a^{12} \qquad (a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}\ldots\ldots(5)$$

$a^3.a^5=a.a.a.(a.a.a.a.a)=a^8$ ノ様ニ,冪ノ式ハ之ヲ積ノ式ニ書キ變ヘテ,其算法ヲ見出スヲ得.

此等ノ公式ハ其左右ヲ取リ換ヘタルモノヲモ記憶スベシ.

(一)　公式 $a^m \div a^n$ ヲ m, n ノ大小如何ニカカハラズ,廣ク適用シテ,次ノ如ク計算スルコトアリ. 而シテ a^0 ハ 1 ヲ, a^{-1} ハ $\frac{1}{a}$ ヲ, a^{-2} ハ $\frac{1}{a^2}$ ヲ表スモノトス.

$$\begin{cases} a^5\div a^3=a^2 \\ a^5\div a^4=a^1 \\ a^5\div a^5=a^0 \\ a^5\div a^6=a^{-1} \\ a^5\div a^7=a^{-2} \end{cases}$$

又　$\frac{a^x}{a^y}=\frac{1}{a^{y-x}}$　トナシタルトキ

$y=3$, $x=5$ ナレバ　$\frac{1}{a^{-2}}$ ヲ得.

而シテ　$\frac{1}{a^{-2}}$ ハ a^2 ト答フベシ.

$$a^0=1 \qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

指數ノ定則ハ指數ガ0,又ハ負ノ數ナル場合ニモ眞ナルモノナリ.

(二)　$(-a)^6=(-a)(-a).(-a)(-a).(-a)(-a)=a^6$

$(-a)^7=(-a)^6.(-a)=-a^7$　卽チ　$-[a^7]$

$(-a)^{2n}=[(-a)^2]^n=(a^2)^n=a^{2n}$

$(-a)^{2n+1}=(-a)^{2n}.(-a)=a^{2n}.(-a)=-a^{2n+1}$

卽チ, 底數が負の數なる時の乘冪の値は,指數が偶數なれば正の數にして,指數が奇數なれば負の數なり.

〔2〕 二項式の冪法 (二項定理)

二項式 (A+B) の乘冪 $(A+B)^n$ の展開式を,分離係數法によりて記せば次の如し.

$$\begin{cases}(A+B)^1 & 1+1\\(A+B)^2 & 1+2+1\\(A+B)^3 & 1+3+3+1\\(A+B)^4 & 1+4+6+4+1\\(A+B)^5 & 1+5+10+10+5+1\end{cases}$$

即チ $(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$

$(a-x)^4=a^4-4a^3x+6a^2x^2-4ax^3+x^4$

〔3〕 多項式の平方

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^2\\=\,&a^2+2ab+2ac+2ad\\&\quad+b^2+2bc+2bd\\&\qquad+c^2+2cd\\&\qquad\quad+d^2\end{aligned}$$

	a	b	c	d
a	a^2	ab	ac	ad
b	ab	b^2	bc	bd
c	ac	bc	c^2	cd
d	ad	bd	cd	d^2

問題 第二十七集

次ノ各題ノ式ノ計算ヲ行ヘ.

1. 2^4-4^2 $\quad 2^{10}-10^2$ $\quad (-2)^2+(-2)^3+(-2)^4$

2. $z^{n-1}.z$ $\quad a^3.a^{x-2}$ $\quad a^n.a^n$ $\quad x^{n+3}.x^{n-4}$

3. $(-a)^4.a^7$ $\quad (-a)^{n-1}.(-a)^{n+1}$ $\quad (a-b)^3(b-a)^n$

4. $\dfrac{a^{2n}}{a^{n-x}}$ $\quad \dfrac{b^{x+1}}{b^{x-1}}$ $\quad \dfrac{a^{n-3}}{a^{n-x}}$ $\quad \dfrac{a^{2x+3y}}{a^{3x+2y}}$ $\quad \dfrac{a^2b^2(a-b)^5}{(a^2+b^2)(b-a)^4}$

5. xガ10ノトキ,次ノ各式ノ數値如何

$3x^0+x^{-1}+4x^{-2}+x^{-3}+6x^{-4}$ $\quad 3x^{-1}+x^{-2}+8x^{-3}+3x^{-4}$

6. 3^{3-3} $\quad p^8.p^{-5}$ $\quad a^3.a^{-5}$ $\quad (-0.5)^{-2}$ $\quad 3^2.2.5^{-2}$

7. $(ax^{2m}+bx^{2n})\div x^{m+n}$ $\quad (a^{3x-4y}+a^{2y-3x}+a^{3(x-y)})\div a^{4x-5y}$

8. $6^3.5^3$ $\quad \dfrac{15^3}{5^3}$ $\quad \dfrac{28^2+14^2}{7^2}$ $\quad \left(7\dfrac{1}{2}\right)^5.\left(1\dfrac{1}{3}\right)^5$

9. $\dfrac{25^3.72^2}{9^3.20^4}$ $\quad \dfrac{(6^2)^5}{(3^3.4)^2}$ $\quad \dfrac{3(2a^2b^3)^2}{4(3x^3y^2)^3}\div\dfrac{5(2ab^2)^3}{7(3x^4y^3)^2}$

10. $\dfrac{1-x^3}{x^5}+\dfrac{1}{x^2}$ $\quad \dfrac{1-2x^2}{x^p}+\dfrac{2-3x^2}{x^{p-2}}+\dfrac{3}{x^{p-4}}$

11. $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

12. $(x+x^{-1})^3$ $\quad (x+2y)^4+(x-2y)^4$ $\quad (p+r)^5-(p-r)^5$

13. $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=3x(x+1)(x+2)$ ヲ解ケ.

14. 次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

$x^{3n}+y^{3r}$ $\quad x^{n+r}-x^{n-r}$ $\quad x^{n+1}-2x^n+x^{n-1}$

15. (一) 次ノ恒等式ヲ完成セヨ(驗 $a=7$, $b=3$).

$$a^3+b^3=(a+b)^3-(\quad)$$

(二) $(3-x)^3+(2-x)^3-(3+2-2x)^3$ (因數分解)

〔注意〕 a^2+b^2 ハ $(a+b)^2$ ニ等シカラズ.

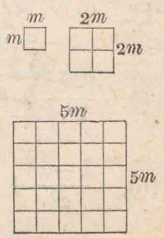
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (二項定理)

$(ab)^2=a^2b^2$ (指數の定則)

$(a+b)\times 2=2a+2b$ (配分定則)

$(ab)\times 2=(2a)b=a(2b)$ (結合定則)

m 寸平方 (m^2) ノ板ヲ並ベ合セテ正方形ヲ作ルニハ幾枚用フベキカトイフニ,之ヲ4,或ハ9,或ハ16,……或ハ100,或ハ121……一般ニ任意ノ整數 k ノ平方卽チ k^2 箇ダケ用フレバ常ニ正方形トナラシムルコトヲ得. 卽チ



$$k^2m^2=(km)^2$$

又逆ニ一ツノ正方形ハ,之ヲ一ツノ整數 k ノ平方箇ノ相等シキ正方形ニ分ツコトヲ得.

$$4m^2=(2m)^2 \qquad 9m^2=(3m)^2 \cdots\cdots k^2m^2=(km)^2$$

$$\frac{1}{4}m^2=\left(\frac{1}{2}m\right)^2 \qquad \frac{1}{9}m^2=\left(\frac{1}{3}m\right)^2 \cdots\cdots \frac{1}{k^2}m^2=\left(\frac{1}{k}m\right)^2$$

面積の命位法

平方尺		平方寸		平方分	
2 3		4 5		4 3.2	

體積の命位法

立方尺	立方寸	立方分
2 3 4	5 4 3	2 1

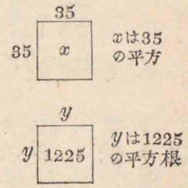
35
√12|25
65
9
325
325
0

32. 開平方の例

平方 或數の平方とは其數を二つ採りて相乘したる積なり. 例ヘバ正方形ノ地面アリテ其各邊ガ35ナル時ハ,其面積ハ35ノ平方ニシテ1225,

1225 ハ 35 ノ平方,

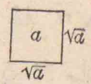
35 ハ 1225 ノ平方根.



平方根 或數 a の平方根 $(\sqrt{a})$ とは之を二乘すれば a に等しくなる數のことなり.

$\sqrt{a}$ を平方根 a と唱ふ

$$(\sqrt{a})^2=(\sqrt{a})(\sqrt{a})=a \qquad \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$$



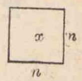
開平方(開平) 一つの數 a が與へられたる時,如何なる數の平方が a に等しくなるべきか,或は a に近くなるべきかを求むることを a を平方に開

くといひ,平方に開く計算を開平方(開平)といふ.

二乘と開平とは互に逆の計算なり.

(一)　$\sqrt{x}=n$ ナレバ $n^2=x$

(二)　$n^2=x$ ナレバ $\sqrt{x}=n$



〔**例一**〕(一)　$576=(\quad)^2$

解

$$\begin{array}{r|r} 2 & 576 \\ \hline 2 & 288 \\ \hline 2 & 144 \\ \hline 8 & 72 \\ \hline & 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ 576 &= 2^6.3^2 \\ &= (2^3.3)\times(2^3.3) \\ &= (2^3.3)^2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

之ニ依レバ次ノコトガ分ル.

$$\begin{cases} (2^3.3).(2^3.3)=2^6.3^2=576 \\ \sqrt{576}.\sqrt{576} \qquad =576 \end{cases}$$

$$\therefore\ \sqrt{576}=\sqrt{2^6.3^2}=2^3.3=24$$

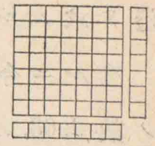
$\sqrt{a}$ は a を二つの相等しき因數の積の式にて表したるときの一つの因數を表すものと看做さる.

(二)　一寸平方ノ板63箇アリ,之ヲ列ベ合セテ成ルベク大ナル一ツノ正方形ヲ作レバ一邊幾許.

說明　$8^2>63>7^2$ ナルヲ以テ,63箇ノ中49箇ヲ

用ヒテ7寸平方ニ並ベ合スレバ,殘リ14箇トナル.

答　一邊7寸,殘リ14箇



63ヲ平方ニ開ケバ,**開平整商**ハ7ニシテ,**開平剩餘**ハ14ナリ.

$$63=7^2+14$$

此場合ニ一寸平方ガ尙1箇アリテ都合64箇ナレバ,丁度8寸平方ニ列ベテ殘リ無キヲ得.

開平剩餘は,開平商の二倍に等しきことあり.

丁度或整數或は分數(或は小數)の平方に當れる數$(64,\ \frac{4}{9},\ 0.25)$を完備なる平方數或は單に平方數といふ.

平方九九　1ヨリ9マデノ基數ノ平方ヲ求ムル乘法九九ヲ特ニ平方九九トイフ.

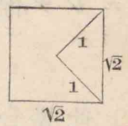
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81

學生各自ガ一ツノ正方形ヲ作リテ,其一邊ニ適宜ニ其長サヲ表ス數ヲ記入シテ後,之ヲ二乘シテ

其面積ヲ求ムレバ得ル處ノ數ハ皆平方數ナリ.

此等ノ場合ニ互ニ其面積ヲ表ス數ヲ告ゲテ,其一邊ヲ求ムル計算ハ卽チ開平方ナリ.

然ルニ今此順序ヲ更ヘテ正方形ノ面積ニ任意ノ數 2, 63,……ヲ與フレバ其一邊ノ長サ如何ニトイフニ,此場合ニモ猶後ニ說クコトニヨリテ,其一邊ノ長サノ近似値ヲ望ミ通リ精密ニ求ムルコトヲ得. 故ニ $\sqrt{2}$, $\sqrt{63}$, ……ハ,常ニ面積ガ 2, 63,……ナル正方形ノ一邊ノ長サヲ表スモノト看做サル.



本篇ニ於テハ正ノ數ノミヲ論ジ,且ツ文字モ正ノ數ノミヲ表スモノトス.

〔例題〕**1.** 次ノ表中ノ各數ノ開平整商ト剩餘トヲ求ム.

數	開平整商	開平剩餘
20	4	4
46	6	10
85	9	4
125	1 2	
150		

2. 64, a^4, $9x^2$ ノ各ハ何ノ平方ナルカ.

3. $64a^6b^{12}=(\quad)^2$　$9^3=(\quad)^2$　$26^2-10^2=(\quad)^2$

4. $36x^2y^6$, 144, 256 ノ各ヲ平方ニ開ケ.

5. $\sqrt{64a^2b^2}$, $\sqrt{4^2+3^2}$, $\sqrt{4x^2-12x+9}$ ノ各ヲ求ム.

〔**注意**〕(一) $8\times8=64$, 又 $(-8).(-8)=64$

故ニ 64 ノ平方根ニ 8 ト -8 トノ二ツアリ.

正ノ數ノ平方根ハ二ツアリ,其等ハ絕對値相等シクシテ一ツハ正ノ數,他ノ一ツハ負ノ數ナリ.

言葉ニテ或數ノ平方根ト言ヘバ,其二ツノ平方根ヲ表スモノトス.

a の平方根の中,正の數の方を $\sqrt{a}$, 負の數の方を $-\sqrt{a}$ にて表すものとす.

(二) $\sqrt{(-8)^2}$ ハ正ノ數 8 ヲ表ス,故ニ (-8) ヲ $(-a)$ ニテ,又 b ニテ表セバ,次ノコトガ分ル.

$a>0$ なれば　$\sqrt{(-a)^2}=(-a)\times(-1)$

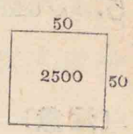
$b<0$ なれば　$\sqrt{b^2}=b\times(-1)=-b$

平方根の位取り　或整數の開平整商の桁數は,其數を一位より初めて二桁宛に區切りたる時の節の數に等し. 小數の開平商の桁數も其數を小數第一位より右へ二桁宛に區切りて知らる.

2500ノ開平商ハ50

56,85,16ノ開平首商ハ7百

0.00,28,09ノ開平首商ハ0.05



〔例二〕 2809箇ノ碁石ヲ並ベ合セテ,成ルベク大ナル一ツノ正方形狀ニナサントス(一列ノ石ノ數ト,列ノ數ト相等シ). 一邊ノ石ノ數ヲ求ム.

演算

$$\begin{array}{r|l} 28,09 & 53\ldots\text{答} \\ 25 & 103 \\ \hline 309 & \\ 309 & \end{array}$$

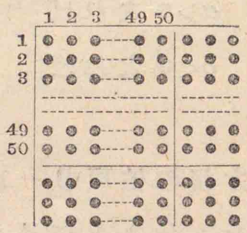
驗算

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times\ 53 \\ \hline 159 \\ 265 \\ \hline 2809 \end{array}$$

答 53

説明 (一) 先ヅ開平首商5拾ヲ得剩餘ノ右ニ次ノ一節ヲ添ヘテ309トス. 此意義ヲ圖ニ就テ考

$$\begin{array}{r|l} & \text{拾位} \\ 28,09 & 5 \\ 25 & 10\ldots\text{目安} \\ \hline 309 & \text{拾位} \\ \text{拾位} & \end{array}$$



フレバ2500箇ヲ用ヒテ一邊ガ50箇ナル正方形ヲ作リタル殘リガ309箇ナルコトニ當ル.

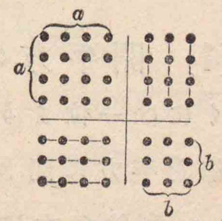
(二) 309ヲ第二部分實トシ,首商ノ2倍ナル10拾ヲ目安トシテ,此部分實ノ右端ノ一桁9ヲ省キタルモノ30拾ヲ割リ試ミタル商$\frac{30}{10}=3$ヲ目安ノ右ヘ書キ添ヘタルモノ103ヲ法トシ,之ニ同ジ數字3ヲ掛ケテ309ヨリ引キテ殘リ無シ.

(三) 目安10拾ハ最初ノ正方形(5拾平方)ノ一邊ノ二倍5拾×2ナリ. 而シテ之ニテ第二部分實30拾ヲ割レバ30拾箇ノ中ニハ,第一正方形ノ右ト下トヘ幾列宛並ベ足スヲ得ルダケノ石ガアルカガ分ル.

又3ヲ目安ヘ書キ添ヘテ,ソレニ3ヲ掛ケタルモノヲ引ケバ,隅ヘ列ブベキ3^2箇モ引カルルナリ.

開平の標準の形 $a^2+2ab+b^2$ヲ與ヘテ其平方根$a+b$ヲ求ムル演算ヲ次ノ如ク組ミ立テタルモノヲ開平ノ標準ノ形トナス.

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a+b\ldots\text{答} \\ a^2 & 2a+b \\ \hline 2ab+b^2 & \\ 2ab+b^2 & \end{array}$$



〔例題〕 1. $\sqrt{1369}$　$\sqrt{3249}$　$\sqrt{7056}$　$\sqrt{9604}$

a^2+x^2　$2x-5y$

2. $\sqrt{a^4+2a^2x^2+x^4}$,　$\sqrt{4x^2-20xy+25y^2}$,　$\sqrt{9a^2+6ab+b^2}$

a^4　$4x^2$

$2a^2x^2+x^4$　$20xy$　$5y$　$-20xy+25y^2$

$2a^2x^2+x^4$

$2a^2x^2$　x^2　x^4

〔例三〕 面積ガ 74529 ナル正方形ノ一邊幾許.

演算			驗算	
	7,45,29	273…答		273
	4	47		×273
	345	7		819
	329	543		1911
	1629			546
	1629	答 273		74529

說明　先ヅ例一ノ如ク, $745^{\text{百}}$ ヲ開キテ商 $27^{\text{拾}}$, 剰餘 $16^{\text{百}}$ ヲ得.

第三部分實ヲ 1629 トシ, 既ニ得タル商 $27^{\text{拾}}$ ノ二倍ナル $54^{\text{拾}}$ ヲ目安トスルコト例二ノ如シ. 此目安 $54^{\text{拾}}$ ニテ $162^{\text{拾}}$ ヲ割リ試ミタル商 $\frac{162}{54}=3$ ヲ目安ノ右ヘ書キ添ヘタルモノ 543 ヲ法トシ, 之ニテ 1629 ヲ割リテ其數字 3 ヲ確メタルナリ.

〔1〕 開平方の規則　(一) 或整數を平方に開くには一位より二桁毎にコンマを切り, 左端の一節を平方に開き

(二) 剰餘の右に次の一節を下して部分實とし, 既に得たる開平商の二倍を目安とし, 部分實の右端の數字を假りに省きたるものを, 目安にて割りて得べき商の數字を目安の右に書き添へて法を作り, 此法に其數字を掛けたるものを部分實より引くべし, 若し引けざれば一つ少なき商をたて, 法を作り更へて試むべし.

(三) 以後は(二)と同様なり.

$\sqrt{74529}=273$ ナルコトガ分レバ, 正方形ノ面積ガ

745.29 平方尺ナレバ, 其一邊ハ 27.3 尺,

0.074529 方里ナレバ, 其一邊ハ 0.273 里.

小數或ハ帶小數ノ開平方ハ平方根ノ位取リヲナシタル後ハ, 小數點ヲ無キモノトシテ開ケバヨシ.

Kakamadesamu

問題　第二十八集

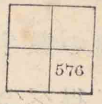
1. $\sqrt{75625}$　$\sqrt{582169}$　$\sqrt{13.4689}$　$\sqrt{0.06175225}$

2. $\sqrt{49533444}$　$\sqrt{3226.694416}$　$\sqrt{892037700}$ (整商ヲ)

3. $\sqrt{a^4+4a^3b+2a^2b^2-4ab^3+b^4}$　$\sqrt{b^4-4ab^3+2a^2b^2+4a^3b+a^4}$

4. $\sqrt{576\times 4}$ $\sqrt{1296\times 4}$

$\sqrt{75625\times 9}$ $\sqrt{676\times n^2}$



〔例一〕 次ノ算法ヲヨク記憶スベシ(分數の開平方).

(一) $\sqrt{69\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{625}{9}}=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$ 答

(二) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0.428571\ldots\ldots}=0.654\ldots\ldots$ 答

(三) $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{\frac{21}{49}}=\frac{\sqrt{21}}{7}=\frac{4.582\ldots}{7}=0.654\ldots\ldots$ 答

5. $\sqrt{32\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{7}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{4}}$ ノ各ヲ求ム(小數二桁)

イツモ四捨五入ノ法ニヨリテ近似値ヲ所要ノ位迄求ムベシ.

6. $\sqrt{15}$ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ $\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\sqrt{0.6}$ (各小數三桁).

〔例二〕 $\{\sqrt{[(x+3)^2-14]\times 2}\}\div 5=2$ ナレバ x 幾許.

解 $x=\sqrt{(2\times 5)^2\div 2+14}-3=5$ 答

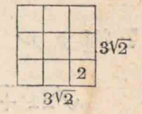
正ノ數ノミヲ論ズル場合ニ於テ還元法ノ規則ハ次ノ如シ.

$\{\sqrt{[(x+a)^2-b]\times c}\}\div d=m$ なれば

$x=\sqrt{(m\times d)^2\div c+b}-a$

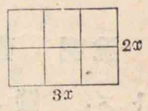
7. $(x\times 2-7)^2=9$ $\sqrt{3x-5}+4=17$ $x^2+702=141327$

8. 正方形ノ一邊ガ次ノ如キ各場合ニ就テ其面積ヲ求ム.



$3\sqrt{2}$ $6\sqrt{3}$ $80\sqrt{5}$ $\frac{\sqrt{420}}{3}$

9. 矩形ノ農園アリ,其横縱ノ比 2:3 ニシテ其面積3174歩ナリ. 横縱各何程.

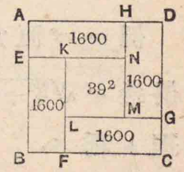


10. 矩形ノ横縱ノ比 7:5 ニシテ,其面積11町9段4畝20歩ナリ,横縱各幾許.

〔例三〕 矩形アリ,其面積 1600 平方分ニシテ,相隣レル二邊ノ差 3 寸 9 分ナリ. 各邊幾許.

解 $\sqrt{39^2+4\times 1600}=\sqrt{7921}=89$(分)……二邊ノ和

$$\left.\begin{array}{ll}\text{長サ} & \dfrac{89+39}{2}=64(\text{分})\\ \text{幅} & \dfrac{89-39}{2}=25(\text{分})\end{array}\right\}\text{答}$$



驗算 $64-25=39$ $64\times 25=1600$

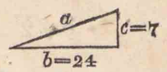
$$〔2〕\cdots\left\{\begin{array}{l}(a-b)^2+4ab=(a+b)^2\\ \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2+ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\end{array}\right.$$

11、二數ノ差21,其積1296ナリ,各數如何.

12. 二數ノ和100,其積2496ナリ,各數如何.

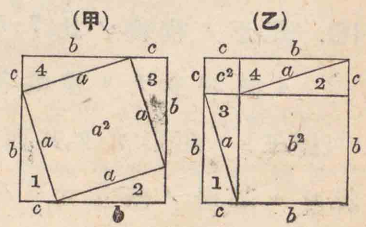
〔例四〕 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ24糎,7糎ナルトキ,斜邊幾許.

$$\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25$$



答 25糎

説明 直角三角形ノ斜邊ヲa,他ノ二邊ヲb, cトス. 圖ノ如ク一邊ガ$b+c$ナル正方形ヨリ,其三角形ヲ四ツ引クニ甲圖ノ如ク引ケバa^2ガ殘リ,乙圖ノ如ク引ケバb^2トc^2トガ殘ル.



故ニ

$$a^2=b^2+c^2$$

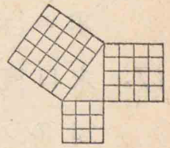
例ヘバ直角ノ二邊(bトcト)ガ3ト4トナレバ斜邊ハ$\sqrt{3^2+4^2}=5$ナリ. 此ノ定理ヲ俗ニ**三四五の理**ト稱ス.

又例ヘバ斜邊ガ65間,直角ノ一邊ガ63間ナレバ他ノ一邊ハ

$$\sqrt{65^2-63^2}=\sqrt{(65+63)(65-63)}=16\text{(間)}$$ 答

〔注意〕 次の各組の整數は,各一つの直角三角形の三邊を表す數なり.

$$\begin{cases}(3, 4, 5)\ (5, 12, 13)\ (8, 15, 17)\\(7, 24, 25)\quad(20, 21, 29)\\(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)\end{cases}$$



但しm, nは任意の整數

此等ノ二三ヲ記憶スレバ便利ナルコトアリ.

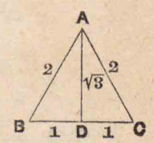
例ヘバ直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ12尺,16尺ナレバ $12:16=3:4$ ∴ 三邊ハ $3:4:5$ ニ比例シ,斜邊ハ20尺ナリ.

〔3〕 直角三角形の斜邊をa,他の二邊をb, cとすれば $a^2=b^2+c^2$

13. 直角三角形ノ斜邊ガ73寸,直角ノ一邊ガ48寸ナレバ他ノ一邊如何.

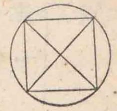
14. $\sqrt{29^2-20^2}$ $\sqrt{\dfrac{26^2-10^2}{53^2-45^2}}$ $\sqrt{\dfrac{(a+b)^2-4ab}{85^2-36^2}}$

15. 正三角形ノ一邊二尺ナル時,其高サハ幾許(厘ノ位迄).



イツモ正シキ圖ヲ書キテ,圖ニ就テ求ムル長サヲ測リ,ソレヲ計算ノ結果ト比較スベシ.

16. 周ガ12糎ナル正方形ト,正三角形トノ面積ヲ求ム(平方糎ノ小數二桁).



17. 末口直徑1尺2寸ノ丸太ヨリ幾寸角ノ材ヲ得ベキカ(厘迄).

〔例五〕 $36x^2+60x+24$ ヲ平方ニ括ルコト.

$$36x^2+60x+24$$
$$=(6x+5)^2-1 \quad \text{答}$$

$$\begin{array}{r|l} 36x^2+60x+24 & 6x+5 \\ 36x^2 & 12x+5 \\ \hline +60x+24 & \\ +60x+25 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

18. 次ノ各式ヲ平方ニ括レ.

$9x^2-30x+6 \qquad 4x^4-20x^3+37x^2-29x+5 \qquad 3x^2+5x$

19. $a^2-2ab+b^2$ ハ $(a-b)^2$, 或ハ $(-a+b)^2$ ト括ラル,之ト同様ニ次ノ各ヲ二様ニ括ルコト.

$m^2+n^2-2mn \qquad 13x^4+13x^2+4x^6-14x^3+4-4x-12x^5$

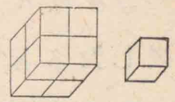
20. 次ノ各式ガ完全平方式トナル様ニ k, m, n ノ値ヲ定メヨ(各二様ニ).

$a^2+kab+b^2 \qquad 49x^6-112x^4+kx^3+mx^2+nx+25$

33. 開立方の例

一寸立方ヲ積ミ合セテ立方體ヲ作ルニハ幾ツ

用フベキカトイフニ,之ヲ 8, 27, 64,……1000(=10^3), 1331(=11^3), 1728(=12^3)……一般ニ任意ノ整數 k ノ立方,即チ k^3 箇ダケ用フレバ常ニ立方體トナラシムルコトヲ得.



立方九九 基數ノ平方ニ其基數ヲ掛クレバ

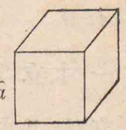
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
n^3	**1**	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**	**343**	**512**	**729**

是ハ一一ガ一,二二ガ八,三三二十七,……ト唱ヘテ諳誦スベシ.

完備なる立方數(**立方數**)とは丁度或整數,或は分數或は小數の立方に當れる數をいふ.

例ヘバ 125(=5^3) ハ立方數ニシテ,5ハ其**立方根**ナリ. **5** ヲ $\sqrt[3]{125}$ ニテ表ス. $\sqrt[3]{125}$ ヲ**立方根百二十五**ト唱ヘ,3ヲ根指數トイフ.

立方根 或數 a の立方根($\sqrt[3]{a}$)とは,之を三乘すれば a に等しくなる數なり.



$$(\sqrt[3]{a})^3=(\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{a})=a$$

$\sqrt[3]{a}$ は a を三つの相等しき因數の積の式にて表したるときの一つの因數を表す式なり.

開立方(開立) 一つの數 a が與へられたる時,如何なる數の立方が a に等しくなるべきか,或は a に近くなるべきかを求むることを a を**立方に開く**といひ,立方に開く計算を開立方といふ.

〔例一〕 342 箇ノ一寸立方ヲ積ミ合セテ,成ルベク大ナル一ツノ立方體ヲ作レバ如何.

説明 $7^3>342>6^3$ ナルヲ以テ,其中 216 箇ヲ用ヒテ 6 寸立方ヲ作レバ,殘リ 126 箇トナル.

答 6 寸立方,殘リ 126 箇

342 ヲ立方ニ開ケバ**開立整商**ハ 6 ニシテ,**開立剩餘**ハ 126 ナリ

$$342=6^3+126$$

342 ヲ斯樣ニ變形スルコトヲ,之ヲ**立方に括る**トイフ.

一寸立方ガ尚 1 箇アリテ 343 箇ナレバ,丁度 7 寸立方ヲ作リテ殘リ無キヲ得. 6 ヲ a ニテ表セ

バ 342 ハ次ノ如ク表サル.

$$\begin{cases}(a+1)^3-1=a^3+3a^2+3a \\ \text{而して開立剩餘は}\quad 3a^2+3a\end{cases}$$

開立剩餘ハ其開立商ノ平方ノ 3 倍($3a^2$)ト開立商ノ三倍($3a$)トノ和ニ等シキコトアリ.

〔例題〕 次ノ各ノ開立整商ト剩餘ト如何.

100 215 400 800 1500

立方九九ハ之ヲ能ク諳誦スベシ.

開立の標準の形 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ヲ與ヘテ其立方根 $a+b$ ヲ求ムル演算ヲ次ノ如ク組ミ立テタルモノヲ開立の標準の形トナス.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$a+b$ …………答	
a^3	$3a^2$ …… 目安	$3a+b$
$+3a^2b+3ab^2+b^3$	$+3ab+b^2$ …(1)	$+b$
$+3a^2b+3ab^2+b^3$	$3a^2+3ab+b^2$ ..(2)	
	(甲)	(乙)

説明 (一) 甲欄ハ法ヲ,乙欄ハ補助計算ヲ記ス所ナリ.

原式ノ第一項 a^3 ヲ立方ニ開キテ a トシ,之ヲ答ノ欄ニ記ス.

(二) 殘リノ三項 $+3a^2b+3ab^2+b^3$ ヲ下シテ第二部

分實トス．補助計算欄乙ノ所ヘ商ノ三倍$3a$ヲ書キ，之ニaヲ掛ケタル積$3a^2$ヲ**目安**（前節例三）トシテ甲欄ヘ書ク．目安$3a^2$ニテ部分實ノ初項$3a^2b$ヲ試ミニ割リタル商$\frac{3a^2b}{3a^2}=b$ヲ乙欄ノ$3a$ニ加ヘ，其下ニ同ジbヲ書キ，此二ツ$3a+b$トbトノ積$3ab+b^2$……(1)ヲ甲欄ニ書キテ，目安ト加ヘタルモノ$3a^2+3ab+b^2$……(2)ヲ法トシ，之ニbヲ掛ケテ部分實ヨリ引キ，答ノ第二項ニ$+b$ヲ記ス．

〔例題〕　$\sqrt[3]{8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3}$

$\sqrt[3]{27x^3+189x^2+441x+343}$

開立の標準の形に於て法の計算欄の(1)と(2)との式とb^2とを加へ合すれば$3a^2+6ab+3b^2$となる，これは計算が猶引續きて行はるる場合に於て答の第三項を求むる時の目安となるものなり．

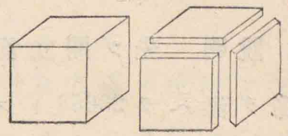
立方根の位取り　整數の開立整商の桁數は，其數を一位より初めて三桁宛に區切りたる時の節の數に等し．小數の開立商の桁數も，其數を小數第一位より右へ三桁宛に區切りて知らる．

413493625 卽チ 413,493,625 ノ開立首商ハ 7百

0.00058 卽チ 0.000,580 ノ開立首商ハ **0.08**

〔例二〕（一）1尺2寸立方ト，1650箇ノ1寸立方トアリ，之ヲ積ミ合セテ成ルベク大ナル一ツノ立方體ヲ作レバ，稜ノ長サ幾許．答 1尺5寸殘リ3箇

說明　1尺2寸立方ノ三方ノ表面ヘ，1寸立方ヲ一側增スニハ$12^2\times3=432$ヲ要ス．之ヲ**目安**トシテ



1650÷432=3

次ニ(12+3)寸立方ヲ作リ得ルカトイフニ，體積ノ增加$(a+n)^3-a^3$（甲），或ハ$3a^2n+3an^2+n^3$（乙）ヲ計算スレバ，1647ナリ．故ニ與ヘラレタル1650箇ノ中1647用ヒテ猶3箇殘ル．

12ヲaニテ表セバ**目安**トシタル數432ハ$3a^2$ニテ表サル．

本例ニ於テ1尺2寸立方ノ代リニ3尺立方ヲ，1650箇ノ1寸立方ノ代リニ23653箇ノ1寸立方ヲ用フレバ如何．（答3尺7寸立方，殘リ無シ）

（二）50653箇ノ一寸立方ヲ積ミ合セテ成ルベク大ナル一ツノ立方體ヲ作レバ各稜幾許．

演算

50,653	37……答	
27	27	98
23 653	784……(1)	8
23 653	3484……(2)	
	27	97
	679	7
	3379……(3)	

答　3尺7寸

説明　先ヅ開立首商$3^{\text{拾}}$ヲ得,剰餘ノ右ニ次ノ一節ヲ添ヘテ23653トス. 此意義ヲ形體ニ就テ考フレバ27000箇ヲ用ヒテ$3^{\text{拾}}$寸立方ヲ作リタル殘リガ23653箇ナルコトニ當ル.

50,653	拾位 3	
27	27 ……目安	9
23 653 百位	百位	拾位

23653ヲ第二部分實トス. 首商ノ3倍ナル$9^{\text{拾}}$ヲ補助計算ノ欄ニ書キテ,之ニ再ビ首商$3^{\text{拾}}$ヲ掛ケタルモノ($9^{\text{拾}}\times 3^{\text{拾}}=27^{\text{百}}$)ヲ目安トシテ法ノ欄ニ書ク.

目安$27^{\text{百}}$ニテ部分實ノ右ノ二桁ヲ省キタルモノ$\mathbf{236}^{\text{百}}$ヲ試ミニ割リテ得タル商$\dfrac{236}{27}=8$ヲ,補助計算欄ノ$9^{\text{拾}}$ニ書キ添ヘテ98トシ,此下ヘ更ニ8ヲ書キ,此二ツ98ト8トノ積$7^{\text{百}}84$……(1)ヲ目安$27^{\text{百}}$ニ加ヘタルモノ3484……(2)ヲ法トス. 然ルニ之ニ8

ヲ掛ケタルモノハ部分實ヨリ引ケザルヲ以テ,之ヲ捨ツ.

8ヨリ1減ジタル7ニ就テ前段(2)ト同様ニシテ法3379……(3)ヲ作リ,之ニ7ヲ掛ケテ部分實ヨリ引キ,商ノ第二ノ數字ヲ7トス.

小數或ハ帶小數ノ開立方ハ立方根ノ位取リヲナシタル後ハ,小數點ヲ無キモノトシテ開ケバヨシ.

〔例題〕　1. $\sqrt[3]{12167}$ (答23)　$\sqrt[3]{175616}$ (答56)　$\sqrt[3]{389.017}$

2. $\sqrt[3]{15625}$　$\sqrt[3]{0.013824}$　$\sqrt[3]{0.778688}$　$\sqrt[3]{157464}$

〔例三〕　(一)　$\sqrt[3]{a^6+3a^5b+6a^4b^2+7a^3b^3+6a^2b^4+3ab^5+b^6}$

$a^6+3a^5b+6a^4b^2+7a^3b^3+6a^2b^4+3ab^5+b^6$	a^2+ab+b^2… ……答	
a^6	$3a^4$	$3a^2+ab$
$3a^5b+6a^4b^2+7a^3b^3$	$3a^3b+a^2b^2$	$+ab$
$3a^5b+3a^4b^2+a^3b^3$	$3a^4+3a^3b+a^2b^2$	
$3a^4b^2+6a^3b^3+6a^2b^4+3ab^5+b^6$	a^2b^2	ab
$3a^4b^2+6a^3b^3+6a^2b^4+3ab^5+b^6$	$3a^4+6a^3b+3a^2b^2$	$3a^2+3ab+b^2$
	$3a^2b^2+3ab^3+b^4$	$+b^2$
	$3a^4+6a^3b+6a^2b^2+3ab^3+b^4$	

$1+6+15+20+15+6+1$ヲ立方ニ開ケ(xノ降冪).

(二)　53157.376ヲ立方ニ開クコト.

演算

53,157.376	37.6………答	
27	27	97
26 157	679	7
23 653	3379	
2 504 376	49	7
2 504 376	4107	1116
	6696	6
	417396	

答　37.6

說明　開立商 37拾 ヲ得ル處迄ハ例二ト同ジ.

開立商ノ其次ノ數字ヲ求ムル時ノ目安 $37^2\times3=4107$ ヲ求ムルニハ,今求メタル數字 7 ノ平方 49 ヲ法ノ所ニ書キ足シテ三段加フルナリ(24 頁).

開立ノ算法ハ繁雜ナレドモ,標準の算法ト目安を作る算法(24 頁)トノ二ツニ基ヅク.

次ノ規則ヲ充分ニ諳誦スレバ,演算ニ熟達スル助ケアリ.

〔4〕 開立方の規則　(一) 或整數を立方に開くには一位より初めて三桁毎にコンマを切り,左端の一節を立方に開き

(二) 剰餘の右に次の一節を下して部分實とし,既に得たる開立商の三倍に更に其商を掛けたるものを目安とし,部分實の右の二桁を假りに省きたるものを目安にて割りて得べき商の數字を,既得の開立商の三倍の右に書き添へ,之に其數字を掛けたるものを目安の下へ二桁下げて重ね書き,之を目安に加へて法を作り,此法に其數字を掛けたるものを部分實より引くべく,若し引けざれば一つ少き商をたて法を作り更へて試むべし.

(三) 以下(二)と同様なり.　但し次の目安を作るには今の法の下へ今求めたる數字の平方を書きて三段加ふればよし.

問題　第二十九集

次ノ各題ノ式ノ値ヲ計算セヨ.

1. $\sqrt[3]{51895117}$ (答 373)　$\sqrt[3]{16194.277}$　$\sqrt[3]{54267751656}$

2. $\sqrt[3]{0.000008869743}$　$\sqrt[3]{127795585653}$　$\sqrt[3]{27.189441343}$

3. 次ノ立方根ヲ求ム(a ノ降冪, x ノ昇冪)

$$8+12+42+37+63+27+27$$

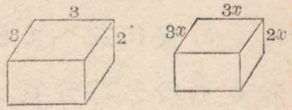
4. $\sqrt[3]{1-12x+60x^2-160x^3+240x^4-192x^5+64x^6}$

〔例〕　互ニ相似形ナル甲,乙二ツノ櫃アリ,甲ハ

內法 3 尺平方,深サ 2 尺ニシテ,乙ハ其容量甲ノ $\frac{2}{3}$ ナリ. 乙ノ內法何程ナルカ(分位迄).

答　2.62 尺平方强,深サ 1.75 尺弱

解　甲ハ內法 3 尺平方,深サ 2 尺ニシテ,乙ハ之ト相似ナルヲ以テ,乙ノ內法ハ $3x$ 尺平方,深サ $2x$ 尺ト表スコトヲ得.



而シテ乙ノ容量ハ甲ノ三分ノ二ナルヲ以テ

$$(3x)^2\times 2x=(3^2\times 2)\times\frac{2}{3}\qquad\therefore\ x^3=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ a=\sqrt[3]{0.666\ldots\ldots}=0.8735\ldots\ldots$$

乙ノ櫃ノ內法ハ甲ノ八割七分三五, 故ニ

(方邊ノ長サ)$=3^{尺}\times 0.8735=2.6205$ 尺

(深サ)$=2^{尺}\times 0.8735=1.7470$ 尺

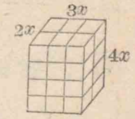
驗算　$(2.62)^2\times 1.75=12.0127$……………………(1)

$$(3^2\times 2)\times\frac{2}{3}=12\text{……………………}(2)$$

或ハ次ノ如ク計算スルモ可ナリ.

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 9}{3\times 9}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}=\frac{2.6207\ldots}{3}=0.8735\ldots$$

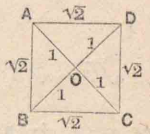
5. 直六面體ノ體積 64827×50 立方分ニシテ,其縱橫高サノ比 2:3:4 ナラバ各稜幾許(厘位迄).



6. 縱橫高サガ a, b, c ナル直六面體甲ト相似ナル他ノ直六面體乙ヲ作リテ,乙ノ體積ヲ甲ノ體積ノ二分ノ一ナラシムルニハ,乙ノ縱橫高サヲ甲ノノ何割ニナスベキカ(千分ノ一ノ位迄).

34. 不盡根數の計算

〔例一〕　面積ガ 2 平方尺ナル正方形ノ一邊幾許.



解　$\sqrt{2}=1.4142$ (尺) 强答

2	1.4142 …答
1	24
100	4
96	281
400	1
281	282
1190	
1128	
620	
564	
56	

驗算

$(1.4142)^2=1.9999\,6164$

$(1.4143)^2=2.0002\,4449$

故ニ 1.4142 ハ不足ナル近似值, 1.4143 ハ過剩ナル近似值ナリ.

省略開法ニヨリテ最後ノ二ツノ數字 4 ト 2 ト

ハ目安 282 ニテ剰餘 119 ヲ割リテ求メタルナリ.

〔5〕 **省略開法**　不盡根數 $\sqrt{2}$ の近似値を求むるに,開平商を初め n 桁 (1.41 まで) 普通の仕方にて求めたる時は,後の $n-1$ 桁だけ (1.4142 の 4 と 2) は,目安 (282) にて剰餘を割りて求めらる.

精シク求ムレバ $\sqrt{2}=1.4142\,1356\,2373\ldots\ldots$

省略開法ニヨリテ,次ヲ確メヨ.

$$\sqrt{5}=2.23606797\ldots\ldots$$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ ハ循環小數ニ非ズシテ無限小數トナルモノナリ,此等ハ**不盡數**(**無理數**)ノ中ノ簡單ナルモノニシテ之ヲ**不盡根數**トイフ. **有理數**トハ無理數ト區別スル**整數**(零ヲ含ム)及ビ**分數**(有限小數,循環小數ヲ含ム)ノ通稱ナリ.

本書ニ於テ或數ノ近似値ヲ或位迄求ムルトキハ恒ニ四捨五入ノ法ニヨリテ所要ノ位迄求メ置クベシ.

〔**例二**〕 (一) 正方形ノ一邊ガ $80\sqrt{5}$ 尺ナルモノ

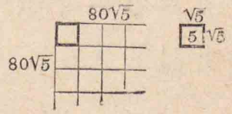
アリ,此長サヲ尺ノ位迄求ム.

解　$80\sqrt{5}=80\times 2.236=178.880$　　179 尺弱　答

〔**注意**〕 $\sqrt{5}$ に n 桁の整數を掛くるには, $\sqrt{5}$ を餘分に $(n+1)$ 桁だけ精しく求め置くべし.

之ハ次ノ計算ヲ見較ベテ會得セラル.

$\sqrt{5}=2$	トスレバ	$80\times\sqrt{5}=160$ (尺)
$\sqrt{5}=2.2$	,,	$80\times\sqrt{5}=176.0$
$\sqrt{5}=2.23$	,,	$80\times\sqrt{5}=178.40$
$\sqrt{5}=2.236$	,,	$80\times\sqrt{5}=178.880$
$\sqrt{5}=2.23606797$	,,	$80\times\sqrt{5}=178.88543760$



$(80\sqrt{5})^2=6400\times 5=32000$ ヲ開キテモヨシ (17 頁 8).

$$80\sqrt{5}=\sqrt{(80\sqrt{5})^2}=\sqrt{32000}=178.885\ldots\ldots$$

(二) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\sqrt{4.5}=2.1213\ldots$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{4.2426\ldots}{2}=2.1213\ldots$$

今後 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}(=1.732050807\ldots)$ 等ノ近似値ヲ

要スル場合ニハ之ヲ一一開クニ及バズ,上ノ結果ヲ用ヒテ可ナリ.

〔例題〕 1. 300坪ノ正方形ノ一邊ヲ寸ノ位迄求ム.

2. $\sqrt{\dfrac{22}{7}}$ (小數三桁)　　$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$米 (粍迄)

〔例三〕 (一) $\sqrt{\sqrt{6561}}=\sqrt{81}=9$ 答

9ヲ6561ノ四乘根トイフ.

$$a=(\sqrt{a}).(\sqrt{a})=(\sqrt{\sqrt{a}}.\sqrt{\sqrt{a}}).(\sqrt{\sqrt{a}}.\sqrt{\sqrt{a}})$$

∴ $\sqrt{\sqrt{a}}$ ハ a ヲ四ツノ相等シキ因數ノ積ノ式ニテ表シタルトキノ一ツノ因數ト看做サル. 之ヲ a ノ四乘根ト唱ヘ $\sqrt[4]{a}$ ニテ表ス.

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}$$

(二) $(x.x.x).(x.x.x)=y.y=46656(=a)$…………(甲)

$(x.x).(x.x).(x.x)=z.z.z=46656$……………(乙)

ナルトキハ x ハ $\sqrt[6]{a}$ ニシテ,之ハ次ノ二樣ニ求メラル.

(甲)ニヨレバ $\sqrt{46656}=216$　　$\sqrt[3]{216}=6$ 答

(乙)ニヨレバ $\sqrt[3]{46656}=36$　　$\sqrt{36}=6$ 答

$$\sqrt[6]{a}=\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt{\sqrt[3]{a}}$$

〔例題〕 次ノ各式ヲ計算セヨ.

$\sqrt[4]{4096}$　　$\sqrt[4]{1679616}$　　$\sqrt[6]{4008947514062 5}$ (答 185)

冪根 aの第m冪根$(\sqrt[m]{a})$とは,之をm乘すればaに等しくなる數なり.

$\sqrt[m]{a}=x$ なれば　$x^m=a$

$(\sqrt[m]{a})^m=a$　　$\sqrt[m]{a^m}=a$　　$\dfrac{a}{\sqrt[m]{a}}=(\sqrt[m]{a})^{m-1}$

$\sqrt[m]{a}$ ニ於テ m ヲ根指數トイフ.

開平,開立等ヲ通稱シテ開法トイフ.

開法 一つの數aが與へられたるとき,如何なる數のm乘がaに等しくなるべきか或はaに近き數となるべきかを求むることをaをm乘に開くといひ,其計算を開法といふ.

自乘(冪法)ト開法トハ互ニ逆ノ計算ナリ. 底數,冪指數及乘冪ハ自乘(冪法)ノ三元ニシテ,乘冪ト其指數トヲ與ヘテ,底數ヲ求ムル算法ガ開法ナリ.

(一) $\sqrt[m]{a}$ トハ a ヲ m 箇ノ相等シキ因數ノ積ノ

258.　$\frac{248}{341}$

式ニテ表シタル時ノ一ツノ因數ナリ.

$6561=9.9.9.9 \qquad \therefore \sqrt[4]{6561}=9$

$a=(\quad)^m$ ヲ求ムルハ $\sqrt[m]{a}$ ヲ求ムルニ同ジ. ココニテハ正ノ數ノミヲ論ズルモノトス.

(二) 冪根ニ關スル問題ハ,之ヲ冪法ノ問題ニ變ヘテ論ズルヲ得ルコトアリ.

$\sqrt[1]{a}=x$ トスレバ, $\qquad x^1=a$

$\therefore \; x=a$ 　即チ $\sqrt[1]{a}=a$

$\sqrt[3]{a^m}=a^x$ トスレバ $\qquad (a^x)^3=a^m$

$\therefore \; 3x=m \qquad x=\dfrac{m}{3} \qquad \therefore \; \sqrt[3]{a^m}=a^{\frac{m}{3}}$

$m=12$ ナレバ $\qquad \sqrt[3]{a^{12}}=a^{\frac{12}{3}}=a^4$

m ガ 3 ノ倍數ナラザル時モ $a^{\frac{m}{3}}$ ハ $\sqrt[3]{a^m}$ ヲ表スモノトス.

$\sqrt[3]{27^4}=y$ トスレバ

$y^3=27^4=(3^3)^4=3^{3\times4} \qquad \therefore \; y=3^4=81$

$2^{12}=(\quad)^2=(\quad)^3=(\quad)^4=(\quad)^6$ ヲ解ケ.

或數ノ任意ノ冪根ハ對數的計算(第十篇)ニヨリテ求メラル. 例ヘバ

$\sqrt[5]{23}$ ハ無理數ニシテ 1.872 ハ其不足ナル近似値, 1.873 ハ其過剰ナル近似値ナリ.

$\sqrt[n]{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ ヲ無理式(根式)トイフ.

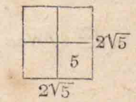
無理式(根式)とは根號を有する代數式をいふ.

有理式とは根號を有せざる代數式をいふ.

問題　第三十集

次ノ各題ノ式ノ計算ヲ行ヘ.

1. $\sqrt{a^6}=a^{\frac{6}{2}}=a^3 \quad \sqrt[3]{b^{12}}=b^{\frac{12}{3}}=b^4 \quad \sqrt[n]{n^n} \quad \sqrt[n]{x^{2n}}=x^{\frac{2n}{n}}=x^2.$



2. 或正方形ノ面積ヲ表ス次ノ各式ヲ計算セヨ.

$(2\sqrt{5})^2 \quad (5\sqrt{2})^2 \quad \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (80\sqrt{5})^2$

$\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\times\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{9}{2}=4\dfrac{1}{2}$

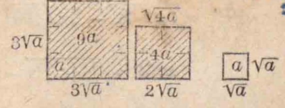
3. $(4\sqrt{x})^2+(3\sqrt{x})^2+(4\sqrt{a-b})^2+(5\sqrt{b-x})^2$

〔例一〕 $\sqrt{9a}=\sqrt{9}\sqrt{a}=3\sqrt{a}$

$\sqrt{4a}=\sqrt{4}\sqrt{a}=2\sqrt{a}$

$\sqrt{9a}+\sqrt{4a}=3\sqrt{a}+2\sqrt{a}$

$=5\sqrt{a}$



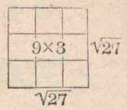
$3\sqrt{a}$ ト $2\sqrt{a}$ トヲ同類ノ根數トイフ.

$(\sqrt{2\times25})^2=50$

$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

$(2\sqrt{5})^2=\sqrt{5\times4^2}=20$

又　$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$……(33頁例二).



4. 次ノ各式ヲ根號內ノ簡單ナル式ニ變形セヨ.　$\sqrt{9\times3}=3\sqrt{3}$.

$\sqrt{27}$　$\sqrt{32}$　$\sqrt{50}$　$\sqrt{96}$　$5\sqrt{48}$

$\sqrt{16\times2}=\sqrt{16}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$　$\sqrt{25\times2}$

次ノ各題ノ式ヲ簡單ニセヨ(5—7).

$5\sqrt{2}$

5. $1\sqrt{3}+2\sqrt{3}$　$8\sqrt{7}-3\sqrt{7}$　$1\sqrt{a}+3\sqrt{a}$

$3\sqrt{3}$ $=\sqrt{3\times9}=$　$5\sqrt{7}$　$4\sqrt{a}$

6. $2\sqrt{48}-\sqrt{12}$　$\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$

12×2

7. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{9}{8}}$　$\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{2\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\sqrt{48}-\sqrt{12}=2\sqrt{12}-\sqrt{12}=\sqrt{12}$

〔例二〕 (一) $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}=2.4494\,8974\ldots$

$\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ ハ兩邊ノ平方ヲ較ベテ驗證セラル.

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\qquad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

根指數ノ同ジ根式ヲ同次ノ根式トイフ.

(二) $2\sqrt{20}\times4\sqrt{10}=8\sqrt{20\times10}=8\times10\sqrt{2}=80\sqrt{2}$

(三) $(7\sqrt{8}-2\sqrt{20})\times4\sqrt{10}$

$=28\sqrt{8\times10}-8\sqrt{20\times10}$

$=28\times4\sqrt{5}-8\times10\sqrt{2}$

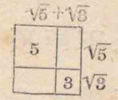
$=112\sqrt{5}-80\sqrt{2}$　答

8. $\sqrt{10}\sqrt{15}$　$\sqrt{32}\sqrt{12}-\sqrt{3}\sqrt{2}$　$\sqrt{12}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{18}$

9. $(5\sqrt{6}-4\sqrt{20})\cdot3\sqrt{2}$　$(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

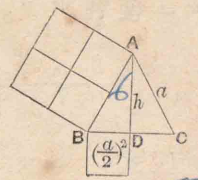
10. $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$　$(3-\sqrt{2})^2$

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2$



〔例三〕 (一) 一邊ガ a ナル正三角形ノ高サヲ h トスレバ

$$h=\frac{a}{2}.\sqrt{3}\qquad(19頁15)$$



之ニヨリテ,高サガ6糎ナルトキノ a ヲ求ム.

$$\frac{a}{2}.\sqrt{3}=6\quad\therefore\quad a=\frac{6\times2}{\sqrt{3}}=\frac{6.2.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}$$

$\sqrt{12}\times\frac{a^2}{4}$

$$=\frac{6.2.\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\,(糎)\quad 答$$

或ハ $a=\frac{6\times2}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{6.2.6.2}{3}}=\sqrt{2.2.6.2}=4\sqrt{3}\,(糎)$

(二) $5\sqrt{\frac{2}{3}}\div\frac{7}{3}\sqrt{5}=\sqrt{\frac{5.5.2}{3}\times\frac{3.3}{7.7.5}}=\frac{\sqrt{30}}{7}$　答

11. $\frac{3}{5}\sqrt{8}\div\frac{2}{\sqrt{5}}$　$\sqrt{\frac{3}{5}}\div\frac{\sqrt{3}}{5}$　$\frac{5}{\sqrt{3}}\div\sqrt{\frac{5}{6}}$

〔例四〕 $\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ノ分母ヲ有理化スルコト.

$25\ \frac{5.5.2}{3.}\times\frac{7.7.5}{3.3}$　16　$256\sqrt{3}$

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{3-\sqrt{2}}{9-2}=\frac{3-\sqrt{2}}{7} \quad 答$$

上下兩項ニ $3-\sqrt{2}$ ヲ掛ケタルナリ.

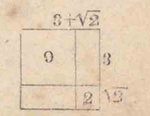
斯樣ニ分母ヲ有理化スレバ其近似値ヲ計算スルニ便利ナリ.

$$\frac{3-\sqrt{2}}{7}=\frac{3-1.41421\ldots}{7}=\frac{1.58578\ldots}{7}=0.22654\ldots$$

原式ノママニテハ計算ニ不便ナリ.

