ELEMENTARY COURSE
OF
TRIGONOMETRY

T. HAYASHI.

文部省檢定濟

大正七年三月七日　中學校數學科用

中等教育

平面三角法教科書

東北帝國大學理科大學教授

理學博士

林　鶴一

編著

株式會社

東京開成館

改訂ノ序

著者ガ嚮ニ著セル新撰三角法教科書ニ改訂補修ヲ加ヘテ中等教育三角法教科書ヲ公刊セシ以來正ニ四星霜，其間幸ニ極メテ多數ノ中等學校ノ教科書ニ採用セラレタルハ著者ノ大ニ光榮トスル所ナリ。著者ハ今又其實地使用ノ結果ニヨル精細ナル注意ト歐米先進國最近ノ趨勢トニ鑑ミテ更ニ改訂ヲ施シタル本書ヲ提供シテ我國中等教育界現時ノ要求ニ最モ適應セルモノタラシメントスルコトヲ得ルハ著者ノ大ニ欣幸トスル所ナリ。次ニ其改訂ノ要項ヲ摘擧スベシ。

一．教材ヲ一層精選シ，其説述ヲ簡明ナラシメ，且其排列ヲ改良シテ各教材間ノ連絡ヲ圓滑ナラシメ，尙困難ナル問題ノ若干ニハ其解法ノ指針又ハ之ヲ暗示スル圖ヲ附シテ以テ生徒自身ガ解法ヲ發明工夫スルノ能力ヲ助長セシメンコトヲ勉メタリ。

二．數學四分科ヲ通シテ用語ノ統一ヲ計リ嚴正

的確ナラシメタルハ勿論，相互ノ密接ナル連絡提携ヲ計リタリ。

三. 三角函數ノ定義ニ次ギテ直ニ其應用ニ關スル實用的ノ例ヲ示シ，之ヲ學ブ便益ヲ知ラシメ，以テ本科ニ對スル好學心ヲ喚起シ，尚實用上ノ應用問題ヲ增加シ，且物理學地理學上ニ於ケル應用問題ヲ加ヘ，又近時ノ傾向ニ從ヒ三角函數ノ値ノ變化ノ圖表示ヲ授ケテ以テ函數思想ノ養成ニ資シタリ。

四. 多數ノ問題ヲ練習及ビ應用ニ向テ一層適切ナルモノニ變更シ，其配置ニ深甚ノ注意ヲ拂ヒ，又各節間ニ挿入セル簡易ナル問題ヲ增加シ，教授ノ徹底，智識ノ確實應用力ノ養成ニ適當ナラシメタリ。尚最近行ハレタル高等各種學校ノ入學試驗問題ヨリ適當ナルモノヲ選擇シテ夫々適處ニ配置シ學生ニ興味ヲ覺ヘシメ，且腕試メシヲナスノ好機會ヲ供シタリ。

五. 各篇ノ終リニ設ケタル雜題ノ數ヲ增加シ，既修事項ノ囘顧復習ト生徒各自ノ研究トニ遺憾ナカラシメ，尚卷末ニ多數ノ雜題ヲ附シ以テ其不足ヲ補フノ用ニ供シタリ。

六. 問題ヲ大小二様ノ活字ヲ用ヒテ記載シ，其小ナルモノハ，教授時間其他種々ノ事情ニヨリテ適宜取捨ヲ自由ナラシメ重ニ生徒ノ自動的研究ニ委シ其天才發揮ノ資ニ供シタリ。

七. 弧度法，反三角函數，三角方程式ハ屢中學校卒業生ノ要スル所ナルヲ以テ是等ヲ附錄中ニ加ヘタリ。

八. 卷末ノ諸表ヲ取外ヅシ一纏メトシテ別册トシ，以テ使用ニ便ナラシメタリ。

要スルニ著者ハ本書ニヨリテ中等學校ニ於ケル三角法ノ教授ヲ圓滑ニ且愉快ニ進行セシメ，有効ナル結果ヲ收メンコトヲ期ス。

終リニ臨ミ著者ハ本書改纂ニツキ津村定一君ガ多大ノ助力ヲ與ヘラレタルコトヲ玆ニ記シテ謝意ヲ表ス。

大正六年十一月　　　　著者

目次

第一篇　鋭角ノ三角函數

第二篇　一般ノ角ノ三角函數

第三篇 斜角三角形

平面三角法

第一篇

銳角ノ三角函數

第一章

三角函數ノ定義

1. 角ノ單位。 角ヲ測ルニハ如何ナル角ヲモ單位トスルコトヲ得レドモ,實用上ニハ六十分法ヲ用フ。

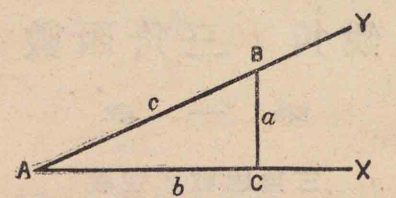
本書ニ於テ角ヲ表ハス文字ハ度,分,秒ヲ以テ表ハサレタル大サヲ示スモノトス。

例ヘバ $A=60°$, $B=32°\,43'\,18''$ 等ノ如シ。

問 1. $42°\,25'\,40''$ ヲ直角ノ分數ニテ表ハセ。

問 2. 三角形ノ二角ガ $55°\,33'\,44''$ 及ビ $42°\,56'\,18''$ ナルトキハ第三ノ角ハ如何。

2. 定義。 一ツノ鋭角 XAY ヲ取リ,其一邊 AY 上ノ任意ノ一點 B ヨリ,他ノ邊 AX ヘ垂線 BC ヲ引クトキハ,直角三角形 ABC ヲ生ズ。今此三角形ノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫夫 a, b, c ニテ表ハストキハ[1], a, b, c ノ間ニ六ツノ比ヲ生ズ,之ニ命名スルコト次ノ如シ。



[1]. 角 A ノ對邊 (a) ノ斜邊 (c) ニ對スル比ヲ此角ノ**正弦**ト云ヒ, 之ヲ $\sin A$ ト記ス。

依テ
$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

[2]. 角 A ノ隣邊 (b) ノ斜邊 (c) ニ對スル比ヲ此角ノ**餘弦**ト云ヒ, 之ヲ $\cos A$ ト記ス。

依テ
$$\cos A = \frac{b}{c} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

[1] 此記法ハ本書全部ニ通ジテ採用ス。

[3]. 角 A ノ對邊 (a) ノ隣邊 (b) ニ對スル比ヲ此角ノ**正切**ト云ヒ, 之ヲ $\tan A$ ト記ス。

依テ
$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

[4]. 角 A ノ正切,餘弦,正弦ノ逆數ヲ夫々角 A ノ**餘切,正割,餘割**ト云ヒ, 夫々之ヲ $\cot A$, $\sec A$, $\operatorname{cosec} A$ ト記ス。

依テ
$$\cot A = \frac{b}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$
$$\sec A = \frac{c}{b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$
$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

注意一。 正弦,餘弦,正切等ハ皆不名數ナルヲ以テ,之ニ代數的計算ヲ施スコトヲ得。

注意二。 $\tan A$ ヲ $\operatorname{tg} A$ ト記スコトアリ。

問 1. $a=3,\ b=4,\ c=5$ トシテ $\angle A$ ノ正弦,餘弦,正切等ヲ求メヨ。

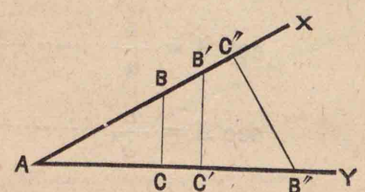
又 $a:b:c$ ガ $5:12:13$ ニ等シキトキハ如何。

問 2. a, b, c ヲ以テ $\angle B$ ノ正弦,餘弦,正切等ヲ書キ表ハセ。

3. 定理。 或角ノ正弦ト餘弦トハ1ヨリ小ニシテ,正切ト餘切トハ如何ナル正ノ値ヲモ取リ得ベク,正割ト餘割トハ1ヨリ大ナリ。

前節ノ定義ニヨリテ學生之ヲ證明セヨ。

4. 定理。 同ジ角又ハ等シキ角ノ正弦,餘弦等ハ一定ナリ。



證明。或角Aノ邊上ノ任意ノ諸點ヨリ他ノ邊ヘ垂線 BC, B′C′, B″C″ 等ヲ引クトキハ, $\frac{BC}{AB}$, $\frac{B'C'}{AB'}$, $\frac{B''C''}{AB''}$ 等ハ皆 $\angle A$ ノ正弦ナリ。然ルニ △ABC, AB′C′, AB″C″ 等ハ皆相似ナルヲ以テ,

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots$$

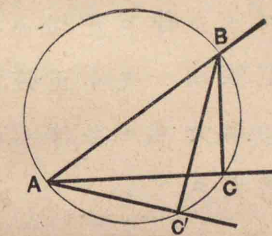
故ニ $\sin A$ ハ一定ナリ。

他ノ比ニ就テモ同様ナリ。

又等シキ角ニ就テモ同様ナリ。

問。 $\sin A=\frac{2}{3}$ 及ビ $\tan A=\frac{5}{4}$ ナル如キ角Aヲ作圖セヨ。

5. 定理。 角ガ増大スレバ其正弦,正切,正割ハ之ニ伴ヒテ増大シ,餘弦,餘切,餘割ハ反ツテ減少ス。



證明。 $\angle BAC < BAC'$ トシ,共有邊AB上ニ中心ヲ置キ且共通ノ頂點Aヲ過ギル任意ノ圓周ヲ畫キ,他ノ邊ト夫々C及ビC′ニ於テ交ハラシムレバ, $\angle BAC < BAC'$ ナル故,

$$\text{劣弧 } BC < \text{劣弧 } BC'.$$

從テ　　弦 $BC < BC'$,

$$\therefore\quad \frac{BC}{AB} < \frac{BC'}{AB}.$$

即チ　　$\sin BAC < \sin BAC'$.

故ニ角ガ増大スルニ伴ヒテ其正弦ハ増大ス。

又明カニ　弦 $AC > AC'$ ナルヲ以テ,

$$\cos BAC > \cos BAC'.$$

故ニ角ガ增大スルニ伴ヒ餘弦ハ減少ス。

次ニ又 $\dfrac{BC}{AC} < \dfrac{BC'}{AC'}$ ナルヲ以テ,

$$\tan BAC < \tan BAC'.$$

故ニ角ガ增大スルニ伴ヒ正切ハ增大ス。

而シテ餘割,正割,餘切ハ夫々正弦,餘弦,正切ノ逆數ナルヲ以テ,角ノ增大スルニ伴ヒ餘割ト餘切トハ減少シ,正割ハ增大ス。

6. 定義。 或角ノ正弦,餘弦,正切,餘切,正割,餘割ヲ總稱シテ其角ノ**三角函數**ト云フ。

注意一。 一般ニ或數ガ變ズルニ伴ヒテ他ノ數モ亦變ズルトキハ,後者ヲ前者ノ函數ト云フ。

例ヘバ $2x^2+3x-5$ ノ數値ハ x ノ函數ニシテ,圓周及ビ圓ノ面積ハ其半徑ノ函數ナリ。

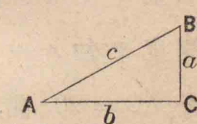
又 A ガ變ズルニ從ヒ $\sin A, \cos A, \tan A$ 等モ亦變ズルヲ以テ是等ハ A ノ函數ナリ。

注意二。 三角函數ハ又**圓函數**又ハ**三角比**トモ云フ。

7. 平面三角法ノ目的。 平面三角法ハ三角函數ノ性質ヲ研究スルコト,又之ニヨリテ三角形ノ邊ト角トノ數量的關係ヲ求メ,其等ヲ算出スル方法ト,更ニ之ヲ高サ,距離等ノ測量ニ應用スル方法トヲ考究スルヲ以テ目的トス。

之ヲ學ブ便益ハ次ニ掲グル問題及ビ應用ノ例ニヨリテ知ルコトヲ得ベシ。

*問。[1] 直角三角形 ABC ノ邊ト角トノ間ニ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。



$$a = c\sin A = b\tan A,$$

$$b = c\cos A = a\cot A,$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\cos A}.$$

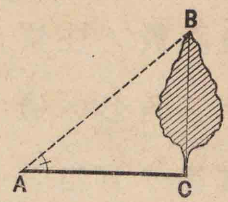
今 $c = 30$, $\sin A = \dfrac{3}{5}$ トシテ a ヲ求メヨ。

又 $b = 100$ 間, $\tan A = 0.866$ ナルトキハ如何。

(1) * ヲ附シタル問題ハ重要ナルモノナリ。

應用ノ例一。木ノ高サヲ測量スルコト。

BCヲ測ラントスル木ノ高サトシ,Aヲ測點トス。AヨリB樹頂Bヲ望ム視線ABト水平線ACトノナス角ガ丁度45°ナル場合ハ,ACヲ測リテ得ル測度ガ恰モBCノ測度ニ等シキモ,此角ガ45°ナラズシテ例ヘバ47°20′ナル場合ハ,BCノ測度ヲ知ルコト容易ナラズ,サレド若シ$\tan 47°20'$ノ値ヲ知ルトキハ,之ヲACノ測度ニ乘ジテ以テBCノ測度ヲ知ルコトヲ得。



今$AC=20$間, $\tan 47°20'=1.085$トシテBCノ長サヲ計算セヨ。

應用ノ例二。三角形ノ面積。

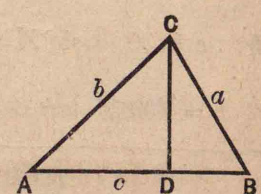
△ABCノ一頂點CヨリB對邊ABヘ垂線CDヲ下ストキハ,直角三角形ACDヨリ

$$CD = b\sin A$$

ヲ得ルヲ以テ,

今之ヲ

$$三角形ノ面積 = \frac{1}{2}CD\times AB$$



ニ代入スレバ,公式

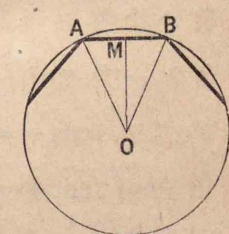
$$三角形ノ面積 = \frac{1}{2}bc\sin A$$

即チ**三角形ノ面積＝$\frac{1}{2}$(二邊ノ積)×(夾角ノ正弦)**

ヲ得。此公式ハ甚重要ナルモノニシテ,應用亦甚ダ廣シ,例ヘバ一角ノ等シキ兩三角形ノ比ハ其夾邊ノ矩形ノ比ニ等シク,又二邊ノ長サ一定セル三角形ノ面積ハ其夾角ノ正弦ニ比例シ,夾角ガ直角ナルトキ最大ナルコトヲ容易ニ知リ得ルガ如シ。

應用ノ例三。正多角形ノ邊及ビ面積。

ABヲ正多角形ノ一邊トシ,其外接圓ノ中心ヲO,半徑ヲRトセバ,



$$AB = 2AM = 2AO\sin AOM$$
$$= 2R\sin AOM \quad ナリ。$$

故ニ正八角形ノ一邊ハ $2R\sin 22°30'$ ニシテ,

正十角形ノ一邊ハ $2R\sin 18°$ 等ナリ。

一般ニ正多角形ノ一邊ノ公式トシテ

$$2R\sin\frac{180°}{n}$$ ヲ得。但シnハ邊數トス。

カク幾何學的ニテ統一シ能ハザル公式ヲ三角

法ニテ統一シ得ルノミナラズ,又幾何學ニテ計算シ能ハザル正多角形ノ邊ヲ三角法ニテハ計算スルヲ得。

次ニ又 OM ノ長サヲ計算シテ面積ヲ求ムルコトヲ得。學生ハ R 又ハ AB ヲ以テ面積ヲ表ハス公式ヲ作ルベシ。

8. 定理。 **或角ノ餘弦,餘切,餘割ハ夫々其餘角ノ正弦,正切,正割ニ等シ。**

第2節ノ圖ニ於テ互ニ餘角ナル二角 A, B ノ三角函數ヲ比較シテ學生之ヲ證明セヨ。

任意ノ一角ヲ α トセバ,[1] 其餘角ハ $90°-\alpha$ ナル故

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \sin(90°-\alpha)\\ \cot\alpha &= \tan(90°-\alpha)\\ \operatorname{cosec}\alpha &= \sec(90°-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

系。

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha &= \cos(90°-\alpha)\\ \tan\alpha &= \cot(90°-\alpha)\\ \sec\alpha &= \operatorname{cosec}(90°-\alpha)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

例ヘバ $\tan 30° = \cot 60°$,

1) α ノ如キ希臘文字(附錄參照)ハ屢々角ノ大サヲ表ハスニ用ユ。

$\sin 35°\,20' = \sin 54°\,40'.$ 等ナリ。

問。次ノ各式ニ適スル x ノ値ヲ求メヨ。

$$\sin x = \cos 60°,\qquad \sin 45° = \cos x,$$
$$\tan x = \cot 30°,\qquad \tan 15° = \cot x,$$
$$\sin 5x = \cos 7x,\qquad \cot\frac{x}{2} = \tan 5x.$$

問題 I.

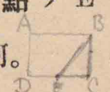
1. 直角三角形ABCニ於テ $C=90°, AC=3, BC=4$ ナルトキハ, $\angle A$ ノ三角函數如何。〔商船〕

2. 同上 $C=90°, b=2mn, c=m^2+n^2$ ナルトキハ,二角 A 及ビ B ノ三角函數如何。

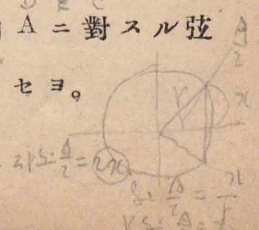
又 $\tan A=\dfrac{3}{2}$ ニシテ $AC=\dfrac{5}{3}$ ナルトキハ BC ノ長サ如何。

3. 次ノ如キ角 A ヲ作圖セヨ。

$$\sin A=\frac{1}{2},\quad 7\cos A=5,\quad \tan A=\frac{3}{\sqrt{3}}.$$

4. 正方形ABCDノ一邊CDノ中點ヲEトセバ, $\angle EBC$ ノ正弦,餘弦,及ビ正切各幾何。 〔海機〕

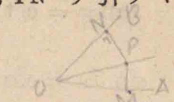
5. 半徑 r ナル圓アリ,其中心角Aニ對スル弦ノ長サハ $2r\sin\dfrac{A}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。



6. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ$2:\sqrt{3}:1$ナルトキハ，大ナル鋭角ノ正弦ヲ求メヨ。

7. $\angle AOB$内ニアル一直線OP上ノ任意ノ一點Pヨリ角ノ二邊OA, OBヘ垂線PM, PNヲ引クトキ，

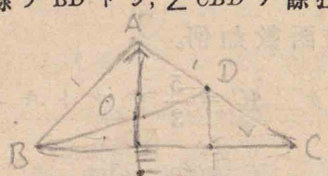
$$\frac{PM}{PN}=\frac{\sin AOP}{\sin BOP}$$ ナリ。



8. 等邊三角形ABCノ一邊BC上ニ一點Dヲ取リ，BDヲBCノ五分ノ一ニ等シカラシムルトキハ，$\angle BAD$ノ正弦幾何。但シ小數第三位マデ求メ其下四捨五入セヨ。

〔海機〕

9. 直角二等邊三角形ABCノ底BCノ一端Bヨリ出ヅル中線ヲBDトシ，$\angle CBD$ノ餘弦ヲ求メヨ。



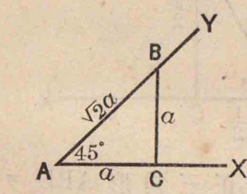
BE=EC=AE

$\frac{1}{3}$AE=OE.

第二章

特別ナル角ノ三角函數

9. 45° ノ三角函數。



$\angle XAY=45°$トシ，一邊AY上ノ任意ノ一點Bヨリ他ノ邊AXヘ垂線BCヲ下セバ，ABCハ直角二等邊三角形ナリ。

依テ　$AC=BC=a$　トセバ，

$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a$　ナリ，

故ニ　$\sin 45°=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}\,a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

又　$\cos 45°=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}\,a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

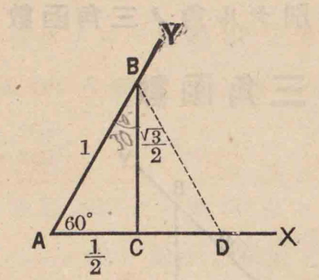
即チ　$\sin 45°=\cos 45°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0.7071.$(1)

又　$\tan 45°=\cot 45°=\dfrac{a}{a}=1.$

及ビ　$\sec 45°=\mathrm{cosec}\,45°=\sqrt{2}=1.4142.$(2)

(1) (2) 此値ハ小數第四位迄計算シ，其下四捨五入セリ，他モ亦之ニ準ズ。

10.　30° 及ビ 60° ノ三角函數。



$\angle XAY = 60^\circ$ トシ,正三角形 ABD ヲ作リ, BC ヲ其高サトシ, AB ヲ長サノ單位トセバ,

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2},\qquad AC = \frac{1}{2}\qquad \text{ナル故,}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660 = \cos 30^\circ.$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = 0.5000 = \sin 30^\circ.$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1.7321 = \cot 30^\circ.$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774 = \tan 30^\circ.$$

$$\sec 60^\circ = 2 = \operatorname{cosec} 30^\circ.$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547 = \sec 30^\circ.$$

注意一。 30° ノ三角函數ハ直接ニ求ムルヲ得。

注意二。 sin 60° ガ sin 30° ノ二倍ニ等シカラ

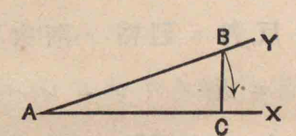
ザルガ如ク,一般ニ三角函數ノ値ハ其角ニ比例シテ變ズルモノニアラズ。

問。次式ノ値ヲ求メヨ。　〔海機〕

$$\cos 60^\circ - \tan 45^\circ + \frac{3}{4}\tan^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin 30^\circ.$$ [1]

11.　0° 及ビ 90° ノ三角函數。

角 XAY ノ一邊 AX ヲ固定シ,他ノ邊 AY ヲ A ヲ中心トシテ廻轉シ AX ニ近ヅクレバ, 角 BAC ハ



漸次減少シ, AY 上ノ任意ノ一點 B ヨリ AX ヘ下セル垂線 BC モ亦漸次減少シテ共ニ如何樣ニモ小トナル, 且 AB ノ長サハ漸次 AC ノ長サニ近ヅクベシ。

故ニ角ガ非常ニ小ナル角トナルニ從ヒ,其正弦及ビ正切ハ非常ニ 0 ニ近迫シ, 其餘弦ハ非常ニ 1 ニ近迫ス。此事實ヲ夫々次ノ如ク略記ス。

$$\sin 0^\circ = 0,\qquad \cos 0^\circ = 1,\qquad \tan 0^\circ = 0.$$

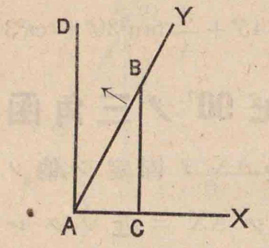
又角ガ減少スルニ從ヒ,餘切ハ漸次增大シテ際

(1) $\tan^2 30^\circ$, $\cos^2 30^\circ$ ハ夫々 $(\tan 30^\circ)^2$, $(\cos 30^\circ)^2$ ノコトナリ,他モ之ニ準ズ。

限ナシ。此事實ヲ次ノ如ク略記ス。

$$\cot 0^\circ = \infty.$$

同樣ニ　　$\sec 0^\circ = 1,\quad \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$



又 AY ヲ前ト反對ニ廻轉シ,漸次 A ニ於ケル AX ノ垂線 AD ニ近ヅカシムレバ,前ト同樣ニ

$$\sin 90^\circ = 1,\quad \cos 90^\circ = 0,\quad \tan 90 = \infty,$$

$$\cot 90^\circ = 0,\quad \sec 90^\circ = \infty,\quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

今上ニ得タル結果ノ重要ナルモノヲ表示スレバ次ノ如シ。

函數＼角	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

注意。任意ノ角ノ三角函數ニ關シテハ次章ニ於テ説明スベシ。

問　題　2.

(1) $(1+\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ+\cos 60^\circ) = \frac{7}{4}$ ヲ證明セヨ。〔商船〕

(2) 次ノ式ノ値ヲ小數第二位マデ計算セヨ。

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}$$

〔海機〕

(3) 次ノ方程式[1]ヨリ $\sin x$ ノ値ヲ求メ,更ニ x ノ値ヲ定メヨ。

$$2\sin^2 x = \sin x$$

(4) 次ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ求メヨ。

〔1〕 $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

〔2〕 $3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$

(5) 次ノ聯立方程式ヨリ x, y ノ値ヲ求メヨ。

〔1〕 $\begin{cases} \sin(x+y) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \cos(x-y) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{cases}$　　〔2〕 $\begin{cases} \cos(4x-3y) = 1 \\ \tan(7x+6y) = \infty \end{cases}$

(6) 底邊12寸,頂角60°ヲ有スル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。〔千醫〕

(7) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1,\quad y = x\tan 30^\circ$ ニ適スル x, y ノ値ヲ求メヨ。〔米工〕

---

(1) 未知角ノ三角函數ヲ含ム等式ヲ三角方程式ト云フ,其詳細ナル研究ハ附録ニアリ。

$x+y=60$ ∵ $\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$x-y=45$ ∵ $\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$　(5)〔1〕
$2x = 60+45$ ∴ $x = 52.5$
∴ $2y = 60-45$ ∴ $y = 7.5$

第三章

三角函數ノ眞數表及ビ對數表

12. 三角函數ノ眞數表。 高等數學ニ依レバ任意ノ角ノ三角函數ノ略近値ヲ算出スルヲ得。之ヲ列記セル表ヲ**三角函數ノ眞數表**ト云フ。

本書ニ別冊トシテ附スルモノハ十分飛ビノ四桁ノ表ニシテ其用法次ノ如シ。

例一。 $\tan 34°50'$ ヲ求メヨ。

解。 表ノ最上列ニ $\tan$ ト記セル行ノ數ノ中ニテ左端ノ行ノ $34°50'$ ト同列ニアル數 0.6959 ヲ取リテ所要ノ値トス。

即チ $\tan 34°50' = 0.6959.$

例二。 $\sin 46°20'$ ヲ求メヨ。

解。 所題ノ角ガ $45°$ ヨリ大ナルトキハ,最下列ニ $\sin$ ト記セル行ノ中ニテ右端ノ行ノ $46°20'$ ト同列ニアル數 0.7234 ヲ取リテ所要ノ値トス。

即チ $\sin 46°20' = 0.7234$

注意。 此値ハ亦 $\cos 43°40'$ ノ値ナリ。

一般ニ $\sin(45°+x) = \cos(45°-x)$ ナル故,表ニ

於テハ $0°$ ヨリ $45°$ マデノ角ノ函數ヲ載セ,右端ノ行ニ $45°$ ヨリ大ナル角ヲ夫夫是ト同列ノ左端ノ行ノ角ト餘角ヲナス如ク排列シテ表中ノ諸數ヲ $45°$ ヨリ大ナル角ノ函數トモ見ラルル如クス。

例三。 $\sin 18°12'$ ヲ求メヨ。

解。 表ヨリ $\sin 18°10' = 0.3118$

及ビ $\sin 18°20' = 0.3145$

故ニ角ノ差 $10'$ ニ對スル函數ノ差ハ 0.0027 ナリ。之ヲ**表差**ト云フ。

然ルニ角ノ微小ナル變化ニ於ケル角ノ差ト之ニ對應スル三角函數ノ微小ナル差トハ正比例ヲナス[1](之ヲ比例部分ノ法則ト云フ)トシテ差支ナキヲ以テ,$2'$ ニ對スル正弦ノ差 x ハ比例式

$$10' : 2' = 0.0027 : x$$

ヨリ得ラル。

即チ $x = 0.0027 \times \dfrac{2}{10} = 0.0005$

$$\therefore \sin 18°12' = 0.3118 + 0.0005$$
$$= 0.3123$$

以上ノ計算ヲ次ノ如ク記ス。

(1) 此事實ノ證明及ビ研究ハ高等數學ニ屬ス。

$\sin 18°12'$

$18°10'$ ‥ニ對シ‥‥0.3118　　表差 $= 27$

$2'$ ……………… $\overset{*}{5}$　　$27\times0.2=\overset{*}{5}.4$

$\sin 18°12' \quad = \underline{\underline{0.3123}}$

例四。$\cos 67°23'$ ヲ求メヨ。

解。$\cos 67°23'$

$67°20'$ ……… 0.3854　　表差 $= 27$

$3'$ ……… $-\overset{*}{8}$　　$27\times0.3=\overset{*}{8}.1$

$\cos 67°23' \quad = \underline{\underline{0.3846}}$

或ハ $\cos 67°23'$

$30'$ ………… 0.3827　　表差 $= 27$

$-7'$ ………… $+\ 19$　　$27\times0.7=18.9$

$\cos 67°23' \quad = \underline{\underline{0.3846}}$

問。$\tan 43°5'$ 及ビ $\cos 37°33'$ ヲ求メヨ。

例五。$\sin A = 0.4572$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解。表ヨリ　$\sin 27°10' = 0.4566$

及ビ　$\sin 27°20' = 0.4592$

依テ　表差 $= 0.0026$

而シテ　$\sin A - \sin 27°20' = 0.0006$

故ニ　$0.0026 : 0.0006 = 10' : d'$

ヨリ　$d' = 2'.3$

ヲ得，之ヲ $27°10'$ ニ加ヘテ

$A = \underline{\underline{27°12'.3}}$　　ヲ得。

此計算ヲ次ノ如ク記ス。

$\sin A = 0.4572$

0.4566 ……… $27°10'$　　表差 $= 26$

6 ‥ ……… $\overset{*}{2}'.3$　　$\dfrac{6}{2.6} = \overset{*}{2}'.3$

$A = \underline{\underline{27°12'.3}}$

例六。$\cot A = 0.5455$ ヨリ A ヲ求メヨ。

解。$\cot A = 0.5455$

0.5467 ‥‥‥ $61°20'$　　表差 $= 37$

-12 ……… $+\overset{*}{3}'.2$　　$\dfrac{12}{3.7} = \overset{*}{3}.2$

$A = \underline{\underline{61°23'.2}}$

問。次ノ各式ヨリ x ヲ求メヨ。

(1) $\sin x = 0.4912$　　(2) $\tan x = 1.3363$

(3) $\cos x = 0.3540$　　(4) $3 \cot x = 2$

13. 三角函數ノ對數表。 此表ハ三角函數ノ眞數ノ對數ヲ排列セルモノニシテ其ノ組織ハ大略眞數表ノ組織ニ同ジ。但シ三角函數ノ値ハ1ヨリ小ナルモノ多キヲ以テ其對數ノ指標ハ負數多シ，依テ表中ニ負ノ指標ヲ記入スルコトヲ避ケ總テノ指標ニ10ヲ加ヘタリ，之ヲ表對數ト云

ヒ,之ヲ表ハスニ **L sin, L cos** 等ヲ以テス。

從テ　　$\log\sin A = \mathrm{L}\sin A - 10$　　等ナリ。

別冊トシテ附スルモノハ $10'$ 飛ビノ五桁ノ對數表ニシテ其用法次ノ如シ。

例一。 $\mathrm{L}\sin 28°47'$ ヲ求ム。

解。 表ヨリ　$\mathrm{L}\sin 28°40' = 9.68098$

及ビ　$\mathrm{L}\sin 28°50' = 9.68328$

故ニ此處ニ於ケル角 $10'$ ノ增加ニ伴フ對數ノ增加ハ 0.00230 (コレ表中 L sin ノ行ノ右ニ記シアル表差ヨリ知ルヲ得)ナリ。依テ此處ノ $7'$ ニ對スル增加ハ

$$10' : 7' = 0.00230 : x$$

ヨリ

$$x = 0.00161$$

依テ

$$\mathrm{L}\sin 28°47' = 9.68098 + 0.00161$$
$$= \underline{\underline{9.68259}}$$

之ヲ次ノ如ク記ス。

$$\begin{array}{lrl}
\mathrm{L}\sin 28°47' & & \\
\quad \underline{28°40'} \cdots\cdots\cdots & 9.68098 & \qquad 表差 = 230 \\
\quad 7' \cdots\cdots\cdots\cdots & \overset{*}{161} & \qquad 230 \times .7 = \overset{*}{161} \\
\hline
\mathrm{L}\sin 28°47' & = \underline{\underline{9.68259}} &
\end{array}$$

問。 $\mathrm{L}\sin 63°23'$ 及ビ $\mathrm{L}\tan 43°32'$ ヲ求メヨ。

例二。 $\log\cos 17°31'40''$ ヲ求ム。

解。 $\log\cos 17°31'40''$

$$\begin{array}{lrl}
\quad \underline{17°40'} \cdots\cdots & \bar{1}.97902 & \qquad 差表 = 40 \\
\quad (差)\,8'20'' \cdots\cdots\cdots & +\overset{*}{33} & \qquad 40 \times .8\frac{1}{3} = \overset{*}{33}.3 \\
\hline
\log\cos 17°31'40'' & = \underline{\underline{\bar{1}.97935}} &
\end{array}$$

問。 $\log\cot 18°35'10''$ ヲ求メヨ。

例三。 $\log\sin A = \bar{1}.44881$　ヨリ A ヲ求メヨ。

解。 $\log\sin A = \bar{1}.44881$

$$\begin{array}{rl}
\underline{472} \cdots\, 16°10' & \qquad 表差 = 433 \\
409 \cdots\cdots\, \overset{*}{9}'.4 & \qquad \frac{409}{43.3} = \overset{*}{9}.4 \\
\hline
A = \underline{\underline{16°19'.4}} &
\end{array}$$

問 1. 次ノ各式ヨリ A ヲ求メヨ。

$\mathrm{L}\sin A = 9.84358$,　$\mathrm{L}\tan A = 9.42126$,

$\log\tan A = 1.20073$,　$\log\cos A = \bar{1}.48896$

問 2. $\mathrm{L}\sin 13°10' = 9{\cdot}35752$,　$\mathrm{L}\sin 13°20' = 9.36289$ ヨリ　$\mathrm{L}\sin 13°17'12''$ ヲ求メヨ。　〔商船〕

問 3. 表ヲ用ヒテ

$\log\sec 37°42'$　及ビ　$\mathrm{L}\operatorname{cosec}\ 49°25'.6$　ヲ求メヨ。

問 4. $\log 2 = 0.30103$,　$\log 3 = 0.47712$ ヲ知リテ $\log\sin 60°$ ヲ計算セヨ。　〔海經〕

問 5. 次式ヲ最簡單ニセヨ。

$$1 + \log 75 - \log(13\times 8) + \frac{1}{2}\log 10816 - 2\log\sin 60°.$$　〔仙工〕

第四章

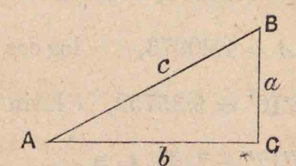
直角三角形ノ解法

14. 定義。 三角形ノ三邊及ビ三角ノ中三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ算出スルコトヲ三角形ヲ解クト云ヒ，其方法ヲ三角形ノ解法ト云フ。

本章ニ於テハ直角三角形ノ解法ヲ論ズベシ。

15. 直角三角形ノ邊ト角トノ關係。

直角三角形 ABC ニ於テ C ヲ直角トセバ，既ニ知レルガ如ク次ノ關係アリ。



$$\left.\begin{aligned} a &= c\sin A = c\cos B = b\tan A = b\cot B,\\ b &= c\sin B = c\cos A = a\tan B = a\cot A,\\ c &= \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} = \frac{b}{\sin B} = \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}\right\}\cdots(3)$$

此等ノ公式ニヨリテ直角三角形ヲ解クコトヲ得ベシ。

16. 直角三角形ノ解法。 直角三角形ニ於テハ直角ノ外，二ツノ部分ヲ知ラバ，(但シ鋭角二ツヲ知ル場合ヲ除ク)之ヲ解クコトヲ得。依テ直角三角形ノ解法ニ次ノ四ツノ場合アリ。

第一。斜邊ト一鋭角トヲ知ルトキ。

第二。斜邊ト一邊トヲ知ルトキ。

第三。一邊ト一鋭角トヲ知ルトキ。

第四。直角ノ二邊ヲ知ルトキ。

第一ノ場合ノ解法。

既知ノ部分ヲ c (斜邊)及ビ A (一鋭角)トセバ，

先ヅ　$B = 90° - A$　ヨリ B ヲ求メ，

次ニ　$a = c\sin A$

及ビ　$b = c\cos A$　ヨリ a 及ビ b ヲ得。

問 1.　$c = 2000,\ A = 30°$ トシテ解法ヲ行ヘ。

第二，第三，第四ノ場合ノ解法ハ學生之ヲ行ヘ。

問 2.　次ノモノヲ知リテ解法ヲ行ヘ。

$c = 40,\ a = 20$；　$b = 1.25$ 尺，$B = 30°$.〔海機〕；

$a = 150,\ B = 60°$；　$a = 3,\ b = \sqrt{3}$.

例。$a = 400.5,\ A = 62°35'$ トシテ解法ヲ行ヘ。

解法。先ヅ　$B = 90° - 62°35' = \underline{\underline{27°25'}}$.

次ニ b ヲ計算センタメ表ヨリ $\cot A$ ヲ求メテ

$\cot A = 0.5188$　　ヲ得ルヲ以テ,

$$b = a\cot A = 400.5 \times 0.5188 = \underline{\underline{207.8}}$$

終リニ c ヲ計算センタメ,表ヨリ $\sin A$ ヲ求メテ

$\sin A = 0.8877$　　ヲ得ルヲ以テ,

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{400.5}{0.8877} = 451.2$$

對數的計算。

先ヅ　$\log b = \log a + \log \cot A$　　ヨリ

$$\begin{array}{r} \log a = 2.60260 \\ \log \cot A = \bar{1}.71494 \\ \hline \log b = 2.31754 \end{array}$$

(此對數ノ眞數ヲ求メ)

$$\begin{array}{r} \underline{744} \cdots\cdots 2077 \\ 10 \cdots\cdots\cdots 5 \\ \hline b = \underline{\underline{207.8}}. \end{array}$$

次ニ　$\log c = \log a - \log \sin A$　　ヨリ

$$\begin{array}{r} \log a = 2.60260 \\ -\log \sin A = 0.05174 \\ \hline \log c = 2.65434 \end{array}$$

(此對數ノ眞數ヲ求メ)

$$\begin{array}{r} \underline{427} \cdots\cdots 4511 \\ 7 \cdots\cdots\cdots 1 \\ \hline c = \underline{\underline{451.2}}. \end{array}$$

問 3.　次ノモノヲ知リテ解法ヲ行へ。

[1].　$c = 2000,\ A = 18^\circ 24'$.

