SOLID GEOMETRY

S. NAKAGAWA.

東京 冨山房 神田

公　　式

角壔ノ體積＝底×高サ＝直截面ノ面積×側稜〔74,76頁〕

角錐ノ體積＝$\frac{1}{3}$×底×高サ　〔84頁〕

角錐臺ノ體積＝$\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$　〔hハ高サ, a^2, b^2ハ兩底ノ面積〕〔84頁〕

直圓壔　〔底ノ半徑r, 高サh〕

側面積＝$2\pi rh$,　全面積＝$2\pi r(r+h)$, 〔90頁〕

體積＝πr^2h　〔90頁〕

直圓錐　〔斜高l, 底ノ半徑r, 高サh〕

$l=\sqrt{r^2+h^2}$　〔93頁〕,　側面積＝πrl　〔93頁〕

全面積＝$\pi r(r+l)$〔93頁〕,　體積＝$\frac{1}{3}\pi r^2h$〔92頁〕

直圓錐臺　〔斜高l, 兩底ノ半徑R, r〕

$l=\sqrt{h^2+(R-r)^2}$　〔94頁〕,　側面積＝$\pi(R+r)l$　〔94頁〕

體積＝$\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$　〔94頁〕

球　〔半徑r〕

面積＝$4\pi r^2$　〔107頁〕,　體積＝$\frac{4}{3}\pi r^3$　〔109頁〕

球帶ノ面積＝$2\pi rh$, 〔hハ高サ〕, 〔107頁〕

球扇ノ體積＝$\frac{2}{3}\pi r^2h$, 〔hハ高サ〕　〔110頁〕

球缺ノ體積＝$\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3=\frac{1}{2}\pi a^2h+\frac{1}{6}\pi h^3$

〔hハ高サ, aハ底ノ半徑〕　〔110頁〕

球分ノ體積＝$\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)h+\frac{1}{6}\pi h^3$

〔a, bハ兩底ノ半徑,　hハ高サ〕　〔112頁〕

球面三角形ABCノ面積＝$\frac{\angle A+\angle B+\angle C-180^\circ}{180^\circ}\pi r^2$

大正九年十二月二十四日
文部省檢定濟

最新
立體幾何學教科書

東京帝國大學教授

理學博士　中川銓吉

編

(大正十三年)

東京
冨山房藏版

緒言

本書ハ前ニ發行セル平面幾何ニ續キ,中等諸學校ニ於ケル立體幾何ノ教科用書トシテ編纂セリ。第一編ニ含マル、部分ハ可成正確ナル論法ヲ用ヒタレドモ,第二編及ビ第三編中ニ含マル、求積ニ關スル部分ハ近時ニ於ケル幾何學ノ研究ニ鑑ミ,嚴密ナル説明ヲ避ケタリ。

問題ハ可成簡單ナルモノヲ取リ,記述セル定理,作圖題ヲ十分ニ了得セシムルヲ主トシ,幾分考慮ヲ要スベキモノハ凡ベテ卷末ノ附錄中ニ收メタリ。

問題ノ番號ニ□印ヲ附シタルモノハコレヲ省略セザルコトヲ希望ス。

附錄ノ問題ハ必ズシモ難易ノ順ニ排列シアラズシテ難易錯雜セルヲ以テ教師諸君ノ宜シク適宜ニ取捨セラレンコトヲ望ム。

本書ニ關スル御意見ハ之レヲ編者ニ通知セラルヽコトヲ切望ス。

大正九年十月　　中川銓吉

目　次

立體幾何

第一編

平面及ビ直線

第一章　基本ノ性質

1. 立體幾何ハ空間ニアル圖形ニ就テ一般ニ論ズ。以後斷リナクトモ凡ベテ圖形ハ空間ニアルモノトス。

2. 平面ハ其ノ上ニアル任意ノ二點ヲ通ル直線ガ全ク其ノ上ニアル面ニシテ,且ツ限リナク擴ガレルモノナルコトハ既ニ平面幾何 §11 〔6頁〕ニ於テ述ベタリ。

定義 一點ガ一平面上ニアルトキ,平面ハコノ點ヲ __含ム__ 又ハ __通ル__ ト云フ。同樣ニ,一直線ガ全ク一平面上ニアルトキ,コノ平面ハコノ直線ヲ __含ム__ 又ハ __通ル__ ト云フ。

サテ一直線ト一平面トガ二點ヲ共有スルトキハ,コノ直線ハ全クコノ平面ニ含マルルガ故ニ,次ノ定理ヲ得。

定理 1. 一直線トコレヲ含マザル一平面トハ一ツヨリ多クノ點ヲ共有スルコトナシ。

定義 唯一點ヲ共有スル平面ト直線トハ互ニ **相交ハル** ト云ヒ,ソノ點ヲ **交點** ト云フ。

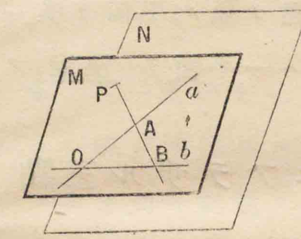
平面ノ決定,垂直及ビ重要ナル作圖

3. 公理 相交ハル二直線ヲ含ム平面ハ常ニ存在ス。

定理 2. 相交ハル二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ル。

證明 點Oニ於テ相交ハル二直線ヲ a, b トセヨ。以上ノ公理ニヨリ, a, b ヲ含ム平面アリ; コレヲMト名ヅケヨ。更ニ a, b ヲ含ム他ノ平面アリト假定シ,之ヲNト名ヅケヨ。

平面Mノ上ニ任意ニ一點Pヲ取レヨ,Pガ a



又ハ b 直線上ニアルトキハ勿論Pハ平面Nノ上ニモアリ。Pガ a, b 直線ノ何レノ上ニモアラザルトキハ, b ノ上ニ一點Bヲ取レ,コレハ a ニ對シテ點Pト反對ノ側ニアル點トセヨ。直線BPハ必ズ直線 a ト一點Aニ於テ交ハル(平面幾何7頁),〔或ハPヲ通リMノ上ニ於テ a, b ノ何レニモ平行ナラザル直線ヲ引キ,ソノ a, b トノ交點ヲA, Bトスルモ宜ロシ〕。平面Mハ a, b ヲ含ムヲ以テ點A, Bハ平面Mノ上ニアリ,因リテ直線ABハ全クMノ上ニアリ,同樣ニ平面Nハ a, b ヲ含ムヲ以テ直線ABハ全クNノ上ニモアリ,隨ヒテ直線AB上ニアル點Pハ平面Mノ上ニアルト同時ニNノ上ニモアリ。即チ平面M上ニアル點ハ悉ク平面Nノ上ニアリ。同樣ニ平面Nノ上ニアル點ハ悉ク平面Mノ上ニアリ,因リテ兩平面ハ異ナレルモノニアラズ,故ニ相交ハル二直線ヲ含ム平面ハ唯一ツアリ。

定義　幾ツカノ直線,點ヲ通ル平面ガ唯一ツアルトキニ,コノ直線,點ハ一平面ヲ<u>決定</u>ストラフ。

系 1.　一直線上ニアラザル三點ハ一平面ヲ決定ス。

系 2.　一直線ト其ノ上ニアラザル一點トハ一平面ヲ決定ス。

系 3.　平行二直線ハ一平面ヲ決定ス。*

證明　平行二直線 a, b ハ兎ニ角一ツノ平面上ニアリ,コノ平面ヲ M ト名ヅケヨ。a ノ上ノ一點ト b ノ上ノ一點トヲ結ブ直線 c ハ a, b ノ各ト異ナリ且ツ平面 M ノ上ニアリ,故ニ M ハコノ相交ハル二直線 a, c ヲ含ム,随ヒテ a, b ヲ含ム他ノ平面アリト考フルモ,コレハ又 a, c ヲ含ムガ故ニ本定理ニヨリ M ト同一ノ平面トナル。

系 4.　一直線外ノ一點ヲ通リ,コレニ平行*ナル直線ハ常ニ唯一ツア

* 平行線ノ定義〔平面幾何24頁〕同シ平面上ニアリテ相交ハルコトナキ二直線ヲ平行線ト云フ。

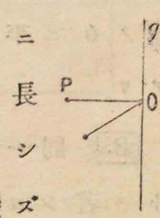
リ。

4.　一直線上ニアラザル三點ヲ A, B, C トシ,コレ等ガ決定スル平面ヲ M ト名ヅクル代ハリニ次ノ如キ記號ヲ用フルコトアリ。

平面ABC,平面(BC,BA),平面(CA,CB),平面(AB,AC),平面(BC,A),平面(CA,B),平面(AB,C)

茲ニ平面ABCトハ三點A,B,Cガ決定セル平面ノ意,平面(BC,BA)ハ二直線BC,BAガ決定セル平面ノ意,平面(BC,A)ハ直線BCト點Aトガ決定セル平面ノ意ナリ。

5.　一ツノ定平面 M ノ上ニアラザル空間ノ點ハ無數ニ多シ,而シテ M ノ上ニ一直線 g ヲ固定シコレヲ含ム凡ベテノ平面ヲ考フルトキハ空間ノ點ハ直線 g 上ニアルモノヲ除キ,常ニ g ヲ通ル唯一ツノ平面上ニアルモノナリ。



定義　一點 P ヨリ一定直線 g ニ下セル垂線ノ足ヲ O トス。 PO ノ長サト垂線ノ足 O ノ位置トハ不變ニシテ,唯 P ガ空間ニ於テ其ノ位置ヲ變ズ

ル運動ヲ名ヅケテ,點Pノ直線gニ對スル **回轉** ト云ヒ,定直線gヲ回轉ノ **軸** ト云フ。

定義 空間ニ在ル圖形ガソノ形ヲ變ズルコトナクシテ,ソノ圖形ニ屬スル凡ベテノ點ガ一定直線ヲ軸トシテ回轉スルトキ,圖形ガコノ直線ヲ軸トシテ **回轉** スルト云フ。

平面Mト,コノ平面外ニアル一點Pトガ與ヘラレタルトキ,M上ニアル任意ノ一直線ヲ軸トシテコノ平面ヲ回轉セシムルコトニヨリ,點Pヲ含ム位置ニ來ラシムルコトヲ得ルモノナリ。

問　題

1. 一定直線aノ上ニアラザル一定點Bトヲ通ル直線ハ一定ノ平面上ニアリ。

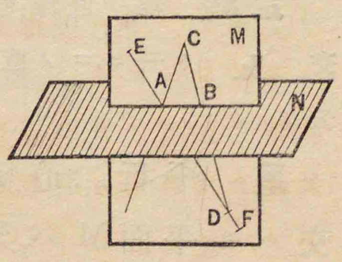
2. 相交ハル二直線a, bノ一ツaト交ハリ,他ノbニ平行ナル任意ノ直線ハ平面(a,b)上ニアリ。