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}}=\frac{1}{4.41421356\ldots}=0.22654\ldots$$

$\frac{1}{3+\sqrt{2}}$ ノ分母ヲ有理化スルニ,分母ト同ジ式 $3+\sqrt{2}$ ヲ上下兩項ニ掛クレバ



$$\frac{3+\sqrt{2}}{(3+\sqrt{2})^2}=\frac{3+\sqrt{2}}{9+6\sqrt{2}+2}=\frac{3+\sqrt{2}}{11+6\sqrt{2}}$$

卽チ分母ハ尙モ無理數ナリ.

次ノ各題(12—13)ノ式ノ分母ヲ有理化セヨ.

12. $\frac{3}{3+\sqrt{6}}$ $\qquad \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ $\qquad \frac{14}{(3+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

13. $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ $\qquad \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$

14. $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ (小數三桁) $\qquad \frac{\sqrt{8}+\sqrt{7}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$ (小數三桁)

15. 次ノ各ノ方程式ヲ解キテ驗セ.

(一) $2x=2+x\sqrt{3}$ $\qquad$ (二) $(3-x)\sqrt{5}=x+6$

② $x=7.4$ $\qquad$ $x=6.3$

〔6〕 根式の計算に關する公式

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m} \quad \cdots\cdots(5)$$

此等ノ公式ハ其左右兩邊ヲ取換ヘタルモノヲモ記憶スベシ.

公式の證明 (1), (2), (3) ノ各ハ其兩邊ノ n 乘冪ヲ比ベテ, (4) ハ兩邊ノ mn 乘冪ヲ比ベテ, (5) ハ兩邊ノ np 乘冪ヲ比ベテ驗證セラル (2頁指數の定則).

〔注意〕 $6=-6$……(1) ノ兩邊ハ符號ニ於テ異ナルヲ以テ成立セザルモノナリ. 然レドモ兩邊ヲ

二乘スレバ $6^2=(-6)^2$ 卽チ $36=36$……(2) トナリテ,元ノ符號ノ相違ヲ見分クルコト能ハズ.

或等式ノ兩邊ヲ n 乘シタルモノガ相等シケレバ,原等式ノ兩邊ノ絕對值ノ相等シキコトヲ知ルニ足ル. 本節ノ公式ノ兩邊ハ共ニ正ノ數ナルヲ以テ,其各邊ノ同次乘羃ヲ比ベテ,公式ノ眞ナルコトヲ驗證スルヲ得ルモノナリ.

〔例五〕 $x=\sqrt[3]{y^2\sqrt[4]{y}}$ ニヨリテ x ト y トノ有理關係式ヲ求ム.

$x=\sqrt[3]{y^2\sqrt[4]{y}}$ ノ兩邊ヲ三乘スレバ

$$x^3=y^2\sqrt[4]{y}$$

再ビ兩邊ヲ四乘スレバ

$$x^{12}=y^8\cdot y \qquad \therefore\ x^{12}=y^9$$

$$\therefore\qquad x^4=y^3 \quad 答$$

次ノ各題ノ式ヲ最簡ニセヨ(16-19).

16. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}$

17. $\sqrt[3]{27^4}$ $(\sqrt[3]{\sqrt{2}})^4$ $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ $\sqrt[6]{2^9}$ $\sqrt[6]{2^8}$

18. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{16}}=\dfrac{\sqrt[6]{(\quad)}}{\sqrt[6]{(\quad)}}=\sqrt[6]{\dfrac{(\quad)}{(\quad)}}=(\quad)$ $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{3}{2}}}$

19. $\sqrt{25^3}$ $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[3]{9}}$ $\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}\sqrt[6]{\dfrac{b}{a}}}$ $\sqrt[3]{\dfrac{9}{10}\sqrt{\dfrac{5}{6}}}$

20. 次ノ各式ガ有理數トナル樣ニ()ノ中ヘ入ルベキ最簡ナルモノヲ求ム.

(一) $\sqrt{54}\cdot(\quad)$ $\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}\cdot(\quad)$ $\sqrt[4]{x^5}\cdot(\quad)$

(二) $\sqrt[5]{128}\cdot(\quad)$ $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\quad)$ $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2(\quad)$

21. $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$ $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$ $\dfrac{a}{\sqrt[5]{a^2}}$ $\dfrac{a}{\sqrt[7]{a^5}}$

22. 次ノ各ヲ有理關係式ニ導ケ(例五).

$$x=\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a^3}} \qquad y=\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b}} \qquad z=\sqrt{c\sqrt{c\sqrt[3]{c}}}$$

23. 次ノ各式ヲ一ツノ根號ヲ有スル式ニテ表セ(簡單ニシテ答ヘヨ).

$\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}$ $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

$\sqrt[6]{27}$ $\sqrt[12]{512}$ $\sqrt[8]{a}$

$x^4 = a\sqrt[5]{a^3}$

$x^{20}=a^8$

$y^{12}=b^3b$

$y^3=b$

$z^4=c\,c\sqrt[3]{c}$

$z^{12}=c^6$

第七篇

二次方程式

一元二次方程式

35. 一元二次方程式の例

(一) 矩形アリ,其相隣レル二邊ノ差3寸9分,其面積1600平方分ナルトキ (17頁例三)

其相隣レル二邊ヲ x 分, $(x+39)$ 分トスレバ

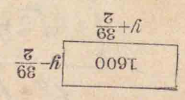
$$x(x+39)=1600$$

此兩邊ノ差ヲ零ニ等シト置ケバ,

$$x^2+39x-1600=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之ハ一元二次方程式ナリ.

上ノ場合ニ於テ相隣レル二邊ヲ $\left(y+\frac{39}{2}\right)$ 分, $\left(y-\frac{39}{2}\right)$ 分トスレバ



$$\left(y+\frac{39}{2}\right)\left(y-\frac{39}{2}\right)=1600$$

$$\therefore \quad y^2-\frac{7921}{4}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此方程式ハ一次ノ項ヲ缺クモ,二次ノ項アレバ二次方程式(純二次方程式)ナリ.

(二) 次ノ方程式ハ如何トイフニ

$$(3-4x)^2+(4-4x)^2=(5+4x)^2$$

其兩邊ノ差ヲ求ムレバ

$$16x^2-96x=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之ハ常數項ノ無キ二次方程式ナリ.

一元二次方程式とは方程式の兩邊の差が ax^2+bx+c の形の式となるものなり.

一元二次方程式の標準形

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \text{但し } a \neq 0$$

此處ニ c ヲ既知項(或ハ常數項). a, b, c ヲ此方程式ニ於ケル既知數トイフ.

一元二次方程式ヲ其標準形ニ導キタルトキノ二次ノ項ハイツモ正項トナスベシ.

〔例一〕 (一) $x^2+x-6=0$ ヲ解クコト.

$$(x-2)(x+3)=0 \qquad 答\ x=2\ 或ハ\ x=-3$$

說明 原方程式ノ左邊 x^2+x-6 ハ,之ヲ因數ニ分解シタル式 $(x-2)(x+3)$ ト同値ナリ. 而シテ x ノ値ガ如何ナルトキ, $(x-2)\times(x+3)$ ノ數値ハ 0 トナルカトイフニ (卷上摘要14),

x	$(x-2)$, $(x+3)$, 其の積		
4	2	7	14
3	1	6	6
2	0	5	0
1	−1	4	−4
0	−2	3	−6
−1	−3	2	−6
−2	−4	1	−4
−3	−5	0	0
−4	−6	−1	6
⋮	……	……	……

$x-2$ ガ 0 トナルカ,或ハ $x+3$ ガ 0 トナルトキニ,此積 $(x-2)\times(x+3)$ ハ 0 トナリ,其外ニ此積ノ 0 トナルコトナシ. 故ニ $x-2=0$ ト $x+3=0$ トヨリ得ル, 2 及ビ -3 ガ求ムル根ナリ.

(二) $4x^2-22=(x+1)(2x+3)$ ヲ解クコト.

兩邊ノ差ヲ取リテ

$$4x^2-22-(2x^2+5x+3)=0$$

故ニ $\qquad 2x^2-5x-25=0$

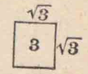
故ニ $\qquad (2x+5)(x-5)=0 \qquad 答\ -\dfrac{5}{2},\ 5$

(三) $3x^2-9=0$ ヲ解クコト.

兩邊ヲ 3 ニテ割リテ

$x^2-3=0 \qquad$ 故ニ $x^2-(\sqrt{3})^2=0$

故ニ $\qquad (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$



$$答\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$$

(四) $7x^2-3=0$ ヲ解クコト.

二次ノ項ノ係數 7 ヲ兩邊ニ掛クレバ

$$49x^2-21=0$$

故ニ $\qquad (7x+\sqrt{21})(7x-\sqrt{21})=0$

$$答\ -\frac{\sqrt{21}}{7},\ \frac{\sqrt{21}}{7}$$

(五) $3(x+2)(x-3)=2(x-3)$ ヲ解クコト.

兩邊ハ $(x-3)$ ナル公約數ヲ有ス.

故ニ $\qquad x-3=0\ldots\ldots(1) \qquad 3(x+2)=2\ldots\ldots(2)$

(1) ヨリ $x=3$, $\quad$ (2) ヨリ $x=-\dfrac{4}{3} \qquad 答\ 3,\ -\dfrac{4}{3}$

說明 左邊 $3(x+2)(x-3)$ ト右邊 $2(x-3)$ トハ $x-3$ ナル公約數ヲ有スルヲ以テ,兩邊ノ差ハ $(x-3)\{3(x+2)-2\}$ トナル. 故ニ $x-3=0\ldots\ldots(1)$ ト, $3(x+2)-2=0\ldots\ldots(a)$ トヲ解ケバヨシ. 而シテ (a) ハ $3(x+2)=2\ldots\ldots(2)$ ト變形セラルルユヱ,上ノ如ク (1) ト (2) トヲ解キタルナリ.

(六) 二次方程式ニ限ラズ,何次ノ方程式ニテモ,

其兩邊ノ差ガ未知元ニ就キ一次ノ因數ニ分解セラルルトキハ,其根ヲ求ムルコトヲ得.

$4x^3-9x=0$　ヲ解クコト.

左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$x(2x+3)(2x-3)=0 \qquad \text{答}\ 0,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}$$

平方に括りて解く例

〔例二〕　(一)　$3x^2+5x+2=0 \ldots\ldots(1)$ ヲ解クコト.

4×3 ヲ (1) ノ兩邊ニ掛ケテ

$$36x^2+60x+24=0 \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\therefore\ (6x+5)^2-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$ (20頁例五)

$$\therefore\ (6x+6)(6x+4)=0 \ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\text{答}\ -1,\ -\frac{2}{3}$$

方程式(1)ノ「二次の項の係數の4倍」ヲ(卽チ3×4ヲ)ソノ兩邊ニ掛ケテ(2)ヲ得,(2)ノ左邊ヲ平方ニ括リテ(3)ヲ得,之ヲ因數ニ分解シテ(4)ヲ得タルナリ.

(二)　$3x^2-4x-5=0$　ヲ解クコト.

之ハ一次ノ項ノ係數ガ偶數ナルモノナリ.

此場合ニハ二次ノ項ノ係數ヲ(卽チ3ヲ)兩邊ニ掛ケテ

$$9x^2-12x-15=0$$

$$\therefore\ (3x-2)^2-19=0$$

$$\therefore\ (3x-2+\sqrt{19})(3x-2-\sqrt{19})=0$$

$$\text{答}\ \frac{2-\sqrt{19}}{3},\ \frac{2+\sqrt{19}}{3}$$

此二ツノ根ハ $\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{19}}{3}$, $\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{19}}{3}$ ト書キ表サル.

一元二次方程式(其既知數ガ皆有理數ナルモノ)ノ根ガ無理數ナルトキハ二ツノ根ハ $m+\sqrt{n}$ ト $m-\sqrt{n}$ トノ形ヲ有ス,卽チ共軛ナル無理數ナリ.

〔1〕一元二次方程式の解法

(一)　與へられたる方程式をその標準形に化したる後,左邊を因數に分解し,その各因數を零ならしむる未知元の値を求むべし.

(二)　方程式 A.C=B.C の兩邊が未知元

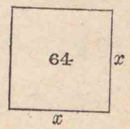
$\pm\sqrt{\frac{49}{36}}$　　$-\frac{2}{3}-\frac{25}{36}-\frac{49}{36}-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}$

を含める式Cを公約數に有するときは

$$C=0\ldots(1),\qquad A=B\ldots(2)$$

なる二つの方程式を解くべし.

〔注意〕 純二次方程式(一次ノ項ヲ缺ケルモノ)ノ解法ハ二乘ノ還元法トシテ開平方ニヨリテ解カル.



(一) $x^2=64$ ヲ解ケバ

$x=\pm\sqrt{64}=\pm 8$ 答

此方程式ニ於テxハ必ズシモ正方形ノ一邊ヲ表スモノト限ラズ,而シテ負根(-8)ヲ取リ落サヌ樣ニ注意スベシ.

(二) $x^2=74529$ ヲ解ケバ

$x=\pm\sqrt{74529}=\pm 273$ 答　(14頁例三)

(三) $(2x-7)^2=9$ ヲ解ケバ

$2x-7=\pm 3$　答 5, 2

問題　第三十一集

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(1—27).

1. $x^2-5x+6=0$　2. $(3-x)(x-7)=(3-x)$

3. $x^2-3x+2=0$　4. $\frac{3}{2}x^2=48$

5. $x^2-6x+6=0$　6. $x^2=x+1$

7. $x^2+39x-1600=0$　$y^2-\frac{7921}{4}=0$　$16x^2-96x=0$

上ノ三ツハ本節ノ初メニ擧ゲタルモノナリ.

8. $x^2=784$　9. $\frac{5}{7}y^2=560$

10. $x^2-2x+1=0$　$x(x-2)+(x-5)=3(x-2)-3$

此等ノ場合ニモ方程式ノ各ハ相等シキ二ツノ根(等根)ヲ有スルモノト看做スガ普通ナリ.

11. $3x^2-10x+3=0$　12. $9x^2=12x-2$

13. $x^2(x-1)=3(x-1)$　14. $x^2(x-3)=x^2-9$

15. $(2x-1)^2=16129$　16. $(3x-1)^2=(2x-1)^2$

17. $3(x+1)^2=2(x-2)^2$　18. $x^2+20.3=9.3x$

19. $6x^2+55x=50$　20. $(2x-5)^2-(x-6)^2=80$

21. $(x-1)(2x-5)+(x-1)(x-3)=(1-x)(2x-4)$

22. $(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)+(x-2)(x-3)=0$

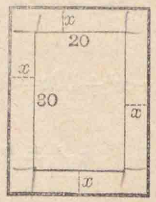
23. $(x-1)(3x+2)=(x-1)^2$

24. $x(x^2-4)=3(x^2-4)$　　25. $2x^2+3=9x$

26. $2(x-1)(5x+2)=x^2+15$

27. $8x^2=15x+7$　（根ヲ小數二桁，答 2.26, -0.39）

28. 縱30糎,横20糎ノ繪畫ヲ表裝シ,其縱横トモ同ジ幅ノ緣ヲ附ケタルニ書面ト緣トノ面積相等シクナレリトイフ. 緣ノ幅ヲ求メヨ.



29. 次ノ二ツノ方程式ガ $x=3$ トイフ共通ノ根ヲ有スル樣ニ m, n ノ値ヲ定メヨ（答 3, 6).

［$mx^2-11x+n=0$　　$5x^2-3nx+3m=0$］

〔例一〕 x^2-4x ヲ y, $4x-12$ ヲ z トス. x ガ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ノ各場合ニ就テ y ト z トノ大等小ノ關係如何.

解　　$y-z=(x^2-4x)-(4x-12)$

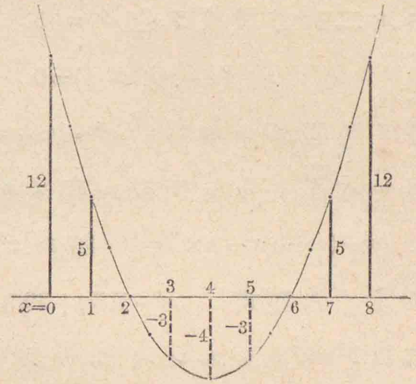
$=x^2-8x+12$

故ニ　　$y-z=(x-4)^2-4$ ………(A)

或ハ　　$y-z=(x-2)(x-6)$ ……(B)

答 $\begin{cases} x \text{ ガ } 0, 1, 7, 8 \text{ ナ} \\ x \text{ ガ } 2, 6 \\ x \text{ ガ } 3, 4, 5 \end{cases}$

x	$y-z$
0	12
1	5
2	0
3	-3
4	-4
5	-3
6	0
7	5
8	12



而シテ(A)ニヨレバ $x=4$ ノトキ, $y-z$ ノ値ハ -4 ニシテ極小ナルコトヲ知ル.

〔注意1〕 一つ元の二次式は之を平方に括り,或は之を因數に分解すれば其式の數値を計算するに便利なり

30. $x^2-8x+22$ ハ x ニ如何ナル値ヲ代入スルトキニテモ決シテ6ヨリ小ナラザルコトヲ說明セヨ.

31. $8x+20-x^2$ ノ數値ガ正ノ數トナル様ニ x ニ代入スベキ値ノ限界ヲ求ム

〔例二〕 (一) 與ヘラレタル二ツノ數 m, n ヲ根トスル二次方程式ヲ作ルコト.

$$(x-m)(x-n)=0$$

左邊ヲ展開スレバ　$x^2-(m+n)x+mn=0$　答

例ヘバ 4 ト 5 トヲ根ニ有スル方程式ハ

$x^2-(4+5)x+4\times5=0$　卽チ　$x^2-9x+20=0$

又逆ニ方程式　$x^2-9.3x+20.3=0$..................(A)

ノ二根ヲ m, n トスレバ (一) ノ答ニ比ベテ

$[m+n=9.3\quad mn=20.3]$..........................(B)

(51 頁 18)

(二) 與ヘラレタル三ツノ數 l, m, n ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

$(x-l)(x-m)(x-n)=0$　左邊ヲ展開スレバ

$x^3-(l+m+n)x^2+(lm+ln+mn)x-lmn=0$　答

例ヘバ 2, 3, -4 ヲ根トスル方程式ハ

$(x-2)(x-3)(x+4)=0$　左邊ヲ展開スレバ

$x^3-x^2-14x+24=0$........答

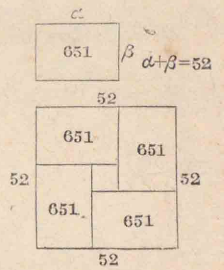
〔例三〕 $x^2-52x+651=0$　ノ二根ノ差ヲ求ム.

解　二根ノ差ヲ d トスレバ

$d^2=52^2-4\times651$...............(1)

$=2704-2604$

$=100$　　$\therefore\ d=10$　答



説明　原方程式 $x^2-52x+651=0$ ノ二根 α, β ノ和ハ 52, ソノ二根ノ積ハ 651 ナリ. 卽チ

$\alpha+\beta=52\qquad \alpha\beta=651$

而シテ二數ノ差ノ平方ハ其和ノ平方ヨリ其積ノ四倍ヲ引キタルモノニ等シ (17 頁 〔2〕).

卽チ　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\therefore\ d^2=52^2-4\times651$............(1)

ヲ得タルナリ.

上ノ結果ニヨレバ $\alpha-\beta=10$, 又 $\alpha+\beta=52$ ナルヲ以テ二ツノ根ハ $\dfrac{52\pm10}{2}=\begin{cases}31\\21\end{cases}$ ナルコトヲ知ル.

〔2〕 (一) 與へられたる二つの數 m, n を根とする方程式は

$$(x-m)(x-n)=0$$

即ち $$x^2-(m+n)x+mn=0$$

(二) 與へられたる方程式 $x^2+px+p=0$ の二つの根を α, β とすれば

$$\alpha+\beta=-p \qquad \alpha\beta=q \qquad \alpha-\beta=\sqrt{p^2-4q}$$

此處にて差はその絶對値のみを論ず.

(三) 與へられたる三つの數 l, m, n を根とする方程式は

$$(x-l)(x-m)(x-n)=0$$

即ち $$x^3-(l+m+n)x^2$$
$$+(lm+ln+mn)x-lmn=0$$

32. 次ノ組ヲ根ニ有スル方程式ヲ作レ(諳算).

(一) 5, 3 (二) 5, −3 (三) −5, 3 (四) −5, −3

〔注意2〕 一元二次方程式ガ其標準形ニ於テ二次ノ項ノ係數ガ正ノ數ナルトキ

(一) 既知項ガ負ノ數ナレバ其一ツノ根ハ正ノ數ニシテ,殘リノ一ツノ根ハ負ノ數ナリ.

(二) 既知項ガ正ノ數ナルトキ,一次ノ項ノ係數ガ負ノ數ナレバ,其二ツノ根ハ共ニ正ノ數ナリ.

(三) 既知項ガ正ノ數ナルトキ,一次ノ項ノ係數ガ正ノ數ナレバ其二ツノ根ハ共ニ負ノ數ナリ(實數ヲ根ニ有セザル場合ハ次節ニ論ズ).

33. 次ノ各方程式ニ就テ,其二ツノ根ガ正ノ整數トナル様ニ( )ノ中ヘ入レベキ數ヲ求ム.

(一) $x^2-6x+(8)=0$ (二) $x^2-(10)x+24=0$

34. 次ノ各組ノ數ヲ根ニ有スル方程式ヲ作レ.

(一) 0, −3, 5 (二) 2, −3, 4 (三) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

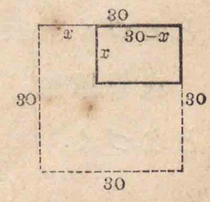
35. $x^2-9.3x+20.3=0$ ノ二根ノ差如何.

36. $x^2-273x+3626=0$ ノ一根ハ14ナリ,他根幾許.

$(9.3)^2-4(20.3)$ $\frac{273x}{14}$

36. 虛數の計算

〔例一〕 長サ60間ノ繩ヲ以テ矩形ニ土地ヲ圍ミ,其面積ヲ2250坪ナラシムルコト.



説明 本問題ハ不能ナルコト明カナリ(圖參照).

方程式ヲ應用シテ之ヲ解カンニ,横,縦ノ長サヲ x 間, $(30-x)$ 間,面積ヲ s 坪トスレバ

$$s=x(30-x) \quad \therefore \quad x^2-30x+s=0$$

$$(x-15)^2=225-s \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

s ヲ 2250 トスレバ, (1) ハ次ノ如クナル

$$(x-15)^2=-2025 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2) ノ左邊ハ平方數ナレバ正ノ數又ハ 0 ナリ.
然ルニ右邊ハ負ノ數ナルヲ以テ(2)ハ不能ナリ.

此處ニ於テ,代數學ハ實地問題ヘノ應用ト離レテ,方程式(2)モ解キ得ルモノトシテ,次ノ如ク計算ス.

$$x-15=\pm\sqrt{-2025}$$

答　$15+\sqrt{-2025}$, $15-\sqrt{-2025}$

$\sqrt{-2025}$, $15+\sqrt{-2025}$　ノ各ヲ虚數ト名ヅク.

虚數,實數　負の數の平方根を虚數と名づく.
虚數に對して有理數と無理數とを通稱して**實數**と名づく,虚數と實數との和も虚數なり(複素數).

虚數單位　$\sqrt{-1}$ を i にて表し之を**虚數單位**と名づく.

$$(i)^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\sqrt{-36}=\sqrt{36\times(-1)}=\sqrt{36}\times\sqrt{-1}=6i$$

$15+\sqrt{-2205}$ ハ $15+45i$ ト變形セラル.

$$\sqrt{-a}=i\sqrt{a} \qquad (a>0) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}=2i\times 3i=6i^2=6\times(-1)=-6$$

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=i\sqrt{a}\times i\sqrt{b}=i^2\sqrt{ab}$$

$$=-\sqrt{ab} \qquad (a>0,\ b>0) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$\left\{\begin{array}{ll} \sqrt{-a}, & 15+\sqrt{-2025} \\ i\sqrt{a}, & 15+45i \end{array}\right.$　ニ對シテ ／ ヲ標準形トイフ.

虚數の權準の形

$$ni \qquad m+ni \qquad m-ni \qquad (n\neq 0)$$

〔注意〕　虚數はいつも標準形に直したるものにて計算し,結果も標準形にて答ふべし.

例ヘバ $\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$ ハ各因數ヲ先ヅ標準形ニ直シテ後, $2i\times 3i$ トシテ計算シテ答ヲ -6 トス.

$\sqrt{-4}\times\sqrt{-9}$ ヲ $\sqrt{-4\times(-9)}=\sqrt{36}=6$ トスルハ誤リナリ.

i を用ふる因數分解法

$$A^2+B^2=A^2-(-B^2)$$

$$=A^2-(B^2.i^2)=(A+Bi)(A-Bi) \cdots\cdots (4)$$

〔例二〕　虚根(虚數ノ根)ヲ有スル方程式ノ例

$x^2-8x+22=0$　ヲ解クコト.

解　$(x-4)^2+6=0$

$(x-4-i\sqrt{6})(x-4+i\sqrt{6})=0$

答　$4+i\sqrt{6}$, $4-i\sqrt{6}$

驗算　$x=4+i\sqrt{6}$　トスレバ

(左邊)$=(4+i\sqrt{6})(4+i\sqrt{6}-8)+22$

$=(4+i\sqrt{6})(-4+i\sqrt{6})+22$

$=-16+i^2.6+22$

$=-16-6+22$

$=0$

$x^2-8x+22$ ヲ平方ニ括レバ $(x-4)^2+6$ トナリ,平方剰餘ハ正ノ數6ナリ. 而シテ x ニ如何ナル實數ヲ代入スルモ此式ノ數値ハ6ヨリ小ナラズ

(53頁 30).

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ左邊ノ平方剰餘ガ正ノ數ナル時ハ二ツノ根ハ虚數ナリ $a>0$).

例一ノ如ク實數ノ解答ヲ豫期セル普通ノ問題ヲ方程式ヲ應用シテ解キタルトキ虚根ヲ得レバ問題ハ不能ナリ.

[3] 虚數の計算に關する公式

$$\begin{cases} (i)^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \cdots\cdots (1) \\ \sqrt{-a}=i\sqrt{a} \quad (a>0) \cdots\cdots (2) \\ \sqrt{-a}\,.\,\sqrt{-b}=i\sqrt{a}\,.\,i\sqrt{b} \\ \qquad =-\sqrt{ab} \quad (a>0,\ b>0) \cdots\cdots (3) \\ A^2+B^2=(A+Bi)(A-Bi) \cdots\cdots (4) \end{cases}$$

問題　第三十二集

次ノ各題ノ式ヲ計算セヨ(1—10).

1. $i.i$　　$i.i.i$　　$i.i.i.i$　　$i.i.i.\ldots\ldots i[=i^{13}]$
2. $\sqrt{-4}$　　$\sqrt{-12}$　　$\sqrt{-a^4}$　　$3\sqrt{-72}$
3. $\sqrt{-8}\sqrt{-12}$　　$\sqrt{-5}\sqrt{-20}$　　$3i\sqrt{n}\sqrt{-n}$
4. $\dfrac{1}{i}$　　$\dfrac{1}{i^3}$　　$\dfrac{1}{i^5}$　　5. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}$　　$\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}$
6. $(\sqrt{3}+i\sqrt{2})(i\sqrt{3}+\sqrt{2})$　　7. $\sqrt{(4i+3)}\sqrt{(4i-3)}$
8. $\dfrac{1+i}{1-i}$　　9. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$　　10. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4$

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(11—13)

11. $x^2+1=0$　　$2y^2+6=0$　　$z^2=-36$

12. $x^2-10x+43=0$　　**13.** $4x^2=40x-107$

數の種類　是迄ノ數ノ種類次ノ如シ.

- 數の種類
  - 虚數　i,　$-3i$,　$3-i\sqrt{3}$,
  - 實數
    - 無理數
      - 負の無理數　$-3\sqrt{5}$,　$\sqrt{2}-\sqrt{5}$
      - 正の無理數　$4\sqrt{2}$,　$\sqrt{3+\sqrt{6}}$
    - 有理數
      - 負の有理數　-5,　$-\frac{1}{6}$,　-10.03
      - 零　0,　$2-1-1$,　$a-a$
      - 正の有理數　3,　$\frac{22}{7}$,　3.14

今後斷リ無キトキハ既知數ヲ表ス文字ハ總テ實數ノミヲ表スモノトス.

37. 無理方程式と分數方程式

〔例一〕 $x+\sqrt{x+1}=5$…………(1) ヲ解クコト.

解　移項シテ　　$\sqrt{x+1}=5-x$………(2)

兩邊ノ二乘ヲ較ベテ

$$x+1=(5-x)^2 \text{……………(3)}$$

$$\therefore\quad x^2-11x+24=0 \text{…………(4)}$$

$$(x-8)(x-3)=0 \qquad \therefore\ x=8 \text{ 或ハ } 3$$

$x=8$ トスレバ

$$(\text{左邊})=8+\sqrt{8+1}=8+3=11$$

∴　8 ハ根ニアラズ.

次ニ $x=3$ トスレバ

$$(\text{左邊})=3+\sqrt{3+1}=3+2=5$$

∴　3 ハ根ナリ.　　　答 $x=3$

方程式(1)ヲ無理方程式トイフ.

無理方程式, 有理方程式　無理方程式とは根號内に未知元を含む式を有する方程式なり. 有理方程式とは方程式の兩邊が未知元に就て有理式なるものなり.

〔注意 I〕 次の二つの方程式

$$\sqrt{x+1}=5-x\text{……(A)} \qquad -\sqrt{x+1}=5-x\text{……(B)}$$

の各の兩邊を二乘すれば共に

$$x+1=(5-x)^2\text{……(C)} \quad \text{となる.}$$

故に方程式 (C) は (A) と (B) との兩方の根を含む.

前ノ驗算ニテ捨テタル $x=8$ ハ(B)ノ根ナリ

〔例二〕 $x+\sqrt{x+1}=5$……(1) ヲ解クコト(例一).

解 $\sqrt{x+1}=y$, 從ツテ $x+1=y^2$, ∴ $x=y^2-1$ ト置ケバ方程式(1)ハ $(y^2-1)+y=5$

$$\therefore\ y^2+y-6=0\ \text{………(2)}$$

$$\therefore\ (y+3)(y-2)=0$$

$$\therefore\ y+3=0\ \text{或ハ}\ y-2=0$$

$$\therefore\ \sqrt{x+1}+3=0\ \text{……(A), 或ハ}\ \sqrt{x+1}-2=0\ \text{……(B)}$$

然ルニ(A)ハ不能ナリ,何トナレバ x ニ如何ナル數ヲ代入スルモ $\sqrt{x+1}$ ノ値ハ正ノ實數或ハ0トナルカ或ハ虛數トナルヲ以テ,之ト3トノ和ヲ0ニ等シカラシムルコト能ハザレバナリ

(B)ヨリ $\sqrt{x+1}=2$ ∴ $x+1=4$ $x=3$ 答

次ノ二ツノ方程式ハ同一ノモノニアラズ.

(一) $\sqrt{2x-6}\sqrt{x-1}=-4$

(二) $\sqrt{(2x-6)(x-1)}=-4$

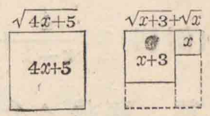
(一)ハ -1 ヲ根ニ有ス(59頁注意), 然レドモ(二)ハ根

ヲ有セザレバナリ.

〔例三〕 $\sqrt{4x+5}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x}$……(1) ヲ解クコト.

解 (1)ノ兩邊ヲ二乘スレバ

$$4x+5=x+3+2\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x$$



移項シ,簡單ニシテ無理項

$\sqrt{x}\sqrt{x+3}$ ヲ一邊ニ殘シ(卽チ無理項ヲ獨立セシメ)

$$x+1=\sqrt{x}\sqrt{x+3}\ \text{………(2)}$$

再ビ兩邊ヲ二乘スレバ

$$x^2+2x+1=x^2+3x\ \text{…………(3)}$$

之ヲ解キテ $x=1$

原方程式(1)ニ就テ $x=1$ トスレバ

(左邊)$=\sqrt{4+5}=3$

(右邊)$=\sqrt{4}+\sqrt{1}=2+1=3$ 答 1

〔4〕 無理方程式の解法

無理方程式を解くには,適當に移項して,兩邊を自乘し,之を有理方程式に導きて解きたる後,驗算を行ひて餘分の根あらば捨つべし. 新しき未知元

を以て無理項に置換するが便利なることあり(例二).

〔例四〕 $\frac{4}{x-1}+\frac{5}{x-2}=\frac{12}{x-3}$……(1) ヲ解クコト.

解 兩邊ノ分數式ノ分母ノ最小公倍數 $(x-1)(x-2)(x-3)$ ヲ公分母トシテ,兩邊ノ式ヲ通分シタルトキノ分子ダケ書キ取リテ

$$4(x-2)(x-3)+5(x-1)(x-3)=12(x-1)(x-2)$$

$$4(x^2-5x+6)+5(x^2-4x+3)=12(x^2-3x+2)$$

∴ $3x^2+4x-15=0$………(2)

∴ $(3x-5)(x+3)=0$…….(3)　　$x=\frac{5}{3}$ 或ハ -3

$\frac{5}{3}$ ト -3 トハ何レモ公分母ヲ0トセズ,故ニ根ナリ.　　答 $\frac{5}{3}, -3$

分數方程式 分數方程式とは未知元に就ての分數式を含む有理方程式なり

整方程式 整方程式とは未知元に就ての分數式を含まざる有理方程式なり.

〔注意2〕 分數方程式を解くには其左

右兩邊の差を一つの分數式に纏め之を既約分數式に化したるときの分子を零に等しと置きて解くを本則とす(卷上212頁).

例四ノ解法中ノ方程式(1)ノ左邊ヲ分子トシ,公分母ヲ分母トスル分數式

$$\frac{(3x-5)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}\text{…………(A)}$$

ハ原方程式(1)ノ兩邊(右邊ト左邊ト)ノ差ナリ.

而シテ $x=\frac{5}{3}$ 或ハ $x=-3$ ヲ得タル後,$\frac{5}{3}$ ト -3 トハ何レモ公分母ヲ0トセザルコトヲ確メタレバ,卽チ(A)ガ既約分數式ナルコトヲ確メタルコトニ當ル(卷上摘要19參照),分數方程式解法ノ規則ハ通例斯樣ニ運用セラルルモノナリ.

〔例五〕 $\frac{3}{(x-2)(x-5)}+\frac{x}{x-5}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x-5}$……(1) ヲ解クコト.

解 公分母ヲ $(x-2)(x-5)$ トシテ兩邊ノ式ヲ通分シタルトキノ分子ヲ比ベテ

$$3+x(x-2)+(x-5)=3(x-2)$$

$$\therefore \quad x^2-4x+4=0$$

$$\therefore \quad (x-2)(x-2)=0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

故ニ2ノ等根ヲ得．而シテ2ハ公分母トシタル式 $(x-2)(x-5)$ ヲ0トス．然ルニ(2)ニヨレバ,原方程式ノ兩邊ノ差ハ

$$\frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x-5)} \quad 卽チ \quad \frac{x-2}{x-5} \cdots\cdots (A)$$

而シテ x ガ2ナルトキ(A)ノ分子ハ0トナリ,分母ハ0トナラズ,故ニ此時ノ(A)ノ數値ハ0ナリ．

卽チ $x=2$ ハ原方程式(1)ノ兩邊ノ差ヲ0ナラシムルヲ以テ根ナリ．

問題　第三十三集

次ノ各題ノ無理方程式ヲ解ケ(1—8)．

1. $x+3\sqrt{x}=10$
2. $3x-5\sqrt{x}=2$
3. $\sqrt{x(2x+7)}=x+6$
4. $\sqrt{x^2+3x}=x+1$
5. $7x+\sqrt{3-x}=15$ 但シ $\sqrt{3-x}$ ヲ y ト置キテ解ケ．
6. $\sqrt{4x+1}=\sqrt{x+3}+2$
7. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-6}$
8. $2x^2-7x+3-3\sqrt{2x^2-7x+7}=0$ 但シ $\sqrt{2x^2-7x+7}$ ヲ y ト置キテ解ケ．

次ノ各題ノ分數方程式ヲ解ケ(9—12)．

9. $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x-7}=\dfrac{2}{x-8}$
10. $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{3x-1}{x+1}$
11. $\dfrac{x^2}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}$
12. $\dfrac{5x-12}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{x}{x-3}+1$

38. 根の公式，判別式

〔5〕 根の公式

(一) $ax^2+bx+c=0$ の二つの根は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ によりて計算せらる．}$$

(二) $ax^2+2b'x+c=0$ の二つの根は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \text{ によりて計算せらる．}$$

說明 (一) $ax^2+bx+c=0$ ノ兩邊ニ $4a$ ヲ掛ケテ

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

左邊ヲ平方ニ括レバ

$$(2ax+b)^2-(b^2-4ac)=0$$

$$\therefore \quad (2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 或ハ \quad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(二) $ax^2+2bx+c=0$ (一次ノ項ノ係數ガ偶數ナル場合) ハ兩邊ニ a ヲ掛ケテ左邊ヲ平方ニ括レバ

$$a^2x^2+2abx+ac=0 \qquad (ax+b)^2-(b^2-ac)=0$$

故ニ前ノ如ク解キテ(二)ノ根ヲ得.

判別式 (一) b^2-4ac を $ax^2+bx+c=0$ の判別式といふ.

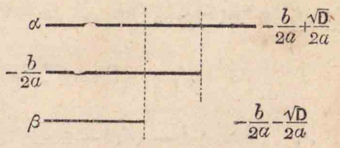
今後判別式を D とす.

之によれば　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$

(二) $ax^2+2b'x+c=0$ なれば

$$\mathrm{D}'=b'^2-ac \qquad x=\frac{-b'\pm\sqrt{\mathrm{D}'}}{a}$$

$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ハ $\dfrac{-b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$ ト $\dfrac{-b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$ トナリ. 故ニ



$\dfrac{-b}{2a}$ は二根の和の半にして,

$\dfrac{\sqrt{\mathrm{D}}}{2a}$ は二根の差の半なり (巻上摘要 3).

根ノ公式ハ特ニ能ク諳誦スベシ.

〔例一〕 (一) $9x^2-15x+\dfrac{13}{2}=0$ ヲ解クコト.

$$\sqrt{\mathrm{D}}=\sqrt{15^2-4\times9\times\frac{13}{2}}=\sqrt{-9}=3i$$

$$\therefore\ x=\frac{15\pm3i}{2\times9}=\frac{5\pm i}{6}\text{………答}$$

(二) $4x+5-3x^2=0$ ヲ解クコト.

與方程式ヲソノ二次ノ項ガ正項ナルモノニ導ケバ

$$3x^2-4x-5=0$$

$$\therefore\ \sqrt{\mathrm{D}'}=\sqrt{2^2+3\times5}=\sqrt{19} \qquad \text{答}\ \frac{2\pm\sqrt{19}}{3}$$

$\sqrt{b'^2-ac}$ ノ中ノ b' ニ (-2) ヲ, a ニ 3 ヲ, c ニ (-5) ヲ代入シタルナリ. c ガ (-5) ナルユエ, b'^2-ac ハ $b'^2+a\times5$ トナルナリ.

(三) $2x^2-(a-2b)x-ab=0$ ヲ解クコト.

$$\sqrt{\mathrm{D}}=\sqrt{(a-2b)^2+4\times2ab}$$
$$=a+2b$$

$$\therefore\ x=\frac{(a-2b)\pm(a+2b)}{4} \qquad \text{答}\ \frac{a}{2},\ -b$$

〔例題〕 1. 次ノ各ノ方程式ノ根ヲ書キ下セ

$$px^2+qx+r=0 \qquad ax^2+bx=c \qquad lx^2+2mx+n=0$$

根ノ公式ヲ復誦セヨ.

根ノ公式ニヨリテ次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(2—7).

2. $6x^2-13x-15=0$　　3. $x^2+4.3x=27.3$

4. $3x^2-8x+\frac{16}{3}=0$　　5. $2x^2+2x-7x=3$

6. $4x-13=x^2$　　7. $3x^2+ax=3bx+ab$

一元二次方程式ノ解法ニ二ツアリ.

(一) 因數分解法ヲ應用シテ解ク仕方(第35節)

(二) 根ノ公式ヲ用ヒテ解ク仕方(本節)

何レノ方法ニモ熟達スルコト肝要ナリ. 根ガ簡單ナル有理數ノ場合ニハ因數分解法ニヨルガ一般ニ捷徑ナリ. 例ヘバ

$$2x^2-(a-2b)x-ab=0 \quad \text{〔前例(三)〕}$$

之ニハ b ガ唯一乘冪ノミニテ現ハルルヲ以テ其部分ヲ一ツニ纒メテ因數ニ括レバ(部分分解法)

$$b(2x-a)+x(2x-a)=0$$

$$\therefore \ (2x-a)(b+x)=0 \qquad \text{答} \ \frac{a}{2},\ -b$$

〔6〕 二次式の分解法

(一) ax^2+bx+c を平方に括れば

$$=\frac{(2ax+b)^2-D}{4a} \qquad (D=b^2-4ac)$$

判別式 D が 0 となる場合には ax^2+bx+c は x に就て一次式の完全平方に括らる. 即ち

$$\begin{cases} b^2-4ac=0 & \text{なれば} \\ ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2 \end{cases}$$

(二) ax^2+bx+c

$$=\frac{1}{4a}(2ax+b+\sqrt{D})(2ax+b-\sqrt{D})$$

(三) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$\alpha,\ \beta$ は $ax^2+bx+c=0$ の二根とす.

此等ノ分解法ハ原式ヲソレト同値ノ式ニ變形スベキモノナレバ右邊ノ係數ヲ取リ落サヌ樣ニ注意スベシ.

〔例二〕 $15x+7-8x^2$ ヲ因數ニ分解スルコト.

$$15x+7-8x^2=-(8x^2-15x-7)$$

$$\therefore\ \sqrt{\mathrm{D}}=\sqrt{15^2+4\times8\times7}=\sqrt{449}$$

$$(\text{原式})=-\frac{1}{32}(16x-15-\sqrt{449})(16x-15+\sqrt{449})\ \text{答}$$

(二) $3x^2-4x-5$ ヲ因數ニ分解スルコト.

本題ノ如ク一次ノ項ノ係數ノ偶數ナル場合ニハ次ノ公式ニヨルガ便利ナリ.

$$ax^2+2b'x+c=\frac{1}{a}(ax+b'-\sqrt{\mathrm{D}'})(ax+b'+\sqrt{\mathrm{D}'})$$

$$\sqrt{b'^2-ac}=\sqrt{2^2+3\times5}=\sqrt{16}\qquad(\text{例一})$$

$$(\text{原式})=\frac{1}{3}(3x-2-\sqrt{19})(3x-2+\sqrt{19})\dots\dots\text{答}$$

(三) $x^2+7x+16$ ヲ因數ニ分解スルコト.

$$\sqrt{\mathrm{D}}=\sqrt{49-4\times16}=\sqrt{-15}=i\sqrt{15}$$

$$(\text{原式})=\frac{1}{4}(2x+7-i\sqrt{15})(2x+7+i\sqrt{15})\dots\dots\text{答}$$

〔例題〕 次ノ各題ノ式ヲ因數ニ分解セヨ(1—3).

1. $14x^2+5x-24$　2. $5x^2-8x-2$　3. x^2+xy+y^2

次ノ各式ヲ平方ニ括レ(4—6).

4. $x(30-x)$　5. $x^2+(30-x)^2$　6. $3x^2-4x+\frac{4}{3}$

〔注意1〕 上ノ結果ニヨレバ $x(30-x)$ ノ値ハ x ガ15ナルトキ極大トナリ, $x^2+(30-x)^2$ ノ値ハ x ガ

15ナルトキ極小トナルコトガ分ル(數ノ範圍ヲ實數ニ限ル).

(一) 一つの元の二次式の二次の項の係數が負の數なれば,其の式は極大値を有し,二次の項の係數が正の數なれば,其の式は極小値を有す.

(二) 一つの元の二次式を平方に括りたるとき,平方部を0ならしむる未知元の値は,原式の値を極大若しくは極小ならしむ. 而して平方剩餘 $\frac{-\mathrm{D}}{4a}$ は原式の極大若しくは極小の値なり.

根の種類の判別法

一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二ツノ根ハ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ニヨリテ計算セラル. 故ニ

$b^2-4ac>0$ なれば　二根は相異なる實數

$b^2-4ac=0$ なれば　二根は相等しき實數

$b^2-4ac<0$ なれば　二根は虛數

若シ方程式ガ $ax^2+2b'x+c=0$ ナレバ b'^2-ac ヲ判別式トスベシ.

或方程式ノ根ノ種類ヲ判別スルトハ其ノ根ガ實數ナルカ虛數ナルカヲ判別スルコトナリ

(62頁數ノ種類參照).

〔例題〕 次ノ六ツノ方程式ノ中實根ヲ有セザルモノヲアゲヨ. 各方程式ハ之ヲ解クニ及バズ,判別式ノ値ニヨリテ迅速ニ虛根ヲ有スルモノヲ見出セ.

$9x^2-12x-5=0$ $x^2-2x+2=0$ $2x+\frac{1}{x}=3$

$12x^2-60x+75=0$ $9x^2=12x+2$ $(x-1)^2+(x-2)^2=0$

一元二次方程式ヲソノ二次ノ項ノ係數ガ正ノ數ナルモノニ導キタル場合ニ「既知項が負の數なれば,判別式の値は正の數となり,其方程式は常に二つの實根を有し,一つは正の數,他の一つは負の數なり.

〔例三〕 (一) $(x-p)(x-q)=5$……(1) ノ根ノ種類ヲ判別スルコト.

解 (1) ヲ標準形ニ直セバ

$$x^2-(p+q)x+pq-5=0 \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\therefore \sqrt{D}=\sqrt{(p+q)^2-4pq+20}$$

$$=\sqrt{(p-q)^2+20} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

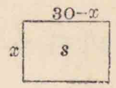
卽チ判別式ハ $(p-q)$ ノ平方ト,20トノ和ニシテ常ニ正ノ數ナルユエ,(1) ノ二ツノ根ハ相異ナレル實數ナリ.

驗算 $p=6,\ q=2$ トスレバ方程式ハ

$(x-6)(x-2)=5$, 卽チ $x^2-8x+7=0$

而シテ 7, 1 ナル相異ナレル實根ヲ有ス.

(二) 方程式 $x(30-x)=s$……(1) (58頁) ノ根ノ種類ヲ判別スルコト.



解 (1) ヲ標準形ニ直セバ

$$x^2-30x+s=0$$

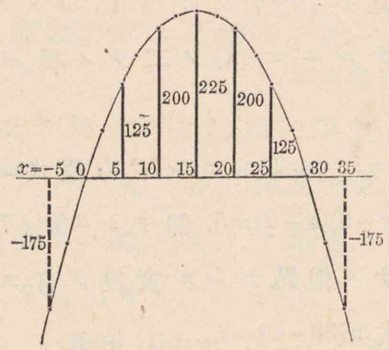
$$\therefore \sqrt{D}=\sqrt{15^2-s}=\sqrt{225-s} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\therefore x=15\pm\sqrt{225-s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

之ニヨリテ原方程式 (1) ノ二ツノ根ハ

答
(一) $s<225$ ナレバ 相異ナレル實數
(二) $s=225$ ナレバ 相等シキ實數
(三) $s>225$ ナレバ 虛數(共軛ナル)

上ノ結果ニヨレバ原方程式ノ左邊 $x(30-x)$ ノ値ハ x ニ如何ナル實數ヲ代入スルモ, 225 ヨリ大ナラザルコトガ分ル(次ノ圖參照), 卽チ $x(30-x)$ ノ極大値ハ 225 ナリ.



此事ハ $x(30-x)$ ヲ平方ニ括リテ $225-(x-15)^2$ ト變形スルモ明カナリ.

(三)　$(u-3)x^2-ux+(u-3)=0$……(1) ノ根ガ等根トナル様ニ u ノ値ヲ定ムルコト.

解　$\sqrt{D}=\sqrt{u^2-4(u-3)^2}$

$=\sqrt{-3(u-2)(u-6)}$……(2)

$u^2-4(u-3)^2$
$=-\{(2u-6)^2-u^2\}$
$=-(3u-6)(u-6)$
$=-3(u-2)(u-6)$

∴　$x=\dfrac{u\pm\sqrt{-3(u-2)(u-6)}}{2(u-3)}$……(3)

而シテ此二ツノ根ガ相等シクナル様ニスルニハ判別式 $-3(u-2)(u-6)$ ノ値ガ0トナル様ニスレバヨシ.

∴　$-3(u-2)(u-6)=0$……(4)　　答　$u=2$ 或ハ 6

驗算　$u=2$ ナレバ方程式ハ

$-x^2-2x-1=0$ トナリテ -1 ナル等根ヲ有ス.

又 $u=6$ ナレバ方程式ハ

$3x^2-6x+3=0$ トナリテ 1 ナル等根ヲ有ス.

$(u-3)x^2-ux+(u-3)$ が完全平方式となる様に u の値を定むることと, $(u-3)x^2-ux+(u-3)=0$ の根が等根となる様に u の値を定むることとは同一の問題(即ち共に其の判別式を0ならしむること)に歸着する者なり.

如何トナレバ

$(u-3)x^2-ux+(u-3)$　ヲ平方ニ括レバ

$$\frac{\{2(u-3)x-u\}^2-\{u^2-4(u-3)^2\}}{4(u-3)}$$

故ニ判別式 $u^2-4(u-3)^2$ ガ 0 トナル様ニ u ノ値ヲ定ムレバ,平方剰餘モ0トナリ,從ツテ原式ハ完全平方ニ括ラルベケレバナリ.

〔例題〕　次ノ各ノ根ノ種類ヲ判別セヨ(1—2).

1. $px^2-(p-q)x-(p+q)=0$　　2. $(24-x)(18+x)=s$

3. $x^2-(k-3)x+k$　ガ完全平方式トナル様ニ k ノ値ヲ定メヨ.

根と係數との關係

(一) 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの根を α, β とすれば

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \qquad \alpha.\beta=\frac{c}{a}$$ (本篇〔2〕55頁)

(二) 二つの數の和が s, 其積が p なれば, 其二つの數を根とする方程式は

$$x^2-sx+p=0$$

說明 (一) 二ツノ根ノ中何レカ一ツヲ α, 他ヲ β トシテ, 例ヘバ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{………}(1)$$

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{………}(2)$$ トシテ

(1)+(2) 及ビ (1)×(2) ヲ求ムレバ明カナリ.

$3x^2+15x+18=0$ ノ二ツノ根ノ和ハ $-\frac{15}{3}$ 即チ -5 ニシテ, 其積ハ $\frac{18}{3}$ 即チ 6 ナリ.

〔例四〕 二數ノ和 $\frac{17}{12}$, 其積 $\frac{1}{2}$ ナリ. 各數幾許.

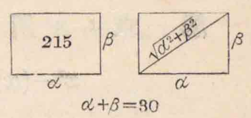
解 求ムル二數ヲ根トスル方程式ハ

$$x^2-\frac{17}{12}x+\frac{1}{2}=0 \qquad \therefore\ 12x^2-17x+6=0$$

之ヲ解ケバ

$$(4x-3)(3x-2)=0$$ 答 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$

〔例五〕 $x^2-30x+215=0$ ノ二根ヲ α, β トス. ヨリテ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ノ値ヲ求ム.



解 $\alpha+\beta=30, \quad \alpha\beta=215$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=30^2-2\times 215=470$$

$$\therefore\ \sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{470}=21.67\ldots$$ 答

$\alpha+\beta$ ト, $\alpha\beta$ トノ値ハ方程式ヲ解カズシテ30ト, 215トナルコトヲ知ルヲ以テ上ノ如ク計算セラル. 若シ原方程式ヲ解キ, 其根 $15+\sqrt{10}$, $15-\sqrt{10}$ ヲ用ヒテ直接ニ計算スレバ, $\alpha^2+\beta^2$ ハ

$$(15+\sqrt{10})^2+(15-\sqrt{10})^2=2(15^2+10)=470$$

$\alpha^2+\beta^2$ ノ如ク二根 (α, β) ノ對稱式ノ値ハ初メノ如ク計算スルガ一般ニ便利ナルモノナリ

(卷上摘要27)

〔注意2〕 次ノ公式ハ屢々應用セラルル者ナリ.

$$(一)\begin{cases} A^2+B^2=(A+B)^2-2AB \\ A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B) \end{cases}\qquad (5\text{頁}\ 15)$$

$$(二)\begin{cases} A^2+B^2=(A-B)^2+2AB \\ A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B) \end{cases}$$

〔例六〕 $3x^2-4x-5=0$……(例一) ノ二根ヲ α, β トシテ, α^2 ト β^2 トヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

解　求ムル所ノ方程式ハ

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0\ldots\ldots(1)$$

然ルニ　$\alpha+\beta=\dfrac{4}{3},\quad \alpha\beta=-\dfrac{5}{3}$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{46}{9}$$

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

之ヲ (1) ニ代入スレバ

$$x^2-\frac{46}{9}x+\frac{25}{9}=0\qquad \therefore\ 9x^2-46x+25=0\quad \text{答}$$

〔例題〕 **1.** $(x-2)(x-3)=(a-2)(a-3)$ ノ二根ノ和幾許 (暗算).

2. $x^2-60x+875=0$ ノ二根ヲ α, β トス,ヨリテ次ノ各式ノ値ヲ求ム.

(一) $5\alpha+5\beta$　(二) $\alpha^2+\beta^2$　(三) $\alpha^3+\beta^3$

3. 二數ノ和 25, 其積 156 ナリ,此二數ヲ根トスル方程式如何.

問題　第三十四集

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ (1—8).

1. $3x^2-4x=32$　**2.** $4x^2-22=(x-1)(2x-3)$

3. $x^2-6x=432$　**4.** $\dfrac{5x-7}{9}+\dfrac{14}{2x-3}=x-1$

5. $2x^2-6x+7=0$　**6.** $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$

7. $(x^2-b^2)+(cx+bc)=0$　$6x^2-9ax+2bx-3ab=0$

8. $(h-k)x^2=h+kx$

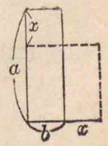
$$2(y-2p)(y-2r)=(p+r-y)^2-(p-r)^2$$

9. $12x^2-37x-144$　$15x^2+14xy-8y^2$ (因數分解)

10. 次ノ各式ヲ x ニ就テ平方ニ括レ.

$3x^2-7x+15$　$x^2-2xy+2x+2y-3$

11. x ガ如何ナルトキ,次ノ各式ノ値ハ極大或ハ極小トナルベキカ,又其値如何.