[2].　$a = 128.3,\ B = 50^\circ 36'$.

[3].　$a = 135.62,\ b = 200$.

問　題　3.

1. 次ノモノヲ與ヘテ直角三角形 ($C = 90^\circ$) ヲ解ケ。

〔1〕　$c = 1123,\ B = 54^\circ 43'$.

〔2〕　$c = 3457,\ b = 3404$.

〔3〕　$a = 293.8$ 尺, $A = 37^\circ 19'$.

〔4〕　$a = 3.104,\ b = 2.965$.

2. 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ $c \sin A \cos A$ ニ等シ,之ヲ證明セヨ。

3. 直角ニ交ル甲乙兩直線アリ,長サ a 尺ノ直線ガ甲トナス角ヲ 30° トス,然ラバ甲乙兩直線上ニ於ケル此直線ノ正射影ノ長サヲ求メヨ。〔海兵〕

4. 邊數 n,一邊 a ナル正多角形ノ面積及ビ內接圓ト外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。

〔海機, 陸主〕

5. 鐵道線路ノ勾配ガ $\frac{1}{40}$ ナル

トキハ,線路ハ水平線ト幾度幾分ノ角ヲナスカ。

6. 傾斜セル鐵道線路ガ水平面ト $0°47'$ ノ角ヲナセリ,今一尺ダケ鉛直ニ昇ルニハ此線路ニ沿フテ幾尺ヲ行クベキカ,尺ノ小數第一位マデ求メ其下四捨五入セヨ。

7. 鋭角三角形ノ頂點ヨリ底ニ垂線ヲ下セルトキ,ヨリテ分タレタル底ノ二部分ノ比ハ,之ニ隣レル底角ノ餘切ノ比ニ等シ。

又頂角ノ二部分ノ餘弦ノ比ハ隣邊ノ反比ニ等シ。之ヲ證明セヨ。

8. $a=1000$ 尺, $B=24°\,35'\,23''$ トシテ b ヲ求ム。

但シ　$\tan 24°\,35' = 0.41602$,　$\tan 24°\,36' = 0.41628$ ヲ與フ。

〔海兵〕

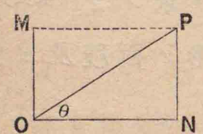
9. $c=6953$ 尺, $b=4321$ 尺ナルトキ B ヲ求メヨ。

但シ　$\log 4.321 = 0.63558$, $\log 6.953 = 0.84217$,

$L \sin 38°\,25' = 9.79335$ ニシテ $1'$ ニ對スル表差 0.00016 ヲ與フ。

〔大工〕

10. OP ナル移動ヲ,直角ヲナセル二ツノ移動 OM, ON ニ分解シ $\angle PON = \theta$[1] トセバ $OM = OP \sin\theta$, $ON = OP\cos\theta$, ナルコトヲ證明セヨ。



(1) θ ハ希臘文字ニシテ「シータ」ト訓ム。

第五章

高サ及ビ距離ノ測量

17. 測量上ノ用語及ビ器械。

直角三角形ノ解法ヲ應用シテ高サ及ビ距離ノ簡單ナル測量ヲナスヲ得。今先ヅ之ニ必要ナル用語及ビ器械ヲ説明セン。

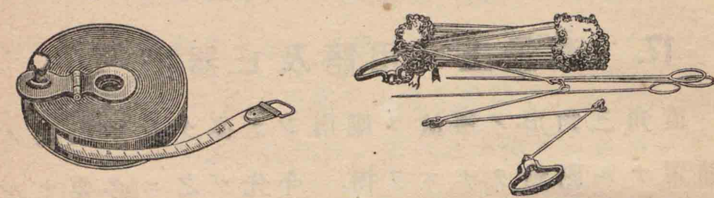
重錘ヲ吊シタルトキノ糸ノ方向ヲ**鉛直線**ト云ヒ,之ニ垂直ナル平面ヲ**水平面**ト云フ。而シテ水平面上ニ在ル直線ヲ**水平線**ト云ヒ,其間ノ角ヲ**水平角**ト云フ。又鉛直線ヲ含ム平面(卽チ水平面ニ垂直ナル平面)ヲ**直立面**ト云フ, 而シテ直立面ニ於テ或點ヲ觀測スルトキ,其視線ト眼ヲ過ギル水平線ト爲ス角ガ其水平面ノ上方ニ在ルトキハ此角ヲ其點ノ**仰角**又ハ**高度**ト云ヒ,其水平面ノ下方ニ在ルトキハ其點ノ**俯角**ト云フ。

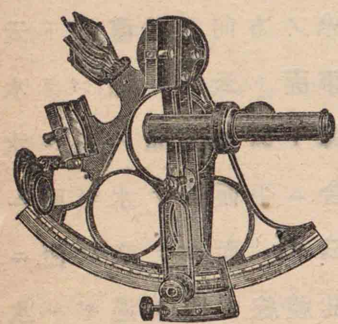
二點間ノ距離ヲ實測スルニハ測鎖又ハ巻尺ヲ以テシ,仰角,俯角及ビ水平角ハ經緯儀ヲ以テ測ル。

若シ觀測スベキ二點ニ至ル視線ノ定ムル平面ガ水平面ニモ直立面ニモアラザルトキハ,其二線

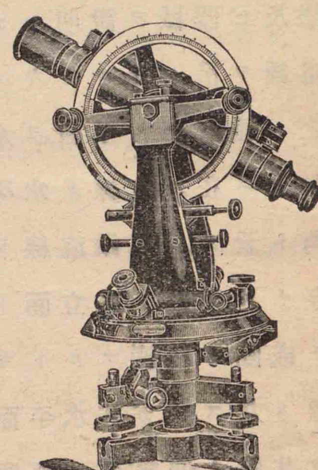
間ノ角ヲ測定スルニハ**六分儀**ヲ以テス。

巻尺　　測鎖　　測針





六分儀

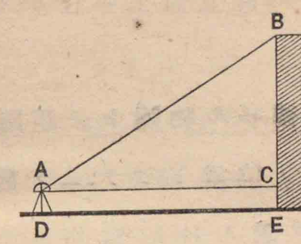


經緯儀

18. 水平面上ニ在リテ近ヅキ得ベキ直立物ノ高サヲ測ル法 (第7節應用ノ例一參照)

解。BEヲ測ラントスル直立物ノ高サトシ,ADヲ觀測者ノ眼ノ高サトセヨ。

先ヅAニ於テBEノ頂上Bノ仰角BACヲ測定シ,次ニDヨリ物體マデノ距離DEヲ測ルトキハ,



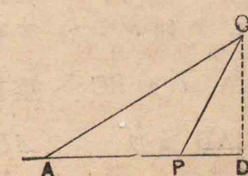
$$BC = AC \tan BAC.$$

故ニ
$$BE = DE \tan BAC + AD.$$

問1.　五重塔アリ,其基脚ヲ距ル500尺ノ所ヨリ其頂上ヲ望メバ仰角30°ナリト云フ。塔ノ高サ幾何。〔美〕

問2.　東京淺草ノ凌雲閣ノ高サハ220尺ナリ。或觀測者某地點ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リタルニ15°ヲ得タリ,今此觀測者ト凌雲閣トガ同一水平面上ニ在リトセバ此地點ハ凌雲閣ヲ距ルコト何町何間何尺ナルカ。但シ $\cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$ トス。〔醫專〕

問3.　人アリB點ニ於テ或山頂Cノ仰角ヲ測リテ60°ヲ得,又Bト同測

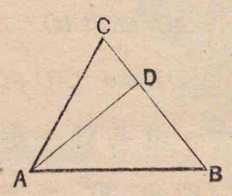


一水平面上 500 間ノ後方ナルA點ニ於テCノ仰角テヲ測リテ30°ヲ得タリ,依テ山ノ高サヲ求メヨ。但シA,B,Cハ同一直立面上ニ在ルモノトス。

〔專門〕

19. 近ヅキ得ザル物體トノ距離ヲ求ムル法。

解。 Cヲ物體ノ位置トシテ,Aヲ觀測者ノ位置トシ,其距離 AC ヲ求メントス。



カク直接ニ測ルコトヲ得ザル二點間ノ距離ヲ知ルニハ,先ヅ別ニ適當ノ位置ニ適當ナル距離ヲ精密ニ實測スルヲ要ス,之ヲ基線ト云フ。

先ヅ基線 AB ヲ實測シ,次ニA及ビBニ於テ夫夫角 BAC 及ビ ABC ヲ測定セバ

$$\angle C = 180° - (A+B)$$

ヨリ C ヲ知ルコトヲ得。

今AヨリBCヘ垂線ADヲ引ケリト考フレバ

△BADヨリ $$AD = AB \sin B,$$

又△CADヨリ $$AD = AC \sin C.$$

$$\therefore \quad AC \sin C = AB \sin B.$$

$$\therefore \quad AC = \frac{AB \sin B}{\sin C}$$

問1. 川岸ニ沿ヒ基線 $AB = 300$ 尺ヲ實測シ,A,Bヨリ對岸ノ一樹Cヲ觀測シテ $\angle CAB = 52° 20'$ 及ビ $\angle CBA = 64° 30'$ ヲ得タリ,AC ノ長サ如何。又此川ノ幅ヲモ計算セヨ。

注意。 本節ノ方法ハ結局二角ト其頂點間ノ邊ヲ知リテ三角形ヲ解ク方法(第四篇第57節)ニシテコレ次ノ原理ニ基ク。

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$ 〔正弦法則 第四篇第48節〕

問2. 上ト同法ニヨリ

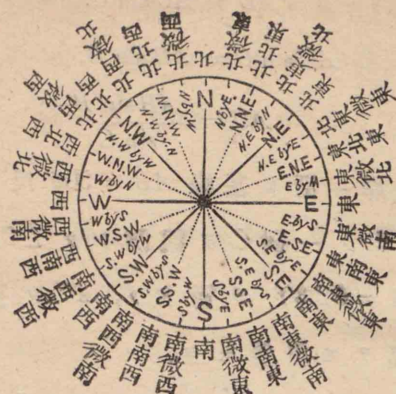
$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}.$$

ヲ證明シ,ヨリテ以テ BC ノ長サヲ求メヨ。

20. 方位。

物ノ位置ヲ表ハスニ既ニ確定セル位置ノ處ヨリ確定セル方向ヲ基トスル方位ニヨルコトアリ,次ニ其方法ヲ示サン。

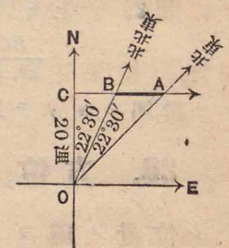
[1] 東西南北ノ間ノ角ヲ各八等分シ,從テ總テノ方位ヲ三十二方位トシ,其各方位ニ次ノ圖ニ示スガ如ク名稱ヲ附シ,其一ツノ方位ヲ以テスル方法。



コレ航海用羅針盤ノ方位ナリ。

問1.　毎時10節ノ速度ヲ以テ北東ニ走ル汽船アリ,此船ハ毎時幾浬ヅヽ北ニ移動スルカ。〔農實〕

問2.　一船進行中,北東及ビ北北東ニ方リテ二箇ノ燈臺ヲ見タリ。ソレヨリ正北ニ向ツテ進行スルコト20浬ニシテ再ビ前ノ燈臺ヲ見タルニ其方位何レモ　ナリシト云フ,二燈臺ノ距離幾何。



但シ $\tan 22°30' = 0.4142$.　〔水産〕

[2]　北(或ハ南)ヨリ東(或ハ西)ヘ偏スル角ヲ以テシ,之ヲ N 幾度幾分 E 等ト記スル方法。

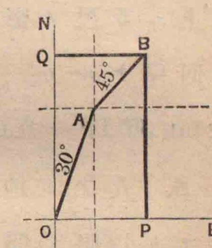
問3.　[1]ノ方法ニ於ケル北東,北北東及ビ西南.西ヲ此方法ニテ書キ表ハセ。

[3]　北ヲ0°ノ方位ト定メ,之ヨリ順次東,南,西ヲ經テ北ニ復ル度數ヲ以テスル方法。

コレ我國參謀本部陸地測量部ニ於テ採用セルモノナリ。

問4.　問2ニ於ケル方位ヲ此方法ニテ表ハセ。

問5.　或人東西及ビ南北ニ通ズル二ツノ道路ノ交點ヨリ $N\,30°\,E$ ノ方向ニ600尺ヲ進ミ,更ニ方向ヲ北東ニ轉ジ400尺ヲ進ミテ某地ニ達セリ,問フ此地點ハ兩道路ヲ距ルコト各幾尺ナルカ。〔海機〕



問　題　4.

1.　壁ニ懸ケタル梯子アリ,其長サ12尺ニシテ地面ト60°ノ傾斜ヲ爲セリ,其梯子ノ頂上ノ高サ及ビ其脚ヨリ壁ノ基底ニ至ル距離幾何。

2.　幅300尺ノ河岸ニ直立セル一塔ガ其正對岸ノ一點ニ於テ22°30′ノ角ニ對向スト云フ,塔ノ

高サヲ求ム。但シ尺ノ下二位迄求メヨ。〔鹿農〕

3. 平原ニ直立セル旗竿ノ基礎ヲ距ル 100 尺ノ處ニ於テ竿頭ノ仰角ヲ測リ $32°16'$ ヲ得タリ,竿ノ長サヲ計算セヨ。

但シ $\log 6.31 = 0.8000$, $\log 6.32 = 0.8007$,

$\log\tan 32°10' = \bar{1}.7986$, $\log\tan 32°20' = \bar{1}.8014$. 〔海機〕

4. 平地ニ直立セル長サ 6 尺ノ旗竿アリ,日中地上ニ 5 尺ノ影ヲ投ゼリト云フ,太陽ノ此時ノ仰角何程ナルカ。但シ $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$

$\log\tan 50°11' = 0.07901$, $\log\tan 50°12' = 0.07927$. 〔金醫〕

5. 人アリ,地面ト $30°$ ノ傾斜ヲナセル坂路ヲ登ルコト 12 町 35 間ナリ,此人ハ地面ヨリ幾何ノ高サニ在ルカ。

6. 地上 60 呎及ビ 40 呎ノ高サヲ飛行スル飛行機ヲ連ヌル直線ガ水平面ト $33°41'$ ノ角ヲナストキ,此二箇ノ飛行機ノ距離如何。

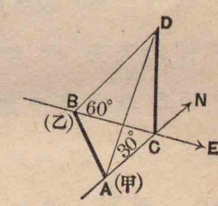
但シ $\cot 33°41' = 1.5$ トス 〔海經〕

7. 水平面ニ $45°$ 傾斜セル長サ 100 尺ノ坂路アリ,傾斜ヲ減ジテ $30°$ トナサバ坂路ノ長サ幾尺トナルベキカ。

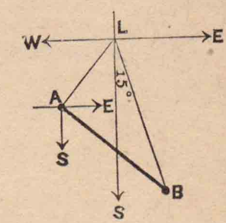
8. 屋上ニ旗竿ヲ樹ツルアリ,40 尺ノ距離ニ於テ竿ノ上下兩端ノ仰角ヲ測リテ $60°$ 及ビ $30°$ ヲ得タリ,旗竿ノ長サ如何。〔海機〕

9. A,B ハ海面上ノ二點ニシテ相距ルコト 2500 米ナリ,A,B 兩所ニ於テ AB 線ノ直上ニ在ル輕氣球 C ヲ望ミタルニ視線ガ水平面トナス角ハ夫々 $45°$ 及ビ $60°$ ナリ,輕氣球ノ水平面ヨリノ高サヲ問フ。〔東工〕

10. 同一水平面上ニ在リテ相距ルコト 2 粁ナル甲乙二點ニ於テ,同時ニ飛行船ノ方位及ビ仰角ヲ測リタルニ,甲ニ於テハ方位北,仰角 $30°$, 乙ニ於テハ方位東,仰角 $60°$ ヲ得タリ,飛行船ノ高サヲ米ノ位マデ計算シ未滿ハ四捨五入セヨ。〔新醫〕



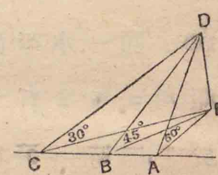
11. 或人燈臺 L ヨリ南西及ビ南 $15°$ 東ノ方向ニ二船 A 及ビ B ヲ見タリ,AB ノ方向ハ南東ニシテ A,L ノ距離ハ 4 浬ナリト云フ,二船ノ距離如何。〔海經〕



12. 正北ニ航行セル一軍艦正西ニ當リテ二ツノ燈臺ヲ見タリ,一時間航行ノ後其一燈臺ハ南西ニ,他ノ一燈臺ハ $S\,30°\,W$ ノ方位ニ見ヘタリ,而シテ二燈臺ノ距離ハ12浬ナリト云フ,此ノ軍艦ノ速度幾節ナリヤ。〔海機〕

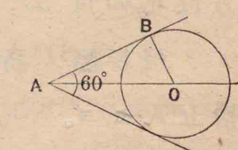
13. 水平ナル地面ニ東西ニ亙リテ長サl,高サhナル板屏アリ,太陽ノ方位ガ $S\theta W$, 其高度ガαナルトキ,屏ノ影ニテ蔽ハルル地面ノ面積如何。

14. 高ク揚レル氣球ヲ水平直線上ニ在ル三點 A, B, C ヨリ望ミタルニ,其仰角夫夫 60°, 45° 及ビ 30° ナリシト云フ,氣球ノ高サ如何。



但シ $AB = BC = 10$ 町トス。〔高〕

15. 圓形ノ池アリ,地上ノ一點ヨリ此池ヲ夾ム角60°ニシテ其點ヨリ池邊ニ至ル最短距離15間ナリト云フ,此池ノ直徑幾間ナルカ。



〔東工,上蠶〕

第六章

同角ノ三角函數ノ關係

21. 逆數關係。 定義ニヨリ,

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A}\\ \sec A &= \frac{1}{\cos A}\\ \cot A &= \frac{1}{\tan A}\end{aligned}\right\} \text{従テ} \quad \left.\begin{aligned}\sin A \operatorname{cosec} A &= 1\\ \cos A \sec A &= 1\\ \tan A \cot A &= 1\end{aligned}\right\}\cdots (4)$$

(第2節(4))

22. 相除關係。

$$\left.\begin{aligned}\tan A &= \frac{\sin A}{\cos A}\\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

コレ定義ヨリ直ニ證明スルコトヲ得。

*問 1. $\sin A = \cos A \tan A$, $\cos A = \sin A \cot A$ ヲ證明セヨ。

問 2. $\sin A \sec A \cot A$ ハ 1 ニ等シキコトヲ示セ。

問 3. $\tan x + \cot x = 2$ ヨリ $\tan x$ ノ値ヲ求メヨ。

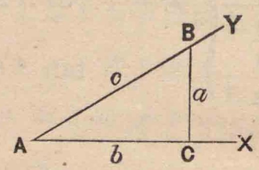
23. 第一平方關係。

$(\sin A)^2+(\cos A)^2=1.$

一般ニ指數ガ正ノ整數ナルトキハ指數ヲ函數記號ノ右肩ニ置ク。例ヘバ上式ハ次ノ如ク記ス。

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

證明。 直角三角形 ABC $(C=90°)$ ヨリ



$$\sin^2 A+\cos^2 A=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1$$

系。 $\sin^2 A=1-\cos^2 A$ 及ビ $\cos^2 A=1-\sin^2 A.$

問 1. 因數分解法ニヨリテ $\sin^4 A-\cos^4 A$ ハ $\sin^2 A-\cos^2 A$ ニ等シキコトヲ示セ。

***問 2.** $\cos^2 A-\sin^2 A$ ヲ $2\cos^2 A-1$ 及ビ $1-2\sin^2 A$ ニ變形セヨ。

問 3. $\sin^4 A+\cos^4 A$ ヲ $\sin A$ ニテ表ハセ。

問 4. $2\sin^2 x+3\cos x-3=0$ ヨリ $\cos x$ ヲ求メヨ。

24. 第二平方關係。

$$\left.\begin{array}{l}1+\tan^2 A=\sec^2 A\\ 1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

證明。 $1+\tan^2 A=1+\dfrac{a^2}{b^2}$ 〔前節ノ圖ヲ見ヨ〕

$$=\frac{b^2+a^2}{b^2}=\frac{c^2}{b^2}=\sec^2 A.$$

同樣ニ $1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A.$

***問。** 次ノ公式ヲ作レ。

$$\tan A=\sqrt{\sec^2 A-1},\qquad \cot A=\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A-1}.$$

25. 三角函數ノ一ツヲ知リテ他ノ函數ヲ求ムル法。

例ヘバ $\sin A$ ヲ以テ他ノ函數ヲ表ハス公式ヲ求メンニ，先ヅ第23節系ニヨリテ

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

從テ公式(5)ヨリ

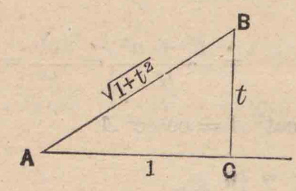
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

及ビ $$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}.$$

又 $$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 A}}.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}.$$

又此等ノ公式ハ次ノ如ク作圖ニヨリテモ求ムルヲ得。例ヘバ $\tan A$ ヲ知レル場合ニ於テハ, $\tan A$ ヲ t ニテ表ハシ, $AC=1$, $BC=t$ ナル直角三角形 ABC ($C=90°$) ヲ作ラバ,



$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{t}{1}=t$$ ニシテ,

且 $$AB=\sqrt{1+t^2}=\sqrt{1+\tan^2 A}.$$

故ニ $$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

及ビ $$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$$

等ナリ。

問 1. $\tan A=\dfrac{8}{15}$ ナルトキ, $\sin A, \cos A$ ノ値如何。 〔海兵,海機〕

問 2. $\sin A=\dfrac{12}{13}$ トシテ他ノ函數ヲ求メヨ。

問 3. $\cos A$ ニテ他ノ函數ヲ表ハス公式ヲ作レ。

問 4. $\cos A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ トシテ $\sin A$, $\tan A$ ヲ求メヨ。

問 5. 公式 $\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 A}}$ ヲ作レ。

26. 三角恒等式。 前節ニ示セル公式ノ如ク,三角函數ヲ含ム恒等式ヲ三角恒等式ト云フ。

注意。 或特別ナル角ニ限リテ成立スル等式ハ三角方程式ト云フ名ノ下ニ既ニ之ヲ示セリ。

例 1. $$(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2-(\tan A+\cot A)^2 = 2\sec A\operatorname{cosec} A$$ ヲ證明セヨ。

證明。
$$\begin{aligned}\text{左邊} &= \sec^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}^2 A\\ &\quad-(\tan^2 A+2\tan A\cot A+\cot^2 A)\\ &=1+\tan^2 A+2\sec A\operatorname{cosec} A+1+\cot^2 A\\ &\quad-\tan^2 A-2-\cot^2 A\\ &=2\sec A\operatorname{cosec} A.\end{aligned}$$

問。 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

[1]. $(\sin A+\cos A)^2+(\sin A-\cos A)^2=2.$

[2]. $(1+\sin\theta)^2+(1+\cos\theta)^2=3+2(\sin\theta+\cos\theta).$

例 2. $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)$ ヲ證明セヨ。

證明。
$$\begin{aligned}\text{左邊} &=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\\ &=(\sin\alpha+\cos\alpha)\{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin\alpha\cos\alpha\}\\ &=(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha).\end{aligned}$$

問。 $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$ ヲ證明セヨ。

例 3. $\tan A(\cos^2 A - \sin^2 A) = \sin A \cos A(1 - \tan^2 A)$

ヲ證明セヨ。

證明。左邊 $= \dfrac{\sin A}{\cos A}\cos^2 A - \dfrac{\sin A}{\cos A}\sin^2 A$

$$= \sin A \cos A - \frac{\sin^3 A}{\cos A},$$

右邊 $= \sin A \cos A - \sin A \cos A \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$$= \sin A \cos A - \frac{\sin^3 A}{\cos A}.$$

$\therefore\quad \tan A(\cos^2 A - \sin^2 A) = \sin A \cos A(1 - \tan^2 A).$

問。 $\operatorname{cosec} \alpha(\sec \alpha - 1) + \sin \alpha = \cot \alpha(1 - \cos \alpha) + \tan \alpha$

ヲ證明セヨ。

例 4. $\dfrac{\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha}{\sec \alpha + \tan \alpha} = \dfrac{\sec \alpha - \tan \alpha}{\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha}$

ヲ證明セヨ。

證明。此等式ガ眞ナルタメニハ,

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha - \cot^2 \alpha = \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha,$$

從テ $\quad 1 + \cot^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha - \tan^2 \alpha$

ナレバ可ナリ, 然ルニ此式ノ兩邊ハ共ニ 1 ニ等シ。故ニ所題ノ等式ハ眞ナリ。

問。 $\dfrac{1 - \sec A + \tan A}{1 + \sec A - \tan A} = \dfrac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1}$

ヲ證明セヨ。

注意。 恒等式ヲ證明スルニハ,例一,例二ニ於テ示セルガ如ク,一邊(通例複雜ナル邊,又ハ公式ヲ適用シ得ベキ邊又ハ因數ニ分解シ得ル邊)ヲ變ジテ他ノ邊ニ同ジクスルヲヨシトスレドモ,例三ノ如ク兩邊ヲ別々ニ變ジテ同ジ式ニ化スルモ可ナリ,又例四ノ如ク所題ノ等式ガ成立スルタメノ十分條件ヲ考究スルコトアリ。

此方法ハ學生諸子ガ既ニ代數學ニ於ケル恒等式ノ證明ニ用ヒタルモノニシテ,幾何學ニ於ケル多クノ問題ノ解法ノ如キモ結局此方法ノ適用ニ外ナラズ。

問 題 5.

1. 次ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ求メヨ。

[1] $3 \sin x = 2 \cos^2 x.$

[2] $8 \sin^2 x + 3 \operatorname{cosec}^2 x = 10.$

[3] $6 \cot^2 x - 4 \cos^2 x = 1.$

2. $\sin \alpha = \dfrac{n}{m}$ トシテ $\tan \alpha$ ヲ求メヨ。

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ (3) − (12)。

3. $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha.$

4. $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$. 〔美術〕

5. $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$. 〔海兵,商船〕

6. $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$. 〔商船〕

7. $(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A)$.

8. $(\tan A + \sec A)^2 = \dfrac{1 + \sin A}{1 - \sin A}$. 〔商船〕

9. $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x$.

10. $\dfrac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{1 + \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta} = \tan\theta$. 〔陸士〕

11. $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} + \dfrac{\tan x}{\sec x + 1} = 2 \operatorname{cosec} x$. 〔海機〕

12. $\sqrt{\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$.

13. 公式(5)〔40頁〕ヨリ次ノ恒等式ヲ誘導セヨ。

$\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2\sin^2 A \cos^2 A$.

14. 次ノ二式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $(\sin A - \operatorname{cosec} A)^2 - (\tan A - \cot A)^2$

$+ (\cos A - \sec A)^2$. 〔商船〕

[2] $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)(\tan A + \cot A)$.

〔海兵〕

15. $\sin A = a$, $\tan A = b$ ナルトキハ,

$b^2 = a^2(1 + b^2)$ ナルコトヲ證明セヨ。〔商船〕

16. $\sqrt{a^2 + b^2} = a \sec\theta$ ナルトキハ $b = a\tan\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。 〔商船〕

17. $\tan\theta = 0.75$ ナルトキ $\sin^6\theta + \cos^6\theta$ ノ値ヲ求メヨ。 〔海機〕

18. $1 + \sin^2\theta = 3\cos\theta\sin\theta$ ヨリ $\tan\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

19. $\sec A = \sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$ ノ値ヲ求メヨ。 〔陸士〕

20. 次ノ各恒等式ヲ證明セヨ。

[1] $\tan^2 A - \cot^2 B = \sec^2 A - \operatorname{cosec}^2 B$.

[2] $\sin\theta(1 + \tan\theta) + \cos\theta(1 + \cot\theta)$

$= \sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$. 〔盛農,新醫〕

[3] $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0$.

[4] $\sin^2 x \tan^2 x + \cos^2 x \cot^2 x = \tan^2 x + \cot^2 x - 1$.

[5] $\dfrac{1}{1 + \sin x} = \sec^2 x - \sec x \tan x$.

[6] $\dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} \cdot \dfrac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} = \sin^2 x \sec^2 x$. 〔上靏〕

[7] $\dfrac{\sin^6\theta + \cos^6\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta} = \dfrac{1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta}{1 - \tan^4\theta}$. 〔米工〕

[8] $\dfrac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} + \dfrac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta - \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta$.

〔七高,新醫〕

21. $\dfrac{(\tan A + \cot A)\sin A \cos A}{\dfrac{1}{\tan^2 A + 1} + \dfrac{1}{\cot^2 A + 1}}$ ヲ簡單ニセヨ。〔海機〕

22. 次式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{1}{1+\sin^2 x}+\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sec^2 x}+\frac{1}{1+\mathrm{cosec}^2 x}.$$ 〔同上〕

23. $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ ナラバ, $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$ ナルコトヲ證明セヨ。〔海機〕

24. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ ナルトキ, $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ ノ値ヲ求メヨ。〔山商〕

25. $\cot A=\frac{q}{p}$ ナルトキ, $\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ ノ値ヲ求メヨ。〔秋鑛〕

雜　題　1.

1. 直角三角形ノ一鋭角ノ正切0.75ニシテ其周圍12寸ナルトキハ斜邊ノ長サ如何。〔海機〕

2. 直角三角形ABCニ於テCヲ直角トセバ,

$\tan A+\tan B=\frac{c^2}{ab}$ ナリ。〔海兵〕

3. $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ與ヘテ,

[1] $\log\cos 30°$, $\log\sec 45°$ ヲ計算セヨ。〔東商〕

[2] $x=a^m b^n(a^2+b^2)^p\sin\theta\log r$ ヲ計算セヨ。

但シ $a=16$, $b=4$, $\theta=30°$, $m=1.5$, $n=0.5$, $p=-1$, $r=15$ トス。〔東工〕

4. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\cos A=\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2 A}}=\frac{\sqrt{\mathrm{cosec}^2 A-1}}{\mathrm{cosec}\,A},$$ 〔海兵〕

$$\tan A=\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{cosec}^2 A-1}}.$$

5. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1.$

[2] $\sec^2 A+\mathrm{cosec}^2 A=\sec^2 A\,\mathrm{cosec}^2 A.$

[3] $\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\times\frac{1+\sec\theta}{1+\mathrm{cosec}\,\theta}=\tan\theta.$

[4] $\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta.$

6. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $(\tan A+\tan B)(\cot A-\cot B)$

$+(\tan A-\tan B)(\cot A+\cot B).$ 〔海機〕

[2] $(\mathrm{cosec}\,A-\sec A)^{-1}(\cos A-\sin A)(\tan A+\cot A).$

[3] $(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2+(x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2.$

[4] $(\sec x\sec y+\tan x\tan y)^2-(\tan x\sec y+\sec x\tan y)^2.$

〔海機〕

[5] $\frac{\sec^2 A\sin^2 A-\mathrm{cosec}^2 A+\mathrm{cosec}^2 A\cos^2 A}{\sec^2 A\sin^2 A-\mathrm{cosec}^2 A\cos^2 A}.$

[6] $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}.$

7. $\tan\theta=\frac{2mn}{m^2-n^2}$ ナラバ次式ノ値如何。

$2mn\cos^2\theta-(m^2-n^2)\cos\theta\sin\theta.$ 〔商船〕

8. 次ノ方程式ヨリxノ値ヲ求メヨ。

[1]　$4\cos^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3} = 0.$

[2]　$4+\sqrt{2} = 4\cos^2 x + 2(\sqrt{2}+1)\sin x.$

9.　次ノ聯立方程式ヨリ x, y ノ値ヲ求メヨ。

$$\tan^2 x + \tan^2 y = \frac{10}{3}, \qquad \tan x \tan y = 1.$$

10.　次ノ方程式ヨリ θ ヲ消去セヨ。

[1]　$\tan\theta + \cos\theta = a, \quad \tan\theta - \cos\theta = b.$　〔商船〕

[2]　$m\sec\theta = 1 + \tan\theta, \quad n\sec\theta = 1 - \tan\theta.$　〔陸士〕

11.　直角三角形 ABC $(C = 90°)$ ニ於テ, $A = 22° 24' 18''$, $b = 150$ ナルトキ $\log a$ ヲ求ム。〔東商〕

但シ $\log 2 = 0.30103, \quad \log 3 = 0.47712,$

$\log\cot 22° 20' = 0.38636, \quad \log\cot 22° 30' = 0.37278.$

12.　半徑 r ノ圓ノ弦ガ其一端ヲ過グル直徑ト角 α ヲナストセバ,此弦ノ長サ如何。〔海機〕

又 $r = 5$尺, $\alpha = 58° 34'$ トシテ弦ノ長サヲ求メヨ。

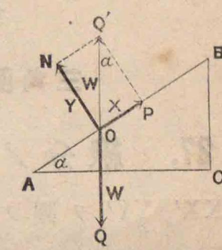
13.　斜邊 c ト二邊ノ和 $a+b$ トヲ知リテ直角三角形ヲ解ケ。〔高〕

14.　東西 $2\sqrt{3}$ 浬ヲ隔ツル A, B ノ二小嶋アリ,燈臺 C ヨリ A ハ南西ニ, B ハ南東ニ見ユ,然ラバ A ヨリ $(\sqrt{3}-1)$ 浬ニシテ AB ノ中間ニ在ル暗礁 D ハ燈臺ヨリ何レノ方向ニ當ルカ。〔海兵〕

15.　小山ノ麓ヨリ a 町離レテ平野ノ中ニ聳ユル塔ア

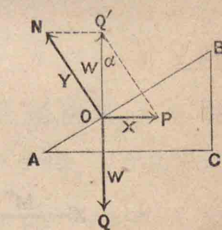
リ,今小山ノ傾斜角ヲ α トスレバ,其麓ヨリ c 町登リタル人ガ塔頂ヲ眺ムルトキ,塔ノ向側ニ塔ヨリ b 町ノ距離ニアル沼池ヲ眺ムルコトヲ得ト云フ,然ラバ塔ノ高サ如何。〔米工〕

16.　傾斜ノ角ガ α ナル斜面 AB ニ重サ W (之ヲ OQ ニテ表ハス) ヲ斜面ニ平行ナル力 X (OP) ニテ支ユルトキハ, $X = W\sin\alpha$ ナルコトヲ證明セヨ。



又 $\alpha = 30°$ ナルトキ, 100斤ノ重サヲ引上グルニハ幾何ノ力ヲ要スルカ。

〔Y (ON) ヲ斜面ノ抵抗トセバ X ト Y ニテ其合力 OQ′ 卽 W ヲ支ユルコトトナル〕。



17.　前問ニ於テ X ヲ水平ノ力トセバ $X = W\tan\alpha$ ナルコトヲ證明セヨ。

第二篇

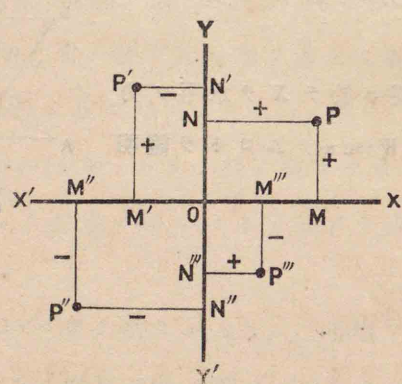
一般ノ角ノ三角函數

第一章

三角函數ノ定義及ビ關係

27. 線分ノ正負。

XX′, YY′ ヲ圖ノ如ク互ニ直交スル二直線トシ, O ヲ其交點トセヨ。然ルトキハ, O ヨリ OX 上ノ



一點 M ニ至ル線分 OM 及ビ之ニ平行シテ YY′ ノ上ノ點ヨリ YY' ノ右方ニ引ケル線分 NP, $N'''P'''$ 等ヲ正トシ, OX′ 上ノ一點 M′ ニ至ル線分 OM' 及ビ之ニ

平行シテ YY′ ノ左方ニ在ル線分 $N'P'$, $N''P''$ 等ヲ負トス。又 YY′ ニ沿ヘル ON, ON' 及ビ之ニ平行シテ XX′ ノ上方ニ在ル線分 MP, $M'P'$ 等ヲ正トシ,下方ニ在ル線分 ON'', ON''', $M''P''$, $M'''P'''$ 等ヲ負トス。

略言セバ,

(1) YY′ヨリ之ニ垂直ニ右方ニ向ヒテ測レル線分ヲ正トシ,左方ニ向ヒテ測レル線分ヲ負トス。

(2) XX′ヨリ之ニ垂直ニ上方ニ向ヒテ測レル線分ヲ正トシ,下方ニ向ヒテ測レル線分ヲ負トス。

28. 點ノ坐標。

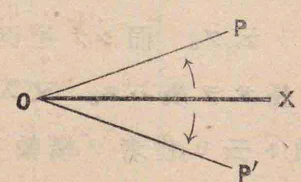
前節ノ圖ニ於テ XX′ 及ビ YY′ ヲ定マリタル二直線トセバ,點 P ノ位置ハ P ト此兩直線トノ距離 PM, OM ノ長サニヨリテ定ムルヲ得。PM, OM ヲ此兩直線ニ關スル P 點ノ坐標ト云ヒ, OM ヲ橫坐標, PM ヲ縱坐標ト云フ。而シテ通例 x 及ビ y ヲ以テ OM 及ビ PM ノ長サヲ表ハス。又 XOX′ 及ビ YOY′ ヲ P 點ノ坐標軸ト云ヒ,前者ヲ橫軸又ハ x ノ軸,後者ヲ縱軸又ハ y ノ軸ト云フ,而シテ兩軸ノ交點 O ヲ坐標ノ原點ト云フ。