$\boxed{3.}$ 同一平面上ニアラザル三直線ヲa, b, cトス,若シaトb,bトc,cトaトガ夫々相交ハルトキハa, b, cハ同一ノ點ニ於テ相交ハル。

〔a, bガ決定スル平面トcトノ交點ヲ考ヘヨ。〕

6. 公理 空間ニアル一ツノ平面Mハ空間ヲ二ツノ部分ニ分ツ,一方ノ側ニアル二點ヲ結ブ線分トMトニ共有點ナシ。又一ツノ側ニアル一點ト他ノ側ニアル一點トヲ結ブ線分ハMト必ズ一點ヲ共有ス。

定理 3. 二ツノ相異ナル平面M, Nガ一點Aヲ共有スルトキハ又Aヲ通ル唯一直線ヲ共有ス。



證明 Mノ上ニアリテ,Nノ上ニアラザル一點Cヲ取リ,直線ACヲ引ケ。

次ニ直線ACノ上ニモアラズ,平面Nノ上ニモアラザル一點Eヲ平面M上ニ取リテ,直線EAFヲ作ルトキハ,コノ

直線上ノ點ハ平面Nニヨリテ二ツノ群ニ分タル。因リテ平面Nニ對シ點Cト反對ノ側ニアル點ヲ,コノ直線上ニ取リ,コレヲDトセヨ。線分CDハ平面Nト必ズ一點Bヲ共有ス〔公理〕。又直線AC, AEハ一致セザルガ故ニAトBトハ相異ナレリ。直線CDハ平面Mノ上ニアリテ,ソノ上ニアル點Bハ又平面Nノ上ニアルガ故ニ,Bハ平面M,Nノ共有點ノ一ツナリ,因リテ兩平面ハ直線ABヲ共有ス。

サテ同一ノ直線ヲ含ム二ツノ相異ナレル平面ハコノ直線外ノ一點ヲ共有スルコト能ハズ〔定理2系2,(4頁)〕。因リテ以上ノ二平面M,Nハ唯Aヲ通ル直線ABノミヲ共有ス。

定義 唯一直線ヲ共有スル二平面ハ **相交ハル** ト云ヒ,コノ直線ヲ二平面ノ **交線** ト云フ。

系 平行二直線 a, b ノ一ツ a ニ交ハル平面Mハ又 b ニモ交ハル。

〔平面 (a, b) トMトハ必ズ相交ハル,ソノ交線ヲ考ヘヨ〕。

問題

$\boxed{4.}$ 唯一點ヲ共有スル三平面ヲ表示スル圖ヲ畫ケ。

$\boxed{5.}$ 唯一點ヲ共有スル三平面ハ空間ヲ幾個ノ部分ニ分ツカ。

$\boxed{6.}$ 二平面M,Nノ交線ヲABトシ,AB上ニアラザルM及N上ノ任意ノ點ヲ夫々P,Qトス。直線PQトABトハ同一平面上ニアラズ,又決シテ相交ハルコトナシ。

定義 同一平面上ニアラザル二直線又ハ二線分ハ互ニ **捩レノ位置** ニアリト云フ。

$\boxed{7.}$ 線分AB, CDガ捩レノ位置ニアルトキハ,線分BC, ADモ亦捩レノ位置ニアリ。

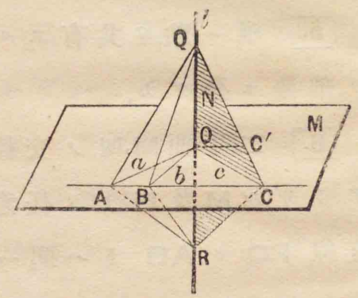
定義 四邊形ノ四ツノ頂點ガ同一平面上ニアラザルモノヲ **捩レ四邊形** ト云フ。

$\boxed{8.}$ 三ツノ平面ガ二ツ宛相交ハルトキハ,三ツノ交線ハ同一點ヲ通ルカ,互ニ平行ナルカ又ハ相一致ス。

7. 定理4. 一直線 l 上ノ一定

點Oヲ通リ,コノ直線ニ垂直ナル凡ベテノ直線ハ同一ノ平面上ニアリ。

證明　Oヲ通リlニ垂直ナル二ツノ直線ヲa, b;コノ二直線ガ決定スル平面ヲM;Oヲ通リlニ垂直ナル他ノ任意ノ一直線ヲOC′トセヨ。



直線lトOC′トハ一平面ヲ決定ス.コレヲNトセヨ。M,Nハ相異ナル平面ニシテ一點Oヲ共有ス,故ニ相交ハル,ソノ交線ヲcトセヨ。M上ニ於テa, b, cト交ハル直線ヲ引キ,ソノ交點ヲ夫々A, B, Cトシ,直線l上ニOヨリ等距離ニ點Q,Rヲ取リ,QA, QB, QC, RA, RB, RCヲ結ビ付ケヨ。

三角形QARニ於テAOハ邊QRノ中點ヲ通リ,且ツ之レニ垂直ナルガ故ニ

$$AQ = AR$$

同樣ニ　$BQ = BR$

故ニ　$\triangle QAB \equiv \triangle RAB$　第三合同定理

隨ヒテ　$\triangle QAC \equiv \triangle RAC$　第一合同定理

$$\therefore\ CQ = CR$$

即チ△QCRハ二等邊三角形ニシテ,Oハ底邊QRノ中點ナリ,故ニ

$$OC \perp l$$

サテ,OC, OC′ハlト共ニ同一ノ平面N上ニアリテ,且ツ共ニlニ垂直ナリ,故ニ直線OC′トOCハ相合ス,即チOヲ通リlニ垂直ナル凡ベテノ直線ハ皆一定ノ平面Mノ上ニアリ。

系1.　直線lト直交セル他ノ一直線gハlヲ軸トシテ回轉スルトキ一ツノ平面ヲ畫ク。

系2.　一直線ガ一平面ト交ハリテソノ交點ヲ通ルコノ平面上ノ二定直線ノ各ニ垂直ナルトキハ,コノ交點ヲ通リ且ツ平面上ニアル凡ベテノ直線ノ各ト直交ス。

定義　一直線ガ一平面ト交ハリ,ソノ交點

ヲ通ルコノ平面上ノ凡ベテノ直線ニ垂直ナルトキ,直線ト平面トハ互ニ**垂直ナリ**ト云ヒ,コノ直線ヲ平面ノ**垂線**又ハ**法線**ト云ヒ,交點ヲソノ**足**ト云フ。

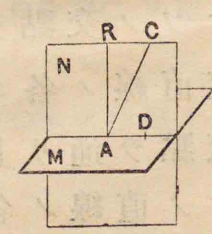
直線 a ト平面Mトガ互ニ垂直ナルコトヲ表ハスニ $a \perp M$ 又ハ $M \perp a$ ト記ス。

系3. 一直線上ノ一定點ニ於テコレニ垂直ナル平面ハ常ニアリ,而シテ唯一ツニ限ル。

8. 定理5. 一定點ヲ通リ一定ノ平面ニ垂直ナル直線ハ一ツニ限ル。

證明 I. 定點Aガ定平面M上ニアル場合。

假リニ,Aヲ通リMニ垂直ナル二ツノ直線AB,ACアリト假定セヨ。AB,ACガ決定スル平面NトMトノ交線ヲADトス。



〔7頁定理3〕

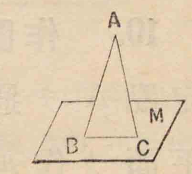
假定ニヨリ BA⊥M, CA⊥M

故ニBA,CAハ共ニADニ垂直トナリ,且ツBA,CA,ADハ共ニ一平面N上ニアルコトヽナル,コレ不合理ナリ,故ニAヲ通リMニ垂直ナル直線ハ一ツヨリ多カラズ。

II. 定點ガA定平面Mノ上ニアラザル場合。

AヨリMニ假リニ二ツノ直線AB,ACアリトシ,ソノ足ヲB,Cトセヨ。

BCヲ結ブトキハ△ABCニ於テ二角B,Cハ共ニ直角トナラザルベカラズ,コレ不合理ナリ。



故ニAヲ通リMニ垂直ナル直線ハ一ツヨリ多カラズ。

9. 平面ヲ作ルニ器具ヲ別段使用セズシテ次ノ作圖ヲ可能ナリト考フ。

相交ハル二直線ヲ通ル平面ヲ作ルコト。

隨ヒテ,一直線上ニアラザル三點ヲ通ル平面,一直線トソノ上ニアラザル一點トヲ通ル平面,

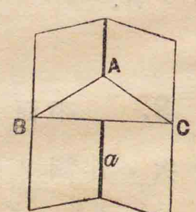
平行二直線ヲ含ム平面ヲ作ルコト。

二平面ノ交線存在スルトキ,ソノ位置ヲ決定スルコト。

以上及ビ一平面上ノ作圖ハ凡ベテ平面幾何ニ據ルコト、ヲ基礎トシテ立體幾何ノ作圖問題ハ之ヲ解クモノトス。

10. 作圖題1. 一直線 a 上ノ一定點Aヲ通リ,コノ直線ニ垂直ナル平面ヲ作ルコト。

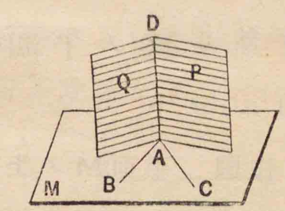
作圖 直線 a ヲ含ム二ツノ平面ヲ作リ,ソノ各ノ上ニ於テAヲ通リ a ニ垂直ナル直線AB,ACヲ夫々引ク,AB,ACガ決定スル平面ハ所求ノ平面トナルベシ。



證明 AB,ACガ決定スル平面ガ所求ノ一平面ナルコト,及ビコノ外ニナキコトハ9頁定理4,及ビソノ系3ニヨリテ明カナリ。

11. 作圖題2. 一平面M上ノ一定點Aヲ通リ,コノ平面ニ垂線ヲ作ルコト。

作圖 平面M上ニ於テ,點Aヲ通ル任意ノ二直線AB,ACヲ引キ,次ニAヲ通リ直線ABニ垂直ナル平面P,又Aヲ通リ直線ACニ垂直ナル平面Qヲ作ル(作圖題1)。PトQトハ相交ハルベシ,ソノ交線ADハ所求ノ垂線トナルベシ。