(一) $3x^2-4x-5$　(二) $(a-x)(b+x)$

次ノ各題ノ方程式ノ根ノ種類ヲ判別セヨ(12〜15)

12. $x^2+(30-x)^2=s$　　**13.** $(x-2)(x-6)=p$

14. $x^2+(a-x)^2=u^2$

15. $(b^2-4ac)x^2+4(a+c)x-4=0$

16. 次ノ各ノ方程式ヨリ等根ヲ得ル樣ニ既知數ヲ表ス文字ノ値ヲ定メヨ

(一) $3x^2-4x+k=0$　　(二) $x^2+(m-3)x=2m-6$

17. $(x-k)(1-x)-1$ ガ x ニ就テ完全平方式トナル樣ニ k ノ値ヲ定メヨ.　答 $k=3$ 或ハ -1

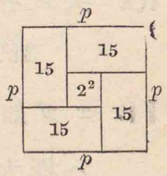
18. (一) $a(x^2-1)=x(a^2-1)$ ノ二根ノ積幾許(暗算).

(二) $(x-a)^2-an=(n-a)^2-ax$ ノ二根ノ和如何.

19. $5x^2-15x+11=0$ ノ二ツノ根ヲ α, β トス. ヨリテ次ノ各式ノ値ヲ求ム.

(一) $(\alpha-\beta)^2$　　(二) $(z-\alpha)(z-\beta)$　　(三) $\alpha^3+\beta^3$

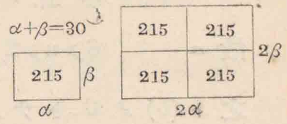
20. (一) $x^2-px+15=0$ ノ二根ノ差ガ 2 トナル樣ニ p ノ値ヲ定メヨ.



(二) $x^2-273x+3626=0$ ノ二根ノ差ヲ求メヨ.

21. $x^2-30x+215=0$ ノ二根ヲ α, β トス.

ヨリテ次ノ各組ノ數ヲ根トスル方程式ヲ求ム.



(一) $2\alpha, 2\beta$　　(二) $\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}$　　(三) $\alpha+2, \beta+2$

22. $x^2+px+q=0$ ノ二根ヲ α, β トス.　(一) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ ヲ根トスル方程式ヲ, (二) $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$ ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト.

〔例〕 $u(x^2-x+1)=3x^2+3$……(1) ハ u ノ値ガ幾許ナレバ實根ヲ有スベキカ.

解　(1) ヲ變形シテ標準形ニスレバ

$$(u-3)x^2-ux+(u-3)=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

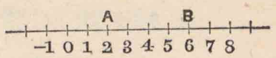
$$\therefore\ \sqrt{\mathrm{D}}=\sqrt{u^2-4(u-3)^2}=\sqrt{-3(u-6)(u-2)} \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\ x=\frac{u\pm\sqrt{-3(u-6)(u-2)}}{2(u-3)} \quad\cdots\cdots(4)$$

故ニ $(u-6)(u-2)$……(5) ガ 0 或ハ負ノ數トナレバ $\sqrt{\mathrm{D}}$ ハ實數トナリ,根モ實數トナル.

而シテ (5) ノ値ガ負ノ數トナルニハ,其大ナル因數 $u-2$ ガ正トナリ,小ナル因數 $u-6$ ガ負トナレバヨシ. 故ニ

$u-2>0$ 且ツ $0>u-6$



故ニ $6>u>2$

之ト(5)ノ0トナル場合トヲ併セテ

答 $6 \geqq u \geqq 2$

例ヘバ u ヲ6ト2ノ間ニ取リテ5トスレバ方程式ハ

$$5(x^2-x+1)=3x^2+3$$

即チ $2x^2-5x+2=0$

而シテ,實根 $2, \frac{1}{2}$ ヲ有ス.

〔注意1〕 (一) 方程式(1)ヨリ u ヲ解ケバ

$$u=\frac{3x^2+3}{x^2-x+1}\cdots\cdots\cdots(6)$$

上ノ結果ニヨレバ分數式 $\frac{3x^2+3}{x^2-x+1}$ ノ極大値ハ6ニシテ,極小値ハ2ナリ. 即チ x ニ如何ナル實數ヲ代入スルモ $\frac{3x^2+3}{x^2-x+1}$ ノ値ハ6ヨリ大ナルコトナク,又2ヨリ小ナルコトナシ.

(二) 上ノ説明ニ於テハ二次式 $-3u^2+24u-36$ ヲDニテ表セリ,而シテ次ノコトヲ知レリ.

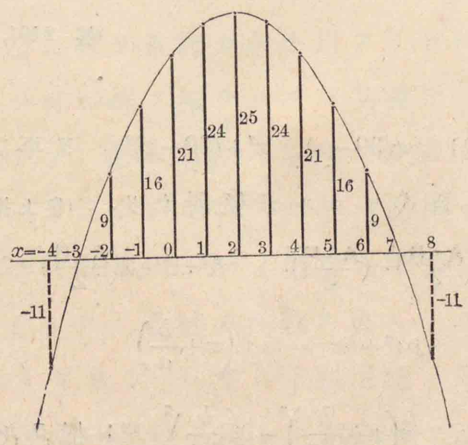
D=0の二つの根の間にある數をDの中の未知元に代入したる時のDの値は,二次の項の係數と符號の反對なる數となるものなり.

此規則ハ二次ノ不等式〔例ヘバ D>0〕ヲ解クニ際シテ適用セラル. 此逆モ眞ナルモノナリ.

23. 次ノ各方程式ガ實根ヲ有スル樣ニ既知數ヲ表ス文字ノ値ノ限界ヲ求ム.

(一) $3x^2-ux+45=0$　　(二) $\frac{x^2-5x+10}{2-x}=v$

24. $21+4x-x^2$ ノ値ヲ正ノ數トナラシムルニハ x ニ如何ナル數ヲ與フベキカ.



次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(25—28).

25. $(9-x)^2+10(9-x)=24$ $\qquad n^2(n^2+n-x)^2=(n+1-x)^2$

26. $2(x^2-4)=5(x-2)$ $\qquad 5x^2(x-2)=(x^2-4)(x+6)$

公式	$(A+B)^2-4AB=(A-B)^2$	巻上摘要25(五)
	$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB$	82頁
	$A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$	„

ヲ參考シテ次ノ各ヲ解ケ(27, 28).

27. $(x-p+b)^2=4b(x-p)$ $\qquad (x-3)^2+(x-2)^2=(2x-5)^2$

28. $(p^2-q^2)(x^2-1)=4pqx$ $\qquad (m-x)^3+(x-n)^3=(m-n)^3$

29. $2x^2-5x+2=0$ ト $x^3+4x^2-4x-16=0$ トハ共通ノ根ヲ有ス. ヨリテ其共通ノ根ヲ求メヨ.

30. $3x^2-7x=2$ ノ根ヲ小數第三位迄求ム.

(答 2.591, −0.257).

〔注意2〕 $x(30-x)$, $x^2+(30-x)^2$ ヲ平方ニ括ルニハ次ノ公式ニヨルガ便利ナリ. (巻上摘要23)

$$AB=\left(\frac{A+B}{2}\right)^2-\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 \qquad A^2+B^2=2\left(\frac{A+B}{2}\right)^2+2\left(\frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$ax^2+bx \text{ ハ } a.x.\left(x+\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore\ a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ ト括ラル.}$$

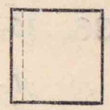
Ka

$(x-2)(x-6)$, $(x-2)^2+(x+6)^2$ ノ各ヲ平方ニ括レ.

二次式ヲ平方ニ括ルコト及ビ其應用ハ實ニ本篇ニ於ケル計算ノ眼目ナリトイフベシ.

本篇ノ公式〔1〕—〔6〕ハ之ヲ能ク諳誦スベシ.

31. 正方形ノ地所アリ,ソノ間口ニ沿ヒテ幅3間ノ道路ヲ地所ノ内ニ作リタルタメ面積ハ減ジテ504坪トナレリトイフ. 此地所ノ間口幾許.

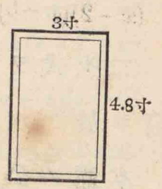


32. 二ツノ數ノ比ハ5:4ニシテ,各ノ數ニ15ヲ加ヘタルモノノ平方ノ差999ナリ. 各數如何.

33. 甲乙二村ヲ貫流セル小川アリ,各村ニテ之ニ一ツヅツ橋ヲ架ケタルニ其費用何レモ3600圓ナリ. 之ヲ其村ノ各戸ニ平等ニ負擔セシムルトスレバ,甲村ノ戸數ハ乙村ヨリ100戸少ナキヲ以テ一戸ノ負擔ハ50錢多クナルベシトイフ. 各村ノ戸數ヲ求ム.

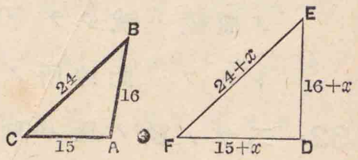
34. 幅3寸,長サ4.8寸ノ印刷用紙ノ周邊ニ一様ナル幅ノ黒枠ヲ附シテ其面積ヲ全紙面ノ $\frac{1}{5}$

ニナサントス. 黒枠ノ幅ヲ何分何厘トスベキカ(厘位迄).



35. 或商人ガ商業資本トシテ金1050圓ヲ借リ入レ,一年ノ後605圓ヲ返シ,其後又一年ヲ經テ605圓ヲ返シテ,丁度皆濟トナレリト云フ. 年利率幾許ニ當ルカ(一年毎ノ複利トス).

36. $15+x,\ 16+x,\ 24+x$ ガ一ツノ直角三角形EFDノ三邊ノ長サヲ表ス數トナル樣ニxノ値ヲ求メヨ.

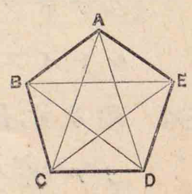


37. $3x^2+7x+2$ ヲ 372 ト略記スルトキノ x ヲ記數法ノ底數ト稱ス. 二百五十ガ此記法ニヨリテ 372 ト表サルルニハ何ヲ底數トスベキカ.

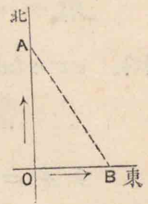
38. n 邊形ノ對角線ノ數ヲ d_n トスレバ

$$d_n=\frac{n(n-3)}{2} \quad (驗\ n=5).$$

或多角形ノ對角線ノ總數ガ35ナルトキハ其多角形ノ邊ノ數如何.



39. A, B 二船アリ, A ハ港ヲ出帆シテ正北ニ向ヒ, 9節ノ速力ニテ進ミ, B ハ其後1時間ヲ經テ同港ヲ出帆シテ正東ニ向ヒ7節ノ速力ニテ進マバ, A, Bノ距離53海里トナルハ, B出帆ノ後何時間ナルカ.



40. 直角ニ交ル甲乙兩直線アリ, A ハ甲直線上ニ B ハ乙直線上ニ夫夫交叉點ヲ距ル50尺ト100尺トノ位置ヨリ共ニ交叉點ニ向ヒ同時ニ進行ヲ始メ, A ハ毎秒4尺, B ハ毎秒3尺ノ速度ヲ以テ方向ヲ變ズルコトナク其進行ヲ續クルモノトセバ, A ト B トノ距離ガ最モ近クナルハ幾秒ノ後ナルカ,又其距離及ビ位置如何.

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(41—43).

41. $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{5x-14}{x-4}$ $\qquad$ $\dfrac{10x-3}{7x-5}=\dfrac{6x+1}{5x-3}$

初ノ方ノ方程式ヲ解クニハ先ヅソノ分數項ヲ帶分數ニ直スガ便利ナリ(卷上摘要33).

42. $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{2x-6}$ $\qquad$ $2x-9\sqrt{x}=5$

43. $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ヲ文字ノ間ノ有理關係式ニ導ケ (42頁例五).

44. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α,β トスレバ

$$a(\alpha^3+\beta^3)+b(\alpha^2+\beta^2)+c(\alpha+\beta)=0$$

ナルコトヲ證明セヨ.

45. $-3,\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2}$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ.

聯立二次方程式

39. 二元聯立方程式

本節ハ之ヲ三ツノ場合ニ分チテ説カントス.

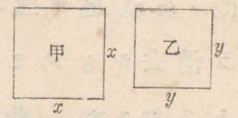
一次と二次との聯立方程式〔第一〕

一次と二次との聯立方程式の標準形(二元)

$$\begin{cases} mx+ny=r \dots\dots\dots\dots\dots\dots(1) \\ ax^2+bxy+cy^2+dx+ey=f \dots\dots(2) \end{cases}$$

〔例一〕 一邊ガ x 間ト y 間トナル甲,乙二ツノ正方形アリ,其面積ノ差15坪ニシテ,甲ノ一邊ノ三倍ハ乙ノ一邊ノ二倍ヨリ10間大ナリ. x,y 幾許.

之ヲ方程式ニテ表セバ



$$\begin{cases} x^2-y^2=15 \dots\dots\dots\dots\dots(1) \\ 3x-2y=10 \dots\dots\dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

即チ二次ト一次トノ聯立方程式ナリ.

解 (2)ヨリ $\qquad x=\dfrac{2y+10}{3} \dots\dots\dots\dots(3)$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$\left(\frac{2y+10}{3}\right)^2-y^2=15 \dots\dots(4)$$

$$\therefore\ (4y^2+40y+100)-9y^2=135$$

$$-5y^2+40y-35=0$$

$$y^2-8y+7=0$$

$$(y-7)(y-1)=0$$

$$\therefore\ y=7 \text{ 或ハ } y=1$$

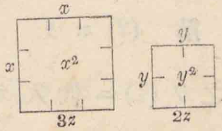
之ト(3)トニテ $\qquad$ 答 $\begin{cases} x=8 \\ y=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

(4)ハ唯一ツノ未知元 y ヲ含ム方程式ナリ,之ヲ初メノ聯立方程式ヨリ「x を消去したる方程式」トイフ.

二次ト一次トノ二元聯立方程式ヲ解クニハ,一次方程式ノ方ヨリ x ヲ y ノ項ニテ表シ(上ノ方程式

(3)ノ如ク),之ヲ二次方程式ノ中ノ x ニ代入シテ, x ヲ消去シ y ノミヲ含ム方程式ヲ作リテ解クモノトス(代入法). 此順序ハ能ク記憶スベシ,初メニ消去スル元ハ x ニ限ラズ.

〔例二〕 $\begin{cases} 2x-3y=0 \ldots\ldots (1) \\ x^2+y^2=325 \ldots\ldots (2) \end{cases}$ ヲ解クコト.



解 (1)ヨリ $2x=3y$ $\therefore\ x:y=3:2$

$$\therefore\ x=3z,\ y=2z \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ト置クコトヲ得. 之ヲ(2)ニ代入スレバ

$$(3z)^2+(2z)^2=325$$

$$\therefore\ 13z^2=325 \quad z^2=25 \quad z=\pm 5 \ldots\ldots (4)$$

之ト(3)トニヨリテ 答 $\begin{cases} x=15 \\ y=10 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-15 \\ y=-10 \end{cases}$

此處ニテ x, y ハ必ズシモ正方形ノ一邊ヲ表スモノト限ラザルガ故ニ $(-15, -10)$ モ與ヘラレタル聯立方程式ニ適合スル根ノ組ナリ

本例ノ如ク未知元ノ比ガ分ルトキハ第三ノ未知元(z)ヲ用ヒテ(z ハ x, y ノ公度ヲ表ス)解クガ一般ニ便利ナリ(卷上摘要18(二)).

$bx=ay$ 或は $x:y=a:b$ なれば

$$x=az, \quad y=bz$$

〔例題〕 次ノ各題ノ聯立方程式ヲ解ケ(1−3).

1. $\begin{cases} 2y-3x=1 \ldots\ldots (1) \\ 13x^2-8xy=-3 \ldots (2) \end{cases}$ 2. $\begin{cases} xy=12 \ldots\ldots (1) \\ 2x+3y=18 \ldots (2) \end{cases}$

3. 〔$x-y=2$ $3x^2-2xy=5$〕 先ヅ y ヲ消去セヨ.

上ノ例題1ニ於テ $(1)\times 4x+(2)$ ニヨレバ y ハ消去セラレテ $x^2=4x-3$ トナル.

又例題2ニ於テ(1)ヨリ $x=\dfrac{12}{y}$ トシテ,之ヲ(2)ニ代入スレバ $2\times\dfrac{12}{y}+3y=18$ トナル.

次ハ先ヅ y ヲ消去シテ解ケ(4, 5)

4. $\begin{cases} 2x-y=5 \\ xy=3 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x^2+3x-2y=4 \\ 2x^2+3y=5x-2 \end{cases}$

6. 〔$2x=5y$ $x^2-5y^2=15$〕 例二ノ通リニ解ケ.

7. 〔$x:y=2:3$ $xy+72=6(2x+y)$〕 ”

8. 〔$2x=-3y$ $4x^2+9xy+9y^2=72$〕 ”

二つの純二次聯立方程式〔第二〕

二つの純二次聯立方程式の標準形(二元)

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=d \ldots\ldots (1)\\ a'x^2+b'xy+c'y^2=d' \ldots\ldots (2)\end{cases}$$

之ハ此處ニ於テ述ベントスル聯立方程式ノ標準ノ形ナリ. 純二次方程式トハ(1)及ビ(2)ノ如ク未知元ノ一次ノ項ヲ含マザル二次方程式ノコトナリ.

〔例三〕 (一) $\begin{cases} 25x^2-15xy+2y^2=0 \ldots\ldots (1)\\ 3x^2-xy=8 \ldots\ldots (2)\end{cases}$ ヲ解ケ.

解 (1)ヨリ $(5x-y)(5x-2y)=0$ 故ニ

(A) $\begin{cases} 5x-y=0 \ldots\ldots (3)\\ 3x^2-xy=8 \ldots\ldots (2)\end{cases}$ (B) $\begin{cases} 5x-2y=0 \ldots\ldots (4)\\ 3x^2-xy=8 \ldots\ldots (2)\end{cases}$

(A) (3)ヨリ $x=z,\ y=5z$

之ヲ(2)ニ代入シテ

$3z^2-5z^2=8 \quad \therefore\ z^2=-4 \quad z=\pm 2i$

(B) (4)ヨリ $x=2u,\ y=5u$

之ヲ(2)ニ代入シテ

$12u^2-10u^2=8 \quad \therefore\ u^2=4 \quad u=\pm 2$

答 $\begin{cases} x=2i\\ y=10i\end{cases}$ $\begin{cases} x=-2i\\ y=-10i\end{cases}$ $\begin{cases} x=4\\ y=10\end{cases}$ $\begin{cases} x=-4\\ y=-10\end{cases}$

(二) $\begin{cases} 3x^2-xy=8 \ldots\ldots (1)\\ 4x^2+2xy-y^2=44 \ldots\ldots (2)\end{cases}$ ヲ解クコト.

解 (1)×11−(2)×2 ニヨリテ

$$25x^2-15xy+2y^2=0 \ldots\ldots (3)$$

$$\begin{array}{r} 33-11+0\\ 8+4-2\\ \hline 25-15+2 \end{array} \ (-$$

$\therefore\ (5x-y)(5x-2y)=0$

(A) $\begin{cases} 5x-y=0 \ldots\ldots (4)\\ 3x^2-xy=8 \ldots\ldots (1)\end{cases}$ (B) $\begin{cases} 5x-2y=0 \ldots\ldots (5)\\ 3x^2-xy=8 \ldots\ldots (1)\end{cases}$

(A), (B)ヲ解キテ(前例)次ノ答ヲ得.

答 $\begin{cases} x=2i\\ y=10i\end{cases}$ $\begin{cases} x=-2i\\ y=-10i\end{cases}$ $\begin{cases} x=4\\ y=10\end{cases}$ $\begin{cases} x=-4\\ y=-10\end{cases}$

〔$xy+4y^2=8 \quad x^2+2xy-4y^2=20$〕ヲ解ケ.

〔注意1〕 (一) 例三(二)ニ於テ解法ノ要點ハ(3)ノ如ク,既知項ヲ消去シテ,既知項ガ零ナル純二次方程式(二元ノ)

$$lx^2+mxy+ny^2=0$$

ヲ作ルニアリ,之アレバxトyトノ比ガ分ル.

既知項が零なる純二次方程式(二元の)あれば,それによりて,$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$との比が求めらる.

(二) 二元ノ純二次方程式 $ax^2+bxy+cy^2=d$ ニ適合スル x, y ノ値ノ一組ガ (α, β) ナルトキハ $(-\alpha, -\beta)$ モ亦之ニ適合ス.

〔例四〕
$$\begin{cases} 2x^2+3xy+y^2=70\ldots\ldots(1) \\ 6x^2+xy-y^2=50\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

解　$(2)\times 7-(1)\times 5$　　$\boldsymbol{32x^2-8xy-12y^2=0}$

$\therefore\ 8x^2-2xy-3y^2=0$　　$\therefore\ (4x-3y)(2x+y)=0$

$$(A)\begin{cases} 4x-3y=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ 6x^2+xy-y^2=50\ldots\ldots(2) \end{cases}\qquad (B)\begin{cases} 2x+y=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \\ 6x^2+xy-y^2=50\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(A)　(3) ヨリ　　$\boldsymbol{x=3z,\ y=4z}$

$6\times 9z^2+12z^2-16z^2=50$　　$50z^2=50$　　$\therefore\ \boldsymbol{z=\pm 1}$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}\qquad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$$

(B)　(4) ヨリ　　$\boldsymbol{x=-u,\ y=2u}$

$6\times u^2-2u^2-4u^2=50$　　$\therefore\ 0=50$　　$\therefore$ 不可能

(1) ト (2) トヲ變形スレバ

$$(C)\begin{cases} (2x+y)(x+y)=70\ldots\ldots\ldots(1) \\ (2x+y)(3x-y)=50\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

故ニ $2x+y=0\ldots\ldots(4)$ ト原方程式ノ各トハ聯立セズ. (A), (B) ノ中ニ不可能ノ組アラバ恒ニ原方程式ヲ(C)ノ如ク變形シタルモノヲ示シ置クベシ.

$$答\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}\qquad \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases}$$

〔例題〕 次ノ各題ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $\begin{cases} xy-2y^2=4 \\ x^2+xy-6y^2=21 \end{cases}$　　**2.** $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=4 \\ 8x^2+2xy-3y^2=-12 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2-3xy=-9 \\ 4x^2-2xy-3y^2=12 \end{cases}$　　**4.** $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=44 \\ 2x^2-xy+y^2=16 \end{cases}$

5. 次ノ三ツノ方程式ヲ聯立セシムル x, y ノ値ヲ求ム.　$(x=4,\ y=2;\ x=-4,\ y=-2)$

$[2x^2-3xy+y^2=12\quad x^2+2y^2=24\quad xy+6x=2y^2+12y]$

6. $[x^2-2xy+5=0\quad (x-y)^2=4]$　　之ハ先ヅ第二ヲ二ツノ場合ニ分ケヨ.

以上述ベタルハ聯立二次方程式ノ標準ノ二ツノ場合ナリ. 之ガ解法ノ順序ハ次ノ規則ニヨリ

テ能ク諳誦スベシ.

〔7〕 聯立方程式の解法

〔第一〕 一次と二次との聯立方程式(二元の)を解くには,一次方程式の方より,xをyの項にて表し,之を二次方程式の中のxに代入してxを消去し,yのみを含む方程式を作りて解くべし.初めに消去する元はxに限らず

(代入法).

〔第二〕 二つの純二次の聯立方程式を解くには先づ既知項を消去したるものを二つの一次方程式に分解し,其各と原方程式の一つとを聯立せしめたる二組の聯立方程式を解くべし.

7. 次ハ標準形ヲナサザルモノナリ.

(一) $\begin{cases} 2xy-x=3 \\ xy+2y=5 \end{cases}$　　(二) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=3(x-y) \\ 2x^2+xy-y^2=9(x-y \end{cases}$

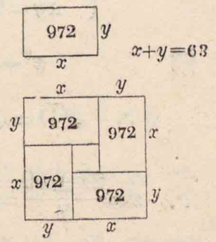
特別なる聯立方程式〔第三〕

〔例五〕 (一) $\begin{cases} x+y=63 \dots\dots\dots (1) \\ xy=972 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解　$z^2-63z+972=0 \dots\dots\dots (3)$

$\therefore \sqrt{D}=\sqrt{63^2-972\times 4}=\sqrt{81}=9$

$\therefore z=\dfrac{63\pm 9}{2}=\begin{cases} 36 \\ 27 \end{cases}$　　答 $\begin{cases} x=36 \\ y=27 \end{cases}$ $\begin{cases} x=27 \\ y=36 \end{cases}$



說明　xトyトノ和ガ63,積ガ972ナルヲ以テ,xノ値トyノ値トヲ二根トスル方程式(3)ヲ作リテ解キタルナリ(55頁〔2〕).
$\sqrt{D}$ハxトyトノ差ナリ

(84頁20).

原方程式ノ各ガx, yノ對稱式$(x+y,\ xy)$ヨリ成ルヲ以テ,xノ値トyノ値トヲ入レ換ヘタルモノモ根ナリ.

對稱式　x, yを含む代數式が其中のx, yを互に置き換へて得る式と同値なるとき之をx, yに

就て對稱式なりといふ.

對稱方程式 一つの方程式に就て其未知元を含む項を總て左邊に集めたるとき,左邊が x, y に就て對稱式なるとき,其方程式を x, y に就て對稱方程式なりといふ.

聯立方程式の中の各の方程式が x, y に就て對稱方程式なるとき,其聯立方程式を x, y に就て對稱聯立方程式なりといふ.

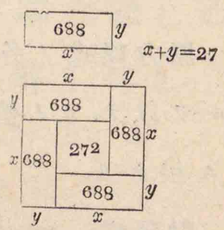
(二) $\begin{cases} x-y=27\ldots\ldots\ldots(1) \\ xy=688\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 $$z^2-27z-688=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\therefore\ \sqrt{D}=\sqrt{27^2+4\times688}=\sqrt{3481}=59$$

$$\therefore\ z=\frac{27\pm59}{2}=\begin{cases}43\\-16\end{cases}\qquad 答\begin{cases}x=43\\y=16\end{cases}\quad\begin{cases}x=-16\\y=-43\end{cases}$$

説明 原方程式ニヨリテ



$$\begin{cases}x+(-y)=27\\x(-y)=-688\end{cases}$$

故ニ x ト $(-y)$ トハ

$$z^2-27z-688=0\ldots\ldots\ldots(3)$$

ノ二根ナリ. 然ルニ(3)ノ二根ハ43ト−16トナリ.

故ニ次ノ二ツノ場合ガ考ヘラル.

$$(甲)\begin{cases}x=43\\(-y)=-16\end{cases}\qquad(乙)\begin{cases}x=-16\\(-y)=43\end{cases}$$

而シテ(甲)ヨリノ答ハ(43ト16),(乙)ヨリノ答ハ(−16ト−43)ナリ. (1)ハ對稱方程式ニアラズ.

$\sqrt{D}$ ハ x ト $(-y)$ トノ差即チ $x+y$ ニ當ル(17頁(2))

〔注意2〕 (一) 二つの數 x, y の差が d, 其積が p なれば, x と $(-y)$ とを根とする方程式は

$$z^2-dz-p=0$$ 〔例五(二)〕

(二) m と n との差が d, 其積が p なるときは, $-n$ と $-m$ とも其差 d, 其積 p なり. 〔例五(二)〕

(三) x, y に就て對稱なる聯立方程式の根の一組が $x=m, y=n$ なれば $x=n, y=m$ も亦其根なり〔例五(一)〕.

〔例題〕 諳算ニテ次ノ各ノ根ヲ求メヨ.

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=10 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5^2 \end{cases}$

〔例六〕 x, y ニ就テ對稱聯立方程式ノ多クハ之ヲ例五(一)ノ場合ニ導クコトヲ得ルモノナリ

(一) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \ldots\ldots(1) \\ x^2+xy+y^2=19 \ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 (1)ト(2)トヲ變形シテ,其左邊ヲ$(x+y)$, xyノ項ニテ表セバ

$$\begin{cases} (x+y)^2-3xy=7 \ldots\ldots(1) \\ (x+y)^2-xy=19 \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

之ヲ解キテ

$$\begin{cases} xy=6 \\ (x+y)^2=25 \end{cases}$$

故ニ次ノ二ツノ場合ニ分タル.

(A) $\begin{cases} xy=6 \\ x+y=5 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} xy=6 \\ x+y=-5 \end{cases}$

之ヲ解キテ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$

(二) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \ldots\ldots(1) \\ x^4+x^2y^2+y^4=133 \ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 (2)ノ左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2-x^2y^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$ (巻上摘要25六)

故ニ (2)÷(1) ニヨリテ

$$x^2+xy+y^2=19 \ldots\ldots(3)$$

$$\therefore \begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \ldots\ldots(1) \\ x^2+xy+y^2=19 \ldots\ldots(3) \end{cases}$$ (前例)

(三) $\begin{cases} x+y=5 \ldots\ldots(1) \\ x^3+y^3=35 \ldots\ldots(2) \end{cases}$ ヲ解クコト.

解 (2)÷(1) ニヨリテ

$$x^2-xy+y^2=7$$

$$\therefore \quad (x+y)^2-3xy=7$$

之ト(1)トニテ $xy=6 \ldots\ldots(3)$

$\therefore \begin{cases} xy=6 \ldots\ldots(3) \\ x+y=5 \ldots\ldots(1) \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

問題　第三十五集

次ノ各題ノ對稱聯立方程式ヲ解ケ(1—6).

1. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39 \\ x^2+xy+y^2=67 \end{cases}$　　2. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=5 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$　　4. $\begin{cases} 3(x+y)+2=2xy \\ 2(x+y)+28=3xy \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2y^2=10xy-24 \\ x+y=5 \end{cases}$　　6. $\begin{cases} x+y=354 \\ xy=30240 \end{cases}$

次ノ各題ノ聯立方程式ヲ解ケ.

7. $\begin{cases} x-y=19 \\ xy=11466 \end{cases}$　　8. $\begin{cases} x-y=6 \\ x^2+y^2=180 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2y^2-2xy-8=0 \end{cases}$　　10. $\begin{cases} xy=(x-y)+1 \\ x^2+y^2=7(x-y)-4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=10 \end{cases}$　　12. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{9} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$　　14. $\begin{cases} x+\dfrac{2}{y}=\dfrac{5}{2} \\ y+\dfrac{3}{x}=4 \end{cases}$

15. 次ノ各ハ諳算ニテ其根ヲ求メヨ.

$\begin{cases} (x-3)(y-5)=0 \\ x+y=12 \end{cases}$　　$\begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \end{cases}$　　$\begin{cases} xy=0 \\ (x+y)^2=5(x+y)-6 \end{cases}$

〔注意〕 (一) 一組の聯立方程式 $\begin{cases} A.B=0 \\ C=0 \end{cases}$ は次の二組の聯立方程式に分たる

(a) $\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$

(二) 一組の聯立方程式 $\begin{cases} A.B=0 \\ C.D=0 \end{cases}$ は次の四組の聯立方程式に分たる

(a) $\begin{cases} A=0 \\ C=0 \end{cases}$　(b) $\begin{cases} A=0 \\ D=0 \end{cases}$　(c) $\begin{cases} B=0 \\ C=0 \end{cases}$　(d) $\begin{cases} B=0 \\ D=0 \end{cases}$

16. (一) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x(y-1)=0 \end{cases}$ (諳算)　(二) $\begin{cases} (x+4)(y-3)=0 \\ (x+7)(y-7)=0 \end{cases}$ (諳算)

17. $\begin{cases} 2x^2+y^2=17 \\ x^2+3y^2=31 \end{cases}$　　18. $\begin{cases} (x-2)(y-1)=0 \\ 2x^2-3xy+5y=5 \end{cases}$

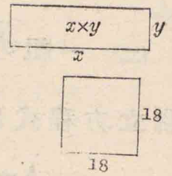
19. $\begin{cases} x-y+\sqrt{x-y}=20 \\ x+y=11 \end{cases}$ (64頁例二)　　20. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x(x+y)=15 \\ y(x+y)=10 \end{cases}$　　**22.** $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10 \\ (x+y)(5-y)=20 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x(x+y)=2x+25 \\ y(x+y)=2y+10 \end{cases}$　　**24.** $\begin{cases} \sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5 \\ x+y=16 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=2y \\ 2x^2+4xy=5y \end{cases}$　　**26.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=3 \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{4y^2}=9 \end{cases}$

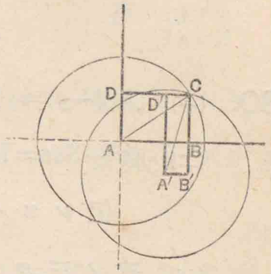
27. 矩形アリ,之ヲ一邊ノ長サ18間ナル正方形ニ比ブルニ周圍ハ12間長クシテ,面積ハ4坪小ナリ．矩形ノ二邊ヲ求ム．



28. 同時ニ或鐵道ノ兩端驛(其間ノ距離l哩)ヲ發セル二ツノ列車甲乙アリ,出發後12時間ヲ經テ擦レ違ヒ,甲ハ乙ヨリ7時間早ク終端驛ニ著キタリ．二ツノ列車ガ全距離ヲ行クニ要スル時間各幾許ナルカ．

29. 矩形ABCDノ對角線ACハ2寸5分ナリ．ABヲ1寸3分減ジ,CBヲ9分增スモ其對角線

ノ長サニ變リナシトイフ．AB, BCノ長サ各如何．



〔例〕　50錢銀貨(1箇ノ目方2.7匁)ト,10錢銀貨(0.6匁)トアリ．(a)目方總計63匁,(b)金高總計11圓40錢,(c)貨幣ノ箇數總計70箇トス．(a), (b), (c)ノ二ツヅツヲ聯立セシメタルモノ,(甲)[(a), (b)], (乙)[(a), (c)], (丙)[(b), (c)]ニ就テ各種貨幣ノ數ヲ求ム．

$$\begin{cases} 2.7x+0.6y=63 \dots\dots\dots (a) \\ 50x+10y=1140 \dots\dots\dots (b) \\ x+y=70 \dots\dots\dots (c) \end{cases}$$

答　(甲) 18, 24　(乙) 10, 60　(丙) 11, 59

(一)　本題ノ結果ニヨリテ見ルニ三ツノ二元方程式(a), (b), (c)ハ多クハ聯立セザルモノナリ．

(二)　$\left.\begin{matrix} A=B \\ B=C \\ C=A \end{matrix}\right\}$ ノ中ニハ獨立セル關係式ハ唯二ツアルノミ．卽チ此中ノ一ツハ他ノ二ツヨリ導カルルモノナリ．

(三) [A=B=C] ナレバ獨立セル關係式ハ二ツナリ(等號＝の數だけ).

30. (一) $[x(9-y)=y(1-x)=2]$ ヲ解ケ.

(二) $[u^3-3uv=7v=28u]$ 〃

但シ u ハ $x+y$ ヲ, v ハ xy ヲ表ス.

(三) 次ノ三ツノ方程式ヲ聯立セシムル x, y ノ値ヲ求ム.

$[(2x-y)(x+3)=0,\quad (x-2y)(x-y)=3,\quad 2x^2+y^2=6]$

40. 三元聯立方程式

(一) 加減消去法ニヨリテ次ノ三元一次聯立方程式ヲ解クコト.

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} 2x-5y+3z=7 \dots\dots\dots (1) \\ 3x+y-2z=6 \dots\dots\dots (2) \\ x-3y+z=2 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

解
$$\left.\begin{array}{ll} (1)-(3)\times 2 & \mathbf{y+z=3} \dots\dots\dots (4) \\ (2)-(3)\times 3 & \mathbf{10y-5z=0} \dots\dots (5) \end{array}\right\} \dots\dots \text{(B)}$$

之ヲ解キテ
$$\begin{cases} y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

之ヲ(3)ニ代入シテ $x=3$ ヲ得.

$$答\quad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

$y=1$, $z=2$ ヲ (1), (2), (3) ノ三ツニ代入シテ, x ガ 3 ナルコトヲ三通リニ計算スレバ驗算シタルコトニ當ル.

此例ニ於テ解法ノ要點ハ三元聯立方程式(A)ヨリ,一ツノ元ヲ消去シタル二ツノ二元方程式(4),(5)ヲ作リ之ヲ聯立セシメタルモノ(B)ヲ解クニアリ.

規則(加減消去法) 三元一次聯立方程式を解くには,三つの方程式の中二つ宛見較べて x を消去したるものを二つ作り,その二つを聯立せしめて y, z の値を求め,之を元の方程式に代入して x の値を求むべし. 初めに消去する元は x に限らず.

(二) 代入法ニヨリテ次ノ三元一次聯立方程式ヲ解クコト.

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} 2x-5y+3z=7 \dots\dots\dots (1) \\ 3x+y-2z=6 \dots\dots\dots (2) \\ x-3y+z=2 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \qquad (前例)$$

解 (2)ト(3)トヨリzヲ既知數ノ如ク取扱ヒテ

$$(B)\quad\begin{cases}3x+y=2z+6\dots\dots\dots\dots(2)\\ x-3y=-z+2\dots\dots\dots\dots(3)\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(2)\times3+(3) & 10x=5z+20\\ (2)-(3)\times3 & 10y=5z\end{array}\right\}$$

故ニ

$$(C)\quad\begin{cases}x=\dfrac{z+4}{2}\dots\dots\dots\dots(4)\\ y=\dfrac{z}{2}\dots\dots\dots\dots(5)\end{cases}$$

之ヲ(1)ニ代入スレバ

$$(z+4)-\frac{5}{2}z+3z=7\dots\dots\dots\dots(6)$$

$$\therefore\ \frac{3}{2}z=3\qquad\therefore\ z=2$$

之ト(4)ト(5)トニテ　　答 $x=3,\ y=1,\ z=2$

規則(代入消去法)　三元一次聯立方程式を解くには,三つの方程式の中の一つを殘し,他の二つよりzを既知數の如く取扱ひて,x,yをzにて表し,之を殘し置きたる方程式の中のx,yに代入してzだけを含む一元方程式を作りてzの値を求め,從つてx,yの値を求むべし. 初めに既知數の如く取扱ふ元はzに限らず.

〔例一〕 $\begin{cases}3x+2y-z=4\dots\dots\dots(1)\\ x-y+3z=8\dots\dots\dots(2)\\ -x^2+yz+2y=9\dots(3)\end{cases}$ ヲ解ケ(代入法).

解 xヲ既知數ノ如ク取扱ヒテ

(1)ト(2)ヨリ $\begin{cases}2y-z=4-3x\dots\dots\dots\dots(1)\\ -y+3z=8-x\dots\dots\dots\dots(2)\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{lll}(1)\times3+(2) & 5y=20-10x & y=4-2x\dots\dots(4)\\ (1)+(2)\times2 & 5z=20-5x & z=4-x\dots\dots(5)\end{array}\right\}$$

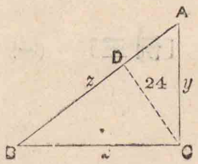
之ト(3)トニテ　$-x^2+(4-2x)(4-x)+2(4-2x)=9$

卽チ　$x^2-16x+15=0$　$\therefore$ $x=1$ 或ハ $x=15$

之ト(4)ト(5)トニテ

$$答\ \begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}\quad\begin{cases}x=15\\ y=-26\\ z=-11\end{cases}$$

〔例二〕 $\begin{cases}x-y=10\dots\dots\dots\dots(1)\\ xy=24z\dots\dots\dots\dots(2)\\ x^2+y^2=z^2\dots\dots\dots\dots(3)\end{cases}$



解 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

ナルコトニヨリテ

$$z^2=10^2+2\times24z$$

$$\therefore\quad z^2-48z-100=0$$

$$(z-50)(z+2)=0 \qquad \therefore\quad z=50 \text{ 或ハ } z=-2$$

之ト(1)ト(2)トニヨリテ

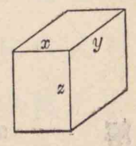
$$\text{(A)}\begin{cases} z=50 \\ x-y=10 \\ xy=1200 \end{cases} \qquad \text{(B)}\begin{cases} z=-2 \\ x-y=10 \\ xy=-48 \end{cases}$$

$$\text{答}\begin{cases} x=40 \\ y=30 \\ z=50 \end{cases}\begin{cases} x=-30 \\ y=-40 \\ z=50 \end{cases}\begin{cases} x=5+i\sqrt{23} \\ y=-5+i\sqrt{23} \\ z=-2 \end{cases}\begin{cases} x=5-i\sqrt{23} \\ y=-5-i\sqrt{23} \\ z=-2 \end{cases}$$

本例ハ直角三角形ニ關スル問題ヲ解クニ應用セラルベキモノナリ(前圖參照)。

此處ニテ x, y, z ハ必ズシモ直角三角形ノ一邊ヲ表スモノト限ラザルガ故ニ四組ノ答ハ皆與ヘラレタル聯立方程式ニ適合スルモノナリ。

〔例三〕 (一) $$\begin{cases} yz=20 \text{.........(1)} \\ xz=15 \text{.........(2)} \\ xy=12 \text{.........(3)} \end{cases}$$



解 (1)×(2)×(3) ニヨリテ

$$x^2y^2z^2=(4.5).(3.5).(3.4)$$

$$\therefore\quad xyz=60 \text{......(4)} \quad \text{或ハ} \quad xyz=-60 \text{......(5)}$$

之ヲ (1), (2), (3) ニテ邊邊割リテ

$$\text{答}\begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{cases}\begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \\ z=-5 \end{cases}$$

(二) $$\begin{cases} x(y+z)=27 \text{.........(1)} \\ y(z+x)=32 \text{.........(2)} \\ z(x+y)=35 \text{.........(3)} \end{cases}$$ ヲ解クコト。

解 各ノ左邊ヲ展開スレバ

$$\begin{cases} xy+xz=27 \text{............(1)} \\ yz+xy=32 \text{............(2)} \\ xz+yz=35 \text{............(3)} \end{cases}$$

(1), (2), (3) ヲ加ヘテ 2 ニテ割レバ

$$xy+xz+yz=47 \text{.........(4)}$$

(4) ヨリ (1), (2), (3) ヲ引ケバ

$$\begin{cases} yz=20 \\ xz=15 \\ xy=12 \end{cases} \quad \text{(前例)}$$

(三) $\begin{cases}(x+z)(x+y)=20 \ldots\ldots(1)\\(y+z)(x+y)=15 \ldots\ldots(2)\\(y+z)(x+z)=12 \ldots\ldots(3)\end{cases}$ ヲ解クコト.

解　(一)ノ方法ニヨリテ (1)×(2)×(3) ヲ開キテ

$$(y+z)(x+z)(x+y)=\pm 60$$

之ヲ二ツノ場合ニ分チテ, (1), (2), (3) ニテ邊邊割レバ

(A) $\begin{cases}y+z=3\\x+z=4\\x+y=5\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}y+z=-3\\x+z=-4\\x+y=-5\end{cases}$

各ヲ解キテ

答 $\begin{cases}x=3\\y=2\\z=1\end{cases}$　$\begin{cases}x=-3\\y=-2\\z=-1\end{cases}$

問題　第三十六集

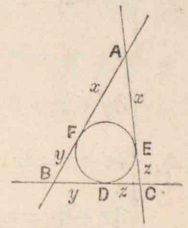
次ノ各題ノ三元一次聯立方程式ヲ解ケ(1—5).

1. $\begin{cases}x+2y+3z=32\\2x+3y+z=42\\3x+y+2z=40\end{cases}$　　2. $\begin{cases}y+z-3x+4a=0\\z+x-3y+4b=0\\x+y-3z+4c=0\end{cases}$

3. $\begin{cases}5x-7y=2\\2x-z=7\\4y-3z=1\end{cases}$　　4. $[y+4=\frac{3}{2}x+2$
$=2z+1$
$=22-(x+y)]$

5. $\left[\frac{1}{2}(x+z-5)=y-x=2z-11=9-(2x+z)\right]$

6. 三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ノ長サヲ表ス數ガ a, b, c ナル場合ニ各頂點ヨリ內切圓ノ切點迄ノ線分ノ長サヲ求ム. 但シ $a+b+c$ ヲ $2p$ ニテ表セ.



7. 二十圓金貨(1箇ノ目方$\frac{40}{9}$匁) x 箇ト, 十圓金貨(1箇$\frac{20}{9}$匁) y 箇ト, 五十錢銀貨(1箇2.7匁) z 個トノ金高合計280圓, 貨幣ノ數合計38個, 目方合計114匁ナラバ, x, y, z 各幾許

(答　9, 9, 20).

8. $x^2+y^2-gx-fy=c$ ガ次ノ三組ノ值

$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$　$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$　$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$

ニテ滿足サルルトキ g. f, c ノ值如何.

9. 三元一次聯立方程式解法ノ規則二ツヲ復誦セヨ.

次ノ各題ノ聯立方程式ヲ解ケ(10—17).

10. $\begin{cases} 2x-4y+z=0 \\ x+y-4z=0 \\ (x+1)(z+1)=(y-1)(y+6) \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ 2x^2+y^2-z^2+yz=3 \end{cases}$

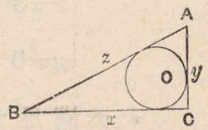
12. $\begin{cases} x+y+2z=11 \\ xy+z^2=15 \\ x^2+y^2+5z^2=58 \end{cases}$ 13. $\begin{cases} x(y-z)+6=0 \\ y(z-2x)=5 \\ z(2x-3y)+63=0 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3y+2z=2yz \ldots\ldots (1) \\ 4z+x=zx \ldots\ldots (2) \\ 3x+2y=xy \ldots\ldots (3) \end{cases}$ (1) ハ $\dfrac{3}{z}+\dfrac{2}{y}=2$ ニ,其他モ同様ニ變形シテ

但シ $x=0,\ y=0,\ z=0$ モ根ナリ.

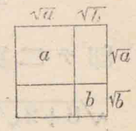
15. $\begin{cases} yz+y+z=5 \ldots\ldots (1) \\ zx+z+x=11 \ldots\ldots (2) \\ xy+x+y=17 \ldots\ldots (3) \end{cases}$ (1) ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘテ, $(y+1)(z+1)=6$, 其他モ同様ニ變形シテ

16. $\begin{cases} x(x+y+z)=8 \\ y(x+y+z)=12 \\ z(x+y+z)=5 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} y+z=\dfrac{5}{x} \\ z+x=\dfrac{8}{y} \\ x+y=\dfrac{9}{z} \end{cases}$



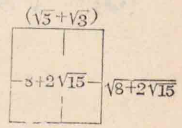
18. 二尺八寸ノ周ヲ有スル直角三角形ニ內切スル圓ノ半徑二寸ナラバ,三邊ノ長サ各幾許.

41. $\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}$ を變形する例



正方形ノ一邊ノ長サヲ表ス數ガ $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ノ形ノ無理數ナレバ其面積ヲ表ス數ハ $(a+b)\pm2\sqrt{ab}$ ニシテ,一般ニ無理數ナリ. 今此等ノ場合ニ於ケル面積ヲ表ス式 $A\pm2\sqrt{B}$ ヲ與ヘテ其一邊ヲ表ス式ヲ求メントス.

〔例一〕 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ハ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ト變形セラレ,



$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ハ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

ト變形セラル.

說明 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ ト置キテ,兩邊ヲ二乘スレバ

$$x+y+2\sqrt{xy}=8+2\sqrt{15}$$

故ニ $x+y=8,\ xy=15$ ニ適スル様ニ 5 ト 3 トヲ求メテ答ヲ $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ トシタルナリ.

此結果ハ與式ノ近似値ヲ求ムルニ便利ナリ.

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

$$=(2.23606\ldots)+(1.73205\ldots)=3.9681\ldots \quad 答$$

元ノ式ノママニテハ

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{8+2\times3.872983346\ldots}$$

$$=\sqrt{15.74596669\ldots\ldots}=3\cdot9681\ldots\quad 答$$

即チ二重開法ヲ要スルヲ以テ不便ナリ．又

$$\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{8-2\sqrt{15}}=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$=2\sqrt{5}=2\times(2.23606\ldots\ldots)=4\cdot4721\ldots\quad 答$$

此等ノ變形法ノ簡單ナルモノハ諳算ニテ,直ニ其結果ヲ書キ下シ得ルニ至ルコト肝要ナリ．

〔8〕 $\sqrt{A\pm2\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ とすれば

$$x+y=A,\qquad xy=B$$

〔例二〕 (一) $\sqrt{24-4\sqrt{35}}=\sqrt{24-2\sqrt{140}}$

$$=\sqrt{14}-\sqrt{10}\quad 答$$

(二) $\sqrt{6-\sqrt{35}}=\frac{1}{2}\sqrt{24-4\sqrt{35}}=\frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{10})$　答

(三) $\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$　答

〔例三〕 $x-2\sqrt{x}=7$　ヲ解クコト．

解　$(\sqrt{x})^2-2(\sqrt{x})-7=0$

$$\sqrt{x}=1\pm\sqrt{8}$$

然ルニ$\sqrt{x}$ハ正ノ數ナルベキヲ以テ(實數ナル時)

$\sqrt{x}=1-\sqrt{8}$ (負ノ數) ハ捨テテ,

$$\sqrt{x}=1+\sqrt{8}\qquad \therefore\ x=9+4\sqrt{2}\quad 答$$

驗算　$(9+4\sqrt{2})-2\sqrt{9+4\sqrt{2}}$

$$=(9+4\sqrt{2})-2(2\sqrt{2}+1)=7$$

本例ヲ有理方程式ニ導キテ解ケバ餘分ノ根ヲ見分クルニ不便ナリ．

〔例四〕 (一) $x^4-6x^2+1=0$　ヲ解クコト．

$$x^2=3\pm\sqrt{8}\qquad \therefore\ x=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{8}}$$

然ルニ　$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1$

故ニ上ノ四ツノ根ハ變形セラレテ

答　$\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1,\ -\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1$

(二) $x^4-6x^2+1=0$　ヲ解クコト(前例)．

與方程式ノ左邊ヲ變形スレバ

$$(x^4-2x^2+1)-4x^2=0$$

$$\therefore\quad (x^2-1)^2-(2x)^2=0$$

$$\therefore\quad (x^2-2x-1)(x^2+2x-1)=0.$$

(A)　$x^2-2x-1=0$　　(B)　$x^2+2x-1=0$

之ヲ解ケバ　$x=1\pm\sqrt{2},\ x=-1\pm\sqrt{2}$

本例ノ方程式ヲ複二次方程式トイフ.

複二次方程式の標準形

$$ax^4-bx^2+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

〔例五〕 $\sqrt{5+12i}$ ヲ變形スルコト.

$\sqrt{5+12i}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$ トスレバ

兩邊ヲ二乘シテ $5+12i=x-y+2i\sqrt{xy}$

$$\therefore\ 2i\sqrt{xy}=12i \quad \therefore\ \left.\begin{array}{r} xy=36 \\ \text{又}\quad x-y=5 \end{array}\right\} \ \therefore\ 9\text{と}4$$

$$\therefore\ \sqrt{5+12i}=\sqrt{9}+i\sqrt{4}=\mathbf{3+2i} \quad \text{答}$$

〔注意〕 (一) $x=\sqrt{5+12i}$ ハ次ノ複二次方程式

$$x^4-10x^2+169=0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

ノ一ツノ根ナリ. 如何ニトイフニ

$$x=\sqrt{5+12i}$$

ノ兩邊ヲ二乘スレバ

$$x^2=5+12i$$

移項シテ,再ビ兩邊ヲ二乘スレバ

$$(x^2-5)^2=(12i)^2$$

即チ $x^4-10x^2+25=-144$

$$\therefore\ x^4-10x^2+169=0 \ldots\ldots\ldots(1)$$

ヲ得レバナリ (92頁43).

此複二次方程式ヲ解ケバ

$$(x^4+26x^2+169)-36x^2=0$$

$$\therefore\ (x^2-6x+13)(x^2+6x+13)=0$$

$$\text{(A)}\ x^2-6x+13=0 \qquad \text{(B)}\ x^2+6x+13=0$$

$$\therefore\ x=3\pm 2i \ \text{及ビ}\ x=-3\pm 2i$$

(二) $\sqrt{8+2\sqrt{6}}$ ヲ簡單ニセントスレバ如何ニトイフニ,先ヅ是迄ノ通リニ考ヘテ

$\sqrt{8+2\sqrt{6}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ トスレバ

$$x+y=8, \qquad xy=6$$

故ニ x, y ハ次ノ方程式ノ二根ナリ.

$$z^2-8z+6=0$$

$$\therefore\ z=4+\sqrt{10}\ \text{或ハ}\ 4-\sqrt{10}$$

故ニ $\sqrt{8+2\sqrt{6}}=\sqrt{4+\sqrt{10}}+\sqrt{4-\sqrt{10}}$

此結果ハ却テ複雜ナレバ,此場合ニハ原形ヲ變形スルニ及バズ

(三)　$F=\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{3-\sqrt{7}}$ ノ近似値ヲ求ムルトキニハ次ノ如ク考フルガ便利ナリ(小數二桁).

$$F^2=(\sqrt{3+\sqrt{7}}-\sqrt{3-\sqrt{7}})^2=6-2\sqrt{2}=3.17157\ldots$$

$\therefore$　$F=\sqrt{3.17157\ldots}=1.780\ldots$　　　答　1.78 強

問題　第三十七集

次ノ各題ノ式ヲ簡單ニセヨ(1—2).

1.　$\sqrt{12-2\sqrt{35}}$, $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$　及ビ此和

2.　$\sqrt{30-12\sqrt{6}}$　　$\sqrt{4+\sqrt{15}}$

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(3—8).

3.　$x=\sqrt{x}+1$　　　4.　$x=4\sqrt{x}-5$

5.　$2\sqrt{x}=1+\sqrt{3x}$　　　6.　$2x^2-(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

7.　$x^4-7x^2+9=0$　　　8.　$\sqrt{4x-7}=\sqrt{2x+3}-2$

次ノ近似値ヲ各小數第二位迄求ム(9—10).

9.　$\dfrac{\sqrt{12-6\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$　　　10.　$\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}$

11.　次ノ各ニ就テ, x, y ヲ有理數ニテ求ム.

(一)　$\sqrt{7+30i\sqrt{2}}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

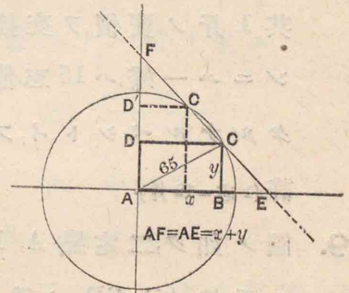
(二)　$\sqrt{2i}=\sqrt{x}+i\sqrt{y}$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ(12—13).

12.　$\dfrac{7}{\sqrt{11-6\sqrt{2}}}+\dfrac{7}{\sqrt{11+6\sqrt{2}}}$　　$\sqrt{\dfrac{a^2-2-a\sqrt{a^2-4}}{a^2-2+a\sqrt{a^2-4}}}$

13.　$\sqrt{4+\sqrt{10}}+\sqrt{4-\sqrt{10}}$　　$\dfrac{1}{\sqrt{16-2\sqrt{63}}}-\dfrac{1}{\sqrt{16+2\sqrt{63}}}$

14.　矩形 ABCD ノ對角線 AC ガ 65 糎ニシテ共相隣レル二邊 AB, BC ノ和 89 糎ナラバ,二邊ノ長サ各幾許.