一ツノ變數ヲ有スル一次又ハ二次ノ代數式ノ

値ノ變化及ビ互ニ相關聯シテ變化スル二量ノ變化ノ狀況ノ如キハ坐標ヲ用ヒテ甚ダ明瞭ニ之ヲ圖示スルヲ得ルコト,幷ニ坐標ヲ用ヒテ二元一次方程式ヲ圖示スレバ一ツノ直線ヲ得,二元二次方程式ヲ圖示スレバ一般ニ一ツ又ハ二ツノ曲線枝ヨリ成ル曲線ヲ得,其圖形ヲ其方程式ノ軌跡ト云フコトハ學生諸子ガ既ニ代數學及ビ幾何學ニ於テ學ビタルコトナルベシ。

29. 角ノ正負。

直線 OP ノ一端 O ヲ固定シ,之ヲ定直線 OX ノ位置ヨリ時計ノ針ト反對ノ方向ニ廻轉セシメテ生ズル角 XOP ヲ正角トシ, OX ノ位置ヨリ前ト反對ノ方向卽チ時計ノ針ト同ジ方向ニ廻轉セシメテ生ズル角 XOP' ヲ負角トス。



例ヘバ角 XOP 及ビ XOP' ノ大サガ共ニ 30° ナラバ

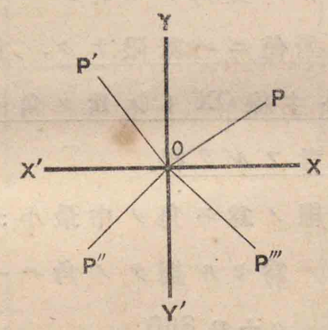
$\angle XOP = +30°$,　$\angle XOP' = -30°$　ナリ。

定直線 OX ヲ角ノ主線ト云ヒ, OP ヲ動徑ト云フ,

30. 象限,角ノ大サ。

互ニ直交スル二直線 XOX′, YOY′ ニテ分タレタル平面ノ四部分ヲ象限ト云ヒ, OX, OY ヲ圖ノ如ク正ノ方向トセバ, XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX ヲ順次ニ第一,第二,第三,第四象限ト云フ。

角ヲ考フル場合ハ主線ヲ OX トシ動徑 OP ガ OX ノ位置ヨリ O 點ノ周リニ廻轉スルモノトス。



動徑 OP ガ主線 OX ヲ發シテ正ノ方向ニ廻轉セバ生ズル角ハ次第ニ增大シ,

$$0° < XOP < 90°,$$
$$90° < XOP' < 180°,$$
$$180° < XOP'' < 270°,$$
$$270° < XOP''' < 360°.$$

OPガ尚廻轉ヲ續ケOXヲ超エテ再ビ圖中OPノ位置ニ至ルト考フレバOPハOXト360°ヨリ大ナル角XOPヲ作ルト考フルヲ得。例ヘバ∠XOPノ初メノ大サヲ30°トセバ,後ノ大サハ30°+360°卽チ390°ナリ,而シテOPハ尚幾回ニテモOノ周リヲ廻轉シテ尚大ナル角ヲ作ルコトヲ得。

同様ニOPハ負ノ方向ニモ幾回モ廻轉シテ如何ニ絕對値ノ大ナル負角ヲモ作ルコトヲ得。

故ニ角ノ絕對値ニハ際限ナク,且ツ動徑ノ一ツノ位置OPト主線OXトノ爲ス角ハ正角負角共ニ無數アリト考フルヲ得。

今動徑ト主線ノ爲ス角ノ中最小ナル正角ヲαトセバ此二線ノ爲セル總テノ角ハ一ツノ式

$$\alpha + n.360^\circ$$

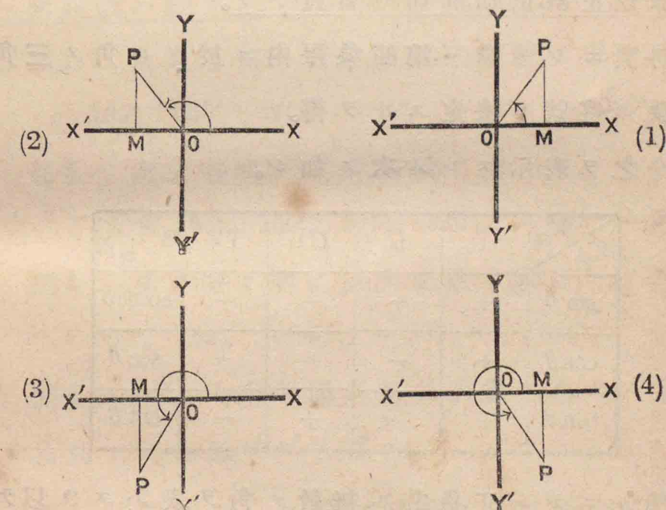
ニテ表ハサル,但シnハ零又ハ正負ノ整數トス。

上ノ圖ニ於ケル四角 XOP, XOP′, XOP″, XOP‴ 及ビ之ト二邊ヲ共有スル正及ビ負ノ總テノ角ヲ夫々第一,第二,第三,第四象限ノ角ト云フ。

問. 120°, 225°, 405°, −30°, −300°, −750° ハ各何象限ノ角ナルカ。又此各角ヲ作圖セヨ。

31. 一般ノ角ノ三角函數。

角XOPヲθニテ表ハシ,OXヲ主線,OPヲ動徑トセバ,角θノ三角函數ハOP上ノ一點PヨリOX或ハ其延長上ニ垂線PMヲ引キテ第一篇第2節ト同様トス。但シMP及ビOMハ第27節ニ述ベシ如ク符號ヲ有シ,OPハ常ニ正ナリトス。



卽チ

$$\sin\theta = \frac{MP}{OP},\qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP},$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP},\qquad \sec\theta = \frac{OP}{OM},$$

$$\tan\theta = \frac{MP}{OM},\qquad \cot\theta = \frac{OM}{MP}.$$

依テ第一象限內ニ於テハ MP, OM ハ共ニ正ナルヲ以テ,

第一象限內ニ在ル角ノ三角函數ハ皆正ナリ。

第二象限內ニ於テハ MP ハ正ニシテ, OM ハ負ナルヲ以テ,

第二象限內ニ在ル角ノ正弦ト餘割トハ正ニシテ,餘弦,正割,正切,餘切ハ皆負ナリ。

同樣ニシテ第三,第四象限內ニ於ケル角ノ三角函數ノ符號ヲ決定スルヲ得。

今之ヲ表示スレバ次ノ如シ。

象限＼函數	I	II	III	IV	象限／函數
$\sin\theta$	+	+	−	−	$\operatorname{cosec}\theta$
$\cos\theta$	+	−	−	+	$\sec\theta$
$\tan\theta$	+	−	+	−	$\cot\theta$

然ルニ θ ハ正,負共ニ無數ノ角ヲ表ハスヲ以テ,同ジ三角函數ヲ有スル角ハ無數アリ。今其中ノ最小ナル正角ヲ α トセバ $\theta=\alpha+n.360°$ ナルヲ以テ $\alpha+n.360°$ ナル式中ニ含マル丶總テノ角ノ三角函數ハ皆 $\angle\alpha$ ノ三角函數ニ同ジ。

卽チ
$$\left.\begin{aligned}\sin(n.360°+\alpha)&=\sin\alpha\\ \cos(n.360°+\alpha)&=\cos\alpha\\ \tan(n.360°+\alpha)&=\tan\alpha\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$
等

但シ n ハ 0 又ハ正,負ノ整數トス。

從テ或角ニ 360° ノ任意整數倍ヲ加減スルモ其三角函數ハ變ラズ。

問 1.　次ノ各角ノ三角函數ノ符號ヲ言ヘ。

135°,　265°,　275°,　−10°,　−91°,　−1000°.

問 2.　次ノ各角ノ三角函數ヲ求メヨ。

120°,　135°,　150°,　225°,　330°,　−45°,　−30°.

問 3.　次ノ各ノ角ノ三角函數ヲ求メヨ。

390°,　765°,　10860°,　−330°,　−1020°.

問 4.　45° ノ角ト同ジ三角函數ヲ有スル正角ト負角トヲ各三ツヅ丶言ヘ。

問 5.　正弦ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ角ヲ三ツ言ヘ。

又餘弦ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ角ヲ三ツ言ヘ。

問 6.　次ノ各方程式ニ適スル角ヲ三ツ求メヨ。

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad 2\cos x=\sqrt{2},\quad \tan x=\sqrt{3}.$

32. 一般ノ角ノ三角函數間ノ關係。

第一篇第六章公式(4), (5), (6), (7)ハ一般ノ角ニ就テモ成立スルコト容易ニ證明スルヲ得。

故ニ θ ノ正負大小ニ論ナク,

$$\begin{cases} \sin\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta = 1 \\ \cos\theta\sec\theta = 1 \\ \tan\theta\cot\theta = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \\ 1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\,\theta. \end{cases}$$

從テ是等ノ公式ヨリ誘導セラルヽ公式,恒等式ハ角ノ大サ及ビ符號ノ如何ニ關セズ皆眞ナリ。

但シ第25節ニ於テ求メシ公式ハ不十分ナリ, 何トナレバ, 例ヘバ $\sin A$ ヲ知リテ $\cos A$ ヲ求ムルニ, A若シ第二象限ノ角ナリトセバ,

$$\cos A = -\sqrt{1-\sin^2 A} \qquad \text{ナレバナリ。}$$

詳言スレバ A ノ存在スル象限ニヨリテ根號ノ前ニ正又ハ負ノ符號ヲ附スル必要アレバナリ。

問 1.　$\sin A = \dfrac{3}{5}$ ヲ知リテ $\tan A$ 及ビ $\mathrm{cosec}\,A$ ヲ求メヨ。〔海經〕

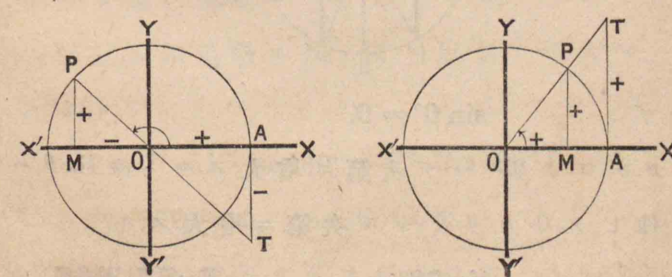
問 2.　A ハ三角形ノ一角ニシテ其正切ハ $-\dfrac{4}{3}$ ナリ, A ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。〔海機〕

33. 三角函數ヲ線分ニテ表ハスコト。

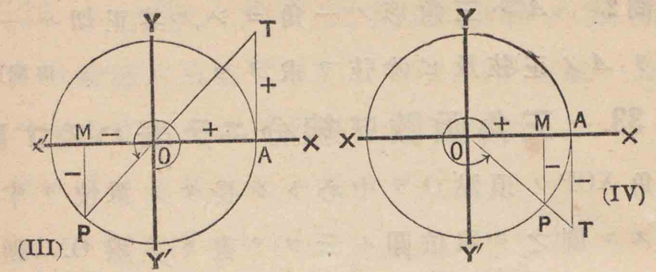
角 XOP ノ頂點 O ヲ中心トシ,長サノ單位ヲ半徑トスル圓(之ヲ單位圓ト云フ)ヲ畫キ,主線 OX, 動徑 OP ト夫々A, P ニ於テ交ハラシメ且 A ニ於ケル其圓ノ切線ト OP トノ交點ヲ T トセバ, OP ト OA ノ測度ハ共ニ 1 ナルヲ以テ,角 $XOP(\theta)$ ノ正弦,餘弦,正切ハ次ノ如シ。

$$\sin\theta = MP,$$
$$\cos\theta = OM,$$
$$\tan\theta = AT.$$

但シ MP, OM, AT ハ夫々其測度ヲ表ハシ,且ツ符號ヲ有スルモノトス。



(1)

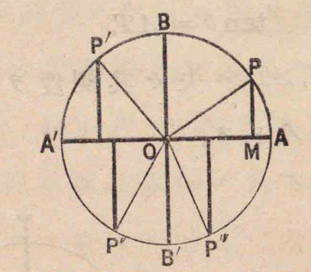


34. 三角函數ノ變化。

OA ヲ主線, OP ヲ動徑トシ, 角 AOP ヲ θ ニテ表ハシ, θ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ次第ニ増大スルニ從ヒ, 其三角函數ノ變化スル有樣ヲ考究セントス。

〔1〕 **正弦ノ變化。** 單位圓ニ於テ

$$\sin\theta = MP.$$



先ヅ $$\sin 0° = 0.$$

θ ガ $0°$ ヨリ $90°$ マデ次第ニ増大スルトキ $\sin\theta$ ハ之ニ伴ヒテ 0 ヨリ 1 マデ次第ニ増大ス,

而シテ $$\sin 90° = 1.$$ 〔第一篇第11節參照〕

θ ガ $90°$ ヨリ $180°$ マデ増大スルトキ, $\sin\theta$ ハ 1 ヨリ 0 マデ次第ニ減少ス,

而シテ $$\sin 180° = 0.$$

θ ガ $180°$ ヨリ $270°$ マデ増大スルトキ $\sin\theta$ ハ常ニ負ニシテ其絶對値ハ 0 ヨリ 1 マデ次第ニ増大ス, 而シテ $$\sin 270° = -1.$$

θ ガ $270°$ ヨリ $360°$ マデ増大スルトキ, $\sin\theta$ ハ猶負ニシテ其絶對値ハ 1 ヨリ 0 マデ減少ス,

而シテ $$\sin 360° = 0.$$

θ ガ $360°$ ヲ超エテ更ニ増大スレバ, 復タ上ト同一ノ變化ヲ繰返スコト明カナリ。

〔2〕 **餘弦ノ變化。** 前ノ圖ニ於テ

$$\cos\theta = OM.$$

故ニ第一象限ニアリテハ $\cos\theta$ ハ 1 ヨリ 0 マデ減少シ, 第二象限ニアリテハ 0 ヨリ -1 マデ減少シ, 第三, 第四象限ニアリテハ反對ニ増大ス。

而シテ

$$\cos 0° = 1,\quad \cos 90° = 0,\quad \cos 180° = -1,$$
$$\cos 270° = 0,\quad \cos 360° = 1.$$

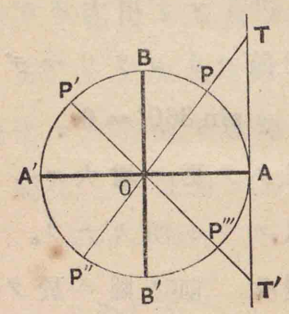
注意. 坐標ヲ用ヒテ方程式

$$y = \sin x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$y = \cos x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

ヲ圖示スレバ折込ミ圖ニ示スガ如キ曲線ヲ得。コレ正弦及ビ餘弦ノ變化ノ圖ニシテ,此曲線ヲ夫夫正弦曲線及ビ餘弦曲線ト云フ。

〔3〕 正切ノ變化。 定義ニヨリ



$\tan\theta = AT$ 　　ナルヲ以テ,

先ヅ　　$\tan 0° = 0.$

θ ガ $0°$ ヨリ $90°$ マデ增大スルトキ, $\tan\theta$ ハ 0 ヨリ次第ニ增大シ, θ ガ十分 $90°$ ニ近ヅカバ $\tan\theta$ ハ如何ニ大ナル正數ヨリモ大トナル,之ヲ略言シテ

$90°$ ノ正切ハ無限大ナリト云フ。

θ ガ僅ニ $90°$ ヲ超ユルトキハ,正切ハ俄ニ負トナリテ其絶對値ハ如何ナル數ヨリモ大ナリ,故ニ

............(1)

............(2)

スガ如キ曲線ヲ得。
圖ニシテ,此曲線ヲ
ト云フ。

リ

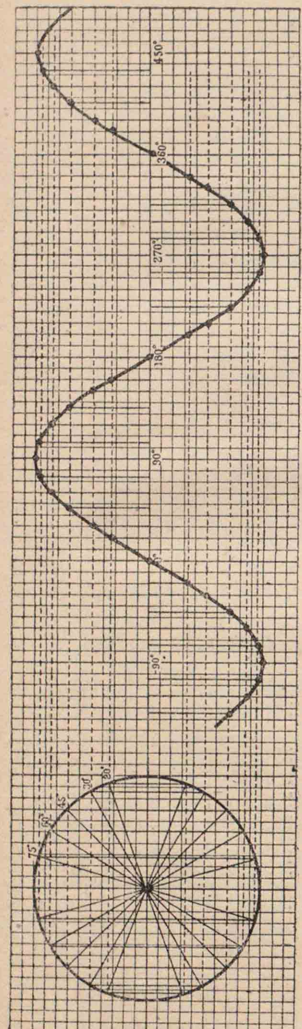
T

A

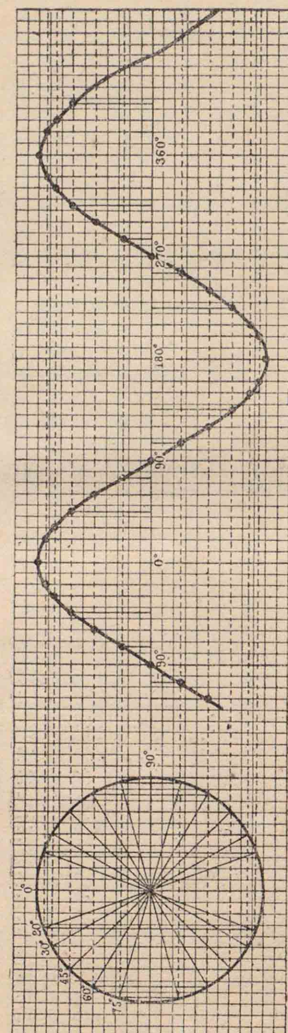
T′

ナルヲ以テ,

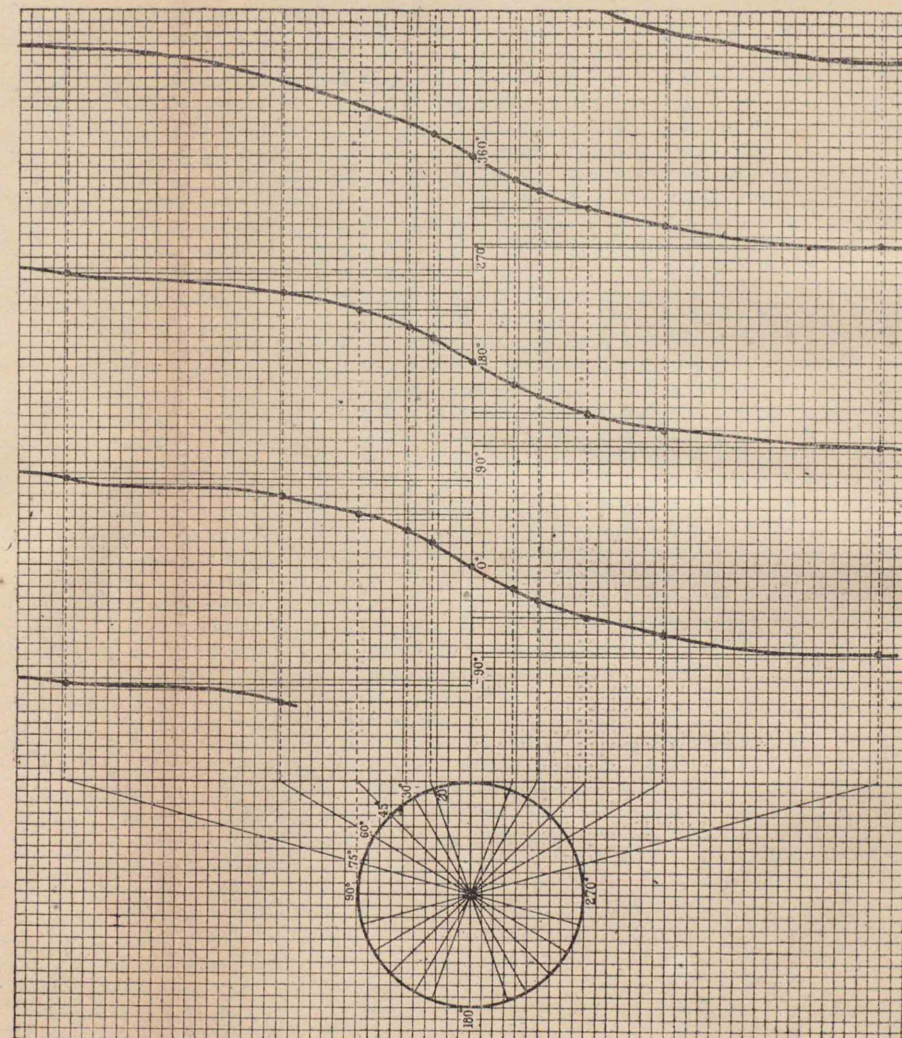
ルトキ, $\tan\theta$ ハ 0 ヨ
ニ近ヅカバ $\tan\theta$ ハ
ナル;之ヲ略言シテ
リト云フ。
正切ハ俄ニ負トナ
リモ大ナリ,故ニ



正弦ノ變化



餘弦ノ變化



正切ノ變化

$\tan 90^\circ = \pm\infty$　ト云フ。

θ ガ 90° ヨリ 180° マデ増大スルトキハ, $\tan\theta$ ハ常ニ負ニシテ其絶對値ハ ∞ ヨリ 0 マデ減小ス;而シテ　$\tan 180^\circ = 0.$

θ ガ第三象限ニ在ルトキハ $\tan\theta$ ハ第一象限ノ場合ト同一ノ變化ヲナシ,第四象限ニ於テハ第二象限ノ場合ト同一ノ變化ヲナス。

而シテ　$\tan 270^\circ = \pm\infty$,　$\tan 360^\circ = 0.$

今坐標ヲ用ヒテ正切ノ變化ヲ圖示セバ折込ミ圖ノ如シ。コレ $y = \tan x$ ノ圖(正切曲線)ナリ。

更ニ上ニ考究シタル三ツノ函數ノ變化ヲ表示スレバ次ノ如シ。

函數 \ 角(象限)	0°	(I)	90°	(II)	180°	(III)	270°	(IV)	360°
$\sin\theta$	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
$\cos\theta$	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
$\tan\theta$	0	↗	$\infty, -\infty$	↗	0	↗	$\infty, -\infty$	↗	0

餘切,正割,餘割ハ夫々正切,餘弦,正弦ノ逆數ナルヲ以テ容易ニ其變化ヲ知ルコトヲ得ベシ。

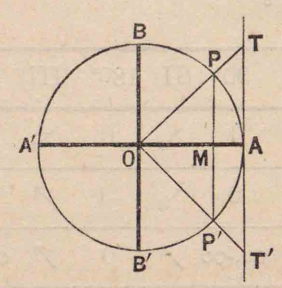
注意。 上ノ研究ニヨリテ,正弦及ビ餘弦ハ 1

ヨリ0ヲ經テ -1 ニ至ル總テノ實數値ヲ取リ,正割及ビ餘割ハ1ト -1 トノ間ノ實數値ヲ取ルコトナク,正切及ビ餘切ハ $+\infty$ ヨリ0ヲ經テ $-\infty$ ニ至ル實數値,即正及ビ負ノ總テノ實數値ヲ取ル。

問。上ト同様ニ $\sin^2\theta$ 及ビ $\cos 2\theta$ ノ變化ヲ考究セヨ。

35. 負角ノ三角函數。

單位圓ニ於テ角 AOP ヲ θ トシ,垂線PMヲ延長シ P' ニ於テ圓周ト會セシムレバ,角 AOP' ハ $-\theta$ ナリ,而シテ　$MP'=-MP,\quad AT'=-AT$　ナルヲ以テ,



$$\left.\begin{aligned}\sin(-\theta)&=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)&=\cos\theta\\ \tan(-\theta)&=-\tan\theta\\ \cot(-\theta)&=-\cot\theta\ \text{等}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

問。$-45°$, $300°$, $330°$ 及ビ $3630°$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

36. 餘角及ビ補角。

定義。 二角ノ和ガ $90°$ ナルトキハ,其各ヲ他ノ餘角ト云ヒ,二角ノ和ガ $180°$ ナルトキハ其各ヲ他ノ補角ト云フ。

例ヘバ $30°$, $100°$, $225°$, $-50°$ ノ餘角ハ夫々 $60°$, $-10°$, $-135°$, $140°$ ニシテ,其補角ハ $150°$, $80°$, $-45°$, $230°$ ナリ。

37. 餘角ノ三角函數。

單位圓 O ニ於テ角 AOP ヲ θ トシ,角 AOP' ヲ $90°-\theta$ トシ,P及ビP′ヨリ直徑AOA′ヘ垂線PM, P′M′ヲ引クトキハ,

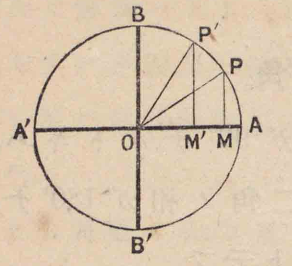
$$M'P'=OM,\quad OM'=MP\quad \text{ナル故},$$

θ ノ大サ及ビ符號ニ關セズ,

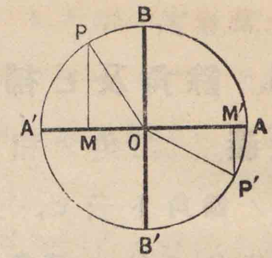
$$\left.\begin{aligned}\sin(90°-\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90°-\theta)&=\sin\theta\\ \tan(90°-\theta)&=\cot\theta\\ \cot(90°-\theta)&=\tan\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

(第一篇第8節參照)

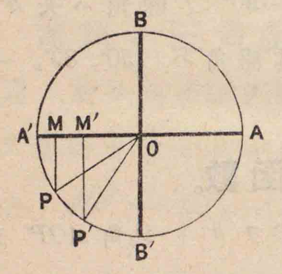
(1)



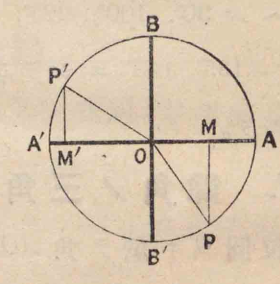
(2)



(3)



(4)



*問 1.　次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\left.\begin{aligned}\sin(\theta-90^\circ)&=-\cos\theta\\ \cos(\theta-90^\circ)&=\sin\theta\\ \tan(\theta-90^\circ)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\sin(90^\circ+\theta)&=\cos\theta\\ \cos(90^\circ+\theta)&=-\sin\theta\\ \tan(90^\circ+\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}.$$

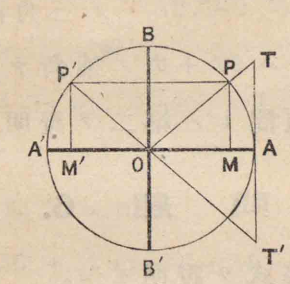
問 2.　$\tan(45^\circ+\alpha)\tan(45^\circ-\alpha)=1$ ヲ證明セヨ。〔高〕

38.　補角ノ三角函數。

單位圓 O ニ於テ $\angle AOP=\theta$ トシ, P ヨリ AO ニ平行ニ PP′ ヲ引キ P′ ニ於テ圓周ト會セシムレバ,

$\angle AOP'$ ハ $180^\circ-\theta$ ナリ。今 P 及ビ P′ ヨリ直徑 AOA′ ニ垂線 PM 及ビ P′M′ ヲ引クトキハ,

$$M'P'=MP,\quad OM'=-OM \quad \text{ナル故}$$



$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ-\theta)&=\sin\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)&=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)&=-\tan\theta\\ \cot(180^\circ-\theta)&=-\cot\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(\text{II}).$$

*問 1.　$\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2},$

$\sin 135^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos 135=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ヲ證明セヨ。

*問 2.　150° ノ三角函數ヲ求メヨ。

問 3.　表ヲ用ヒテ $\sin 125^\circ 48'$, $\cos 143^\circ 16'$ 及ビ $\log\sin 140^\circ 37'$ ヲ求メヨ。

*問 4.　次ノ公式ヲ證明セヨ。

$$\left.\begin{aligned}\sin(180^\circ+\theta) &= -\sin\theta\\ \cos(180^\circ+\theta) &= -\cos\theta\\ \tan(180^\circ+\theta) &= \tan\theta\end{aligned}\right\}.$$

問 5. $225^\circ, 240^\circ, 210^\circ, 270^\circ$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

問 6. $90^\circ-\theta$ ハ $90^\circ+\theta$ ノ補角ナルコトヲ利用シテ,再ビ第68頁問 1 ノ第二ヲ證明セヨ。

問題 6.

1. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta,\quad \cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta.$

[2] $\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta,\quad \tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta.$

2. $330^\circ,\ 750^\circ,\ 1080^\circ,\ -210^\circ,\ -300^\circ,\ -315^\circ$ ノ正弦,餘弦,正切ヲ求メヨ。

3. 次式ノ値ヲ求メヨ。

[1] $\sec(-780^\circ)\tan 1290^\circ.$ 〔商船〕

[2] $\dfrac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 135^\circ}.$ 〔海兵〕

4. $\sin 40^\circ=0.64$ トセバ, $\tan 140^\circ$ ノ値如何。〔熊工〕

5. $\tan 238^\circ=\dfrac{8}{5}$ トセバ, $\sin 238^\circ$ 及ビ $\cos 122^\circ$ ノ値如何。〔水産〕

6. $\cot\theta=-\dfrac{2}{3}$ ナルトキ, $\sin\theta, \cos\theta, \sec\theta$ ノ値ヲ求メヨ。但シ $180^\circ>\theta>0^\circ$ トス。〔海機〕

7. $\tan A=2-\sqrt{3}$ ナルトキ $\cos A$ ノ値如何。〔商船〕

8. $\sin(A-40^\circ)=\sin(A+80^\circ)$ ナルトキ A ヲ求メヨ。但シ A ハ正ノ鋭角トス。〔海機〕

9. $\sin^2(A+45^\circ)+\sin^2(A-45^\circ)=1$ ヲ證明セヨ。〔商船〕

10. 次式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $\tan(180^\circ+A)\sin(90^\circ+A)$
$+\cos(180^\circ-A)\cot(180^\circ-A).$ 〔海兵〕

[2] $\sin 90^\circ+\tan^2(180^\circ-\alpha)-\operatorname{cosec}^2(90^\circ-\alpha).$ 〔東工〕

[3] $\dfrac{\sin(180^\circ+\theta)\tan^2(180^\circ-\theta)}{\cos(270^\circ+\theta)}-\dfrac{\sin(270^\circ-\theta)\sec^2\theta}{\sin(90^\circ+\theta)}.$ 〔海機〕

11. $\sec A=2$ ヲ知リテ $\sin A$ 及ビ $\tan A$ ヲ求ム。〔海兵〕

12. $2\cot\theta=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha$ ニヨリ $\cos\theta$ ヲ $\tan\alpha$ ニテ表ハセ。〔海兵〕

13. 下ノ二ツノ方程式ニ適スル α, β ノ値ヲ求メヨ。

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \tan(2\alpha+3\beta)=-1.$$

但シ α, β ハ孰レモ 90° ヨリ小ナル正角トス。〔海兵〕

14. $0°$ ヨリ $360°$ マデノ間ニ於テ $2\cos\theta-1$ ノ符號ヲ正ナラシムル θ ノ範圍ヲ求メヨ。〔熊工〕

15. $a\sin\theta=b,\quad c\cos\theta=d$ ナルトキハ,

$\dfrac{b^2}{a^2}+\dfrac{d^2}{c^2}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

16. $a\sin\theta+b\cos\theta=c,\quad b\sin\theta-a\cos\theta=d$

ヨリ θ ヲ消去セヨ。

17. $\tan\theta+\cot\theta=p,\quad \tan\theta-\cot\theta=q$

ヨリ θ ヲ逐出セ。〔商船〕

第二章

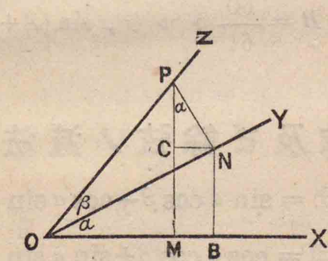
二角ノ和及ビ差ノ三角函數

39. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理。

α 及ビ β ヲ任意ノ二角トセバ

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12)$$

證明。角 XOY ヲ α, YOZ ヲ β ニテ表ハサバ其和 XOZ ハ $\alpha+\beta$ ナリ。



今 $\angle XOZ<90°$ ト假定シ, OZ 上ニ一點 P ヲ取リ; P ヨリ OX, OY ヘ垂線 PM, PN ヲ引キ, N ヨリ OX, PM ヘ垂線 NB, NC ヲ引クトキハ,

$$\angle CPN=BON=\alpha \qquad ナリ。$$

サテ OP ヲ長サノ單位ト考フレバ,

$$\sin(\alpha+\beta)=MP=MC+CP=BN+CP$$

ニシテ　　$BN = ON \sin\alpha = \cos\beta \sin\alpha,$

$$PC = PN \cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha$$

ナルヲ以テ

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

又　$\cos(\alpha+\beta) = OM = OB - MB = OB - CN$

ニシテ　　$OB = ON\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha,$

$CN = PN\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha$　　ナル故

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

問。A, B ヲ共ニ $90°$ ヨリ小ナル正角トシ,且 $\cos A = \frac{40}{41}$, $\cos B = \frac{60}{61}$ トシテ, $\sin(A+B)$ ノ値ヲ計算セヨ。　〔海機〕

40. 正弦及ビ餘弦ノ減法定理。

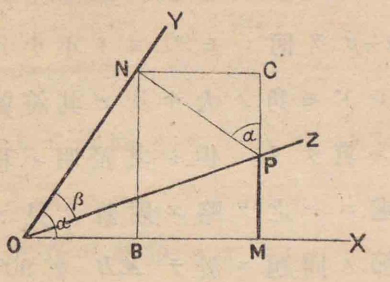
$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(13)$$

證明。$\alpha > \beta$ トシ $\angle XOY$ ヲ α, $\angle YOZ$ ヲ β トシ, OZ ヲ OX ト OY トノ間ニ在ル如クセバ角 XOZ ハ $\alpha - \beta$ ナリ。前節ト同樣ノ作圖ヲ爲ストキハ,

$$\sin(\alpha-\beta) = MP = MC - PC = BN - PC$$

ニシテ,　　$BN = ON\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha,$

$PC = PN\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha$　　ナル故



$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

同樣ニ　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

*問 1.　次ノ公式ヲ證明セヨ。

〔1〕　$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$

〔2〕　$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta.$

〔3〕　$\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \cos 75°,$

$\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sin 75°,$

$\tan 15° = 2 - \sqrt{3} = \cot 75°,$

$\tan 75° = 2 + \sqrt{3} = \cot 15°$

ヲ證明セヨ。

〔4〕　$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(45° + \theta) = \sqrt{2}\cos(45° - \theta)$

〔5〕　$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin(45° - \theta) = \sqrt{2}\cos(45 + \theta).$

〔6〕　$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$　　(複號同順)

注意一。本節及ビ前節ノ證明ニ於テハ,$\alpha,\beta,\alpha+\beta$及ビ$\alpha-\beta$ヲ何レモ$90°$ヨリ小ナル正角ト假定セリ.然レドモ角ノ大サ及ビ其符號ニ關セズ上ノ定理ハ眞ナリ。但シ其證明ハ稍繁雜ナルヲ以テ此處ニハ之ヲ略ス(附錄ヲ見ヨ)。

問2. 前節ノ問題ニ於テA,Bヲ$90°$ヨリ小ナル正角ト限ラザルトキハ$\sin(A+B)$ノ値如何。

注意二。加法定理ニ於テβヲ$-\beta$ニ置換ユレバ之ヨリ減法定理ヲ誘導スルコトヲ得ベシ。

41. 正切ノ加法定理。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

證明。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

終リノ式ノ分母子ヲ$\cos\alpha\cos\beta$ニテ除スレバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

同樣ニ　$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\quad\cdots\cdots(15)$$

コレ正切ノ減法定理ナリ。

*問1. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\tan(45°\pm\theta)=\dfrac{1\pm\tan\theta}{1\mp\tan\theta}.$　(複號同順)

〔2〕 $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$　(同　上)

問2. 上ノ公式ニヨリ再ビ$\tan15°$及ビ$\tan75°$ノ値ヲ求メヨ。

問3. 次式ヲ簡單ニセヨ。

$\tan A+\tan(45°-A)+\tan A\tan(45°-A).$　〔海機〕

42. 二倍角ノ三角函數。

公式(12)及ビ(14)ニ於テ$\beta=\alpha$トセバ

$$\left.\begin{aligned}\sin2\alpha&=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha&=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ &=1-2\sin^2\alpha\\ &=2\cos^2\alpha-1\\ \text{又}\quad\tan2\alpha&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

系。 $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2},$

$\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1$　等。

*問1. 次ノ公式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $\left(\sin\dfrac{\theta}{2}\pm\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1\pm\sin\theta.$　(複號同順)

〔2〕 $1+\cos\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2},\quad1-\cos\theta=2\sin^2\dfrac{\theta}{2}.$

〔3〕 $\tan(45°+\alpha)-\tan(45°-\alpha)=2\tan2\alpha.$　〔東師〕

問 2.　二次方程式　$x^2-2x\cot A-1=0$　ノ根ヲ求メ,之ヲ出來得ルダケ簡單ナル式ニ直セ。〔大工〕

43.　半角ノ三角函數。

前節ヨリ

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{1}{2}\alpha&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ \cos\frac{1}{2}\alpha&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(17)$$

從テ

$$\tan\frac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

根號前ノ符號ハ $\frac{1}{2}\alpha$ ノ大サニヨリ適當ニ選定スルヲ要ス。

*問 1.　次ノ等式ヲ證明セヨ。

(1)　$\tan\frac{1}{2}A=\frac{1-\cos A}{\sin A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}.$

(2)　$\sin 22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$

(3)　$\cos 22^\circ 30'=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$

(4)　$\tan 22^\circ 30'=\sqrt{2}-1.$

問 2.　一邊 a ナル正八角形ノ面積ヲ求メヨ。又其外接圓ノ半徑ヲ求メヨ(平幾第276頁問5)。

問 3.　本節ノ公式ニヨリテ再ビ 15° 及ビ 75° ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

問 4.　正十二角形ノ一邊ハ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}R$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ R ハ外接圓ノ半徑トス。

44.　三倍角ノ三角函數。

$$\begin{aligned}\sin 3A&=\sin(2A+A)=\sin 2A\cos A+\cos 2A\sin A\\&=2\sin A\cos^2 A+(1-2\sin^2 A)\sin A\\&=2\sin A(1-\sin^2 A)+(1-2\sin^2 A)\sin A\\&=2\sin A-2\sin^3 A+\sin A-2\sin^3 A.\end{aligned}$$

即　同様ニ　及ビ

$$\left.\begin{aligned}\sin 3A&=3\sin A-4\sin^3 A\\ \cos 3A&=4\cos^3 A-3\cos A\\ \tan 3A&=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(18)$$

問 1.　$\sin^3 A=\frac{1}{4}(3\sin A-\sin 3A)$

及ビ　$\cos^3 A=\frac{1}{4}(3\cos A+\cos 3A)$　ヲ證明セヨ。

問 2.　公式(12),及ビ(14)ヲ用ヒテ

$\sin(A+B+C)$,　$\cos(A+B+C)$　及ビ　$\tan(A+B+C)$

ヲ展開セヨ,而シテ公式(18)ヲ誘導セヨ。

問 3.　$A+B+C=180^\circ$　トシテ次ノ二件ヲ證明セヨ。

(1)　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

(2)　$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$

ハ常ニ一定ノ値ヲ有ス。〔商船〕

問 4.　$A=18^\circ$ トセバ，$\sin 2A=\cos 3A$ ナルコトヨリシテ　$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　ナルコトヲ證明シ，且之ヨリシテ　$\cos 18^\circ=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$　ヲ證明セヨ。

問 5.　正十邊形ノ一邊ノ長サ(平幾第 182 節問題)ヲ用ヒテ $\sin 18^\circ$ ヲ幾何學的ニ求メヨ。

*問 6.　$\sin 36^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

及ビ　$\cos 36^\circ=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$　ヲ證明セヨ。

問 7.　正五角形ノ一邊ハ $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ ナルコトヲ證明セヨ。但シ R ハ外接圓ノ半徑トス。

問題 7.