證明 AB,ACハ異ナル直線ニシテ夫々平面P,Qニ垂直ナルガ故ニP,Qハ異ナル平面ナリ(12頁定理5)且ツ點Aヲ共有ス,故ニ相交ハル(7頁定理3)。サテ作圖ニヨリP⊥ABニシテADハPノ上ニアリ,故ニ

$$BA \perp AD$$

同様ニ

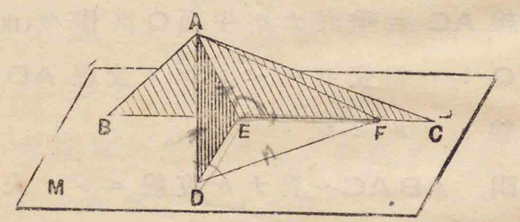
$$CA \perp AD$$

因リテADハ平面MニAニ於テ垂直ナリ(11頁系2,及ビ定義)。又コノ外ニナキコトハ定理5

〔12頁〕ニヨリテ明カナリ,故ニ AD ハ求ムル垂線ナリ。

12. 作圖題 3. 平面外 M ノ一點 A ヨリコノ平面ニ垂直ナル直線ヲ作ルコト。

作圖 平面 M ノ上ニ任意ニ直線 BC ヲ引キ,平面 ABC 上ニ於テ A ヨリ BC ニ垂線 AE ヲ作

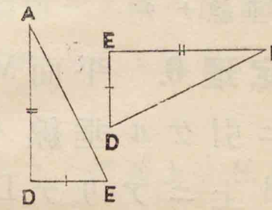


リ,ソノ足ヲ E トス,平面 M 上ニ E ヲ通リ BC ニ垂直ナル直線 ED ヲ作ル,若シ AE ガ ED ニ垂直ナルトキハ,AE ハ求ムル垂線トナルベシ。

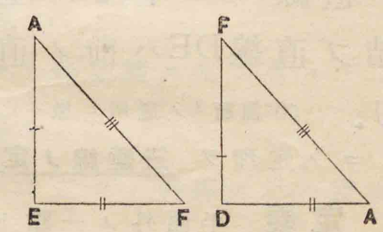
又若シ AE ガ ED ニ垂直ナラザルトキニハ,平面 AED 上ニ於テ,A ヨリ直線 ED ニ垂線 AD ヲ作リ,ソノ足ヲ D トセヨ,AD ハ求ムル垂線トナルベシ。

證明 若シ ED⊥AE ナル場合ニハ,作圖ニヨリ AE⊥EC ナルヲ以テ畢竟 AE ハ M 平面上ニアル二直線 ED,EC ノ交點ニ於テ,ソノ各ニ垂直ナリ,故ニ M ニ垂直ナリ,而シテコノ外ニハ A ヲ通リ M ニ垂直ナル直線ナシ〔定理 5〕,故ニコノ場合ニ,AE ハ求ムル所ノ垂線ナリ。

次ニ AE ガ ED ニ垂直ナラザル場合ニ作リタル AD ガ M ニ垂直ナルコトヲ證明スルコトトス。



BC 上ニ E ヨリ DA ニ等シク EF ヲ取リ,FA,FD ヲ結ブ。作圖ニヨリ,



$$ED \perp EF,\ AD \perp DE,\ EF = DA$$

故ニ兩直角三角形 FED,ADE ハ合同ナリ,

$$\therefore \quad AE = FD$$

因リテ $\triangle AEF \equiv \triangle FDA$ 〔第三合同定理〕

$$\therefore \quad \angle AEF = \angle FDA$$

然ルニ作圖ニヨリ∠AEFハ直角ナリ。

∴　∠FDA＝直角

卽チ AD ハ D ヲ通リ M ノ上ニアル二ツノ直線 DE, DF ニ夫々垂直ナリ,因リテ AD ハ A ヲ通リ平面 M ニ垂直ナリ,而シテコノ外ニハ A ヲ通リ M ニ垂直ナル直線ナキヲ以テ, AD ハ求ムル所ノ垂線ナリ。

定理 6. 平面M外ノ一點Aヨリ M ニ引ケル垂線ノ足Dト,Aヨリ平面M上ニアリテDヲ通ラザル任意ノ直線BCニ下セル垂線ノ足Eトヲ結ブ直線DEハ前ノ直線BCニ垂直ナリ。〔作圖題3ノ證明ニ倣ヘ〕

コノ定理ヲ **三垂線ノ定理** ト云フ。

定義 平面外ノ一點トコノ平面上ノ一點トヲ結ブ直線ガソノ平面ニ垂直ナラザルトキ,コレヲ **斜線** ト云ヒ,斜線ト平面トノ交點ヲ **斜線ノ足** ト云フ。

平面外ノ一點ヨリ,コノ點ヲ通ル斜線ノ足ニ至ル距離ヲ **斜線ノ長サ** ト云フ。若シ垂線ナルトキハ **垂線ノ長サ** ト云フ。

一點ヨリ一平面ニ至ル距離 トハコノ點ヨリ平面ニ引ケル垂線ノ長サノコトナリ。

問　題

9. ぴたごらすノ定理及ビソノ逆〔平面幾何 185, 189頁〕ヲ應用シテ,作圖題3ノ圖ニ於テFヲBC上任意ニ取リ, AD, DF ガ互ニ垂直ナルコトヲ證明セヨ。

10. 平面外ノ一點ヨリコノ平面上ノ任意ノ一點ニ至ル線分ノ中:

(I) 垂線最モ短シ,

(II) 垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル二ツノ斜線ハ長サ相等シ,

(III) 長サ相等シキ二ツノ斜線ノ足ハ垂線ノ足ヨリ等距離ニアリ,

(IV) 長サ相等シカラザル斜線アルトキ,小ナルモノヽ足ハ大ナルモノヽ足ヨリモ垂線ノ足ニ近シ,コノ逆モ亦眞ナリ。

11. 平面外ノ一點ヨリコノ平面ニ至ル斜線

ノ長サガ一定ナルモノヽ足ノ軌跡如何。

12. 一定點ヲ通リ捩レノ位置ニアル二直線ノ各ト相交ハル直線ハ幾ツアルカ,又如何ニシテ引クカ。

13. 二定點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡如何。

14. 三角形ABCノ三頂點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ△ABCノ外心ヲ通リ平面ABCニ垂直ナル直線ナリ。

15. 四定點ヨリ等距離ニアル點ハ存在スルカ。

16. 一定點ヲ通リ一定直線ニ垂直ナル平面ヲ作レ。

平　行

13. 定義 一直線ト一平面トニ共有點ナキトキハ相互ニ **平行** ナリト云フ。

二ツノ平面ニ共有點ナキトキ,二平面ハ相互ニ **平行** ナリト云フ。

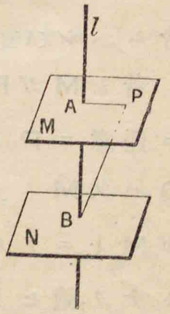
コノ定義ニ於テ直線及ビ平面ハ限リナク擴ガレルモノナルコトハ勿論ナリ。

平面ガM平面N又ハ直線 a ト互ニ平行ナルコトヲ表ハスニ $M /\!/ N$, $M /\!/ a$ ト記ス。

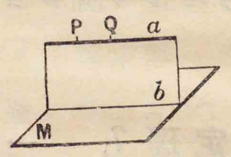
斯クノ如キ平行ナル二平面,及ビ一直線ニ平行ナル平面ガ存在スルコトハ次ノ二定理ニヨリテコレヲ知ルコトヲ得。

定理 7. 一ツノ直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ。

證明 直線 l 上ノ二點A,Bニ於テ夫々 l ニ垂直ナル平面ヲM及ビNトセヨ。平面Mノ上ニ任意ニ一點Pヲ取リ直線PA,PBヲ作レ,然ルトキハPA,PB,l ハ同一平面上ニアリ,且ツPAハAニ於テ l ニ垂直ナリ,故ニPBハBニ於テ l ニ垂直ナラズ〔平面幾何25頁系2〕。因リテ點Pハ平面Nノ上ニナシ〔11頁定義〕。即チMノ上ニアル如何ナル點モNノ上ニハアラズシテ兩平面ニ共有點ナク互ニ平行ナリ。



定理 8. 平行二直線 a, b ノ一ツ b ヲ含ム任意ノ平面ハ他ノ直線 a ヲモ含ムカ,又ハ他ノ直線 a ニ平行ナリ。



證明 b ヲ含ム任意ノ平面ヲ M トセヨ。a ノ上ニ一點 P ヲ任意ニ取ルトキハ,平面 M ガ P ヲ含ムカ,又ハ含マザルカノ二ツノ場合アルノミナリ。

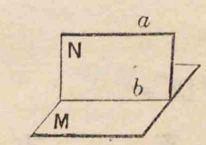
若シ M ガ P ヲ含ム場合ニハ,M ハ又 a 全體ヲ含ムベシ〔4頁定理2系2,3〕。

若シ M ガ P ヲ含マザル場合ニハ更ニ a ノ上ニ任意ニ P ト異ナリタル一點 Q ヲ取リテ見ヨ。Q ハ又 M ノ上ニアルコト能ハズ,何トナラバ Q ガ M 上ニアルナラバ,M ハ又 a 全體ヲ含ムコトトナリ,隨ヒテ P ヲモ含ムベシ,コレ假定ニ反ス故ニコノ場合ニハ a ト M トニ共有點ナク互ニ平行ナリ。

系 一平面上ニアル一直線ニ平行ナル直線ハコノ平面上ニアルカ,

然ラザレバコノ平面ニ平行ナリ。

14. 定理 9. 一直線 a ガ一平面 M ニ平行ナルトキハ,コノ直線 a ヲ含ム任意ノ平面 N ト前ノ平面トノ交線 b ハ又前ノ直線 a ニ平行ス。



證明 直線 a, b ハ共ニ同一平面 N ノ上ニアリ。又 a, b ハ相交ハルコト能ハズ,コレ b 上ノ點ハ平面 M 上ノ點ニシテ假設ニヨリ a ト M トニ共有點ナキヲ以テナリ,故ニ a ト b トハ互ニ平行ス。