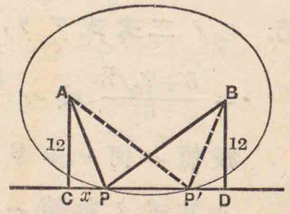
15.　x ノ二次式アリ, x ニ $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{6}$ 或ハ $\dfrac{5-2\sqrt{3}}{6}$ ヲ代入スレバ其式ノ數値ハ何レモ 0 トナリ,又 $x=2$ ヲ代入スレバ其式ノ數値ハ 74 トナルトイフ. 其二次式如何.

16.　$y=21+4x-x^2$ ニ就テ y ガ $-11, 0, 16$ ナルトキノ x ノ値ヲ求ム. 又 x ガ如何ナルトキ y ハ極大トナルベキカ(87 頁 24).

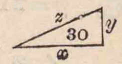
17. 甲乙二臺ノ發電機アリ,每分乙ハ甲ヨリ 100 回多ク廻轉ス,甲ガ 900 廻轉スルニ要スル時間ハ乙ガ 700 廻轉スルニ要スル時間ヨリ $\frac{1}{12}$ 分多シトイフ. 每分ノ廻轉數各如何.

18. 二婦アリ,合セテ 100 斤ノ林檎ヲ携ヘテ市ニ至リ,等額ノ賣揚金ヲ得テ歸レリ. 若シ二婦共 1 斤ノ賣價ヲ交換シテ其林檎ヲ賣リタランニハ一婦ハ 15 志,他ノ一婦ハ 6 志 8 片ヲ得タルナルベシトイフ. 各婦ノ 1 斤ノ賣價幾許 (1 志=12 片).

19. 圖ノ如ク,二定點 A, B ヨリ定直線 CD ヘ下セル垂線 AC, BD ノ長サガ各 12 糎ニシテ, CD ガ 21 糎ナルトキ CD 上ニ一點 P ヲ求メテ AP+PB ヲ 33 糎ニ等シカラシムルコトヲ求ム.



20. 直角三角形アリ,其面積 30 平方米ニシテ,斜邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ 4 米小ナリ. 各邊幾許.



21. $x^2+x+1=0$ ノ根ヲ α, β トシテ, (一) α^2 ト β^2 トヲ, (二) α^3 ト β^3 トヲ根トスル方程式ヲ作レ.

22. (一) $x=1+2i$ ヲ一ツノ根トスル二次方程式ヲ求ム.

(二) $x=1+2i$ ナルトキ, x^3+x^2-x+15 ノ數値ヲ求ム.

23. 次ノ式ノ極大又ハ極小ナル値ヲ求ム.

(一) $2x^2-7x-15$　　(二) $\dfrac{x^2-5x+9}{x-5}$

(三) $(3-x)(4+x)$　　(四) $2x-\sqrt{x^2-12}$

24. $[x^2-5xy-x+6y^2+y=2,\quad x^2+y^2-2x-y=5]$

但シ初メノ方程式ハ二ツノ一次方程式ニ分解セラル.

25. 次ノ方程式ニ適合スル x, y ノ實根ノ組如何.

$$(x^2-2xy-21)^2+(xy+y^2-18)^2=0$$

26. 次ノ三根ノ和,及ビ三根ノ積ヲ求ム.

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ (**27**—**31**).

27. $x^4+a^4=3a^2x^2$　　$10x^4-21=x^2$

28. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$　　$x^2+x+\dfrac{1}{x^2+x}=2\dfrac{1}{2}$

29. $3(1+x+x^2)^2=5(1+x^2+x^4)$

30. $3x^2-12x+18=2\sqrt{x^2-4x+13}$ (68頁8)

31. $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$ 但シ先ヅ左邊ヲ $u+v$ トオキテ

$[u+v=9 \quad u^2-v^2=45]$ トセヨ.

〔例〕 $x^3=1$ ヲ解クコト.

解 $x^3-1=0 \quad \therefore \ (x-1)(x^2+x+1)=0$

(A) $x-1=0$ (B) $x^2+x+1=0$

之ヲ解キテ　答 $1, \ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

(一) **1の立方根は** $1, \ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ の三つなり(虚根の一つを験せ).

(二) **1の立方根の中虚根の一つ** $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ を ω にて表せば,他の一つの虚根 $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ は ω^2 にて表さる.

(三) $\omega^3=1 \qquad \omega\times\omega^2=1 \qquad 1+\omega+\omega^2=0$

(四) $x^3-a^3=(x-a)(x-\omega a)(x-\omega^2 a)$

(五) $x^3=a^3$ の根は $a, \ a\omega, \ a\omega^2$ の三つなり.

32. 次ノ各ノ方程式ヲ解ケ.

(一) $x^3=8$ (二) $x^3+27=0$ (三) $x^6-19x^3=216$

33. 次ノ各ヲ因數ニ分解セヨ(ωヲ用ヒテ答ヘヨ).

(一) x^3-1 (二) x^3+64 (三) a^2+ab+b^2

34. 次ノ各式ノ掛ケ算ヲ行へ.

$(1+\omega)(1+\omega^2) \qquad \omega^{10} \qquad (x+a\omega+b\omega^2)(x+a\omega^2+b\omega)$

35. $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ ヲ解ケ.

第八篇

比，比例

基本の性質

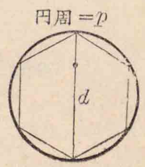
42. 比，比例の基本の性質

比　x の y に對する比とは，之を y に掛くれば x に等しくなる數(不名數)のことなり．　x ハ比ノ前項，y ハ比ノ後項ナリ．

或學校ノ入學試驗ニ於テ合格者人數 x ハ志願者人數 y ノ五分ノ二ニ當ルトイフトキノ $\frac{2}{5}$ ハ x ノ y ニ對スル比ナリ．

「x の y に對する比」ヲ表ス式ハ $x:y$，或ハ $\frac{x}{y}$ ニシテ，之ヲ略シテ x 對 y (比 x 對 y) ト唱フ．

今後**比を表す式**トイフベキヲ略シテ單ニ**比**トイフコト多シ．例ヘバ圓周 p ノ其直徑 d ニ對スル比ハ $\frac{22}{7}$ (大約)，或ハ $22:7$ ニシテ，其値ハ $3\frac{1}{7}$ ナリ．



$p:d=22:7$ 或ハ $\frac{p}{d}=\frac{22}{7}$ ノ各ヲ比例トイフ．

比例(比例式)　比例とは，二つの比の相等しきことを書き表したる等式をいふ．

比例の外項の積は，中項の積に等し．

〔例一〕　或職工ノ日給 (r) ガ 0.75 圓ナレバ，其 60 日分ノ給金ハ 45 圓，24 日分ノ給金ハ 18 圓ナリ．

此場合ニ

$$\frac{45}{60}=\frac{18}{24}=\frac{45\pm18}{60\pm24}=\frac{45m\pm18n}{60m\pm24n}=r$$

此等ノ分數ガ職工ノ日給 r ヲ表スヲ以テ相等シケレバ此等ノ分數ガ不名數(比)ナル時モ亦相等シ．スベテ分數ノ性質ハ比ニモ當テ筱マルモノナリ(上ノ各ヲ既約分數ニ化セ)．

〔1〕　(一)　$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ なれば，$A=Br$，$C=Dr$

(二)　$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ なれば，

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{A\pm C}{B\pm D}=\frac{mA\pm nC}{mB\pm nD}\quad\text{(加比の理)}$$

證明　(一)　$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (假定)．　故ニ各比ノ値ヲ何レ

モ r ト置クコトヲ得. 即チ

$$\frac{A}{B}=r,\quad \frac{C}{D}=r \quad \therefore\ A=Br,\ C=Dr$$

(二) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ (假定). 故ニ各比ノ値ヲ r ト置ケバ $A=Br$, $C=Dr$. 故ニ $\frac{A\pm C}{B\pm D}$ 及ビ $\frac{mA\pm nC}{mB\pm nD}$ ノ上項ノ二ツノ項ハ夫夫其下項ノ二ツノ項ノ r 倍ナリ. 故ニ此等ノ各比ノ値ハ r ナリ. 故ニ(二)ハ眞ナリ.

應用 $\frac{x+5}{3x-7}=\frac{x+4}{3x-8}$ ヲ解クコト.

分子ノ差(=1)ノ分母ノ差(=1)ニ對スル比ヲ元ノ一ツニ比ベテ

$$\frac{x+4}{3x-8}=\frac{1}{1} \quad \therefore\ 3x-8=x+4 \quad x=6 \text{ 答}$$

〔例二〕 (一) 入學試驗ニ於テ合格者數 x ト志願者數 y トノ比ガ **2:5** ニ等シトイヘバ,恒ニ或人數 u ヲ公度トシテ x ハ u ノ 2倍, y ハ u ノ 5倍ナリ.

又例ヘバ或時倫敦市場ニ於ケル金銀各1瓩ノ價ノ比ガ **101:3** ニ等シトイヘバ,或價格 u (例ヘバ約1錢3厘2毛)ヲ公度トシテ金1瓩ノ價ハ u ノ101倍, 銀1瓩ノ價ハ u ノ **3**倍ナリ.

(二) 甲,乙二箇ノ「めたる」アリ. 甲ハ金9瓩(1瓩ノ價 a 圓),銀6瓩(1瓩ノ價 b 圓)ヨリ成リ,乙ハ金6瓩,銀4瓩ヨリ成ル. 甲ノ價ト乙ノ價トノ比如何. 但シ $a:b=101:3$ トス.

解 $a:b=101:3 \quad \therefore\ a=101u,\ b=3u$ トオケバ

$$\frac{9a+6b}{6a+4b}=\frac{9(101u)+6(3u)}{6(101u)+4(3u)}$$

$$=\frac{u(9\times101+6\times3)}{u(6\times101+4\times3)}$$

$$=\frac{\mathbf{9\times101+6\times3}}{\mathbf{6\times101+4\times3}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$=\frac{909+18}{606+12}=\frac{927}{618}=\frac{3}{2} \quad \text{答}\ \mathbf{3:2}$$

今後 $a:b=101:3$ ナルトキ, $9a+6b$ ト $6a+4b$ トノ比ヲ求ムルニハ直ニ(1)ノ如ク

$$\frac{9a+6b}{6a+4b}=\frac{9\times101+6\times3}{6\times101+4\times3}$$

ニヨリテ計算スルガ捷徑ナリ(合比の理).

〔2〕 (一) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ なれば $A=Cu,\ B=Du$

(二) $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ なれば $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$

(三)　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ なれば

$$\frac{m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}}{p\mathrm{A}\pm q\mathrm{B}}=\frac{m\mathrm{C}\pm n\mathrm{D}}{p\mathrm{C}\pm q\mathrm{D}}$$

證明　(一)　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$　(假定).

然ルニ　$\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}=\dfrac{\mathrm{C}u}{\mathrm{D}u}$　(倍分ノ理).

故ニ　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}u}{\mathrm{D}u}$ ....(a)

(a) ニ就テ考フレバ　$\mathrm{A}=\mathrm{C}u$ ナレバ, $\mathrm{B}=\mathrm{D}u$

(二)　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$　$\therefore\ \mathrm{A}=\mathrm{C}u,\ \mathrm{B}=\mathrm{D}u$

$\therefore$　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=u$　又　$\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}=u$　　$\therefore$　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}=\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}$

(三)　$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$　$\therefore\ \mathrm{A}=\mathrm{C}u,\ \mathrm{B}=\mathrm{D}u$ ト置クコトヲ得.

之ニヨレバ $\dfrac{m\mathrm{A}\pm n\mathrm{B}}{p\mathrm{A}\pm q\mathrm{B}}$ ノ二ツノ項ハ $\dfrac{m\mathrm{C}\pm n\mathrm{D}}{p\mathrm{C}\pm q\mathrm{D}}$ ノ二ツノ項ノ u 倍ナリ．故ニ二ツノ比ハ相等シ．

應用　$\dfrac{x+c}{x-c}=\dfrac{a+b}{a-b}$ ヲ解クコト.　$\dfrac{x+c+x-c}{x+c-x+c}=\dfrac{a+b+a-b}{a+b-a+b}$

各比ニ就テ $\dfrac{(上項)+(下項)}{(上項)-(下項)}$ ヲ作リ, ソレヲ等シト置ケバ

$\dfrac{x+c+x-c}{a+b-a-b}=\dfrac{2x}{2c}=$

$\dfrac{2x}{2c}=\dfrac{2a}{2b}$　　$\therefore\ x=\dfrac{ac}{b}$　答

〔**例三**〕　1時間ノ速サ x 哩ナル自働車2時間ノ行程 $2x$ 哩ト, 1時間ノ速サ y 哩ナル自轉車3時間ノ行程 $3y$ 哩トガ相等シキトキ, 各ノ速サノ比 $x:y$ ヲ求ム.

解　$2x$ ト $3y$ トハ相等シ, 此相等シキモノヲ $6u$ ト置ケバ

$$2x=6u,\quad 又\quad 3y=6u$$

$$\therefore\quad x=3u,\qquad y=2u$$

$$\therefore\quad x:y=3u:2u=\mathbf{3:2}\quad 答$$

3:2 ヲ 2 ト 3 トノ反比(或ハ逆比)トイフ.

反比(**逆比**)　甲と乙との反比とは, 乙を前項とし, 甲を後項とせる比をいふ.

〔3〕　(一)　$\boldsymbol{ax=by}$ なれば $\boldsymbol{x:y=b:a}$

(二)　$\boldsymbol{ax=by}$ なれば $\boldsymbol{x=bu,\ y=au}$

(三)　$\boldsymbol{\dfrac{m}{a}:\dfrac{m}{b}}$ は $\boldsymbol{b:a}$ に等し.

ax と, by とが相等しければ, $x:y$ は, 其係數の反比 $b:a$ に等し．二つの數 a, b にて同じ數 m を

割りたる商の比は除數の反比$b:a$に等し.

既知項が零なる二元一次方程式によりて未知元の比を求むることを得. 例へば

$$\begin{cases} x+y=80 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 1.2x+0.9y=87 \ \ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$(2)\times 80-(1)\times 87 \qquad 9x-15y=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

$$\therefore \ x:y=15:9=\mathbf{5:3}$$

既知項が零なる二元の純二次方程式によりて未知元の比を求むることを得(98頁).

問題 第三十八集

1. 次ノ各比ヲ簡單ニナセ. 又各比ニ就テ其二項ノ最大公度ヲ求ム.

$2175:1350$, 1粁:1里, $3\frac{1}{2}$吋:$4\frac{2}{3}$吋

2. $x:y=3:2$ナルトキ,次ノ各比ヲ求ム. 簡單ナル比ノ式ニテ答フベシ.

(一) $\dfrac{3x+2y}{4x-y}$ (二) $\dfrac{3x^2-5y^2}{3xy-4y^2}$ (三) $\dfrac{\sqrt{x+3y}}{\sqrt{4x-3y}}$

3. 次ノ各ニ就テ$x:y$ヲ求ム.

(一) $\dfrac{3x+2y}{4x-y}=\dfrac{13}{10}$ (二) $\dfrac{7x+2y}{5x-4y}=3$

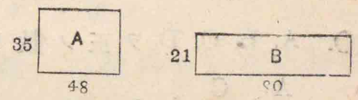
(三) $2x^2+12y^2=11xy$

4. 比例ノ性質ヲ應用シテ次ノ各ヲ解ケ.

(一) $\dfrac{x+44}{5}=\dfrac{x+24}{3}$ (諳算) (二) $\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{x-5}{x-7}$

(三) $\dfrac{6x-2}{2x+7}=\dfrac{3x-2}{x+3}$ (四) $\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2}$

5. A, Bナル二ツノ矩形アリ. 其相隣レル二邊ハ,Aハ35間ト48間, Bハ21間ト80間ナリ. A, Bノ面積ノ比ガ1:1(等比)ナルコトヲ確メヨ. 又35, 48, 21, 80ナル四ツノ數ヲ四ツノ項ニ用ヒテ比例式ヲ八通リ記セ([3]ニヨリテ).



6. 次ノ各ハ比例ニ變形シテ解ケ.

(一) $(2x+7)(x+3)=(x+5)(2x+4)$

(二) $(x^2+x+2+0.5x)(x^2-x-2+0.5x)$

$\qquad =(x^2-x+2-0.5x)(x^2+x-2-0.5x)$

7. 脚夫アリ,四日ト三時間ニテ32里18町ノ道ヲ行キ,又ソノ割合ニテ二日ト八時間ニテ21里

24町行キタリトイフ. 一日ノ行程(x里)ト,一時間ノ行程(y里)トノ比ヲ求ム.

8. 次ノ各ノ聯立方程式ヲ解ケ(先ヅ$x:y$ヲ求メヨ).

(一) $[25.9x-60.1y=24.1x-55.9y=2]$

(二) $\left\{\frac{x}{a+c}+\frac{y}{b+c}=\frac{x}{a-c}+\frac{y}{b-c}=1\right\}$

(三) $[ax+by+c=0,\quad a'x+b'y+c'=0]$

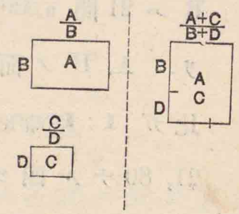
9. 或兄弟兩人ノ現今ノ年齢ノ比ト其幾年カ後ノ年齢ノ比トハ何レガ大ナルベキカ.

10. A, B, C, Dヲ正ノ數トシ,

$\frac{A}{B}>\frac{C}{D}$ ナリトスレバ,

$$\frac{A}{B}>\frac{A+C}{B+D}>\frac{C}{D}$$

ナルコトヲ證明セヨ.



11. $\frac{1}{5}$ノ平方根ト$\frac{1}{5}$トノ比ヲ求ム.

12. $(5x+2y):(3x+4y)=(7x-4y):(5x-2y)$ ナルトキ

$(9x-4y):(8x+3y)$ ヲ求ム.

本節ノ性質(定理)〔1〕—〔3〕ヲ能ク諳誦スベシ.

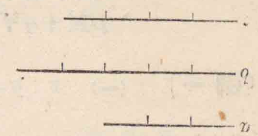
43. 連比及び複比

連比 連比とは, $a:b$, $b:c$, ... を別別に書く代りに $a:b:c:$...... と記したるものをいふ.

三ツノ直線 a, b, c ノ長サガ 2.25尺, 3.75尺, 3尺ナレバ, 7寸5分ハ公度ナリ, 之ヲ u ニテ表セバ

$$\begin{array}{r|l} 75 & 225,\ 375,\ 300 \\ \hline & \quad 3,\quad 5,\quad 4 \end{array}$$

$a=3u,\quad b=5u,\quad c=4u$



此場合ニ a, b, c ハ 3, 5, 4ニ比例ストイヒ, 之ヲ

$$a:b:c=3:5:4 \text{ ト書ク.}$$

互に比例する二組の數 二組の數が互に比例すとは,一組の數の中の任意二數の比が他の組の數の中のそれに對應する二數の比に等しきことをいふ.

〔注意1〕 前節ノ〔1〕,〔2〕ト同樣ニ次ノ定理ノ成リ立ツコトヲ知ル.

(1) $x:y:z=a:b:c$ なれば

$$x=au,\qquad y=bu,\qquad z=cu$$

即ち $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=u$$

而して此等の逆も眞なり.

(2) $\dfrac{X}{A}=\dfrac{Y}{B}=\dfrac{Z}{C}$ なれば

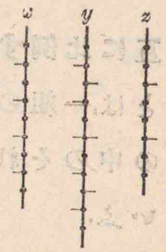
$$\frac{X}{A}=\frac{Y}{B}=\frac{Z}{C}=\frac{lX+mY+nZ}{lA+mB+nC}$$

(3) $\dfrac{X}{A}=\dfrac{Y}{B}=\dfrac{Z}{C}$ なれば

$$\frac{lX+mY+nZ}{pX+qY+rZ}=\frac{lA+mB+nC}{pA+qB+rC}$$

〔例一〕 (一) $x:y=5:6,\ y:z=4:3$ ナルトキ, $x:y:z$ ヲ求ム.

解
$$\begin{array}{l} x\ \ y\ \ z \\ 5:6 \\ \quad 4:3 \\ \hline 10:12:9 \end{array}$$ 答



y ヲ表ス割合數(連比ノ y ニ對應スル項)ガ, 6 ト 4 トノ公倍數 12 ニナル様ニシテ, 10:12:9 ヲ得タルナリ. x ヲ 5, y ヲ 6 ニテ表シタルトキノ單位ヲ u トスレバ,各ヲ 10 ト 12 トニテ表シタルトキノ單位ハ $\dfrac{u}{2}$ ナリ(圖ヲ參照).

(二) 三人ノ職工アリ. 甲 3 日ノ給金($3x$ 錢)ト乙 5 日ノ給金($5y$ 錢)トノ和ハ丙 10 日ノ給金($10z$ 錢)ニ等

シク,又甲 9 日分ト丙 2 日分トノ和ハ乙 9 日分ニ等シ. ヨリテ $x:y:z$ ヲ求ム.

解
$$\begin{cases} 3x+5y-10z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 9x-9y+\ 2z=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

(1)+(2)×5　$48x-40y=0$

$\therefore\ x:y=5:6 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

(1)×3−(2)　$24y-32z=0$

$\therefore\ y:z=4:3 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

答 10:12:9

或ハ z ヲ既知數ノ如ク取扱ヒ, x, y ヲ z ノ項ニテ表シテ後ソレ等ノ連比ヲ求メテモヨシ.

既知項が零なる三元一次方程式を二つ聯立せしむれば〔(1) ト (2) トノ如ク〕, それによりてそれ等の未知元の連比を求むることを得.

〔例二〕 金 621 圓ヲ年齢ガ 12, 10, 5 ナル三人ノ子供ニ年齢ニ反比例スル様ニ分ツコト.

證明 年齢ニ反比例スル様ニ分ツトハ年齢ノ比ガ **12:10** ナレバ其者ノ取リ前ノ比ハ 10:12 卽チ $\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{10}$ ニナル様ニ分ツコトナリ(前節〔3〕).

而シテ三子ノ年齡ハ 12, 10, 5 ナルヲ以テ，三子ノ取リ前ノ連比ハ　$\frac{1}{12}:\frac{1}{10}:\frac{1}{5}$

通分スレバ　$\frac{5}{60}:\frac{6}{60}:\frac{12}{60}=5:6:12$

$\therefore\ 5u+6u+12u=621\qquad u=27$

之ニ夫夫 5, 6, 12 ヲ掛ケテ

答　135圓，162圓，324圓

互に反比例する二組の數　二組の數が互に反比例すとは，一組の數の中の任意二數の比が他の組の數の中のそれに對應する二數の反比に等しきことをいふ．

〔注意 2〕　二組の數が互に反比例するときは，對應する二數の積は不易なり．例へバ

x, y, z が a, b, c に反比例すれば

$$ax=by=cz$$

說明　$x:y$ ハ $a:b$ ノ反比ニ等シ(假定)．

即チ　$x:y=b:a$

$\therefore\ ax=by$ ....(1)

同樣ニ　$ax=cz$ ....(2)

$\therefore\ ax=by=cz$

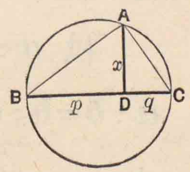
例二ノ答ニ就テ此性質ヲ驗證セヨ．

連比例　$a:b=b:c=c:d=$...... なる時，a, b, c......は**連比例をなす**といふ．

例へバ 24:12, 12:6, 6:3 ハ何レモ 2:1 ニ等シ，故ニ 24, 12, 6, 3 ハ連比例ヲナス．

三ツノ數 a, b, c ガ連比例ヲナスコトヲ單ニ比例ヲナストイヒ，b ヲ a ト c トノ**比例中項**，c ヲ a, b ノ**第三比例項**トイフ．

正ノ數ノミ論ズル場合ニ於テ，二數 p, q ノ比例中項 x ヲ p, q ノ**相乘平均數**トイフ．

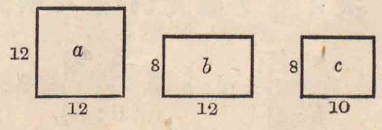


イカニモ　$p:x=x:q$

$\therefore\quad x=\sqrt{pq}$　ナレバナリ．

〔例三〕　$a:b=3:2,\ \ b:c=6:5$ ナレバ $a:c$ 如何．

說明　$c\times\frac{6}{5}$ ガ b ニ等シク，之ニ更ニ $\frac{3}{2}$ ヲ掛ケタルモノガ a ニ等シ．即チ



$$a=\left(c\times\frac{6}{5}\right)\times\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ a=c\times\left(\frac{6}{5}\times\frac{3}{2}\right)\quad\text{(乘法結合定則)}$$

$$=c\times\frac{9}{5}\qquad\therefore\ a:c=9:5\ \text{答}$$

9:5 ヲ二ツノ比 3:2 ト 6:5 トノ複比トイフ.

複比 二つ以上の比の積を其等の比の複比といふ.

〔4〕 二つの比 $a:b$ と $b:c$ との複比は $a:c$ に等し.

$a:b=b:c$ なれば $b=cr,\ a=cr^2$

$\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right\}$ 或ハ $\left\{\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right.$ ノ各ハ二ツノ比(單比) $a:b$ ト $b:c$ トノ複比ヲ表ス式ナリ. 複比ヲ表ス式トイフベキヲ略シテ單ニ複比トイフコト多シ.

次ノ各ヲ複比例(複比例式)トイフ.

$$\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right\}=a:c\qquad\left.\begin{matrix}3:2\\6:5\end{matrix}\right\}=9:5\qquad\left.\begin{matrix}a:b\\b:c\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}3:2\\6:5\end{matrix}\right.$$

複比例(複比例式) 複比例とは,複比が單比に

等しきこと,或は二つの複比が相等しきことを記したる等式をいふ.

〔例四〕 $\left.\begin{matrix}a:b\\a:b\end{matrix}\right\}$ ヲ求ムルコト. 答 $a^2:b^2$

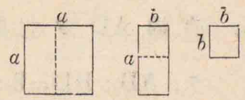
之ハ二ツノ單比 $\frac{a}{b}$ ト, $\frac{a}{b}$ トノ積ヲ求ムルコトナルヲ以テ前項ノ積ノ,後項ノ積ニ對スル比ヲ求メタルナリ.

複比ヲ求ムトハ其複比ニ等シキ單比ヲ求ムルコトナリ.

本例ハ次ノ如クニモ説明セラル.

$a:b=aa:ab$ ....(1)

$a:b=\ ab:bb$ ..... (2)



此二ツノ比例ノ左邊ノ複比ト,右邊ノ複比トヲ比ベテ

$$\left.\begin{matrix}a:b\\a:b\end{matrix}\right\}=a^2:b^2.$$

相等シキ二ツノ比ノ複比ヲ元ノ各比ノ二乘比トイヒ,相等シキ三ツノ比ノ複比ヲ元ノ各比ノ三乘比トイフ.

$a^2:b^2$ ト $a:b$ トハ何レガ大ナルカ $(a>b>0)$.

問題　第三十九集

1. 次ノ連比ヲ簡單ニセヨ.

(一)　$250^{米} : 300^{米} : 400^{米}$　　(二)　$2\frac{1}{2}$時 : $\frac{3}{4}$時 : $1\frac{3}{4}$時

2. $x : y : z = 45 : 18 : 10$　ナルトキ

$(6x+15y+15z) : (3x+30y)$　ヲ求ム.

3. $a : b = 3 : 4,\ \ b : c = 5 : 6,\ \ c : d = 8 : 9$　トシテ

$a : b : c : d$　ヲ求メヨ.

4. 次ノ各ハ諳算ニテ解ケ.

〔$x : y : 24 = 9 : 5 : 4$〕　〔$x+36 : x+12 = 9 : 5$〕

5. 〔$x : y : z = 3 : 4 : 5,\ \ 5x+3y-2z = 85$〕　ヲ解ケ.

6. 直線 AD ヲ二點 B, C ニテ三ツノ部分ニ分チテ, AB : BD = 3 : 7, AC : CD = 5 : 3 ナラシムレバ, AB, BC, CD ノ連比如何.

7. 〔$5x+y-4z=0,\ \ 2x-3y+z=0$〕,　$x : y : z$ 如何.

8. 年齢ガ12歳, 8歳, 6歳ナル三人ノ兄弟ニ(一)土地2町3段4畝ヲ年齢ニ比例シテ分ツコト.　(二)藏書234部ヲ年齢ニ反比例シテ分ツコト.

9. 三角形ノ三邊ヲ a, b, c, 之ニ對應スル高サヲ x, y, z トスレバ

$$ax = by = cz$$

a, b, c ガ 40, 36, 25 (粍) ナレバ $x : y : z$ 如何.

10. $\sqrt{10}-1,\ \sqrt{10}+1$　ノ比例中項ヲ求ム.

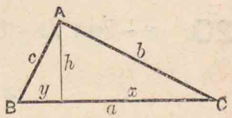
11. $2(a+b)^2,\ 6(a^2-b^2)$　ノ第三比例項ヲ求ム.

12. b ガ a ト c トノ比例中項ナレバ

$$(a+b+c)(a-b+c) = a^2+b^2+c^2 \quad \text{(證明)}$$

13. $5\frac{1}{7}^{日} : x^{日} = \begin{cases} 24^{人} : 28^{人} \\ 126^{円} : 882^{円} \end{cases}$　ヲ解ケ.

14. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{y}$　ナルトキ,此二乘比ヲ六通リニ表セ.

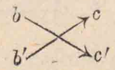


15. 比及比例ノ基本ノ性質ヲ復誦セヨ(〔1〕-〔4〕).

16. $\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$　ナルトキ, $x : y : z$ 如何.

答　$(bc'-b'c) : (ca'-c'a) : (ab'-a'b)$

此三ツノ項ハ次ノ叉乘法(サジョウ)ニヨリテ書キ下サル.



卽チ　$bc'-b'c$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] c \arrow[dr] & a \\ c' \arrow[ur] & a' \end{tikzcd}$$　即チ　$ca'-c'a$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] a \arrow[dr] & b \\ a' \arrow[ur] & b' \end{tikzcd}$$　即チ　$ab'-a'b$

17. $\begin{cases} lx+my+nz=0 \\ mx+ny+lz=0 \end{cases}$ ナルトキ，$x:y:z$ 如何.

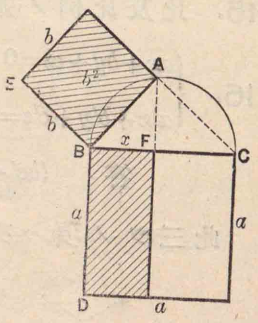
18. $ax+by+c=0$ ガ $(x=1,\ y=1)$，$(x=2,\ y=-3)$ ヲ根ニ有スレバ，$a:b:c$ 如何.

19. 次ハ先ヅ $x:y:z$ ヲ求メテ解ケ.

$$[5x+y-4z=0,\quad 2x-3y+z=0,\quad yz-x^2=100]$$

20. $x-2y:2x-3z:2y+z=1:2:3$ ニヨリテ $x:y:z$ ヲ求ム.

21. $x+y+z=\dfrac{14}{3}x=\dfrac{7}{2}y$ ナレバ $x+y+z:z$ 如何.



22. $\dfrac{3x+2y}{a-b}=\dfrac{2y+3z}{a-3b}=\dfrac{x-3z}{2a-3b}$ ナレバ

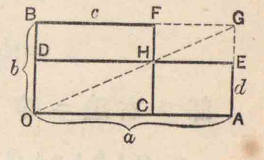
$$7x+8y+9z=0$$

23. $a^2:b^2=a:x$ ナレバ，b ハ a，x ノ比例中項ナリ.

24. 二數ノ比例中項ガ 6，其二數ノ第三比例項ガ 48 ナレバ各數幾許(實數ニテ).

44. 比例式の證明法

〔例一〕 比例ヲナス四ツノ正ノ數 a, b, c, d ノ中，a ガ最大ナレバ　$a+d>b+c$



證明　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$　(假設).

$$\therefore\ =\frac{a-c}{b-d} \qquad (131\text{ 頁}[1]).$$

然ルニ a ハ最大ナルヲ以テ各比ノ値ハ 1 ヨリ大ナリ.

故ニ　$\dfrac{a-c}{b-d}>1$ ……………(1)

又　$a-c>0 \quad \therefore\ b-d>0$

故ニ(1)ニヨリ　$a-c>b-d$ ……………(2)

$\therefore\ a+d>b+c$ ……………(3)

〔例二〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ナレバ次ノ各ノ比例式ガ成立ツコトヲ證明セヨ.

(一)　$(a+c)(a^2+c^2):(a-c)(a^2-c^2)$

$$=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2)$$

證明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ (假設)

故ニ $a=br,\ c=dr$ ト置ケバ (131頁〔1〕)

〔(一)ノ左邊〕$=(br+dr)(b^2r^2+d^2r^2):(br-dr)(b^2r^2-d^2r^2)$

$$=r(b+d).r^2(b^2+d^2):r(b-d).r^2(b^2-d^2)$$

$$=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2)$$

卽チ右邊ニ等シ. 故ニ(一)ハ眞ナリ

(二) $\boldsymbol{a+b+c+d:a+b-c-d}$

$$\boldsymbol{=a-b+c-d:a-b-c+d}$$

證明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ (假設) $\therefore\ a=br,\ c=dr$ ト置ケバ

〔(二)ノ左邊〕$=\dfrac{br+b+dr+d}{br+b-dr-d}$

$$=\frac{(r+1)(b+d)}{(r+1)(b-d)}=\frac{b+d}{b-d}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

〔(二)ノ右邊〕$=\dfrac{br-b+dr-d}{br-b-dr+d}$

$$=\frac{(r-1)(b+d)}{(r-1)(b-d)}=\frac{b+d}{b-d}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ト(2)トニヨリテ,(二)ノ眞ナルヲ知ル.

(三) $\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[m]{a^m-b^m}=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[m]{c^m-d^m}$

證明 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ (假設)

故ニ $a=cu,\ b=du$ ト置ケバ

〔(三)ノ左邊〕$=\sqrt[n]{c^nu^n+d^nu^n}:\sqrt[m]{c^mu^m-d^mu^m}$

$$=\sqrt[n]{u^n(c^n+d^n)}:\sqrt[m]{u^m(c^m-d^m)}$$

$$=u.\sqrt[n]{c^n+d^n}:u.\sqrt[m]{c^m-d^m}$$

$$=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[m]{c^m-d^m}$$

卽チ右邊ニ等シ. 故ニ(三)ハ眞ナリ

〔**注意**〕 上ノ證明法ハ廣ク適用セラレテ便利ナリ(代入證明法). 此場合ニ

$a=br,\ c=dr$ ト置クガヨキ場合(甲)ト

$a=cu,\ b=du$ ト置クガヨキ場合(乙)ト

ヲ見分クルコト肝要ナリ.

(二)の別證 (比例變形法)

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ $\therefore\ \dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$ 故ニ

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}=\frac{(a+c)+(b+d)}{(a-c)+(b-d)}=\frac{(a+c)-(b+d)}{(a-c)-(b-d)}$$

$$\therefore\ \frac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\frac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$$

(二)の別證 $\dfrac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\dfrac{a-b+c-d}{a-b-c+d}\cdots\cdots$(二)

ヲ證明セントス.

假設ニヨレバ　$ad=bc$……………(1)

(二)ノ兩邊ヲ通分シタル分子ヲ比ブルニ

〔左邊の分子〕$=(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

$=a^2+d^2-b^2-c^2+2ad-2bc$

$=a^2+d^2-b^2-c^2\quad [\because\ ad=bc]$……(2)

〔右邊の分子〕$=(a+b-c-d)(a-b+c-d)$

$=a^2+d^2-b^2-c^2-2ad+2bc$

$=a^2+d^2-b^2-c^2$……………………(3)

(2), (3) ニヨリテ(二)ノ眞ナルコトヲ知ル.

〔例三〕　$(pa+qb+rc+sd)(pa-qb-rc+sd)$

$=(pa-qb+rc-sd)(pa+qb-rc-sd)$…(1)

ナレバ　$bc:ad=ps:qr$……(2)

證明　假設(1)ニヨリテ次ノ比例式ヲ得

$$\frac{pa+qb+rc+sd}{pa+qb-rc-sd}=\frac{pa-qb+rc-sd}{pa-qb-rc+sd}\text{……(3)}$$

$$\therefore\ =\frac{2(pa+rc)}{2(pa-rc)}=\frac{2(qb+sd)}{2(qb-sd)}\qquad \text{(131頁〔1〕)}$$

$$\therefore\ \frac{2pa}{2rc}=\frac{2qb}{2sd}\qquad \text{(133頁〔2〕)}$$

$$\therefore\ bcqr=adps$$

$$\therefore\ \boldsymbol{bc:ad=ps:qr}\qquad \text{(135頁〔3〕)}$$

〔例四〕　$\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$…………(1)

ナルトキハ

$$x+y+z=0\text{……………(2)}$$

證明　比例式(1)ノ下項ノ和$(b-c)+(c-a)+(a-b)$ハ0ナリ，而シテ上項ノ和ハ下項ノ和ノr倍(各比ノ値ヲrトス)ナレバ又0ナリ．即チ　$x+y+z=0$

〔例五〕　$\dfrac{y+z}{b-c}=\dfrac{z+x}{c-a}=\dfrac{x+y}{a-b}$……(1)　ナレバ，

各比ハ　$\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(b-c)(a-c)(a-b)}}$ ニ等シ．……(2)

證明　假設(1)ノ各比ノ値ヲrトスレバ

$$\begin{cases} y+z=(b-c)r\text{……………(3)}\\ z+x=(c-a)r\text{……………(4)}\\ x+y=(a-b)r\text{……………(5)}\end{cases}$$

之ヲ解カンニ，(3)+(4)+(5) ヲ2ニテ割リテ

$$x+y+z=0\text{……………(6)}$$

(6)−(3)，(6)−(4)，(6)−(5) ニヨリテ

$$x=-(b-c)r,\quad y=-(c-a)r,\quad z=-(a-b)r\text{……(7)}$$

故ニ　$\sqrt[3]{\dfrac{xyz}{(b-c)(a-c)(a-b)}}$ ニ代入スレバ

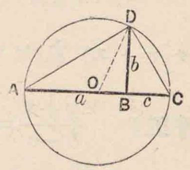
$$=\sqrt[3]{\frac{-(b-c)r.(c-a)r.(a-b)r}{(b-c)(a-c)(a-b)}}=\sqrt[3]{r^3}=r$$

故ニ(2)ハ眞ナリ.

問題　第四十集

1. a, b, c ガ比例ヲナストキハ

$$\frac{a+c}{2}>b \qquad (a>b>c>0)$$



$a:b=c:d$ ナルトキ,次ノ比例式ヲ證明セヨ(2—7).

2. $(a-b)^2:ab=(c-d)^2:cd$

3. $ab+cd:ab-cd=b^2+d^2:b^2-d^2$

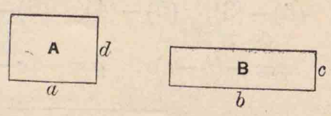
4. $a^2+ab+b^2:c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2:c^2-cd+d^2$

5. $a+b:c+d=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$

6. $a+b:a+b+c+d=a:a+c$

7. $(a^3+a^2b+b^3)(a+b):(c^3+c^2d+d^3)(c+d)=a^4+b^4:c^4+d^4$

8. 等積ナル二ツノ矩形A, Bアリ. 其相隣レル二邊, Aハa, d; Bハb, cニシテ, $a\sim d<b\sim c$トスレバ,Aノ周ハBノ周ヨリ小ナリ.



9. a, b, c ガ比例ヲナセバ

(一)　$a:a+b=a-b:a-c$

(二)　$a(b+c)^2=c(a+b)^2$

10. $(x+y-3z-3u)(2x-2y-z+u)$

$$=(2x+2y-z-u)(x-y-3z+3u)$$

ナレバ　$x:y=z:u$

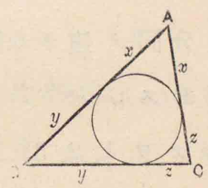
11. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}$ ナレバ,

$$ax+by+cz=0$$

12. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$

ナレバ,

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$$



13. $x:y:z=a:b:c$ ナレバ,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{(x+y+z)^2}{(a+b+c)^2}$$

14. $\dfrac{y+z}{m-n}=\dfrac{z+x}{n-l}=\dfrac{x+y}{l-m}$ ナレバ,此各比ハ

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(m-n)^2+(n-l)^2+(l-m)^2}}$$ ニ等シ.

15. $a+b:b+c=c+d:d+a$ ナレバ,

$a=c$ ナルカ,　或ハ $a+b+c+d=0$

16. $\frac{y+z}{ay+bz}=\frac{x+y}{ax+by}$ ナレバ，

$a=b$ ナルカ，或ハ $x:y=y:z$

比，比例の應用

45. 互に正比例す，或は互に反比例すといふ例．

1分間ノ速サ6.5町ナル汽車ノx分間ノ行程ヲy町トスレバ　$y=6.5x$

今xヲ1, 2, 3,………12トスレバ，之ニ對應スルyノ値ハ表ノ如シ．

時間 x(分)	行程 y(町)
1	6.5
2	13
3	19.5
4	26
5	32.5
6	39
7	45.5
8	52
9	58.5
10	65
11	71.5
12	78
……	

「4分間の行程が26町」ナルコトヲ標準トシテ考フルモ，時間ガ其2倍(8分)，3倍(12分)……トナレバ，其行程モ26町ノ2倍，3倍……トナル．

上ノ表ニ於テ二組ノ數(1, 2, 3. … 12 …)ト(6.5,

13, 19.5, … 78 …)トハ互ニ比例ス(第43節)．而シテ初メノ組ノスベテヲxニテ，後ノ組ノスベテヲyニテ表シテ，xトyトハ互ニ比例ストイフ．xトyトハ亦相對應スル二ツノ數，例ヘバ(4ト, 26ト), (8ト, 52ト), ……ノ任意ノ一對ヲ代表スルモノト考ヘラルルコトアリ．

互に比例する二つの數　相伴ひて增減する二つの數x, yの標準の關係を知りたる時，其一方の數xが元の2倍，3倍，……となる時，他の一方の數yの之に對應するものも亦其元のものの2倍，3倍，……となる時は，x, yは互に比例す(正比例す)といふ．而して之を$y\propto x$にて表す．

〔例一〕　$x\propto y$ ニシテ $x=4$ ナルトキ，$y=26$ ナリ．$x=20$ ノトキy幾許．

解　二組ノ數ハ互ニ正比例ス．ヨリテソノ相對應スル任意ノ一對ヲxトyトニテ表セバ之ヲ標準ノ場合ニ比ベテ

x	y	$x\propto y$
4	26	
20	( )	
( )	156	

$$\frac{y}{26}=\frac{x}{4}$$

$$\therefore\ y=\frac{13}{2}x \cdots\cdots\cdots (1)\quad \text{(一般解式)}$$

之ニヨリテ x ガ20ナルトキノ y ノ値ハ

$$y=\frac{13}{2}\times 20=130\quad 答$$

〔注意〕　此種類ノ問題ハ先ヅ一般解式ヲ求メテ解クガ普通ナリ(代數學).　一般解式ヲ求メ置ケバ,ソノ中ノ一ツノ元ノ種種ノ値ニ對應スル他ノ元ノ價ヲ求ムルニ便利ナリ.

x, y が互に正比例すれば,其間の關係式は

$$y=kx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

證明　二組ノ數 x ト y トハ互ニ正比例ス(假設). ヨリテソノ對應スル任意ノ一對ヲ x ト y トニテ代表セシメ,且ツ $x=a$ ナルトキ $y=b$ ナルコトヲ標準ノ關係ト假定スレバ

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\qquad \therefore\ y=\frac{b}{a}x$$

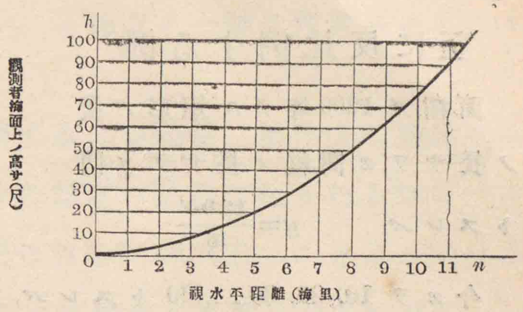
故ニ $\frac{b}{a}$ ヲ k ニテ表セバ

$$y=kx\qquad \text{(一般解式の形)}.$$

k ハ常數ニシテ,例一ニアリテハ 6.5 ナリ.

〔例二〕　海洋ヲ望ミ得ル距離(視水平距離)ハ海面

上觀測者眼高ノ平方根ニ比例ス. 眼高9尺ナルトキノ視水平距離ヲ



3.4869 海里トスレバ,或燈臺ニ据エ付ケラレタル望遠鏡(眼高 300 尺)ヨリ展望シ得ル距離如何.

解　眼高ト視水平距離トノ相對應スル任意ノ一對ヲ h 尺, n 海里トスレバ, n ハ $\sqrt{h}$ ニ正比例ス, 故ニ之ヲ 9 尺ノトキ,

眼高	視水平距離	
h 尺 ……	n 海里	$n\propto\sqrt{h}$
9 ………	3.4869	
300 ……	(　)	

3.4869 海里ナル場合(標準關係)ニ比ベテ

$$\frac{n}{3.4869}=\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{9}}$$

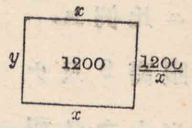
$$\therefore\ n=1.1623\sqrt{h} \cdots\cdots (1)\quad \text{(一般解式)}$$

h ヲ 300 ト置ケバ

$$n=1.1623\sqrt{300}$$
$$=20.13\ldots\text{(海里)}\quad 答$$

互に反比例する例

面積ガ1200坪ナル矩形ノ横ノ長サヲx間,縦ノ長サヲy間トスレバ　$y=\dfrac{1200}{x}$



今xヲ10, 20, 30……60トスレバ,之ニ對應スルyノ値ハ次ノ表ノ如シ.

横10間,縦120間ナルコトヲ標準トスルニ,横ノ長サxガ此ノ2倍,3倍……トナレバ,之ニ對應スル縦ノ長サyハ元ノ$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$……トナル. 故ニ

横の長さ	縦の長さ
x(間)	y(間)
10	120
20	60
30	40
40	30
50	24
60	20
……	……

上ノ表ノ中ノ二組ノ數(10, 20, 30, ……)ト(120, 60, 40……)トハ互ニ反比例ス. 而シテ初メノ組ノスベテヲxニテ,後ノ組ノスベテヲyニテ表シテxトyトハ互ニ反比例ストイフ. 卽チ

面積(xy)ガ一定ナルトキ,矩形ノ底邊(x)ト高サ(y)トハ互ニ反比例ス.

xトyトハ亦相對應スル二ツノ數(10ト120ト), (20ト60ト), ……ノ任意ノ一對ヲ代表スルモノトモ考ヘラル.

互に反比例する二つの數　相伴ひて增減する二つの數x, yの標準の關係を知りたる時,其一方の數xが其元の値の2倍, 3倍……となる時,他の一方の數yの之に對應する値は其元の値の$\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{3}$……となる時は, x, yは互に反比例(逆比例)すといふ.　之を$y\propto\dfrac{1}{x}$にて表す.

而して　$xy=k$ ……………………(B)

〔例三〕 $x\propto\dfrac{1}{y}$ ニシテ $x=36$ ナルトキ, $y=50$ ナリトスレバ(標準關係), $x=45$ ナルトキy幾許.

解　二組ノ數ハ互ニ反比例ス. 故ニxトyトニテソノ相對應スル任意ノ一對ヲ表セバ,之ヲ標準關係ニ比ベテ

x	y
36	50
45	(　)
(　)	24

$x\propto\dfrac{1}{y}$

$$xy=36\times 50 \text{……………}(1)$$

$x=45$ トスレバ　$y=\dfrac{36\times 50}{45}=40$　答

$y=24$ ナルトキ x 幾許(答 75).

〔5〕 x, y が互に正比例すれば

$$y=kx \text{..........(A)}$$

x, y が互に反比例すれば

$$xy=k \text{..........(B)}$$

問題 第四十一集

1. $x \propto y$ ニシテ，$x=6$ ナルトキ $y=3.3$ ナリ．x ガ 26 ナレバ y ハ幾許ナルカ(例一)．

2. 5.5瓩ハ 12.125 封度ニ當ル．k 瓩ガ p 封度ニ當ルトシテ k ト p トノ間ノ關係式ヲ求ム．
又33瓩ハ幾封度ナルカ．

3. 眼高 6 呎ノトキ視水平距離 3 哩ナリトスレバ，眼高 15呎ナレバソノ視水平距離幾許．又視水平距離 $3\sqrt{6}(=7.34\ldots)$ 哩ナラバ眼高幾許．

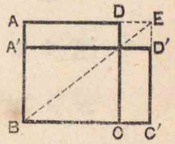
4. 圓ノ面積 s ハ其半徑 r ノ平方ニ比例ス．半徑ガ 3.5尺ナル圓ノ面積ガ 38.5 平方尺ナレバ(標準關係)，半徑ガ 2.1 尺ナル圓ノ面積幾許．又面積 154 平方尺ナラバ半徑幾許．

5. $x \propto \dfrac{1}{y}$ ニシテ，$x=20$ ナルトキ $y=15$ ナリ．ヨリテ，x ト y トノ間ノ關係式ヲ求ム(諳算)．

6. 12 人ノ工夫ガ 55 日ニテ爲ス仕事ヲ，m 人ノ工夫ニテ爲サバ d 日ニ出來上ルトイフ．m ト d トノ間ノ關係式如何(諳算)．

7. 互ニ反比例スル甲，乙二ツノ數アリテ，甲ガ 8 ナルトキ乙ハ $6\dfrac{1}{4}$ ナリ．甲ガ 5 ナルトキハ乙ハ幾許ナルカ．

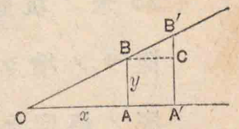
8. 互ニ反比例スル甲乙二ツノ數アリ，甲ガ 15 ナル時乙ハ 16 ナリ．甲ガ之ヨリモ 5 增サバ乙ハ幾許減ズベキカ．



9. $y \propto \dfrac{1}{x^2}$ ニシテ，$x=8$ ナルトキ $y=6\dfrac{1}{4}$ ナリ．x ガ 10 ナレバ y ハ幾許ナルカ．

10. $\begin{cases} x:y=m:n \\ x+a:y+b=m:n \end{cases}$ ナレバ，

$a:b=m:n$ (證明セヨ)



11. $y=1.8x+32$ ナレバ y ノ增加ト x ノ增加トハ互ニ正比例ス．

12. 列車アリ，長サ 220 碼ノ鐵橋ヲ全ク通過スルニ20秒ヲ費シ，長サ 330 碼ノ鐵橋ヲ全ク通過スルニ28秒ヲ費ストキ，此列車ガ y 碼ノ鐵橋ヲ全ク通過スルニ要スル時間ヲ x 秒トスレバ，y ト x トノ關係式如何.

13. 汽車アリ，其機關車ダケナラバ，其速サハ1時間ニ m 哩ニシテ，ソレニ列車ヲ連結スルトキハ其速サ v ノ減少スル量 y ハ連結セシ列車ノ數 x ノ平方根ニ比例ス. 今列車ノ數ヲ9トスル時ハ其速度8哩減少シテ $m-8$ 哩ナリトスレバ，v ト x トノ間ノ關係式如何.

列車の數，	速度の減少，	汽車の速度
x	y	v
9…………	8………	$m-8$
x………	$y=(\ \ )$……	$v=m-(\ \ )$

14. 深サ 508 米ノ坑底ニテハ溫度 28° ニシテ，深サ 28 米ノ坑底ニテハ 12° ナリ. 溫度ノ增シヲ深サノ增シニ比例スルトセバ，深サ m 米ノ坑底ノ溫度 $t°$ ヲ表ス式如何.

又 $m=300$ ナラバ t ハ幾許ナルカ.

〔例〕 $x+y \propto x-y$ ナレバ(甲)，$x \propto y$ ナリ(乙).

證明 $x+y$ ハ $x-y$ ニ比例ス(甲). 故ニ $x+y$ ノ組ノ中ノ數ノ連比

$$x_1+y_1 : x_2+y_2 : x_3+y_3 : \dots (1)$$

ハ，$x-y$ ノ組ノ中ノ數ノ連比

$$x_1-y_1 : x_2-y_2 : x_3-y_3 : \dots (2)$$

ニ等シ.

(甲) $\begin{cases} x+y, \dots\dots x-y \\ k \dots\dots 1 \\ x_1+y_1 \dots\dots x_1-y_1 \\ x_2+y_2 \dots\dots x_2-y_2 \\ x_3+y_3 \dots\dots x_3-y_3 \end{cases}$

(乙) $\begin{cases} x \dots\dots y \\ \dfrac{k+1}{2}, \dots\dots \dfrac{k-1}{2} \\ x_1 \dots\dots y_1 \\ x_2 \dots\dots y_2 \\ x_3 \dots\dots y_3 \end{cases}$

故ニ二組〔(1)ト(2)ト〕ノ中ノ相對應スル任意ノ一對ヲ $x+y$ ト $x-y$ トニテ代表セシムレバ，恒ニ

$$\mathbf{x+y=k(x-y)} \dots\dots (3) \qquad (k\text{ ハ常數})$$

$$\therefore\ x+y=kx-ky$$

$$(k-1)x=(k+1)y$$

$$\mathbf{x : y=k+1 : k-1} \dots\dots (4)$$

卽チ x ト y トノ比ハ恒ニ $k+1 : k-1$ ニ等シ.

故ニ二組ノ數 x ト y トハ比例ス.

卽チ $x \propto y$

例ヘバ $x+y : x-y$ ガ恒ニ $3 : 1$ ナレバ

$$x : y=3+1 : 3-1=4 : 2=2 : 1$$

15. $2x+3y \propto 5x-2y$ ナレバ，$x \propto y$ ナリ.

46. 複比例, 比例配分, 混合法

〔例一〕 紡績器械アリ, 毎日 9 時間之ヲ運轉スレバ, 18 日間ニ絲 135 貫目ヲ紡ギ得ルトイフ(甲). 毎日 10 時間運轉スレバ, 幾日間ニ 180 貫目ヲ紡ギ得ベキカ(乙).

證明

(甲)	(乙)		
135貫	180貫	x	正
9時	10時	y	反
18日	(　)	z	

先ヅ一般解式ヲ求メンガタメニ, 毎日 y 時間運轉シテ, z 日間ニ, 絲 x 貫目ヲ紡ギ得ルモノトシテ, 之ヲ(甲)ノ場合ニ比ブルニ

(一) 毎日ノ運轉時間 y ガ一定ナルトキハ, 紡ギ上ゲントスル絲ノ量 x ガ二倍, 三倍, …… トナレバ, 之ニ要スル日數 z モ二倍, 三倍, …… トナル. 故ニ絲ノ量 x ト運轉日數 z トハ互ニ正比例ス.

(二) 一定量ノ絲ヲ紡ギ上グルニ, 毎日ノ運轉時間 y ガ二倍, 三倍, …… トナレバ, 要スル日數 z ハ二分ノ一, 三分ノ一, …… トナル. 故ニ運轉時間 y ト運轉日數 z トハ互ニ反比例ス.