1. $\sin A=\frac{15}{17}$,　$\cos B=\frac{4}{5}$ ナルトキ，$\cos(A+B)$，$\sin(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ。〔陸士〕

次ノ各等式ヲ證明セヨ。(2) − (14).

2. $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta+\cos\beta)$.　〔海兵，仙工〕

3. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha}=0.$〔商船〕

4. $\frac{1}{2}\cos 40^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^\circ=\sin 70^\circ.$　〔海兵〕

5. $\cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$

6. $\cos 65^\circ+\cos 55^\circ+\cos 175^\circ=0.$　〔仙醫〕

7. $\cos^2\alpha+\cos^2(120^\circ+\alpha)+\cos^2(120^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}.$

8. $\frac{2\sin A-\sin 2A}{2\sin A+\sin 2A}=\tan^2\frac{A}{2}.$　〔鹿農〕

***9.** $\sin 2A=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}.$　〔千醫〕

10. $\cos 2A=\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}.$　〔海機，早稻田大〕

11. $\sin(\alpha+45^\circ)\sin(\alpha-45^\circ)=-\frac{\cos 2\alpha}{2}.$　〔海機〕

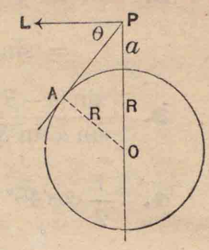
12. $\tan(45^\circ-A)+\tan(45^\circ+A)=2\sec 2A.$　〔水產〕

13. $\frac{\sin 3A}{\sin A}+\frac{\cos 3B}{\cos B}=4\cos(A+B)\cos(A-B).$

14. $\cos 4A=1-8\cos^2 A+8\cos^4 A.$　〔農實〕

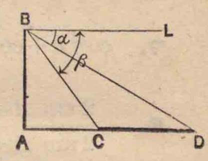
15. 高サ a 哩ノ山頂ヨリ地平線ヲ望ム線(地面ヘノ切線)ノ俯角ヲ θ トセバ地球ノ半徑ハ

$\dfrac{a\cos\theta}{2\sin^2\frac{1}{2}\theta}$ 哩ナリ。



16. △ABC ニ於テ C ヨリ邊 AB ヘ下セル垂線ノ長サヲ AB 及ビ $\angle A$, $\angle B$ ニテ求メヨ(對數式ニテ示セ)。

17. 海濱ニ在ル高サ h 尺ノ高樓ヨリ海上ニ在ル二船ガ同方位ニ見ヘ且其俯角ガ夫々 α 及ビ β ナルヲ知レリ,然ラバ二船ノ距離如何。



18. $\sin A=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ $\sin\dfrac{1}{2}A$, $\cos\dfrac{1}{2}A$, $\tan\dfrac{1}{2}A$ ヲ求ム。但シ $0^\circ<A<90^\circ$ トス。〔七高〕

19. $\tan A=2.21$ ヨリ $\cos 2A$ ヲ求メヨ。〔盛農〕

20. 高サ h ナル塔ノ基底ヨリ,之ト同ジ水平面上 a ナル距離ニアル一點ニ於テ,塔及ビ塔上ニ直立セル旗竿ガ等角ヲ張レリ,旗竿ノ長サ如何。

〔名工〕

21. 次ノ各恒等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sec A\pm\tan A=\tan\left(45^\circ\pm\dfrac{A}{2}\right)$. (複號同順)〔盛農〕

[2] $8\sin^4\dfrac{\theta}{2}=\cos 2\theta-4\cos\theta+3$. 〔商船〕

[3] $\dfrac{\tan\frac{3}{2}A+\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{3}{2}A-\tan\frac{A}{2}}=2\cos A$. 〔專檢〕

22. 二次方程式 $x^2\cos 2\alpha-2\sqrt{2}\,x\cos\alpha+2=0$ ノ根ハ $\sec(45^\circ+\alpha)$, $\sec(45^\circ-\alpha)$ ナリ。〔名工〕

23. 塔 CD ノ南ニ當ル一點 P ニ於テ其頂ノ仰角ヲ測リタルニ 75° ヲ得タリ,ソコデ P ヨリ西ニ向ヒテ m 米ダケ歩ミ再ビ其仰角ヲ測リタルニ 30° ヲ得タリ, サスレバ塔ノ高サハ $\dfrac{m\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)}{4}$ 米ナリ。〔桐染〕

45. 正弦,餘弦ノ積。

公式(11)及ビ(12)ニ加法及ビ減法ヲ施セバ

$$\left.\begin{aligned}
2\sin\alpha\cos\beta&=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\sin\beta&=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\\
2\cos\alpha\cos\beta&=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\\
2\sin\alpha\sin\beta&=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(19)$$

問 1. 次ノ二式ヲ證明セヨ。

[1] $2\cos 50^\circ\sin 30^\circ=\sin 80^\circ-\sin 20^\circ$.

[2] $2\cos(45^\circ-A)\cos(45^\circ+A)=\cos 2A$.

問 2. 次式ノ値ヲ求メヨ。

〔海機〕

$\cos 105^\circ\cos 225^\circ-\sin 105^\circ\sin 285^\circ$.

46. 二角ノ正弦又ハ餘弦ノ和及ビ差。

前節ノ公式ニ於テ $\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ トセバ,

$\alpha=\frac{1}{2}(A+B),\ \beta=\frac{1}{2}(A-B)$ ナルヲ以テ,

$$\left.\begin{aligned}\sin A+\sin B &= 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\ \sin A-\sin B &= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\\ \cos A+\cos B &= 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)\\ \cos B-\cos A &= 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)\end{aligned}\right\}\cdots(20)$$

問 1. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin 80^\circ-\sin 40^\circ=\sin 20^\circ.$ 〔盛農〕

[2] $\cos(60^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3}\sin\alpha.$ 〔陸經〕

[3] $\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$

[4] $\dfrac{\sin A+\sin 4A+\sin 7A}{\cos A+\cos 4A+\cos 7A}=\tan 4A.$

[5] $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$

$$=4\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

問 2. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x$

ヲ積ノ形ニ變ゼヨ。 〔高〕

問 3. $\cos A-\cos B\cos C+\sin B\sin C$ ヲ一項式ニ

化セヨ. 〔商船〕

問 4. 次式ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin A\sin 2A+\sin 2A\sin 5A+\sin 3A\sin 10A}{\cos A\cos 2A+\sin 2A\cos 5A+\sin 3A\cos 10A}.$$ 〔明專〕

問題 8.

1. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin(45^\circ-A)\sin(45^\circ+A)=\frac{1}{2}\cos 2A.$

[2] $\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=\sin A.$ 〔水產〕

[3] $\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A=\sin 3A\cos 2A.$

[4] $\sin 50^\circ+\sin 10^\circ-\cos 20^\circ=0.$ 〔農實〕

[5] $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}=\dfrac{\sin 3A}{\sin 5A}.$ 〔教養〕

[6] $\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}=\tan\frac{5}{2}x.$

2. $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ-\sin 30^\circ$ ヲ積ノ形ニ直セ。

3. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $\sin A\sin(2B+A)-\sin B\sin(2A+B).$ 〔海機〕

[2] $\dfrac{\sin 3A+\sin 2A}{\cos 3A-\cos 2A}.$ 〔東商〕

[3] $\dfrac{\cos\theta-\cos\frac{m+n}{m}\theta}{\sin\theta+\sin\frac{m+n}{m}\theta}.$ 〔海機〕

4. 次ノ二式ヲ證明セヨ。

［1］ $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}.$$ 〔陸士〕

［2］ $\sin(B-C)+\sin(C-A)+\sin(A-B)$

$$+4\sin\frac{1}{2}(B-C)\sin\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(A-C)=0.$$ 〔醫專〕

5. $A+B+C=180°$ トシテ次式ヲ證明セヨ。

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

又 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ ヲ A, B, C ノ函數ノ積ニ變ゼヨ。 〔專檢〕

6. 次ノ二式ヲ證明セヨ。

［1］ $\cos A+\cos(120°+A)+\cos(240°+A)=0.$

［2］ $\sin\alpha\sin\beta+\sin(\alpha-120°)\sin(\beta-120°)+\sin(\alpha-240°)\sin(\beta-240°)$

$$=\frac{3}{2}\cos(\alpha-\beta).$$ 〔海兵〕

7. $\dfrac{\sin(x+2y)-2\sin(x+y)+\sin x}{\cos(x+2y)-2\cos(x+y)+\cos x}$ ヲ簡單ニセヨ。〔海兵〕

8. $\sin(B+C-A)$, $\sin(C+A-B)$, $\sin(A+B-C)$ ガ等差級數ヲナストキハ、$\tan A, \tan B, \tan C$ モ亦等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。 〔秋鑛,東北大工〕

9. 次ノ關係ヲ知リテ $\log\cot 5°$ ヲ求メヨ。

$\log(\sin 50°-\sin 40°)=\bar{1}.09081,$

$\log(\sin 50°+\sin 40°)=0.14886.$ 〔陸工〕

10. X, Y ハ共ニ第一象限ノ角ニシテ且 $X+Y=60°$ ナルトキ、$\tan X+\tan Y$ ノ最小値ヲ求メヨ。而シテ尚ソレニ應ズル X, Y ノ値ヲ求メヨ。 〔明專〕

雜題 2.

1. A ガ正ノ鋭角ニシテ $\sec A>\operatorname{cosec} A$ ナラバ、$A>45°$ ナルコトヲ證明セヨ。 〔海兵〕

2. $\sin 195°$ ノ値ヲ小數第四位マデ精密ニ算出セヨ。 〔大工〕

3. $\tan 35°=0.7$ トシテ、$\sin 35°$ 及ビ $\tan 70°$ ノ値ヲ求メヨ。 〔美術〕

4. $\sec A=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ ナルトキ、A ノ總テノ三角函數ヲ求メヨ。 〔熊工〕

5. $\tan A=\dfrac{1}{2}$, $\tan B=\dfrac{1}{3}$ トセバ $\sin(A-B)$ ノ値如何。 〔水產〕

6. $\tan A=2-\sqrt{3}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ $\tan(2A-B)$ ノ値ヲ求メヨ。 〔上蠶〕

7. $\sin 3A-\cos 3B$ ノ値ヲ求メヨ。

但シ $\sin A=\dfrac{1}{3}$, $\cos B=\dfrac{2}{3}$ トス。 〔陸士〕

8. 次ノ各式ノ正負ヲ判定セヨ。 〔陸士〕

[1] $\sin(-1660°)+\cos(-935°)$.

[2] $\tan 950°-\cot(-485°)$.

[3] $-\operatorname{cosec}(-1100°)+\sec 820°$.

9. $A=0°, 30°, 120°, 180°$ 及ビ $330°$ ナルトキ

$\sin A+\cos A$ ノ値ヲ求メヨ。

10. A ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ變ズルトキ,次ノ二式ノ變化ヲ表ニテ示セ。

[1] $\sin A+\cos A$. 〔海兵〕 [2] $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$. 〔高〕

11. $\alpha=\left(n+\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{6}\right)180°$ ナルトキ $\tan\alpha+\cot\alpha$ ノ値如何。

〔海經〕

12. $\sin A+\sin B=a,\ \cos A+\cos B=b$ ナルトキハ,

$\sin(A+B)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。 〔盛農〕

13. $\tan\theta,\ \tan\varphi$ ガ方程式 $x^2+ax+b=0$ ノ二根ナルコトヲ知リテ, $\cos^2(\theta+\varphi)$ ノ値ヲ a, b ニテ表ハセ。 〔海兵〕

14. 次ノ各式ヲ證明セヨ。

[1] $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)$. 〔水產〕

[2] $(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)^2$

$+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma)^2=1-\sin^2\beta\sin^2\gamma$.

[3] $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

[4] $\tan A+\tan(60°+A)+\tan(120°+A)=3\tan 3A$.

〔東北大農〕

[5] $\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma-3\cos(2\alpha+2\beta+2\gamma)}{\cot(\alpha+\beta)+\cot(\beta+\gamma)+\cot(\gamma+\alpha)}$

$=4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)$. 〔東北大工〕

15. 次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

[1] $(\cos x\cos y+\sin x\sin y)^2+(\sin x\cos y-\cos x\sin y)^2$.

[2] $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(180°+A)}-\dfrac{\tan(90°+A)}{\cot A}+\dfrac{\cos A\cos 0°}{\sin(90°+A)}$. 〔海經〕

[3] $\cos(15°-A)\sec 15°-\sin(15°-A)\operatorname{cosec}15°$. 〔海機〕

[4] $\dfrac{\sec^2\alpha}{3\sin^2\alpha-\sec^2\alpha}\times\dfrac{(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sec\alpha)^2}{2+\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$. 〔商船〕

16. 下ノ三式ヲ最簡ナル形ニテ表ハセ。 〔海兵〕

[1] $\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$. [2] $\dfrac{\sin 6\theta+\sin 4\theta-\sin 2\theta}{\cos 4\theta+\cos 2\theta}$.

[3] $\sqrt{\cos 4\theta+4\cos 2\theta+3}$.

17. $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}$ ヲ證明シ,且之ヲ應用シテ

$\tan 15°$ 及ビ $\tan 22° 30'$ ヲ求メヨ。 〔商船,盛農,四高,仙醫〕

18. θ ヲ $180°$ ヨリ小ナル正角トシ,次式ニ適合スル θ ノ總テノ値ヲ求メヨ。 〔海機〕

[1] $2\cos^3\theta=\cos\theta$. [2] $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$.

19. $\sin\theta-\cos\theta=m,\ \sin 2\theta=n$ ヨリ θ ヲ消去セヨ。〔陸主〕

20. 次ノ無限級數ノ和ヲ最簡單ナル形ニテ表ハセ。

$a\sin\theta+a\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta\cos^2\theta+\cdots\cdots$ 〔仙工〕

21. $\cos^2 A-\cos A\cos(60°+A)+\sin^2(30°-A)$ ノ値ハ A ノ値ニ係ラズ不易ナルコトヲ證明セヨ。 〔海機〕

22. $\sin^2\theta+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-1$ ノ極大ノ値ヲ求メヨ。〔商船〕

23. 三邊ガ等差級數ヲナス直角三角形ノ二ツノ鋭角ノ正弦ヲ求メヨ。〔海兵〕

24. 三角形 ABC ノ各頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ヲ p_1, p_2, p_3 トシ, $\tan A=1$, $\tan B=2$, $\tan C=3$ ナリトセバ,

$5p_1p_2p_3=3abc$ ナルコトヲ證明セヨ。〔東北大農〕

25. 正三角形 ABC ノ外心 O ヨリ其三角形ニ垂線 OD ヲ立テ, $OD=AB$ ナラシメタルトキ,面 ABC ト ABD トノナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。〔大工〕

26. △ABC ガ一平面上ニ投ズル正射影ハ $\triangle ABC\cos\theta$ ナルコトヲ證明セヨ。　但シ θ ハ此兩平面ノ二面角ヲ表ハスモノトス。

27. 立方體ノ對角線ガ之ト交ハル稜トナス角ノ正切ヲ求メヨ。又此結果ヨリシテ其角ヲ分位マデ求メヨ。但シ $\log 2=0.30103$,

$\log\tan 54°40'=0.14941$,　$\log\tan 54°50'=0.15209$.　〔海機〕

28. 半徑ノ長サ夫夫 R, r ナル大小二圓ガ互ニ外切セルアリ,今此兩圓ノ共通外切線ノ爲ス角ヲ α トセバ,次ノ關係ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$\sin\alpha=\frac{4(R-r)\sqrt{Rr}}{(R+r)^2}.$$
〔海兵〕

29. 半徑 1 尺ナル圓ニ內接スル正十六邊形ノ一邊ノ

長サヲ求メヨ。但シ次ノ對數ヲ與フ。〔海機〕

$\log 2=0.3010$,　$\log 3.90=0.5911$,　$\log 3.91=0.5922$,

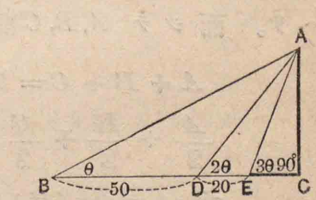
$\log\sin 11°10'=\bar{1}.2870$,　$\log\sin 11°20'=\bar{1}.2934$.

30. 矩形 ABCD ナル地面アリ其一隅 C ニ直立セル柱ノ頂上ノ仰角ヲ A 及ビ B ニ於テ測リタルニ夫々 18° 及ビ 30° ヲ得, 且 AB ノ長サヲ測リタルニ 48 尺アリタリト云フ。柱ノ高サ何尺何寸ナルカ。

但シ　$\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　ナリ。〔醫專〕

31. 山ノ麓ニ高サ h 尺ノ塔アリ,山頂ニ於テ塔頂及ビ塔脚ノ俯角ヲ測リテ夫々 α 及ビ β ヲ得タリ,山ノ高サヲ求メヨ。〔海機〕

32. 右ニ記セル圖形ニ就キテ CA 及ビ EC ノ長サヲ求メヨ。〔陸士〕



第三篇

斜角三角形

第一章

三角形ノ角ト邊トノ關係

47. 角ノ關係。

三角形ヲ ABC トセバ,其三ツノ角ハ A, B, C ニテ表ハシ,其對邊ハ夫夫 a, b, c ニテ表ハスコトハ既ニ言ヘリ。而シテ A, B, C 間ニハ次ノ關係アリ。

$$\left.\begin{aligned}
&A+B+C=180^\circ\\
&\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ\\
&\sin A=\sin(B+C)\\
&\cos A=-\cos(B+C)\\
&\sin\frac{1}{2}A=\cos\frac{1}{2}(B+C)\\
&\cos\frac{1}{2}A=\sin\frac{1}{2}(B+C)\\
&\tan\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}(B+C)\\
&\cot\frac{1}{2}A=\tan\frac{1}{2}(B+C)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

問題 9.

三角形 ABC ニ於テ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

1. $\sin 2(A+B)=-\sin 2C,\quad \cos 3(A+B)=-\cos 3C.$

及ビ $\sin\frac{3}{2}(A+B)=-\cos\frac{3}{2}C.$

2. $\cos A\cos B+\cos C=\sin A\sin B.$

3. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

〔東師,商船,山商〕

4. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$

〔東北大農,上蠶,鹿農〕

5. $\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

〔仙工,米工〕

6. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

〔東商,海經〕

7. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+1=-4\cos A\cos B\cos C.$

8. $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A.$ 〔仙工〕

9. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$ 〔京醫〕

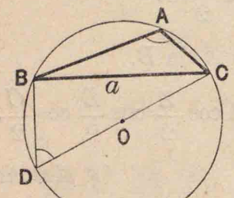
10. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$ 〔海兵〕

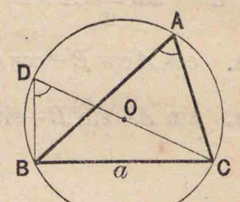
11. $\cos A+\cos B+\cos C>1$ 〔東工〕

12. A, B ノ正切ノ値ガ夫々 2,3 ナルトキハ, C ハ何度ナルカ。 〔海兵〕

48. 三角形ノ各邊ト對角ノ正弦トノ比（正弦法則）。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$





證明。C ヨリ外接圓ノ直徑 CD ヲ引カバ，

$A<90°$ ナルトキハ　$\angle D=A$,

$A>90°$ ナルトキハ　$\angle D=180°-A$.

何レノ場合ニ於テモ

$$\sin D=\sin A.$$

然ルニ　$BC=BD\sin D.$

依テ今外接圓ノ半徑ヲ R ニテ表ハストキハ，

$$2R=\frac{a}{\sin A}.$$

同樣ニ　$2R=\dfrac{b}{\sin B}$　及ビ　$2R=\dfrac{c}{\sin C}$.

故ニ　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

注意一。ABC ガ直角三角形ニシテ，例ヘバ $C=90°$ ナルトキモ，$\sin C=1$ ナルヲ以テ，

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{1}=2R$$

ニシテ上ノ公式ハ成立ス。

以下ノ諸公式ニ於テモ同樣ナリ。

系。$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C,$

及ビ　$a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{c\sin A}{\sin C}$　等。

注意二。此等ノ公式ハ其何レカ一ツヨリ文字ヲ輪換シ（a ヲ b ニ，b ヲ c ニ，c ヲ a ニ換ユルコト）テ他ヲ得。以下ノ諸公式亦然リ。

問 1.　次ノ各等式ヲ證明セヨ。

(1)　$\dfrac{2\sin A+3\sin B}{2a+3b}=\dfrac{\sin C}{c}.$

(2)　$a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B).$　〔專檢〕

(3)　$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C.$　〔大醫〕

問 2.　三角形ノ三ツノ角ノ大サガ 1:2:3 ノ如キトキハ，其三邊ノ比如何。　〔上醫〕

49. 三角形ノ各邊 (第一餘弦法則)。

$$\left.\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

證明。 $a = 2R\sin A = 2R\sin(B+C)$

$= 2R(\sin B\cos C + \cos B\sin C)$

$= 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$

$= c\cos B + b\cos C.$

他ノ式モ同様ニシテ證明スルヲ得。

問。 次ノ各式ヲ證明セヨ。

〔1〕 $a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$

〔2〕 $a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}.$ 〔商船〕

50. 邊ノ平方 (第二餘弦法則)。

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

證明。 公式(23)ノ第一,第二,第三式ノ兩邊ニ夫々 $a, -b, -c$ ヲ乘ジテ邊々相加フレバ

$$a^2-b^2-c^2 = -2bc\cos A.$$

$$\therefore \quad a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A.$$

他ノ式モ同様ニシテ誘出スルヲ得。

系。
$$\left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

問1. $b = 12$尺, $c = 9$尺, $A = 120°$ ナルトキ a ヲ計算セヨ。 〔海機〕

問2. 二邊ガ夫々 1.22 及ビ 0.75 ニシテ其夾角 30°ナリ, 殘リノ一邊ノ長サヲ小數第二位マデ求メヨ。 〔秋鑛〕

問3. △ABC ニ於テ $\angle C = 60°$ ナルトキハ, $a^2+b^2 = c^2+ab$ ナルコトヲ證明セヨ。

問4. $a^2 = b^2+bc+c^2$ ナルトキハ $\angle A$ ノ大サ如何。

問5. 三邊ガ $2, \sqrt{6}$ 及ビ $\sqrt{3}+1$ ナル三角形ノ最小角ヲ求メヨ。 〔千醫〕

51. 二邊ノ和,差ト第三邊トノ比。

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} \quad 等 \cdots\cdots\cdots (26)$$

及ビ
$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} \quad 等 \cdots\cdots\cdots (27)$$

證明。 $$\frac{a+b}{c}=\frac{2R(\sin A+\sin B)}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}.$$

同樣ニ $$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}.$$

問。 $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$ ヲ證明セヨ。

52. 二邊ノ和ト差トノ比(正切法則)。

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}\text{ 等}\cdots\cdots\cdots(28)$$

證明。 $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

$$=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

系。 $$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C\text{ 等}\cdots\cdots(29)$$

53. 半角ノ正弦,餘弦及ビ正切。

公式(15)及ビ(25)ニ由テ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

今三角形ノ周圍ノ半(半周)ヲ s トセバ

$$a+b+c=2s,$$

$$a+b-c=2(s-c),$$

$$a-b+c=2(s-b)$$

ナルヲ以テ之ヲ上式ニ代入スレバ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}.$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad &\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \text{同樣ニ}\quad &\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ &\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(30)$$

又上ト同樣ニシテ次ノ公式ヲ得。

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

從テ

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(32)$$

問 1.　次ノ各等式ヲ證明セヨ。

(1)　$a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}=s.$

(2)　$(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}.$

問 2.　本節ノ公式ノ右邊ガ實數タルベキ條件ヨリ三角形ノ三邊間ニ成立スベキ條件ヲ求メヨ。

問 3.　三邊ガ 7:8:13 ノ比ヲナストキハ最大角如何。　〔海機〕

問 4.　a, b, c ガ等差級數ヲナストキハ

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$　ナルコトヲ證明セヨ。

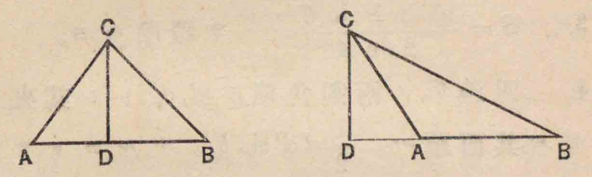
問 5.　公式 (23) 及ビ (24) ヲ直接ニ圖ニヨリテ證明セヨ(幾何學的證明)。

54.　三角形ノ面積。

面積ヲ S ニテ表ハサバ

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C\cdots(33)$$

及ビ　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ………(34)



證明。　△ABC ニ於テ CD ヲ高サトセバ,

$$S=\frac{1}{2}AB.CD$$

ニシテ,　$CD=b\sin A$ 又ハ $CD=b\sin(180°-A)$ ナルヲ以テ,

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$ (第一篇 7 節應用ノ例二)

同様ニ　$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

又　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

之ニ公式(30)及ビ(31)ヲ用ヒテ

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ヲ得。之ヲ Hero ノ公式ト云フ。

問1.　三邊ガ夫々17間, 24間, 35間ナル三角形ノ面積ハ何坪何合何勺ナルカ。　〔醫專〕

問2.　三角形ノ二邊ガ定マルトキ其面積ノ最大ナルハ,其夾角ガ直角ナルトキナルコトヲ證明セヨ。(第一篇7節應用ノ例二參照)

*問3.　$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$　ヲ證明セヨ。

*問4.　四邊形ノ兩對角線ヲ d, d' トシ其夾角ヲ θ トセバ,其面積ハ　$\dfrac{1}{2}dd'\sin\theta$　ナルコトヲ證明セヨ。　〔陸經〕

*問5.　$\sin A=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　ヲ證明セヨ。

問6.　次式ヲ證明セヨ。　〔商船〕

$$\frac{\cot A}{b^2+c^2-a^2}=\frac{\cot B}{c^2+a^2-b^2}=\frac{\cot C}{a^2+b^2-c^2}.$$

問7.　△ABC ノ ∠A ノ二等分線ガ對邊ニ交ハル點ヲ D トセバ, $AD=\dfrac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c}$　ナルコトヲ證セヨ。〔海兵〕

問8.　△ABC ノ角 A, B, C ノ二等分線ノ長サヲ夫夫 l, m, n トセバ,

$$\frac{\cos\dfrac{A}{2}}{l}+\frac{\cos\dfrac{B}{2}}{m}+\frac{\cos\dfrac{C}{2}}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

ナリ。　〔秋鑛〕

55.　三角形ノ內接圓,傍接圓ノ半徑。

內接圓ノ半徑ヲ r,傍接圓ノ半徑ヲ r', r'' 及ビ r''' ニテ表ハストキハ

$$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\quad\cdots(35)$$

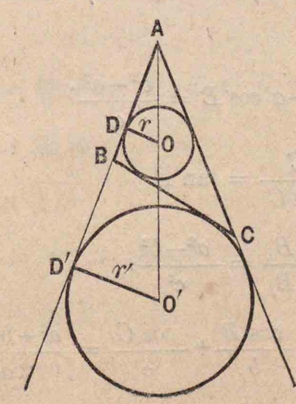
及ビ　$r'=\dfrac{S}{s-a}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$ 等$\cdots\cdots(36)$

證明。 $r=\dfrac{S}{s}$ 及ビ $r'=\dfrac{S}{s-a}$ ナルコトハ幾何學ニ於テ知レル所ナリ,之ニ公式(34)ヲ用ユレバ上ノ結果ヲ得。 或ハ次ノ圖ニ於テ

$$r=OD=AD\tan\frac{A}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}$$

及ビ　$r'=OD'=AD'\tan\dfrac{A}{2}=s\tan\dfrac{A}{2}$

ニ公式(32)ヲ用ヒテ得ルモ可ナリ。



*問1. 外接圓ノ半徑ヲRトシ次式ヲ證明セヨ。

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=\frac{abc}{4S}.$$

問2. 三邊ガ3, 5及ビ6ナル三角形ノ内接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ。〔陸士〕

問題 10

1. △ABCニ於テ $\sin(A+B)=\frac{1}{2}$, $\cos(A-C)=\frac{1}{2}$ ナルトキハ A, B, Cノ大サ各如何。

三角形ABCニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ(2)—(9)。

2. $\sin A+\sin B>\sin C.$ 〔陸士〕

3. $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$ ナラバ $C=90°$ ナリ。

4. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0.$ 〔高,商船,長商〕

5. $b\cos A-a\cos B=\frac{b^2-a^2}{c}.$ 〔商船〕

6. $\frac{a\sin C}{b-a\cos C}=\tan A.$ 〔商船,上蠶〕

7. $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}.$ 〔水産〕

8. $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}.$ 〔農實〕

9. $\frac{a+b+c}{a+b-c}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}.$ 〔高〕

10. 角ノ比ガ3:4:5ナル三角形ニ於テ最小邊ガ5尺ナルトキハ他ノ邊ノ長サ如何。〔新醫〕

11. $2b=a+c$ ナラバ $2\sin\frac{B}{2}=\cos\frac{C-A}{2}.$ 〔高〕

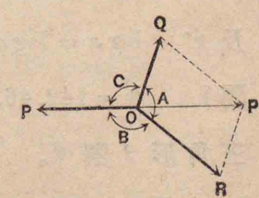
12. $A=2C$ ナラバ $a^2=bc+c^2$ ナリ。〔新醫〕

13. $\cos A:\cos B=b:a$ ナルトキハ,ABCハ直角三角形ナルカ,又ハ等脚三角形ナリ。〔東商〕

14. 圓周上ノ一點ヨリ引ケル二ツノ弦ノ比ハ其點ニ於ケル切線ト此等ノ弦トガナス角ノ正弦ノ比ニ等シ。

15. 圓ノ内接四邊形ABCDニ於テ $\angle CAD=\alpha$, $BAC=\beta$, $ABD=\gamma$ ナラバ $CD=\frac{AB\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$ ナリ。〔山商〕

16. 一點Oニ働ク三力 P, Q, R (OP, OQ, OR) ガ釣合フトキハ,次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。



$P:Q:R=\sin A:\sin B:\sin C.$

但シ A, B, C ハ夫夫 Q, R; R, P; P, Q ノ爲ス角トス。

第二章

斜角三角形ノ解法

56. 斜角三角形ノ解法ニハ次ノ四ツノ場合アリ(第一篇14節及ビ16節參照)。

第一. 二角ト其頂點間ノ邊トヲ知ル場合。

第二. 二邊ト其夾角トヲ知ル場合。

第三. 二邊ト其一對角トヲ知ル場合。

第四. 三邊ヲ知ル場合。

57. 第一ノ場合。(第一篇19節參照)

既知部分ヲ　a, B, C　トセバ,

未知部分ハ　A, b, c　ナリ。

解法。 先ヅ　$A = 180°-(B+C)$ ....(1)

次ニ正弦法則ニヨリテ

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \quad 及ビ \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$\therefore$　$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A$ ....(2)

及ビ　$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$ ......(3)

問1.　$a = 142.46, B = 47° 35', \quad C = 61° 43'$ ナルトキ三角形ヲ解ケ。

注意。 二角及ビ其一對邊ヲ知ル場合ハ此場

合ニ歸ス。

問2.　$A = 32° 47', \ B = 44° 17', \ b = 372.67$ ナルトキ a ヲ計算セヨ。

58. 第二ノ場合。

既知部分ヲ　a, b, C　トセバ,

未知部分ハ　A, B, c　ナリ。

解法。 先ヅ　$\frac{1}{2}(A+B) = 90° - \frac{1}{2}C$ ....(1)

及ビ　$\tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C$ (公式29) ...(2)

ヨリ $\frac{1}{2}(A+B)$及ビ$\frac{1}{2}(A-B)$ヲ知リ A 及ビ B ヲ得。

而シテ　$c = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$ (公式26) ....(3)

ヨリ c ヲ得。

例。 $a = 456.12, \ b = 296.86, \ C = 74° 20'$ トシテ三角形ヲ解ケ。

解。 先ヅ　$\frac{1}{2}C = 37° 10'$ ナル故,

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90° - 37° 10' = 52° 50'.$$

次ニ　$a-b = 159.26, \ a+b = 752.98$　ナル故,

$\log(a-b) = 2.20211,$　及ビ　$\log(a+b) = 2.87678,$

又 $\log\cot\frac{C}{2}=0.12026$ (表ヲ用ヒ) ナル故,

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-B)=\log(a-b)-\log(a+b)+\log\cot\frac{1}{2}C$$

ヨリ

$$\begin{aligned}\log(a-b)&=2.20211\\-\log(a+b)&=\bar{3}.12322\\\log\cot\tfrac{1}{2}C&=0.12026\\\hline\log\tan\tfrac{1}{2}(A-B)&=\bar{1}.44559\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}299\cdots\cdots15°30'\\260\cdots\cdots\cdots5'\\\hline\frac{1}{2}(A-B)=15°35'\cdots\cdots(2)\end{array}$$

依テ(1)及ビ(2)ヨリ $A=68°25'$, $B=37°15'$.

次ニ $\log\sin\frac{1}{2}C=\bar{1}.78113$

及ビ $\log\cos\frac{1}{2}(A-B)=\bar{1}.98374$ ナル故,

$$\log c=\log(a+b)+\log\sin\frac{1}{2}C-\log\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

ヨリ

$$\begin{aligned}\log(a+b)&=2.87678\\\log\sin\tfrac{1}{2}C&=\bar{1}.78113\\-\log\cos\tfrac{1}{2}(A-B)&=0.01626\\\hline\log c&=2.67417\end{aligned}$$

答. $\left\{\begin{aligned}A&=68°25'\\B&=37°15'\\c&=472.24.\end{aligned}\right.$ $\begin{array}{l}413\cdots\cdots\cdots4722\\4\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots4\\\hline c=472.24.\end{array}$

問。 $a=522$, $b=320$, $C=34°22'$ トシテ三角形ヲ解ケ。 〔七高〕

注意。上ノ解法ニ於テハ $a>b$ ト假定セリ, $a<b$ ナル場合モ同様ナリ。

又 c ヲ求ムルニハ $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$ ヲ用フルヲ得レドモ上ノ公式ニヨルヲ良シトス。

又公式(27)ヲ用ユルモ可ナリ。

59. 第三ノ場合。

既知部分ヲ a, b, A トセバ

未知部分ハ B, C, c ナリ。

解法。先ヅ $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

ヨリ B ヲ知リ, $C=180°-(A+B)\cdots\cdots(2)$

ヨリ C ヲ知リ, $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}\cdots\cdots\cdots(3)$

ヨリ c ヲ得。

吟味。此場合ハ正弦ニヨリテ一角ヲ定ムルヲ以テ一般ニ二ツノ値ヲ得, ソレ等ヲ共ニ採用スベキ場合アリ,又其中一ツヲ採用スベキ場合アリ,又一ツヲモ算出シ得ザル不可能ノ場合アリ。依テ次ニ之ヲ細論スベシ。

I. $A>90°$ ナルトキ。

(イ) $a<b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ $A<B$ 或ハ

$A=B$ ニシテ二角 A,B ガ共ニ鈍角トナルベキ故問題ハ不可能ナリ。

(ロ) $a>b$ ナルトキハ $A>B$ ニシテ B ノ値トシテハ(1)ヨリ得ル二ツノ値ノ中鋭角ノミヲ採用スルヲ得,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

II. $A=90°$ ナルトキ。 (第一篇第16節第二參照)

(イ) $a<b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ $A<B$ 或ハ $A=B$ ナルベキヲ以テ問題ハ不可能ナリ。

(ロ) $a>b$ ナルトキハ $A>B$ ニシテ B ノ値トシテハ(1)ヨリ得ル鋭角ノミヲ採用スルヲ得故ニ解答ハ唯一ツアリ。

III. $A<90°$ ナルトキ。

(イ) $a>b$ 或ハ $a=b$ ナルトキハ $A>B$ 或ハ $A=B$ ナル故,B ノ値トシテ(1)ヨリ得ル鋭角ノミヲ採用スルヲ得,故ニ解答ハ唯一ツアリ。

(ロ) $a<b$ ナルトキハ $A<B$ ナル故,B ハ鋭角ニテモ又鈍角ニテモ可ナリ。然レドモ此場合ニハ(1)ノ右邊ガ1ヨリ大ナルコトアルヲ以テ更ニ次ノ吟味ヲ要ス。

(i) $b\sin A<a$ ナルトキ。

此場合ニハ(1)ヨリ得ル B ノ値ハ二ツ共採用スルコトヲ得,而シテ C 及ビ c ノ値モ亦從ツテ夫夫二ツアリ。故ニ解答ハ二ツアリ。

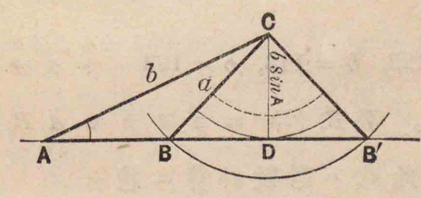
此場合ヲ兩意ノ場合ト云フ。

(ii) $b\sin A=a$ ナルトキ。

此場合ニハ B ノ値ハ直角ナリ。故ニ解答ハ唯一ツアリ。

(iii) $b\sin A>a$ ナルトキ。

此場合ニハ $\frac{b\sin A}{a}>1$ ナル故 B ノ値ナシ。故ニ問題ハ不可能ナリ。



注意。 學生ハ上ノ圖ニヨリ以上ノ吟味ガ幾何學ニ於ケル本題ノ作圖ノ吟味ニ符合スルコトヲ確カムベシ。

問。 次ノ各場合ニ三角形ヲ解ケ。

〔1〕 $a=250$ 尺, $c=125$ 尺 $A=120°$.