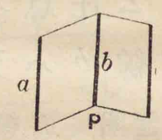
問　題

17. 直線 a ガ平面 M ニ平行ナルトキ,a ヲ含ム二ツノ平面ト平面 M トノ交線ニ互ニ平行ナリ。又 a ヲ含ミ M ニ平行ナル唯一ツノ平面アリ。

15. 定理 10. 平行二直線 a, b ノ

一ツ a ノミヲ含ム平面Mト,他ノ直線 b ノミヲ含ム平面Nトノ交線 c ハ前ノ二直線 a,b ノ各ニ平行ナリ。

證明 Nハ定理8ニヨリ a ニ平行ナリ,而シテMハ a ヲ含ムガ故ニ定理9ニヨリ,



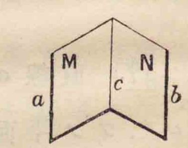
$$a \parallel c$$

同様ニ $$b \parallel c。$$

系 一直線 a ニ平行ナル二ツノ直線 b, c ハ互ニ平行ナリ。

證明 a,b,c ガ同一平面上ニアル場合ハ既ニ平面幾何ニ於テ論ゼリ〔平面幾何28頁定理10〕。

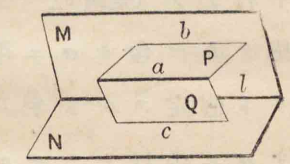
サテ a,b,c ガ同一平面上ニアラザルトキハ,b ノ上ニ一點Pヲ取レヨ。Pト a トガ決定スル平面ト,Pト c トガ決定スル平面トノ交線 l* ハ a 及ビ c ニ平行ナリ,且ツ l ハPヲ通リ a ニ平行ナルガ故ニ b ト一致ス,即チ b ハ c ニ平行ナリ。



*l ハ圖ニナシ

16. 定理11. 一直線 a ニ平行ナル二ツノ平面M,Nノ交線 l ハ前ノ直線 a ニ平行ナリ。

證明 a ヲ通リMト交ハル一ツノ平面PトMトノ交線 b ハ a ニ平行ナリ〔23頁定理9〕。又



a ヲ含ミNト交ハル平面QトNトノ交線 c ハ a ニ平行ナリ〔定理9〕,

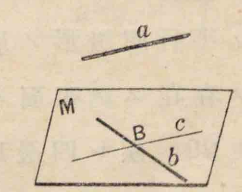
$$\therefore\ b \parallel c$$ 〔前定理系〕

因リテM,Nノ交線 l ハ b ニ平行ナリ〔23頁定理10〕。

サテ, $a \parallel b$, $b \parallel l$

$$\therefore\ a \parallel l。$$ 〔定理10,系〕。

系 捩レノ位置ニアル二直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行ナル平面ハ常ニアリ而シテ唯一ツニ限ル。



證明 捩レノ位置ニアル二直線 a,b ノ一ツ b 上ニ任意ニ一點Bヲ取リ,Bヲ通リ a ニ平行ナル

直線 c ヲ作ルトキハ b ト一致セズ,コレ a, b ハ同一平面上ニアラザルガ故ナリ。同理ニヨリ b, c ガ決定スル平面 M ハ a ヲ含マズ,而シテ a ニ平行ナリ〔定理8〕。

扨テ b ヲ含ミ a ニ平行ナル二ツノ平面 M,N アリト假定スルトキハ,ソノ交線 b ハ定理11ニヨリ a ニ平行ナラザルベカラズ,コレ假定ニ反ス,故ニ b ヲ含ミ a ニ平行ナル平面ハ常ニ唯一ツアリ。

問　題

18. 捩レノ位置ニアル二直線ノ各ト交ハリ且ツ他ノ一定直線ニ平行ナル直線ヲ作レ。〔定理11及ビソノ系ヲ利用〕。

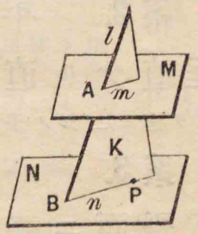
19. 捩レ四邊形 ABCD ノ各邊ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點トナル,又コノ平行四邊形ノ存在スル平面ニ直線 AC, BD ハ平行ス。

20. 捩レ四邊形 ABCD ノ各邊 AB,BC,CD,DA ト一ツノ平面 M トノ交點ヲ夫々 P,Q,R,S トス。PQRS ガ平行四邊形ナルニハ,M ハ AC,BD ノ各ニ平行ナルベシ。又 M ガ AC BD ノ各ニ平行ナルトキ PQRS ハ平行四邊形ナリ。

21. 前問ニ於テ PQRS ヲ菱形ナラシメヨ。

22. 捩レ四邊形ニ內接スル平行四邊形ノ對角線ノ交點ノ軌跡如何。〔コノ交點ハ四邊形 ABCD ノ兩對角線 AC,BD ノ中點ヲ通ル直線上ニアリ〕。

17. 定理 12. 平行ナル二平面 M, N ノ一ツ M ニ交ハル直線 l ハ他ノ平面ニモ交ハル。



證明 l ト M トノ交點ヲ A トセヨ。N ノ上ニ一點 P ヲ取リ,P ト l トヲ含ム平面ヲ K トス。K,M ハ一點 A ヲ共有シ,l ハ M ノ上ニアラザルヲ以テ必ズ相交ハル,ソノ交線ヲ m トス。サテ l 上ノ一點 A ハ M 上ニアリテ,M,N ハ假設ニヨリ共有點ナシ,故ニ l ハ N ノ上ニアルコトナシ,從ヒテ K,N ハ相異ナル平面ナリ。然ルニ K, N ハ一點 P ヲ共有ス,故ニ一ツノ直線 n ニテ相

交ハル。mトnトハ共ニK上ニアリテ,共有點ナシ,コレM,Nガ平行ナルガ故ナリ,故ニmトnトハ互ニ平行ナリ。lハ又K上ニアリテ,mト交ハル,故ニ又必ズnト交ハル〔平面幾何27頁定理9〕。

ソノ交點ヲBトセヨ。Bハn上卽チN上ニアリ,而シテ前述ノ如クlハN上ニアラズ,故ニlトNトハ唯Bニ於テ相交ハル。

系 1.　平行ナル二平面ノ一ツニ交ハル平面ハ他ノ平面ニモ交ハル,而シテコノ二ツノ交線ハ互ニ平行ナリ。〔本定理ノ直線lニ相當スルモノヲ引ケ〕。

系 2.　平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル直線lハ他ニモ垂直ナリ。〔lヲ含ミ,二ツノ平面ヲ作リ系1,及ビ11頁系2ヲ利用セヨ〕。

系 3.　一平面外ノ一點ヲ通リ,コノ平面ニ平行ナル平面ハ常ニアリ,而シテ唯一ツニ限ル。〔21頁定理7,定理12系2,16頁作圖題3,14頁作圖題1〕。

系 4.　一ツノ平面ニ平行ナル二平面ハ互ニ平行ナリ。〔系2及21頁定理7〕。

系 5.　平行ナル二平面ニ垂直ナル數多ノ直線ガコノ二平面ニヨリテ截リ取ラルヽ線分ハ凡テ長サ相等シ。

定義　コノ相等シキ線分ノ長サヲ**二平行平面間ノ距離**ト云フ。

系 6.　平面M外ノ一點Oヲ通リ,平面Mニ平行ナル二直線AOB,CODヲ含ム平面ハ前ノ平面Mニ平行ナリ。

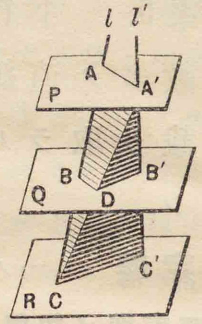
〔Oヲ通リMニ平行ナル平面ヲ考ヘ,直線AOB,CODヲ含ムコトヲ證明スルカ,又ハOヨリMニ垂線ヲ作レ〕。

18.　定理 13.　二直線ガ互ニ平行ナル數多ノ平面ニヨリテ截ラルヽトキハ,同一二平面ガ截リ取ル線分ノ比ハ一定ナリ。

二直線l, l'ガ互ニ平行ナル平面P,Q,R等ニヨリ,夫々點A,A′;B,B′;C,C′等ニ於テ截ラルヽモノトセヨ。

證明スベキコトハ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\text{等。}$$



證明　A' ト C トヲ通ル直線ヲ作レヨ。コノ直線ハ平面 Q ト必ズ唯一點 D ニ於テ相交ハル〔27頁定理12〕。C ニ於テ相交ハル二直線ノ決定スル平面 ACA' ト P 及ビ Q トノ交線ハ AA', BD ナリ,而シテ

$$AA' \parallel BD \qquad \text{〔定理 12, 系1〕}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{A'D}{DC}$$

同様ニ DB',CC' ヲ作ルトキハ互ニ平行ナリ,

$$\therefore \frac{A'D}{DC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

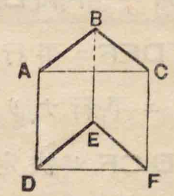
即チ
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}。$$

問　　題

23. 捩レノ位置ニアル二直線ヲ ABC, DEF トス,線分 AD, BE, CF ヲ同ジ比ニ A,B,C ヨリ内分スル點又ハ外分スル點 P,Q,R ハ直線 AC,DF ニ平行ナル平面上ニアリ。〔BD, BF ヲ同ジ比ニ分ツ點ヲ考ヘヨ〕。

24. 捩レノ位置ニアル二直線ノ各ノ上ニ夫夫端ヲ有スル任意ノ線分ノ中點ノ軌跡如何。

19. 定理 14. 一ツノ角ノ兩邊ガ他ノ一ツノ角ノ兩邊ニ夫々同ジ方向ニ平行ナルトキ,コノ兩角ハ合同ナリ。



角 ABC,DEF ノ邊 BA,ED ハ同ジ方向ニ平行,又 BC,EF ハ同ジ方向ニ平行ナリトセヨ。證明スベキコトハ

$$\angle ABC=\angle DEF.$$

證明　兩角ガ同一平面上ニアル場合ハ平面幾何ニテ既ニ知レル所ナルヲ以テ今ハ同一平面上ニアラザル場合ノミヲ考フルコトヽス。

B,E ヲ結ビ, BA＝ED ナラシメテ A,D ヲ結ビ BC＝EF ナラシメテ C,F ヲ結スベヨ。

假設ニヨリ BA∥ED, 故ニ兩線分ハ同一平面上ニアリ,且ツ BE ニ對シテ,コノ平面上 BA,ED ハ同ジ側ニアリテ長サ相等シ,故ニ ABED ハ平行四邊形ナリ。因リテ

$$AD \parallel BE,\quad AD = BE$$

同様ニ

$$CF \parallel BE,\quad CF = BE$$

$$\therefore\ CF \parallel AD \text{〔24頁系〕},\ CF = AD$$

角 ABC,DEF ハ同一平面上ニアラズト假定シタルガ故ニ,平面 DEF ハ平行二直線 DE,AB ノ唯一ツ ED ヲ含ミテ,他ノ BA ヲ含マズ,故ニ BA ハ平面 DEF ニ平行ナリ,同様ニ BC モ亦平面 DEF ニ平行ナリ。因リテ平面 ABC ト DEF ハ互ニ平行ナリ〔29頁系6〕, 而シテ平行二直線 AD,CF ガ決定スル平面ト平面 ABC,DEF トノ交線ハ明ニ AC,DF ニシテ且ツ互ニ平行ナリ〔28頁系1〕。故ニ ACFD ハ平行四邊形ナリ。

$$\therefore\ AC = DF$$

因リテ

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \text{〔第三合同定理〕}。$$

卽チ

$$\angle ABC = \angle DEF。$$

【注意】 AD,CF ハ平行ニシテ長サ相等シク,且ツ A,C ハ平面 ACFD 上 DF ニ對シテ同側ニアルコトヲ證明シ,以テ AC＝DF ナリト云フモ可ナリ。

20. 定義 同一平面上ニアラザル二直線ノ各ニ任意ノ一點ヨリ夫々平行ナル二直線ヲ作ルトキハ,コノ後ノ二直線ガ作ル四ツノ角ノ大サハ前定理ニヨリテ夫々一定ナルモノナリ。