故ニ
$$z\text{日} : 18\text{日} = \begin{cases} x\text{貫} : 135\text{貫} \\ 9\text{時} : y\text{時} \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z \times 135 \times y = 18 \times x \times 9$$

$$z = \frac{1.2x}{y} \quad \cdots\cdots\cdots(\text{一般解式})\cdots(2)$$

$x=180,\ y=10$ トオケバ

$$z = \frac{1.2 \times 180}{10} = 21.6(\text{日}) \quad \text{答}$$

複比例 (1) ヲ得ル譯ハ次ノ三ツノ場合 (甲), (丁), (丙) ヲ比較スレバ明カナリ. 先ヅ (丙) ト (丁) トヲ比ブルニ上ノ説明(一)ニヨリテ

(甲)	(丁)	(丙)	
135貫	135貫	x貫	正
9時	y時	y時	反
18日	z'日	z日	

$$z : z' = x : 135 \cdots\cdots(A)$$

(丁) ト (甲) トヲ比ブルニ上ノ説明(二)ニヨリテ

$$z' : 18 = 9 : y \cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

(A) ト (B) ノ左邊ノ複比ト, 右邊ノ複比ヲ比ベテ

$$z : 18 = \begin{cases} x : 135 \\ 9 : y \end{cases}$$

複比例して變化する數　相伴ひて增減する三

つの數 x, y, zありて, zがxに正比例し, yに反比例するときは, zはxの正比とyの反比とに複比例すといひ,之を $z\propto\dfrac{x}{y}$ にて表す.

〔6〕 zがxに正比例し, yに反比例するときの, x, y, zの間の關係式は

$$z=\frac{kx}{y} \quad \text{或は} \quad yz=kx$$

例一ニアリテハkハ1.2ナリ.

〔例題〕 94人ノ工夫ヲ80日間使役シテ, 2.35哩ノ鐵道ヲ敷設セル割合ヲ以テ, l哩ノ工事ニ, m人ノ工夫ヲ使役シテd日カカリタリトス. (一) $d=64$, $l=2.2$ (二) $m=800$, $d=20$ (三) $m=3000$, $l=18$ ナレバ, m, l, d幾許.

人數	日數	仕事
m	d	l
94	80	2.35
( )	64	2.2
800	20	( )
3000	( )	18

〔例二〕 或工場ノ職工男子32人,女子60人,子供48人アリテ,日日支拂フ處ノ賃金總計70圓ナリ. 今各職工賃金ノ割合,男5人分ハ女8人分ニ等シク,女3人分ハ子供5人分ニ等シ. 各1人ノ日給如何.

解 各1人ノ日給ヲ$x^{\text{錢}}, y^{\text{錢}}, z^{\text{錢}}$トスレバ

$$5x=8y, \qquad 3y=5z$$

$$\therefore\ x:y=8:5$$

$$y:z=5:3$$

$$\therefore\ x:y:z=8:5:3$$

∴ 各1人ノ日給ハ$8u^{\text{錢}}, 5u^{\text{錢}}, 3u^{\text{錢}}$ニテ表サル

$$\therefore\ (8u\times32)+(5u\times60)+(3u\times48)=7000$$

$$700u=7000 \qquad \therefore\ u=10$$

答 男80錢,女50錢,子供30錢

此算法ヲ比例配分トイフ,比例配分トハ

$$\begin{cases} x:y:z:\ldots=a:b:c:\ldots \\ lx\pm my\pm nz\pm\ldots=\mathrm{M} \end{cases}$$

ニ歸スル問題ヲ解クコトナリ.

〔例三〕 1圓ニ付48合ノ上米ト,56合ノ下米トヲ混合シテ,平均1圓ニツキ51合ニ賣ラントス. 上米幾圓分(x圓分)ト下米幾圓分(y圓分)トヲ混合スベキカ.

解

51	48	5
	56	3

答 上米5圓分, 下米3圓分

説明 (一) 此算法ハ次ト比較シテ諒解セラル.

$$\frac{48x+56y}{51}=x+y$$

故ニ $$48x+56y=51x+51y$$

$$(51-48)x=(56-51)y$$

$$\therefore x:y=(56-51):(51-48)$$

$$=5:3$$

(二)

	1圓の相場	1圓に付損得	混合金高の比
上米	48合	3合損	5
混合米	51合		
下米	56合	5合得	3

∴ (上米):(下米) =5円分:3円分

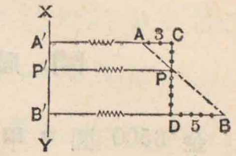
混合ノ升數ノ比ハ $(48^{合}\times5):(56^{合}\times3)=10:7$

升數ノ比ヲ初メニ求メンニハ,各ノ一合ノ價 $\frac{1}{48}$円, $\frac{1}{56}$円, ト混合米一合ノ價 $\frac{1}{51}$圓トニテ

$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{51\times56}$	5×48	10
	$\frac{1}{56}$	$\frac{3}{51\times48}$	3×56	7

∴ (上米):(下米) =10:7 (枡數ノ比)

〔注意〕 一直線XYノ同ジ側ニ一直線上ニアル三點A, P, BヨリXYマデノ距離A'A, P'P, B'Bガ48, 51, 56ナル時, P'Pノ長サハA'AトB'BトヲPB:PA (=5:3)ノ比ニ取リテ平均シタルモノニ等シ.



即チ $$P'P=\frac{A'A\times PB+B'B\times PA}{AP+PB}$$

〔例四〕 1斤ノ價65錢, 70錢, 85錢ナル三種ノ茶ヲ如何ナル割合ニ混合スレバ1斤80錢ノ茶ヲ得ベキカ(一ト通リ求メヨ).

解

	65錢	5	1			1
80錢	70錢			5	1	1
	85錢	15	3	10	2	5

答 1:1:5

説明 混ズベキ原料ノ三種ノ内,價高キ物ト,安キ物トヲ二種宛,(65錢ト85錢),(70錢ト85錢)ト選ビテ,前例ニ依リテ別別ニ共割合(1:3),(1:2)ヲ求メ,85錢ニ屬スル二ツノ項3ト2トヲ加ヘ合セテ5トシ,求ムル割合1:1:5ヲ得.

(1:3)ノ代リニ$(m:3m)$ヲ取リ,(1:2)ノ代リニ$(n:2n)$ヲ取リテモヨキユヱ,混合ノ割合ハ,

一般ニ $$m:n:(3m+2n)$$

$3Cu + 8NHO_3 = 3(Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO_2$.

問題　第四十二集

1. 金 3500 圓ヲ甲,乙,丙,丁ノ四人ニ分ツニ,甲ト乙トハ3ト4トノ如クシ,乙ノ7倍ト丙ノ3倍ト丁ノ $\frac{2}{3}$ トハ互ニ相等シカラシメントス. 甲ノ所得如何.

2. 空氣百容積ノ中窒素八十分,酸素二十分ヲ含ミ,同容積ニテ窒素ト酸素トノ目方ノ割合ハ 14:16 ナリ. 然ラバ空氣千瓦ノ中ニ窒素酸素各何瓦ヲ含ムカ(瓦ノ位迄).

3. 銅ノ比重ハ 9, 亞鉛ノ比重ハ7ナリ,此二種ノ金屬ヲ如何ナル割合ニ取リテ熔和スレバ比重 8.2 ナル眞鍮ヲ得ベキカ.

4. 品位 0.75, 0.57, 0.40 ナル三種ノ銀塊アリ. 今此等ノ銀塊ヲ熔和シテ品位 0.626 ノ銀塊 110 匁ヲ造ラントス. 熔和スベキ各種ノ銀塊ノ目方幾許(一ト通リ答ヘヨ).

5. 甲乙二種ノ銀塊アリ. 其含ム銀ト銅トノ割合甲ハ 91:9 乙ハ 43:7 ナリ. 此二ツヲ如何

ナル割合ニ取リテ熔和スレバ其中ニ含マルル銀銅ノ割合 9:1 トナルベキカ.

6. 本篇ノ性質〔1〕—〔6〕ヲ復誦セヨ.

$a:b=c:d$ ナルトキ,次ノ各ヲ證明セヨ(7—10).

7. $\sqrt{a-b}:\sqrt{c-d}=\sqrt{a}-\sqrt{b}:\sqrt{c}-\sqrt{d}$

8. $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$

9. $(a^2c+ac^2):(b^2d+bd^2)=(a+c)^3:(b+d)^3$

10. $(a^6+b^6+c^6+d^6)\div\left(\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^6}+\frac{1}{c^6}+\frac{1}{d^6}\right)=(abcd)^3$

11. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ ナレバ, $\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}}>\frac{c}{d}$　文字ハ正數

12. a, b ハ相異ナレル正ノ數トス. 次ノ關係符號ノ何レガ成リ立ツカヲ決定セヨ.

$$a^3+b^3:a^2+b^2 >=< a^2+b^2:a+b$$

13. 次ノ各ニ就テ x, y, z ノ連比ヲ求ム.

(一) $(4y-3z):(5x-7y):(2x-z)=1:2:7$

(二) $\frac{y}{x+y}=\frac{x-y+z}{y+z-x}=\frac{x+y+z}{2x+y+2z}$

14. $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)$

$$=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$$

ナレバ　$a:b=c:d$

15. a, b, c, d ガ連比例ヲナストキ,次ノコトヲ證明セヨ.

(一) $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4$

(二) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

16. $18x+24y+15z=5040$ ニシテ,

(一) $x:y:z=3:4:5$ ナレバ x, y, z 幾許.

(二) $3x=4y=5z$ 〃

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(17—19).

17. 〔$x:y:z=3:4:5 \quad xyz=103680$〕 〔實數ニテ〕

18. [$2x+y-2z=0 \quad 7x+6y-9z=0 \quad x^3+y^3+z^3=1728$]

19. $\dfrac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}}=\dfrac{a+b-2x}{a-b}$ 〔三十八 4〕

20. 或人A驛ヨリ,C驛マデ往復シタルニ,往ニハ初メノ x 町ヲ毎分30間ノ速サニテ歩ミ,殘リノ y 町ヲ毎分40間ノ速サニテ歩ミ,m 分カカリテC驛ニ到着シ,復ニハ全道程 $(x+y)$ 町ヲ平均毎分35間ノ速サニテ歩ミ通シ n 分カカリテ歸着シタリ. m ト n トハ何レガ大ナルカ.

21. 本邦標準金ノ品位ハ0.9ナリ. 之ト純金トヲ如何ナル割合ニ熔和スレバ英國ノ標準金二十二金(全量ノ $\frac{22}{24}$ ノ純金ヲ含ム)トナルカ.

22. 7月22日午前7時ニ4.5分後レ居タル時計同29日午後2時ニハ3分進ミ居タリ. 此時計ガ正シキ時刻ヲ示シタルハ何時ナリシカ.

23. 全國中學校ノ最近三年間ノ卒業生ノ平均年齢ハ18年6ヶ月, 18年10ヶ月, 18年3ヶ月ニシテ其人數ハ $25n, 24n, 28n$ ナリ. 三年間ノ卒業生ノ總平均年齢ハ18年何ヶ月ナルカ.

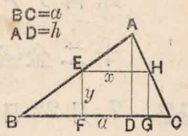
24. 50錢, 20錢, 10錢ノ三種ノ銀貨取リ混ゼ100箇アリ. 此金額24圓50錢ナルトキハ各幾箇宛ナルカ(一ト通リ答ヘヨ).

25. 同ジ若干ノ距離ヲ甲ハ4分33秒ニテ走リ,乙ハ4分40秒ニテ走ル. 然ラバ1哩ノ競走ニ於テ甲ハ乙ニ幾碼勝ツベキカ.

26. 或金額ヲ甲,乙,丙ノ三人ニ分配シタルニ,其金額ノ一部ハ三人ニ平等ニ分配シ,殘リハ3:5:8ノ割合ニ分配シタルニ,甲ハ都合205圓,乙ハ275圓ヲ得タリトイフ. 丙ハ幾許ヲ

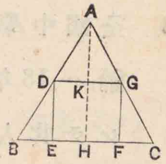
得タルカ.

27. 次ノ聯立方程式ヨリ實根ヲ得ルタメノ u ノ値ノ限界ヲ求ム.



$$\left\{\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},\qquad xy=u\right\}$$

28. 一邊ガ a ナル正三角形ニ內接スル正方形ノ一邊ヲ求ム. 之ニヨリテ一邊ガ b ナル正方形ニ外接スル正三角形ノ一邊ヲ求ム.



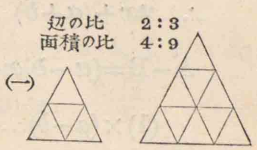
29. 或集會ノ費用 x ノ一部分 m ハ客ノ數ノ多少ニ拘ラズ一定ニシテ,殘部ハ客ノ數 y ニ比例ス. 而シテ 100 人ノトキノ集會費 184 圓, 200 人ノトキ 304 圓ヲ要セリ. 160 人, 240 人, 300 人ナラバ,ソノ費用各幾許ナルカ.

30. 飛行機ノ速度ハ發動機ノ馬力數ノ平方根ニ比例ス, 81馬力ヨリ 100 馬力ニ換ヘタルニ 1 秒ノ速度 3 米ヲ增スヲ得タリ, 發動機ノ 12 馬力ノモノヲ用フレバ速度如何.

31. $x \propto yz$, $y \propto z+x$ ニシテ, $x=2$ ノトキニ $z=3$ ナリ, $x=10$ ノトキ z ノ値幾許ナルカ.

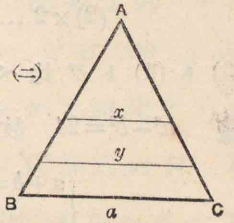
32. (一) 正三角形ノ面積 s ハ其邊 a ノ平方ニ比例ス. ヨリテ s ト a トノ關係式如何.

(一)



(二) 與ヘラレタル正三角形ヲ其一邊ニ平行ナル二ツノ直線 x, y ニテ等積ナル三ツノ部分ニ分テバ, x, y ハ元ノ正三角形ノ邊ノ何割ナルカ(小數第三位迄).

(二)



33. 一ツノ列車ハ甲地ヨリ,他ノ列車ハ乙地ヨリ同時ニ相同ヒテ發車シ,兩列車ノ出會ヒタル時,其走リシ距離ノ差63哩トナレリ,ソレヨリ一ツハ 4 時間ヲ經テ乙地ニ着シ,他ハ 9 時間ヲ經テ甲地ニ着セリト云フ. 兩列車ノ速度ノ比及ビ甲乙兩地間ノ距離ヲ求ム.

〔例〕 $A=x^2+ax+6$ ト $B=x^2+bx-6$ トガ $x-\alpha$ ノ形

ノ一次式Gヲ公約數ニ有スル樣ニ, a, b ノ間ノ關係式ヲ求ム.

解 $A+B=2x^2+(a+b)x=x\{2x+(a+b)\}$

$\therefore\ 2x+(a+b)$ ハ G ノ倍數ナリ…………(1)

$A-B=(a-b)x+12$ モ G ノ倍數ナリ……(2)

$(1)\times(a-b)\ldots\ldots 2(a-b)x+(a^2-b^2)$…………(3)

$(2)\times 2\ldots\ldots 2(a-b)x+24$…………(4)

(3) ト (4) トヲ比ベテ $a^2-b^2=24$ 答

驗 $a^2-b^2=24$ 故ニ $(a+b)(a-b)=24$

$\begin{cases} a+b=6 \\ a-b=4 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \end{cases}$ トスレバ

$$\begin{cases} A=x^2+5x+6=(x+3)(x+2) \\ B=x^2+\ x-6=(x+3)(x-2) \end{cases}$$

$$G=x+3$$

34. $A=x^2+ax+6$ ト $B=x^2+bx-12$ トガ公約數ヲ有スレバ, a, b ノ間ノ關係式如何.

35. $2x^4+x^3-6x^2-2x+3=0$ ト $2x^4-3x^3+2x-3=0$ トノ共通根ヲ求ム.

36. $x^2+ax+bn=0$, $x^2+bx+an=0$ ガ共通ナル一根ヲ有スルトキ,共通ナラザル二根ヲ根トスル

方程式如何. 答 $x^2+nx+ab=0$

37. 次ノ式ガ x ニ就テ完全平方式トナル樣ニ a, b ノ間ノ關係式ヲ求メヨ.

$$(a-b)x^2+(a+b)^2x+(a^2-b^2)(a+b)$$

38. $x^3-12x^2+px-q=0$ ノ三ツノ根ガ 1, 2, 3 ニ比例スル樣ニ p, q ノ値ヲ定メヨ.

39. 一定量ノ氣體ノ體積 v ハ絶對溫度 t ニ正比例シ, 壓力 p ニ反比例ス. t ガ 300°, p ガ 1.5 ナルトキ 2000 立方寸ダケノ體積ヲ有スル氣體ニ就テ, v, t, p ノ間ノ關係式如何. 絶對溫度トハ攝氏ノ溫度ニ 273° ヲ加ヘタルモノナリ.

第九篇

級數

47. 等差級數

級數　級數とは順序立ちて並びたる一列の數にして,各數の値と,其番號數との間の關係が一様なるものなり. 例ヘバ次ノ如シ.

		第十項	一般項
(1)	[3, 5, 7, ...	21]	$1+2n$
(2)	[1^2, 2^2, 3^2, ...	10^2]	n^2

一般項(公項)　級數の一般項とは,其級數の第n項をnの式にて表したるものなり.

前ノ級數(1)ノ一般項ニ就テnヲ次第ニ1, 2, 3,.....トシテ値ヲ求ムレバ,ソノ級數ノ第1項,第2項,第3項,......ヲ得.

等差級數又は算術級數(A.P.)　等差級數とは一列の數にして,其中の各數と其直ぐ前の數との差が一定なるものなり.

等差級數に於て其中の各數と其直ぐ前の數との差を公差といふ.

	公差
3, 5, 7, 9, 11	$d=2$
11, 9, 7, 5, 3	$d=-2$

p, q, r, sガ等差級數ヲナスコトヲ表ス關係式ハ

$$q-p=r-q=s-r$$

等差級數の標準形

$$[a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)d]$$

初項a, 公差dなる等差級數の第n項の値をlとすれば,

$$l=a+(n-1)d \;\ldots\ (\text{A.P.の公項})\ \ldots\ [1]$$

或は　$l=(a-d)+dn$

前ノ等差級數[11, 9, 7, ...]ノ公項lハ

$l=13-2n$　ナリ.

和の公式　$$s=\frac{(a+l)n}{2} \;\ldots\ldots\ldots\ [2]$$

證明　等差級數ノ標準ノ形ノ各項ヲ元ノ順ニ書キタル和ノ式(1)ト,末項ヲlトシテ逆ノ順ニ書

キタル和ノ式(2)トヲ書キ列ベ

$$s=a+(a+d)+(a+2d)\ldots\ldots+\{a+(n-1)d\}\ \ldots\ldots(1)$$

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots+\{l-(n-1)d\}\ \ldots\ldots(2)$$

(1)+(2) ヲ作ルニ,右邊ハ縱ニ列ビ居ル二ツヅツヲ加フレバ

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots(a+l)$$

而シテ右邊ノ $(a+l)$ ノ項數ハ n ナリ.

故ニ　$2s=(a+l)\times n$　　$s=\dfrac{(a+l)n}{2}\ldots\ldots(\mathrm{A})$

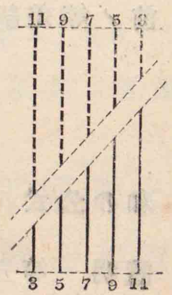
〔注意1〕　$l=a+(n-1)d$ ヲ代入スレバ

$$s=\frac{2a+(n-1)d}{2}\cdot n\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{B})$$

又　$s=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+\{a+(n-1)d\}$

$$=na+d\{1+2+\ldots\ldots+(n-1)\}$$

$$=na+\frac{n(n-1)}{2}d\ldots\ldots\ldots(\mathrm{C})$$



〔例一〕　等差級數 3, 5, 7, 9, 11 ノ和ヲ求ム.

$$s=\frac{(3+11)\times 5}{2}=35\quad 答$$

〔例二〕　初項 18, 公差 -3 ナル等差級數ノ和ガ 60 ナレバ項ノ

數幾許ナルカ.

項ノ數ヲ n トスレバ,

$$60=\frac{36-3(n-1)}{2}\cdot n\qquad [(\mathrm{B})ニヨリテ]$$

$$\therefore\ n^2-13n+40=0$$

$$(n-8)(n-5)=0$$

答　8項, 或ハ 5項

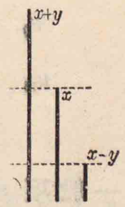
驗算　〔18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3 ノ和〕$=60$

〔例三〕　等差級數ヲナス三數アリ,其和 21, 其積 168 ナリ.　其級數如何.

解　求ムル三數ヲ $(x-y)$, x, $(x+y)$ トスレバ

$$(x-y)+x+(x+y)=21$$

$$\therefore\ 3x=21\qquad x=7\ldots\ldots(1)$$



即チ中央項ハ 7 ナリ.

故ニ求ムル三數ヲ $7-y$, 7, $7+y$ ニテ表シ,其積ヲ 168 ニ比ベテ

$$(7-y)\cdot 7\cdot(7+y)=168$$

$$49-y^2=24\qquad \therefore\ y=\pm 5\ldots\ldots\ldots(2)$$

答 (2, 7, 12) 或ハ (12, 7, 2)

〔注意2〕 (一) 項ノ數 n ガ奇數ナル場合ノ等差級數ノ和ハ中央項ノ n 倍ナリ. 例ヘバ

$[a, b, c, d, e]$ ガ A.P. ヲナセバ,其和ハ $5c$ ナリ.

(二) 等差級數ヲナス三數ハ〔$x-y, x, x+y$〕, 四數ハ〔$x-3y, x-y, x+y, x+3y$〕ト置クコトヲ得.

(三) 公式〔1〕,〔2〕ノ二ツヲ聯立セシムレバ, a, d, n, l, s ノ中何レノ二ツガ未知數ナルトキニテモ,他ノ三ツガ分レバ之ヲ解クコトヲ得.

〔例四〕 A.P. ノ第三項 (u_3) ハ 5, 第九項 (u_9) ハ 17 ナリ,第十五項 (u_{15}) ハ幾許ナルカ. 答 29

$$\left.\begin{array}{ll} u_3 & 5 \\ u_9 & 17 \\ u_{15} & x \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a+2d=5 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ a+8d=17 \ldots\ldots\ldots(2) \\ \therefore\ d=2,\ \ a=1 \end{array}$$

$$\therefore\ u_{15}=1+2\times14=29$$

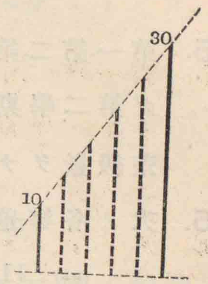
又一般項 u_n ヲ求ムレバ

$$u_n=2n-1 \quad \text{ナリ.}$$

〔例五〕 次ノ一列ノ數ガ等差級數ヲ成ス様ニ ( ) ノ中ニ入ルルベキ數ヲ求ム.

10, ( ), ( ), ( ), ( ), 30 — A.P.

解 求ムルA.P.ガ完成セラレタリトスレバ, 10 ハ其初項ニシテ, 30 ハ其第 6 項ニ當ル.



故ニ $10+(6-1)d=30$

$$d=4$$

答 10, 14, 18, 22, 26, 30

14, 18, 22, 26 ヲ 10 ト 30 トノ等差中項 (A.M.) ト云フ. 本例ハ10ト30トノ間ニ四ツノ等差中項ヲ挿入シタルモノナリ. 10ト30トノ間ニ挿入スベキ等差中項ノ數ヲイハズシテ,單ニ10ト30トノ等差中項トイヘバ〔10, 20, 30〕ナルA.P.ニ於ケル20ノコトナリ.

問題 第四十三集

1. 2, 7, 12, ... ナル等差級數ノ第八項ヲ求ム.
2. 20, 17, 14......2 ナル A.P. ニ就テ,項ノ數ヲ求ム.
3. 公項ガ $8-3n$ ナル等差級數ヲ,初項ヨリ第六項迄書キ下セ.

4. 5, 8, 11,…… ナル等差級數ノ公項ヲ求ム

(驗 $n=5$).

5. 第一,第二,第三ノ三ツノ學期點 a, b, c ノ平均ガ第二學期點數 b ニ等シケレバ, a, b, c ハ等差級數ヲナスコトヲ說明セヨ.

6. 次ノ各等差級數ノ和ヲ求ム(n ハ項ノ數).

(一) 11, 15, 19, …… $n=18$

(二) 2, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, …… $n=12$

(三) 4.2, 4.9, 5.6 …… $n=20$

(四) 18, 15, 12 …… 和ノ公式(n 項迄ノ和).

(五) $4x-y$, $3x-2y$, $2x-3y$, …… $n=9$.

7. 或等差級數ノ n 項ノ和(初項ヨリ第 n 項迄ノ和)ハ $\frac{n}{2}(13-3n)$ ナリトス. 之ニヨリテ,ソノ級數ノ初項,第 2 項迄ノ和,第 3 項迄ノ和…………第 6 項迄ノ和ヲ求メヨ.

8. 初項 20, 公差 -2 ナル A.P. ニ就テ, n ヲ幾許トスレバ和ガ 68 トナルベキカ.

9. 等差級數ヲ爲ス三ツノ數アリ,其和ハ 15 ニシテ,其平方ノ和ハ 83 ナリ. 其級數如何.

10. 等差級數ヲナス四ツノ數アリ,其和ハ 28 ニシテ,第二項ト第三項トノ積ハ 48 ナリトイフ. 其級數ヲ求メヨ.

11. 次ノ各ハ諳算ニテ答ヘヨ.

(一) 8, 16, 24, 32, 40 ノ和.

(二) 13, 11, 9, 7, …… 9 項ノ和.

(三) 五十一項ヨリ成レル等差級數ノ中央項ガ 10 ナルトキノ此級數ノ總和.

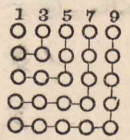
12. $u_6=25$, $u_{20}=81$ ナル A.P. ノ u_n ヲ求ム (驗 $n=6$).

13. $(u_{10}-u_2):(u_8-u_2):(u_6-u_2)$ ヲ求ム〔A.P. ニ於テ〕.

14. 2 ト 30 トノ間ニ六ツノ等差中項ヲ挿入セヨ.

15. 8 ト 24 トノ間ニ七ツノ等差中項ヲ挿入セヨ.

16. 1, 3, 5, …… ナル A.P. ノ n 項ノ和如何 (驗 $n=5$).



17. $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$, …… ノ n 項ノ和ヲ求ム.

18. 物體ガ墜落スルトキ,第一秒間ニ 16 尺,第二秒間ニ 48 尺,第三秒間ニ 80 尺……ヲ過グベシト云フ,此ノ如クシテ七秒間ニハ幾尺ヲ落下ス

ベキカ.

19. (一) 130, 55 ノ間へ 4 ツ A.M. ヲ挿入セヨ.

(二) 7.4, 20 ノ間へ 5 ツ　〃

(三) $\frac{x+a}{x-a}$ ト $\frac{x-a}{x+a}$ トノ A.M. ヲ求ム.

20. (一) $u_7=10$, $u_{13}=-2$ ナル A.P. ノ u_{25} ヲ求ム.

(二) $u_{11}=$ 37.5, $u_{16}=25$ ナル A.P. ノ公項如何.

21. $u_1+u_5=40$, $u_4+u_9=26$ ナル A.P. ノ公差幾許.

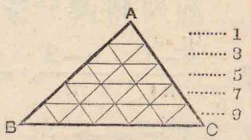
22. $a=12$, $d=\frac{1}{2}$ ナル A.P. ニ於テ,何項迄取レバ,共和 150 ヨリ大トナルベキカ.

23. 三桁ノ整數ニテ, 11 ノ倍數ナル者ノ總テノ和ヲ求ム.

24. 圖ニ就テ小ナル三角形ノ數ヲ數ヘヨ.

又 △ABC ノ各邊ヲ n 等分シタル場合ハ如何

(解法ヲ制限セズ).



25. 三角形ノ一ツノ角ガ 60° ナルトキハ,ソノ三ツノ角ハ等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ.

26. x, y ノ間ノ關係式ガ $y=1.8x+32$ ナルトキ, x ガ A.P. ヲナセバ y モ亦 A.P. ヲナスコトヲ證明セヨ (四十一 11).

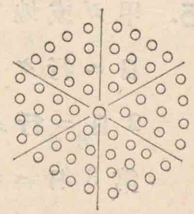
27. 等差級數ヲ爲ス三ツノ數アリ,ソノ平方ノ和ハ 332 ニシテ,第一數ト第三數トノ比ハ 3:7 ニ等シ. 此三ツノ數ヲ求ム.

28. 20 ヲ四ツノ部分ニ分チテ等差級數ヲナサシメ,且ツ $(u_1 . u_4):(u_2 . u_3)=2:3$ ナラシムルコト.

29. 束ネタル矢篦竹ノ概數ヲ求ムルニ圖ノ如ク看做シテ,マハリ 24 本ナルトキハ

$s=1+(6+12+18+24)$

ナリトス. 24 ヲ p ニテ表セバ,此和如何.



30. (一) $(u_n-u_r):(u_r-u_m):(u_m-u_n)$ ヲ求ム.

(二) $m(u_n-u_r)+n(u_r-u_m)+r(u_m-u_n)=0$ (證明セヨ).

31. 二ツノ等差級數アリ. 其各ノ初項ヨリ第 n 項迄ノ和ノ比ハ恒ニ $13-7n:3n+1$ ナリ. 第八項ノ比如何.

32. 等差級數アリ,其ノ第 $p+q$ 番目ノ項ハ a ニシテ,第 $p-q$ 番目ノ項ハ b ナルトキ,第 p 番目ノ項及ビ第 q 番目ノ項ヲ求ム.

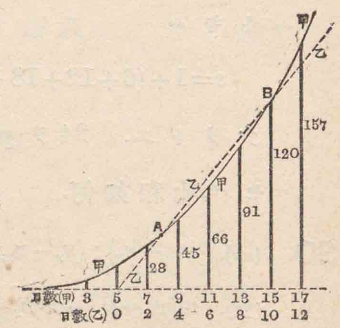
33. (一) $5+3+1-1\ldots\ldots$ n 項ノ和如何 (驗 $n=5$).

(二) $12, 14, 16, \ldots\ldots$ n 項ノ和如何 (驗 $n=5$).

(三) (二) ノ A.P. ノ第十項ヨリ第二十項迄ノ和如何.

34. 二ツノ級數 $(2, 5, 8, \ldots\ldots)$ ト $(3, 7, 11, \ldots\ldots)$ トニ於テ,各ノ百項迄ノ間ニ於テ,兩級數ノ項ニ於テ相等シキモノ幾項アルカ.

35. 甲ガ或地ヲ發シテ初日ニ行クコト1里,第2日ニ行クコト2里,第3日ニ行クコト3里ニシテ斯ノ如ク逐日增進セリ,甲ノ出發後5日ヲ經テ乙ハ同所ヲ發シ每日12里ヅツ行ケリ,乙出發シテヨリ幾日目ニ甲乙相會スルヤ.



36. 自然級數 $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots)$ ヲ次ノ如ク纏メタル時,第 n 組迄ノ總テノ數ノ和ヲ求ム. 之ニヨリテ第 n 組ノ中ノ數ノ和ヲ求ム.

$$1,\ (2, 3),\ (4, 5, 6),\ (7, 8, 9, 10), \ldots\ldots$$

48. 等比級數

等比級數又は幾何級數 (G.P.) 等比級數とは一列の數にして,其中の各數と其直ぐ前の數との比が一定なるものなり.

等比級數に於て其中の各數と其直ぐ前の數との比を公比といふ.

	公比
$a,\ 2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a,\ 32a$	$r=2$
$32,\ -16,\ 8,\ -4,\ 2,\ -1$	$r=-\dfrac{1}{2}$

a, b, c, d ガ等比級數ヲナストキノ此等ノ間ノ關係式ハ　$b:a=c:b=d:c(=r)$

b ト c トヲ a ト d トノ等比中項 (G.M.) トイフ.

a, b, c ノ三項ヲ考フレバ

$c:b=b:a$ 卽チ b ハ比例中項ナリ.

等比級數(G.P.)の標準形

$$[a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3\ldots\ldots ar^{n-1}]$$

初項a, 公比rなる等比級數の第n項の値をlとすれば

$$l=ar^{n-1}\ldots\ldots\text{(G.P. の公項)}\cdot\cdot[3]$$

〔例一〕 第3項(u_3)ガ2, 第7項(u_7)ガ$\frac{32}{81}$ナル等比級數ヲ求ム.

解 $\begin{cases} ar^2=2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ ar^6=\frac{32}{81}\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$

(2)÷(1) $r^4=\frac{16}{81}$ $\therefore\ r=\pm\frac{2}{3}$

$\therefore\ a\times\frac{4}{9}=2$ $a=\frac{9}{2}$

答 $\left(\frac{9}{2},\ 3,\ 2,\ \frac{4}{3}\cdots\right)$ 或ハ $\left(\frac{9}{2},\ -3,\ 2,\ -\frac{4}{3}\cdots\right)$

公比ハ實數ナルモノノミヲ求ムルモノトス.

〔例題〕 1. 次ノG.P.ノ第6項ト公項トヲ求ム.

(一) 3, 6, 12, ……… (二) 2, 3, $\frac{9}{2}$, ……… .

2. $u_3=4$, $u_6=-\frac{1}{2}$ ナル等比級數ヲ求ム.

和の公式 $\left.\begin{array}{l} s=\dfrac{lr-a}{r-1} \\ \text{又は}\ s=\dfrac{ar^n-a}{r-1} \end{array}\right\}\ (r\neq 1)\ \ldots\ldots[4]$

證明 $s=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1}$ (1)

$\therefore\ sr=ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots+ar^n$ (2)

(2)−(1) $(r-1)s=ar^n-a$

$\therefore\ s=\frac{ar^n-a}{r-1}$. 故ニ又 $s=\frac{lr-a}{r-1}$

$r=1$ナレバ$s=an$ナリ.

〔例二〕 2, 6, 18, 54, 162, 486 ノ和ヲ求ム (G.P.).

之ハ公比3ナルG.P.ヲナスヲ以テ

$$s=\frac{486\times3-2}{3-1}=728\quad\text{答}$$

3, 6, 12, …… 11項ノ和幾許 (答 6141).

〔例三〕 (一) $0.\dot{2}\dot{7}$ (循環小數) ヲ分數ニ直スコト.

$$0.\dot{2}\dot{7}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}\quad\text{答}$$

說明 $s=0.2727272727\ldots\ldots$ (1)

(1)ノ兩邊ヲ100倍スレバ

$100s=27.27272727\ldots\ldots$ (2)

(2)−(1) $99s=27 \quad \therefore \quad s=\dfrac{27}{99}$

(二) $36.\dot{2}\dot{7}$ ヲ假分數ニ直スコト.

$$36.\dot{2}\dot{7}=\frac{3627-36}{99}=\frac{403-4}{11}=\frac{399}{11} \quad \text{答}$$

説明 $36.\dot{2}\dot{7}=36\dfrac{27}{99}$ 〔∵ (一)ニヨレバ $0.\dot{2}\dot{7}=\dfrac{27}{99}$〕

$$=\frac{36\times 99+27}{99}$$

$$=\frac{3627-36}{99} \quad [\because \ 36\times 99=3600-36]$$

(三) $0.36\dot{2}\dot{7}$, $3.6\dot{2}\dot{7}$ (混循環小數) ヲ分數ニ直セ.

$$0.36\dot{2}\dot{7}=\frac{3627-36}{9900}=\frac{399}{1100} \quad \text{答}$$

$$3.6\dot{2}\dot{7}=\frac{3627-36}{990}=\frac{399}{110} \quad \text{答}$$

説明 (二)ニヨレバ

$$36.\dot{2}\dot{7}=\frac{3627-36}{99} \cdots\cdots\cdots (A)$$

(A)÷100 $\quad 0.36\dot{2}\dot{7}=\dfrac{3627-36}{9900}$

(A)÷10 $\quad 3.6\dot{2}\dot{7}=\dfrac{3627-36}{990}$

〔5〕純循環小數は循環節が表す數を分子とし,其桁數だけ9を列べて書

きたる數を分母とする分數に等し.

混循環小數を分數に直すには,之を或十進數にて掛けて得る純循環小數を分數に直して後,之を其十進數にて割るべし.

$2.\dot{4}\dot{5}\div 15$ ヲ循環小數ニテ答ヘヨ (答 $0.1\dot{6}\dot{3}$).

〔例四〕 次ノ等比級數ノ和ヲ求ム(小數第四位迄).

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \cdots\cdots \ \text{第10項ニ至ル.}$$

例 $s=\dfrac{a-ar^n}{1-r}$ 〔公式(4)ニヨル〕

$$=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}\cdot r^n$$

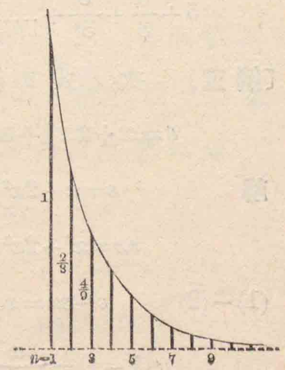
$$=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}-\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$=3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$=3-(3\times 0.017341)$$

$$=3-0.05202$$

$$\mathbf{=2.9480}\ \text{弱}\cdots\cdots\text{答}$$



此處ニ $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}=\frac{1024}{59049}=0.017341\ldots$

公比 r ノ絕對值ガ1ヨリ小ナルトキハ r^n ノ値ハ n ヲ大キクスレバ大キクスルホド次第ニ小サクナリ，n ヲ十分ニ大キクスレバ，如何程ニモ小サクナルモノト信ゼラル（絕對值ニ就テ云フ）．故ニ

〔6〕 $|r|<1$ にして，n が非常に大なれば殆んど

$$s=\frac{a}{1-r}$$

$\frac{a}{1-r}$ ヲ n ガ無限大ナルトキノ s ノ極限トイフ．

$|r|$ ハ r ノ絕對值ヲ表スモノナリ．

$5+\frac{5}{3}+\frac{5}{3^2}+\ldots\ldots$ 無限項ニ至ル和如何（答7.5）．

〔例五〕 次ノ式ヲ簡單ニセヨ（$|x|<1$）．

$s=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n+\ldots$ 無限項ニ至ル．

解 $s=x+2x^2+3x^3+\ldots\ldots$ (1)

$sx=x^2+2x^3+3x^4+\ldots\ldots$ (2)

(1)−(2) $s-sx=x+x^2+x^3+\ldots\ldots$

$s(1-x)=\frac{x}{1-x}$ $\therefore\ s=\frac{x}{(1-x)^2}$ 答

$x+3x^2+5x^3+\ldots\ldots$ 無限項ニ至ル和ヲ求ム（$|x|<1$）．

［答 $\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$］

問題 第四十四集

1. 次ノ等比級數ヲ第六項マデ記セ．

(一) 初項5，公比2

(二) 2，−6，18，……

2. (一) 5ト80トノ間ヘ三ツノ G.M. ヲ挿入セヨ．

(二) 12ト $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ トノ間ヘ六ツ 〃

3. 第三項ハ4，第六項ハ $\frac{1}{2}$ ナル G.P. ノ公項如何．

4. 等比級數ヲナス四數アリ．第一數，第二數ノ和15，第三數第四數ノ和60ナリ．其四數如何．

5. 6，4，9ニ一ツノ數ヲ附加シテ都合四ツノ數トナシ，之ヲ G.P. ヲナス樣ニ列ベテ答ヘヨ．

6. 次ノ等比級數ノ和ヲ求ム．

(一) 1，3，9，27，81，243

(二) 7，−14，28，−56，112，−224，448

(三) 2，4，8，16，32，64，128，256，512

(四) 1, 2, 4, ... n 項ニ至ル

(五) $a^9,\ a^8b,\ a^7b^2,\ a^6b^3,\ a^5b^4,\ \ldots\ldots\ b^9$

7. 次ノ各式ヲ展開セヨ(諳算).

(一) $(1+x+x^2+\ldots+x^5)(1-x)$　(二) $\dfrac{1-x^5}{1-x}$

8. 次ノ各ハ小數ニテ答ヘヨ.

(一) $0.\dot{4}+0.\dot{5}+0.\dot{7}$　(二) $1.7\dot{5}\dot{3}\div7.\dot{5}\dot{1}$

(三) $(1.21\dot{5}+5.\dot{2}\dot{6})\div(5.\dot{2}\dot{4}-2.00\dot{3})$

9. 次ノ無限等比級數(等比級數ノ項數無限大ナルモノ)ノ和ヲ求ム.

(一) $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \ldots\ldots$

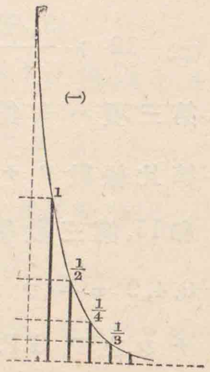
(二) $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \ldots\ldots$

(三) $4,\ 1.2,\ 0.36,\ \ldots\ldots$

(四) $3+2\sqrt{2},\ \dfrac{2+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \ldots$

(五) $1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ \ldots\ldots$

〔$|x|<1$〕



10. 次ノ各式ヲ x ノ昇冪ニ展開シタルトキノ公項ヲ求ム. 但シ $|2x|<1$ (公式〔6〕ヲ參照)

(一) $\dfrac{1}{1-x}$　(二) $\dfrac{2}{1-2x}$　(三) $\dfrac{2}{1-2x}-\dfrac{1}{1-x}$

11. $x+4x^2+7x^3+\ldots\ldots$ 無限項ニ至ル和如何〔$|x|<1$〕.

12. 等比級數ノ總テノ項ノ連乘積ヲ p トスレバ

$$p^2=(al)^n \qquad \text{(證明)}$$

13. 等比級數ノ各項ニ同一ノ數ヲ掛クルモ又等比級數ヲナス.

14. 等比級數ヲナス三ツノ數アリ,其和ハ $\dfrac{19}{3}$ ニシテ,第一ノ數ハ 3 ナリ. 他ノ二數如何.

15. 公比ガ 3 ナル G.P. アリ. 其和ハ 728 ニシテ末項ハ 486 ナリ. 初項ハ幾許ナルカ.

16. $1,\ (1+x),\ (1+x+x^2),\ \ldots\ldots\ n$ 項ニ至ル和如何.

17. $9,\ 99,\ 999,\ \ldots\ldots\ n$ 項ニ至ル和如何.

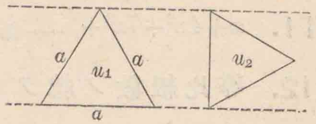
18. 無限等比級數ノ和 4, 第二項 $\dfrac{3}{4}$ ナラバ初項及公比如何.

19. 無限等比級數ニ於テ $u_2=2$ (第二項ノ值), $s=9$ ナラバ初項及公比如何.

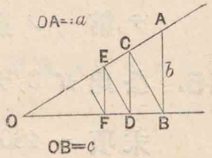
20. 無限等比級數ニ於テ或項ハ其次ノ項以下ノ無限項ノ和ノ 2 倍ニシテ,且ツ $u_1+u_2=1$ ナリトス. 其級數ヲ求ム.

21. 一邊ガ a ナル正三角形ヲ u_1 トシ, u_1 ノ高サヲ

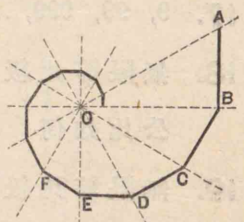
一邊トセル正三角形ヲu_2トシ,u_2ノ高サヲ一邊トセル正三角形ヲu_3トスルトイフ樣ニシテ作レル無數ノ正三角形u_1, u_2, u_3, ……ノ面積ノ和ノ極限ヲ求ム.



22. (一) 與ヘラレタル角AOBノ一邊OAノ長サヲaトシ AB⊥OB, BC⊥OA, CD⊥OB …トシタルトキ(圖ノ如ク). AB+BC+CD+……ノ極限如何. 但シ AB=b, OB=c トス.



(二) 前ノ場合ニ於テ, OA=6 糎, ∠AOB=30° ナルトキノ結果如何.



23. 次ノ場合ノ G.P. ノ公比如何.

(一) $\begin{cases} u_1+u_2=3.375 \\ u_2+u_3=2.25 \end{cases}$ (二) $\begin{cases} u_1+u_4=195 \\ u_2+u_3=60 \end{cases}$

24. 等比級數アリ,初メノn項ノ和p,其次ノn項ノ和qナラバ公比如何.

25. G.P. ヲナス三ツノ數アリ,ソノ和ハ21ニシテ,ソノ各ノ平方ノ和ハ189ナリトス. 各ノ數ヲ求ム.

26. 次ノ二ツヲ聯立セシムルx, yノ値如何.

8, x, y ハ A.P. ヲナス ……(1)

x, y, 36 ハ G.P. ヲナス ……(2)

27. 四ツノ數アリ,初メノ三ツハ G.P. ヲ成シ,後ノ三ツハ A.P. ヲ成シ,第一,第四ノ和14,第二第三ノ和12ナリ. 各數如何.

49. 調和級數,他の簡單なる級數

調和級數(H.P.) 調和級數とは,級數の各項の逆數が等差級數を成すときをいふ.

例ヘバ次ノ五ツノ數ハ調和級數ヲナス.

12, 6, 4, 3, 2.4

何トナレバ此等ノ逆數ヲ通分スレバ

$\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}$ 即チ A.P. ヲナス.

a, b, c ガ H.P. ヲナスコトヲ表ス關係式ハ

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b} \quad 又ハ \quad \frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

等差級數ヲナス一列ノ整數ヲ以テ其等ノ最小公倍數 L ヲ割レバ調和級數ヲナス一列ノ整數ヲ得. 卽チ

$a, \ b, \ c, \ \ldots\ldots \ g$ ガ A.P. ヲナセバ

$\frac{L}{a}, \frac{L}{b}, \frac{L}{c}, \ldots\ldots \frac{L}{g}$ ハ H.P. ヲナス.

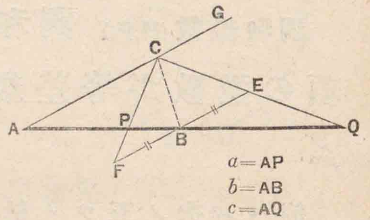
〔例一〕 $a:(b-a)=c:(c-b)$ ナルトキハ

a, b, c ハ調和級數ヲナス.

證明 $a(c-b)=c(b-a)$ (假設ニヨリ)

$\therefore \ ac-ab=cb-ca$

此兩邊ヲ abc ニテ割レバ



$$\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$\therefore \ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$$

卽チ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ハ A.P. ヲ成ス. 故ニ a, b, c ハ調和級數ヲナス.

本例ニヨレバ, 四ツノ點 A, P, B, Q ガ調和列點ヲナストキ, 卽チ AP : PB = AQ : BQ ナルトキハ, AP, AB, AQ ハ調和級數ヲナスコトヲ知ル.

〔例題〕 1. H.P. ヲナス三ツノ整數ヲ求ム.

2. 調和級數ノ初メノ項ガ次ノ如キ各場合ニ於テ更ニ之ニ續ク二ツノ項ヲ求ム.

(一) 6, 3, 2, ……

(二) 8, 2, $\frac{8}{7}$, ……

(三) a, b, ……

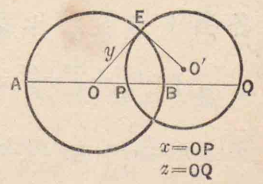
3. 次ノ各ニ就テ其調和中項 (H.M.) ヲ挿入セヨ.

(一) 2, 3 ノ間ニ一ツ

(二) 1, $\frac{1}{4}$ ノ間ニ二ツ

4. $u_2=2$, $u_4=6$ ナル H.P. ノ第6項ヲ求ム.

5. x, y, z ガ G.P. ヲナセバ, $x+y$, $2y$, $y+z$ ハ H.P. ヲナス.



〔例二〕 (一) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ldots n^2$ ノ和 (S) ヲ求ム.

$$(n+1)^3=n^3 \quad +3.n^2 \quad +3.n \quad +1$$
$$n^3=(n-1)^3+3.(n-1)^2+3.(n-1)+1$$
$$(n-1)^3=(n-2)^3+3.(n-2)^2+3.(n-2)+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^3=2^3 \quad +3.2^2 \quad +3.2 \quad +1$$
$$2^3=1^3 \quad +3.1^2 \quad +3.1 \quad +1$$

此等ノ總テヲ邊邊相加ヘテ,兩邊ニ來ル同ジ項ヲ省ケバ

$$(n+1)^3=1^3+3.s+3.\frac{n(n+1)}{2}+n$$

之ヲ解キテ $s=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 答

$$1^2+2^2+3^2+..+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)..[7]$$

(二) $1.2+2.3+3.4+\ldots n.(n+1)$ ヲ求ム.

解 公項 $n.(n+1)$ ハ n^2+n ト變形セラル. 斯樣ニ各項トモ變形セラルルヲ以テ,求ムル和 s ハ

$$s=(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots\ldots+n)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad \text{答}$$

別解 或ハ次ノ方法ニヨリテ求メラル.

$$x=(1.2.3)+(2.3.4)+(3.4.5)+\ldots\ldots+\{n(n+1)(n+2)\}$$
$$y=(0.1.2)+(1.2.3)+(2.3.4)+\ldots\ldots+\{(n-1)n(n+1)\}$$

x ト y トノ差ハ二樣ニ表サル. 卽チ一ハ x ノ式ト y ノ式トノ對應項ノ差ヲ集メタルモノ(甲),他ノ一ハ x ノ式ト y ノ式トノ中ニ含マルル同ジ項ヲ消去シタルモノノ差(乙)ナリ. 故ニ

〔甲〕 〔乙〕

$$(3.1.2)+(3.2.3)+(3.3.4)+\ldots\ldots+\{3.n(n+1)\}=n(n+1)(n+2)$$

故ニ $1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

〔注意〕 前例ノ級數ノ9項迄(A)ヲ記シテ,各項ト其直グ前ノ項トノ差(第一次差)(B)ヲ作レバ

(A)	2	6	12	20	30	42	56	72	90
(B)	4	6	8	10	12	14	16	18	
(C)	2	2	2	2	2	2	2		

(B)ハ2ヲ公差トセルA.P.ヲナス,(C)(第二次差)ハ之ヲ示ス. 斯樣ニ一次差ガA.P.ヲ成ス場合ノ級數(A)ヲ二次の等差級數トイフコトアリ.

或等差級數ノ n 項ノ和ヲ s_n ニテ表スコトトス

レバ,次ノ一列ノ數ハ二次ノ等差級數ヲナス.

$$s_1,\ \ s_2,\ \ s_3,\ \ s_4\ \ \ldots\ldots\ s_{10}$$

$s_n=n$ ノ任意ノ二次式(常數項ノ無キモノ)例ヘバ $s_n=n(2n-3)$ ヲ與ヘテ驗セ.

〔例三〕 $$\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\ldots\ldots+\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

ヲ求ム.

與式ノ各項ヲ二ツノ分數ノ差トシテ表セバ

$$s=\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}=\frac{n}{(x+1)(x+n+1)}\quad \text{答}$$

〔例題〕 1. $1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots\ldots\ (2n-1)^2$ ノ和如何.

2. $\frac{1}{1\times2},\ \frac{1}{2\times3},\ \frac{1}{3\times4},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{n(n+1)}$ ノ和如何.

本篇ノ公式或ハ法則〔1〕-〔7〕ヲ復誦スベシ.

問題　第四十五集

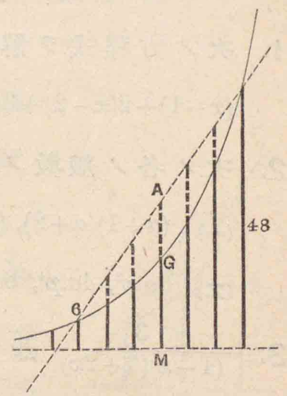
1. 次ノ各ヲ小數ニテ求メヨ.

$$12.\dot{5}\div3.4\dot{5}\ \text{(小數五桁)}\qquad 3.5+3.4\dot{2}+0.\dot{3}\dot{6}$$

2. A.P. ヲナス三數ノ和15,平方ノ和93ナリ. 此級數如何.

3. 無限等比級數ノ和9,各項ノ平方ノ和 $16\frac{1}{5}$ ナリ,初項ト公比トヲ求ム.

4. 6ト48トノ間ヘ(一)五ツノ等比中項ヲ,(二)五ツノ等差中項ヲ挿入セヨ.



5. $x,\ y,\ z$ ガ等差級數ヲナストキハ

$$\frac{x}{x-y}+\frac{z}{z-y}=2$$

6. 8, 16, 24, ……. ナル等差級數ノ n 項ノ和ヲ平方ニ括レ.

7. 金1000圓ヲ幾人カニ分配セントスルニ,第一ノ者ニ10圓ヲ與ヘ,ソレヨリ次第ニ5圓宛多

ク與フルコトトスレバ,幾人ニ分配シ得テ剩餘幾許トナルベキカ. 1500圓ナラバ如何.

8. 次ノ等差級數ノ和ヲ求ム.

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1},\ \sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}-1},\ \ldots\ldots$$ 7項ニ至ル.

9. $0.3,\ 0.33,\ 0.333,\ \ldots$ n項ニ至ル和ヲ求ム(四十四 17).

10. $\frac{1}{(1+x)(1+2x)},\ \frac{1}{(1+2x)(1+3x)},\ \ldots\ldots$ n項ノ和ヲ求ム. $n=3,\ x=\frac{1}{2}$ トシテ驗セ(例三).

11. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$(x-1)+2(x-2)+3(x-3)+\ldots\ldots+16(x-16)+816=0$$

12. 次ノ各ノ級數ノ和如何.

(一) $(a+1)(a+2),\ (a+2)(a+3),\ (a+3)(a+4),\ldots.$ (n項)

(二) $2a.p^2,\ 4a.p^4,\ 6a.p^6,\ \ldots\ldots$ (項無數限, $p^2<1$)

13. $\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ 卽チ $\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}$ ヲxノ昇冪ニ展開シタル時ノ一般項ヲ求ム〔$|2x|<1$〕.

14. $\frac{1}{1-r}=p,\ \frac{1}{1-r'}=q$ トス. p,qヲ用フレバ

$1,\ rr',\ r^2r'^2,\ \ldots\ldots$ 無限項ニ至ル和如何〔$|rr'|<1$〕.

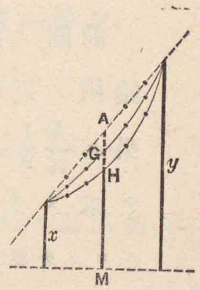
15. 90本ノ杭ヲ3尺置キニ列ベタルアリ 今初メノ杭ヨリ第n番目ノ處ニ人アリテ,總テノ杭ヲ此處ニ1本ヅツ運バントス. 運ビ終ルマデニ歩ムベキ道程ヲ表ス式ヲnニ就テ平方ニ括レ.