(2) $A=30°,\ a=3,\ b=3\sqrt{2}.$ 〔陸經〕

(3) $c=\sqrt{2}$尺, $b=1$尺, $B=30°.$

60. 第四ノ場合。

既知部分ヲ a, b, c トセバ

未知部分ハ A, B, C ナリ。

解法。公式 $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

ヨリ對數計算ニヨリテ $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ ヲ得,從ツテ A, B, C ヲ得。

問。$a=123,\ b=113,\ c=103$ トシテ解ケ

注意一。公式(25)ニヨリテモ A, B, C ヲ求メ得レドモ此式ハ對數計算ニ適セズ。又公式(30)或ハ(31)ヲ用ヒ得レドモ上ノ公式ヲ用フルヲ最良トス。其故ハ此公式ニヨレバ唯四數 $s,\ s-a,\ s-b,\ s-c$ ノ對數ニテ足レバナリ。

注意二。上ノ計算ノ結果三ツノ角ノ和ハ180° トナルベキモノナレドモ實際ニ於テハ然

ルコト稀ナリ,コレ對數表ヲ用フルヨリ起ル誤差ナリ。

本節ノ計算ニ限ラズ前三節ノ計算ノ結果モ總ベテ近似數ナリ。

問題 11.

次ノ各部分ヲ知リテ三角形ヲ解ケ(1)—(5)。

1. $B=60°40',\ C=59°10',\ a=10.62.$ 〔東商〕

2. $B=82°20',\ C=40°20',\ b=479.$

3. $a=20.71,\ b=18.87,\ C=55°12'.$

4. $a=317,\ b=533,\ c=510.$

5. $a=3(\sqrt{3}-1),\ c=2,\ C=75°.$

6. $B=30°, c=150, b=50\sqrt{3}$ ナル條件ニ適合スル二ツノ三角形ノ中,一ツハ二等邊三角形,一ツハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ。且大ナル三角形ノ第三邊ヲ見出セ。 〔農實〕

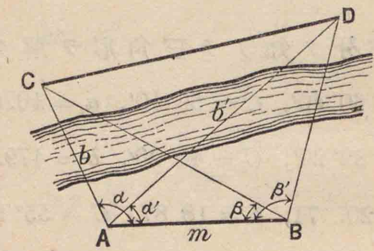
7. $A=45°,\ B=105°,\ AB=c$ トシテ BC 及ビ CA ヲ根式ニテ表セ。

8. $a=87.6,\ b=68.3,\ c=74.7$ トシテ面積,內接圓,傍接圓及ビ外接圓ノ半徑ヲ求メヨ

第三章

測量上ノ應用問題

61.　近ヅキ得ザル二點間ノ距離ヲ求ムルコト。



解。C, D ヲ二點トシ之ヲ望ミ得ル適當ナル二點 A, B ヲ選ビ基線 $AB(m)$ ヲ測リ,
A 點ニ於テ $\angle BAC(\alpha)$, 及ビ $BAD(\alpha')$ ヲ測リ,
又 B 點ニ於テ $\angle ABC(\beta)$ 及ビ $ABD(\beta')$ ヲ測ルベシ。

然ラバ ΔABC ヨリ　$AC=\dfrac{m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$,

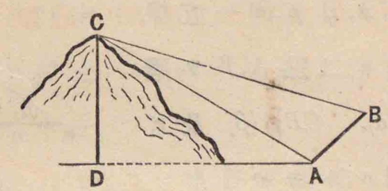
ΔABD ヨリ　$AD=\dfrac{m\sin\beta'}{\sin(\alpha'+\beta')}$.

ヲ得, 依テ $\angle CAD=\alpha-\alpha'=A$ トシ, $\angle ACD$ 及ビ ADC ヲ夫々 C 及ビ D トセバ, ΔACD ヨリ

$$CD=\frac{(AC+AD)\sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}(C-D)}$$ ヲ得。

注意。 四點 A, B, C, D ガ同一ノ平面上ニ在ラザルトキハ $\angle CAD$ ハ實測スルヲ要ス。

62.　山ノ高サヲ求ムルコト。



解。先ヅ適當ナル基線 $AB(m)$ ヲ測リ, A ニ於テ山頂ノ仰角 $CAD(\alpha)$ ト $\angle CAB(\beta)$ トヲ測リ, 次ニ B ニ於テ $\angle ABC(\gamma)$ ヲ測ルベシ, 然ルトキハ ΔABC ヨリ

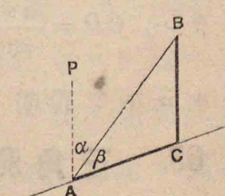
$$AC=\frac{m\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

然ルニ　$CD=AC\sin CAD$　ナルヲ以テ

$$CD=\frac{m\sin\gamma\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

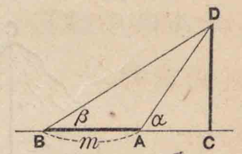
問 1.　$\angle CAB=105°$, $CBA=30°$, $CAD=60°$, $AB=30$ 間ナルトキ煙突 (CD) ノ高サ幾何。〔專檢〕

問 2. 坂路上ニ立ツ塔 BC アリ, 今坂路上ノ一點 A ニ於テ塔頂及ビ塔脚ヲ望ミ $\angle BAP(\alpha)$ 及ビ $BAC(\beta)$ ヲ得タリ, 塔ノ高サヲ求メヨ。



但シ AC ハ測リ得ルモノトス。

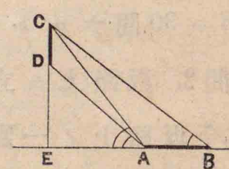
問3. 河ノ對岸ニ立ツ樹木 CD ノ高サヲ測ラントシ其根ト同水平面上ニ在リテ且 C,A,B ガ同一直線上ニ在ル樣ニ二點 A,B ヲ選ビ, $\angle CAD(\alpha)$, $CBD(\beta)$ 及ビ $AB(m)$ ヲ測ルトキハ



$$CD=\frac{m\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$$ ナルコトヲ證明セヨ。

又若シ C,A,B ガ同一直線上ニ在ルモ同一水平面上ニ在ラザルトキハ如何。

問4. 塔ED上ニ立ツ旗竿 CD アリ,今其長サヲ測ラント欲シ,塔底ト同一水平面上ノ一點 A ニ於テ仰角 $CAE(\alpha)$ 及ビ $DAE(\alpha')$ ヲ測リ,更ニ基線(a)ヲ退キテ再ビ仰角 $CBE(\beta)$ ヲ測ルトキハ, $$CD=\frac{a\sin\beta\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha'}$$ ナルコトヲ證明セヨ。〔專門〕



63. 三角測量。 大ナル地形ヲ測定スルニハ其地面上ニ在ル若干ノ重要ナル地點ヲ選ビ,是

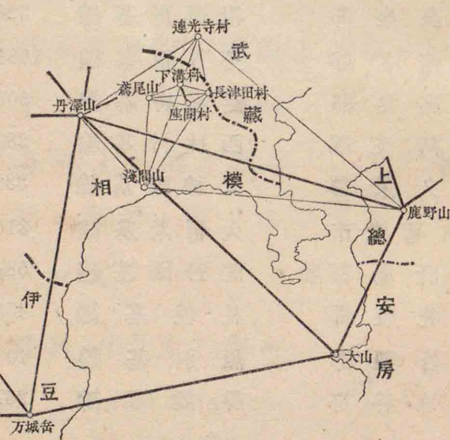
等ヲ頂點トスル數多ノ三角形ヲ以テ地面ヲ蔽フモノト考フ,而シテ是等ノ三角形ノ邊中最モ便宜ナル數邊ハ之ヲ基線トスル爲メニ金屬製ノ直鋼ヲ以テ極メテ精密ニ其長サヲ測定ス。我國陸軍陸地測量部ニ於テハ全國ノ地圖ヲ作ルタメニ次ノ基線ヲ測定セリ。

羽前國最上郡	鹽野原基線	5129.587米
信濃國上高井郡	須坂基線	3291.912米
陸奥國三戸郡	鶴子平基線	4006.031米
相摸國高座郡	相摸野基線	5209.970米
遠江國濱名郡	三方原基線	10839.958米
近江國高島郡	饗庭野基線	3065.724米
阿波國阿波郡	西林村基線	2832.212米
伯耆國久米郡	天神野基線	3301.805米
筑後國久留米市	久留米基線	3161.007米
大隅國肝屬郡	笠野原基線	5875.509米
石狩國札幌郡	札幌基線	4539.770米
根室國目梨郡	薫別基線	4069.850米
北見國宗谷郡	聲問基線	2677.503米

是等ノ基線ト各地點ニ於テ測定シタル他ノ兩地點間ノ水平面上ニ於ケル角トヲ以テ順次間接ニ三角形ノ解法ヲ用ヒテ各地點間ノ距離ヲ測定スルモノトス。

上ノ如キ測量ヲ三角測量ト云ヒ,三角形ノ大小ニヨリ一等,二等,三等ノ別アリ,又地面ヲ蔽ヘル三角形ノ群ヲ三角網ト云フ。但シ大地測量ノ如ク地面上甚遠キ諸點間ノ距離ヲ測ルトキニハ,之ヲ直線トナスベカラズ球面ノ大圓弧ヨリナル所謂球面三角形ノ邊トナスベシ;從テ其計算ハ*球面三角法ノ法則ニヨラザルベカラズ。

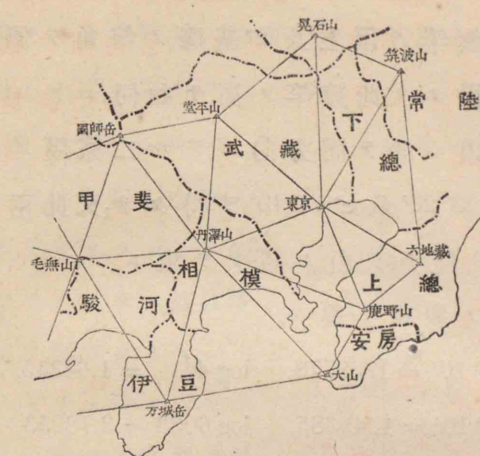
相摸野附近三角網ノ圖



基線ヲ一邊トスル小三角形ヨリ次第ニ三角形ヲ擴大シテ遂ニ一等三角形ヲ作ルヲ示ス。

* 三角法ヲ二ツニ分チ,平面上ノ三角形ヲ論ズルモノヲ**平面三角法**ト云ヒ球面三角形ニ關スルモノヲ**球面三角法**ト云フ。

東京附近一等三角網ノ圖



問題 12.

1. 某港ニ碇泊セル船ノ距離ヲ知ラント欲シテ海岸ニ於テ長サ c 尺ノ基線ヲ測リ其兩端ノ點ニ於テ船ノ一點ノ方向ガ基線トナセル角ヲ測リテ α 及ビ β ヲ得タリ,然ラバ船ト基線トノ距離ヲ見出ス式如何。

2. 海濱ニ聳ユル山ノ高サ CD ヲ知ラント欲シ相距ルコト 365 尺ナル二船 A, B ニ於テ

$\angle BAC = 67°\,16'$, $ABC = 54°\,20'$, 仰角 $CAD = 35°\,30'$

ヲ測リ得タリ,山ノ高サヲ問フ。

3. 高サh尺ノ塔頂ヨリ,之ト同一ノ地平面上ニ立テル旗竿ノ頂上及ビ基底ノ俯角ヲ測リテα及ビβヲ得タリ,此旗竿ノ高サ如何。

4. 山頂ニ於テ同方向ニアル二家屋ノ俯角ヲ測リシニ$23°20'$及ビ$18°10'$ヲ得タリ,又此兩家屋ノ距離ハ440間ナリ山ノ高サヲ求ム。

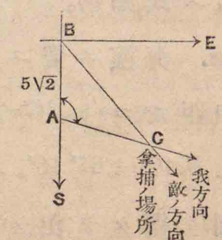
但シ次ノ對數ヲ與フ。　〔陸士〕

$\log\sin 23°10' = \bar{1}.59778,\quad \log 44 = 1.64345,$

$\log\sin 18°10' = \bar{1}.49385,\quad \log 6033 = 3.78053,$

$\log\sin 5°\ 10' = \bar{2}.95450.\quad \log 6034 = 3.78061.$

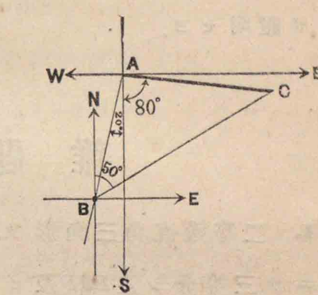
5. N 15° W ノ方位ニ向ヒ一直線ノ道路ヲ進行セル人北ニ當リテ一ツノ塔ヲ望ミ更ニ 200間進ミタルトキ此塔ヲ北東ノ方位ニ見タリト云フ,然ラバ此塔ヲ北ニ見タル位置ヨリ塔マデノ距離幾何ナルカ。但シ間ノ小數第一位マデ求メ其下四捨五入セヨ。　〔海機〕



6. 敵ノ港口ヲ距ルコト南方$5\sqrt{2}$海里ノ沖合ニ於テ封鎖ノ任ニアリタル我艦ハ,敵ノ一船密カニ港口ヲ出デ南東ノ方向ニ遁走

スルヲ發見シ,直ニ或一定ノ方向ニ每時20海里ノ速サニテ之ヲ追フコト半時間ノ後拿捕セリト云フ,我艦ノ取リシ方向及ビ敵艦ノ速サヲ問フ。　〔海兵〕

7. 船アリ其針路$S20°W$ニシテ航走中$S80°E$ニ當テ海面ニ波浪ヲ認メ暗礁ノ存在ヲ發見セリ,ソレヨリ船ハ一海里ヲ走リタル後該暗礁ノ方位ヲ測リタルニ$N50°E$ナリシト云フ,發見當時ノ船ノ位置ヨリ暗礁マデノ距離如何。　〔水產〕



8. $N30°E$ノ方向ニ歩ミシ人或時一ツノ家ヲ北方ニ望ミソレヨリ1哩ヲ進ミシトキ其家ヲ西方ニ,又一ツノ塔ヲ北東ニ望ミ,ソレヨリ尙3哩ヲ進ミシトキ其塔ヲ南方ニ見タリト云フ,然ラバ家ト塔トノ距離及ビ家ヨリ見タル塔ノ方位如何。　〔陸士〕

9. A, B ハ同一ノ水平面上ニアル二箇ノ目標ニシテ中間ニ遮蔽物アリ, C ハ高地ニアル觀測點ニシテ A, B ノ水平面上ニアル一點 D ノ直上h米ノ高サニアリ,今 C ニ於ケル觀測ノ結果トシテ A ノ方位ハ S$m°$W, 俯角ハαニシテ B ノ方位ハ N$n°$W, 俯角ハβナルコトヲ知リ得タリ

ト云フ,然ラバ AB 間ノ距離及ビ A ニ於ケル B ノ方向如何。〔陸士〕

10. 塔アリ,其頂上ニ長サ a 尺ノ旗竿ヲ立ツ,今塔ノ基底ト同ジ水平面上ノ一點ニ於テ塔ノ仰角及ビ旗竿ノ距角ヲ測リシニ何レモ θ ナラバ塔ノ高サハ $a\cos 2\theta$ 尺ナルコトヲ證明セヨ。〔水產〕

雜　題 3.

1. 二等邊直角三角形 ABC アリ B ヲ直角トス, BC ヲ E, F ニテ三等分シ $\angle EAF$ 及ビ FAC ノ正切ヲ求メヨ。〔大工〕

2. $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$ ナルトキ $\sin A$, $\cos A$ 及ビ $\tan A$ ヲ求メヨ。〔海經〕

3. $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{5}{13}$ ナルトキ, $\tan\{2(\alpha+\beta)\}$ ノ値ヲ求ム。但シ α,β ハ共ニ 90° 未滿ノ正角トス。〔專門〕

4. 次ノ各式ヲ證明セヨ。

[1] $2\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta\cos^2\varphi-2\cos 2\theta\operatorname{coc} 2\varphi=1.$ 〔盛農〕

[2] $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}.$ 〔陸士〕

[3] $$\sin^2\frac{A+B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}+\cos^2\frac{A+B}{2}\sin^2\frac{A-B}{2}$$
$$=1-\frac{1}{2}\cos^2 A-\frac{1}{2}\cos^2 B.$$ 〔東商〕

5. $\cos(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ-\alpha)$ ヲ變形シテ $k\sin(45^\circ-\alpha)$ トナシ

k ノ値ヲ小數第二位マデ算出セヨ。〔大工〕

6. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ ナルトキハ,

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}\tan^2\dfrac{\beta}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

7. $\dfrac{\sec(-120^\circ)\{\sin(60^\circ-A)-\cos(A-30^\circ)\}}{2\tan A+\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}}$ ヲ簡單ニセヨ

8. △ABC ニ就テ次ノ各式ヲ證明セヨ。

[1] $\tan B=1$, $\tan C=2$, $b=100$ ナルトキハ $a=60\sqrt{5}$ ナリ。〔水產〕

[2] $$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$$

[3] $a\sin^2 C=c(\cos B+\cos A\cos C).$

9. 三角形ノ三邊ガ m^2+m+1, $2m+1$, m^2-1 ナラバ最大角ハ 120° ナルコトヲ證明セヨ。〔高,東商〕

10. △ABC ニ於テ $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\dfrac{A+B}{2}$ ナルトキハ本形ハ二等邊三角形ナルコトヲ證明セヨ。

11. △ABC ニ於テ $a=4b\cos\left(30^\circ+\dfrac{C}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\dfrac{C}{2}\right)$ ナルトキハ, $C=2B$ ナリ。

12. △ABC ニ於テ $\dfrac{\tan A}{\tan B}=\dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキハ,此三角形ハ如何ナル形ナルカ。〔專檢〕

13. △ABC ニ於テハ θ ノ如何ニ係ラズ次式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$c\cos\theta-b\cos(A+\theta)=a\cos(\theta-B)$$　〔京鑛〕

14. 正三角形ノ地面ニ石ヲ敷ク費用ハ周圍ニ柵ヲ作ル費用ニ等シト云フ,邊ノ長サヲ問フ。但シ石ヲ敷ク費用ハ1平方尺ニツキ8錢ヲ要シ,柵ヲ作ル費用ハ1尺ニツキ84錢ヲ要スト云フ。〔陸經〕

15. 丘上ヨリ其麓ニアル圓形ノ池ヲ望見シ池畔ノ最近キ點及ビ最遠キ點ノ俯角ヲ測リ夫夫45°及ビ30°ヲ得タリ,池ノ直徑ヲ求ム。但シ丘ノ頂上ハ池ノ面ヨリ500尺ノ高サニ在リ。〔專門〕

16. 半徑 r 尺ノ球狀輕氣球ノ上昇スルヲ見ルニ,球ガ眼ニ開ク角 α ニシテ其中心ノ仰角 β ナリト云フ,眼ノ高サ地上 h 尺ナリトセバ,氣球ノ中心ノ高サハ地上何尺ナルカ。〔海兵〕

17. 山麓ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リタルニ角 α ヲ得タリ,ソレヨリ山頂ニ向ヒテ水平面ト角 β ノ傾斜ヲナス坂路ヲ200尺ダケ登リテ再ビ山頂ノ仰角ヲ測リタルニ角 γ ヲ得タリト云フ,此山ノ高サヲ求メヨ。〔專檢〕

18. 錐體アリ底面ハ一邊ノ長サ2尺ナル正方形ヲナシ,且斜稜ハ何レモ3尺ナルトキ,各斜面ガ底面トナス角ノ正弦餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。又其角ヲ分位マデ求メヨ(表ヲ用ヒヨ)。〔海機〕

19. 二等邊三角形ノ板アリ,其底邊ハ5間半ニシテ底角ハ60°ナリ,今コレヲ底邊ヲ下方ニシテ高度30°ナル太陽ニ正面ニシ且地面ニ垂直ニ立ツルトキハ,此板ノ投影ノ面積幾何。〔海兵〕

20. 坂路ノ頂上ヨリ平地上ニ在ル一點ヲ觀測シ俯角30°ヲ得,ソレヨリ坂路ヲ其 $\frac{3}{4}$ 下リ同ジ點ヲ觀測シ俯角15°ヲ得タリ,其坂路ノ傾斜角ヲ α トセバ $\tan\alpha=\dfrac{3}{3\sqrt{3}-2}$ ナルコトヲ示セ。〔名工〕

21. 定點 A ニ於テ相交ル三直線ヲ AB, AC, AD トシ,且 $\angle BAC=30°$, $\angle CAD=45°$ ナリトス,今一直線ヲ以テ是等三直線ヲ截リ其交點ヲ夫々 B, C, D トシ,且 $AB=AD$, $BD=1$ 尺ナルトキ

[1] $BC:CD=\sin BAC:\sin CAD$ ナルコトヲ證明シ,

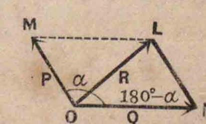
[2] BC ノ長サヲ求メヨ。〔明專〕

22. OL ナル力 (R) ヲ任意ノ二方向ノ力 OM (P), ON (Q) ニ分解スルトキハ,

$$P^2=R^2+Q^2-2RQ\cos\theta,$$

$$Q^2=R^2+P^2-2RP\cos\phi$$

ナルコトヲ證明セヨ。

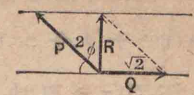


又 $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

ナルコトヲ證明セヨ。

但シ $\theta = LON, \phi = LOM, \alpha = MON$

トス。

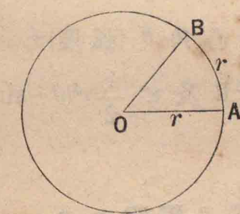


23. 一時間 2 里ノ割ニテ漕ク船子アリ一時間 $\sqrt{2}$ 里ノ割ニテ流ルル河ヲ直角ニ横ラントス,如何ナル方向ニ向ツテ漕グベキカ。

附録第一

弧度法，反三角函數，
三角方程式.

1. 半徑ト等長ナル弧上ニ立ツ中心角。弧度法。



圓 ABC ニ於テ半徑 OA ヲ r トシ,弧 AB ヲ r ニ等シトセバ，中心角ハ其弧ニ比例スル故,

$$\angle AOB : 360° = r : 2\pi r.$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{180°}{\pi} = 57°.2958 \text{弱} = 206265'' \text{弱}。$$

此角ハ斯ク一定ノ大サヲ有スルヲ以テ之ヲ測角ノ單位トスルコトアリ。而シテ此角單位ヲれーぢあんト云ヒ,此測角法ヲ弧度法ト云フ。

系。四直角ハ 2π れーぢあんニ,2直角ハ π れーぢあんニ當ル。

而シテ之等ヲ表ハスニハ其測度ノミヲ記ス。

即　$360° = 2\pi,\quad 180° = \pi,\quad 90° = \frac{\pi}{2},\quad 60° = \frac{\pi}{3}$ 等,

一般ニ
$$n° = \frac{n\pi}{180}$$
ナリ。

問 1.　45°, 30°, 15° 及ビ 22° 30′ ヲ各弧度法ニテ表ハセ。

問 2.　$\frac{7\pi}{6}$ 及ビ $\frac{5\pi}{12}$ ハ各幾度ニ當ルカ。

問 3.　正多角形ノ一角ヲ弧度法ニテ表ハセ。

問 4.　半徑 r, 中心角 θ (弧度)ナル扇形及ビ弓形ノ面積ハ夫夫 $\frac{1}{2}r^2\theta$ 及ビ $\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$ ナルコトヲ證明セヨ。

問 5.　次ノ各式ヲ證明セヨ。

(i)　$\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\cos^2 B} = \tan\dfrac{3\pi}{4}.$　〔陸士〕

(ii)　$\cos\theta-\sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right).$　〔京醫〕

(iii)　$\cot\dfrac{\pi}{8}-\tan\dfrac{\pi}{8} = 2.$　〔陸士〕

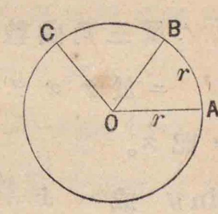
(iv)　$\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{2} = 2\sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{12}.$　〔農實〕

問 6.　$A+B+C=\pi$ ナルトキハ,

$$\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C = 4\cos A\sin B\cos C$$

ナルコトヲ證明セヨ。　〔陸經〕

2.　半徑 r ナル圓ニ於テ長サ a ナル弧上ニ立ツ中心角ノ弧度ヲ求ムルコト。



解。圓 ABC ニ於テ $\widehat{AB}=r,\ \widehat{AC}=a$ トシ,所要ノ弧度ヲ x トセバ

$$\angle AOC : \angle AOB = \widehat{AC} : \widehat{AB}$$

即　$$x : 1 = a : r$$

$$\therefore\quad x = \frac{a}{r}$$

故ニ $\angle AOC$ ハ $\frac{a}{r}$ れーぢあんニシテ,其度數,秒數ヲ夫々 d, s トスレバ

$$d = \frac{a}{r}\times 57.2958,\quad s = \frac{a}{r}\times 206265.$$

又特ニ $r=1$ トセバ $x=a$.　即單位圓ニ於テハ中心角ト其弧トハ其測度ヲ同ジクス。

故ニ角ノ三角函數ヲ弧ノ三角函數トモ云フ。

問　身長5尺4寸ノ兵士ノ直立セルヲ18町24間ノ距離ヨリ見タルトキノ身長ノ視角ヲ弧度法

ニテ求メヨ。 〔陸士〕

3. 反三角函數。 三角函數ニ於テ其角ヲ其三角函數ノ値ノ**反三角函數**ト云フ。

例ヘバ $y=\sin x$ ニ於テ x ヲ y ノ**反正弦**ト云ヒ，之ヲ次ノ如ク記ス。

$$x=\operatorname{arc}\sin y \quad 或ハ \quad x=\sin^{-1}y.$$

同樣ニ $\cos\theta=c$ 及ビ $\tan\theta=t$ ナルトキハ θ ヲ夫々 c 及ビ t ノ**反餘弦**及ビ**反正切**ト云ヒ，夫々之ヲ

$$\theta=\operatorname{arc}\cos c \quad 或ハ \quad \theta=\cos^{-1}c$$

及ビ

$$\theta=\operatorname{arc}\tan t \quad 或ハ \quad \theta=\tan^{-1}t$$

ト記ス，他ノ函數ニ於テモ之ニ準ス。

故ニ例ヘバ $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ ナル故，

$$30^\circ=\sin^{-1}\frac{1}{2} \quad ナリ。$$

同樣ニ $30^\circ=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$ 等ナリ。

注意一。 $\sin^{-1}y$, $\tan^{-1}t$ 等ハ代數學ニ於ケル指數ノ意義ニ從フモノニアラザルコト，卽夫々 $\dfrac{1}{\sin y}$, $\dfrac{1}{\tan t}$ 等ニアラザルコトヲ忘ルベカラズ。

注意二。 反三角函數モ亦六種アリテ，反正弦反餘弦，反正切，反餘切，反正割及ビ反餘割コレナリ。

注意三。 反三角函數ヲ**逆三角函數**トモ云フ。

問1. 次式ノ値ヲ求ム。

$\sin^{-1}0+2\sec^{-1}\infty-3\tan^{-1}\sqrt{3}$. 〔高〕

但シ各反三角函數ハ正ニシテ且直角ヨリ大ナラズトス。(次ノ問題ニ於テモ亦然リ)。

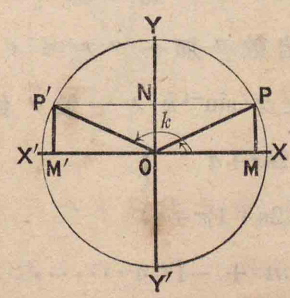
問2. 次ノ各等式ヲ證明セヨ。

[1] $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=90^\circ$ 〔海經〕

[2] $\tan^{-1}\dfrac{3}{4}+\tan^{-1}\dfrac{4}{3}=\dfrac{\pi}{2}$.

[3] $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\dfrac{m+n}{1-mn}$.

4. 所設ノ數 k ヲ正弦トスル總テノ角ヲ求ムルコト。卽 $\sin\theta=k$ ニ適スル θ ノ總テノ値



ヲ求ムルコト。但シ $-1 \leqq k \leqq 1$ ナリトス。

解。或角ノ正弦ハ唯一ツナレドモ,逆ニ同ジ値ヲ正弦トスル角ハ無數アリ(第二篇31,38節參照)。

今單位圓Oヲ畫キ,互ニ直交スル直徑XOX′,YOY′,ヲ引キYOY′上ニ中心Oヨリkニ等シキ線分ON圖ニハkヲ正トス)ヲ取リ,Nヲ過ギXOX′ニ平行ナル弦PP′ヲ引クトキハ,OXトOPノ爲ス總ベテノ角ノ正弦ハMPニシテ,OXトOP′トノ爲ス總ベテノ角ノ正弦ハ$M'P'$ナリ,而シテ共ニkニ等シ。而シテ此等ノ角ノ外ニハkニ等シキ正弦ヲ有スル角ナシ。

今$\angle XOP$ヲαニテ表ハストキハ$\angle XOP'$ハ$\pi-\alpha$ナリ。依テOXトOPノ爲ス總ベテノ角ハ

α ニ 360° ノ倍數ヲ加ヘタルモノ即$(2n\pi+\alpha)$ニテ表サレ,OXトOP′トノ爲ス總ベテノ角ハ

$\pi-\alpha$ ニ 360° ノ倍數ヲ加ヘタルモノ即$(2n+1)\pi-\alpha$ニテ表サル。依テ$\sin^{-1}k$ノ一般ノ値ヲθトセバ

$$\left.\begin{array}{l} \theta = 2n\pi+\alpha \\ \theta = (2n+1)\pi-\alpha \end{array}\right\}$$

及ビ

即 $$\theta = m\pi+(-1)^m\alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但シn及ビmハ零及ビ總ベテノ整數ヲ表ハスモノトス。

注意. $k>1$ 或ハ $k<-1$ ナルトキハ

$$\sin\theta = k$$

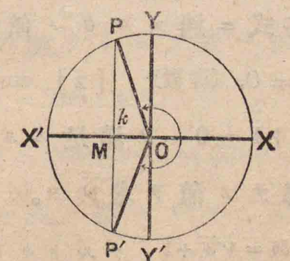
ニ適スルθノ値ナシ,即方程式ハ不可能ナリ。

問1. $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ニ適スルθノ一般ノ値如何。又其中ニテ360°ヨリ小ナルθノスベテノ正角ヲ求メヨ。〔海兵〕

問2. 次式ニ適スルθノ値如何。

[1] $\sin\theta = 1.$　　[2] $\sin\theta = 0.$

5. 所設ノ數kヲ餘弦トスル總テノ角ヲ求ムルコト。即 $\cos\theta = k$ ニ適スルθノ總テノ値ヲ求ルコト。但シ $-1 \leqq k \leqq 1$ ナリトス。



解。單位圓Oニ於テ直徑XOX′上ニOMヲk(圖ニ於テハkヲ負數トス)ニ等シク取リ,Mヲ過ギ

XOX′ ニ垂直ナル弦 PMP′ ヲ引ケ.然ルトキハ $\angle XOP$ ヲ α ニテ表ハストキハ $\angle XOP'$ ハ $-\alpha$ ニシテ此 α 及ビ $-\alpha$ ニ 2π ノ任意倍數ヲ加ヘタル角ノ餘弦ハ皆 OM ニシテ卽 k ニ等シ.而シ此外 k ヲ餘弦トスル角ナシ,故ニ $\cos^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

但シ n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數トス。

コレ $\cos\theta = k$ ニ適合スル θ ノ總テノ値ナリ。

問1. $2\cos\theta = -\sqrt{3}$ ニ適スル θ ノ一般ノ値如何。

問2. 表ヲ用ヒテ $\cos\theta = 0.5640$ ヲ滿足スル θ ノ値ヲ求メヨ。

問3. $\cos^{-1}0$ ノ一般ノ値如何。

問4. 次ノ各式ニ適スル θ ノ値如何。

[1] $\cos 3\theta = 0$.〔海機〕 [2] $\cos^2\theta = 1$.