コノ角ノ大サヲ <u>**捩レノ位置ニアル二直線間ノ角ノ大サ**</u> ト云フ。

同一平面上ニアラザル二直線間ノ角ノ大サガ直角ニ等シキトキ,コノ二直線ハ互ニ <u>**垂直**</u> ナリ,又ハ互ニ <u>**直角**</u> ヲナスト云フ。

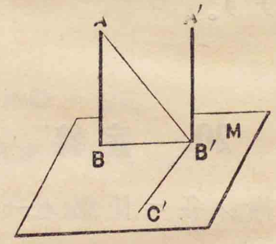
【注意】 互ニ垂直ナル二直線ト云フコトト,互ニ垂直ニ交ハル二直線ト云フコトトハ一般ニ同一ナラズ。

21.　定理 15.　同一平面ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ。

平面 M ニ垂直ナル二ツノ直線ヲ $AB, A'B'$, ソノ足ヲ B, B' トセヨ．證明スベキコトハ

$$AB \parallel A'B'。$$

證明　B, B' ヲ結ビ，平面 M 上 B' ニ於テ BB' ニ垂線 $B'C'$ ヲ作リ，次ニ A, B' ヲ結スベヨ。



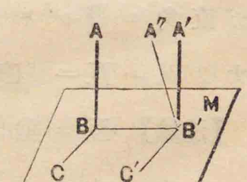
三垂線ノ定理〔18 頁〕ニヨリ

$$AB' \perp B'C'$$

サテ　　$A'B' \perp M$,　$BB' \perp B'C'$

故ニ　$B'A', B'A, B'B$ ハ何レモ $B'C'$ ニ垂直トナル，從ヒテ同一平面上ニアリ〔定理 4, (9頁)〕，而シテ假設ニヨリ $AB, A'B'$ ハ共ニ BB' ニ垂直ナリ，因リテ $AB \parallel A'B'$。

別證明　B, B' ヨリ BB' ニ垂直ナル直線 $BC, B'C'$ ヲ M 平面上同ジ方向ニ引キ，B' ヨリ BA ニ平行線 $B'A''$ ヲ引クトキハ，



$$A''B' \perp BB'$$

又前定理ニヨリ　$\angle A''B'C' = \angle ABC =$ 直角

故ニ　$A''B' \perp B'C'$

因リテ　$B'A'' \perp M$

トナリ $B'A''$ ト $B'A'$ トハ一致ス，卽チ $AB \parallel A'B'$。

系 1.　一平面ニ垂直ナル直線ニ平行ナル他ノ直線ハコノ平面ニ垂直ナリ。〔後ノ直線ト平面トハ相交ハル，ソノ交點ヨリコノ平面ニ垂線ヲ作レ〕

系 2.　平行二直線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ニモ垂直ナリ。

問　　題

25.　相交ハル二直線 a, b ニ垂直ナル直線ハ無數ニ多シ，而シテコレ等ハ凡ベテ a, b ガ決定スル平面ニ垂直ナリ。

26.　振レノ位置ニアル二直線ニ垂直ナル直線ハ無數ニアリ，而シテコレ等ハ凡ベテ互ニ平行ス。

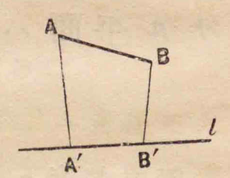
22.　定義　一點 A ガ一平面 M 上ニ投ズル

正射影 トハAヲ通リMニ垂直ナル直線ノ足ヲ云フ。

空間ニアル任意ノ線ガ一平面上ニ投ズル**正射影** トハソノ線上ノ各點ガコノ平面上ニ投ズル正射影ノ作ル圖形ヲ云フ。

一點ガ一直線上ニ投ズル正射影ハ平面幾何ニテ述ベタル如ク,ソノ點ヨリ直線ニ引ケル垂線ノ足ナリ。

一ツノ線分ABガ他ノ任意ノ位置ニアル直線l上ニ投ズル正射影 トハ線分ノ兩端ガ直線l上ニ投ズル正射影ヲ兩端トスル線分$A'B'$ノコトナリ。

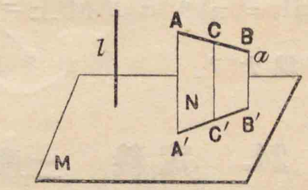


$A'B'$ノ長サヲABガl上ニ投ズル正射影ノ **長サ** ト云フ。

23. 定理16. 一ツノ直線ガ平面上ニ投ズル正射影ハ唯一點トナルカ又ハ一ツノ直線トナル。

證明 直線lガ平面Mニ垂直ナル場合ニハlガMノ上ニ投ズル正射影ハソノ交點ノミト

ナル。



モシ直線aガMニ垂直ナラザルトキハaノ上ニアリテMノ上ニアラザル二點A,Bヲ取リ,コレガM上ニ投ズル正射影ヲA',B'トセヨ。

(I) AA',BB'ハ互ニ平行ナリ〔定理15,34頁〕故ニ一ツノ平面Nヲ決定シ,ソノ上ニaハ存在ス。MトNトノ交線ハ明カニ直線$A'B'$ナリ。

サテa上ニ任意ニ一點Cヲ取リ,ソノM上ニ於ケル正射影ヲC'トセヨ。$AA'/\!/CC'$ニシテCハ平面N上ニアリ,故ニC'ハNトMトノ交線$A'B'$上ニアルベシ。即チa上ノ任意ノ點ガM上ニ投ズル正射影ハ直線$A'B'$上ニアリ。

(II) 然ルニ直線$A'B'$上ノ任意ノ一點C'ハ又a上ノアル點ノ正射影トナル。何トナレバC'ニ於テMニ垂直ナル直線$C'C$ヲ引クトキハ

$$AA'/\!/CC'$$

而シテC'ハN上ニアリ故ニaト必ズ一點Cニ於テ交ハル即チC'ハコノ交點Cノ正射影ナリ。

I, II ニヨリ a ガM上ニ投ズル正射影ハ一ツノ直線ナリ。

24. 定義 一直線ト一平面トガナス角トハコノ直線ガ平面上ニ作ル正射影ト元トノ直線トガ作ル角ノ中直角ヨリ大ナラザル角ヲ云フ。

コノ角ヲ直線ト平面トノ **傾角** ト云フ。

直線ガ平面ニ垂直ナルトキハ傾角ハ直角ナリ。

問 題

27. 一平面上ニ一定直線ノ正射影ヲ作レ。

28. 一點Aガ一直線 g 上ニ投ズル正射影ハAヲ通リ g ニ垂直ナル平面ト g トノ交點ナリ。

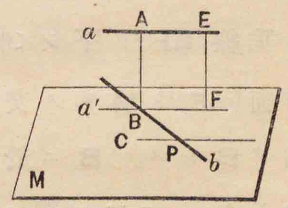
29. 線分ガ一直線上ニ投ズル正射影ノ長サハ線分ノ兩端ヲ夫々通リ直線ニ垂直ナル二平面間ノ距離ニ等シ。

30. 數多ノ平行ナル直線ニ一定ノ線分ガ投ズル正射影ハ長サ相等シ。

31. 平行四邊形ノ一組ノ對邊ガ任意ノ一直線上ニ投ズル正射影ハ長サ相等シ。

25. 作圖題 4. 同一平面上ニアラザル二定直線ノ各ト直角ニ交ハル直線ヲ作ルコト。

a, b ハ捩レノ位置ニアル二直線トス。ソノ各ト直交スル直線ABヲ作ルコト。



解析 所求ノ直線ABヲ作リ得タリトシ,コレガ a, b ト交ハル點ヲ夫々A,Bトセヨ。

Bヲ通リ a ニ平行ナル直線 a' ヲ引クトキハ a' ト b ハ必ズ一平面Mヲ決定ス。Mハ a ニ平行ナリ(22頁定理8)。ABハ a, b ノ各ト直角ニ交ハリ且ツ $a /\!/ a'$ ナルガ故ニABハMニ垂直ナリ,即チBハAノM上ニ於ケル正射影ナリ,而シテ平面(a,B)トMトノ交線ハ a ガM上ニ投ズル正射影ナリ,故ニ a' ハM上ニ a ガ投ズル正射影

ナリ,而シテBハM上bトa'トノ交點ナリ。又平面Mハbヲ含ミテaニ平行ナル平面ナルヲ以テ唯一ナリ〔25頁系〕。因リテ次ノ如ク作圖ス。

作圖 b上ニ任意ニ一點Pヲ取リ,平面(P,a)上ニPヲ通リaニ平行ナル直線cヲ作ル。cトbハ一致スルコトナクシテ一平面ヲ決定ス,コレヲMトセヨ。a上ノ任意ノ一點EヨリMニ垂線EFヲ下シ〔作圖題3〕,ソノ足ヲFトス。平面(a,F)トMトノ交線ヲa'トシ,a'トbトノ交點ヲBトス。Bニ於テMニ垂直ナル直線ヲ引クトキハ〔作圖題2〕,コレ求ムル直線トナルベシ。