16. 連續シタル奇數ヲ $(1),\ (3,5),\ (7,9,11),\ (13,15,17,19),\ \ldots\ldots$ ノ如ク次第ニ1項, 2項, 3項, ……ヲ有スル組ニ纒メタルトキ(一)第n組迄ノ總テノ組ノ中ニアル數ノ總計,(二)第n組ノ中ニアル數ノ和如何(驗 $n=4$).

17. (一) $x,\ y$ノ A.M. ヲ a, G.M. ヲ g, H.M. ヲ h トスレバ

$$a:g=g:h$$

(二) $x,\ y$ ノ A.M. ハ G.M. ヨリ 13 大ニシテ, G.M. ハ H.M. ヨリ 12 大ナレバ x, y 幾許.



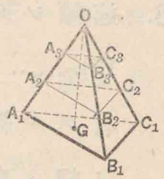
18. $y+z,\ z+x,\ x+y$ ガ調和級數ヲナストキハ $x^2,\ y^2,\ z^2$ ハ等差級數ヲナス.

19. $\frac{a}{a-b},\ \frac{b}{b-c},\ \frac{c}{b-c}$ ガ等差級數ヲナスタメノ

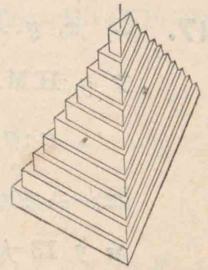
a, b, c ノ間ノ關係式如何.

20. 等比級數ノ第 m 項ノ値ヲ M, 第 n 項ノ値ヲ N, 第 p 項ノ値ヲ P トスレバ, M, N, P ノ間ノ關係式如何 (a, r ヲ含マザル).

21. n 箇ノ三角形 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, … …$A_nB_nC_n$ ガ相似ニシテ, 對應邊ガ $n, n-1, n-2, \ldots\ldots 1$ ニ比例スルトキ, 此等ノ三角形ノ面積ノ和ヲ求ム. 但シ $\triangle A_1B_1C_1$ ヲ s トス.



前圖ノ如キ三角錐ノ體積ノ近似値ハ上ノ結果ニ $\dfrac{h}{n}$ (h ハ錐高) ヲ掛ケテ求メラル (n ガ十分大ナルコトヲ要ス).



22. 底ノ一邊ガ n 箇ナル正三角錐狀ニ積ミタル彈丸ノ總數ヲ求ム.

---

23. (一) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$

$$=(x^2-5x)^2+(\quad)(x^2-5x)-96$$

(二) $2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$$=(\quad)^2+(\quad)^2+(\quad)^2$$

24. $\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=x$ ヲ解ケ.

25. 次ノ各ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(一) $\begin{cases} x^2-xy-6y^2=24 \\ x^2-3xy-10y^2=32 \end{cases}$ (二) $\begin{cases} x+xy+y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$

26. (一) 次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ.

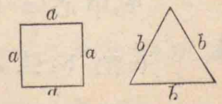
$(x+y+z)^3-(-x+y+z)^3-(x-y+z)^3-(x+y-z)^3$

(二) 三ツノ數ノ和ガ 0 ニ等シキトキハ, ソノ立方ノ和ハ, ソノ積ノ三倍ニ等シ.

27. $a+b+c=0$ ナレバ

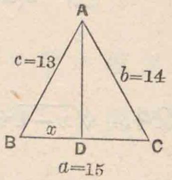
$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0$$

28. 一邊ガ a ナル正方形ト等積ナル正三角形ノ一邊ヲ b トス. (一) b ハ a ノ何割ナルカ. (二) 又 a ハ b ノ何割ナルカ〔各分ノ位迄〕.



29. (一) 三邊ノ長サガ 15, 14, 13 ナル三角形ノ 15 ヲ底邊トシタル高サ如何.

相似圖ヲ書キテ高サノ近似値ヲ求メ(圖的解法),ソレト計算ノ結果トヲ對照セヨ.

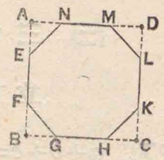


(二) 三角形ノ三邊ガ 21間, 17間, 10間ナレバ,其面積如何.

30. 三邊ガ a, b, c ナル三角形ノ面積 (s) ハ

$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad p \text{ ハ周ノ} \frac{1}{2}$$

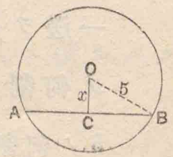
31. 一邊ノ長サ a ナル正方形ノ四隅ヲ切リ落シテ作リタル正八邊形ノ一邊ノ長サ幾許.



32. 半徑 r ナル圓ノ內接正八邊形ノ一邊 a ハ

$a=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, a ガ 2 ナレバ r 幾許.

33. 半徑ガ 5 糎ナル圓ニ弦ヲ引キ,中心ヨリ此弦ニ至ル距離(x 糎)ト,弦ノ長サトノ和ヲ極大ナラシムルコトヲ求ム.



34. 項ノ數ガ $2n+1$ ナル A.P. ニ於テ奇數番目ノ項ノ和ト偶數番目ノ項ノ和トノ比ヲ求ム.

35. $14-14\left(\frac{2}{5}\right)+14\left(\frac{2}{5}\right)^2-14\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots\ldots$ 無限項ニ至ル,此和ヲ求ム.

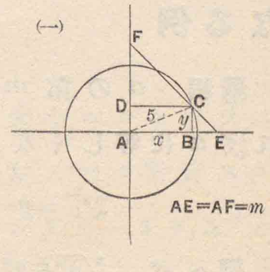
36. $s=a+ar+ar^2+\ldots\ldots \quad s'=a-ar+ar^2-\ldots\ldots$

ナレバ $\quad ss'=a^2+a^2r^2+a^2r^4+\ldots\ldots$

何レモ無限項ニ至ル,且ツ $|r|<1$ トス.

37. 次ノ各ノ聯立方程式ヨリ實根ヲ得ルタメノ m, n ノ值ノ限界如何.

(一) $\begin{cases} x^2+y^2=5^2 \\ x+y=m \end{cases}$



(二) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=5 \\ y=2x+n \end{cases}$

38. $\dfrac{3+2x+3x^2}{6+3x+4x^2}=\dfrac{1+36x+15x^2}{2+57x+20x^2}$ ヲ解ケ.

39. $\dfrac{b-c}{bx+cy}=\dfrac{c-a}{cx+az}=\dfrac{a-b}{ay+bz}$ ナルトキハ

$$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$$

40. m ノ值ガ幾許ナレバ,次ノ式ハ二ツノ一次式(有理ノ)ノ積ノ式ニ分解セラルベキカ.

$$x^2-2xy+mx+2y-3$$

第十篇

一般の指數,對數,歩合算

一般の指數

50. 羃の指數が分數,0又は負の數なる例

羃根 a の第 m 羃根 $(\sqrt[m]{a})$ とは,之を m 乘すれば a に等しくなる數のことなり.

$$\sqrt[m]{a}=y \quad \text{トスレバ} \quad y^m=a$$

例へバ $\sqrt[3]{a^m}=a^x$ トスレバ $(a^x)^3=a^m$

$$\therefore\ 3x=m \qquad x=\frac{m}{3} \qquad \sqrt[3]{a^m}=a^{\frac{m}{3}}$$

〔例一〕 $a, a^2, a^3, \ldots\ldots$ ノ各ノ平方根ヲ(一)ノ如ク,立方根ヲ(二)ノ如ク記スコトアリ.

	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9
(一)	$a^{\frac12}$	a	$a^{\frac32}$	a^2	$a^{\frac52}$	a^3	$a^{\frac72}$	a^4	$a^{\frac92}$
(二)	$a^{\frac13}$	$a^{\frac23}$	a	$a^{\frac43}$	$a^{\frac53}$	a^2	$a^{\frac73}$	$a^{\frac83}$	a^3

(三) $\sqrt[2]{a}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^5}$

或ハ $\qquad a^{\frac12}\times a^{\frac13}=a^{\frac12+\frac13}=a^{\frac56}$

$a^{\frac56}$ ハ $\sqrt[6]{a^5}$ ヲ表スヲ以テ,結果ハ相等シ.

一般ニ

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$$

或ハ $\qquad (\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

41頁公式〔6〕ノ(5)ハ次ノ如ク記スコトヲ得.

$$a^{\frac{np}{mp}}=a^{\frac{n}{m}}$$

公式 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ ヲ m, n ノ大小ニカヽハラズ廣ク適用シテ,左ノ如ク計算スルコトアリ. 而シテ a^0 ハ1ヲ, a^{-1} ハ $\frac{1}{a}$ ヲ, a^{-2} ハ $\frac{1}{a^2}$…… ヲ表スモノトス.

$$\left\{\begin{array}{l} a^5\div a^3=a^2 \\ a^5\div a^4=a^1 \\ a^5\div a^5=a^0 \\ a^5\div a^6=a^{-1} \\ a^5\div a^7=a^{-2} \end{array}\right.$$

…………

次ノ(一)ト(二)ハ a^2 ヲ初項トシ a^{-1} ヲ公比トセル等比級數ナリ.

(一) $a^2,\quad a,\quad 1,\quad \frac{1}{a},\quad \frac{1}{a^2},\quad \frac{1}{a^3}\ldots\ldots$

(二) $a^2,\quad a^1,\quad a^0,\quad a^{-1},\quad a^{-2},\quad a^{-3}\ldots\ldots$

一般ニ

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n=a^{-n}b^n$$

〔1〕 一般指數の冪の意義

$$a^{\frac{M}{N}}=\sqrt[N]{a^M} \quad a^{-N}=\frac{1}{a^N} \quad a^0=1$$

又例ヘバ　$a^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt[2]{a^3}}$　　$\sqrt[-2]{a^3}=a^{-\frac{3}{2}}$

〔例二〕 (一) $a>1$ ナルトキ

$a^{\frac{3}{4}}$, $a^{\frac{2}{3}}$ ハ何レガ大ナルカ.

說明　$\frac{3}{4}$ ト $\frac{2}{3}$ トハ $\frac{9}{12}$ ト $\frac{8}{12}$ トニ等シ. 故ニ

$$a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{9}{12}}=\sqrt[12]{a^9}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{a^8}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ　$a>1$,　$\therefore\ a^9=a^8.a>a^8$

$\therefore\ \sqrt[12]{a^9}>\sqrt[12]{a^8}$　　$\therefore\ a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{2}{3}}$　答

(二) $a>1$ ナルトキ, $a^{-\frac{3}{4}}$, $a^{-\frac{2}{3}}$ ハ何レガ大ナルカ.

說明　$a^{-\frac{3}{4}}$ ト $a^{-\frac{2}{3}}$ トハ $a^{\frac{3}{4}}$ ト $a^{\frac{2}{3}}$ トノ逆數ナリ.

而シテ　　$a^{\frac{3}{4}}>a^{\frac{2}{3}}$　〔(一)ノ場合〕

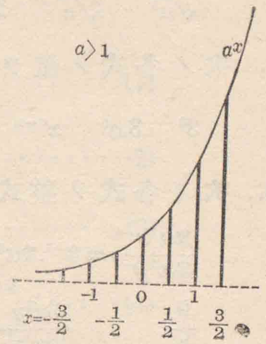
故ニ　　$a^{-\frac{3}{4}}<a^{-\frac{2}{3}}$ ……答

a^x ノ値ハ $a>1$ ナルトキハ, 指數 x ガ增大スル(代數的ニ云フ)ニ從ヒテ增大ス.

(三) 公差ガ正ノ數 $\frac{1}{2}$ ナル數ノ列

$-\frac{3}{2}$, -1, $-\frac{1}{2}$, 0,

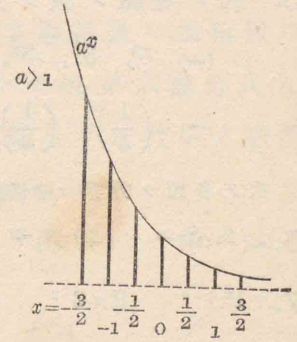
$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}\cdots$ (A.P.)



ヲ指數 x トスル a ノ冪 a^x ノ値ハ $a^{\frac{1}{2}}$ ヲ公比トスル等比級數ヲナス.

$a^{-\frac{3}{2}}$, a^{-1}, $a^{-\frac{1}{2}}$, a^0,

$a^{\frac{1}{2}}$, a^1, $a^{\frac{3}{2}}\cdots$ (G.P.)



(甲) $a>1$ 例ヘバ $a=\frac{5}{2}$ ナレバ此公比ハ

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}=1.58\ldots$$

ニシテ1ヨリ大ナリ. 故ニ各項ハ次第ニ大ナリ.

(乙) $0<a<1$, 例ヘバ $a=\frac{2}{5}$ ナレバ各項ハ次第ニ小ナリ(公比 $\sqrt{0.4}$).

〔例題〕 1. 次ノ各ヲ冪根ノ式ニテ書キ表セ.

$a^{\frac{2}{3}}$　　$b^{\frac{1}{2}}$　　$c^{1\frac{1}{3}}$　　$x^{0.5}$　　$x^{1.2}$　　$(a-b)^{\frac{2}{n}}$

2. 次ノ各ヲ根號ヲ用ヒズ乘冪ノ形ニ書キ表セ.

$\sqrt{a^3}$ $\sqrt[n]{n}$ $\sqrt[x]{(a-b)^x}$ $\sqrt[3]{x^6+y^6}$ $\sqrt[1]{a^3}$

3. 次ノ各式ノ値ヲ求ム.

3^0 $3.a^0$ x^{n-n} $\left(\frac{y}{x}\right)^0$ $4(a-b)^0$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{2+3-5}$

4. 次ノ各式ヲ整式ノ形ニ書キ表セ.

$\frac{2a^3b^{-4}}{3x^5y^{-7}}=3^{-1}.2a^3b^{-4}x^{-5}y^7$ 答

$\frac{9}{8}$ $\frac{3x^3y}{2bc^2z^3}$ $\frac{6a^{-4}b^4}{5x^{-5}y^3}$

5. 次ノ各組ノ數ノ大サノ順ヲ定メヨ.

(一) 3^0, $3^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{2}{5}}$, 3^{-1}

(二) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

次ノ各題ヲ計算セヨ(6—8).

6. $(-a)^{-2n}$ $(-0.5)^{-2}$ $(-0.5)^{-3}$ $(0.2)^{-2.25}$ $3^{-3.5}$

7. $1^x.1^{-y}$ 9×3^{-2} $\frac{5}{2^{-1}}$ $(-0.1)^{-2}$ $a\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}$

8. $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(32)^{0.2}$ $(25)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$ $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

51. 羃に關する計算(一般の指數)

指數ノ定則ハ指數ガ分數,0又ハ負ノ數ナル場合ニモ眞ナルモノナリ(2頁).

[2] 指數の定則

$$a^{M}a^{N}=a^{M+N}\quad\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a^{M}}{a^{N}}=a^{M-N}\quad\cdots\cdots(2)$$

$$(ab)^{M}=a^{M}b^{M}\quad\cdots\cdots(3)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{M}=\frac{a^{M}}{b^{M}}=a^{M}b^{-M}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$(a^{M})^{N}=a^{MN}\quad\cdots\cdots(5)$$

此等ノ公式ハ其兩邊ノ式ヲ羃指數モ,根指數モ正ノ整數ナルモノニ書キ變ヘテ後,第六篇公式[6](41頁)ニヨリテ計算シ兩邊ノ結果ヲ比較シテ驗證スルコトヲ得ルモノナリ[前節例一(三)].

41頁ノ公式[6]ヲ適用スベキ計算ニハ多ク上ノ公式ガ適用セラル.

[例一] (一) $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[4]{a^3b^2}\sqrt[6]{a^4b^5}$

$$=a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{6}}\times b^{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{5}{6}}=a^{\frac{25}{12}}b^{\frac{20}{12}}=a^2b\sqrt[12]{ab^8}\quad 答$$

(二) $\sqrt{a^3b}\div\sqrt[3]{a^2b^4}$

$$=a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}=a^{\frac{5}{6}}b^{-\frac{5}{6}}=\frac{\sqrt[6]{a^5b}}{b}\quad 答$$

$b^{-\frac{5}{6}}$ ハ $b^{\frac{1}{6}-1}$ $\therefore$ $\frac{\sqrt[6]{b}}{b}$ トナセルナリ.

此二例ハ與ヘラレタル式ノ指數ガ正ノ整數ナルヲ以テ,答モ同様ニ書キ變ヘテ置キタルナリ.

(三) $x^{\frac{2}{3}}y\div x^{\frac{1}{2}}y^{-3}=x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}y^{1+3}=x^{\frac{1}{6}}y^4$ 答

(四) $\left(x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}\times y^{-\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}}=x^{\frac{1}{2}}y^{-1}$ 答

(五) $a\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt[4]{a^{-3}}}=a\left\{a^{-3}a^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{1}{4}}=a^{1+\left(-\frac{15}{4}\right)\times\frac{1}{4}}=\sqrt[16]{a}$ 答

或ハ $a\sqrt[4]{a^{-3}\sqrt[4]{a^{-3}}}=\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a^{-3}}}=\sqrt[16]{a}$ 答

〔例題〕 次ノ各題ノ式ヲ計算セヨ.

1. $a^{-2}\times a^{-3}$　$a^{\frac{1}{2}}\div a^{\frac{1}{3}}$　$\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$　$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. $y\sqrt[3]{y^{-2}\sqrt{y^{-2}}}$　$\sqrt[3]{x}\sqrt{y^3}\sqrt[3]{z}\times\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z^2}$

3. $\sqrt{ab^{-2}c^3}\times\sqrt[3]{a^3b^2c^{-\frac{1}{3}}}$　$\sqrt[3]{x}\sqrt{y^3}\div\sqrt{x^3}\sqrt[3]{y^{-2}}$

〔例二〕 多項式ノ掛ケ算及ビ割リ算

(一) $\left(x^{\frac{3}{2}}-8x^{-\frac{3}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)\times\left(4x^{-\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}\right)$

演算

$$
\begin{array}{llllll}
x^{\frac{3}{2}} & -2x^{\frac{1}{2}} & +4x^{-\frac{1}{2}} & -8x^{-\frac{3}{2}} & & \\
x^{\frac{1}{2}} & +4x^{-\frac{1}{2}} & +4x^{-\frac{3}{2}} & & & \\
\hline
x^2 & -2x & +4 & -8x^{-1} & & \\
 & +4x & -8 & +16x^{-1} & -32x^{-2} & \\
 & & +4 & -8x^{-1} & +16x^{-2} & -32x^{-3} \\
\hline
x^2 & +2x & & & -16x^{-2} & -32x^{-3}\ \ldots\text{答}
\end{array}
$$

被乘數モ乘數モ x ノ降冪ノ順ニ排列スレバ, x

ノ指數ハ -1 ヲ公差トセル A.P. ヲ成ス.

(二) $\left(x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{6}}-1\right)\div\left(x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1\right)$

算演

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^{\frac{1}{6}}-1\ldots\ldots\ldots\ldots\text{答} \\
\hline
x^{\frac{2}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}+1 & x^{\frac{3}{6}}-3x^{\frac{2}{6}}+3x^{\frac{1}{6}}-1 \\
 & x^{\frac{3}{6}}-2x^{\frac{2}{6}}+x^{\frac{1}{6}} \\
\cline{2-2}
 & -x^{\frac{2}{6}}+2x^{\frac{1}{6}}-1 \\
 & -x^{\frac{2}{6}}+2x^{\frac{1}{6}}-1 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

冪指數ヲ通分スレバ計算ニ便利ナリ.

指數方程式 未知元が指數にある冪或は根を含む方程式を指數方程式といふ.

例ヘバ次ノ各ハ指數方程式ナリ.

$$8^{x+1}-8^{2x-1}=128 \qquad \sqrt[x-3]{a^7}=\sqrt[x-7]{a^3}$$

〔例三〕 次ノ各ノ指數方程式ヲ解クコト.

(一) $4^x=0.125$ ヲ解クコト.

解 $2^{2x}=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}=2^{-3}$

$\therefore\ 2x=-3\qquad x=-\frac{3}{2}$ 答

(二) $\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5}=\left(\frac{17}{13}\right)^{5x-9}$ ヲ解クコト.

解 $\left(\frac{13}{17}\right)^{2x-5}=\left\{\left(\frac{13}{17}\right)^{-1}\right\}^{5x-9}$

$$\therefore \quad 2x-5=-1\times(5x-9)$$

$$7x=14 \qquad x=2 \quad \text{答}$$

(三) $8^{x+1}-8^{2x-1}=128$ ヲ解クコト.

解 $$8^x.8-8^x.8^x.8^{-1}=128$$

$8^x=y$ ト置ケバ

$$8y-\frac{1}{8}y^2=128$$

$$y^2-64y+1024=0$$

$$(y-32)^2=0 \qquad y=32$$

$$\therefore \quad 8^x=32$$

$$2^{3x}=2^5 \qquad x=\frac{5}{3} \quad \text{答}$$

驗算 $x=\frac{5}{3}$ トスレバ

$$(\text{左邊})=8^{\frac{8}{3}}-8^{\frac{7}{3}}=2^8-2^7=2^7(2-1)=128$$

問題 第四十六集

次ノ各題ノ式ヲ計算セヨ(1—5).

1. $\left(3x^{\frac{1}{3}}-5+8x^{-\frac{1}{3}}\right)\times\left(4x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}\right)$

2. $\left(x-x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1}\right)$

3. $\left(21x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)\div\left(3x^{\frac{1}{3}}+1\right)$

4. $(16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6)\div(1+2a^{-1})$

5. $\left(x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)\div(x-x^{-1})$

次ノ各題ノ指數方程式ヲ解ケ(6—7).

6. $32^x=8 \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{2x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{3x-3}$

7. $8^{2x-1}=(0.125)^{4-3x} \qquad 2^{2x+8}+1=32\times 2^x$

8. 次ノ各式ヲ指數ガ正ノ整數ナル式ニ直セ.

$$a^{1\frac{1}{3}} \qquad a^{-0.25} \qquad \sqrt[-3]{a^2} \qquad x^{-\frac{2}{3}}y^3-2^{-1}x^{\frac{1}{2}}y^{-3}$$

次ノ各題ノ式ヲ計算セヨ(9-14).

9. $a^{\frac{2}{3}}x^{-3}y^{-3}\div a^{-\frac{1}{3}}x^{-3}y \qquad \left(a^4b^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\div\left(a^{-3}b^{\frac{1}{4}}\right)^2$

10. $\dfrac{\sqrt[12]{x^5}}{\sqrt[4]{x^3}} \qquad \dfrac{\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{7}{2}}b^4c^{-1}}} \qquad \left(\dfrac{a^{-4}b^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-2}\times\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{x^{-1}y^{-4}}\right)^2$

11. $\left(7\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(2\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(3\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{1\frac{1}{2}}\cdot\left(6\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(2\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$

12. $\left(x^{\frac{5}{6}}-2x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \qquad (x+x^{-1}-\sqrt{2})(x+x^{-1}+\sqrt{2})$

13. $\dfrac{y}{y^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{y^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{y^{\frac{1}{3}}+1}$

14. $\sqrt{4y^{\frac{3}{2}}-12y^{\frac{3}{4}}+25-24y^{-\frac{3}{4}}+16y^{-\frac{3}{2}}}$

15. 次ノ數ノ大サノ順ヲ定メヨ.

$$10^{\frac{1}{1.2}} \quad 10^{-1.5} \quad 10^{\frac{2}{3}} \quad 10 \quad 1 \quad 0.1 \quad \sqrt[4]{1000} \quad 10^{-0.8}$$

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(16—22).

16. $\sqrt{a^{2x-5}}=1 \qquad x^2-(2^6+2^{-6})x+1=0$ (諳算)

17. $\sqrt[x-3]{a^7}=\sqrt[x-7]{a^3}$　　$y=9+36y^{-1}$

18. $3^{2x-5}=2^{2x-5}$　　$4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$（答 $x=\frac{3}{2}$ ヲ驗セ）

19. $2^{x+1}+4^x=80$　　$x^{\frac{3}{4}}+8x^{-\frac{3}{4}}-9=0$

20. $x=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{ax}}}}$　　$32^{\frac{x+5}{x-7}}=0.25\times128^{\frac{x+7}{x-5}}$

21. 〔$\sqrt[x]{a^{15}}\sqrt[3]{a^{5y}}=\sqrt[x]{a^{18}}\sqrt{a^{3y}}=a^{15}$〕

22. 〔$x^{1.2}=a^{1.5}y^3$　　$b^{-0.4}y^{0.2}=a^{0.3}$〕

23. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$(11-6\sqrt{2})^{-0.5}(3+\sqrt{2})^{-1}$　　$\sqrt{y-2+y^{-1}}\times(y^{\frac{1}{2}}-1)^{-1}$

24. $x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$ ナレバ $\dfrac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$ ノ値如何.

對　數

52. 對數の性質

對數　或數 n（眞數）の或他の數 a（底數）に對する對數とは $a^x=n$ に適合する x のことなり. 之を $\log_a n$ と記す.

$$x=\log_a n \quad \text{なれば} \quad a^x=n$$

例ヘバ64ハ4ノ3乘冪ニ等シ,故ニ64ノ4ニ對スル對數ハ3ナリ. 卽チ $\log_4 64=3$

〔例一〕 (一) $\log_{\frac{1}{4}}32$ ヲ求ム.

$$\log_{\frac{1}{4}}32=x \qquad \therefore\ \left(\frac{1}{4}\right)^x=32$$

$$\therefore\ 2^{-2x}=2^5 \qquad x=-2.5 \quad 答$$

(二) $\log_y 8=\dfrac{3}{2}$ ニ就テ y ヲ求ム.

$$y^{\frac{3}{2}}=8 \qquad \therefore\ y=8^{\frac{2}{3}}=[2^3]^{\frac{2}{3}}=4 \quad 答$$

(三) $\log_9 z=\dfrac{3}{4}$ ニ就テ z ヲ求ム.

$$z=9^{\frac{3}{4}}=[3^2]^{\frac{3}{4}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27} \quad 答$$

斯樣ニ對數式ニ關スル問題ハ,之ヲ冪ノ式ニ關スル問題ニ變ヘテ考フルガ便利ナルコトアリ.

本書ニ於テハ對數ノ底數ト眞數トハ正ノ數トス.

〔例題〕 1. 次ノ式ノ a ニ對スル對數如何（諳算）.

a^3　　$a^3\times a^5$　　$\sqrt[3]{a^2}$　　$a^3\div a^7$　　1　　$\dfrac{1}{a^3}$

2. 對數ノ底數ガ, (一) 2, (二) 4, (三) $\dfrac{1}{8}$ ナルトキノ表中ノ各數（眞數）ノ對數ヲ求ム.

底數＼眞數	2　4,　64	1,　$\frac{1}{2}$,　$\frac{1}{4}$	0.125,　$\sqrt[3]{16}$
(一)　2			
(二)　4			
(三)　$\frac{1}{8}$			

次ノ各題ノ關係式ニ就テxノ値ヲ求ム(3—4).

3. $\log_x 81=4$　　$\log_x 5329=2$　　$\log_x 8=\frac{3}{2}$

4. $\log_9 27=x$　　$2\log_x 10=-1$　　$\log_{25} x=\frac{1}{2}$

5. 次ノ對數式ノ値ヲ求ム.

$\log_5 0.04$　　$\log_9 3\sqrt{3}$　　$\log_{100} 0.001$　　$\log_4 8\sqrt{2}$

6. 表ノ如ク2ノ冪ヲ20乘マデ求ムレバ,之レニヨリテ表中ノ數ノ間ノ乘,除,冪法,開法ノ結果ハ直ニ答フルコトヲ得.

n	2^n
1	2
2	4
3	8
⋮	⋮
10	1024
⋮	⋮
20	...1048576
⋮	⋮

次ノ各ヲ求メヨ.

4096×128,　$1048576\div4096$,

128^2,　$\sqrt[2]{262144}$

實地ノ計算ニ對數ヲ應用シテ便利ナル所以モ之レト同理ナリ.

〔3〕 對數の性質

$$\log_a mn=\log_a m+\log_a n \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\log_a m^n=n\log_a m \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\log_a \sqrt[n]{m}=\frac{1}{n}\log_a m \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

證明　(1)　$\log_a m$, $\log_a n$ヲ夫夫x, yトスレバ

$$m=a^x,\qquad n=a^y$$

$$\therefore\quad mn=a^x.a^y=a^{x+y}$$

$$\therefore\quad \log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$$

其他モ之ト同樣ニ證明セラル.

同ジ底數ニ對スル對數ノミヲ論ズルトキハ,底數ヲ略シテ言ハザルコトアリ. 例ヘバ

$$\log mn=\log m+\log n$$

〔例二〕　(一)　$\log\frac{a^2\sqrt[3]{x}}{5by^3}$ヲ分解セラレタル對數式ニ直セ.

$$2\log a+\frac{1}{3}\log x-\log 5-\log b-3\log y \quad 答$$

(二)　次ノ式ヲ一ツノ對數ノ式ニ纒ムルコト.

$$2\log a-\frac{1}{2}\log b+\frac{1}{3}\log x-3\log y$$

$$(\text{與式})=\log\frac{a^2\sqrt[3]{x}}{y^3\sqrt{b}}\ \cdots\text{答}$$

(三) $\log 143+\log\frac{4}{7}-\log\frac{13}{35}$ ヲ簡單ニスルコト.

與式ヲ一ツノ對數ノ式ニ纏ムレバ

$$\log\frac{143\times4\times35}{7\times13}=\log 220\quad\text{答}$$

(四) 次ノ式ヲ $\log_{10}2$ ト $\log_{10}3$ トニテ表スコト.

$$\log_{10}n=\log_{10}7.5\sqrt[3]{12}$$

解 $\quad n=7.5\sqrt[3]{12}=\frac{15}{2}(2^2.3)^{\frac{1}{3}}$

$$=3\times5\times2^{-1}\times2^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}$$

$$=2^{-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{4}{3}}\times5\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $\quad \log_{10}5+\log_{10}2=\log_{10}10=1$

$$\therefore\ \log_{10}5=1-\log_{10}2\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\log n=\log 2^{-\frac{1}{3}}.3^{\frac{4}{3}}.5$ 〔(1) ニヨリテ〕

$$=-\frac{1}{3}\log 2+\frac{4}{3}\log 3+\log 5$$

$$=-\frac{1}{3}\log 2+\frac{4}{3}\log 3+(1-\log 2)$$

$$=1+\frac{4}{3}\log 3-\frac{4}{3}\log 2\cdots\cdots\text{答}$$

〔例三〕 次ノ方程式(對數方程式)ヲ解クコト.

$$\frac{1}{2}\log_{10}(x-6)+\log_{10}\sqrt{2x+5}=1$$

解 左邊ヲ纏ムレバ

$$\log_{10}\sqrt{x-6}\sqrt{2x+5}=1$$

$$\therefore\ \sqrt{x-6}\sqrt{2x+5}=10$$

之ヲ解ケバ $\quad 2x^2-7x-130=0$

$$(2x+13)(x-10)=0$$

$$x=-\frac{13}{2}\ \text{或ハ}\ 10$$

然ルニ $x=-\frac{13}{2}$ ハ $\log_{10}(x-6)$ ヲ不可能ナラシムルヲ以テ根ニアラズ. $x=10$ トスレバ

$$(\text{左邊})=\frac{1}{2}\log_{10}4+\log_{10}\sqrt{25}$$

$$=\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}10=1\qquad\text{答}\ x=10$$

問題 第四十七集

1. 次ノ各ヲ分解セラレタル對數式ニ直セ.

$\log a\sqrt[4]{b}\qquad \log\sqrt{x^2y^3}\qquad \log(a^2-b^2)\qquad \log\frac{mn^2p^4}{\sqrt{m^{-3}np^6}}$

次ノ各題ノ式ヲ一ツノ對數ノ式ニ纏メヨ(2-4).

2. $3\log a-2\log b-4\log c$

3. $\frac{1}{2}\log x - \frac{1}{3}\log y + \frac{1}{4}\log z$

4. $\log\frac{a}{b} + \log\frac{b}{c} + \log\frac{c}{d} - \log\frac{ax}{dk}$

次ノ各題ノ式ヲ簡單ニセヨ(5—6).

5. $\log\frac{28}{15} - 2\log\frac{3}{14} + 3\log\frac{6}{7}$

6. $7\log\frac{15}{16} - 6\log\frac{3}{8} + \log\left(\frac{2}{5}\right)^5 - \log\frac{25}{32}$

次ノ各題ノ方程式ヲ解ケ(7—8).

7. $\log_{10}\sqrt{3x+4} + \frac{1}{2}\log_{10}(5x+1) = 1 + \log_{10}3$

8. [$\log_{10}x + \log_{10}y = 2$　　$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 3$]

9. 次ノ各式ノ a^2 ニ對スル對數如何(諳算).

$$a^3 \qquad a \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{a} \qquad \sqrt[3]{a^2} \qquad 1 \qquad a^{-n}$$

10. 次ノ對數式ノ値ヲ求メヨ.

$$2\log_{19}\sqrt[3]{7} \qquad \log_{\sqrt[3]{4}}128 \qquad \log_{10}\sqrt[3]{0.01} \qquad \log_2(0.125)^7$$

11. 次ノ各式ヲ $\log_{10}2$ ト $\log_{10}3$ トニテ表セ.

$$\log_{10}12.5 + \frac{1}{2}\log_{10}0.36 \qquad \log_{10}\{\sqrt[3]{12} \div (0.15\log_{10}10^6)\}$$

12. 次ノ不等式ヲ解ケ[$2^{10} = 1024,\ 2^{20} = 1048576$].

$$10^x < 2^{50} < 10^{x+1} \qquad x\ \text{ハ整數}$$

53. 指標の法則

常用對數　或正の數 n の常用對數とは $10^x = n$ に適合する x のことなり.

之ヲ $\log n$ ト記シ, 底數ヲ略シテ書カヌコト多シ.

〔例一〕 $10^x = n$ ニ就テ, x ヲ正或ハ負ノ整數トシ, n ノ値ヲ求ムレバ表ノ如キ結果ヲ得. 此種類ノ外ノ普通ノ數ノ對數ハ皆不盡數ナリ.

n (眞數)	$\log n$
10000	4
1000	3
100	2
10	1
1	0
0.1	—1
0.01	—2
0.001	—3

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

$$\therefore\ \log 2 = 0{\cdot}30\ldots$$ 〔四十七 12〕

對數ヲ $0.5(=\frac{1}{2})$, 或ハ $0.333..(=\frac{1}{3})$ トスレバ

$$\begin{cases}\log n = 0.5\ \text{ナレバ} \\ n = 10^{\frac{1}{2}} = 3.16227..\end{cases} \qquad \begin{cases}\log n = 0.33333.. \\ n = 10^{\frac{1}{3}} = 0.215443..\end{cases}$$

對數表　數の常用對數を表に作りて實地計算の用に供するものを對數表といふ.

普通ノ數ノ對數ノ値ハ先哲已ニ精密ニ之ヲ計算シテ其表ヲ作レリ. 之ヲ編輯シタル書ノ世ニ

行ハルルモノ多ク,其精粗同ジカラズト雖モ,通常ノ計算ニアリテハ對數ノ小數部五桁ノモノヲ以テ足レリトス(今村博士編普通對數表ノ如シ)

三桁の對數表(1—109)

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0.000	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954
1	1.000	1.041	1.079	1.114	1.146	1.176	1.204	1.230	1.255	1.279
2	1.301	1.322	1.342	1.362	1.380	1.398	1.415	1.431	1.447	1.462
3	1.477	1.491	1.505	1.519	1.531	1.544	1.556	1.568	1.580	1.591
4	1.602	1.613	1.623	1.633	1.643	1.653	1.663	1.672	1.681	1.690
5	1.699	1.708	1.716	1.724	1.732	1.740	1.748	1.756	1.763	1.771
6	1.778	1.785	1.792	1.799	1.806	1.823	1.820	1.826	1.833	1.839
7	1.845	1.851	1.857	1.863	1.869	1.875	1.881	1.886	1.892	1.898
8	1.903	1.908	1.914	1.919	1.924	1.929	1.934	1.940	1.944	1.949
9	1.954	1.959	1.964	1.968	1.973	1.978	1.982	1.987	1.991	1.996
10	2.000	2.004	1.009	2.013	2.017	2.021	2.025	2.029	2.033	2.037

コノ表ニヨリテ次ノ等式ヲ驗證セヨ.

$$\log 13+\log 7=\log 91 \qquad 2\log 4=\log 16$$

〔例二〕　對數表ニヨリ例ヘバ2.154ノ對數ノ0.33325ナルコトガ分レバ,列數字ガ2154ナル數(2.154ト小數點ノ位置ノミナ異ニスル數)ノ對數ハ表ノ如シ.

眞數 (n)	對數 ($\log n$) 指標　假數
21540	......4.33325
2154	......3.33325
215.4........	2,33325
21.54	......1.33325
2.154....,	......0·33325
0.2154..	......$\bar{1}$.33325
0.02154.	......$\bar{2}$.33325
0.002154	......$\bar{3}$.33325

說明　　$2.154=10^{0.33325}$ ....(1)

$100=10^2$ ....(2)

(1)×(2)　　$215.4=10^{2.33325}$

(1)÷(2)　　$0.02154=10^{0.33325-2}=10^{\bar{2}.33325}$

0.33325−2 を $\bar{2}$.33325 と記す.

對數ガ0.33325−2ノ如ク負ノ數トナルベキ場合ニハ,上ノ如ク之ヲ負ノ整數ト正ノ小數トノ和トシテ表シ置クモノトス. 此記法ニ於テ對數ノ整數部ヲ指標トイヒ,小數部ヲ假數トイフ.

1より大なる數の常用對數に於て整數部分を指標といひ,小數點下の部分を假數といふ. 1より小なる數の常用對數を負の整數と正の小數との和の形に直したるとき,整數部分を指標といひ,小數部分を假數といふ.

〔4〕 指標の法則

(一) n 桁の整數部分を有する眞數の對數の指標は $n-1$ なり.　(二) 小數點下

第 n 番目の位に始めて有効數字を有する眞數の對數の指標は $\overline{n}$ なり.

對數表ニハ假數ノ小數點ヲ去リタルモノノミヲ揭グルガ普通ナリ(前頁ノ見本ハ然ラズ).

〔例三〕 次ノ(一),(二)ハ對數ノ減法,(三)ハ乘法,(四),(五)ハ除法ナリ.

(一)

$$\begin{array}{l} \log 1.644 = 0.2159 \\ \log 3.774 = 0.5768 \\ \hline \log\frac{1.644}{3.774} = \overline{1}.6391 \end{array} \;(-$$

(二)

$$\begin{array}{l} \log 1 \;\doteqdot 0 \\ \log 40 = 1.6021 \\ \hline \log\frac{1}{40} = \overline{2}.3979 \end{array} \;(-$$

(三)

$$\begin{cases} \log 0.047 = \overline{2}.6721 \\ 2\log 0.04\;\; = \overline{3}.3442 \end{cases}$$

(四)

$$\begin{cases} \log 0.000075 = \overline{5}.87506 \\ \frac{1}{3}\log 0.000075 = \overline{2}.62502 \end{cases}$$

(五) $0.1326 \div \overline{2}.98 = 0.1326 \div (-1.02) = -0.13$

〔例四〕 8^{31} ハ幾桁ノ數カ. $\log 2 = 0.30103$

解

$$\begin{aligned} \log 8^{31} &= \log[2^3]^{31} = \log 2^{93} \\ &= 93.\log 2 = 93 \times 0.30103 \\ &= 27.99579 \end{aligned}$$

答 8^{31} ハ28桁ノ數

27.99579 ノ誤差ハ 0.30103 ノ誤差 ± 0.000005 ノ 93 倍未滿卽チ ± 0.00047 未滿ナレバ指標ニハ影響セザルナリ.

〔例五〕 (一) $\log\sqrt[3]{0.025}$　(二) $\log(2.7 \div \sqrt[3]{280})$ ヲ求ム. 但シ $\log 2 = 0.3010$　$\log 3 = 0.4771$　$\log 7 = 0.8451$

解 (一) $\log 5 = \log 10 - \log 2$

$$= 1 - 0.3010 = 0.6990$$

$$\log 25 = 2\log 5 = 2 \times 0.6990 = 1.3980$$

$$\therefore\ \log 0.025 = \overline{2}.3980$$

$$\log\sqrt[3]{0.025} = \frac{1}{3}\log 0.025 = \overline{1}.4660 \quad \text{答}$$

(二)

$$\begin{cases} 27 = 3^3 \\ 28 = 2^2.7 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log 27 = 3\log 3 = 1.4313 \\ \therefore\ \log 2.7 = 0.4313 \ \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{array}{l} 2\log 2 \;\; = 0.6020 \\ \log 7 \;\; = 0.8451 \\ \hline \log 28 \;\; = 1.4471 \end{array} \;(+ \\ \log 280 = 2.4471 \\ \therefore\ \frac{1}{3}\log 280 = 0.8157 \cdots\cdots (2) \end{cases} \qquad \begin{array}{r} 0.4313 \cdots\cdots (1) \\ 0.8157 \cdots\cdots (2) \\ \hline \log\frac{2.7}{\sqrt[3]{280}} = \overline{1}.6156 \cdots\cdots \text{答} \end{array} \;(-$$

問題　第四十八集

1. 指標及假數ノ定義ヲ復誦セヨ.

2. 次ノ各ヲ對數ノ普通ノ記法ニテ記セ.

$\log 0.0657 = -1.18243$　　$\log\frac{1}{0.0302} = -(\overline{2}.48)$

3. 次ノ各ニ就テ對數ノ計算ヲ行ヘ.

(一)(加法)	(二)(減法)	(三)(乘法)	(四)(除法)
$\begin{array}{r} 3.5636 \\ \bar{5}.7457 \\ \hline \end{array}$ (+	$\begin{array}{r} \bar{2}.6114 \\ 3.9342 \\ \hline \end{array}$ (−	$\begin{array}{r} \bar{1}.75755 \\ 3 \\ \hline \end{array}$ (×	$5\,\overline{)\,\bar{2}.94023}$

4. m ガ 3174, 2.035, 0.07, 0.0039 ナルトキ

$$10^x < m < 10^{x+1}$$ (x ハ正或ハ負ノ整數)

ニ適合スル x ノ値如何(諳算).

5. 指標ノ法則ヲ復誦セヨ.

6. 次ノ各數ノ對數ノ指標ヲ答ヘヨ(諳算).

3174　2.0235　0.07　0.0039

5.3　0.53　0.0053　753×357

7. 次ノ數ヲ對數トスル眞數如何(232頁ノ表).

3.204　0.322　$\bar{3}.447$　1.799　$\bar{1}.875$

8. $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$, $\log 7 = 0.8451$ ヲ與フ

(一) 2^{24}, 45^{10} ハ各幾桁ノ數ナルカ.

(二) 次ノ各數ノ對數ヲ求ム.

15　0.06　$\dfrac{27}{35}$　$\sqrt[4]{0.0105}$　$64 \div \sqrt[3]{21}$

9. 對數表ヲ用ヒテ次ノ各式ノ値ヲ其首位ノ三桁ダケ求ム(普通ノ計算法ニ較ベテ位取ヲ驗セ).

753×357　$\dfrac{5630}{734}$　$\sqrt[3]{\dfrac{229}{531}}$

54. 對數計算の例

〔例一〕 次ノ算法ヲ比例挿入法トイフ.

(一) $\left.\begin{array}{l} \log 835 = 2.92169 \\ \text{loo}836 = 2.92221 \end{array}\right\}$ ヲ與ヘテ log835.73 ヲ求ム.

演算

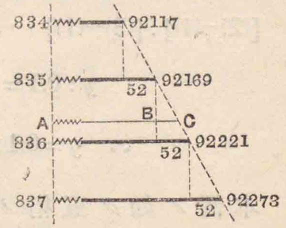
$$\left\{\begin{array}{l} \log 835.73 \\ \hline \log 835 \quad = 2.92169 \\ \qquad\quad 73 \ldots\ldots\ldots 38 \\ \hline \log 835.73 = 2.92207 \end{array}\right.$$ 答

差 52

52×0.73

$= 37.96$

說明 次ノ如ク書キ並ベテ比ブルニ



$$\left\{\begin{array}{ll} \log 835 = 2.92169 \ldots\ldots\ldots & (1) \\ \log 835.73 = 2.92169 + x \ldots\ldots & (2) \\ \log 836 = 2.92221 \ldots\ldots\ldots & (3) \end{array}\right.$$

眞數の增し(少しの增し)と對數の增しとは比例するものと看做す(比例部分の理)トキハ

[(2)−(1)]:[(3)−(1)]　ニヨリテ

$$x : 0.00052 = 0.73 : 1$$

$$\therefore \quad x = 0.00052 \times 0.73 = 0.00038 \text{ (弱)}$$

$2.92221 - 2.92169 = 0.00052$ ヲ差(表差) 52 ト略記ス.

與ヘラレタル對數 (2.92169 ...) ガ小數點下五桁ノ近似數ナレバ答モ小數點下五桁ニ止ムベシ.

(二) $\left.\begin{array}{l}\log 12.06=1.08135\\ \log 12.07=1.08171\end{array}\right\}$ ヲ與ヘテ, $\log n=2.08166$ ナルトキノ n ヲ求ム.

演算 $\left\{\begin{array}{r} \log n=2.08166 \\ \hline 2.08135=\log 120.6 \\ 31\ldots\ldots\ldots\ldots 9 \\ \hline n=\quad 120.69 \end{array}\right.$ 答 $\left|\begin{array}{l} 差 36 \\ \dfrac{31}{36}=0.86 \end{array}\right.$

說明 $\left\{\begin{array}{ll} 2.08135=\log 120.6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ 2.08166=\log(120.6+y) \ldots\ldots\ldots & (2) \\ 2.08171=\log 120.7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (3) \end{array}\right.$

$[(2)-(1)]:[(3)-(1)]$ ニヨリテ(比例部分ノ理ヲ用ヒ)

$$y:0.1=0.00031:0.00036$$

$$\therefore\ y=0.1\times\frac{31}{36}=0.09\ (弱)$$

本例ノ如ク五桁ノ對數(對數ノ小數部五桁)ヲ用ヒタルトキハ,眞數モ有効部分ヲ五桁ニ止ムベシ.

對數表ノ比例部分(P. P.)ヲ用フレバ 52×0.73, $31\div 36$ ハ諳算ニテ求メラルルモノナリ.

次ノ如キ記法ヲ用フルコトアリ.

$\log n=2.08166$ なれば $n=\log^{-1}2.08166$

$\log 0.83537$, $\log^{-1}0.08155$ ヲ求ム. (答 $\bar{1}.92188$, 1.2066)

〔例二〕 (一) 方形ノ五合枡ノ深サ(h)幾許.

但シ內法ハ方 3.95 寸ナリトス.

解 $$(39.5)^2\times h=\frac{64827}{2}\quad 〔\because\ 1升=64827 立方分〕$$

$$\therefore\ h=32413.5\div(39.5)^2$$

$$\log 39.5=1.59660$$

$$2\log 39.5=3.19320\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\begin{array}{r} \log 32413.5=4.51073\ldots\ldots\ldots(2) \\ 3.19320\ldots\ldots\ldots(1) \\ \hline \log h=1.31753\quad \end{array}(-$$

$$\therefore\ h=20.774\ (分)\ 答$$

(二) $x=\dfrac{5076\sqrt{0.007109}}{9384\sqrt[3]{0.0005318}}$ ヲ計算スルコト.

解 $$\log 0.0005318=\bar{4}.72575$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}\log 0.0005318=\bar{2}.90858 \\ \log 9384=3.97239 \\ \hline 分母ノ \log.\ldots\ldots 2.88097\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \end{array}$$

$$\log 0.007109=\bar{3}.85181$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\log 0.007109=\bar{2}.92591 \\ \log 5076=3.70552 \\ \hline 分子ノ \log.\ldots 2.63143\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 2.88097\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ \hline \log x=\bar{1}.75046\quad \end{array}(-$$

$$\therefore\ x=0.56294\ 答$$

〔例三〕 (一) $x=(0.00893)^{-0.08}$ ヲ求ムルコト

$$\log x=-0.08\times\bar{3}.95085 \qquad \log 0.00893$$

$$=-0.08\times(-2.04915) \qquad =\bar{3}.95085$$

$$=0.163932 \qquad \therefore\ x=1.4586$$ 答

(二) $(0.4)^{2x-1}=0.003$ ヲ解クコト.

先ヅ兩邊ノ對數ヲトレバ

$$(2x-1)\log 0.4=\log 0.003$$

$$2x-1=\frac{\log 0.003}{\log 0.4}=\frac{\bar{3}.47712}{\bar{1}.60206}$$

$$=\frac{-2.52288}{-0.39794}=6.3399$$

$$\therefore\ 2x-1=6.3399 \qquad \therefore\ x=3.6700$$ 答

(三) $2^{3x+1}=7^{2x-1}$ ヲ解クコト.

先ヅ兩邊ノ對數ヲトレバ

$(3x+1)\log 2=(2x-1)\log 7$ 之ヲ解ケバ

$$x=\frac{\log 7+\log 2}{2\log 7-3\log 2}=\frac{\log 14}{\log 6.125}=\frac{1.14613}{0.78711}=1.4561$$ 答

$2\log 7-3\log 2$ ハ $\log\frac{7^2}{2^3}$, 故ニ $\log 6.125$ ト變形シタルナリ.

問題　第四十九集

1. $\left.\begin{array}{l}\log 3.1\ \ =0.49136\\ \log 3.101=0.49150\end{array}\right\}$ ヲ與ヘテ對數ガ $\bar{1}.49140$, $\bar{3}.49146$ ナル眞數ヲ求ム.

2. $\log 6432=3.808346$, $\log 6433=3.808414$ ヲ與ヘテ, 對數ガ 4.808366, 4.808393 ナル眞數ヲ求ム.

3. 次ノ計算ヲナセ.

(一) 362.587×975.128　(二) $362.587\div(10-0.24872)$

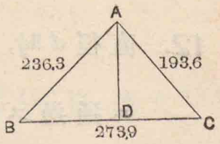
(三) $(3625.87)^3$　(四) $\sqrt[3]{97.5128}$

4. 1立 (33^3 立方分), 1立方尺, 1立坪ハ各何升ナルカ.

5. 球ノ半徑ヲ r, 其周 (大圓ノ周) ヲ p, 其表面積ヲ s トスレバ　$p=2\pi r$,　$s=4\pi r^2$

地球ノ周ヲ4萬粁トシテ其表面積ヲ求ム.

6. 三邊ガ 273.9, 193.6, 236.3 ナル三角形ノ面積 s 幾許.



$$s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p ハ周ノ半 (四十五.30)

7. 次ノ各ノ方程式ヲ解ケ.

(一) $(0.3)^x=0.02$　(二) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-3}=\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-2}$

(三) $x^{\log x}=100x$　(四) $\log_x 88=2.1531$

(五) $[2^{\sqrt{x^2-x-2}}=4y,\ \ \log(1+y)-2\log y=\log 2]$

8. 次ノ各式ノ値ヲ計算セヨ.

(一) $\dfrac{0.0672\times\sqrt{5}}{0.123}$　　(二) $\dfrac{80904\sqrt[5]{0.031}}{54081\sqrt[3]{0.017}}$

(三) $(0.3768)^{-0.7}$　　(四) $(8.5768)^{-0.4}$

9. (一) $3, 3^2, 3^3, \ldots\ldots$ ガ 100 0000 ヲ超過スルタメニハ 3 ノ何乘羃マデ取ルベキカ.

(二) $3+3^2+3^3+\ldots\ldots$ ガ 100 0000 ヲ超過スルタメニハ 3 ノ何乘羃マデ取ルベキカ.

10. $2x=a+a^{-1}$, $2y=b+b^{-1}$ トシテ, 次ノ式ノ値ヲ a, b ニテ求ム.

$$xy-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(y^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

11. $\left[xy^{\frac{1}{2}}+yx^{\frac{1}{2}}=20 \quad x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=65\right]$ ヲ解ケ.

12. 直徑 d 吋, 長サ l 碼ナル水道鐵管內ヲ 1 分間ニ通過スル水ノ量 v (呎) ハ　$v=\sqrt{\dfrac{(3d)^5\times h}{l}}$

但シ h 呎ハ落差 (一端ガ他端ヨリ h 呎高キコト) トス. 今水管ノ直徑 $4\frac{1}{4}$ 吋, 長サ 1 哩ニシテ其落差 38 呎ナレバ 1 晝夜ニ流ルル水量幾許.

步 合 算

55. 步合の意義, 單利法

(一) 圓ノ直徑ノ圓周ニ對スル係數 (比ノ値) $\dfrac{10000}{31416}$ ヲ小數 0.3183 ニ直シテ, 三割一分八厘三毛ト稱シ, 之ヲ直徑ノ圓周ニ對スル**步合**トイフコトアリ.

圓周ガ 3尺, 5尺, 12尺, 20尺 ナレバ直徑幾許.

(二) 第一學期 77 日, 第二學期 88 日, 第三學期 55 日ノ各授業日數ノ一學年授業日數 220日 ニ對スル係數 $\dfrac{7}{20}$, $\dfrac{8}{20}$, $\dfrac{5}{20}$ ヲ步合ニ直セバ 3 割 5 分, 4 割, 2 割 5 分ナリ.

一學年間ノ教科, 數學 200 頁, 英語 150 頁, 漢文 180 頁ヲ各學期ニ配當スレバ如何.

(三) 或日ノ新聞ニテ公債ノ相場, 額面百圓ニツキ五分利附ノモノハ 99.5 圓, 四分利附ノモノハ 93.75 圓ナレバ, 其各ノ利廻リハ $\dfrac{5}{99.5}$, $\dfrac{4}{93.75}$ 即チ 0.05025, 0.04267 ナリ.

放資一萬圓ニ付, 一箇年收入ノ差概略幾許 (諳算).

歩合　或數Aを標準とし, 他の數Rの之に對する比の値を小數rにて表したるとき, rをRのAに對する**歩合**といふ. Aは**元高**, Rは**歩合高**なり.

$$[r=R\div A \quad R=Ar \quad A=R\div r]\ldots\ldots(a)$$

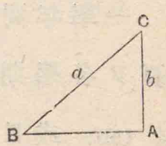
$$[A+R=A(1+r) \quad A-R=A(1-r)]\ldots\ldots(b)$$

歩合の名稱と小數との對照

歩　合	1割	3分(歩)	5厘	3割1分8厘	31割4分
ぱーせんと	10%	3%	$\frac{1}{2}$%	$31\frac{4}{5}$%	314%
小　數	0.1	0.03	0.005	0.318	3.14

〔例題〕 **1.** (a)ニ準ジテ(b)ヲ各三通リニ表セ.

2. 斜邊ガa, $\angle B$ガ40°ナル直角三角形ABCノ角Bニ對スル邊bノaニ對スル歩合ハ0.643(約)ナリ. a, b, 0.643ノ關係式ヲ三通リニ記セ.



3. 或町村ノ小學校ノ男女生徒數各2400人ニシテ, 前年ニ比シ, 男生徒ハ2割増シ, 女生徒ハ2割減ジタリトイフ. 差引増減幾人ナルカ.