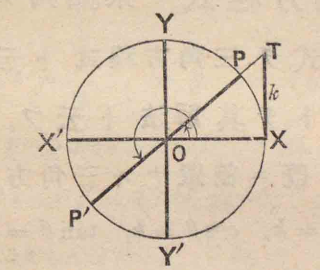
問5. $2\cos 3A + 1 = 0$ ヲ滿足スル A ノ 0° ト 180° トノ間ニアル總テノ値ヲ求メヨ。〔東鐵〕

問6. $2\sqrt{2}\cos 5\theta = \sqrt{3}+1$ ナルトキ 0° ト 180° トノ間ニアル θ ノ値ヲ求メヨ。

6. 所設ノ數 k ヲ正切トスル總テノ角ヲ求ム

ルコト。卽 $\tan\theta = k$ ニ適スル θ ノ總テノ値ヲ求ムルコト。但シ k ハ任意ノ數トス。

解。單位圓ノ直徑 XOX′ ノ端 X ニ於テ垂線 XT ヲ引キ其長サヲ k(圖ニ於テハ k ヲ正トス)ニ等シク取リ直線 TO ヲ引キ P,P′ ニ於テ圓周ニ交ラシ



ムレバ,$\angle XOP$ 及ビ $\angle XOP'$ 及ビ夫夫之ニ 2π ノ任意倍數ヲ加ヘタルモノノ正切ハ皆 XT 卽 k ニ等シ。依テ今 $\angle XOP = \alpha$ トセバ, $\angle XOP' = \pi + \alpha$ ニシテ所要ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表ハサバ,

$$\theta = 2n\pi + \alpha$$

及ビ $$\theta = 2n\pi + \pi + \alpha = (2n+1)\pi + \alpha$$

ナリ。之ヲ一式ニ纏ムレバ

$$\theta = m\pi + \alpha \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

但シ n 及ビ m ハ零及ビ總ベテノ整數ヲ表ハスモノトス。

問 1.　次ノ各式ニ適スル θ ノ値ヲ求メヨ。

$\tan\theta=1,\quad \tan^2\theta=3,\quad \log\tan 3\theta=0.$

問 2.　$\tan 10\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ニ適合スル總テノ鋭角ヲ求メヨ。

7. 三角方程式。 未知角ノ三角函數ヲ含メル方程式ヲ三角方程式ト云ヒ,其未知角ヲ求ムルコトヲ其解法ト云フ。

前章ニ於テ既ニ簡單ナル三角方程式

$\sin\theta=k,\quad \cos\theta=k,\quad \tan\theta=k$

等ヲ解キタリ, 今次ニ稍複雜ナルモノノ解法ヲ示サントス。

例一。 $\cos 2\theta=\cos\theta$　ヲ解ケ。

解法。 上ノ第 5 節ノ公式(2)ニヨリ

$$2\theta=2n\pi\pm\theta$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\quad 或ハ\quad \theta=\frac{2}{3}n\pi.$$

但シ n ハ任意ノ整數又ハ 0 トス, 以下皆同ジ。

問。 $\tan x=\tan 5x$ ヲ解ケ。

但シ　$0<x<360°$　トス。　〔秋鑛〕

例二。 $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$　ヲ解ケ。

解法。 $\cos^2\theta$ ノ代リニ $1-\sin^2\theta$ ヲ置キ

$$2-2\sin^2\theta+3\sin\theta=3.$$

整頓スレバ　$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0.$

$$\therefore\quad \sin\theta=1\quad 或ハ\quad \frac{1}{2}.$$

依テ　$\sin\theta=1$　ヨリ　$\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}.$

或ハ　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$　ヨリ　$\theta=n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}.$

問 1.　$2\sin^2\theta-5\cos\theta-4=0$　ヲ解ケ。　〔長醫〕

問 2.　$\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$　ヲ解ケ。

問 3.　$4\cos^2 x+\cos^2 2x=1$　ヲ解ケ。〔東北大工專〕

例三。 $\cos 2\theta-\cos 4\theta=\sin\theta$　ヲ解ケ。

解法。 左邊ヲ積ノ形ニ變ズレバ

$$2\sin 3\theta\sin\theta=\sin\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta=0\quad 或ハ\quad \sin 3\theta=\frac{1}{2}.$$

依テ　$\sin\theta=0$　ヨリ　$\theta=n\pi.$

及ビ　$\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$　ヨリ　$\theta=\dfrac{1}{3}\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right\}.$

問 1.　$\cos x+\cos 7x=\cos 4x$　ヲ解ケ。　〔高〕

問 2.　$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$　ヲ解ケ。〔秋鑛,山商〕

問 3.　$\sin\theta+\sin 2\theta=\cos\theta+\cos 2\theta$　ヲ解ケ。〔商船〕

例四。 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$ ヲ解ケ。

解法。 $\sin\theta$ ヲ右邊ヘ移シ兩邊ヲ平方シテ解クコトヲ得レドモ,斯クスレバ無縁根ヲ誘出スル恐レアルヲ以テ,次ノ如クスルヲ便ナリトス。

兩邊ヲ2ニテ割リ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

$$\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta-\frac{\pi}{6}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}.$$

問. 次ノ方程式ヲ解ケ。

[1] $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1.$

[2] $\sin x-\cos x=1.$ (但シ $0^\circ<\theta<180^\circ$). 〔上寵〕

例五。 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

$$\cos(x+y)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sin(x-y)=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解法。 (1)ヨリ $\quad x+y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}.$

(2)ヨリ $\quad x-y=m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}.$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\left\{(2n+m)\pi\pm\frac{\pi}{4}+(-1)^m\frac{\pi}{6}\right\},$$

$$y=\frac{1}{2}\left\{(2n-m)\pi\pm\frac{\pi}{4}-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right\}.$$

注意。 若シ x,y ヲ共ニ正ノ鋭角ト假定セバ

$0^\circ<x+y<180^\circ$ 及ビ $0^\circ<x-y<90^\circ$

ナルベキヲ以テ

$$x+y=\frac{\pi}{4}\quad 及\quad x-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\quad x=\frac{5}{24}\pi,\quad y=\frac{1}{24}\pi.$$

問。 $x+y=90^\circ,\ \sin x+\cos y=\sqrt{3}$ ヲ解ケ。

但シ x 及ビ y ハ共ニ 180° ヨリ小ナル正角トス。

問題

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $\sin A\cos A=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$ 〔教養〕
2. $\sin 2x=\sqrt{2}\cos x\ (90^\circ<x<180^\circ$ トス). 〔商船〕
3. $\tan^2\theta-4\tan\theta+1=0.$ 〔商船〕
4. $\cos 3\theta+4\cos^2\theta=0.$ 〔東工〕
5. $3\tan^2\theta=1+4\sin^2\theta.$

6. $\cos 5\theta+\cos 3\theta+\cos\theta=0.$

7. $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ 〔大工,高〕

8. $\tan\theta+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)=2.$ 〔海兵〕

9. $3\operatorname{cosec}^2\theta-8\cot\theta+2=0$ ニ適スル鋭角 θ ノ値ヲ求メヨ。但シ次ノ對數ヲ與フ。

$\log\tan 30^\circ 57'=\bar{1}.77791,$

$\log\tan 30^\circ 58'=\bar{1}.77820,\ \log 6=0.77815.$

10. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

[1] $\sin(2x-y)=\cos(x+2y)=\dfrac{1}{2}.$ 〔海機〕

[2] $x+y=150^\circ,\ \tan x+\tan y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}.$ 〔東工〕

[3] $\sin(A+B)=-\dfrac{1}{2},\ \cos(A-B)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

但シ A,B ハ共ニ 360° ヨリ小ナル正角トス。

〔商船〕

11. 表ヲ用ヒテ次ノ方程式ヲ解ケ。

$\sin^4 x+\cos^4 x=0.8$

12. 二等邊三角形ノ底角ノ正弦ト餘弦トノ和ガ $\sqrt{2}$ ニ等シキトキハ頂角ノ大サ如何。

雜題 4.

1. 正方形 ABCD ノ二邊 AB, CD 上ニ夫夫 P, Q ヲ取リ $AP=CQ=\dfrac{1}{3}AB$ ナラシムレバ, PQ ト對角線 AC トノ爲ス角ノ正切如何。 〔海機〕

2. $\cos 30^\circ$ 及ビ $\sin 45^\circ$ ノ値ヲ知リテ次ノ函數ノ値ヲ求メヨ。 〔盛農〕

$\cos 157^\circ.5,\quad \tan(\pi+150^\circ),\ \cot(2\pi-15^\circ).$

3. 次式ニ適スル 90° 以內ノ角 A ヲ求メヨ。

$$\frac{\cot(90^\circ-A)\operatorname{cosec}^2(180^\circ-A)\cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A\sin^2(270^\circ+A)}=2.$$

4. $\tan A+\sin A=m,\quad \tan A-\sin A=n$ ナルトキ,

$$m^2-n^2=\pm 4\sqrt{mn}$$

ナル式ヲ誘導シ,且其符號ヲ決定セヨ。 〔盛農,仙醫〕

5. $\tan A=\sqrt{3}$ ニシテ且 $\cos A=\dfrac{1}{2}$ ナルトキ,

$\sin\dfrac{A}{2}$ ト $\cos\dfrac{A}{2}$ トノ値ヲ求メヨ。 〔海兵〕

6. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。 〔海機〕

7. $\sin A\sin B\sin(A-B)+\sin B\sin C\sin(B-C)$

$+\sin C\sin A\sin(C-A)+\sin(A-B)\sin(B-C)\sin(C-A)=0$

ヲ證明セヨ。 〔東商〕

8. $\cos^4 A+\cos^4(120^\circ+A)+\cos^4(240^\circ+A)$

ノ値ヲ求メヨ。 〔陸士〕

9. $A+B+C=180°$, $\cos A=\cos B\cos C$ ナルトキ $\cot B\cot C=\frac{1}{2}$ ナルコトヲ示セ。〔仙工〕

10. $\cos(\alpha-\beta)=m\sin(\alpha+\beta)$ ナルトキハ,

$$\tan(45°+\alpha)=\frac{m+1}{m-1}\tan(45°-\beta)$$

ナルコトヲ證明セヨ。〔專門〕

11. $A+B+C=180°$ ナラバ $\cot A+\frac{\sin A}{\sin B\sin C}$ ノ値ハ A, B 及ビ C ノ中何レノ二ツヲ交換スルモ變ズルコトナキコトヲ證明セヨ。〔高〕

12. $\alpha=\frac{\pi}{17}$ ヲ與ヘテ $\frac{\cos\alpha\cos 13\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$ ノ値ヲ求メヨ。〔仙醫, 大醫〕

13. $\frac{\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta+2\varphi)}{\cos\theta+\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta+2\varphi)}$ ヲ變ジテ $\tan(\theta+\varphi)$ トセヨ 〔海兵〕

14. 下ノ二式ニ於テ φ ヲ消去シ, $\cos A$ ノ値ヲ a, b, c ニテ表ハセ。〔商船〕

$$a=(b+c)\cos\varphi,\quad 4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b+c)^2\sin^2\varphi.$$

15. $\tan B=\frac{2\sin A\sin C}{\sin(A+C)}$ ナラバ, $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。〔仙醫〕

16. $a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$ ナルトキハ

$$\frac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。〔高〕

17. $\tan\alpha$, $\tan\beta$ ヲ方程式 $x^2+6x+7=0$ ノ二根トセバ $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ ナルコトヲ證セ。〔海兵〕

18. $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, $x^2+y^2-r^2=0$ ガ實根ヲ有スルタメニ必要ニシテ且十分ナル條件ヲ求ム。〔東北大工〕

19. $\sin A+\sin B$ ト $\sin(A+B)$ トノ大小ヲ次ノ四ッノ場合ニ於テ比較セヨ。

(甲) A, B 共ニ第一象限ノ角ナルトキ, (乙) A, B 共ニ第二象限ノ角ナルトキ, (丙) A, B 共ニ第三象限ノ角ナルトキ, (丁) A, B 共ニ第四象限ノ角ナルトキ。〔大工〕

20. A, B ニ制限ナシトシ, $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ナルトキ $A+B$ ノ正弦,餘弦及ビ正切ヲ求メヨ。

21. $2\sin(\alpha-30°)\cos\alpha$ ヲ和又ハ差ノ形ニ變形シ,然ル後此式ノ値ヲ最大ナラシムル α ノ値ヲ求メヨ。〔海兵〕

22. $\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ ハ θ ノ如何ナルトキニ最大ナル値ヲ有スルヤ。〔商船〕

23. $0°$ ト $180°$ トノ間ニ於テ $\sin x$ ガ $\cos 50°$ ヨリ小ナルタメノ x ノ範圍ヲ求メヨ。〔海兵〕

24. $0°<A<90°$ ナル一角 A ノ弧度ヲ θ トセバ, 次ノ二件ヲ證明セヨ。〔陸士〕

[1] $\sin\theta<\theta<\tan\theta$.

[2] A ガ微小ナルトキハ $\sin\theta, \theta, \tan\theta$ ハ殆ンド相等シク，$\cos\theta$ ハ $1-\dfrac{\theta^2}{2}$ ニ殆ンド相等シ。

25. $\tan^{-1}\dfrac{3}{4} = 2\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ ナリヤ如何。〔海經〕

26. 次ノ方程式ヲ解ケ。

[1] $\sin 3\theta+\cos 3\theta = \sin\theta+\cos\theta.$ 〔一高〕

[2] $\sec 4\theta-\sec 2\theta = 2.$ 〔商船〕

[3] $\cot\theta-\tan\theta = \sec\theta+\operatorname{cosec}\theta.$ 〔同上〕

[4] $\tan\theta+\tan 2\theta+\tan 3\theta = 0.$

[5] $\cos 1'-\cos 59^\circ 59' = \cos x.$ 〔海經〕

27. $\sin x+\operatorname{cosec} x = a$ ヲ解キ，且如何ナル場合ニ實根アルカヲ吟味セヨ。〔高〕

28. $\cos\theta-\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ ヲ解キテ $\cos\theta$ ノ値ヲ求メヨ。又 $\cos 24^\circ 18' = 0.9114$ ナルコトヲ知リテ θ ノ値ヲ 0° ト 360° トノ間ノ範圍ニ於テ求メヨ。〔海機〕

29. $x+y = 90^\circ,\ \sin(3x-y) = \dfrac{1}{2}$ ニ適合スル 180° ヨリ小ナル總ベテノ正角 x 及ビ y ヲ求ム。〔大工〕

30. $\sin x = a\cos y+b\sin y,\quad \cos x = a\sin y-b\cos y$ ヨリ x 及ビ y ヲ消去セヨ。

31. $\sin\alpha = m\sin\beta,\quad \tan\alpha = n\tan\beta$ ヨリ β ヲ消去セヨ。〔商船〕

32. 次式ヨリ θ ヲ消去セヨ。

$$(x-a\sin\theta)^2+(y-a\cos\theta)^2 = (x\cos\theta-y\sin\theta)^2 = a^2.$$

33. △ABC ニ於テ次ノ各關係ヲ證明セヨ。

[1] $\dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$ 〔陸士〕

[2] $\sin(180^\circ-A) = \sqrt{2}\cos(B-90^\circ),$

$\sqrt{3}\cos A = -\sqrt{2}\cos(180^\circ+B)$ ナルトキ，

A, B, C ノ値如何。〔海兵〕

[3] $s = b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}.$

[4] $\operatorname{cosec}\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{a+b+c}{2a}.$ 〔商船〕

[5] C ヲ直角トセバ

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{2\sin A}{\sqrt{\cos 2B}}.$$

34. 三角形ノ面積ハ $\dfrac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$ ナルコトヲ證明セヨ。〔六高〕

35. △ABC ノ邊 AB ト AC トノ比ハ $\sqrt{3}:2$ ニシテ $\angle B = C+30^\circ$ ナリ，他ノ角ヲ求メヨ。〔海機〕

36. 一邊 a，他ノ二邊ノ和 $b+c$ 及ビ內接圓ノ半徑 r ガ與ヘラレテ三角形ヲ解ケ。〔東工〕

37. 山麓ノ一點Bニ於テ山頂Aノ仰角ヲ測リシニ 60° アリ，Bヨリ山頂ニ向テ 30° ノ傾斜ヲ登ルコト1哩ニシテC點ニ達シ，$\angle BCA$ ヲ測リシニ 135° ヲ得タリ，山ノ高サヲ求ム。〔水產〕

38. 水平面上ニ直角三角形ABCアリ,∠Cヲ直角トシ,Aニ直立スル塔ノB及ビCヨリノ仰角ヲ夫夫15°及ビ45°トセバ $\tan B=\frac{1}{2}(3^{\frac{1}{4}}-3^{-\frac{1}{4}})$ ナルコトヲ證明セヨ。〔名工〕

39. 直線ヲナス道ニ沿ヒテ歩行スル人アリ,塔ノ最大高度ヲ測リテαヲ得,又他ノ直線ヲナス道ヨリ最大高度ヲ測リテβヲ得タリ,但シ兩觀測點ヨリ兩道ノ交點ニ至ル距離ハa及ビbナリ,塔ノ高サヲ求メヨ。

40. 湖水面ヨリh尺高キ場所ニ於テ雲ノ高度ヲ測リテαヲ得,又湖水面ニ映スル雲像ノ俯角ヲ測リテβヲ得タリ,雲ノ高サヲ求メヨ。

41. P,Q,R,Sハ順次ニ一直線上ニ取レル四ツノ點ナルトキ,其直線外ニ任意ノ一點Oヲ取レバ

$$\frac{PQ.RS}{QR.PS}=\frac{\sin POQ.\sin ROS}{\sin QOR.\sin POS}$$ ナリ。〔大工〕

42. 海岸ニ人アリ,海上ニ碇泊スル二ツノ軍艦ノ距離ヲ知ラント欲シ,二艦ニ對スル角ヲ測リ60°ヲ得タリ,又各艦ヨリ發スル砲火ヲ見シヨリ砲聲ヲ聞クマデノ時間ヲ檢シテ4秒及6秒ヲ得タリ,音響ノ速サガ毎秒330「メートル」ナリトスレバ二艦ノ距離幾「メートル」ナルカ。〔六高〕

43. 南北ノ道路上ニ北ヨリA,B,C,D,Eノ順ニ五箇ノ目標アリ,Eノ東ノ一地Oニ於テ是等ノ目標ヲ望ミ$\angle AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, $COD=\gamma$, $DOE=\delta$ナルヲ知レリ,今

$DE=a$ナルトキハ,AB, BC, CD各如何。但シ對數計算ニ便ナル算式ニテ表ハセ。

又$d=10$米,$\alpha=\beta=\gamma=\delta=15°$ナル場合ニ於ケル結果ヲ米ノ小數第一位マデ計算セヨ。〔陸士〕

44. $S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots$($n$項マデ)ノ兩邊ニ$\sin\frac{\beta}{2}$ヲ掛ケ公式(19)ヲ用ヒテ$S$ヲ求メヨ。

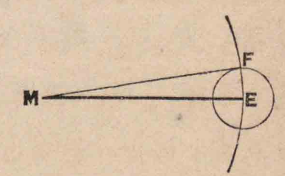
45. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ヨリ,對數計算ニヨリ直チニaヲ求ムル式 $a=(b+c)\cos\varphi$ ヲ誘出セヨ。

但シ $\sin\varphi=\dfrac{2\sqrt{bc}\cos\frac{1}{2}A}{b+c}$ トス。

46. 第二篇第42節問1[1]ノ公式ヲ用ヒテ,in Aヲ知リテ $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ ヲ求ムル公式ヲ作レ。

47. 地球ノ半徑(3963哩)ハ月ニ於テ57′ 3″.16ノ角ヲ張ルト云フ。地球ト月トノ距離如何。

〔Mヲ月ノ中心,Eヲ地球ノ中心トシ,Mヲ中心トシMEヲ半徑トシテ弧FEヲ畫ケバ,EFハ殆ンド地球ノ半徑ニ等シキ故,MEノ長サヲx哩トセバ



$57'\,3''.16$ ノ弧度$=\frac{EF}{ME}$ ナリ〕

48. 月ノ直徑ハ地球ノ中心ニ於テ1868″ノ角ヲ張ルト云フ,然ラバ月ノ直徑ハ幾哩ナルカ。

但シ月ト地球トノ距離ヲ238793哩トス。

附錄第二

(1)

對　數

1. 對數。 例ヘバ等式 $2^5=32$ ニ於テ指數 5 ヲ 2 ニ關スル 32 ノ**對數**ト云フ。又等式 $10^{-1}=0.1$ ヨリ, 10 ニ關スル 0.1 ノ對數ハ -1 ナリト云フ。一般ニ

定義。 或數 M ノ他ノ數 a ニ關スル**對數**(Logarithm)トハ, M ニ等シキ a ノ乘冪ノ指數ナリ, 而シテ a ヲ對數ノ**底**(Base)ト云フ。

卽 $a^x=M$ ナルトキ, x ヲ底 a ニ關スル(或ハ底 a ニ於ケル) M ノ對數ト云ヒ,之ヲ次ノ如ク記ス。

$$x=\log_a M$$

又 M ヲ對數 x ノ**眞數**ト云フ。

注意一。 上ノ定義ニヨリ, $a^x=M$ ト $x=\log_a M$ トハ同ジ事實ヲ表ハスモノナリ。

注意二。 底 a ハ正數トス, 故ニ M モ亦正數

リ,然レドモ x ハ正又ハ負ノ數ナリ。

又相等シキ二數ノ對數ハ相等シク,大ナル數ノ對數ハ小ナル數ノ對數ヨリ大ナリ。逆モ亦眞ナリ。而シテ負ノ數ハ對數ヲ有セズ。

問 1. 2 ヲ底トスルトキ 4, 16, 128 ノ對數如何。

問 2. 3 ヲ底トシタルトキ對數 4 ノ眞數如何。

2. 對數ニ關スル基本定理。

[1] 底ノ對數ハ 1 ナリ。

[2] 1 ノ對數ハ 0 ナリ。

[3] 積ノ對數ハ,其各因數ノ對數ノ和ニ等シ。

證明。 $x=\log_a M,\ y=\log_a N$ トスレバ,

$$M=a^x,\quad N=a^y.\quad \therefore\quad MN=a^{x+y}.$$

故ニ $\log_a(MN)=x+y=\log_a M+\log_a N.$

同様ニ $\log_a(MNP)=\log_a M+\log_a N+\log_a P.$

[4] 商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ。

證明。 $M=a^x,\ N=a^y$ トスレバ

$$\frac{M}{N}=a^{x-y}.$$

$$\therefore\quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right)=x-y=\log_a M-\log_a N.$$

系。 $\log_a\left(\frac{1}{N}\right)=-\log_a N.$

[5] 或數ノ乘冪ノ對數ハ,其數ノ對數ニ冪指數ヲ乘ジタル積ニ等シ。

證明。 $M=a^x$ トスレバ $M^n=a^{nx}.$

$$\therefore\quad \log_a(M^n)=nx=n\log_a M.$$

[6] 或數ノ乘根ノ對數ハ,其數ノ對數ヲ根指數ニテ除シタル商ニ等シ。

證明。 $M=a^x$ トスレバ $\sqrt[n]{M}=a^{\frac{x}{n}}.$

$$\therefore\quad \log_a\sqrt[n]{M}=\frac{x}{n}=\frac{1}{n}\log_a M.$$

注意。 $\sqrt[n]{M}=M^{\frac{1}{n}}$ ト考フレバ(6)ハ(5)ノ中ニ含マル。

問 1. 次ノ各對數ヲ求メヨ。

$$\log_3 81,\quad \log_{10}\sqrt{0.01},\quad \log_4 2,\quad \log_2\sqrt{8}.$$

問 2. $\sqrt[3]{4}$ ヲ底トシタル 128 ノ對數如何。

〔海機〕

問 3. $\log_a m$ 及 $\log_a n$ ヲ以テ次ノ各式ヲ表セ。

$$\log_a(m^3n^5),\quad \log_a\left(\frac{m^3n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}n^3}\right).$$

3. 常用對數。

定義。 **常用對數**(Common logarithm) トハ10ヲ底トスル對數ナリ。

應用數學ニハ專ラ之ヲ用ユ，通例 $\log_{10} M$ ヲ單ニ $\log M$ ト記ス。

以下常用對數ノミヲ論ジ之ヲ單ニ對數ト云フ。

4. 定理。 或數ノ對數ト,其數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數トノ差ハ整數ナリ。

證明。 M ヲ或數トセバ,此數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル數ハ $M\times 10^n$ 或ハ $M\div 10^n$ ナリ。但 n ハ或正ノ整數トス。故ニ

$$\log(M\times 10^n)=\log M+\log(10^n)=\log M+n.$$

$$\log(M\div 10^n)=\log M-\log(10^n)=\log M-n.$$

此定理ニヨリ,或數ノ對數ヲ知ラバ,唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數ヲ知ルヲ得。

例ヘバ $\log 2$ ヲ知ルトキハ,

$$\log 20=\log 2+1,\quad \log 200=\log 2+2,$$

$$\log 20000=\log 2+4,\quad \log 0.2=\log 2-1,$$

$$\log 0.002=\log 2-3$$ 等ナリ。

依テ若シ $\log 2=0.30103$ ナルトキハ,

$$\log 20=1.30103,\quad \log 200=2.30103,$$

$$\log 20000=4.30103$$ 等ニシテ,

$$\log 0.2=0.30103-1,\quad \log 0.002=0.30103-3$$

等ナリ,而シテ此終リノ二ツハ夫夫之ヲ

$$\log 0.2=\bar{1}.30103,\quad \log 0.002=\bar{3}.30103$$

ト記スコトトシ,其小數部分ヲ正數タラシム。

問。 $\log 3=0.47712$ トシテ，30, 300, 3000, 0.3, 0.03, 0.003 ノ對數ヲ書ケ。

5. 對數ノ指標及假數。 10,100 或ハ 0.1, 0.01 等ノ如キ數(卽10ノ羃)ニアザル數ノ對數ハ*不盡數ナレドモ,小數若干位(其下ハ四捨五入)ヲ*算出シテ實用ニ供ス。

例ヘバ $\log 2=0.30103$

$\log 3=0.47712$ 等ノ如シ。

依テ前節ニ言ヘルガ如ク,

$$\log 20=1.30103,\quad \log 30=1.47712,$$

$$\log 200=2.30103,\quad \log 300=2.47712,$$

* 對數ガ一般ニ不盡數ナルコトノ證明及其近似値ヲ算出スル方法ハ本書ノ程度外ナリ。

$\log 0.2 \ = \bar{1}.30103,\qquad \log 0.3 \ = \bar{1}.47712,$

$\log 0.02 = \bar{2}.30103,\qquad \log 0.03 = \bar{2}.47712.$

即對數ハ整數部及正ノ小數部ヨリ成ル。

定義。 對數ノ整數部ヲ其**指標**(Characteristic)ト云ヒ,小數部ヲ其**假數**(Mantissa)ト云フ,但假數ハ必ズ正數トス。

例ヘバ 200 ノ對數ノ指標ハ 2 ニシテ,假數ハ .30103 ナリ,又 0.02 ノ對數ノ指標ハ $\bar{2}$ 即 -2 ニシテ假數ハ矢張 .30103 ナリ。

6. 指標法則。 對數ノ指標ハ視察ニテ求ムルヲ得,例ヘバ $\log 356.72$ ノ指標ヲ求メンニ,

$$1000 > 356.72 > 100,$$

$$\therefore\quad 3 > \log 356.72 > 2$$

故ニ $\log 356.72$ ハ 2 ト小數トノ和ニ等シ,

從テ其指標ハ 2 ナリ, 一般ニ次ノ法則アリ

(法則一) 1 ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ,其整數部ノ桁數ヨリ 1 ヲ減ジタルモノナリ。

次ニ例ヘバ $\log 0.123$ ノ指標ヲ求メンニ

$$10^{-1} < 0.123 < 10^{0} \quad ナル故$$

$$-1 < \log 0.123 < 0$$

依テ $\log 0.123$ ハ -1 ト或小數トノ和ニ等シ

故ニ其指標ハ $-1\ (\bar{1})$ ナリ。

同様ニ $10^{-3} < 0.00123 < 0^{-2}$ ナル故,

$\log 0.00123$ ノ指標ハ $-3\ (\bar{3})$ ナリ。

一般ニ次ノ法則アリ。

(法則二) 1 ヨリ小ナル數ノ對數ノ指標ハ負數ニシテ,其絕對値ハ小數點ト初メノ有効數字トノ間ニアル 0 ノ數ニ 1 ヲ加ヘタルモノナリ。

法則 1 及 2 ヨリ直ニ次ノコトヲ知ル。

或數ノ對數ノ指標ガ正ノ數 n ナルトキハ,其數ノ整數部ハ $(n+1)$ 桁ナリ。

若シ指標ガ 0 ナレバ整數部ハ一桁ナリ,

又指標ガ負ノ數 $-n$ ナルトキハ,其數ハ小數點ト初メノ有効數字トノ間ニ $(n-1)$ 箇ノ零ヲ有ス。

問 1. $\log 7 = 0.84510,\ \log 11 = 1.04139$ ヲ知リテ $\log\dfrac{1331}{49}$ ヲ求メヨ。

問 2. $\log 5 = 0.69897$ ヲ知リテ次ノ各ヲ求メヨ。

$$\log 25,\ \log \sqrt{5},\ \log \sqrt[3]{0.05}$$

問 3. $2^{3x} = 5^{6-4x}$ ヨリ x ノ値ヲ小數第三位マデ計算セヨ。 但 $\log 2 = 0.30103$ トス。 〔教養〕

7. 對數表及ビ其用法。 連續セル整數ノ對數ヲ列記セル表ヲ[1]對數表ト云フ。

對數ノ指標ハ前節ノ法則ニヨリ直ニ知ルヲ得ルヲ以テ,對數表ニハ假數ノミヲ記シ指標ヲ記セズ,又假數ノ左端ニアル小數點モ省略セリ。

例一。 log 275.4 ヲ求メヨ。

解。 指標ハ 3−1 卽 2 ニシテ假數ハ對數表ヨリ 43996 ナルヲ知ル, 故ニ

$$\log 275.4 = 2.43996$$

問。 次ノ諸數ノ對數ヲ求メヨ。

171,　992,　5.81,　8200,　0.0037,　0.215

例二。 $\log x = \bar{3}.15351$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解。 先ヅ表中ヲ搜索シテ假數 15351 ニ對スル眞數 1424 ヲ得。而シテ指標ガ $\bar{3}$ ナルヲ以テ,x ハ小數點ノ右ニ其初メノ有效數字トノ間ニ二ツノ零ヲ有スル數ナリ。

故ニ　　$x = 0.001424$

(1) 各數ノ對數ヲ小數第五位マデ(其下四捨五入)示セル表ヲ**五桁ノ對數表**ト云フ。其他四桁，七桁等ノ對數表アリ，本書ニハ五桁ノ對數表ヲ用ヒ，別冊トシテ本書ニ附ス。

問。 次ノ諸對數ノ眞數ヲ求メヨ。

2.1303,　0.5172,　$\bar{1}.7135$,　$\bar{4}.9345$,　5.9899

8. 比例部分ノ法則。

五數字以上ノ數ノ對數ハ附錄對數表中ニ載セズ,之ヲ求ムルニハ次ノ法則ニヨル。

二數ノ微差ト之ニ對應スル對數ノ差トハ正比例ヲナス。

例1. log 1912.6 ヲ求メヨ。

解。 表ヨリ $\log 1912 = 3.28149$
　　及　$\log 1913 = 3.28171$

　　　　差 $= 0.00022$ (之ヲ**表差**ト云フ)。

故ニ比例　$1 : 0.6 = 0.00022 : x$　ヨリ[1]

$x = 0.00013$ ヲ得, 之ヲ log 1912 卽 3.28149 ニ加ヘ　$\log 1912.6 = 3.28162$　トス。

此計算ヲ通常次ノ如ク記ス。

log 1912.6　　　　　　表差 = 22
　1912………3.28149　　$22 \times .6 = \overset{*}{13}$
　　6…………$\overset{*}{13}$
log 1912.6 =　3.28162

問。 687.26 及 0.011258 ノ對數ヲ求メヨ。

(1) 通常比例ニヨラズ,表中ノ比例部分ト記セル處ヲ用ユ。

例二。 $\log x = 1.23108$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解。 指數ガ 1 ナル故, x ノ整數部ハ二桁ナリ, 今假數 23108 ヲ挾メル所ヲ表中ニ求メ,

$$\begin{aligned}\log 17.02 &= 1.23096\\ \log 17.03 &= 1.23121\end{aligned}$$

故ニ此處ニ於ケル表差ハ 0.00025 ナリ,而シテ

$$\log x - \log 17.02 = 0.00012$$

故ニ比例 $0.00025 : 0.00012 = 0.01 : d$

ヨリ $d = 0.0048$ ヲ得 之ヲ 17.02 ニ加へ,

$x = 17.0248$ ヲ得。

算式。 $\log x = 1.23108$

$$\begin{array}{ll} \text{表差} = 25 & \underline{096\cdots\cdots17.02} \\ \dfrac{12}{25} = 0.4\overset{*}{8}\text{(1)} & \underline{12\cdots\cdots\cdots\cdots4\overset{*}{8}} \\ & x = 17.0248 \end{array}$$

問。 次ノ對數ノ眞數ヲ求メヨ。

$\bar{2}.68335$, 0.89010

9. 對數計算。

例一。 正三角形ノ各邊 37.56 尺ナルトキハ其面積如何。

(1) 此計算モ表中ノ比例部分ヲ用フ。

解。 面積ヲ S 平方尺トセバ,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (37.56)^2$$ ナル故,

$$\log S = \frac{1}{2}\log 3 + 2\log 37.56 - \log 4$$

計算。

$$\begin{array}{rl} \frac{1}{2}\log 3 & = 0.23856 \\ 2\log 37.56 & = 3.14946 \\ -\log 4 & = \underline{\bar{1}.39794} \\ \log S & = 2.78596 \\ & \underline{590\cdots\cdots6108} \\ & \underline{6\cdots\cdots\cdots\cdots9} \\ & S = 610.89 \end{array}$$

(平方尺)

注意。 $\log 4$ ヲ減ズルコトハ他ノ二ツノ對數ト一處ニ計算スルコト能ハザルヲ以テ,

$$-\log 4 = -(0.60206) = \bar{1}.39794$$

トシテ他ノ對數ト共ニ加ヘタルナリ。

問。 半徑 5 寸ノ球ノ體積ヲ公式 $\frac{4}{3}\pi R^3$ ニヨリ計算セヨ。但 R ハ半徑ニシテ $\log\pi = 0.49715$ トス。

例二。 $\dfrac{128}{9657}$ ノ四乘根ヲ求メヨ。

解。 $x = \sqrt[4]{\dfrac{128}{9657}}$ トセバ

$$\log x = \frac{1}{4}(\log 128 - \log 9657).$$

計算。

$$
\begin{array}{rl}
\log 128 & = 2.10721 \\
-\log 9657 & = \bar{4}.01516 \\
\hline
 & \bar{2}.12237 \\
\log x & = \bar{1}.53059 \\
 & 058\cdots\cdots 3393 \\
 & 1\cdots\cdots\cdots 1 \\
\hline
x & = 0.33931
\end{array}
$$

答。

注意。 $\bar{2}.12237$ ヲ 4 ニテ除スルニハ,ココニナシタルガ如ク $\bar{2}.12237$ ヲ $\bar{4}+2.12237$ ト考ヘ商ヲ $\bar{1}.+0.53059$ 卽 $\bar{1}.53059$ トスベシ。

問。 次ノ式ヲ計算セヨ。

$$\frac{4.783\times\sqrt{3}}{12.75\times 0.0349},\qquad \sqrt[3]{\frac{43.16\times 237.5}{879^4}}$$

問 題 3.

(1) $\log_{49}343\sqrt{7}$ ヲ求メヨ。〔海經〕

(2) $\log(x^2-6x+8)-\log(x-4)=2$ ヨリ x ヲ求メヨ。

(3) $\dfrac{2\log 2+\log 3}{1+\frac{1}{2}\log 0.36+\frac{1}{3}\log 8}$ ヲ簡單ニセヨ。〔陸士〕

(4) 次ノ各數ノ對數ヲ求メヨ。

512〔海經〕, 360 及 $\sqrt[8]{0.075}$〔神商〕, $\sqrt[3]{\left(\dfrac{243\times 625}{32}\right)^2}$.