證明 $c /\!/ a$ニシテaトbトハ捩レノ位置ニアリ,故ニcトbトハ一致スルコトナシ。c,bハ一點Pヲ共有ス,故ニ一平面Mヲ決定ス。a'ハM上ニaガ投ズル正射影ニシテ,aトMトハ平行ナルガ故ニ〔22頁定理8〕,$a /\!/ a'$ナリ〔定理9〕。因リテa',bハ一點Bニ於テ相交ハル。Bニ於テMニ垂直ナル直線ハ必ズaト一點Aニ於テ交ハリ,BハM上Aノ正射影ナリ〔前定理16ノ證明II〕。然ルニ $a /\!/ a'$,$AB \perp M$ナルヲ以テABハa

及ビbト夫々A,Bニ於テ直交ス。而シテ平面MハPノ位置ニヨリテ變ズルコトナク,M上ニaガ投ズル正射影ハ唯一ツアルノミナルヲ以テBハ二ツナシ。因リテ求ムル直線ハABニシテコレ以外ニハナシ。

定理 17. 捩レノ位置ニアル二直線ノ何レニモ直角ニ交ハル直線ハ常ニアリ而シテ唯一ツニ限ル。

問題

32. 捩レノ位置ニアル二直線a,bノ各ト夫夫點A,Bニ於テ直角ニ交ハル線分ABハa上ノ任意ノ一點トb上ノ任意ノ一點トヲ結ブ線分ノ中,長サ最短ナリ。

定義 線分ABヲ **捩レノ位置ニアル二直線ノ最短距離** ト云フ。

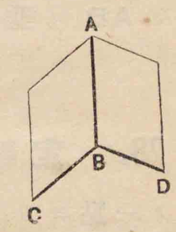
33. 捩レノ位置ニアル二直線a,bニ平行ナル平面ヲMMニ垂直ナル任意ノ直線ヲcトス。a,b上ニ任意ニ夫々點A,Bヲ取ルトキハ線分

AB ガ c 上ニ作ル正射影ハ長サ不變ナリ。

第二章 二 面 角

26. 定義 同一直線ニヨリテ界セラルル二ツノ半平面ハ空間ヲ二ツノ部分ニ分ツ。ソノ一ツニ注目スルトキ,コノ圖形ヲ **二面角** ト云ヒ,特ニ注目シタル空間ノ部分ヲコノ二面角ノ **內部**,半平面ノ各ヲ **二面角ノ面**,兩半平面ニ共通ナル直線ヲ **二面角ノ稜** ト云フ。

圖ニ於テ,AB ヲ境界トセル二ツノ半平面 ABC,ABD ハコノ二面ヲ夫々面トシ,AB ヲ稜トスル二ツノ二面角ヲ作ル,卽チコノ二ツノ半平面ガ分ツ空間ノ二ツノ部分ノ各コレナリ。



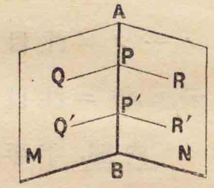
相交ハル二ツノ平面ハ四ツノ二面角ヲ作ル。

二面角ト區別スル爲メニ相交ハレル二ツノ直線ガ作ル角ヲ平面角ト云フコトアリ。

27. 定理 18. 二面角ノ稜ノ上ニアル任意ノ一點ヨリ,ソノ稜ニ垂直

ニシテ面ノ上ニ夫々アル二ツノ半直線ガ作ル角(180°ヨリ小ナルモノ)ハ大サ一定ナリ。

證明 AB ヲ稜トスル二面角ノ面ヲ M,N トセヨ。AB 上ニ任意ニ二點 P,P′ ヲ取リ,M 上ニ於テ PQ,P′Q′ ヲ夫々 AB ニ垂直ニ引キ,N 上ニ於テ PR,P′R′ ヲ夫々 AB ニ垂直ニ引クトキハ,31頁定理14ニヨリ。



$$\angle QPR = \angle Q'P'R'.$$

28. 定義 一ツノ二面角ノ稜ノ上ノ任意ノ一點ヨリ,ソノ稜ニ垂直ニシテ且ツ面ノ各ノ上ニ夫々アル二ツノ半直線ノ作ル角ハ二ツアリテ一ハ劣角,一ハ優角ナリ,ソノ二角ノ中,角ノ内部ガ又二面角ノ内部ニアルモノヲ二面角ノ **平面角** ト云ヒ,ソノ大サヲ又 **二面角ノ大サ** ト云フ。

一ツノ半平面ガソノ境界線ヲ軸トシテ回轉セルトキ,回轉ノ大サハ半平面ガ始メノ位置ヨリ終リノ位置ニ至ル迄ニ掃過セル空間ノ部分ヲ内部トスル二面角ノ大サニテ計リ,コノ角ヲ **回轉角** ト云フ。コノ定義ニヨリ回轉角ノ大サハ四直角ヲ超ユルコトナキモ,必要ナル場合ニハ四直角ヨリ大ナル回轉角ヲ考フルコトアリ。

同一ノ稜ヲ有スル二ツノ二面角ガ一ツノ面ヲ共有シ,ソノ各ノ内部ガコノ共通面ノ兩側ニ夫々アルモノヲ **相隣レル二面角** ト云フ。

相交ハル二平面ガ作ル四ツノ二面角ノ中相隣ラザルモノヲ **對稜二面角** ト云フ。

以後斷リナキトキハ二面角ハ凡ベテソノ大サ二直角ヨリ小ナルモノトス。又鋭角,直角,鈍角,餘角,補角等ノ名稱ハ平面角ノ場合ト同ジ様ニ二面角ニモ適用スルモノトス。例ヘバ二ツノ二面角ノ大サノ和ガ二直角ニ等シキトキ,一ヲ他ノ補角ト云フガ如シ。

稜 AB,面 M,N ナル二面角ヲ表ハスニ二面角 MABN,又ハ紛ルヽコトナキ場合ニ單ニ 二面角 AB ト記ス。

稜ハ稜ト,面ハ面ト,內部ハ內部ト夫々重ナリ合フ二ツノ二面角ハ **全ク相等シ** 又ハ **全等ナリ** ト云フ。

定理 19. 全等ナル二ツノ二面角ノ各ノ平面角ハ相等シ,又平面角相等シキ二ツノ二面角ハ全等ナリ。

系 1. 對稜二面角ハ相等シ。

系 2. 二ツノ平面ガ相交ハリテ作ル四ツノ二面角ノ中,一ツノ平面角ガ直角ナルトキハ,他ノ三ツノ各ノ平面角モ亦直角ナリ。

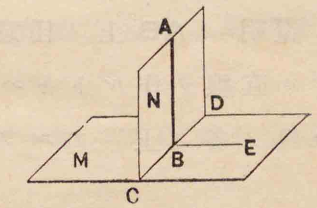
定義 斯樣ナル二ツノ平面ハ相互ニ **垂直** ナリ又ハ **直角** ヲナスト云フ。

二平面M,Nガ互ニ垂直ナルコトヲ $M \perp N$ ト記ス。

二ツノ二面角ノ比トハソノ大サノ比ヲ云フ。

定理 20. 二ツノ二面角ノ比ハソノ各ノ平面角ノ比ニ等シ。

29. 定理 21. 一平面Mニ垂直ナル直線ABヲ含ム任意ノ平面Nハ前ノ平面Mニ垂直ナリ。



證明 ABトMトノ交點ヲBトシM,Nノ交線ヲCDトセヨ。Bハ CD上ニアリ。サテBヲ通リ,M上ニアリテCDニ垂直ナル直線BEヲ引カバ,

$$BE \perp CD$$

且ツ

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp CD \\ AB \perp BE \end{array}\right\} \text{〔11頁定義〕}$$

故ニ $\angle ABE$ ハM,Nノ作ル一ツノ二面角ノ大サヲ表ハシ,コレハ直角ナルヲ以テ

$$M \perp N。$$

系 1. 互ニ垂直ナル二平面M,Nノ一ツN上ノ任意ノ一點ヲ通リMニ垂直ナル直線ハN上ニアリテ且ツ兩平面ノ交線ニ垂直ナリ。〔ツノ點ヨリM,Nノ交線ニ垂線ヲ作レ〕

系 2. 一平面 P ニ垂直ナル二ツノ平面 Q, R ガ交ハルトキハ,ソノ交線 AB ハ前ノ平面 P ニ垂直ナリ。

證明 AB 上ノ任意ノ一點ヲ通リ P ニ垂直ナル直線ヲ作ルトキハ,系 1 ニヨリコノ直線ハ Q, R ノ各ノ上ニアルヲ以テソノ交線ト一致ス。

問題

34. 互ニ垂直ナル二平面 M, N ノ一ツ N 上ニアリテ M, N ノ交線 CD ニ垂線ナル直線 AB ハ

(I) 他ノ平面 M ニ垂直ナリ。

(II) M 上ニアル任意ノ直線ト互ニ垂直ナリ。

35. 平行ナル二平面ノ一ツニ垂直ナル平面ハ他ノ平面ニモ垂直ナリ。

36. 二面角ノ內部ニアル一點ヨリ二面ニ至ル距離相等シキトキ,ソノ點ノ軌跡ハ二面角ヲ相等シキ部分ニ分ツ一ツノ半平面ナリ。

定義 コノ半平面ヲ二面角ノ **二等分面** ト云フ。

37. 相交ハレル二平面ノ各ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ二ツノ平面ヨリ成ル。

38. 一定直線ヲ含ミ一定平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ。一ツヨリ多キコトアルカ。

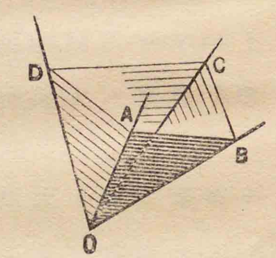
39. 相交ハレル二定直線ノ各ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡如何。

40. 三角形ノ三邊又ハ其ノ延長ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡如何。

第三章 多面角

30. 定義 頂點ヲ共有スル數多ノ平面角*ガ同一平面上ニアラズシテ,ソノ一ツノ角ノ邊ガ又他ノ角ノ邊トナリテ相連ナリ,空間ヲ二ツノ部分ニ分ツトキ,ソノ一ツノ部分ニ注目シテコノ圖形ヲ **多面角** ト云ヒ,空間ノコノ部分ヲ多面角ノ **內部** ト云フ。**

多面角ヲ作ル平面角ヲ其ノ **面角**, 各面角ノ內部ヲ作ル平面ノ部分ヲ其ノ **面** 又ハ **邊** ト云ヒ,平面角ノ邊及ビ共通ノ頂點ヲ夫々多面角ノ **稜**, **頂點** ト云フ。



圖ニ於テ,平面角 ∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠DOA ハ多面角ヲ作リ,O ハソノ頂點, OA, OB, OC, OD ハ稜,平面 AOB, BOC, 等ハ卽チ多面角