〔例一〕 原價1785圓ノ商品ヲ5月15日ニ買入レ, 同年10月7日ニ之ヲ賣却セントス. 其賣買諸掛リニ金375圓ヲ要シ, 其諸掛リ込ミ原價ニ對シテ買入當日ヨリ賣上當日迄(兩端入), 年利6分ノ金利ヲ見積リタル上, 8分ノ利益ヲ得ラルベキ樣ニナサントス. 幾許ニ賣ルベキカ.　答 2388.79圓

5月15日 ヨリ 10月7日 迄……146日 (兩端ヲ入ル).

$$146\text{日}=\frac{146}{365}\text{年}=\frac{2}{5}\text{年}$$

$$(1785^{\text{円}}+375^{\text{円}})\times\left(1+0.06\times\frac{2}{5}\right)\cdots\text{諸掛込原價ノ元利}$$

$$(1785^{\text{円}}+375^{\text{円}})\times\left(1+0.06\times\frac{2}{5}\right)\times 1.08=2388.787\text{圓}\ldots\text{賣價}$$

利息　借入金, 預リ金, 商品買入代金若クハ定期支拂金ノ延滯等スベテ金錢使用ノ報酬トシテ仕拂フ所ノ金錢ヲ**利息**(利子)トイフ. 利息ヲ生ズベキ基金ヲ**元金**. 元金(A)ト利息(R)トノ和(S)ヲ**元利合計**又ハ**元利**トイフ.

單利法にては利息Rは元金Aと, 元金使用の期間nと, 單位期間に生ずる利息の元金に對する**歩合**(**利率**)rとの各に正比例す.

$$R=Arn \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

$$S=A(1+rn) \ldots\ldots (d)$$

上ノ公式ノ期間nノ單位ハ利率ヲ云ヒ表ス時ノ期間ノ單位ト同ジニスベキモノナリ.

〔例題〕 綿絲330梱ヲ十月九日ニ倉庫ニ預ケ,同年十一月二十日ニ引キ出セリ. 此保管料幾許. 保管料ハ評價百圓ニ付日步7厘5毛ニシテ(兩端入),綿絲一梱ノ評價ヲ135圓トス (答 143.67 圓).

〔例二〕 (一) 若干ノ品物Aヲ其代金aノp%引ニテ買フ約束ナリシヲ,品物ヲp%多ク受取ルコトトナシタリ. 此割引步合幾許ニ當ルカ.

答 $\frac{p}{100+p}$ 卽チ $\frac{100p}{100+p}$%

受取リタル品物ハ $A.\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ニシテ,實際ニ支拂ヒタル金ハAノ代金ナリ. 故ニ割引高ハ $\left(\frac{p}{100}.A\right)$ ニシテ,其步合ハ $\left(\frac{p}{100}.A\right)\div\left(1+\frac{p}{100}\right).A$ ナリ.

步合ヲ應用セル問題ヲ解クニ際シテハ**元高の何なるか**ヲ正シク判斷スルコト肝要ナリ. 本例

ニ於ケル割引步合ハp%ノ外割引ナリ.

p%の外割引とは割引高を割引價に比較したる時の步合がp%に當る樣にする事なり.

(二) 今ヨリ3箇月後ニ支拂フベキ金400圓アリ. 今之ヲ年6分ノ割引率ニテ卽時ニ支拂ハントス,現價及割引高各幾何ナルカ.

$$\left.\begin{array}{l} 400\text{圓}\div\left(1+0.06\times\frac{3}{12}\right)=394.0886\text{圓}\ldots\ldots\text{現價} \\ 400\text{圓}-394.0886\text{圓}=5.911\text{圓}\ldots\ldots\text{割引高} \end{array}\right\}\text{答}$$

此割引法ヲ**眞割引**或ハ**外割引**トイフ.

本例ノ如ク期間ガ短キ場合ニアリテハ次ノ如キ算法ニヨルコト多シ.

$$\left.\begin{array}{l} 400\text{圓}\times0.06\times\frac{3}{12}=6\text{圓}\ldots\ldots\text{割引料} \\ 400\text{圓}-6\text{圓}=394\text{圓}\ldots\ldots\text{割引手取金(現價)} \end{array}\right\}\text{答}$$

此割引法ヲ**銀行割引**或ハ**內割引**トイフ.

通例單ニ割引ト唱フレバ銀行割引ヲ意味シ,又單ニ現價ト唱フレバ眞割引ノ現價ヲ意味スルモノナリ. 銀行割引ノ場合ニアリテハ現價ヲバ特ニ**割引手取金**ト稱セラル.

〔例三〕 同一利率ニテ,甲ハ乙ニ對シ下記ノ負債アリ,

$\begin{cases} 40\text{日後ニ支拂フベキ金}800\text{圓} \\ 60\text{日後ニ支拂フベキ金}200\text{圓} \\ 90\text{日後ニ支拂フベキ金}1000\text{圓} \end{cases}$

此總額ヲ一度ニ授受シテ,甲,乙兩者ニ損益ナカルベキ期日(支拂平均期日)ヲ求ム.　答 67日後

$$\frac{(800\times40)+(200\times60)+(1000\times90)}{800+200+1000}=67$$

三口ノ負債ヲ即時ニ支拂フモノトスレバ,其割引料ハ

$\{(800\times40)+(200\times60)+(1000\times90)\}^{\text{円}}\times r$………(1)

求ムル期日ヲ n 日後トスレバ $(800+200+1000)^{\text{円}}$ ノ n 日間ノ割引料ハ　$(800+200+1000)^{\text{円}}\times n\times r$….(2)

(1) ト (2) トガ相等シクナル樣ニ n ヲ定メタルナリ (r ハ日利率).

〔例題〕 1. 或人8箇月後ニ代金ヲ受取ルベキ約束ニテ家屋一棟ヲ金5500圓ニテ賣ラントセルニ,買手ノ望ミニヨリ年利6分ニテ割引ヲナシ即金ニテ其代金ヲ受取ルコトトナレリ. 幾許ヲ受取ルベキカ.

2. 6月10日振出,日附後60日拂(同年8月9日拂),額面金2800圓ノ約束手形ヲ所持セル人アリ. 7月1日之ヲ某銀行ニテ日歩3錢3厘ニテ割引セリトイフ(兩端入). 割引手取金幾許.

3. 4ヶ月後ニ支拂フベキ金100圓, 5ヶ月後ニ支拂フベキ金750圓, 6ヶ月後ニ支拂フベキ金450圓アリ. 此三口ノ支拂平均期日如何.

56. 複利法,年金算

〔例一〕 (一) 或人金56圓ヲ某貯蓄銀行ニ預ケ2年4箇月間其儘ニ据置キタリトスレバ元利合計幾許ニナルベキカ. 但シ年利6分ニシテ毎半年末ニ利息ヲ元金ニ組入レ,且元金ノ1圓未滿ノ部分ニハ利息ヲ附セザルモノトス.

56.00	………………預ケ入元金
1.68	………………56×0.03
57.68	………………第一期末元利
1.71	………………57×0.03
59.39	………………第二期末元利
1.77	………………59×0.03
61.16	………………第三期末元利
1.83	………………61×0.03
62.99	………………第四期末元利
1.24	………………$62\times0.03\times\frac{4}{6}$
64.23	

答 64.23圓

複利法　複利法とは一定期末毎に其期間の利息を計算して之を其期首の元金に加へ其元利合計を以て次期の新元金とするものにして,其元金高は毎期首に漸次增加するものなり.

上ノ例ノ算法ハ短期ノ複利算法ニ於テ用ヒラル. 次ニ同一ノ利率ニテ長期ニ亘ル場合ノ複利法ヲ示サントス.

(二) 元金570圓, 年利6分, 複利期每半年, 期間4年8箇月ノ元利合計(s)幾許.

r	$\log(1+r)$
2(步)	0.0086002
2.5	0.0107239
3	0.0128372
3.5	0.0149403
4	0.0170333
4.5	0.0191163
5	0.0211893
5.5	0.0232525
6	0.0253059
6.5	0.0273496
7	0.0293838
8	0.0334238

複利期半年ナルユエ, 一期ノ利率ハ0.03, 期間ハ9期ト2箇月ナリ.

$$\therefore\quad s=570\times(1.03)^9\times\left(1+0.03\times\frac{2}{6}\right)$$

先ヅ $x=570\times(1.03)^9$ ヲ求メンニ

$$\log 1.03=0.0128372$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 9\log 1.03&=0.11553\\ \log 570&=2.75587\quad (+\\ \hline \log x&=2.87140\end{aligned}$$

$$x=743.71$$

$$s=x\times1.01=751.15$$

答　751.15圓

元金A (570圓) ノ第一期末ノ元利ハ A×1.03 ニシテ之ガ第二期首ノ元金ナル故ニ,第二期末ノ元利ハ A×1.03×1.03 卽チ $A(1.03)^2$ ナリ. 次第ニ斯ノ如クシテ第九期末ノ元利ハ $A(1.03)^9$ トナルナリ.

1.03 ノ對數ヲ9倍スレバ其誤差モ9倍セラルルユエ,此對數ハ精シク知リ置クガ便利ナリ. ヨリテ此部分ダケ七桁ノモノヲ用ヒタルナリ.

複利法公式　期間nに端數なき場合に,元金A, 利率rの元利合計sは次の公式にて求めらる.

$$s=A(1+r)^n\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

例一ノ(一)ヲ(二)ノ算法ニテ求ム (答 64.290 圓)

〔例二〕　(一) 今後40年間每年末ニ金650圓ヅツ預クレバ其元利合計(s)幾許. 但シ年利$6\frac{1}{2}$%ノ複利トス.

各年末預金ノ最終年末ニ於ケル夫夫ノ元利ヲ,最終年末預金ノ分ヨリ逆ニ列記スレバ

$$650,\quad 650(1.065),\quad 650(1.065)^2,\ldots\ldots 650(1.065)^{39}\ldots\ldots(1)$$

卽チ 1.065 ヲ公比トセル等比級數ヲナス.

$$\therefore\quad s=\frac{650(1.065)^{40}-650}{1.065-1}=\frac{650}{0.065}\{(1.065)^{40}-1\}\ \ldots(2)$$

$$\log 1.065 = 0.0273496$$

$$40\log 1.065 = 1.093984 = \log 12.416$$

$$\therefore\ s = 10000 \times (12.416 - 1) = 114160\,(\text{圓})$$ 答

(二) 前ノ場合ニ於テ若シ650圓ヅツ每年首ニ預クルモノトスレバ其元利合計幾許ナルカ.

此場合ノ終價ハ(一)ノ答ノ一年後ノ元利合計ニ等シ.

$$\therefore\ 114160\,\text{圓} \times 1.065 = 121580\,\text{圓}$$ 答

(一),(二)ノ答ヲ各複利年金650圓ノ終價ト稱ス,(一)ハ期末拂ノ,(二)ハ期首拂ノ終價ナリ.

年金 約定の期間內每期に拂込み若くば受取る所の一定金高を**年金**又は**年賦金**と稱す.

複利年金終價の公式 年金a,年利率r,n年後の複利年金の終價をsとすれば(期末拂)

$$s = \frac{a}{r}\{(1+r)^n - 1\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

期首拂複利年金ノ終價ヲs'トスレバ

$$s' = s(1+r) = \frac{a}{r}\{(1+r)^{n+1} - (1+r)\}$$

〔例題〕 今後75年間每年末ニ金200圓ヅツ預クレバ其元利合計及利息幾許. 年利6分.

答 元利260190圓, 利息245190圓

〔例三〕 (一) 今後15年間每半年末ニ金300圓宛返濟スベキ負債アリ. 即金ニテ之ヲ皆濟セントセバ幾許ヲ拂フベキカ. 但シ年利6%ニシテ半年每ノ複利トス.

期末拂半年賦ノ年賦金300圓ノ最終拂込期日ニ於ケル終價ハ $\frac{300}{0.03}\{(1.03)^{30} - 1\} \cdots\cdots\cdots (1)$

求ムル金額(現價)Aノ今ヨリ後第30期末ニ於ケル複利元利合計ハ $A(1.03)^{30} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

(1)ト(2)トハ相等シカルベキニヨリ

$$(1.03)^{30}A = \frac{300}{0.03}\{(1.03)^{30} - 1\}$$

$$\therefore\ A = \frac{300}{0.03}\{1 - (1.03)^{-30}\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\log 1.03 = 0.0128372 \qquad \therefore\ 30\log 1.03 = 0.385116$$

$$-30\log 1.03 = \bar{1}.614884 = \log 0.41199$$

$$\therefore\ A = 10000 \times (1 - 0.41199) = 5880.1\,(\text{圓})$$ 答

(二) 前ノ場合ニ於テ期首拂年賦金トスレバ其負債ノ現價幾許.

此場合ノ現價ハ(一)ノ答ノ第一期末ノ元利ニ等シ.

$\therefore$ 5880.1圓×1.03=6056.5圓 答

複利年金現價の公式　年賦金a, 年利率r, n年後の複利年金の現價をAとすれば(期末拂)

$$A=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}\cdots\cdots\cdots(3)$$

期首拂複利年金ノ現價ヲA′トスレバ

$$A'=A(1+r)=\frac{a}{r}\{(1+r)-(1+r)^{1-n}\}$$

(三) 今後永續シテ毎半年末ニ金300圓ヅツ拂込ムベキ年賦金アリ. 即金ニテ一度ニ之ヲ拂込マントス,幾許ヲ支拂フベキカ. 但シ年利6分トス.

此年賦金ノ現價Aハ今後毎半年末ニ金300圓ヅツノ利子ヲ生ズベキ元金ニ等シカルベキニヨリ,

A×0.03=300　$\therefore$ A=10000圓 答

若シ期首拂トスレバ如何ニトイフニ, 期首ニ300圓拂フハ期末ニ300×1.03拂フニ等シキユヱ

A×0.03=300×1.03　$\therefore$ A=10300圓

〔5〕 複利法及び年金算公式

$$s=A(1+r)^n\cdots\cdots\cdots\text{複利法元利}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$s=\frac{a}{r}\{(1+r)^n-1\}\cdots\text{期末拂複利年金終價}\cdots(2)$$

$$A=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}\cdots\text{期末拂複利年金現價}\,(3)$$

〔**注意**〕 公式(2), (3)ハ次ノ如クニモ説明セラル.

期末拂永續年金aノ現價Pハ

$$P=\frac{a}{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

n年間据置キ, 第$(n+1)$年目ヨリ初マル期末拂永續年金aノ, 今ヨリ第n年末ニ於ケル現價Pハ$\frac{a}{r}$ニ等シキヲ以テ,其現今ニ於ケル現價A′ハ

$$A'=P\div(1+r)^n=\frac{a}{r}(1+r)^{-n}\cdots\cdots\cdots(1)$$

現今ヨリ始マル永續年金ノ現價　$A''=\frac{a}{r}\cdots\cdots(2)$

(2)—(1)ハn年間, 期末拂年金aノ現價Aナリ.

$$\therefore\ A=A''-A'=\frac{a}{r}-\frac{a}{r}(1+r)^{-n}=\frac{a}{r}\{1-(1+r)^{-n}\}$$

本節ノ公式中ノ五ツノ元

a	A	s	r	n
年金	現價	終價	利率	期間

ノ中何レノ一ツヲ未知數トスルモ,他ノ元ノ値ヲ知ルトキハ之ヲ解クコトヲ得. 但シ現價ト年金ト年數トヲ知リテ利率ヲ求ムル公式ハ實用多キニ拘ラズ未ダ發見セラレザル不能ノ問題ナリ,故ニ此場合ハ漸近法ニヨリテ其近似値ヲ求ムルモノトス.

問題　第五十集

1. 元金82.5圓, 年利6分, 期間3年, 複利期半年ノ元利合計ヲ求ム. 但シ元金ノ1圓未滿ノ部分ニハ利息ヲ附セザルモノトス.
2. 複利法ニヨリテ元利合計ガ十年目毎ニ元金ノ二倍トナルモノトスレバ, 元金百圓ノ百年後ノ元利合計幾許(諳算).
3. 年金額360圓,授受期ハ每半年末(半額ヅヽ),年利8%, 期間20年ノ年金ノ現價幾許.
4. 某農工銀行ヨリ土地ヲ抵當トシテ金15000圓ヲ借リ,今後30年間每年末拂ノ年賦金ニテ之ヲ償還セントス. 年賦金幾許(年利6分).

5. 某製造家アリ,其工場及ビ敷地ヲ擔保トシテ,農工銀行ヨリ金30000圓ヲ借入レタリ. 利率年8分, 3年据置8箇年賦トセバ,此年賦金幾許(答6576.2圓).
6. 年利6分, 金額1500圓ナル永續年金ノ現價ヲ求ム(期末拂及期首拂).
7. 5分利附第三回國庫債券ヲ93.8圓ニテ買入レ置キタルニ,恰モ3年後ニ償還セラレタリ. 利廻如何. 但シ每半期ニ受取リタル利子ハ銀行ニ預ケ入レ年6分ノ利子ヲ附スルモノトス(單利計算).
8. 正味(原量トモイフ)9貫目入リノ生絲12梱アリ,横濱生絲檢査所ニ於テ其水分ヲ檢査シタルニ15%(正味重量ノ)ヲ含ムモノト定メラレタリ. 正量幾斤ナルカ(斤以下二位). 又相場100斤ニ付845圓ナリトセバ,1梱幾許.

　生絲ガ當然含ムベキ水分ハ無水量ノ11%ナリ. 故ニ之ヨリ多キカ,又ハ少キモノハ此水分ニ訂正シテ取引スルヲ正當トス,之ヲ正量トイフ(答636.86斤, 448.44円).

9. 某貿易商アリ, 英國ニテ天竺布15梱(1梱100反入)ヲ1反ニ付キ3志1片替ニテ買入レ,之ヲ輸入シタルニ,運賃,保險料其他ノ諸掛26磅15志6片ニシテ輸入税ハ1方碼ニ付9厘(總量28800方碼),消費税ハ從價ノ1割,外ニ陸揚費,車力賃1梱ニ付50錢ヲ要シタリ. 今之ヲ賣リテ諸掛リ込ミ仕入値段ノ15%ヲ利センニハ,1反幾許ニ賣ルベキカ. 但シ1磅(=20志=240片)ハ9圓82錢ト假定ス.

10. 原價百斤ニ付930圓ノ生絲1萬斤ヲ輸出スルニ百斤ニ付23.625圓ノ輸出税ト9.6圓ノ運賃ト百弗ノ輸入税トヲ要シ,且原價ヲ以テ海上保險ニ托シ6.5分ノ保險料ヲ拂ヘリ. 之ヲ百斤ニ付710弗(1弗=2圓)ニ賣拂ヒテ諸掛リ3717.5圓ヲ支出スルトキハ純益幾許.

11. 今ヨリ30年前ニ,坪2圓ニテ買入レタル地所アリ. 今之ヲ坪30.44圓ニ賣ラバ年利幾許(毎年ノ複利ニ見積ル).　　(答 9分5厘)

12. (一) 今後1年間毎月末金35圓ヅツ預クレバ其一年末ノ終價(單利年金の終價)幾許(年6%). (二) 前ノ答數ヲ年金(複利)トシテ幾年積立ツレバ其終價15萬圓ヨリ多クナルベキカ.

13. 今年生レタル子供ノ成年後ノ事業資金トシテ向フ20年間毎年末等額ノ金ヲ積立テ行キ,其後15年間据置キ,子供ガ滿35歲トナルトキ元利合計1.5萬圓ヲ得ントス. 年利6%トシテ積立金年額ヲ求ム. 又答ノ圓位未滿ヲ四捨五入スレバ其終價ト1.5萬圓トノ差如何.

14. 公債24.5億圓ヲ毎年末1.5億圓ヅツ消却セバ全部ヲ消却スルニ幾年ヲ要スルカ(年利5%).

15. 或縣ニ於テ橋ヲ架ケントスルニ木橋ナラバ1.5萬圓ニシテ15年毎ニ架ケ替フルヲ要シ,鐵橋ナラバ12萬圓ヲ要シ60年保存スルコトヲ得ベシトイフ. 今其代金ヲ保存年限間ニ年賦返却(毎期末拂)スルモノトセバ年賦金各幾許. 但シ年利$6\frac{1}{2}\%$トス(答 1595.3圓 7982.4圓).

16. 高等工業學校ノ歲入ヲ政府支出金,授業料,雜收入ノ合計ヨリ成ルトシ甲高工ノ歲入中其7割5分ハ政府支出金ニシテ,政府支出金ノ1割2分ガ授業料ニ當レリ. 今甲乙高工ノ

相當スル費目ヲ比較スルニ政府支出金ハ甲ハ乙ヨリ2割5分多ク,授業料ハ甲ハ乙ヨリ5割多ク,雜收入ハ甲ハ乙ヨリ11600圓多シ,而シテ乙高工ノ歳入ハ95000圓ナリ. 甲高工ノ歳入如何(答13萬圓).

附　錄

附　　錄

目　次

附　　錄

〔一〕 摘　　要

生徒諸子は各篇の摘要によりて代數學の梗概を復習すべし. 計算の結果を對合する便利を謀りて, 答を各段の終りに掲げ置きたり.

1. 第六篇 (開平及び開立) 摘要

1. 指數の定則を述べよ (31〔1〕).

2. $(2^2)^3 \sim 2^{(2^3)}$　　$\dfrac{1-x^4}{x^6}+\dfrac{1-x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}$　　$\dfrac{(4a^3b^2c^2)^2}{(6x^2y^3z^4)^3}\div\dfrac{5(2a^2bc)^3}{6(3xy^2z^5)^4}$

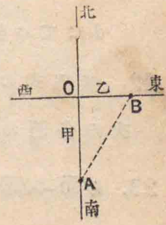
3. $(x+1)^2$ $(x+1)^3$, $(x+1)^4$ の展開式を分離係數法にて記せ (4 頁).

4. $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2$ の展開式を x^3 の項まで求む (4 頁〔3〕).

5. $a^2+b^2=(a+b)^2-(\quad)$　$a^3+b^3=(a+b)^3-(\quad)$ (驗 $a=15$, $b=5$ として).

6. 次の各の方程式に就て x の値を求む (16 頁例二).

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$　　$(x^2\div 25+16)^2\times 4=2500$



7. 二數の積 1296, 其二數の差 30 ならば各數幾許 (17 頁〔2〕).

8. 二數の積 2.59, 和 3.25 なれば各數幾許

9. 二船あり同時に同港を出帆して, 甲は正南へ 4.5 里, 乙は正東へ 2.8 里を航行せり. 甲乙相距ること幾許 (19 頁〔3〕).

10 $\sqrt{a+b}$ と $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ との各が有理數となる樣に a, b の一組の値を求む(18頁注意).

11. $4y^4-20y^3+37y^2-29y+5$ を平方に括れ(驗 $y=10$).

12. $\sqrt{1-4+m+n+9\ (x\text{の降冪})}$ が有理式となる樣に m, n の値を定めよ(20頁20).

13. 立方九九を復唱せよ(21頁).

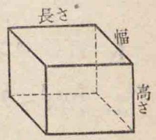
14. 次の各の立方根を首商の一桁だけ求む(24頁位取り).

$$300 \quad 30 \quad 3 \quad 0.3 \quad 0.03 \quad 0.003 \quad 0.0003$$

15. 開立の標準の形とは如何(23頁).

16. $\sqrt[3]{1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6}$　(驗 $x=0.1$)

17. 體積5760立方寸の直六面體あり, 幅と長さとの比 8:10, 幅と高さとの比 8:9 なり. 各稜幾許(31頁5).



18. $\sqrt[4]{2176782336}$　$\sqrt[6]{128100283921}$ (34頁例三).

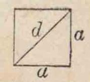
19. $\sqrt[4]{a}=216$ なるとき, $\sqrt[6]{a}$ の値を求む. (前題第一問)

20. 省略開平方の規則を述べよ(32頁).

21. 一邊が a なる正方形の對角線 d を表す式は

$$d=a\sqrt{2}$$

d にて a を表すことを求む



22. 無理式の計算に關する公式を復誦せよ(41頁〔6〕).

次の各題の式を簡單にせよ(23—26).

23. $\sqrt{50}-\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{8}$　$\sqrt{48}-\sqrt{5\frac{1}{3}}-\sqrt{1\frac{1}{3}}$

24. $(\sqrt{10})^3$　$\sqrt{\frac{8a}{15x}}\cdot\sqrt{\frac{10ax}{3y^2}}$　$\frac{2}{\sqrt{5}}\div\frac{3}{5}\sqrt{8}$　$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$

25. $\sqrt[5]{32^2}$　$\sqrt[3]{\sqrt{125}}$　$(\sqrt{\sqrt[3]{2}})^9$　$\sqrt[3]{81^2}\div\sqrt{27}$

26. $(7-2\sqrt{6})(\sqrt{2}+2\sqrt{3})$　$(3\sqrt{5}+2\sqrt{11})(3\sqrt{5}-2\sqrt{11})$

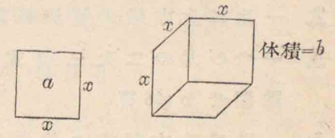
27. 次の各式の近似値を小數第二位迄求む(39頁例四).

$$\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \qquad \frac{32\sqrt{5}}{33} \qquad \frac{80+51\sqrt{15}}{240}$$ (32頁例二)

28. 次の各式の分母を有理化せよ(40頁13).

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \qquad \frac{110}{4+\sqrt{5}+\sqrt{11}}$$

29. 立方體の一つの表面積が a, 其體積が b なるとき, 其一つの稜を比較したる次の等式を有理關係式に導け(42頁例五).



$$\sqrt{a}=\sqrt[3]{b}$$

30. 次の各の方程式を解け

$$5\sqrt{x}+\sqrt{3x}=22 \qquad \sqrt[3]{a^{17-x}}=a^{2x-18}$$

答　2. $2^6\sim2^8=192$　$\frac{1+x^2-x^4}{x^6}$　$\frac{9bcz^8}{10x^2y}$

4. $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$　5. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$　6. 4, 15.　7. 54, 24　8. 1.85, 1.4

9. 5.3里　11. $(2y^2-5y+3)^2+(y-4)$　12. $(10, -12)$ 或は $(-2, 12)$

14. 6, 3, 1, 0.6, 0.3, 0.1, 0.06.　16. $1+x+x^2$　17. 20寸, 16寸, 18寸.

18. 216, 71.　19. 36.　21. $a=\frac{d\sqrt{2}}{2}$.　23. $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$.

24. $10\sqrt{10}$, $\frac{4a}{3y}$, $\frac{\sqrt{10}}{6}$, $\sqrt[6]{x^5}$.　25. 4, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt[6]{3}$.

26. $10\sqrt{3}-5\sqrt{2}$, 1. **27.** $\sqrt{3}=1.73$ 强, 2.17 弱, $\dfrac{80+197.522}{240}=1.16$ 弱. **28.** $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, $5\sqrt{11}+11\sqrt{5}-4\sqrt{55}$

29. $a^3=b^2$ **30.** $28-10\sqrt{3}$, 8.

2. 第七篇 (二次方程式) 摘要

1. 方程式の定義を復誦せよ(卷上摘要13).

2. 一元二次方程式解法の規則を述べよ(49頁〔1〕).

3. 一つの元の二次三項式を平方に括るとは如何, 例を以て說明せよ(48頁).

4. 一元二次方程式の根の公式を復誦せよ(69頁〔5〕).

5. $ax^2+bx+c=0$ を左邊を平方に括りて解け(69頁).

6. 次の各を解け〔(二)は根を小數第三位迄求む〕.

(一) $2x^2(x-2)=(x^2-4)(x-5)$ (二) $3x^2-4x=5$ (49頁).

7. 次の各方程式より正の整數の根を得る樣に( )の中に入るべき數を求む(幾通りも). (57頁33).

(一) $x^2-15x+(\quad)=0$ (二) $x^2-(\quad)x+144=0$

8. $4x+48$ を y, $20x-x^2$ を z とす. x が 1, 3, 4, 8, 10, 12, 13, 15 の時 y と z との大等小の關係如何. 又圖に表せ(52頁例).

9. (一) 與へられたる三つの數 l, m, n を根に有する方程式を作ること(55頁〔2〕).

(二) x の二次式を作りて, x の値が 2, 或は 3 なるとき, その式の値は共に 0 となり, x の値が 4 なるとき, その式の値が 6 となる樣ならしむることを求む(125頁15).

10. (一) 虛數の標準形とは如何, 例を以て說明せよ(59頁).

(二) 次の各式の値を計算せよ(61頁6—10).

$(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$ $\dfrac{1-i^3}{1-i}$ $(\sqrt{10}+3i)\sqrt{1-6i\sqrt{10}}$

11. 次の各を因數に分解せよ(73頁例二).

(一) $7x^2-2x+5$ (二) $x^2-2xy+mx+2y-3$

12. p, q を如何なる數とすれば, x^6+px+q は x^2+4x+3 にて割り切るるか(卷上摘要19).

13. 次の各の方程式を解け.

(一) $(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0$ (二) $(p^2-q^2)(x^2+1)=2(p^2+q^2)x$

(三) $\dfrac{2x-3}{x-2}+\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{3x+11}{x+1}$ (四) $\left(\dfrac{1}{3x-1}\right)^2=\left(\dfrac{3}{5x+5}\right)^2$

(五) $x^2+x+3\sqrt{2x^2-3x+2}=\dfrac{5}{2}x+7$ (68頁8)

(六) $x^2-273x+3626=0$ の兩根の差を求む(84頁20).

14. 次の方程式の根の種類を判別せよ(76頁例三).

$(a^2+d^2)x^2-2(ab+cd)x+(b^2+c^2)=0$ $x^2+2(u-1)x+5u-9=0$

15. (一) $2x^2-3x-4=0$ の根を p, q とす, $2p^2-q$, $2q^2-p$ を根とする方程式を作れ(82頁例六).

(二) $x^2-9x+a=0$ に於て a に如何なる値を與ふれば二根の立方の和が零となるか(82頁).

16. (一) $(k+6)x^2-3(k-2)x=1-k$ が等根を有する樣に k の數値を定めよ〔78頁(三)〕.

(二) $(x^2-2x+1)+k(x^2+3x+2)$ が完備なる平方となる樣に k の値を定めて後之を平方に括れ.

17. 次の各式の極大或は極小を求む(83頁11)

(一) $7x^2-2x+5$ (二) $(3-x)(5+x)$

(三) $\dfrac{9}{x-1}-\dfrac{4}{x-6}$ (四) $2x-\sqrt{x^2-4x-23}$

18. 二次の聯立方程式解法の規則を復誦せよ(100頁).

次の各の聯立方程式を解け.〔(二)は107頁注意〕

(一) $\begin{cases} \dfrac{4x+y-1}{2x+y-1}-\dfrac{4x+y-12}{2x+y-12}=3\dfrac{2}{3} \\ 2x+y=13 \end{cases}$ 〔92頁〕 (二) $\begin{cases} (2x-y+3)(5x+3y-29)=0 \\ (x-3y+14)(x+4y+1)=0 \end{cases}$

(三) $\begin{cases} 3x^2+2xy-8y^2=0 \\ x^2+3xy+2y^2=0.7 \end{cases}$ (四) $\begin{cases} (5x+3y)(3x-5y)=72 \\ (4x-y)(x+4y)=77 \end{cases}$

對稱方程式とは如何,例を以て說明せよ(102頁).

(五) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$ (六) $\begin{cases} x+y=444 \\ \sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{y+14}=12 \end{cases}$ 〔105頁〕

(七) $\begin{cases} x:y=y:z \\ x+y+z=19 \\ x^2+y^2+z^2=133 \end{cases}$ (八) $\begin{cases} x(y-z)+6=0 \\ y(z-2x)=5 \\ z(2x-3y)+63=0 \end{cases}$ 〔115頁(二)〕

19. $x^2-(a^2+ab-6b^2)x+20(ab-2b^2)=0$ の二根が16と5となる樣に a, b の値を定めよ.

20. $\dfrac{ay}{2b}+\dfrac{a+x}{bx}=2xy$ が $\left(x=\dfrac{3}{2},\ y=2\right)$, $\left(x=3,\ y=\dfrac{4}{9}\right)$ なる根の組を有する樣に a, b の値を定めよ.

21. (一) 面積が $12+6\sqrt{3}$ なる正方形の一邊を表す式を簡單なる形にて答へよ(120頁)

$\boxed{12+6\sqrt{3}}$

(二) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ を小數二位(124頁).

(三) $x=\sqrt{6-\sqrt{35}}$ によりて x と有理數との有理關係式を求む(122頁).

22. (一) $x=\omega$ なれば $x^5-2x^4-x^3-3x^2$ の値如何(128頁).

(二) $(x-a)(x-a\omega)(x-a\omega^2)$ を展開せよ.

23. (一) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ を因數に分解せよ.(82頁注意).

(二) $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ 〃

(三) $x+\dfrac{1}{x}=1.5$ なれば $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$, $x^4+\dfrac{1}{x^4}$ の値如何

24. (一) $2x^3-x^2-15x+18=0$ (127頁26) を解け.

(二) $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$

25. 日給の相異なれる甲乙二人の職工共力して,一つの仕事に從事し,其間甲は休まず,乙は6日間休みたり,而して此期間の終りに於て,甲は19.2圓,乙は10.8圓を受取れり.若し乙が1日も休まずして,却て甲が6日休みたりとすれば兩人は同一の賃金を受取るべかりしと云ふ 此期間の日數及兩人の日給各幾許(三十七18).

26. 如何なる數を記數法底數とすれば九十三は333と表さるるか(90頁37).

27. A, B, C は此順にある或街道の三驛にして,AB間は54哩,BC間は24哩とす.或驛傳競走に於て一つの組の第一の者甲のAB間を走る一時間の速さと,其組の第二の者乙のBC間を走る一時間の速さとの和を18哩とすれば,甲乙の速さを夫夫幾許に定むれば最小の時間にてAよりCに達せらるべきか.

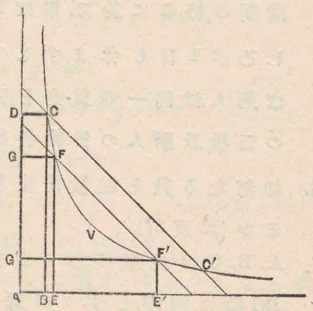
28. 三角形ABCの邊ABは x 尺,邊ACは $(x+2)$ 尺にして其周は24尺なり.x が幾許なれば $\angle A$ は鈍角或は直角或は鋭角となるべきか.

29. 川蒸汽船が $3\dfrac{1}{2}$ 哩の間を往復するに $1\dfrac{2}{3}$ 時を要す.水流の速さを每時2哩とすれば靜水に於ける速さ幾許.

30. 72圓にて買ひ得べき上米と,中米との分量の差5斗なり.若し1斗の價各20錢宛騰貴せば,此差1俵(4斗)となるべしと云ふ.1斗の價各幾許なるか.

31. 甲乙二人池の周圍を一周するに,同時に同一點より反對の向きに出發せり. 甲は3時間にて一周し了り,乙は途中甲に出遇ひてより4時間にして出發點に歸着せりといふ. 乙が池を一周するに要したる時間を問ふ.

32. 矩形の地面ABCDあり. 縱64間,横9間なり. 縱を何間減じ,横を何間増すときは其面積に變動なくして周圍が26間減るべきか(125頁14).

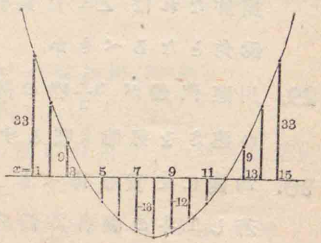


曲線CFVF'C'は直角Aを共有する等積なる矩形AC, AF, AF'等のAに對する頂點C, F, F'の軌跡なり(此曲線は定規と兩脚器とのみにては畫かれざるものなり) CC'は縱,横の和73間なる矩形ACの頂點Cの軌跡なり.

答 **6.** (一) 2, $\frac{-3\pm i\sqrt{31}}{2}$ (二) -0.786, 2.120 **7.** (一) 14, 26, 36, 44, 50, 54, 56. (二) 145, 74, 51, 40, 30, 26, 25, 24.

8. $y-z=(x-8)^2-16=(x-4)(x-12)$

$$\begin{cases} x \text{ が } 1,\ 3,\ 13,\ 15 \text{ なれば } y>z \\ x \text{ が } 4,\ 12 \quad \text{〃} \quad y=z \\ x \text{ が } 8,\ 10 \quad \text{〃} \quad y<z \end{cases}$$



9. $3x^2-15x+18$. **10.** 4, i, 19.

11. (一) $\frac{1}{7}(7x-1+i\sqrt{34})(7x-1-i\sqrt{34})$

(二) $\frac{1}{4}(2x-2y+m+\sqrt{4y^2-4(m+2)y+m^2+12})$

$\times(2x-2y+m-\sqrt{4y^2-4(m+2)y+m^2+12})$

12. $p=364$. $q=363$ **13.** (一) 2, 4 (二) $\frac{p+q}{p-q}$, $\frac{p-q}{p+q}$ (三) 3, $\frac{7}{5}$ (四) $-\frac{1}{7}$, 2 (五) 2, $-\frac{1}{2}$ (六) 245 **14.** (一) $D=-(ac-bd)^2$ 故に $a:b=d:c$ なれば等根,然らざれば虚根. (二) $u<2$ 或は $u>5$ なれば實根, $u=2$ 或は $u=5$ なれば等根, $2<u<5$ なれば虚根.

15. (一) $4x^2-44x-43=0$ (二) 27. **16.** (一) 10, $\frac{6}{5}$ (二) $k=0$ なれば $(x-1)^2$, $k=24$ なれば $(5x+7)^2$ **17.** (一) $x=\frac{1}{7}$ なれば極小値 $\frac{34}{7}$ (二) $x=-1$ なれば極大値16 (三) $x=16$ の時極大値0.2, $x=4$ なるとき極小値5 (四) $x=8$ の時極小値13. **18.** (一) -2, 17 (二) (1, 5), $\left(-\frac{13}{9}, \frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$, (7, -2) (三) (0.4, 0.3), (-0.4, -0.3) (四) (3, 1), (-3, -1), (i, $-3i$), ($-i$, $3i$) (五) (2, 3), (3, 2), (1, -6), (-6, 1) (六) (115, 329), (333, 111) (七) (9, 6, 4), (4, 6, 9) (八) (3, 5, 7), (-3, -5, -7).

19. ($a=9$, $b=4$), (-9, -4). **20.** $a=3$, $b=1$ **21.** (一) $3+\sqrt{3}$ (二) 1.41强 (三) $x^4-12x^2+1=0$ **22.** (一) 1 (二) x^8-a^8 **23.** (一) $-3(a-b)(b-c)(a-c)$ (二) $3(y+z)(x+y)(x+z)$ (三) 0.25, -1.125, -1.9375

24. (一) 2, -3, $\frac{3}{2}$ (二) 0, -8, 1, 3 **25.** 24日, 80錢, 60錢.

26. 5. **27.** 甲10.8哩, 乙7.2哩. **28.** $x>=<6$ に從って $\angle A$ は鋭角,或は直角,或は鈍角. **29.** 毎時5哩. **30.** 1.8圓, 1.6圓. **31.** 6時. **32.** 縱を16間減じ横を3間増す,或は縱を52間減じ,横を39間増す.

3. 第八篇 (比. 比例) 摘要

1. 加比の理及び合比の理とは如何 (42 〔1〕, 〔2〕).

2. 反比に關する定理を述べよ (42 〔3〕).

3. 次の各は先づ未知元の比(或は連比)を求めて解け.

(一) $\begin{cases} 5x-4.9y=1 \\ 3x-2.9y=1 \end{cases}$ (二) $\begin{cases} (x-2y):(2x-3z):(2y+3z)=1:3:5 \\ 21x+31y+41z=270 \end{cases}$

(三) $\begin{cases} \dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1 \\ \dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{5}{z}=4 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{8}{y}+\dfrac{5}{z}=4 \\ \dfrac{9}{x}+\dfrac{12}{y}-\dfrac{10}{z}=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(y+z):y(x+z):z(x+y)=a:b:c \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=a+b+c \end{cases}$

6. 互に正比例する二組の數の定義を述べよ (43).

7. 二組の數が互に反比例すれば對應する二數の積は不易なることを證明せよ〔142 頁〕

8. $a:b=c:d$ なるとき,次の比例を證明せよ.

(一) $la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd$

(二) $\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}\right):a=\left(\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}\right):c$

(三) $\sqrt[3]{a^3+c^3}:\sqrt[3]{b^3+d^3}=\sqrt{ac+\dfrac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\dfrac{d^3}{b}}$

9. 相異なれる二つの正數 p, q の相乘平均數 $\sqrt{pq}$ は其相加平均數 $\dfrac{p+q}{2}$ より小なることを證明せよ (四十, 1).

10. a, b, c, d が連比例をなすとき.次の各を證明せよ.

(一) $a+b:b+c=b+c:c+d$

(二) $(a^2-b^2+c^2):\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)=b^4:1$

(三) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

11. $\dfrac{m^2}{a}+\dfrac{n^2}{b}$ と $\dfrac{(m+n)^2}{a+b}$ とは孰れが大なるか. 〔$a, b>0$, 四十二 12〕.

12. 次の各方程式を解け.

(一) $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}=\dfrac{1}{2}$ (三十八 4)

(二) $\dfrac{3x^4+x^2-2x-3}{3x^4-x^2+2x+3}=\dfrac{5x^4+2x^2-7x+3}{5x^4-2x^2+7x-3}$ (三十八 6)

13. $(a+2b+3c+4d)(a-2b-3c+4d)=(a-2b+3c-4d)(a+2b-3c-4d)$ なれば $2a:3b=c:d$ なることを證明せよ (44 例 三).

14. $\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{az+bx}=\dfrac{x+y}{ax+by}$ なれば,各比の價は $\dfrac{2}{a+b}$ に等し(四十16).

15. $\dfrac{4x+2y+8}{2x-y+3}=4$ なれば x の增しは y の增しに比例することを證明せよ (四十一 11).

16. x は y, z の各に正比例し, $y=5$, $z=7$ なるとき $x=9$ なり. $x=54$. $z=10$ とすれば, y 幾許 (46 〔6〕).

17. $4x+10y \propto 3x+y$ なれば x は y に比例す (四十一 例).

18. (一) $z \propto \dfrac{x}{y}$ の意義を述べよ (46).

(二) z が x に正比例し, y に反比例すれば, $z=\dfrac{kx}{y}$ なり.

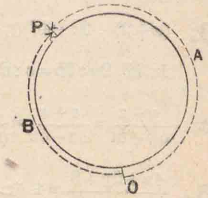
19. 銀と銅との合金甲乙二塊あり,甲に於ては銀と銅との比 11:1, 乙に於ては其比 7:2 なり. 此二塊より分量を如何なる比に取りて熔解すれば其中に含まるる銀と銅との比が 7:1 となるべきか (四十二 5).

20. 品位が夫夫0.85, 0.55, 0.25なる三種の金塊より其如何なる分量を取りて熔和すれば品位0.60の金塊を得べきか (171頁)

21. 目方の同じ金銀の價の比を85:3とし,金3,銀5の割合なる合金の一塊42圓なるあり. 之と同じ目方にして金1,銀6なる合金の一塊は價如何〔三十九6, 42例二(二)〕.

22. 南北兩軍の戰鬪に於て南軍の北軍に對する兵數の比は7:5,戰死者の數の比は3:1,生存者の數の比は4:3なりしと云ふ. 各軍に於ける生還者と戰死者との比各幾許なるか(三十九6).

23. 速さの比が$(x+4:3)$なる甲,乙二人池の周圍を一周するに同時に同一點より反對の向きに出發し,途中にて出遇ひ,それより甲は$(3-x)$分,乙は4分時間にして出發點歸に着せりといふ. xを求む(四十二33).



24. 壕を掘るに其費用xは掘り出したる土の分量vと,深さhとに正比例す. 幅3尺,深さ7尺の濠長さ1間を掘る費用90錢とすれば,xと,vと,hとの間の關係式如何(46例一).

25. 球の體積は半徑の立方に比例す.

(一) 半徑が3, 4, 5なる三つの球の體積の和に等しき體積を有する一つの球の半徑を求む(四十一4).

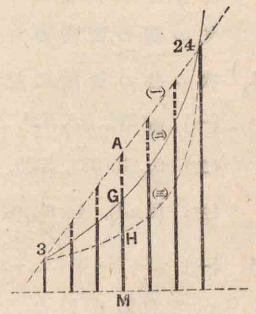
(二) 半徑2寸の實球(ガラスの)を吹きて厚さ二分の空球を作れば外半徑幾許となるべきか.

答 **3.** (一) 10, 10 (二) 6, 2, 2 (三) 3, 2. **4.** 3, 4, 5.

5. $\frac{}{-a+b+c}$, $\frac{1}{a-b+c}$, $\frac{1}{a+b-c}$. **11.** 第一が大,但し$m:n=a:b$なれば相等し. **12.** (一) $\frac{14}{13}$ (二) 0, 3, 8. **15.** $(x+1):y=3:2$ $\therefore x$の增しはyの增しに比例す. **16.** $35x=9yz$, $y=21$. **19.** 7:3. **20.** 8:5:5, 一般に$m+7n:5m:5n$〔m, nは任意の整數〕, 例へば$m=3$, $n=1$とすれば2:3:1 **21.** 18圓31錢强. **22.** 32:3, 24:1 **23.** 2, −1. −6. **24.** $x=\frac{5}{49}vh$. **25.** (一) 6 (二) 3.75寸强.

4. 第九篇(級數)摘要

1. 等差級數の標準形及び總和の公式如何.
2. 等比級數の定義,其標準形,總和の公式如何.
3. 本篇の公式〔5〕,〔6〕,〔7〕を復誦せよ.
4. 200より400までの整數の內にて7の倍數なるものの總和如何(四十三23).
5. 17, 15, 13, ……なるA.P.のn項の和如何.
6. 初項20,公差−3なる等差級數にて,(一)何項迄の和70となるか, (二)何項迄の和正の數なるか(47例二,四十三22).
7. 3と24との間へ,(一)五つのA.M.を,(二)五つのG.M.を,(三)五つのH.M.を挿入せよ
8. 6, 16の間に二數を挿入し,初めの三數をしてA.P.をなさしめ,後の三數をしてG.P.をなさし



むることを求む(四十四 26).

9. 次の各計算を行へ(48 例三).

(一) $1-0.\dot{5}1\dot{3}\left(=1-\dfrac{19}{37}\right)$　　(二) $0.3\dot{1}\dot{5}-0.24\dot{1}6\dot{2}$

(三) $2.\dot{1}\dot{5}$ に 4, 12, 24, 240 の各を掛けよ.

(四) $272.\dot{4}\dot{5}$ を 3, 15, 27, 135 の各にて割れ.

(五) $0.32\dot{5}0\dot{4}\div0.0\dot{1}\dot{8}$

10. 無限等比級數あり,初項と第二項との和は 1 にして,此級數の各項は其次の項より始まる無限級數の和の 2 倍に等しとす. 初項と公比とは如何(四十四 20).

11. (1), (3, 5), (7, 9, 11), (13, 15, 17, 19), …… を $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ と表す. (一) u_n を, (二) u_n 迄の總和を求む(四十五 16).

12. 或人甲地を發し乙地に向ひしに第 1 日には若干里を步み第 2 日よりは每日若干里宛の行程を增し 10 日にして乙地に達せり,若し最初の行程を以てせば 15 日を要すべしと云ふ. 若し又最終日の行程を以てせば幾日を要すべきか(四十三 35)

13. 圓に內接する正方形に內切圓を畫き,それに又內接正方形を畫き,內切圓を畫くといふ樣にして無限に至らば,總ての圓の面積の和,正方形の面積の和及其比如何.

14. 次の各の級數に就て n 項の和を求む.

(一) $x, 3x^2, 5x^3, 7x^4, \ldots\ldots$　　(48 例五).

(二) 3, 33, 333, 3333, ……　驗 $n=3$　(四十四 17).

(三) $(2\times4), (4\times6), (6\times8), \ldots\ldots$　〃　(49 例二).

15. (一) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ の兩邊へ $(n+1)^2$ を加へて右邊を積の式に整頓せよ.　(49 例二)

(二) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$ の兩邊へ $(n+1)^3$ を加へて右邊を積の式に整頓せよ.

16. $4x+y=50$ に於て x が等差級數をなせば, y も等差級數をなすことを證明せよ.　(四十三 26).

17. a^2, b^2, c^2 が等差級數をなせば(例へば, $7^2, 17^2, 23^2$), $b+c, c+a, a+b$ は調和級數をなすことを證明せよ. (四十五 18)

18. a, b, c が調和級數をなせば, (一) $2a-b:b=b:2c-b$

(二) $\dfrac{b}{b-a}+\dfrac{b}{b-c}=2$　なることを證明せよ.

19. 等比級數の n 項の和を s, 積を p, 逆數の和を q とすれば $p^2q^n=s^n$ なることを證明せよ.

20. 等差級數の初項以下第 n 項迄の和を s_n とす, $s_1, s_2, s_3, \ldots$ が次の如き場合の s_n を求む〔49 例二注意〕.

(一) 1, 6, 15, ……　　(二) 1, 3, 6, ……

答 **4.** 8729　**5.** $n(18-n)$　**6.** (一) 五項　(二) 15 項未滿の和恒に正.　**7.** (一) $3, \frac{13}{2}, 10, \frac{27}{2}, 17, \frac{41}{2}, 24$ (二) $3, \pm3\sqrt{2}, 6, \pm6\sqrt{2}, 12, \pm12\sqrt{2}, 24$ (複號は共に＋或は共に－を取るものとす) (三) $3, \frac{144}{41}, \frac{72}{17}, \frac{16}{3}, \frac{36}{5}, \frac{144}{13}, 24.$

8. (6, 9, 12, 16) 或は (6, 1, −4, 16)　**9.** (一) $0.\dot{4}8\dot{6}$ (二) $0.07\dot{3}5198\dot{8}$ (三) $8.\dot{6}\dot{0}, 25.\dot{8}\dot{1}, 51.\dot{6}\dot{3}, 516.\dot{3}\dot{6}$ (四) $90.\dot{8}\dot{1}, 18.1\dot{6}\dot{3}, 10.\dot{0}\dot{9}, 2.0\dot{1}\dot{8}$ (五) $17.8\dot{7}\dot{4}$　**10.** $a=\frac{3}{4}, r=\frac{1}{3}.$　**11.** (一) n^3 (二) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

12. $7\frac{1}{2}$ 日.　**13.** $2\pi r^2, 4r^2, \pi:2.$ r は第一圓の半徑.

14. (一) $\frac{1}{(1-x)^2}\{x+x^2-(2n+1)x^{n+1}+(2n-1)x^{n+2}\}$

(二) $\frac{1}{27}\{10^{n+1}-9n-10\}$ (三) $\frac{4}{3}n(n+1)(n+2)$

15. (一) $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ (二) $\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$

20. (一) $n(2n-1)$ (二) $\frac{1}{2}n(n+1)$.

5. 第十篇 (一般の指數, 對數, 歩合算) 摘要

1. 冪の指數が分數及負の數なる冪の意義を述べよ (50).

2. 次の各式を計算せよ (51 例一, 例二).

$$\left(5\frac{1}{16}\right)^{-0.75} \qquad \frac{\sqrt{x^{-\frac{5}{3}}y^3z^{-\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}y^4z^{-1}}} \qquad \frac{4y^{\frac{2}{3}}-8y^{\frac{1}{3}}-5+10y^{-\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{2}{3}}}{3y^{-\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{12}}-2y^{\frac{5}{12}}}$$

3. 次の各の方程式を解け (四十六 16, 22).

$$x^3+x^{\frac{3}{5}}=(2^6+2^{-6})x\sqrt[5]{x^4} \qquad \begin{cases} y-(5-x^2)^{\frac{1}{2}}=(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ 3(5-x^2)^{\frac{1}{2}}=2(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

4. 對數の定義, 對數の性質を復誦せよ (52, 53).

5. 常用對數に於ける指標の法則を復誦せよ (53).

6.

128	0.0625	$\sqrt[3]{32}$
底數		
	底數	
		底數

128, 0.0625, $\sqrt[3]{32}$ の各數を底數としたる時の他の數の對數を求む (52 例一).

7. $\left.\begin{array}{l}\log 3.141=0.4970679 \\ \log 3.142=0.4972062\end{array}\right\}$ を與へて $\log 3.14159$ 及び $\log^{-1}2.4971509$ を求む (54 例一).

8. 對數表によりて次の各式の値を計算せよ (54 例二).

$$a=\frac{3419.7}{3467.8} \qquad b=\frac{0.0875}{9.8304}\sqrt{\frac{78}{0.007615}} \qquad c=\frac{\sqrt[3]{0.047\times(0.138)^4}}{(0.2891)^3\times\sqrt{0.928}}$$

9. $27^{10}\div 16^6$ は幾桁の整數部を有するか (53 例四).

但し $\log 2=0.301$ $\log 3=0.477$

10. $\log_{15}\sqrt{54}-\log_{15}\left(\frac{7\frac{1}{5}}{27}\right)^2+\log_{15}\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ を求む〔52 例二 (三)〕.

11. $\log_a M=\log_b M\times\log_a b$ なることを證明せよ (52 例一).

次の各題の方程式を解け (12–13). (54 例三, 51 例三).

12. $x^{\log x}=1000x^2$ $\qquad 5^{x(x-1)}\times 2^{x(x+1)}=64\times 10^{2x}$

13. $\begin{cases} 3^x.4^y=15552 \\ 4^x.5^y=128000 \end{cases} \qquad \log(z-1)-\log(z^2-5z+4)+1=0$

14. 複利及び年金算に關する公式を復誦せよ (56).

15. 7 分利附債券時價 108 圓にして, 償還期限を 15 箇年とし, 利子金額の利率を年 4 分とすれば此利廻如何.

16. 或人金 4 萬圓を年利率 6 分にて借り, それより半年毎に一定の金額を返附し 12 年間に全部を償却せんとす, 然らば毎半年末に幾許を返附して可なるか (五十4).

但し $\log 103=2.0128372$

$\log 2032=3.30792$ $\qquad \log 2033=3.30814$

答 2. $\frac{8}{27}$, $\frac{\sqrt[6]{y}}{x^2}$, $-2y^{\frac{1}{4}}+3y^{-\frac{1}{12}}+y^{-\frac{[illegible]}{12}}$

3. $\left(0,\ 32,\ \frac{1}{32}\right)$, $\left\{\left(2,\ \frac{5}{2}\right),\ \left(-2,\ \frac{5}{2}\right)\right\}$

6.

$128=2^7$	$0.0625=2^{-4}$	$\sqrt[3]{32}=2^{\frac{5}{3}}$
底 數	$-\frac{4}{7}$	$\frac{5}{21}$
$-\frac{7}{4}$	底 數	$-\frac{5}{12}$
$\frac{21}{5}$	$-\frac{12}{5}$	底 數

7. 0.4971495, 314.160

8. $a=0.98613$, $b=0.90084$, $c=0.0056229$

9. 五桁 10. 2

12. $\{1000, 0.1\}$, $\{3, -\log 4\}$

13. $\{x=5. y=3\}$, $z=14$ {1 は根にあらず} 15. 0.0547 16. 2362 圓.