但 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ知レリトス。

以下二問ニ於テモ同樣トス。

(5) $(0.36)^x=144$ ヲ解ケ。〔海經〕

(6) 45^{20} 及 $2^{10}\times 3^{15}$ ハ各幾桁ノ數ナルカ。

〔高,商船〕

(7) 三角形ノ三邊ヲ a, b, c トセバ其面積ハ

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (平幾156節及本書54節)

ニヨリテ計算スルヲ得, 但 $2s=a+b+c$ トス。

今三邊ヲ夫々 76.7尺, 59.2尺, 93.5尺トシテ面積ヲ計算セヨ。

(8) 立方體ノ體積ヲ二倍センニハ,其各稜ヲ幾倍スベキカ。

(9) 振子ノ振動時間ノ秒數 t ハ次ノ如シ,

$$t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

但 l ハ米突ヲ單位トセル振子ノ長サナリトス。仍テ $g=9.798$ ナル東京ニ於テ,一秒時間ニ一振動スベキ振子ノ長サヲ算定セヨ。

(2)

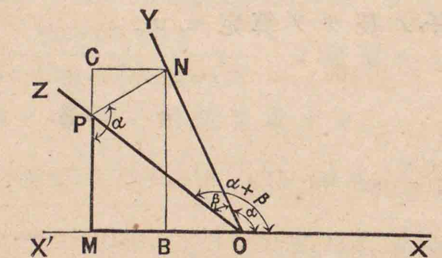
正弦及ビ餘弦ノ加法定理ノ完全ナル證明及ビ諸公式ノ幾何學的證明。

1. 正弦及ビ餘弦ノ加法定理ノ完全ナル證明。 第二篇第39節ニ於テ正弦及餘弦ノ加法定理

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(12$$

ハ α 及 β ガ共ニ正ノ鋭角ニシテ且 $\alpha+\beta$ ガ 90° ヨリ小ナル場合ニ於テハ眞ナルコトヲ證明セリ。

同樣ノ方法ニヨリテ α 及 β ガ如何ナル値ヲ取ル場合モ上ノ公式ハ眞ナルコトヲ知ルコトヲ得。例ヘバ　$90^\circ<\alpha<180^\circ$,　$0^\circ<\beta<90^\circ$ 及 $\alpha+\beta<180^\circ$ ナル場合ヲ考ヘンニ



同節ト同樣ニ作圖スレバ

$$\sin(\alpha+\beta)=MP=MC-PC=BN-PC$$

ニシテ,　$BN=ON\sin NOB=ON\sin\alpha=\cos\beta\sin\alpha,$

$$PC=NP\cos NPC=NP(-\cos\alpha)=-\sin\beta\cos\alpha.$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

又　$\cos(\alpha+\beta)=OM=-(BO+CN)$[1]

ニシテ,　$BO=ON\cos BON=\cos\beta(-\cos\alpha)=-\cos\beta\cos\alpha,$

$$CN=NP\sin NPC=\sin\beta\sin\alpha$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=-(-\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

斯クノ如ク α 及 β ノ正負大小ニ論ナク此定理ノ眞ナルコトヲ確ムルコトヲ得ベシ。

然レドモ此方法ニヨレバ α 及 β 及 $\alpha+\beta$ ノ大サニヨリ其都度其正弦,餘弦ノ大サ(勿論符號ヲ含ム)ヲ一々精査スベキヲ以テ稍繁雜ナリ。次ニ上ノ公式ガ $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ ガ共ニ正ノ鋭角ナルトキニ眞ナルコトヲ基礎トシテ一般ニ眞ナルコトヲ證明スル論理的方法ヲ示サン。

[1]　α, β ガ共ニ正ノ鋭角ニシテ $\alpha+\beta$ ガ鈍角

(1) OM, OB ハ此場合ニ於テハ負ナル故, OM ハ OB ト $BM(=CN)$ ノ絶對値ノ和ヲ負トシタルモノニ等シ。

ナル場合。

證明 $90^\circ-\alpha, 90^\circ-\beta$ 及 $180^\circ-(\alpha+\beta)$ ハ共ニ正ノ鋭角ナルベキヲ以テ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}$$
$$=\sin\{(90^\circ-\alpha)+(90^\circ-\beta)\}$$
$$=\sin(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta)+\cos(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)$$
$$=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

卽 $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

又 $$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\{180^\circ-(\alpha+\beta)\}$$
$$=-\cos\{(90^\circ-\alpha)+(90^\circ-\beta)\}$$
$$=-\{\cos(90^\circ-\alpha)\cos(90^\circ-\beta)$$
$$-\sin(90^\circ-\alpha)\sin(90^\circ-\beta)\}$$
$$=-(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta).$$

卽 $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.}$

[2] α,β ガ共ニ任意ノ正角ナル場合。

今公式ヲ α,β ノ或値ニ就テ眞ナリト假定シ，α ノ代リニ $\alpha+90^\circ$ ヲ置ケバ

$$\sin\{(\alpha+90^\circ)+\beta\}=\sin\{90^\circ+(\alpha+\beta)\}=\cos(\alpha+\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$=\sin(\alpha+90^\circ)\cos\beta+\cos(\alpha+90^\circ)\sin\beta.$$

及 $$\cos\{(\alpha+90^\circ)+\beta\}=\cos\{90^\circ+(\alpha+\beta)\}=-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$=\cos(\alpha+90^\circ)\cos\beta-\sin(\alpha+90^\circ)\sin\beta.$$

又 β ノ代リニ $\beta+90^\circ$ ヲ置クモ同様ナリ。

然ルニ此公式ハ α,β ガ共ニ正ノ鋭角ナルトキニハ眞ナルコト既ニ〔1〕ニ於テ證明シタリ，依テ α,β ノ各ニ次第ニ 90° ノ適當ナル倍數ヲ加フルトキハ α,β ノ如何ナル正ノ値ニ就テモ此公式ハ成立スルコトヲ知ル。

[3] α,β ノ何レカ一ツ又ハ雙方ガ負ナル場合。

〔2〕ト同様ニ此公式ガ α,β ノ或値ニ就テ眞ナルトキハ，α ノ代リニ $\alpha-90^\circ$ ヲ置キテモ，β ノ代リニ $\beta-90^\circ$ ヲ置クモ成立スルコトヲ證明スルコトヲ得ル故 α,β ノ正ノ或値ヨリ 90° ノ適當ナル倍數ヲ減ズルトキハ此公式ガ α,β ノ負ノ値ニ就テモ眞ナルコトヲ知ルコトヲ得。

或ハ次ノ如クシテ證明スルモ可ナリ。

α,β ノ中何レカ一ツ例ヘバ α ガ負角ナリトスルモ，α ニ $n.360^\circ$ ヲ加ヘテ $\alpha+n.360^\circ$ ガ正角ナル様 n（正ノ整數）ヲ定ムルヲ得。依テ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+n.360^\circ+\beta)=\sin\{(\alpha+n.360^\circ)+\beta\}$$
$$=\sin(\alpha+n.360^\circ)\cos\beta+\cos(\alpha+n.360^\circ)\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

同様ニ

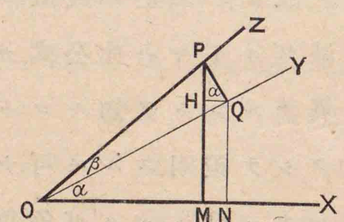
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

又 β ガ負ナル場合モ, α, β ノ雙方ガ負ナル場合モ同様ナリ。

上ノ如ク正弦及餘弦ノ加法定理ハ完全ニ證明セラレタリ。然ルトキハ β ノ代リニ $-\beta$ ヲ置キテ減法定理ガ一般ニ眞ナルコトヲ知ルコトヲ得。

然ラバ正切,餘切ノ加法定理及ビ減法定理モ亦從テ一般ニ眞ナリ。

2. 正切ノ加法定理ノ幾何學的證明。



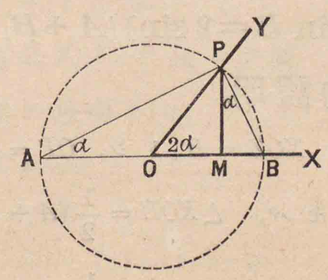
$\angle XOY=\alpha,\quad YOZ=\beta$ トセバ (作圖ノ説明略ス)

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{MP}{OM}=\frac{NQ+HP}{OM}=\frac{\dfrac{NQ}{ON}+\dfrac{HP}{ON}}{\dfrac{OM}{ON}}$$
$$=\frac{\dfrac{NQ}{ON}+\dfrac{HP}{ON}}{\dfrac{ON-HQ}{ON}}=\frac{\dfrac{NQ}{ON}+\dfrac{HP}{ON}}{1-\dfrac{HQ}{ON}}$$
$$=\frac{\dfrac{NQ}{ON}+\dfrac{HP}{ON}}{1-\dfrac{NQ}{ON}\cdot\dfrac{HQ}{NQ}}$$

然ルニ $\dfrac{NQ}{ON}=\tan\alpha$ ニシテ, 且 $\triangle ONQ \backsim PHQ$ ナル故, $\dfrac{HP}{ON}=\dfrac{QP}{OQ}=\tan\beta$ 及 $\dfrac{HQ}{NQ}=\dfrac{QP}{OQ}=\tan\beta.$

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

3. 二倍角ノ三角函數ノ幾何學的證明。



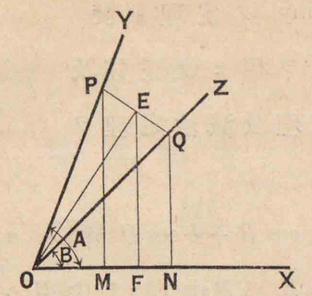
$\angle XOY=2\alpha$ トセバ (作圖ノ説明略ス)

$$\sin 2\alpha = \frac{MP}{OP} = \frac{2MP}{2OP} = \frac{2MP}{AB} = \frac{2MP}{AP}\cdot\frac{AP}{AB}$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{2OM}{2OP} = \frac{2OM}{AB} = \frac{2OM.AB}{\overline{AB}^2}$$
$$= \frac{(AM-MB)(AM+MB)}{\overline{AB}^2} = \frac{\overline{AM}^2-\overline{MB}^2}{\overline{AB}^2}$$
$$= \frac{\overline{AP}^2-\overline{BP}^2}{\overline{AB}^2} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 - \left(\frac{BP}{AB}\right)^2$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \text{ 等},$$
$$\tan 2\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{2MP}{2OM} = \frac{\frac{2MP}{AM}}{\frac{2OM}{AM}} = \frac{\frac{2MP}{AM}}{\frac{AM-MB}{AM}}$$
$$= \frac{2\left(\frac{MP}{AM}\right)}{1-\frac{MB}{AM}} = \frac{2\left(\frac{MP}{AM}\right)}{1-\frac{MB.AM}{AM.AM}} = \frac{2\left(\frac{MP}{AM}\right)}{1-\frac{\overline{MP}^2}{\overline{AM}^2}}$$
$$= \frac{2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

4. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$ ノ幾何學的證明。

$\angle XOY = A$, $XOZ = B$ トシ, $OP = OQ$ トシ PQ ノ中點ヲ E トセバ, $\angle XOE = \frac{1}{2}(A+B)$,

$$\angle POE = EOQ = \frac{1}{2}(A-B).$$



今 P, E, Q ヨリ OX ヘ垂線 PM, EF, QN ヲ下セバ

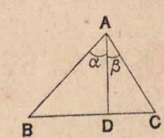
$$\sin A + \sin B = \frac{MP}{OP} + \frac{NQ}{OQ} = \frac{2FE}{OP}$$
$$= 2.\frac{FE}{OE}\cdot\frac{OE}{OP}$$
$$= 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B).$$

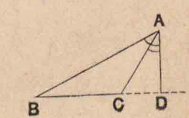
同様ニシテ

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

等ヲ證明スルコトヲ得。

問1. 第三篇公式(33)ヲ用ヒテ正弦ノ加法定理ヲ證明セヨ。





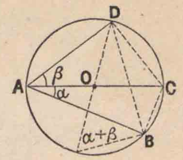
[$\triangle ABC = ABD \pm ACD$ ニシテ

$ABC = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)$,

$ABD = \frac{1}{2}c.\ AD\sin\alpha = \frac{1}{2}cb\cos\beta\sin\alpha$ 等

ヲ用ヒヨ]

問2. Ptolemy ノ定理(平幾第247頁問6)ヲ用ヒテ正弦及餘弦ノ加法定理及減法定理ヲ證明セヨ。



問3. $c=a\cos B+b\cos C$ 中ノ a, b, c ニ夫夫 $2R\sin A$, $2R\sin B$, $2R\sin C$ ヲ代用シテ以テ正弦ノ加法定理ヲ證明シ,更ニ $\cos^2(A+B)=1-\sin^2(A+B)$ ヲ利用シテ餘弦ノ加法定理ヲ證明セヨ。

問4. 問1ノ第二ノ圖ニ於テ $AC=BC$ トシ,

$$\tan 2B=\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}$$ ヲ證明セヨ。

[先ヅ $\overline{BC}^2=(BD-CD)^2$ 及 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$ ヨリ

$$2BD.CD=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2$$ ヲ得, 之ヲ

$$\tan 2B=\tan ACD=\frac{AD}{CD}=\frac{2AD.BD}{2CD.BD}$$

ノ分母ニ代入スベシ]

附錄第三

複習,補習

雜題

第一集

銳角ノ三角函數及直角三角形

1. $C=90^\circ$ ナル直角三角形 ABC ニ於テ $AB=\sqrt{2}$ ナルトキハ

$$\sin A=\cos A=\sin B=\cos B$$

ナルコトヲ證明セヨ。

2. 直角ノ二邊ガ夫夫 28 及 45 ナルトキ, 大ナル銳角ノ三角函數ヲ求メヨ。

3. $C=90^\circ$ ナル △ABC ニ於テ $AB:BC=2:1$ ナルトキ, $\angle A$ ノ三角函數ヲ求メヨ。

4. 三邊ノ比ガ $25:24:7$ ナル三角形ノ最小角ノ三角函數ヲ求メヨ

5. △ABC ニ於テ C ヲ直角トシ

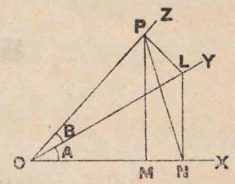
〔1〕 $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=200.5$ トシテ a ヲ求メヨ。

〔2〕 $\tan A=\frac{11}{13}$, $b=\frac{27}{11}$ トシテ c ヲ求メヨ。

6. $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナル角 α ヲ作圖シ, ヨリテ以テ $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ ヲ求メヨ。

7. $\sin 60°+\cos 60°+\tan 60°=\sin 30°+\cos 30°+\cot 30°$ ヲ證明セヨ。

8. $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキハ α ハ 30° ト 45° トノ間ニアリ，
$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ナルトキハ α ハ 45° ト 60° トノ間ニアルコトヲ證明セヨ。

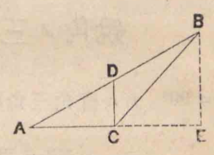


9. 作圖ニヨリ

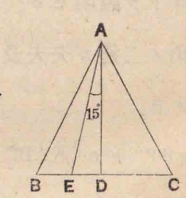
$$\sin A+\sin B>\sin(A+B)$$

ナルコトヲ證明セヨ。

10. △ABC ニ於テ C ガ鈍角ナルトキ，C ヲ通過シ AC ニ垂直ナル直線ガ對邊ヲ二等分スルトキハ，C ノ補角ノ正切ハ A ノ正切ノ二倍ニ等シキコトヲ證明セヨ。



11. 作圖ニヨリ 15° ノ三角函數ヲ求メヨ。



12. $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ與ヘテ次ノ各對數ヲ求メヨ。

〔1〕 $\log\sin 60°$, $\log(5\sec 45°)$ 〔東商〕

〔2〕 $\log\operatorname{cosec} 45°$, $\log\cos 30°$, $\log(5\tan 60°)$. 〔高〕

13. $2^x=\sin 65°$ ヲ解ケ(對數表ヲ用ヒヨ)。 〔高〕

14. 三角函數ノ對數表ニ於テ正切ト餘切ノ表差ハ共通ナリ，其理如何。

15. 直角三角形 ABC ニ於テ B ヲ直角トス，今 A, B ノ間ニ一點 D アリテ $\angle A=30°$, $\angle BDC=45°$, $AD=528$ 英尺ナリト云フ，BC ノ長サ幾英尺ナルカ，小數第二位マデ求メヨ。 〔海機〕

16. △ABC ニ於テ $A=75°$, $C=45°$ 及 A ヨリ BC ヘ下ス垂線ノ長サ 12 尺ガ與ヘラレテ三邊ノ長サヲ求メヨ。 〔東商〕

17. 半徑 a 尺ナル圓アリ其中心角 A ニ對スル弦ノ長サハ幾尺ナルカ。 〔海兵〕

18. A, B, C ハ海岸ニ於テ一直線上ニ在ル三箇ノ目標ニシテ $AB=BC=2$ 哩ナリ，或船 B ニ向ヒ海岸線 ABC ニ垂直ニ進ミシニ最初 AC ノ視角 60° ニシテ 10 分後ニハ 120° ナリ，船ノ速サ如何。

19. 直立セル一塔アリ其底ヲ過ル水平面上ノ一點ニ於テ其頂ヲ見レバ仰角 32° 27′ ナリ。此點ヨリ塔ニ向ヒテ同ジ平面上尚 100 尺ヲ進ミタル點ニテ其頂ヲ見レバ仰角 45° ナリ。此平面上塔ノ高サ幾尺ナルカ。 〔一高〕

但 $\tan 32° 20'=0.6330$, $\tan 32° 30'=0.6371$ トス。

20. 某所ニ於テ山ノ高度ヲ測リシニ 60° ヲ得，更ニ其山上ニ聳ヘタル 100 尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ 75° ヲ得タルトキハ山ノ高サハ幾何ナルカ。但 $\tan 75°=2+\sqrt{3}$ ナリ。 〔商船〕

21. 檣上ニ於テ浮標ノ俯角ヲ測リテ 35° ヲ得更ニ 3 尺降リテ又俯角ヲ測リ 34° ヲ得タリ．浮標マデノ距離如何。但 $\tan 35°=0.7$, $\tan 34°=0.675$ トス。 〔商船〕

22. 塔アリ，某所ヨリ其頂點ヲ望ミシニ方位ハ正北ニシテ仰角ハ α ナリ，其處ヨリ正西ノ方向ニ l 尺進ミ更ニ塔頂ヲ望ミシニ仰角 β ナリキト云フ，塔ノ高サヲ求メヨ。但塔ノ基礎及二箇ノ測點ハ同ジ水平面上ニ在リ 〔水產，商船〕

23. 東西一哩ヲ隔ツル二地 A, B ニ於テ二人ノ觀測者空中飛行機ヲ望ミタルニ其方位ハ北西及北東ニ當リ，仰角ハ各 45° ナルコトヲ知レリ，飛行機ノ高サ幾呎ナルカ。〔海經〕

24. 地上ノ一定點ヨリ空中ニアル直徑 6 間ノ輕氣球ヲ望ム視角ハ 30° ニシテ，其中心ノ仰角ハ 45' ナリ，此輕氣球ノ中心ガ地面ヲ距ル鉛直ノ高サヲ求メヨ。〔海兵〕

25. 南北ニ走ル堤防アリ，正東ニ向ヒテ登ルトキハ 7 歩ニツキ高マリ 2 歩ノ割合ナリ，然ラバ東ヨリ 30° 南ニ向ヒテ登ルトキハ八歩ニツキ高マリ 2 歩ナルコトヲ證明セヨ。〔海兵〕

第二集

三角函數ノ性質及三角恒等式

1. $\cos A = 0.\dot{5}$ ナルトキ，$\cot A$ 及 $\operatorname{cosec} A$ ヲ求ム。

2. $\cot A = 2+\sqrt{3}$ ナルトキ，他ノ三角函數ヲ求メヨ(第一集 6 參照)。

3. $\sin A = \dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ ナルトキ，$\tan A$ ヲ求ム。

4. $\cot A = \dfrac{p}{q}$ ナルトキ，$\dfrac{p\cos A - q\sin A}{p\cos A + q\sin A}$ ノ値ヲ求メヨ。

5. $\cot A = \sqrt{7}$ ナルトキ，$\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ ノ値ヲ求メヨ。

6. $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$ ナルトキ，$\dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{4\sin\alpha - 9\cos\alpha}$ ノ値ヲ求ム。

7. $\sec\theta = \sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}}$ ノ値ヲ求ム。

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ(**8—12**)。

8. $\sin A + \tan A = \sin A \tan A (\cot A + \operatorname{cosec} A)$.

9. $\tan^4 A + \tan^2 A = \sec^4 A - \sec^2 A$.

10. $\dfrac{1}{1-\sin A} + \dfrac{1}{1+\sin A} = 2\sec^2 A$.

11. $\cos^6 A + \sin^6 A + 3\sin^2 A\cos^2 A = 1$.

12. $\sin^2 A\cos^2 B(1+\cot^2 A)(1+\tan^2 B) = 1$.

次ノ各式ヲ最簡單ニセヨ(**13—16**)。

13. $\cot\alpha - \sec\alpha\operatorname{cosec}\alpha(1-2\sin^2\alpha)$.

14. $(\cos x\cos y + \sin x\sin y)^2 + (\sin x\cos y - \cos x\sin y)^2$.

15. $\dfrac{\cos A\cot A - \sin A\tan A}{\operatorname{cosec} A - \sec A}$.

16. $\dfrac{\sec^2 A\sin^2 A - \operatorname{cosec}^2 A + \operatorname{cosec}^2 A\cos^2 A}{\sec^2 A\sin^2 A - \operatorname{cosec}^2 A\cos^2 A}$.

17. $\sec^{10} y$ ヲ $\sec^2 y(1+4\tan^2 y + 6\tan^4 y + 4\tan^6 y + \tan^8 y)$ ニ直セ。

18. $\cos A = \cos x\sin C$, $\cos B = \sin x\sin C$ ナレバ，

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ ナルコトヲ證明セヨ。

19. $\sin^2 A\operatorname{cosec}^2 B + \cos^2 A\cos^2 C = 1$ ナルトキハ，

$\sin^2 C = \tan^2 A\cot^2 B$ ナルコトヲ證明セヨ。

20. $a\tan\alpha = b\tan\beta$, $ax^2 = a^2 - b^2$ ナルトキハ，

$(1-x^2\sin^2\beta)(1-x^2\cos^2\alpha) = 1-x^2$ ナルコトヲ證セヨ。

21. $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\beta} = 1$ ナルトキハ，

$\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha}=1$ ナルコトヲ證明セヨ。

22. $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ ナルトキハ

$\dfrac{a\sin\theta+b\cos\theta}{a\sin\theta-b\cos\theta}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ ヲ證明セヨ。

23. $\tan A=\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$ ナルトキハ,

$m\operatorname{cosec}A+n\sec A=\left(m^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

24. $\tan\theta+\sec\theta=\dfrac{3}{2}$ ヨリ $\sin\theta$ ヲ求メヨ。

25. $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=5$ ヨリ $\cos\theta$ ヲ求メヨ。

26. $\sec^2\theta=2(1+\tan\theta)$ ヨリ $\tan\theta$ ヲ求メヨ。

第　三　集

一般ノ角ノ三角函數

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ(**1—5**)。

1. $(\sec^2\theta-\cos^2\theta)(\operatorname{cosec}^2\theta-\sin^2\theta)=2+\sin^2\theta\cos^2\theta$.

2. $\tan^2\theta+\cot^2\theta=\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta-2$.

3. $\sin^3\theta+\cos^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta=\sin\theta+\cos\theta$.

4. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$. 〔海兵〕

5. $\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}=\cot^2\theta\sin^2\theta(\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta)$.

6. 次式ヲ簡單ニセヨ。

$\dfrac{(a^2-b^2)\cot(180°-\theta)}{\cot(180°+\theta)}-\dfrac{(a^2+b^2)\tan(90°-\theta)}{\cot(180°-\theta)}$.

7. 次ノ三式ノ連乘積ヲ求メヨ。

$\sin(\theta-90°)+\cos(\theta-180°)$,

$\cot(\theta-90°)-\tan(\theta-180°)$,

$\sec(\theta-90°)-\operatorname{cosec}(\theta-180°)$.

8. 次ノ各式ノ値ヲ求メヨ。

〔1〕 $2\tan 0°\sin 90°-4°\cos 0°\sin 270°+5\operatorname{cosec}90°\cos 0°\cot 270°$

〔2〕 $3\tan(-60°)\cot(-210°)+9\sin(-240°)\cos(-150°)$

〔3〕 $\cos^2\theta+\cos^2(90°+\theta)+\cos^2(180°+\theta)+\cos^2(270°+\theta)$.

9. x ヲ實數トセバ等式 $\sin\theta=x+\dfrac{1}{x}$ ニ適合スル角 θ ナシ，之ヲ證明セヨ。

10. $x=y$ ナルニ非ザレバ等式 $\sec^2\theta=\dfrac{4xy}{(x+y)^2}$ ニハ成立セズ，之ヲ證明セヨ。

第　四　集

二角ノ和,差及倍角分角ノ三角函數

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ(**1—47**)。

1. $\cos(n+1)A\cos nA+\sin(n+1)A\sin nA=\cos A$.

2. $\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)=0$.

3. $\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A=\sin 3A\cos 2A$. 〔陸士〕

4. $2\{\sin(30°+x)+\cos(60°+x)\}^2$

$-\{\cos(45°-x)-\sin(45°-x)\}^2=2\cos 2x$. 〔高〕

5. $\sec(45^\circ+\alpha)\sec(45^\circ-\alpha)=2\sec 2\alpha.$ 〔陸士〕

6. $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2(A+B)}=\dfrac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}.$

7. $\dfrac{\sin 2A}{1+\sin 2A}=\dfrac{2}{(1+\tan A)(1+\cot A)}.$

8. $\tan\dfrac{A+B}{2}-\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{2\sin B}{\cos A+\cos B}.$

9. $1+\tan A\tan 2A=\sec 2A.$ 〔小商〕

10. $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)}=\sin 2A.$ 〔札農〕

11. $\cot^2 A-\tan^2 A=4\cot 2A\operatorname{cosec} 2A.$ 〔盛農〕

12. $\tan 2A\tan 3A\tan 5A=\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A.$

13. $\cos(B+C)\cos(B-C)-\cos(A+C)\cos(A-C)=\sin(A+B)\sin(A-B).$

14. $2\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta\cos^2\varphi-\cos 2\theta\cos 2\varphi=1.$ 〔盛農〕

15. $2+\tan^2(A+90^\circ)+\cot^2(A-90^\circ)=4\operatorname{cosec}^2 2A.$ 〔海兵〕

16. $\sin(B-C)\sin(A+D)+\sin(C-A)\sin(B+D)+\sin(A-B)\sin(C+D)=0.$

17. $\tan\alpha=\tan\dfrac{\alpha}{2}(1+\sec\alpha).$ 〔商船〕

18. $\dfrac{1+\sin A}{1+\cos A}=\dfrac{1}{2}\left(1+\tan\dfrac{1}{2}A\right)^2.$

19. $(\cot\theta-\tan\theta)^2=4\left(\dfrac{1+\cos 4\theta}{1-\cos 4\theta}\right).$

20. $\sin 2A\tan 2A=\dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}.$ 〔商船〕

21. $\sec 2A-\cos 2A=\dfrac{4\tan^2 A}{1-\tan^4 A}.$ 〔同上〕

22. $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\sec 2\alpha-\tan 2\alpha.$ 〔陸士〕

23. $\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)=\dfrac{1+2\cos 2A}{1-2\cos 2A}$ 〔專門〕

24. $\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)+\tan A\tan(A+60^\circ)$

$+\tan(A-60^\circ)\tan A+3=0.$

25. $\tan A\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A)=-\tan 3A.$ 〔東北大農〕

26. $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ.$

27. $1+\tan 65^\circ+\tan 70^\circ=\tan 65^\circ\tan 70^\circ.$

28. $4\sin 110^\circ\sin 70^\circ\sin 40^\circ=\sin 80^\circ+2\sin 40^\circ.$

29. $\cos\theta\cos(120^\circ+\theta)+\cos\theta\cos(120^\circ-\theta)+\cos(120^\circ+\theta)\cos(120^\circ-\theta)=-\dfrac{3}{4}.$

30. $\cos 40^\circ\cos 80^\circ+\cos 80^\circ\cos 160^\circ+\cos 160^\circ\cos 40^\circ=-\dfrac{3}{4}.$

31. $\cos^2 A-\cos A\cos(60^\circ+A)+\sin^2(30^\circ-A)=\dfrac{3}{4}.$ 〔二高〕

32. $\cos^2 27.5^\circ+\cos^2 32.5^\circ+\cos^2 87.5^\circ=\dfrac{3}{2}$ 〔陸士〕

33. $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\sin 2\alpha-1}\div\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cot\alpha-1}=\operatorname{cosec}\alpha.$ 〔醫專〕

34. $\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B\cos(A+B)=\sin^2(A+B).$ 〔專問〕

35. $4\cos^3 A\sin 3A+4\sin^3 A\cos 3A=3\sin 4A.$

36. $\sin 4A=4\sin A\cos A-8\sin^3 A\cos A.$

37. $\sin 5A=5\sin A-20\sin^3 A+16\sin^5 A.$ 〔高〕

38. $\cos 5A=5\cos A-20\cos^3 A+16\cos^5 A.$ 〔商船〕

39. $\sin 6A=\cos A(6\sin A-32\sin^3 A+32\sin^5 A).$

40. $\cos 6A=32\cos^6 A-48\cos^4 A+18\cos^2 A-1.$

41. $2(\cos^8 A-\sin^8 A)=\cos 2A(1+\cos^2 2A).$

42. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C+\sin^2(A+B+C)$

$=2-2\cos(B+C)\cos(C+A)\cos(A+B).$

43. $\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)$

$+\cos(\alpha+\beta+\gamma)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

44. $2\{\sin(30^\circ+x)+\cos(60^\circ+x)\}^2$

$-\{\cos(45^\circ-x)-\sin(45^\circ-x)\}^2=2\cos 2x$ 〔東工〕

45. $\tan(B-C)+\tan(C-A)+\tan(A-B)=\tan(B-C)\tan(C-A)\tan(A-B)$

46. $\cos 11^\circ 15'=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

47. $\sin 3^\circ=\dfrac{1}{8}\left\{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}}-(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\right\}$.

48. $\sin\alpha=\sin\beta$, $\cos\alpha=\cos\beta$ ナルトキハ, $\alpha-\beta$ ハ 0° 又ハ 360° ノ倍數ナリ之ヲ證明セヨ。

49. $\sin 100^\circ \sin(-160^\circ)+\cos 200^\circ \cos(-280^\circ)$ ノ値ヲ求メヨ。 〔高〕

50. $\cos A=\dfrac{\cos B-k}{1-k\cos B}$ ナルトキハ,

$\tan\dfrac{A}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+k}{1-k}}\tan\dfrac{B}{2}$ ナリ。 〔高,商船〕

51. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ $\tan\alpha$, $\tan\beta$ トシテ $\tan(\alpha+\beta)$ ノ値ヲ求メヨ。 〔海機〕

52. 二次方程式 $x^2-2x\cot 2\alpha-1$ ノ根ヲ成ルベク簡單ナル式ニテ表ハセ。

53 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ ナルトキハ,

$\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}=\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ ナリ。 〔高〕

54. $\sin\theta+\sin\varphi=a$, $\cos\theta+\cos\varphi=b$ ナラバ,

$\sin\dfrac{1}{2}(\theta+\varphi)$ ノ値如何。 〔海兵〕

55. $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ ナルトキハ,

$a\cos\omega+b\sin\omega=\pm\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\omega)$ ナリ。 〔東工〕

56. $A+B+C=180^\circ$ ナラバ, 次式ヲ證セヨ。

〔1〕 $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1$. 〔長醫〕

〔2〕 $\sin 8A+\sin 8B+\sin 8C=-4\sin 4A\sin 4B\sin 4C$. 〔陸士〕

57. $A+B+C=180^\circ$, $\cos A=\cos B\cos C$ ナルトキハ,

$\cot B\cot C=\dfrac{1}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。 〔仙工〕

58. $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$ ナルトキハ,

$\cos^2 B=1+\cos 2A$ ナリ。 〔醫專〕

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ(**59**—**64**)。

59. $\sin(x+60^\circ)+2\sin(x-60^\circ)-\sqrt{3}\cos(120^\circ-x)$. 〔海機〕

60. $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)$. 〔商船〕

61. $\sin^2 B+\sin^2(A-B)+2\sin B\sin(A-B)\cos A$. 〔水產〕

62. $\dfrac{\sin A\sin(B-C)-\sin B\sin(A-C)}{\sin C}$ 〔海機〕

63. $(\tan A+\tan B)(\cot A+\cot B)+(\tan A-\tan B)(\cot A-\cot B)$. 〔同上〕

64. $\cos 2A+\dfrac{2}{\cot^2 A+1}$. 〔同上〕

65. 次ノ式ヲ單項式ニ直セ。

$(\cos A+\cos B)^2+(\sin A+\sin B)^2$. 〔商船〕

66. $\tan 7.5^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。而シテ或角ノ正切ガ之ト同ジ値ヲ有スル如キ角ノ一般ナル式ヲ記セ。 〔大工〕

67. $\sin 33^\circ\dfrac{3}{4}=0.55557$, $\cos 33^\circ\dfrac{3}{4}=0.83147$ ナルコトヲ知リテ $\sin 67^\circ\dfrac{1}{2}$ 及 $\cos 101^\circ\dfrac{1}{4}$ ノ値ヲ各小數第五位マデ求メヨ。 〔商船〕

68. 方程式 $x^2-2px+q^2=0$ ニ於テ $p=\dfrac{1}{2}\sec\theta$, $q=\dfrac{1}{2}\tan\theta$ ナル

トキハ，兩根ハ次ノ如シ，

$$\frac{1}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}},\quad \frac{1}{\cot^2\frac{\theta}{2}-1}$$ 之ヲ證セヨ。〔名工〕

69. θ ガ $0°$ ヨリ $360°$ マデ變化スルトキ，次ノ各式ノ値ノ變化ヲ考究セヨ。

(1) $\sec\theta-\tan\theta$.　(2) $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta$.

第五集

三角形ノ邊ト角トノ關係

次ノ問題ニ於テハ A, B, C ヲ三角形ノ三ツノ内角トシ，a, b, c ヲ其對邊トス。又 R ヲ外接圓ノ半徑，r ヲ内接圓ノ半徑トシ，r', r'', r''' ヲ夫夫 A, B, C ノ角内ニ在ル傍接圓ノ半徑トス。而シテ h_a, h_b, h_c ヲ夫夫 A, B, C ヨリ對邊 a, b, c ヘ下セル高サトス。

1. 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ヲ D ニ於テ内分シ，$AD:BD=a:b$ ナラシムレバ，

$$\tan ACD=\frac{a^2}{b^2},\qquad CD=\frac{\sqrt{a^4+b^4}}{a+b}.$$

ナルコトヲ證明セヨ。

2. $C=90°$ ナルトキハ

$$\cos(A-B)=\frac{2ab}{c^2},\qquad \cos 2B=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\quad 及\quad \tan\frac{A}{2}=\frac{a}{b+c}$$

ナルコトヲ證明セヨ。〔商船〕

3. $\sin C=\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$ 或ハ $\dfrac{\sin A}{\cos B}=\sin C+\cos C\cot A$.

ナルトキハ $C=90°$ ナルコトヲ證明セヨ。

△ABC ニ於テ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

4. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$.　〔農實，山商，商船〕

5. $a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)=2(a\cos A+b\cos B+c\cos C)$.

6. $\dfrac{b^2-c^2}{a\sin(B-C)}=\dfrac{c^2-a^2}{b\sin(C-A)}=\dfrac{a^2-b^2}{c\sin(A-B)}$.

7. $c(\cos A+\cos B)=2(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C$.

8. $c^2\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$.

9. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$.　〔名工〕

10. $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1+\sec A\sec B\sec C$.〔盛農〕

11. $\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right):\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=a-b:c$.

12. $2\left(a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}\right)=(a+b+c)(\cos A+\cos B+\cos C)$.

13. $(b^2+c^2-a^2)\tan A=(c^2+a^2-b^2)\tan B=(a^2+b^2-c^2)\tan C$.

14. $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$.　〔陸士〕

15. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$.

16. $\sin^2 A+2\sin B\sin C\cos A=\sin^2 B+\sin^2 C$.　〔大工〕

17. $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C+4\cos\frac{3}{2}A\cos\frac{3}{2}B\cos\frac{3}{2}C=0$.

18. $\tan\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}$　〔商船〕

19. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(45°-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45°-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45°-\frac{C}{4}\right)$

20. $b^2\cos 2C+2bc\cos(B-C)+c^2\cos 2B=a^2$.

21. $c^2=(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}+(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}$ 〔商船〕

22. $c^2=\left\{(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}-(a-b)^2\cos^2\frac{C}{2}\right\}\sec(A-B)$.

23. $\sin A=\frac{1}{2bc}\sqrt{(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)}$.

24. $s^2=bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}$.

25. $r\left(\cot\frac{1}{2}B+\cot\frac{1}{2}C\right)=a$.

26. $\frac{R}{r}=\frac{a+b+c}{a\cos A+b\cos B+c\cos C}$

27. $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$.

28. $4R=r'+r''+r'''-r$.

29. x, y, z ヲ鋭角トシ,

$\cos x=\frac{a}{b+c},\quad \cos y=\frac{b}{c+a},\quad \cos z=\frac{c}{a+b}$ トセバ

$\tan^2\frac{x}{2}+\tan^2\frac{y}{2}+\tan^2\frac{z}{2}=1,$

及 $\tan\frac{x}{2}\tan\frac{y}{2}\tan\frac{z}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ ナリ。

30. $b=4c\cos\left(30^\circ+\frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)$ ナルトキハ,

$A=2C$ 及 $a^2=c(b+c)$ ナリ。

31. $\tan^2\varphi=\frac{4ab}{(a-b)^2}\sin^2\frac{1}{2}C$ トスレバ, $c=(a-b)\sec\varphi$ ニシテ,

$\tan\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ トスレバ, $c=\frac{(a+b)\sin\varphi\frac{A}{2}}{\cos\varphi}$ ナリ

〔雜題 4, 45 參照〕。

32. $C=60^\circ$ ナルトキハ $a+b=2c\cos\frac{A-B}{2}$, 〔陸士〕

及 $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ ナルコトヲ證明セヨ。

33. $B=60^\circ$ ナルトキハ $\frac{a+c}{2b}=\sin(30^\circ+C)$ ナリ。 〔高〕

34. $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ

$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$. 〔49 頁問 2 參照〕 〔高〕

35. $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$ ナルトキハ,

$a+b+c=3b$ ナリ。 〔海兵〕

36. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ヘ下ス垂線ノ長サハ夫夫次ノ如シ,

之ヲ證明セヨ。

$\frac{2s}{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}},\quad \frac{2s}{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}},\quad \frac{2s}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}$ 〔陸士〕

第六集

三角形ノ解法及應用問題

1. $a=123,\ b=321,\ C=29^\circ\ 16'$ ナルトキ, A, B 及 c ヲ求メヨ。

2. $b=379,\ c=483,\ B=34^\circ\ 10'$ ナルトキ, A 及 C ヲ求メヨ。又 $b=483,\ c=379,\ B=34^\circ\ 10'$ ナルトキハ如何。

3. $\tan B=1,\ \tan C=2,\ b=100$ ナルトキハ, $a=60\sqrt{5}$ ナルコトヲ證明セヨ, 〔水產〕

4. 三ッノ角及周ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

5. 三ッノ角及内接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

6. A, a 及 $b+c$ ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

7. 三ッノ角及面積ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

8. $a, b+c$ 及 h_a ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

9. h_a, h_b, h_c ヲ知リテ三角形ヲ解ケ。

10. 四邊形 ABCD ノ四邊ヲ a, b, c, d トシ, $a+b+c+d=2s$ トシ, 且 $\angle A+C=2\alpha$, 兩對角線ノ交角ヲ φ トセバ, 其面積 S ハ次ノ如シ

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\varphi$$

又若シ此四邊形ガ圓ニ内接スレバ

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

ニシテ, 圓ニ外接スレバ

$$S=\sqrt{abcd}\sin\alpha$$

ナリ, 又若シ圓ニ内接シ同時ニ圓ニ外接スレバ

$$S=\sqrt{abcd}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

11. 圓ニ内接スル四邊形ノ兩對角線ヲ x 及 y トセバ

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}},$$

$$y=\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc+ad)}{ab+cd}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12. 四邊形ノ外接圓ノ半徑ヲ R トセバ

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

13. 圓ヲ内接及外接セシメ得ル四邊形ノ内接圓ノ半徑ハ

$$\frac{2\sqrt{abcd}}{a+b+c+d}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

14. 高サ 6600 呎ノ山ハ 100 哩ヲ離レタル處ヨリ見ルヲ得ベシト云フ, 地球ノ半徑ヲ求メヨ。

15. 一軍艦進航中正南ニ方リテ一敵艦ヲ見ル, 敵艦ノ針路ハ西北西ニシテ, 速サハ每時間 8 のっとナリ, 今直航シテ敵艦ヲ直角ニ衝カントス, 我艦ノ針路及速サヲ如何ニシテ可ナリヤ。

16. 或山脈ノ山脊ヨリ其兩側ナル山麓ノ俯角ヲ測リテ $55°\,40'$ 及 $68°\,20'$ ヲ得タリ, 而シテ山脊ヨリ之ニ應ズル隧道ノ兩口ニ至ル距離ハ 3475 尺及 2896 尺ナリ, 隧道ノ長サヲ求メヨ。

17. 太陽ノ高度 α ナルトキ同方位ナル雲ノ高度ヲ測リテ β ヲ得, 又觀測點ヨリ雲影マデノ距離 d 尺ヲ得タリ, 雲ノ高サヲ求メヨ。

18. 或人正午ニ飛行機ヲ $30°$ ノ高度ニ於テ正南ノ方向ニ見, 且其影ニ至ル距離 1 哩ニシテ, 太陽ノ高度 $45°$ ナルコトヲ知レリ, 而シテ此飛行機ハ午前十一時ニハ南東微南ニ在リテ午後一時ニハ南西微西ニ行キタリト云フ, 然ラバ此飛行機ヲ等速等高ニ進行スト假定シ其每時ノ速度及方向ヲ求メヨ。

19. 或人塔ノ高サヲ知ラントシ,其北方ナル一點ニ於テ塔頂ノ仰角 α ヲ得,次ニ此點ノ東方 d ナル距離ノ點ニ於テ仰角 β ヲ得タリ,然ラバ塔ノ高サハ $\dfrac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

20. 平原ニ一直線上ニ並列セル三點 A, B, C ヨリ一飛行船ノ高度ヲ同時ニ測リテ α, β, γ ヲ得タリ, $AB=a$, $CA=b$, $BC=c$ ナルトキハ飛行船ノ高サハ $\sqrt{\dfrac{abc}{a\cot^2\gamma+c\cot^2\alpha-b\cot^2\beta}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

21. 小丘ノ麓ニ樓閣アリ,其脚ヨリ 100 尺ヲ上リ其頭脚ノ距角ヲ測リテ $54°$ ヲ得タリト云フ,坂路ノ傾斜ヲ $9°$ ナリトセバ樓閣ノ高サ如何。

22. 地平面上ニ立テル塔ノ脚ヨリ a 尺ヲ退キテ其仰角ヲ測リ,更ニ b 尺ヲ退キテ又仰角ヲ測リテ前ノ角ノ三分ノ一ニ等シキ角ヲ得タリト云フ,然ラバ塔ノ高サハ $(a+b)\sqrt{(b-2a)/(b+2a)}$ 尺ナリ, 之ヲ證明セヨ。

23. 人アリ B 點ヨリ或山頂 C ヲ測リテ仰角 $27°\,18'$ ヲ得タリ, 又同ジ水平面上 500 間後方ナル A 點ヨリ之ヲ測リシニ $16°\,10'$ ヲ得タリト云フ,依テ山ノ高サヲ求メヨ。 但 A, B, C ハ同一ノ平面上ニ在ルモノトス。 〔長商〕

24. A, B, C ヲ三ツノ物體トシ, $BC=1716$ 尺, $CA=924$ 尺, $AB=1056$ 尺トス,或人平面 ABC 上ノ一點 D ヨリ此三ツノ物體ヲ觀測セシニ C ヲ A ノ前面ニ見又 $\angle CDB=14°\,24'$ ヲ得タリ, CD ヲ求メヨ。

25. A, B, C ノ三點アリ,之ヲ聯ネテ生ズル三角形ノ三ツノ角ノ比ハ $1:4:1$ ノ如シ,而シテ三邊中唯 AC ノミヲ往復スルコトヲ得,

觀測者アリ A ヨリ C ノ方ヘ a 米行キテ D ニ至リ, D ニ於テ角 BDC ヲ測リ更ニ b 米前進シ E ニ至リテ角 BEC ヲ測リシニ角 BDC ノ補角ナリシト云フ,然ラバ $AB=DE\tan BDC$ ナルコトヲ證明セヨ。

〔參謀本部陸地測量部〕

第 七 集

弧 度 法

1. 三角形ノ一角ハ $45°$ ニシテ一角ハ $1\frac{1}{2}$ れーぢあんナリ, 第三角ハ幾れーぢあんナルカ。 〔海兵〕

2. 甲地ヨリ 1800 めーとるノ乙地ニ高サ 5 尺 5 寸ノ人像標的ヲ樹ツ, 問フ甲地ニ於ケル其視角ハ幾分ニ當ルカ, 但シ分以下ヲ四捨五入セヨ,而シテ圓周率ハ 3.1416 トセヨ。 〔海兵〕

次ノ恒等式ヲ證明セヨ (**3**—**6**)。

3. $$\sin\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2}\pm\theta\right\}=\cos\theta$$

4. $$\tan\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2}\pm\theta\right\}=\mp\cot\theta$$

5. $$\tan(\theta-\pi)+\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan(\pi-\theta)+\cot\left(\theta-\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$+\tan(\pi+\theta)+\cot\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=0$$

6. $$\cos\theta\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)+\cos\theta\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)$$
$$+\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\theta\right)\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)=-\frac{3}{4}$$ 〔商船〕

7. $\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{1+\sin 2\theta}$

$\sin\theta-\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin 2\theta}$

ニ於テ θ ガ $\frac{\pi}{4}$ ト $\frac{3}{4}\pi$ トノ間ニ在ルトキハ複號ノ何レヲ取ルベキカヲ定メ，ヨリテ以テ $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ ヲ $\sin 2\theta$ ニテ表ハス式ヲ作レ。

8. $A+B+C+D=2\pi$ トシテ次式ヲ證明セヨ。

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin D$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$ 〔高〕

第 八 集

反 三 角 函 數

次ノ各式ヲ證明セヨ (1—6)。

1. $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2=\{\sin(\cos^{-1}x)\}^2$

2. $\sin^{-1}a+\sin^{-1}b=\sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2})+b\sqrt{1-a^2})$.

3. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

4. $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{56}{65}=\frac{\pi}{2}$

5. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{4}$

6. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$

7. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$ ノ値ヲ求ム。

8. $\tan\left(\sec^{-1}2-\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ ノ値ヲ求ム。

9. $\cot 2(\tan^{-1}x)=1$ ヨリ x ノ値ヲ求メヨ。

10. $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\tan^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\pi$ ヲ解ケ。 〔海機〕

第 九 集

次ノ方程式ヲ解キ x ノ最小正値ヲ求メヨ (1—11)。

1. $\sin x+\operatorname{cosec} x=2.$

2. $\cot x\sec 2x-\cos x\operatorname{cosec} x=1$

3. $\cot^2x-\tan^2x=2\sec x\operatorname{cosec} x$

4. $3\cos^2x-\sin^2x+(\sqrt{3}+1)(1-2\cos x)=0$

5. $\tan x+\cot x=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

6. $\frac{\tan x}{\cos 2x}+\frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x}=1$

7. $\cot 2x+2\tan 2x=4\sec 2x\operatorname{cosec} 2x\tan^2 2x-\tan^3 2x$

8. $\sin^2 2x=2\cos^2 x$

9. $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}\sin x\cos x$

10. $\cos x-\sin x=2\sqrt{2}\sin x\cos x$

11. $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=\frac{3}{2\cos 2x}$

次ノ方程式ヲ解キ θ ノ一般ノ値ヲ求メヨ (12—25)。

12. $\sin\theta+\cos 2\theta=1$

13. $\tan 4\theta=\tan\theta$

14. $\sin 9\theta+\sin 5\theta+2\sin^2\theta=1$

15. $\sin 5\theta\cos 3\theta=\sin 9\theta\cos 7\theta$

16. $\cos(a+c)\theta \cos(b+c)\theta = \cos a\theta \cos b\theta$

17. $\cos 8\theta + \cos 4\theta = 2\cos 2\theta$

18. $\cos 7\theta + \cos\theta = 3\cos 4\theta$

19. $2\sin^2\theta + \sin^2 2\theta = 2$ 〔海兵,海機〕

20. $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}$

21. $\sin 3\theta = 2\sin 2\theta - \sin\theta$

22. $\sin\theta + \cos\theta = 1$

23. $\sin^2\theta + \sin\theta = \cos^2\theta + \cos\theta$

24. $\sqrt{3}\tan^2\theta - (\sqrt{3}+1)\tan\theta + 1 = 0$

25. $\cos 2\theta = (\sqrt{3}-\sqrt{2})\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1$ 〔高〕

26. $\begin{cases} \cos(A+B) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin(A-B) = \frac{1}{2} \end{cases}$ ヲ解ケ。 〔商船〕

27. $\begin{cases} x+y=\alpha \\ \sin x : \sin y = m : n \end{cases}$ ヲ解ケ。

第 十 集

消去法, 極大極小問題等

1. $\sin 2x = a\sin x$, $\cos 2x = 6\cos x$ ヨリ x ヲ逐ヒ出セ。 〔高〕

2. $\tan(\alpha+\varphi) = m$, $\tan(\alpha-\varphi) = n$ ヨリ φ ヲ逐ヒ出セ。

次ノ各組ノ方程式ノ間ニ θ ヲ消去セヨ (**3—7**)。

3. $\sin\theta + b\cos\theta = c$, $\sin\theta + a\cos\theta = d$. 〔海機〕

4. $a\sin\theta + b\cos\theta = 1$, $b\sin\theta + a\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$. 〔海兵〕

5. $a\sin\theta + b\cos\theta - m = 0$, $b\tan\theta - a - n\sec\theta = 0$. 〔東工〕

6. $\sin(\alpha+\theta) = m$, $\sin(\alpha-\theta) = n$.

7. $\sin\theta + \cos\theta - a$, $\sin 2\theta + \cos 2\theta = b$. 〔陸士〕

8. $\sin A + \sin B = a$, $\cos A + \cos B = b$ 及 $\cos(A-B) = c$ ヲ與ヘテ A 及 B ヲ消去セヨ。 〔大工〕

9. 次ノ二式ニ於テ φ ヲ消去シ, $\cos A$ ノ値ヲ a, b, c ニテ表ハセ。

$a = (b+c)\cos\varphi$, $4bc\cos^2\frac{A}{2} = (b+c)^2\sin^2\varphi$ 〔商船〕

10. $\sin\theta\cos^2\theta = a$, $\sin^2\theta\cos\theta = b$ ナルトキハ

$$a^2b^2 = (a^2+b^2)^3$$

ナルコトヲ證明セヨ。

11. $x = a\cos^m\theta\cos^m\varphi$, $y = b\cos^m\theta\sin^m\varphi$, $z = c\sin^m\theta$ ナルトキハ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{m}} = 1$$

ナルコトヲ證明セヨ。

12.
$$a\cos^2x + b\sin^2x = m\cos^2y,$$
$$a\sin^2x + b\cos^2x = n\sin^2y,$$
$$m\tan^2x = n\tan^2y$$

ナルトキハ $\tan^2x = 1$ 及 $(a+b)(m+n) = 2mn$

ナルコトヲ證明セヨ。

13. 次ノ三式ノ最大値又ハ最小値ヲ求メヨ。

〔1〕 $\sin\theta\cos\theta$.　〔2〕 $\cos^4\theta - \sin^4\theta$.　〔3〕 $a^2\tan^2x + b^2\cot^2x$.

14. 太陽ノ高度ガ 47° ナルトキ棒ヲ何度ノ傾キヲ以テ地面ニ立ツレバ其影極大ナルベキカ。

15. $\tan\theta+\cot\theta$ ノ絕對値ノ最小ナルトキノ θ ノ正ノ最小角ヲ求ム

〔海兵〕

16. $\sin A+\cos A\geqq 0$ ナルトキ A ノ範圍ヲ定メヨ。

17. 次ノ諸式ノ極大又ハ極小ヲ求メヨ。

〔1〕 $\sin A-\sqrt{3}\cos A.$　〔2〕 $1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A.$

〔3〕 $3+5\cos x-2\cos^2 x.$

18. 次ノ級數ノ n 項マデノ總和ヲ求メヨ。　〔雜題 4 (44) 參照〕

〔1〕 $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots\cdots\cdots\cdots$

〔2〕 $\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots\cdots$

〔3〕 $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots\cdots\cdots\cdots$

附錄第四

希臘文字

大字	小字	發音	大字	小字	發音
A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ, ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Upsilon
I	ι	Iota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi (ki)
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega

問題ノ答

[簡易ナル問題ノ答數ハ省略ス]

問題 1. **6.** 0.189 弱。 **注意.** D 及ビ C ヨリ AB ヘ垂線 DE, CF ヲ引キ FD ノ測度ヲ比例式ニヨリテ求メヨ。

問題 2. **2.** 7·26…… **4.** 〔2〕 30° 或ハ 60°

5. 〔1〕 $x = 5$[illegible]$^\circ\ 30'$, $y = 7^\circ\ 30'$ 〔2〕 $x = 6^\circ$, $y = 8^\circ$.

6. $4\sqrt{3}$ 寸。 **7.** $x = \pm\frac{6}{7}\sqrt{7}$, $y = \pm\frac{2}{7}\sqrt{21}$.

問題 3. **1.** 〔1〕 $a=648.6$, $b=916.7$. 〔2〕 $A=10^\circ 2'$, $a=602.2$

〔3〕 $b=385.4$, $c=484.64$. 〔4〕 $A=46^\circ\ 18'$, $c=4.293$.

4. $\frac{na^2}{4}\cot\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{a}{2}\cot\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{a}{2}\operatorname{cosec}\frac{180^\circ}{n}$.

5. $1^\circ\ 26'$.

6. 73.1 尺強。 **注意.** 此計算ニハ $\sin 0^\circ\ 47' = 0.0136713$ ヲ用ヒヨ。

8. 416.12 尺。 **9.** $38^\circ\ 25'\ 23''$.

問題 4. **2.** 124.26 尺強。 **3.** 63.14 尺。 **4.** $50^\circ\ 11'\ 39''$.

5. 377.5 間。 **6.** 36 呎。 **7.** 141.4 尺。 **8.** 46 尺。

9. $1250 \times (3 \pm \sqrt{3})$ 米。

10. 1095 米強。 **注意.** 直角 △ABC ニ「ピタゴラス」定理ヲ適用セヨ。

11. $4\sqrt{3}$ 浬。 **注意.** $\angle A = 90^\circ$, $\angle ALB = 60^\circ$ ナルコトニ着目セヨ。

12. 28.4 浬。

13. $lh\cot\alpha\cos\theta$. **注意.** 影ハ平行四邊形ニシテ,其底ヲ l トシ其高サヲ求メヨ。 **14.** $5\sqrt{6}$ 町。**注意.** $\overline{AE}^2+\overline{CE}^2=2\overline{BC}^2+2\overline{BE}^2$ ヲ用ヒヨ。 **15.** 30 間。

問題 5. **1.** (2) $60°, 45°$. (3) $60°$.

5. $\frac{n}{\sqrt{m^2-n^2}}$.

17. $\frac{193}{625}$. **注意.** $\sin^6\theta+\cos^6=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\frac{3\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}$ ト變形スルヲ可トス。 **18.** 1 或ハ $\frac{1}{2}$. **19.** $\sqrt{2}+1$

21. **2.** **注意.** 第一項ト第四項, 第二項ト第三項トヲ別々ニ加ヘ合スルヲ可トス。

23. $\frac{115}{128}$. **24.** $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$.

雜題 1. **注意.** $\tan A=0.75=\frac{3}{4}$ トセバ三邊ノ比ヲ知ルヲ得ベシ。

3. (2) 0.277 弱。 **6.** (1) 0, (3) x^2+y^2, (4) 1, (5) $\sin^2 A$, (6) $\sec A-\tan A$.

7. 0. **注意.** 先ヅ $\sec\theta$ ヲ求メ,ヨリテ $\cos\theta$, $\sin\theta$ ノ値ヲ求ムベシ

8. (1) $30°$ 或ハ $60°$. (2) $45°$ 或ハ $30°$.

9. $x=60°$, $y=30°$ 或ハ $x=30°$, $y=60°$.

10. (1) $1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{a-b}\right)^2$.

(2) $m^2+n^2=2$.

11. 1.79127. **12.** 5.215 尺。 **14.** $S\ 30°\ W$.

15. $\frac{bc\sin\alpha}{a+b+c\cos\alpha}$ (町)。

問題 6. **3.** (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (2) -1. **4.** -0.857.

5. $-\frac{8}{\sqrt{89}}$, $-\frac{5}{\sqrt{89}}$. **6.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$, $-\frac{\sqrt{13}}{2}$.

7. $\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

8. $70°$. **注意.** $0°<A+80°<180°$ 及ビ $0°<A-40°<90°$ ナルコトニ注意セヨ。

10. (1) $\operatorname{cosec} A$. (2) 0. (3) 1.

12. $\pm\frac{1}{1+2\tan^2\alpha}$. **13.** $45°$, $15°$, $45°$, $75°$.

14. $\theta<60°$ 或ハ $\theta>300°$ **注意.** $2\cos\theta>1$ ヨリ $\cos\theta>\frac{1}{2}$ ヲ得ヨ。

16. $a^2+b^2=c^2+d^2$ **注意.** 兩式ヲ聯立セシメ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ノ値ヲ求メ公式 (5) ニヨルベシト雖モ,所設ノ兩方程式ヲ各邊々自乘シテ邊々加ヘ合スル方簡便ナリ。 **17.** $p^2-q^2=4$.

問題 7. 1. $\pm\frac{77}{85}$ 或ハ $\pm\frac{13}{85}$; $\frac{84}{85}$ 或ハ $\frac{36}{85}$.

16. $\frac{AB\sin A\sin B}{\sin(B\pm A)}$. **17.** $\frac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$ 尺。

18. $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$. **19.** -0.66

20. $\frac{h(a^2+h^2)}{a^2-h^2}$.

問題 8. **2.** $4\sin 15°\sin 10°\sin 5°$.

3. (1) $\sin(A+B)\sin(A-B)$. (2) $-\cot\frac{A}{2}$. (3) $\tan\frac{n}{2m}\theta$.

7. $\tan(x+y)$. **9.** 1.05805.

10. $X=Y=30°$ ナルトキニシテ其最小値ハ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ナリ。

注意. 73 頁問 1 ノ (6) 及ビ公式 (19) ヲ用ヒヨ。

雜題 2. **2.** -0.2588. **3.** $0.57,\ 2.74$.

4. $\sin A=\pm\sqrt{2\sqrt{2}-2}$, $\tan A=\pm\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}$,

$\cot A=\pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

5. $\pm\dfrac{1}{5\sqrt{2}}$. **6.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 或ハ ∞.

7. $\dfrac{5}{3}$. **8.** 〔1〕 $-$. 〔2〕 $+$. 〔3〕 $-$.

9. $1,\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2},\ -1,\ -\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

10. **注意.** $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin(A+45^\circ)$ 〔73頁 問 1 (4)〕

及ビ $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}\sin A$ トシテ其値ノ變化ヲ考究スベシ。

11. 4. **13.** $\dfrac{(1-b)^2}{a^2+(1-b)^2}$.

15. 〔1〕 1, 〔2〕 3, 〔3〕 $4\sin A$ 〔4〕 -1.

16. 〔1〕 $\tan\dfrac{\theta}{2}$. 〔2〕 $2\sin 2\theta$. 〔3〕 $2\sqrt{2}\cos^2\theta$.

18. 〔1〕 $45^\circ,\ 135^\circ$. 〔2〕 $90^\circ,\ 30^\circ,\ 150^\circ$.

19. $m^2+n=1$. **20.** $a\cot\dfrac{\theta}{2}$.

21. 題式ノ値ハ恒ニ $1-\dfrac{1}{4}$ トナル。

22. $\dfrac{1}{2}$. **注意.** 題式ヲ $\sin(\theta-30^\circ)-\dfrac{1}{2}$ ナル形ニ變スベシ。

23. $\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}$. **25.** $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$. **27.** $54^\circ\ 44'$.

29. 0.39 尺。 **31.** $\dfrac{h\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$ 尺。

32. CA=33.1 弱, CE=17.5. **注意.** $CA=x$, $CE=y$ トセバ,

$\tan\theta=\dfrac{x}{70+y}$, $\tan 2\theta=\dfrac{x}{20+y}$, $\tan 3\theta=\dfrac{x}{y}$ 第一ト第二トヨリ x, y

ヲ含ム方程式ヲ得, 又第一, 第二ヲ第三ニ入レ x, y ヲ含ム方程式ヲ得,

ヨリテ以テ x, y ヲ求ムルヲ得。

問題 9. **4.** **注意.** $\sin C$ ヲ $\sin(A+B)=2\sin\dfrac{1}{2}(A+B)\cos\dfrac{1}{2}(A+B)$

トスベシ。

5. **注意.** $\cos C-1$ ヲ $-(1-\cos C)=-2\sin^2\dfrac{C}{2}$ トシ, 且

$\cos\dfrac{1}{2}(A+B)=\sin\dfrac{1}{2}C$ ナルコトニ留意セヨ。

8. **注意.** $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A$ ヲ $\sin B\sin(A+C)+\sin(C+A)\sin(C-A)$ トシテ途ニ $2\sin B\sin C\cos A$ トナスベシ。

9. **注意.** $\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos A)$ 等ヲ用ヒヨ。

12. 45°

問題 10. **1.** $90^\circ,\ 60^\circ,\ 30^\circ$.

10. $\dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$ 尺, $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ 尺。

15. **注意.** $\angle ADB=180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)$ ナルコトニ注意セヨ。

問題 11. **1.** $A=60^\circ 10'$, $b=10.673$, $c=10.512$.

2. $A=57^\circ 20'$, $c=312.79$, $a=406.84$.

3. $B=67^\circ 28'.9$. $C=57^\circ 19'.1$, $a=18.41$

4. $A=35^\circ 18'$, $B=76^\circ 18'$.

5. 不能。 **注意.** $\sin A=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}>1$.

6. $100\sqrt{3}$. **注意.** $\angle A=90^\circ$ ナルモノ大ナリ。

7. $b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}c$, $a=\sqrt{2}\,c$.

8. 2468.7; 21.4; 89.1, 52.5, 60.8; 45.3.

問題 12. **1.** $\frac{c \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta\pm\alpha)}$. 但シ複符號ハ D ガ AB 上ニ在ルトキハ +, AB ノ延長上ニ在ルトキハートス。

2. 202•17 **3.** $\frac{h \sin(\beta-\alpha}{\cos\alpha \sin\beta}$尺, **4.** 603.26 間。 **5.** 244.9間。

6. E 15°S, $10(\sqrt{3}+1)$ 海浬。 **7.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$浬。

8. 25.0 哩, $N\theta E$, 但シ $\sin\theta=\frac{4}{5}$ トス。

雜題 3. **1.** $\frac{3}{11}$, $\frac{1}{5}$. **2.** $\pm\frac{p}{q}$, $\pm\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q}$, $\frac{p}{\sqrt{q^2-p^2}}$.

3. $\frac{3696}{2047}$. **5.** $k=2\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}=1.13\cdots$

8. 〔1〕 **注意.** 先ツ $\tan(B+C)$ ノ値ヨリ $\tan A$ 從テ $\sin A$ ノ値ヲ求ムベシ。

7. $\sin^2 A \cos A$. **12.** 等脚三角形又ハ直角三角形,

14. 72.74 尺。 **15.** 366 尺。 **注意.** 丘頭ヨリ望ム池畔ノ最近點及ビ最遠點ハ丘頂ノ直下ヲ通過スル池ノ中心線ト池畔トノ交點ナリ。

16. $\left(r \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}\sin\beta+h\right)$尺。 **17.** $\frac{200 \sin\alpha \sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$ 尺。

18. $\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sqrt{7}$ 及ビ 69° 18′.

19. 22.69 坪弱。

附錄 1. **1.** $\frac{1}{2}\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$. **2.** 135°

3. $n\pi+\frac{\pi}{12}$, $n\pi+\frac{5\pi}{12}$.

4. $2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$(之ヲ $m\pi+\frac{\pi}{2}$ トスルヲ得)或ハ $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

5. $m\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

6. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$ 或ハ $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. **5.** $(2n+1)\pi$ 或ハ $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$.

7. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$. **8.** $n\pi+\frac{5\pi}{12}$ 或ハ $n\pi+\frac{\pi}{12}$.

9. 45° 或ハ 30° 57′50″.

10. 〔1〕 $2x-y=m\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, $x+2y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ ヨリ夫夫 $2x-y$ 及ビ $x+2y$ ノ値ヲ求メ從テ夫夫 x 及ビ y ノ値ノ組合セヲ得ベシ。

〔2〕 $x=\frac{m}{2}\pi+\frac{2}{3}\pi$, $y=-\frac{m}{2}\pi+\frac{1}{6}\pi$.

〔3〕 90°, 120°; 120°, 90°; 150°, 180°; 180°, 150°; 270°, 300°, 300°, 270°.

11. x ノ最小値ハ 19° 37′ (約) ニシテ一般ノ値ハ $2x=n\pi\pm 39^\circ\ 14'$

12. 90° **注意.** 底角ヲ求ムベシ。

雜題 4. **1.** $\pm\frac{1}{2}$. **2.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-(2+\sqrt{3})$.

3. ±45° **4.** 根號前ノ符號ハ A ガ第一及ビ第四象限内ニ在ルトキハ正,其他ノ場合ハ負ナリ。 **注意.** 此決定ヲナスニハ $\tan A$ ト $\sin A$ トノ積卽$\frac{\sin^2 A}{\cos A}$ ノ符號從テ $\cos A$ ノ符號ヲ考フベシ。

5. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ト $\mp\frac{1}{2}$(複號同順) **注意.** $A=180^\circ+\frac{\pi}{3}+2n\pi$ トスベシ。

6. $\frac{1}{8}$. **注意.** 初メ二項ノ積ヲ和ノ形ニ直スベシ。

8. $\frac{9}{8}$. **注意.** $120^\circ+A$ 及ビ $240^\circ+A$ ニ其補角ヲ代入セヨ。

10. **注意.** m ノ値ヨリ $\frac{m+1}{m-1}$ ノ値ヲ作ルベシ。

11. 題式ハ $\cot A+\cot B+\cot C$ トナル。

12. $-\frac{1}{2}$.

14. $a^2+2bc(1+\cos A)=(b+c)^2$, $\therefore\ \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

15. **注意.** $2\cot B=\cot C+\cot A$ ヲ誘出セヨ。

16. **注意.** 所設兩式ヨリ減法ニヨリ $\dfrac{a}{\cos\frac{A+B}{2}}=\dfrac{b}{\sin\frac{A+B}{2}}$ ヲ得。

之ヨリ比例ノ性質ヲ利用シテ兩者ガ $\dfrac{c}{\cos\frac{A-B}{2}}$ ニ等シキコトヲ示セ。

18. $r^2\geqq p^2$. **注意.** y ヲ消去スレバ $x^2-2(p\cos\alpha)x+p^2-r^2\sin^2\alpha=0$ ヲ得コレヨリ x ガ實タルベキ條件ヲ研究セヨ。

19. (甲) $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$,

(乙) $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$,

(丙) $\sin A+\sin B<\sin(A+B)$,

(丁) $\sin A+\sin B<\sin(A+B)$.

20. $\sin(A+B)$, $\cos A+B)$, $\tan(A+B)$ ノ値順次次ノ如シ。

$\dfrac{24}{25}$, $\dfrac{7}{25}$, $-\dfrac{24}{7}$; 0, 1, 0; 0, −0, 0; $\dfrac{24}{25}$, $\dfrac{7}{25}$, $\dfrac{24}{7}$.

21. $n\pi+\dfrac{\pi}{3}$. **22.** $m\pi+\dfrac{\pi}{4}$. **23.** $0°<x<40°$ 或ハ $140°<x<180°$

26. 〔1〕 $n\pi$ 或ハ $\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}$. 〔2〕 $(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$ 或ハ $(2m+1)\dfrac{\pi}{10}$.

注意. $\dfrac{2n\pi}{5}\pm\dfrac{\pi}{10}=72°\times n\pm18°=(4n\pm1)18°=(2m+1)\dfrac{\pi}{10}$,

及ビ $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}=360°\times n\pm\dfrac{\pi}{2}=(4n\pm1)\dfrac{\pi}{2}=(2m+1)\dfrac{\pi}{2}$.

〔3〕 $n\pi-\dfrac{\pi}{4}$ 或ハ $2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$. 〔4〕 $\dfrac{n}{3}\pi$ 或ハ $n\pi\pm\alpha$ 但 $\alpha=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

注意. $\tan 3\theta=\dfrac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta}$ ニ著目セヨ。

27. $\sin x=a\pm\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}$ ヨリ x ヲ得, 而シテ $2>a>-2$ ナルトキハ解答ナク(問題不能), 然ラザレバ常ニ一ツノ解答アリ。

注. $\sin x$ ハ實ニシテ且 1 ト −1 トノ間ニアルベキ條件ニヨリ吟味スベシ。 **28.** $\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{4}$, $\theta=24°\,18'$ 或ハ $245°\,42'$.

29. −60°, 150°; −30°, 120°; 30°, 66°; 60°, 30°; 120°, −30°; 150°, −60°. **注.** x ヲ求ムル式 $4x=n180°+(-1)^n30°+90°$ ニ於テ $x<180°$, $y<180°$ ナル條件ヨリ $4>n>-3$ ナルベキヲ知ル。

30. $a^2+b^2=1$. **注.** 兩式ヲ平方シテ加フベシ。

31. $\sin^2\alpha+n^2\cos^2\alpha=m^2$. **32.** $x^2+y^2=2a^2$.

33. 〔2〕 45°, 30°, 105°.

34. **注.** $\triangle=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sin(A+B)$ ヨリ進ムベシ。

35. $A=30°$, $B=90°$, $C=60°$.

36. **注.** $r^2=\dfrac{(s-a(s-b)(s-c)}{s}$ ヨリ bc 六知ル, 從テ三邊ヲ知ルヲ得。

37. $880(3+\sqrt{3})$碼。 **39.** $\dfrac{\sqrt{(b+a)\,b-a)}\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$.

40. $\dfrac{h\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$尺。 **42.** $660\sqrt{7}$米。

43. $AB=d\cot\delta\sin\alpha/\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cos(\beta+\gamma+\delta)$,

$BC=d\cot\delta\sin\beta/\cos(\beta+\gamma+\delta)\cos(\beta+\gamma+\delta)$,

$OD=d\sin\gamma/\sin\delta\cos(\gamma-\delta)$.

$AB=27.3$ 米, $BC=15.7$ 米, $CD=115$ 米。

44. $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\sin\frac{n}{2}\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$. **注.** 各項ヲ夫々差ノ形ニ變ズベシ。

47. 24 萬哩(約)。 **48.** 2162 哩(約)。

附錄第三　複習補習雜題

第一集 **2.** 正弦 $\frac{45}{53}$, 餘弦 $\frac{28}{53}$, 正切 $\frac{45}{28}$ 等。

3. 正弦 $\frac{1}{2}$, 餘弦 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 正切 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 等。

4. 正弦 $\frac{7}{25}$, 餘弦 $\frac{24}{25}$, 正切 $\frac{7}{24}$ 等。

5. (1) 120.3 (2) $\frac{9\sqrt{130}}{11}$.

6. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

11. $\sin 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,
$\tan 15°=2-\sqrt{3}$, $\cot 15°=2+\sqrt{3}$ 等。

12. (1) $\bar{1}.93753$, 0.84948
(2) 0.15052, $\bar{1}.93753$, 0.93753

13. -0.142 弱。　**15.** 832.84 英尺。

16. $a=18.928$ 尺, $b=16.971$ 尺, $c=13.856$ 尺。

17. $2a\sin\frac{A}{2}$ 尺。　**18.** 每時 $8\sqrt{3}$ 哩。

19. 174.6 尺。　**20.** 86.6 尺。　**21.** 120 尺。

42. $l/\sqrt{\cos^2\beta-\cot^2\alpha}$ 尺。　**23.** 37335 呎。

24. $3(\sqrt{3}+1)=8.196$ 間。

第二集 **1.** $\frac{5}{2\sqrt{14}}$, $\frac{9}{2\sqrt{14}}$.

2. $\sin A=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\tan A=2-\sqrt{3}$ 等。

3. $\frac{m(m+2n)}{2n(m+n)}$.　**4.** $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$.　**5.** $\frac{3}{4}$.　**6.** 3.

7. $\sqrt{2}-1$.　**13.** $\tan\alpha$　**14.** $\sec A\operatorname{cosec} A$.

15. $1+\sin A\cos A$.　**16.** $\sin^2 A$

第三集 **6.** $2b^2$.　**7.** 8.

8. (1) 4.　(2) $\frac{3}{4}$.　(3) 2.

第四集 **49** $-\frac{1}{2}$　**51** $b/(c-a)$.

52. $-\tan\alpha$, $\cot\alpha$.　**54.** $\pm\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$,　**59.**

61. $\sin^2 A$.　**63.** 0.

64. 1.　**66.** $\tan 7.5°=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{2}$,
而シテ正切ガ之ニ等シキ角ノ一般ナル式ハ $n180°+7.5°$ ナリ。
但 n ハ正又ハ負ノ任意ノ整數トス。

67. 0·92388, -0.19509.

第六集 **1.** $B=135°1'$, $A=15°43$. $c=221.9$.

2. $A=45°42'$, $C=100.8'$ 或ハ $A=134°18'$, $C=11°32'$,
又 $A=26°9'$ $C=119°40'$.

4. $a=/s\sin\frac{A}{2}\Big/\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$ 等。

5. $a=r\cos\frac{A}{2}\Big/\left(\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$ 等。

6. $2os\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$ 又 $b-c=\sqrt{a^2-(b+c)^2\sin\frac{A}{2}}\Big/\cos\frac{A}{2}$.
ヨリ $B-C$ 値ハ $b-c$ ヲ知リ假設ト組合セテ B, C 及 b, c ヲ知ル

ヲ得。

7. $a=\sqrt{\dfrac{2S\sin A}{\sin B\sin C}}$ 等。但 S ハ面積トス。

8. $\cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2ah}$ ヨリ A ヲ知リ，又ハ

$b-c=\sqrt{a^2-\dfrac{4a^2h^2}{(a+b+c)(b+c-a)}}$ ヨリ $b-c$ ヲ知リヨリテ以テ

B, C 及 b, c ヲ知ルヲ得。

9. $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b)(-h_bh_c+h_ch_a+h_ah_b)}{4h_a{}^2h_bh_c}}$

等ヨリ角ヲ知リ依テ以テ邊ヲ知ル。

14. 4000 哩。　**15.** 南南西，1.93 のっと。

16. 3034.4 尺。　**17.** $d\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{cosec}(\alpha\sim\beta)$ 尺。

18. $\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})$ 哩。　**21.** $25(\sqrt{10}+\sqrt{2})$ 尺。

23. 325.86 間。　**24.** 2128.8 尺。

第七集　**1.** 0.86 れーぢあん。　**2.** 3′.

3. 共ニ正ヲ取ルベシ。依テ $\sin\theta=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 2\theta}+\sqrt{1-\sin 2\theta})$

及 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 2\theta}-\sqrt{1-\sin 2\theta})$.

第八集　. $\dfrac{1+8\sqrt{3}}{15}$　**8.** $5\sqrt{3}-8$

9. $-1\pm\sqrt{2}$.　**10.** $0,\ \pm1$.

第九集　**1.** 90°.　**2.** 2°330′　**3.** 22°30′

4. 30°.　**5.** 30°.　**6.** 22°30′.　**7.** 15°

9. 45°.　**10.** 15°　**11.** 75°.　**12.** $n\pi,\ n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}$

13. $\dfrac{n}{3}\pi$.　**14.** $(2n+1)\dfrac{\pi}{4},\ -\left\{n\pi+(-1)^n\dfrac{\pi}{6}\right\}$

15. $\dfrac{n}{8}\pi,\ \dfrac{n}{4}\pi\pm\dfrac{\pi}{24}$　**16.** $(a+b+2c)\theta=2n\pi\pm(a+b)\theta$.

17. $\dfrac{2n+1}{4}\pi,\ \dfrac{n}{3}\pi,$　**18.** $\dfrac{2n+1}{8}\pi$.　**19.** $\dfrac{2n+1}{2}\pi,\ n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$.

20. $\dfrac{3n+1}{6}\pi$.　**21.** $\dfrac{n}{2}\pi$.　**22.** $\theta-\dfrac{\pi}{4}=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$.

23. $\theta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ 或ハ $\theta-\dfrac{\pi}{4}=2n\pi\pm\dfrac{3}{4}\pi$.

24. $n\pi+\dfrac{\pi}{4},\ n\pi+\dfrac{\pi}{6}$　**25.** $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6},\ 2n\pi\pm\dfrac{3}{4}\pi$.

26. $A=\dfrac{1}{2}\left\{(2n+m)\pi\pm\dfrac{\pi}{4}\pm(-1)^m\dfrac{\pi}{6}\right\}$

$B=\dfrac{1}{2}\left\{(2n-m)\pi\pm\dfrac{\pi}{4}-(-1)^m\dfrac{\pi}{6}\right\}$

27. $\cot\dfrac{1}{2}(x-y)=\dfrac{m+n}{m-n}\cot\dfrac{1}{2}\alpha$ ヨリ $x-y$ ヲ得，之ト $x+y=\alpha$ ヨリ

x 及 y ヲ得。

第十集　**1.** $a^2-6a-2=0$　**2.** $\tan 2\alpha=\dfrac{m+n}{1-mn}$.

3. $(ac-bd)^2+(d-c)^2=(a-b)^2$.

4. $a^2+b^2=1$.　**5.** $a^2+b^2=m^2+n^2$　**6.** $\dfrac{(m+n)}{4\sin^2\alpha}+\dfrac{(m-n)^2}{4\cos^2\alpha}=1$.

7. $(a^2-1)^2+(b-a^2+1)^2=1$.　**8.** $a^2+b^2=2(1+c)$.　**9.** $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

13. 〔1〕 $\dfrac{1}{2}$.　〔2〕 1.　〔3〕 最小値 $2ab$(a, b ガ同符號ナルトキ)，

又ハ $-2ab$(a, b ガ異符號ナルトキ)。

14. 43°.　**15.** 45°.　$2n\pi-\dfrac{\pi}{4}\leqq A\leqq 2n\pi+\dfrac{3}{4}\pi$.

17. 〔1〕 $A=150°$ ナルトキ極大 2 ヲ取リ，$A=330°$ ナルトキ極

小 -2 ヲ取ル。〔2〕 $A=45°$ ナルトキ極大 $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}$ ヲ取リ，

$A=180°$ ナルトキ極小 0 ヲ取ル。〔3〕 $x=0°$ ナルトキ極大 6 ヲ取リ，$x=180°$ ナルトキハ極小 -4 ヲ取ル。

18. 〔1〕 $\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$.　〔2〕 $\sin\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\beta\right)\sin\dfrac{n}{2}\beta\Big/\sin\dfrac{\beta}{2}$.

〔3〕 $\sin\dfrac{1}{2}(n+1)2\sin\dfrac{n}{2}\alpha\Big/\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

大正元年八月廿四日印刷
大正元年十月十六日訂正再版發行
大正四年二月一日修正四版印刷
大正六年十二月十二日修正五版印刷
大正七年二月四日訂正六版印刷
大正七年二月七日訂正六版發行

大正元年八月廿八日發行
大正四年一月十日修正三版發行
大正四年二月四日訂正四版發行
大正六年十二月十五日修正五版發行

中等教育平面三角法教科書　定價金六拾錢

大正九年度臨時定價金一圓二十□錢

大正十年度臨時定價 壹圓參拾六錢

定價金六拾貳錢
大正十年度臨時定價 金一圓三十六錢

著作者　林鶴一
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
發行者　株式會社 東京開成館
代表者　牧瀨五一郎
東京市京橋區築地三丁目十一番地
印刷者　野村宗十郎
東京市小石川區小日向水道町七十三番地
發行所　株式會社 東京開成館
【振替貯金口座】東京第五參貳貳番
大阪市心齋橋通北久寶寺町角
西部販賣所　三木佐助
東京市日本橋區數寄屋町九番地
東部販賣所　林平次郎

(株式會社東京築地活版製造所印刷)