〔二〕補習問題

此答は問題の終りにあり.

1. $\sqrt{(1+x)^2}+\sqrt{(1-x)^2}$ ヲ簡單ニセヨ (驗 $x=\frac{1}{2}$, -2, 3).

2. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} \qquad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

〔例〕 $\frac{1}{\pi}$ ヲ小數四位迄求ム. $\pi=3.14159265......$

商ノ桁數ガ十桁ヲ超エザルトキハイツモ次ノ仕方ニテ求メラル. (省略割り算)

割り算に於て法の桁數は商の桁數よりも二桁多ければよし


```
                0.31831
3141592 ) 1000000.0
           942477 6
           --------
            57522 4
            31415 9
            -------
            26106 5
            25132 0
            -------
              974 5
              942 3
              -----
               32 2
               31 4
               ----
                  8
```

答 0.3183 强.

3. 大正四年度ノ國費合計 590328471 圓 (實行歲出) ナリ. 54843083 人ニ平均スレバ一人ノ負擔額幾圓ニ當ルカ (十錢ノ位迄)

4. $x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{a^2+b^3})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{a^2+b^3})}$ ナラバ $x^3+3bx-2a=0$ ナルコトヲ驗證セヨ.

5. 次ノ各ノ一元方程式ヲ解ケ.

(一) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$

(二) $\frac{1}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-4}+\sqrt{x}}=\sqrt{x-4}$

(三) $x^5=1$ $\quad (1-x+x^2)^2=\frac{7}{13}(1+x^2+x^4)$

6. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α, β トスレバ

$$a(\alpha^5+\beta^5)+b(\alpha^4+\beta^4)+c(\alpha^3+\beta^3)=0$$

7. $x^2-3x+5=0$ ノ根ヲ α, β, $x^2-7x+2=0$ ノ根ヲ m, n トス, 次ヨリ m, n, α, β ヲ消去セヨ.

$$\{y-(\alpha m+\beta n)\}\{y-(\alpha n+\beta m)\}=0$$

8. $6x^2+11xy-10y^2+x+31y+c$ ガ x, y ノ一次因數ノ積ノ式ニ分解セラルル樣ニ c ノ値ヲ求ム.

9. 次ガ恒等式トナル樣ニ文字ノ値ヲ求メヨ.

$$x^3-5x^2+2x+n=(x-\alpha)(x-\alpha-3)(x-\beta)$$

〔n ハ整數〕

10. 次ノ各題ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(一) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ yz+zx+xy=-4 \\ yz=2x^2 \end{cases}$ (二) $\begin{cases} 6yz=2y+3z+9 \\ 3zx=6z+x+4 \\ 2xy=x+4y+13 \end{cases}$

(三) $[xy=24 \quad uv=6 \quad x+u=14 \quad y+v=4]$

11. $[x+y+z=a, \quad x^2+y^2+z^2=b^2, \quad x^3+y^3+z^3=c^3]$ ナル方程式ノ x, y, z ノ積ノ値ヲ a, b, c ニテ表セ.

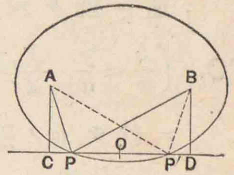
12. 次ノ組ニ就テ x, y, z ヲ消去セヨ.

$$\left\{x+y+z=0 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \quad \frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r)\right\}$$

13. 〔$x+y=2a, \quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=u$〕, u ノ極大値如何.

14. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正八邊形ノ一邊ヲ a トスレバ $a=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

有理係數ノ式ニテ a ト r ノ關係式如何.



PO$=x$

15. $\sqrt{(c+x)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$ ナルトキ, x, y ノ有理關係式如何 (126 頁).

16. $(x+y)^7-x^7-y^7$ ハ x^2+xy+y^2〔$=(x-\omega y)(x-\omega^2 y)$〕ニテ整除セラルルコトヲ驗證セヨ.

17. 次ノ各ヲ證明セヨ (a, b, c, d ハ不等ナル正ノ數).

(一) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}>2$ (二) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$

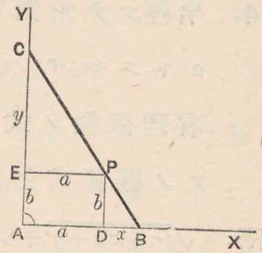
(三) $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc \quad a^3+b^3+c^3>3abc$

(四) $(x-a)(x-b)+(a-x)(a-b)+(b-x)(b-a)>0$

18. $\dfrac{y}{x-z}=\dfrac{y+x}{z}=\dfrac{x}{y}$, $x:y:z$ 如何.

19. 甲乙ノ二船, 200 浬隔タレル東西兩港間ヲ,甲ハ東港ヨリ,乙ハ西港ヨリ各一定ノ速サニテ同時ニ出發シ一回ノ往復ヲ爲セシニ往航ノ時出會セル場所ハ復航ノ時出會セル場所ヨ

リ40浬西港ニ近カリキト,二船ノ速度ノ比ヲ求ム. 二船何レモ往航ヲ終リタルトキ直ニ復途ニ就ケルモノトス.



20. $\left[\frac{b}{x}=\frac{y}{a},\ \frac{1}{2}(a+x)(b+y)=u\right]$ ニ就テ,uノ極小値ヲ求ム.

21. (一) $l(2x-5y+3z)+m(3x+y-2z)+n(x-3y+z)$

$$=dx$$

ガ恒等式トナル樣ニ $l:m:n:d$ ヲ求メヨ.

(二) 上ノ結果ニヨリテ次ノ x ノ値ヲ求ム.

$[2x-5y+3z=7 \quad 3x+y-2z=6 \quad x-3y+z=2]$

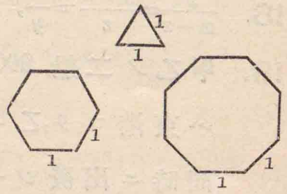
22. 三邊ガ次ノ如キ各場合ノ三角形ノ面積如何.

(一) $2(n^2+1),\ (4n^2+1),\ (2n^2+1)$

(二) $2x+3,\ x^2+2x,\ x^2+3x+3$

(三) $2(n^2+1),\ 3(2n^2-1),\ (4n^2+1)$

23. 一邊ガ1ナル正三角形,正六邊形及正八邊形ノ面積ガ夫夫 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $2(\sqrt{2}+1)$ ナルトキ,周ヲ等シトスレバ面積ノ比如何.



24. x, y ハ相伴ヒテ變化スル數ニシテ,其間ノ關係式ガ $y=\frac{mx}{x-n}$ ナルトキ, x ガ H.P. ヲナセバ, y モ亦 H.P. ヲナス.

25. a, b, c, d ガ H.P. ヲナセバ

$$3(b-a)(d-c)=(c-b)(d-a)$$

26. 次ノ各ノ級數ノ和ヲ求ム.

(一) $(1+x)^2,\ (1+x^2)^2,\ (1+x^3)^2, \ldots\ldots$ n 項

(二) $x,\ 3x^2,\ 2x^3,\ x^4,\ 3x^5,\ 2x^6, \ldots\ldots$ $3n$ 項

27. $1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ ヲ證明セヨ.

28. 公項ガ次ノ如キ形ノ級數ノn項ノ和ヲ求ム.

(一) $A+Bn+Cn^2$ (二) $n(n-1)(n-2)$

29. 初項a, 公差dナルA.P.ノn項ノ和ヲs_nトス.

$[s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n]$ ノ和如何.

30. 次ノ各式ノ値ヲ求ム.

$$a^2,\ a^3,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^3},\ \sqrt[3]{a} \quad a=\frac{43765}{74013} \text{ トス.}$$

31. 惑星ガ太陽ヲ一周スル時間ヲt, 惑星ト太陽トノ平均距離ヲxトスレバ $t^2=kx^3$ 木星ト太陽トノ平均距離ハ,地球ト太陽トノ平均距離ノ5.203倍トスレバ木星ガ太陽ヲ

1 週スルニ要スル時間如何. 1年=365.2422日.

32. 次ノ各ノ方程式ヲ解ケ.

(一) $\begin{cases} a^{2x-3}.a^{3y-2}=a^8 \\ 3x+2y=17 \end{cases}$ (二) $\begin{cases} 2^x=y \\ x=1+\log y \end{cases}$

(三) $\sqrt{M^{7-3x}}.\sqrt[3]{M^{x+1}}.\sqrt[4]{M^{5x-7}}.\sqrt[5]{M^{7-2x}}=1$

(四) $[\log(x-y)+\log(7x-8y)=2,$

$\log(x^3+y^3)-\log(x^2-xy+y^2)=1]$

(五) $\frac{1}{2}\log(x-2)+\log\sqrt{4x+1}=1$

(六) $\left(\frac{57}{37}\right)^{1+x}+\left(\frac{57}{37}\right)^{1-x}=10$

(七) $9x^{\log x}+91x^{-\log x}=60$

33. 或人三人ノ子供ノ成年後ノ事業資金トシテ, 元金1.5萬圓ヲ分チテ,兄ハ6年間,仲ハ12年間, 末ハ18年間各年利6分ノ複利(複利期毎半年)ニテ預ケ置キタルトキノ元利合計ガ5:3:3ニ比例スル樣ニセントス如何ニ分ツベキカ.

$\boxed{答}$ 1. $1\geqq x\geqq-1$ なれば 2, $x\geqq1$ なれば $2x$, $x\leqq-1$ なれば $-2x$.

2. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$, $-\sqrt{15}+\sqrt{10}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ **3.** 10.8 圓弱

5. (一) 0, $a+b$, $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ (二) 5 (三) $\Big\{x=1,\ \frac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$

$\frac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\Big\}$ $\left\{-\omega,\ -\omega^2,\ 3,\ \frac{1}{3}\right\}$. **7.** $y^2-21y+223=0$.

8. -15, (與式)$=(3x-2y+5)(2x+5y-3)$. **9.** $\alpha=-1$, $\beta=4$, $n=8$

10. (一) $(-2, 2, 4)$, $(-2, 4, 2)$ (二) $\left(-1, -2, -\frac{1}{3}\right)$, $(5, 3, 1)$

(三) $(8, 3, 6, 1)$, $\left(\frac{21}{2}, \frac{16}{7}, \frac{7}{2}, \frac{12}{7}\right)$ $v=4-y$, $u=14-x$ として解け.

11. $\frac{a^3-3ab^2+2c^3}{6}$. **12.** $p+q+r=0$ **13.** $2\sqrt{a}$.

14. $2r^4-4a^2r^2+a^4=0$. **15.** $a^2(x+c)^2+a^2y^2=(cx-a^2)^2$.

18. $4:2:3$. **19.** $11:9$ **20.** $u=2ab$.

21. (一) $5:4:-7:15$ (二) $x=3$. **22.** (一) $2n(2n^2+1)$

(二) $\frac{\sqrt{3}}{4}x(x+2)(2x+3)$ (三) $6n(2n^2-1)$. **23.** $8:12:3(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

26. (一) $n+\frac{2(x-x^{n+1})}{1-x}+\frac{x^2-x^{2n+2}}{1-x^2}$ (二) $(x+3x^2+2x^3)\frac{1-x^{3n}}{1-x^3}$

28. (一) $nA+\frac{1}{2}n(n+1)B+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)C$ (二) $\frac{1}{4}n(n-1)(n-2)(n+1)$

29. $\frac{1}{2}n(n+1)a+\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)d$. **30.** 0.34965, 0.20676, 1.6911, 4.8366, 0.83934. **31.** t は $x^{\frac{3}{2}}$ に比例す. 故に $t=365.2422\times(5.203)^{\frac{3}{2}}=4334.731$ 日. **32.** (一) $x=5$, $y=1$ (二) 1.4306, 2.6958 (三) 11 (四) 7, 3 (五) 6 (六) ±4.2715 但し $\left(\frac{57}{37}\right)^x$ を y とすれば $57y^2-370y+57=0$ $\therefore y=\frac{3}{19}$ 或は $\frac{19}{3}$ (七) $x^{\log x}=\frac{7}{3}$ 或は $=\frac{13}{3}$

$\therefore$ $\{\log x=\pm\sqrt{\log\frac{7}{3}}=\pm0.60661$ 故に $x=4.0421$ 或は $x=0.24739\}$ 或は

$\{\log x=\pm\sqrt{\log\frac{13}{3}}=\pm0.79801$ 故に $x=6.2807$ 或は $x=0.15922\}$

33. $x(1.03)^{12}:y(1.03)^{24}:z(1.03)^{36}=5:3:3$ $x:y:z=5:2.1041:1.4758$

答 8740 圓, 3680 圓, 2580

〔三〕 順列,組合せ及二項定理

1. 順列の總數を求むること

〔例一〕 a, b, c, d, e ノ五ツノ文字ヨリ,三文字宛取リテ之ヲ出來得ルダケ順序ヲ換ヘテ一列ニ並ベタルモノヲ作レバ次ノ如シ.

	(準備とせる順列)	(求むる順列)		
a	ab	abc	abd	abe
	ac	acb	acd	ace
	ad	adb	adc	ade
	ae	aeb	aec	aed
b	ba	bac	bad	bae
	bc	bca	bcd	bce
	bd	bda	bdc	bde
	be	bea	bec	bed
c	ca	cab	cad	cae
	cb	cba	cbd	cbe
	cd	cda	cdb	cde
	ce	cea	ceb	ced
d	da	dab	dac	dae
	db	dba	dbc	dbe
	dc	dca	dcb	dce
	de	dea	deb	dec
e	ea	eab	eac	ead
	eb	eba	ebc	ebd
	ec	eca	ecb	ecd
	ed	eda	edb	edc

$abc, abd, \ldots\ldots$ ノ各ヲ**順列**(Permutation)トイフ.

順列 相異なるn箇の物の中よりr箇宛種種に選び出し,之を種種の順序に列べたるものの各をn箇の物よりr箇宛採りたる順列といふ. n箇の物よりr箇宛採りたる順列の總數を ${}_nP_r$ にて表す.

〔例題〕 1. 前ノ順列ニ重復セルモノナキ　ト,及取リ落シナキコトヲ説明セヨ. 又其總數ヲ表ス記號ハ何カ.

2. 實際ニ順列ヲ作リテ ${}_3P_2$, ${}_4P_3$, ${}_6P_2$ ヲ求ム.

3. a, b, c, d, e, f ヨリ四ツヅツ採リタル順列ヲ悉ク作リ上グル仕方ヲ考ヘテ,其最初ノ十五箇ダケヲ順ニ記セ.

〔例二〕 a, b, c, d, e, f ヨリ四ツ宛採リタル順列ノ總數 ${}_6P_4$ ニ就テ, (一) ${}_6P_4={}_6P_3\times 3$, (二) ${}_6P_4=6.5.4.3$ ナルコトヲ證明セヨ,

(一)の證明 a, b, c, d, e, f ナル六ツノ文字ヨリ三ツヅツ採リタル順列 ${}_6P_3$ 箇ヲ完成シ,其各順列ノ右ニ,其順列中ニ含マレザル殘リノ$(6-3)$文字ノ各ヲ列ベ添フレバ,四文字宛ノ順列ヲ得テ其數ハ

$$ {}_6P_3 \times 3 \ldots\ldots \text{ナリ} \quad (1) $$

而シテ斯様ニ作ラレタル順列ノ中ニ同ジモノノナキコトハ,其作リ方ニヨリテ明カナリ. 即チ其等ハ或ハ其終リノ一ツノ文字ニヨリテ異ナリ,或ハ初メノ三文字ノ列ベ方ニヨリテ異ナレバナリ.

又斯様ニ作ラレタルモノノ中ニハ與ヘラレタル六ツノ文字ヨリ四文字宛採リタル順列ヲ總テ含ム. 何トナレバ例ヘバ或他ノ仕方ニテ考ヘタル四文字ノ順列ノ一ツ *bade* ヲ見ルニ,其右端ノ文字 *e* ヲ除ケバ三文字ノ順列 *bad* トナル. 而シテ斯様ナル順列 *bad* ハ準備トシタル順列ノ中ニ含マレ從ツテ, *bad* ヲ用ヒテ四文字ノ順列ヲ作ルトキニ *bade* モ作ラレタルベケレバナリ.

故ニ初メニ作リタル

順列ノ總數(1)ハ丁度 ${}_6P_4$ ナリ……(2)

故ニ $\quad {}_6P_4 = {}_6P_3 \times 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(一)

(二)の證明 (一)ニヨリテ

$$ \left.\begin{array}{ll} & {}_6P_4 = {}_6P_3 \times 3 \\ \text{同様ニ} & {}_6P_3 = {}_6P_2 \times 4 \\ \text{又容易ニ} & {}_6P_2 = 6 \times 5 \end{array}\right\} $$

此等ノ等式ヲ邊邊相乘シテ約セバ

$$ {}_6P_4 = 6.5.4.3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(二)} $$

例二ノ事柄ハ ${}_6P_4$ ノ場合ニ限ラズ,一般ニ ${}_nP_r$ ニ就テモ同様ニ說明セラル. 即チ一般ニ

$$ [1] \quad \left\{\begin{array}{l} {}_nP_r = {}_nP_{r-1} \times (n-r+1) \\ {}_nP_r = n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) \\ {}_nP_n = n.(n-1).(n-2)\ldots\ \ldots\ldots 3.2.1 \end{array}\right. $$

n の階乘 ($\underline{|n}$ 或は $n!$) とは $1.2.3\ldots\ldots(n-1).n$ のことなり.

〔例題〕 1. 次ノ各ノ表ス數ヲ求ム.

$$ {}_6P_2,\ {}_6P_3,\ {}_6P_4,\ {}_6P_5,\ {}_6P_6, \qquad {}_3P_3,\ {}_4P_3,\ {}_5P_3,\ {}_6P_3,\ {}_7P_3,\ {}_8P_3 $$

2. 次ノ各式ノ値ヲ求ム.

$$ {}_5P_3 - {}_4P_2 \qquad {}_6P_3 \div {}_3P_3 \qquad {}_5P_5 - {}_5P_5 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) \qquad {}_7P_7 - {}_6P_6 $$

3. 1, 2, 3, ……9 ナル九ツノ數字ノ中相異ナリタルモノノミヲ採リテ書キタル二桁ノ整數,三桁ノ整數,四桁ノ整數,……九桁ノ整數ハ各幾ツアルカ.

4. $7! \div 3!$, $89! \div 80!$ ヲ各 ${}_nP_r$ ノ符號ヲ用ヒテ表セ.

5. ${}_8P_3$ ヲ階乘ノ記號ヲ用ヒテ表セ.

6. Volume ナル語ノ文字ヲ列ベ變フル仕方ハ幾

通リアルカ. 但シ子音ハ二ツ續カヌモノトス.

2. 組合せの總數を求むること

〔例一〕 a, b, c, d, e, f ノ六ツノ文字ヨリ三文字宛出來ルダケ種種ニ,選ミ出シテ得ルトコロノ組ヲ作レバ次ノ如シ.

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{(}a\text{を含むもの)} \qquad\qquad \text{(}a\text{を含まざるもの)} \\
\text{(六文字より三文字宛採りたる總ての組合せ)} & \left\{ \begin{array}{ll}
\binom{ab}{c}\binom{ac}{d}\binom{ad}{e}\binom{ae}{f} & \binom{bc}{d}\binom{bd}{c}\binom{be}{f}\binom{cd}{e}\binom{ce}{f}\binom{de}{f} \\
\binom{ab}{d}\binom{ac}{e}\binom{ad}{f} & \binom{bc}{e}\binom{bd}{f}\quad\binom{cd}{f} \\
\binom{ab}{e}\binom{ac}{f} & \binom{bc}{f} \\
\binom{ab}{f} &
\end{array} \right.
\end{array}
$$

$\binom{ab}{c}$, $\binom{ab}{d}$,…ノ各ヲ**組合せ**(Combination)トイフ.

組合せ 相異なる n 箇の物より r 箇宛種種に選み出して得るところの組の各を **n 箇の物より r 箇宛採りたる組合せ**といふ. n 箇の物より r 箇宛採りたる組合せの總數を ${}_nC_r$ にて表す.

〔例題〕 1. 前例ノ組合セノ總數ヲ ${}_nC_r$ ノ記法ニテ表セ.

2. 前例ニ就テ ${}_6C_3={}_5C_2+{}_5C_3$ ナルコトヲ説明セヨ.
3. a, b, c, d, e ヨリ3文字宛採リタル組合セヲ完成セヨ. 之ニヨリテ ${}_5C_3$ ハ ${}_5P_3$ (前節例一)ノ何分ノ一ナルカヲ求ム.
4. 實際ニ組合セヲ作リテ ${}_7C_2$, ${}_8C_2$, ${}_4C_3$ ヲ求ム.
5. 正十邊形ノ對角線ノ數ヲ數ヘヨ.

〔例二〕 a, b, c, d, e, f ノ六文字ヨリ三文字宛採リタル組合セノ總數 ${}_6C_3$ ニ就テ

(一) ${}_3P_3\times{}_6C_3={}_6P_3$ (二) ${}_6C_3={}_5C_2+{}_5C_3$

ナルコトヲ證明スルコト.

(一)の證明 例一ノ如ク,六ツノ文字ヨリ三文字宛採リタル總テノ組合セ ${}_6C_3$ 箇ヲ完成シタル後,其等ノ組合セヲ應用シテ,各組中ノ三文字ノ順列ヲ作リ上グレバ總テニテ

${}_3P_3\times{}_6C_3$ 箇ノ順列ヲ得…………(1)

而シテ其等ノ順列ノ中ニ同ジモノノナキコトハ其作リ方ニヨリテ明カナリ,即チ或ハ順列中ノ物ガ違フカ,或ハ物ガ同ジナレバ列ベ方ガ違ヘバナリ.

又斯様ニ作リタル順列ハ六ツノ文字ヨリ三文

字宛採リタル順列ノ總テヲ含ム．何トナレバ例ヘバ或他ノ仕方ニテ作レル三文字ノ順列ノ一ツ bad ヲ考フルニ，此物ハ b, a, d ノ三文字ヨリ成ル，而シテ斯樣ナル文字ノ組合セ $\begin{pmatrix}ab\\d\end{pmatrix}$ ヨリ其順列ヲ作ルコトハ最初取リ落シナク作ラレタレバナリ．

故ニ最初ニ作ラレタル

順列ノ總數(1)ハ丁度 ${}_6P_3$ ナリ……(2)

(1) ト (2) トニヨリテ　${}_3P_3 \times {}_6C_3 = {}_6C_3$ ……(一)

(二)の證明　a, b, c, d, e, f ノ六ツノ文字ヨリ三文字宛採リタル總テノ組合セ ${}_6C_3$ 箇ハ，之ヲ特別ナル一ツノ文字 a ヲ含ムモノ (甲) ト，a ヲ含マザルモノ (乙) トニ分類スルコトヲ得．

而シテ (甲) ノ中ノ組合セノ各ヨリ a ヲ除ケバ，(甲) ノ各ハ b, c, d, e, f ナル五ツノ文字ヨリ二文字宛採リタル組合セトナル．

故ニ　　其總數ハ ${}_5C_2$ ナリ……(3)

又 (乙) ハ b, c, d, e, f ナル五ツノ文字ヨリ三文字宛採リタル組合セヲナセルヲ以テ

(乙) ハ其總數 ${}_5C_3$ ナリ………(4)

(3) ト (4) トヲ合スレバ　${}_6C_3 = {}_5C_2 + {}_5C_3$,………(二)

例二ノ事柄ハ ${}_6C_3$ ノ場合ニ限ラズ，一般ニ ${}_nC_r$ ニ就テモ同樣ニ說明セラル．即チ一般ニ

〔2〕　${}_rP_r \times {}_nC_r = {}_nP_r$　　${}_nC_r = \dfrac{n.(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.\ldots\ldots r}$

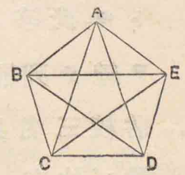
〔3〕　${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

〔例題〕　次ノ各式ノ表ス數ヲ求ム．

1.　${}_8C_1$,　${}_8C_2$,　${}_8C_3$,　${}_8C_4$,　${}_8C_5$,　${}_8C_6$,　${}_8C_7$,　${}_8C_8$

2.　${}_{12}C_{10}$,　${}_{12}C_7$,　${}_{10}C_8$,　${}_7C_5$,　${}_5C_3 \times {}_3C_2 \times {}_5P_5$,　${}_7C_2 - {}_4C_2$

〔例三〕　五ツノ點 A, B, C, D, E アリ，其何レノ三ツモ同一直線上ニアラズトス．此等ノ點ノ中三ツ宛ヲ頂點トスル三角形ヲ總テ列記セヨ．



解　總テニテハ ${}_5C_3 = \dfrac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ 箇アリ．即チ次ノ如シ．

$AB C\overset{\times}{D}\overset{\times}{E}$ …..(1)△ABC
$AB\overset{\times}{C}D\overset{\times}{E}$ …..(2)△ABD
$A\overset{\times}{B}CD\overset{\times}{E}$ …..(3)△ACD
$\overset{\times}{A}BCD\overset{\times}{E}$ …..(4)△BCD
$AB\overset{\times}{C}\overset{\times}{D}E$ …..(5)△ABE
$A\overset{\times}{B}C\overset{\times}{D}E$ …..(6)△ACE
$\overset{\times}{A}BC\overset{\times}{D}E$ …..(7)△BCE
$A\overset{\times}{B}\overset{\times}{C}DE$ …..(8)△ADE
$\overset{\times}{A}B\overset{\times}{C}DE$ …..(9)△BDE
$\overset{\times}{A}\overset{\times}{B}CDE$ …..(10)△CDE

〔注意〕　三ツノ點ノ組合セ $\begin{pmatrix}AB\\C\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}AB\\D\end{pmatrix}$ ……ノ

數 ${}_5C_3$ ト二ツノ點ノ組合セ (D E), (C E), ……ノ數 ${}_5C_2$ トハ同數ナリ. 此事ハ ${}_5C_3=\frac{5.4.3}{1.2.3}$, ${}_5C_2=\frac{5.4}{1.2}$ ト式ヲ作リテ較ベテモ分ル. 一般ニ

〔4〕 $${}_nC_r={}_nC_{n-r}$$

〔例題〕 1. 次ノ各ノ値ヲ求ム.

$${}_{10}C_1,\ {}_{10}C_2,\ {}_{10}C_3,\ {}_{10}C_4,\ {}_{10}C_5,\ {}_{10}C_6,\ {}_{10}C_7,\ {}_{10}C_8,\ {}_{10}C_9,\ {}_{10}C_{10}$$

2. a, b, c, d, e ナル五ツノ直線アリ,其二ツヅツハ相交リ,何レノ三ツモ同一點ニ於テ交ラザルトキ,此等ノ直線ノ中三ツ宛ニテ成ス,三角形ヲ總テ列記セヨ (△abc トイフガ如クニ).
3. 將校三名兵卒三十名ノ中ヨリ九人ノ一隊ヲ選ブ仕方ハ幾通リアルカ. 但シ一隊ノ中ニハ少クトモ將校二名ヲ含ムベキモノトス.
4. ${}_{15}C_x={}_{15}C_{10-x}$ ヨリ x ヲ求ム,
5. 12箇ノ相異ナル物ヲ四箇ヅツ三人ニ分與スル仕方ハ幾通リアルカ.

3. 二項定理, {$(a+b)^n$ の展開式を求むること}

〔例一〕 實地計算ニヨリテ $(a+b)$ ノ乘冪ヲ $(a+b)^6$

迄求メタルモノノ係數次ノ如シ (Pascal の三角形).

[$(a+b)^n$ の展開式の係數]

$$(甲)\left\{\begin{array}{lccccccc}
(a+b) & 1 & 1 \\
(a+b)^2 & 1 & 2 & 1 \\
(a+b)^3 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
(a+b)^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
(a+b)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
(a+b)^6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right.$$

[$(a+b)^n$ の展開式の係數]

$$(乙)\left\{\begin{array}{lcccccc}
1 & {}_1C_1 \\
1 & {}_2C_1 & {}_2C_2 \\
1 & {}_3C_1 & {}_3C_2 & {}_3C_3 \\
1 & {}_4C_1 & {}_4C_2 & {}_4C_3 & {}_4C_4 \\
1 & {}_5C_1 & {}_5C_2 & {}_5C_3 & {}_5C_4 & {}_5C_5 \\
1 & {}_6C_1 & {}_6C_2 & {}_6C_3 & {}_6C_4 & {}_6C_5 & {}_6C_6 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right.$$

此等ノ計算ノ結果ニヨレバ. $(a+b)^n$ ノ展開式ノ係數 (甲) ヲ (乙) ノ如ク記スコトヲ得. 卽チ

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

ニシテ,其次次ノ項ノ係數

$$1,\quad 6,\quad 15,\quad 20,\quad 15,\quad 6,\quad 1$$

ハ $$1,\quad {}_6C_1,\quad {}_6C_2,\quad {}_6C_3,\quad {}_6C_4,\quad {}_6C_5,\quad {}_6C_6$$

ト記スコトヲ得ルナリ.

〔例二〕 $(a+b)^n$ の展開式の次次の項の係數

$$1,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ {}_nC_3,\ \ldots\ldots{}_nC_r,\ \ldots\ldots{}_nC_{n-1},\ {}_nC_n$$

なることを證明すること.

證明 (一) 實地計算ニヨリ $(a+b)$ ノ乘冪ヲ $(a+b)^6$ マデ展開シタルモノニ就テハ上ノ定理ノ成リ立ツコト容易ニ知ラル(例一).

(二) $(a+b)^6$ ノ展開式ノ次次ノ項ノ係數ハ

$$1 \quad {}_6C_1 \quad {}_6C_2 \quad {}_6C_3 \quad {}_6C_4 \quad {}_6C_5 \quad {}_6C_6$$

ナルヲ以テ, $(a+b)^6$ ノ展開式ニ更ニ $(a+b)$ ヲ掛ケテ $(a+b)^7$ ノ展開式ヲ作レバ其次次ノ項ノ係數ハ

$$1 \ (1+{}_6C_1) \ ({}_6C_1+{}_6C_2) \ ({}_6C_2+{}_6C_3) \ ({}_6C_3+{}_6C_4)$$
$$({}_6C_4+{}_6C_5) \ ({}_6C_5+{}_6C_6) \ {}_6C_6 \ \cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

然ルニ組合セノ公式 ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ ニヨレバ (A) ハ次ノ如ク記サル.

$$1 \quad {}_7C_1 \quad {}_7C_2 \quad {}_7C_3 \quad {}_7C_4 \quad {}_7C_5 \quad {}_7C_6 \quad {}_7C_7 \ \cdots\cdots\cdots(\mathrm{B})$$

卽チ定理ハ $(a+b)^7$ ノ展開式ニ就テモ成立ス.

同樣ニ次次ノ場合ニ就テモ成立ス. 故ニ定理ハ一般ニ眞ナリ.

〔5〕 $$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots\ldots r}a^{n-r}b^r+\ldots+b^n$$

之ヲ**二項定理**ト稱ス.

〔例三〕 $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^8$ ヲ展開セヨ,

解 $(a+b)^8$ ノ展開式ノ係數(二項係數)ハ

$$1,\ {}_8C_1,\ {}_8C_2,\ {}_8C_3,\ {}_8C_4,\ {}_8C_5,\ {}_8C_6,\ {}_8C_7,\ {}_8C_8$$

卽チ 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

$$\therefore \left(2x-\frac{1}{2}\right)^8=(2x)^8-8.(2x)^7\left(\frac{1}{2}\right)+28(2x)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-56(2x)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3+70(2x)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$-56(2x)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5+28(2x)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$-8(2x)\left(\frac{1}{2}\right)^7+\left(\frac{1}{2}\right)^8$$
$$=256x^8-512x^7+448x^6-224x^5+70x^4$$
$$-14x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{1}{256}$$

〔例四〕 $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^{20}$ ノ展開式ノ x^4 ノ項ハ第何項ナルカ.

解 $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^{20}$ ノ展開式ノ第 $(r+1)$ 項ノ x ノ冪ヲ較ベテ $\quad (x)^{20-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=x^4$

$\therefore\ 20-2r=4 \qquad r=8 \qquad \therefore$ 第 9 項　答

〔例題〕 1. 次ノ各式ヲ展開セヨ.

$$(1-2x)^6 \qquad 298^4 \qquad \left(x+\frac{1}{x}\right)^5 \qquad \left(x+\frac{1}{2}\right)^8$$

2. 次ノ各式ヲ展開セヨ.

$$(1+\sqrt{1-x^2})^5+(1-\sqrt{1-x^2})^5 \qquad (1-i)^5\pm(1+i)^5$$

3. $\left(1-\dfrac{x^2}{3}\right)^{14}$ ノ展開式ノ中央項ヲ求ム.

4. $n>2$ ナレバ $n^{n+1}>(n+1)^n$ ナルコトヲ證明セヨ.

5. $(x^2-2x)^{10}$ ノ展開式ニ於テ x^{16} ヲ含ム項ヲ求ム.

6. $\left(x^2-\dfrac{a}{x}\right)^{20}$ ノ展開式ニ於テ x^7 ノ項ハ第何項カ.

7. $\alpha^6+\beta^6$ ヲ $(\alpha+\beta)$ ト $(\alpha\beta)$ トノ項ニテ表セ.

8. 次ノ各方程式ヲ解ケ.

(一) $x^5+(5-x)^5=275$ (二) $\sqrt[5]{5125-x}+\sqrt[5]{x-976}=9$

〔6〕 **二項定理の一般なるもの**

$-1<x<1$ なれば n が分數又は負數なるときにも

$$(1+x)^n \fallingdotseq 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots$$

〔例五〕 二項定理によりて $\sqrt[3]{128}$ を小數第五位迄求む.

解 $$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{125\left(1+\frac{3}{125}\right)}=5\left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\left(1+\frac{3}{125}\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{125}\right)+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1.2}\left(\frac{3}{125}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1.2.3}\left(\frac{3}{125}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{125}-\left(\frac{1}{125}\right)^2+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{125}\right)^3-\cdots\cdots$$

$$=1+0.008-0.000064+\cdots\cdots$$

$$\fallingdotseq 1.007936$$

$$1.007936\times5=5.03968 \quad \text{答}$$

對數的計算ノ結果ト較ベテ驗セ.

〔例題〕 1. 次ノ各式ヲ第六項迄展開セヨ.

(一) $\sqrt{1\pm x}$ (二) $\sqrt[3]{1\pm x}$

(三) $\dfrac{1}{1+x}$ (四) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

又 $x=\dfrac{1}{100}$ トスレバ各式ノ値如何(小數六桁).

2. 次ノ各式ノ値ヲ小數第五位迄求ム.

$$\sqrt{10}=\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10}} \qquad \sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{1+\frac{1}{49}}$$

$$\sqrt[3]{28}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{27}} \qquad \sqrt[5]{23}\ \text{(小數三位)}$$

演 習 問 題

(順列, 組合せ及二項定理)

1. 次の各に就て x を求む.

$${}_xP_2=132 \qquad {}_xC_2\times14={}_xC_4\times3 \qquad {}_xC_2=560+x$$

2. 1, 2, 3, 4, 5 の五つの數字を悉く並べて五桁の奇數は幾通り作り得るか.

3. 洋書20冊あり, 其中の4冊は各1冊にて一部をなし, 他は8冊, 5冊, 3冊にて各一部をなす. 今此20冊の書を一列に並ぶるに各部の書は1纏めとなし, 且卷の順序に從ひ並ぶるときは並べ方すべて幾通りあるか.

4. 0, 1, 2, 3, 4, 5 なる六つの數字を種種に排列して五桁の數を幾つ作り得るか. 但し同じ數字は一數中に二回以上用ひざるものとす. 又上の數の中3萬と4萬との間の數は幾通りあるか.

5. 次の公式を證明せよ.

$${}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_{r-1} \qquad (n-r)\times{}_nP_r=n\times{}_{n-1}P_r \qquad {}_nP_r={}_{n-1}P_r+r\times{}_{n-1}P_{r-1}$$

6. $aaaabbbccd$ の中の文字を出來るだけ種種に列べ變ふれば總てにて幾通り得らるか. Phenomenon なれば如何.

7. 98^5, $(1-x)^7$, $(1+t)^8$, $(t-1)^9$ を展開せよ.

8. $(1+x)^7+(1-x)^7$, $(1+x)^8-(x-1)^8$ を簡單にせよ.

9. $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^5$, $\left(\frac{1}{3}x-3y\right)^6$, $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}x\right)^7$ を展開せよ.

10. $\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a^2}\right)^7$ の a^{-2} の項, $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x^3}\right)^{11}$ の x^{-5} の項を求む.

11. $(3+i\sqrt{5})^7+(3-i\sqrt{5})^7$ を求む.

12. $(1.05)^{10}$, $(0.997)^{24}$, $\left(\frac{29}{30}\right)^{13}$ を各小數第五位迄求む.

13. 次の各式を展開せよ(第五項迄).

$$(1+x)^{-2} \qquad \left(\frac{1}{2}x-2y\right)^{-7} \qquad \sqrt{a^2+1} \qquad \sqrt[3]{a^3+b^3} \qquad \frac{1}{\sqrt[6]{1-x}}$$

14. 次の各を小數第五位迄求む.

$$\sqrt{26} \quad \sqrt{905} \quad \sqrt{253} \quad \sqrt[3]{731} \quad \sqrt[3]{1003} \quad \sqrt[7]{131}$$

15. $x^4+x^3+x^2+x+1$ の中の x に $x+h$ を代入したるものを h の昇冪の順に展開せよ.

16. $1+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2+\dots\dots+{}_{10}C_{10}$ を求む.

17. 1, 2, 3, 4, 5 なる五つの數字を用ひて書き得る三桁の整數は幾通りあるか. 但し同じ數字を幾度も用ひ得るものとす. 又四桁の, 或は六桁の整數如何.

18. $\underline{|100}$ を素因數に分解したるとき, 2の冪指數を求む.

19. $\alpha^4+\beta^4=(\alpha+\beta)^4-4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+(\quad)(\alpha\beta)^2$

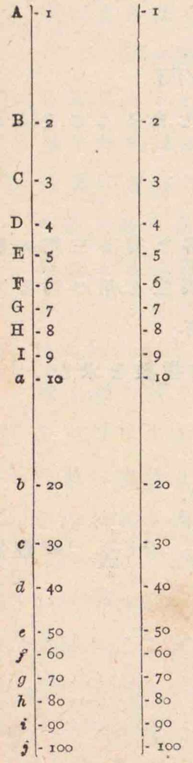
$\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)^5-5\alpha\beta(\alpha+\beta)^3+(\quad)(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)$

20. (一) $[\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \quad x^2+y^2=41]$ を解け.

(二) $x+\frac{1}{x}=1$ なる時, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^4+\frac{1}{x^4}$, $x^5+\frac{1}{x^5}$ の數値を求む.

〔四〕計　算　尺

計算尺(**對數尺**)は對數の性質に基きて作られたるものにして其構造次の如し(各自之を作りて見よ).



(一) 例へば長さ二尺の定規を作り,其兩端を A, j, 中央を a と名づく. (A と a の間)と,(a と j の間)とに各八つの點を, AB=ab=3.01寸(=log2). AC=ac=4.77寸(=log3), AD=ad=6.02寸(=log4), AE=ae=6.99寸(=log5), AF=af=7.78寸(=log6), AG=ag=8.45寸(=log7), AH=ah=9.03寸(=log8), AI=ai=9.54寸(=log9)に取りて A, B, C, D, E, F, G, H, I に當る所へ夫夫其眞數 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を定規に記入し, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j に當る所へは 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 を定規に記入すべし. 猶委しく數を記入する仕方も之と同樣なり. 例へば A, B の間, A より 1.76寸(=log1.5)の所へは 1.5 と記入するが如し. 數を委しく記入するには計算尺は長きものほどよし. A, B……なる字母は定規に記入するに及ばず.

(二) 計算尺は(一)に述べたる構造と全く同一のもの二箇より成立つものなり.

(三) **使用法例** 4.5×3.7 を求む. 答 16.65

說明 二つの計算尺の助けによりて log1.5=α 寸と, log3.7=β 寸との和 $(\alpha+\beta)$ の實際の長さは直に分る. 其長さは丁度 A 點より(a, b の間の或點)までの長さなり. 故に(a, b の間の此點)の所の數を見計ひて答の約 **16.65** なることが分る.

45×37 を求むるには 4.5×3.7 によりて求む.

〔五〕希臘文字

Α	α,	Alpha	a	Ι	ι,	Iota	i	Ρ	ρ,	Rho	r
Β	β,	Beta	b	Κ	κ,	Kappa	k	Σ	σ, ς	Sigma	s
Γ	γ,	Gamma	g	Λ	λ,	Lambda	l	Τ	τ,	Tau	t
Δ	δ,	Delta	d	Μ	μ,	Mu	m	Υ	υ,	Upsilon	u or y
Ε	ε,	Epsilon	short e	Ν	ν,	Nu	n	Φ	φ,	Phi	ph
Ζ	ζ,	Zeta	z	Ξ	ξ,	Xi	x	Χ	χ,	Chi	kh
Η	η,	Eta	long e	Ο	o,	Omicron	o short	Ψ	ψ,	Psi	ps
Θ	ϑ, θ	Theta	th	Π	π,	Pi	p	Ω	ω,	Omega	o long

〔例一〕 (一) $ax^2+bx+c=0$ の根は, α, β にて表され, $x^3=1$ の三つの根は 1, ω, ω^2 にて表さる. (二) 圓周率 3.14 159 265 358… は π にて,四直角は 2π にて,未知角は θ, φ, ψ 等にて表はさるること多し.

〔例二〕 (一) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を $\Sigma a^2(b-c)$ と表はすことあり. 但し a, b, c の等勢式とす.

(二) $$\Sigma\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=1$$ 答(計算して見よ)

〔例題〕 1. $\Sigma a^2(b-c)$, $\Sigma a(b^2-c^2)$, $(\Sigma a)^3-\Sigma a^3$ (a, b, c の文字に就て)を各因數に分解せよ.

2. $\Sigma\frac{a}{(a-b)(a-c)}$, $\Sigma(a-b)(x-a)(x-b)$, $\Sigma\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$ (a, b, c の文字に就て)を各簡單にせよ.

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	
11	04139	532	922	05308	690	06070	446	819	07188	55̄5	
12	07918	08279	636	991	09342	691	10037	380	721	11059	
13	11394	727	12057	38̇5	710	13033	354	672	988	14301	
14	14613	922	15229	534	836	16137	43̇5	732	17026	319	
15	17609	898	18184	469	752	19033	312	590	866	20140	
16	20412	683	952	21219	484	748	22011	272	531	789	
17	2304̄5	300	553	80̄5	2405̄5	304	551	797	25042	28̇5	
18	25527	768	26007	24̇5	482	717	951	27184	416	646	
19	2787̇5	28103	330	556	780	29003	226	447	667	88̇5	
20	30103	320	53̇5	750	963	3117̇5	387	597	806	3201̄5	212
21	32222	428	634	838	33041	244	44̇5	646	846	34044	203
22	34242	439	63̇5	830	3502̄5	218	411	603	793	984	193
23	36173	361	549	736	922	37107	291	47̄5	658	840	185
24	38021	202	382	561	739	917	39094	270	44̇5	620	178
25	39794	967	40140	312	483	654	824	993	41162	330	171
26	41497	664	830	996	42160	32̇5	488	651	813	97̇5	165
27	43136	297	457	616	77̇5	933	44091	248	404	560	158
28	44716	871	4502̇5	179	332	484	637	788	939	46090	162
29	46240	389	538	687	835	982	47129	276	422	567	147
30	47712	857	48001	144	287	430	572	714	85̇5	996	143
31	49136	276	41̇5	554	693	831	969	50106	243	379	138
32	5051̄5	651	786	920	5105̄5	188	322	45̄5	587	720	133
33	51851	983	52114	244	37̄5	504	634	763	892	53020	129
34	53148	27̇5	403	529	656	782	908	54033	158	283	120
35	54407	531	654	777	900	55023	14̄5	267	388	509	123
36	55630	751	871	991	56110	229	348	467	58̄5	703	119
37	56820	937	57054	171	287	403	519	634	749	864	116
38	57978	58092	206	320	433	546	659	771	883	99̄5	113
39	59106	218	329	439	550	660	770	879	988	60097	110
40	60206	314	423	531	638	746	853	959	61066	172	108
41	61278	384	490	59̇5	700	80̄5	909	62014	118	221	105
42	6232̄5	428	531	634	737	839	941	63043	144	246	102
43	63347	448	548	649	749	849	949	64048	147	246	100
44	6434̇5	444	542	640	738	836	933	65031	128	22̄5	98
45	65321	418	514	610	706	801	896	992	66087	181	95
46	66276	370	464	558	652	74̇5	839	932	6702̇5	117	93
47	67210	302	394	486	578	669	761	852	943	68034	91
48	68124	21̇5	30̄5	39̄5	48̄5	574	664	753	842	931	89
49	69020	108	197	28̄5	373	461	548	636	723	810	88
50	69897	984	70070	157	243	329	41̇5	501	586	672	86
51	70757	842	927	71012	096	181	26̄5	349	433	517	85
52	71600	684	767	8̇50	933	72016	099	181	263	346	83
53	72428	509	591	673	754	835	916	997	73078	159	81
54	73239	320	400	480	560	640	719	799	878	957	80
55	74036	11̇5	194	273	351	429	507	586	663	741	78

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	74036	11̇5	194	273	351	429	507	586	663	741	78
56	74819	896	974	75051	128	20̄5	282	358	43̄5	511	77
57	75587	664	740	81̇5	891	967	76042	118	193	268	76
58	76343	418	492	567	641	716	790	864	938	77012	75
59	7708̇5	159	232	30̇5	379	452	52̄5	597	670	743	73
60	7781̇5	887	960	78032	104	176	247	319	390	462	72
61	78533	604	67̇5	746	817	888	958	79029	099	169	71
62	79239	309	379	449	518	588	657	727	796	86̇5	70
63	79934	80003	072	140	209	277	346	414	482	5̇50	68
64	80618	686	754	821	889	956	81023	090	158	224	67
65	81291	358	42̄5	491	558	624	690	757	823	889	66
66	81954	82020	086	151	217	282	347	413	478	543	65
67	82607	672	737	802	866	930	99̄5	83059	123	187	64
68	83251	31̇5	378	442	506	569	632	696	759	822	63
69	8388̄5	948	84011	073	136	198	261	323	386	448	62
70	84510	572	634	696	757	819	880	942	85003	06̄5	62
71	85126	187	248	309	370	431	491	552	612	673	61
72	85733	794	854	914	974	86034	094	153	213	273	60
73	86332	392	451	510	570	629	688	747	806	864	59
74	86923	982	87040	099	157	216	274	332	390	448	56
75	87506	564	622	679	737	79̄5	852	910	967	88024	58
76	88081	138	19̇5	252	309	366	423	480	536	593	57
77	88649	70̇5	762	818	874	930	986	89042	098	154	56
78	89209	26̇5	321	376	432	487	542	597	653	708	55
79	89763	818	873	927	982	90037	091	146	200	25̄5	55
80	90309	363	417	472	526	580	634	687	741	79̄5	54
81	90849	902	956	91009	062	116	169	222	27̇5	328	54
82	91381	434	487	540	593	64̇5	698	751	803	85̇5	52
83	91908	960	92012	06̄5	117	169	221	273	324	376	52
84	92428	480	531	583	634	686	737	788	840	891	52
85	92942	993	93044	09̄5	146	197	247	298	394	399	51
86	93450	500	551	601	651	702	752	802	852	902	51
87	93952	94002	052	101	151	201	2̇50	300	349	399	50
88	94448	498	547	596	64̇5	694	743	792	841	890	49
89	94939	988	95036	08̇5	134	182	231	279	328	376	48
90	95424	472	521	569	617	66̄5	713	761	809	856	48
91	95904	952	999	96047	09̄5	142	190	237	284	332	47
92	96379	426	473	520	567	614	661	708	75̄5	802	47
93	96848	89̄5	942	988	9703̄5	081	128	174	220	267	46
94	97313	359	40̇5	451	497	543	589	63̄5	681	727	46
95	97772	818	864	909	95̄5	98000	046	091	137	182	45
96	98227	272	318	363	408	453	498	543	588	632	45
97	98677	722	767	811	856	900	94̄5	989	99034	078	44
98	99123	167	211	25̇5	300	344	388	432	476	520	44
99	99564	607	651	69̄5	739	782	826	870	913	957	43
100	00000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	

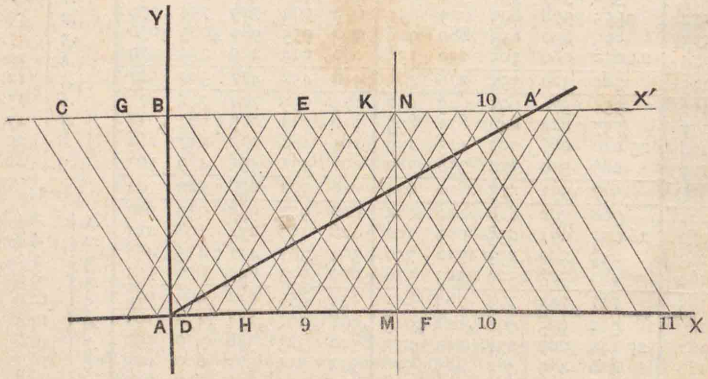
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分			
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389		44	43	42
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	.1	4.4	4.3	4.2
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	.2	8.8	8.6	8.4
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	.3	13.2	12.9	12.6
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	.4	17.6	17.2	16.8
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	.5	22.0	21.5	21.0
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	.6	26.4	25.8	25.2
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	.7	30.8	30.1	29.4
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	.8	35.2	34.4	33.6
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	.9	39.6	38.7	37.8
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493		41	40	39
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	.1	4.1	4.0	3.9
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	.2	8.2	8.0	7.8
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	.3	12.3	12.0	11.7
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	.4	16.4	16.0	15.6
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	.5	20.5	20.0	19.5
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	.6	24.6	24.0	23.4
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	.7	28.7	28.0	27.3
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	.8	32.8	32.0	31.2
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	.9	36.9	36.0	35.1
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243		38	37	36
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	.1	3.8	3.7	3.6
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	.2	7.6	7.4	7.2
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	.3	11.4	11.1	10.8
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	.4	15.2	14.8	14.4
125	691	726	760	5	830	864	899	934	968	*003	.5	19.0	18.5	18.0
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	.6	22.8	22.2	21.6
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	.7	26.6	25.9	25.2
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	.8	30.4	29.6	28.8
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	.9	34.2	33.3	32.4
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694		35	34	33
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	.1	3.5	3.4	3.3
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	.2	7.0	6.8	6.6
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	.3	10.5	10.2	9.9
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	.4	14.0	13.6	13.2
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	.5	17.5	17.0	16.5
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	.6	21.0	20.4	19.8
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	.7	24.5	23.8	23.1
138	988	*019	*051	*082	*114	145	*176	*208	*239	*270	.8	28.0	27.2	26.4
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	.9	31.5	30.6	29.7
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891		32	31	30
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	.1	3.2	3.1	3.0
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	.2	6.4	6.2	6.0
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	.3	9.6	9.3	9.0
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	.4	12.8	12.4	12.0
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	.5	16.0	15.5	15.0
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	.6	19.2	18.6	18.0
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	.7	22.4	21.7	21.0
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	.8	25.6	24.8	24.0
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	.9	28.8	27.9	27.0
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869				

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分		
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869		29	28
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	.1	2.9	2.8
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	.2	5.8	5.6
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	.3	8.7	8.4
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	.4	11.6	11.2
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	.5	14.5	14.0
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	.6	17.4	16.8
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	.7	20.3	19.6
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	.8	23.2	22.4
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	558	385	.9	26.1	25.2
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656		27	26
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	.1	2.7	2.6
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	.2	5.4	5.2
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	.3	8.1	7.8
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	.4	10.8	10.4
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	.5	13.5	13.0
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	.6	16.2	15.6
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	.7	18.9	18.2
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	.8	21.6	20.8
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	.9	24.3	23.4
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274		25	
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	.1	2.5	
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	.2	5.0	
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	.3	7.5	
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	.4	10.0	
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	.5	12.5	
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	.6	15.0	
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	.7	17.5	
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	.8	20.0	
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	.9	22.5	
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744		24	23
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	.1	2.4	2.3
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	.2	4.8	4.6
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	.3	7.2	6.9
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	.4	9.6	9.2
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	.5	12.0	11.5
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	.6	14.4	13.8
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	.7	16.8	16.1
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	.8	19.2	18.4
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	.9	21.6	20.7
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081		22	21
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307	.1	2.2	2.1
192	330	353	375	498	421	443	466	488	511	533	.2	4.4	4.2
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758	.3	6.6	6.3
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981	.4	8.8	8.4
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203	.5	11.0	10.5
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425	.6	13.2	12.6
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645	.7	15.4	14.7
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863	.8	17.6	16.8
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081	.9	19.8	18.9
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298			

「ぐらふ」にて問題を解くこと

相伴ひて變化する二つの數の相對應する値の圖表を**ぐらふ**といふ.

例 8粁の距離あるA,Bの兩地間を毎日午前6時より,10分毎に双方より發車して往來する電車あり,其速度毎時12粁の割合なり. 或人徒歩にて午前8時15分にA地を發し電車線路に沿ひて,B地に向ひて行くに,其速度毎時4粁の割合なりとす. 徒歩者がB地に到着するまでに出會ふべき電車の數,各電車に出會ふ時刻,各電車に出會ふときの位置を**ぐらふ**(圖表法)によりて解くこと(佛國工業學校入學試驗問題).



圖によりて見れば徒歩者はA地より發車する電車と8度,B地より發車する電車と16度出會ふことを知る. 而して出會點の坐標によりて,其時刻及び位置を定むることを得.

本邦鐵道掛員の携帶せらるる列車運行圖表も此方法によりて毎日の諸列車の運轉の樣子を圖解したるものなり.

文部省檢定濟
大正七年一月廿一日中學校數學科教科書

賣切等にて課業に御差支の際は直接御注文被下候はゞ直に御送附可致候
本館發行の教科書は常に多數の製本準備有之候につき萬一各地賣捌所に

印刷者 四海民藏
東京市神田區裏神保町六番地

發行所 光風館書店
東京市神田區裏神保町六番地
〔振替口座東京三二一七番〕
〔電話本局二〇三九番〕

發行者 上原才一郎
東京市神田區裏神保町六番地

著作者 千本福隆
東京市小石川區大塚坂下町百十番地

所有權著作

大正六年十一月十日修正五版發行
大正六年十一月七日修正五版印刷

大正三年十二月廿七日訂正再版發行
大正三年十二月廿四日訂正再版印刷
大正三年十月三十日發行
大正三年十月二十七日印刷

大正五年十二月十日修正四版發行
大正五年十二月七日修正四版印刷
大正五年十月卅一日修正三版發行
大正五年十月廿八日修正三版印刷

臨時定價 大正七年度金八拾六錢
定價金七拾五錢

中學代數教科書 卷下

東京秀英舍工場印刷

秋中太郎