* 平面幾何9頁ヲ見ヨ。

**多面角ハ立體角ト稱スルモノノ一種ナリ。

ノ面又ハ邊ナリ。

多面角ノ凡ベテノ稜ト交ハリ,頂點ヲ含マザル平面ト多面角ノ面ト交ハル處ハ多角形ヲ成ス,コレヲ多面角ノ **截面** ト云フ。

多面角ノ一稜ニヨリテ相連レル二ツノ面ガ作ル二面角ハ一般ニ二ツアリ,ソノ中,二面角ノ大サヲ多面角ノ內部ニ向ヒテ計リ得ルモノヲ多面角ノ **稜角** ト云フ。

截面ガ凸多角形ナル多面角ヲ **凸多面角** ト云フ。

以後斷リナキトキハ,多面角ハ凡ベテ凸多面角ナリト知ルベシ。

頂點O,截面多角形ABCDナル多面角ヲ表ハスニ多面角O−ABCD又ハO(ABCD)ト記ス。*

截面ガ三角形ナルモノヲ **三面角** ト云ヒ,一般ニ截面ガ n 角形ナルモノヲ **n面角** ト云フ。

多面角ノ面ノ數,稜ノ數ハソノ截面多角形ノ邊數又ハ頂點ノ數ニ等シ。故ニ

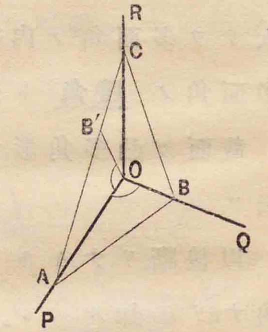
定理 22. 多面角ノ面ノ數ト稜ノ

*A, B, C, D 等ハ單ニ各稜ノ上ニ夫々アル點ト考フルコトモアリ。

數トハ相等シ。

31. 定理 23.　三面角ノ三ツ面ノ角ノ中,任意ノ二ツノ和ハ殘リノ一ツヨリ大ナリ。

O−PQR ヲ三面角トセヨ。證明スベキコトハ



$\angle POQ+\angle QOR>\angle POR$,

證明　若シ

$\angle POQ=\angle POR$ 叉ハ

$\angle POQ>\angle POR$ ナル場合ニハ明カナルヲ以テ,

$\angle POQ<\angle POR$ ナルトキニモ眞ナルコトヲ證明スルコトヽス。

コノ場合ニ稜 OP,OR ノ上ニ夫々點 A,C ヲ取リ, $\angle POR$ ノ内部ニ OB′ ヲ引キテ AC ト B′ ニ於テ交ハラシメ,且ツ

$$\angle AOB'=\angle AOQ$$

ナラシメヨ。次ニ OQ 上ニ B ヲ取リ, OB=OB′

ナラシメテ, AB,BC ヲ作レヨ。

$$\triangle OAB\equiv\triangle OAB' \quad \text{〔第一合同定理〕}$$

$$\therefore \quad AB=AB' \qquad (1)$$

叉 △ABC ニ於テ　$AB+BC>AC$

$$>AB'+B'C \qquad (2)$$

(1),(2) ニヨリ　$BC>B'C$

△OBC,△OB′C ニ於テ

OB=OB′〔作圖〕, OC ハ共通, BC>B′C

$$\therefore \quad \angle BOC>\angle B'OC$$

然ルニ　$\angle AOB=\angle AOB'$　〔作圖〕

邊々相加ヘテ

$$\angle POQ+\angle QOR>\angle POR$$

系 1.　三面角ノ一ツノ面角ハ殘リノ二ツノ面角ノ差ヨリ大ナリ。

系 2.　多面角ノ一ツノ面角ハ他ノ殘リノ凡ベテノ面角ノ和ヨリ小ナリ。

問　題

41. 三面角 O−ABC ノ内部ニ任意ニ一點 O′ ヲ取リ, O′ヨリ面 OBC,OCA,OAB ニ夫々垂線

O'A',O'B',O'C' ヲ下シテ得タル一ツノ三面角ヲ O'−A'B'C' トスルトキハ,

（1） OA, OB, OC ハ夫々面 O'B'C', O'C'A', O'A'B' ニ垂直ナリ。

（2） ∠B'O'C', ∠C'O'A', ∠A'O'B' ハ O−ABC ノ稜 OA,OB,OC ニ於ケル稜角ト夫々補角ヲナス。

（3） O'−A'B'C' ノ稜角ハ O−ABC ノ面角ト夫々補角ヲナス。

42. 三面角ノ二ツノ面角相等シキトキハコレ等ニ對スル二ツノ稜角相等シ。

〔兩面角ニ共通ナル稜上ノ一點ヨリ他ノ二稜及ビ對面ニ垂線ヲ引ケ〕。

43. 前問ノ逆ヲ述べ,コレヲ證明セヨ。

44. 相交ハル二定直線ノ交點ヲ通リ,コノ二直線ノ各ト相等シキ角ヲナス直線ノ軌跡如何。

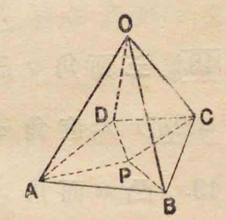
45. 一平面上ニアリテ二ツ宛相交ハル三ツノ直線アリ,コノ三直線ノ各ト等角ヲナス一直線ハ前ノ平面ニ垂直ナリ。

46. 捩レ四邊形ノ相隣レル二邊ガ作ル四ツノ劣角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

47. 直角三角形 ABC ノ任意ノ頂點ニ於テ三角形ノ面ニ垂線ヲ作リ,ソノ上ノ一點ト他ノ二頂點トヲ更ニ結ビテ得タル三面角ノ三面ノ中,二ツハ互ニ垂直ナリ。〔定理 21, 及ビソノ系 1〕。

32. 定理 24. 凸多面角ノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

證明 O−ABCD ハ一ツノ凸多面角,多角形 ABCD ハ一ツノ截面ナリトセヨ。凸多角形 ABCD ノ内部ニ一點 P ヲ取リ,P ト多角形ノ頂點トヲ結べヨ。



多角形ノ各邊ヲ底トシ O,P ヲ夫々コレニ對スル頂點トスル二組ノ三角形ノ數ハ同一ナリ,故ニ O ヲ頂點トスル凡ベテノ三角形ノ内角ノ和ハ P ヲ頂點トスル凡ベテノ三角形ノ内角ノ和ニ等シ,卽チ

(多面角ノ面角ノ和)+(∠OAD+∠OAB)+(∠OBA+∠OBC)+(∠OCB+∠OCD)+(∠ODC+∠ODA)

=(P點ノ囘ハリノ平面角ノ和)＋∠DAB＋∠ABC＋∠BCD＋∠CDA

然ルニコノ左側ノ第二,第三等ノ括弧內ノ角ノ和ハ夫々右側ノ第二,第三等ノ角ヨリ大ナリ〔定理23〕,而シテ右側ノ第一ノ括弧內ノモノハ四直角ニ等シ,故ニ

多面角ノ面角ノ和＜四直角。

問題

48. 三面角ノ三ツノ稜角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。〔問題41, 定理24〕。

49. 凸n面角ノ凡ベテノ稜角ノ和ハ$2(n-2)$直角ヨリ大ニシテ$2n$直角ヨリ小ナリ。

50. 三面角ノ任意ノ一稜角ト二直角トノ和ハ他ノ二稜角ノ和ヨリ大ナリ。

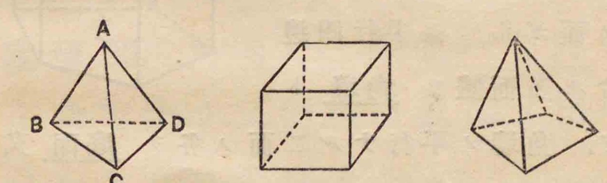
51. 三面角ノ二ツノ面角不等ナルトキハ大ナル面角ヲ有スル面ニ對スル稜角ハ小ナル面角ヲ有スル面ニ對スル稜角ヨリ大ナリ。

52. 前問ノ逆ヲ述べ,且ツコレヲ證明セヨ。

第二編
多面體

第一章 四面體,角壔,角錐

33. 定義 平面多角形ノミニヨリテ圍マレタル立體ヲ **多面體** ト云ヒ,ソノ圍マレタル有限ノ空間ノ部分ヲ **內部**,各多角形ヲ多面體ノ **面** ト云フ。二面ニ共通ナル多角形ノ邊ヲ **稜**,多角形ノ各頂點ヲ又多面體ノ **頂點** 又ハ **頂** ト云フ。



多面體ノ中最モ簡單ナルモノハ四個ノ三角形ニテ圍マレタルモノニシテ,コレヲ **四面體** ト云フ。

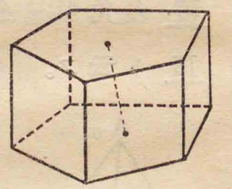
四個ノ合同ナル正三角形ヲ面トスル四面體

ヲ **正四面體** ト云フ。

多面體ハソノ面ノ數ニ從ヒテ,四面體,五面體,六面體等ト云ヒ,之ヲ表ハスニ頂點ヲ連記ス,例ヘバ四面體ABCDト記スガ如シ。

四面體ABCDノ相交ハラザル二稜ヲ **對稜** ト云フ, AB,CD;AC,BD;AD,BC ハ夫々一組ノ對稜ナリ。

多面體ノ何レノ面ヲ引延バスモ,ソノ内部ニ入ラザルモノヲ **凸多面體** ト云フ。本書ニ於テ斷リナキトキハ,凡ベテ凸多面體ナリト知ルベシ。



二面ガ平行ニシテ,ソノ他ノ面ガ凡ベテ平行四邊形ナル多面體ヲ **角壔** ト云フ。角壔ノ平行ナル二面ノ各ヲ **底面** 又ハ單ニ **底** ト云ヒ,殘リノ面ヲ **側面** ト云フ。側面ナル二ツノ平行四邊形ノ共通邊ヲ **側稜**,兩底面間ノ距離ヲ **高サ** ト云フ。

側面ノ數,側稜ノ數ハ一ツノ底面多角形ノ邊數又ハソノ頂點ノ數ニ等シ。コノ數ニヨリテ

角壔ヲ **三角壔,四角壔** 等ト稱ス。

側稜ガ凡ベテ底面ノ各ニ垂直ナル角壔ヲ **直角壔** ト云ヒ,ソノ中ニテ底面ガ正多角形ナルモノヲ **正角壔** ト云フ。

多面體ヲ一平面ニテ截リテ得タル多角形ヲ **截面** 又ハ **截リ口** ト云フ。

角壔ノ一側稜ニ垂直ナル平面ハ他ノ凡ベテノ側稜ニモ垂直ナリ〔35頁系2〕。斯樣ニシテ角壔ノ凡ベテノ側稜ニ垂直ナル截面ヲ **直截面** ト云フ。

34. 平行四邊形ノ對邊相等シキコト,定理14〔31頁〕,定理10系〔24頁〕等ニヨリ:

定理 25. 角壔ノ二底面ハ合同ナル多角形ナリ,又側稜ハ皆長サ相等シクシテ互ニ平行ナリ。

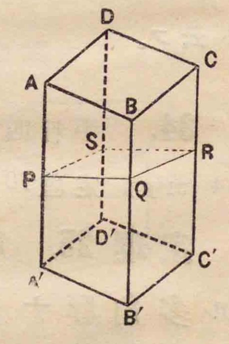
卽チ角壔ハ合同ナル二ツノ平面多角形ノ相對應スル邊ヲ互ニ平行ナル樣ニ空間ニ置キテ相對應スル頂點ヲ結ビテ側面ヲ作ルトキ得ル圖形ナリ。

系　角壔ノ凡テノ側稜ニ交ハル二ツノ平行ナル截面ハ合同ナル多角形ナリ。

何トナレバ,コノ兩截面ヲ底面トスル一ツノ角壔ヲ得ルガ故ナリ。

35.　定理 26.　角壔ノ全側面積ハソノ直截面ノ周ト側稜ノ一ツトノ積ニ等シ。

證明　圖ニ於テ PQRS ヲ一ツノ四角壔ノ直截面トセヨ。PQ ハ平行四邊形 AA′B′B ノ對邊 AA′, BB′ ニ垂直ナリ.故ニソノ面積ハ AA′.PQ ナリ,卽チ



$$\square AA'B'B = AA' \cdot PQ$$

同様ニ

$$\square BB'C'C = BB' \cdot QR$$

$$\square CC'D'D = CC' \cdot RS$$

$$\square DD'A'A = DD' \cdot SP$$

且ツ

$$AA' = BB' = CC' = DD' \quad \text{〔前定理〕}$$

故ニ　全側面積 $= AA' \cdot (PQ + QR + RS + SP)$

【注意】 直截面ヲ作ルトキニ側稜ノ或ル者ト交ハラザルトキハ側面ヲ延長シテ交ハラシメタル截口ヲ考フベシ。

系　直角壔ノ全側面積ハ一ツノ底ノ周ト高サトノ相乘積ニ等シ。

定義　多面體ノ凡ベテノ面ノ面積ノ和ヲソノ表面積ト云フ。

問　題

53. 底面及ビ側面ガ何レモ正方形ナル角壔ノ一稜ノ長サ二尺ナルトキソノ表面積幾許ナルカ。

54. 側稜三寸ニシテ底ハ一邊二寸ナル正三角形ヨリ成ル直角壔ノ側面積及ビ表面積ハ各幾許ナルカ。

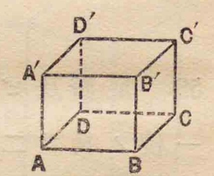
55. 四面體ノ二組ノ對稜ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點トナル。〔問題19ヲ見ヨ〕

56. 四面體ノ各組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ハ同一ノ點ヲ通リ,互ニ他ヲ二等分ス。

57. 四面體ノ對稜ガ一組ヅツ互ニ等シキトキハ各頂點ニ於ケル三ツノ面角ノ和ハ二直角ニ等シ,又何レノ面モ鋭角三角形ナリ。〔定理 23〕。

36. 定義 底面ガ平行四邊形ナル角壔ヲ 平行六面體 ト云フ。

圖ニ於テ ABCDA′B′C′D′ ヲ平行六面體トセヨ。然ルトキハ各面ハ何レモ平行四邊形ニシテ二ツ宛互ニ平行ス,又稜ハ四ツ宛互ニ平行ス。故ニ



定理 27. 平行六面體ハ互ニ合同ナル三組ノ平行四邊形ニヨリテ圍マル。又ソノ何レノ一組ヲモ底面ト考フルコトヲ得。

定義 矩形ニヨリテ圍マレタル平行六面體ヲ 直六面體 又ハ 直方體 ト云ヒ,直六面體ノ各稜等長ナルモノ卽チ合同ナル正方形ニヨリテ圍マレタルモノヲ 正六面體 又ハ 立方體 ト云フ。

定理 28. 直六面體ノ一頂點ニ集マル三稜ハ互ニ垂直ナリ,又何レノ互ニ平行ナル二面ヲ底面ト考フルモ側稜ハコレニ垂直ナリ。

定義 多面體ノ同一面上ニアラザル二頂點ヲ結ブ線分ヲ 對角線 ト云フ。

四面體ハ對角線ヲ有セズ,平行六面體ハ四ツノ對角線ヲ有ス,前ノ圖ニ於テ AC′, BD′, CA′, DB′ ハソノ四ツノ對角線ナリ。

問題

58. 五角壔ニハ幾個ノ對角線アルカ。

59. 六面體ノ面ガ二ツ宛互ニ平行ナルモノハ平行六面體ナリ。

60. 一ツノ頂點ニ集マレル三稜ガ等長ナル直六面體ハ立方體ナリ。

61. 平行六面體ノ二ツノ對角線ハ相交ハリテ互ニ他ヲ二等分ス。

62. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ通ル。

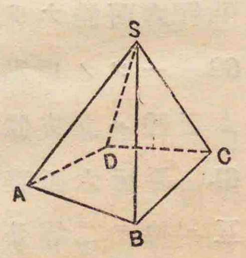
63. 直六面體ノ四ツノ對角線ハ長サ相等シ,其相交ハル點ハ八ツノ頂點ヨリ等距離ニアリ。

64. 直六面體ノ一頂點ニ集マル三稜ノ各ノ二乘ノ和ハ對角線ノ二乘ニ等シ。

65. 一稜ノ長サa尺ナル立方體ノ對角線ノ長サ幾尺ナルカ。

37. 定義 一ツノ平面多角形及ビソノ各頂點ヲ多角形ノ平面外ニアル一點ト結ビテ得タル三角形ニヨリ生ジタル多面體ヲ **角錐** ト云ヒ,コレ等ノ三角形ニ共通ナル頂點ヲ特ニ **角錐ノ頂點** 又ハ **頂**,多角形ヲ **底面** 又ハ **底**,頂點ヨリ底ニ引ケル垂線ヲ **高サ** ト云フ。

角錐ハ底面多角形ノ邊數ニ從ヒテ, **三角錐,四角錐** 等ト稱ス。



底ABCD頂Sナル角錐ヲ表ハスニ S−ABCD ト記ス。

三角錐ハ四面體ト同一ナリ,コノ場合ニハ何レノ面ヲ底ト考フルモ差支ナシ。

角錐ノ頂ニ集マル各稜ヲ **側稜**,底ヲ除キテ他ノ面ニ各ヲ **側面** ト云フ。

側稜互ノ相等シク,且ツ底ガ正多角形ナル角錐ヲ **正角錐** ト云フ。

問題

66. 正角錐ノ頂點ヨリ底ニ下セル垂線ノ足ハ底面正多角形ノ中心ナリ。

67. 正角錐ノ全側面積ハ底ノ周ト頂點ヨリ底ノ一稜ニ下セル垂線トノ相乘積ノ半バニ等シ。

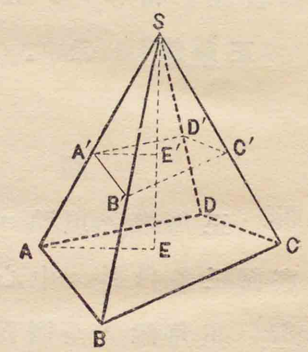
定義 コノ垂線ハ底ノ何レノ稜ニ下シテモ長サ相等シク正角錐ノ **斜高** ト云フ。

68. 正四面體ノ一稜ノ長サa尺ナルトキ,斜高及ビ高サ各幾尺ナルカ。 答 $\sqrt{\frac{3}{2}}a$尺。 $\sqrt{\frac{2}{3}}a$尺。

38. 定理29. 角錐ノ底面ニ平行ナル截口ハ底ニ相似ナル多角形ニシテ,其相似ノ比ハ頂點ヨリ截口ニ

至ル距離ト,底面ニ至ル距離トノ比ニ等シ。

證明 S−ABCD ヲ一ツノ角錐,底ニ平行ナル截口ヲ $A'B'C'D'$;A',B',C',D' ハ夫々 SA,SB,SC,SD 上ニアル點トセヨ。



底面ト截面ハ互ニ平行ナリ,コレヲ平面 SAB ニテ截リタルモノト考フルトキハ

$$A'B' /\!/ AB$$ 〔28頁系1〕

$$\therefore \frac{A'B'}{AB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{SB'}{SB}$$

同樣ニ
$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{SB'}{SB}=\frac{SC'}{SC}$$

$$\frac{C'D'}{CD}=\frac{SC'}{SC}=\frac{SD'}{SD}$$

$$\frac{D'A'}{DA}=\frac{SD'}{SD}=\frac{SA'}{SA}$$

故ニ兩平面多角形 $A'B'C'D'$ ト ABCD トノ邊ト

邊トハ互ニ比例ヲナス,且ツ等角ナリ〔31頁定理14〕,卽チ互ニ相似ナリ,ソノ相似ノ比ハ

$$\frac{SA'}{SA}$$

ナリ。

サテ S ヨリ底面ニ下セル垂線ノ足ヲ E,截面ト交ハル點ヲ E' トセヨ,SE' ハ截面ニ垂直ナリ〔28頁系2〕。

線分 $A'E'$,AE ハ平行ニ平面ト一平面 ASE トノ交線上ニ夫々アルヲ以テ互ニ平行ナリ〔28頁系1〕。

$$\therefore \triangle SA'E' \backsim \triangle SAE$$

$$\therefore \frac{SA'}{SA}=\frac{SE'}{SE}$$

卽チ兩相似多角形 $A'B'C'D'$ ト ABCD トノ相似ノ比ハ頂點ヨリ截面ト底面トニ至ル距離ノ比

$$\frac{SE'}{SE}$$

ニ等シ。

系 1. 角錐ノ底面ニ平行ナル截リ口ノ面積ト底ノ面積トノ比ハ頂

點ヨリ截リ口ニ至ル距離ト,底ニ至ル距離トノ二乘比ニ等シ。

系 2. 底面積相等シク,又高サ相等シキ二ツノ角錐ヲ夫々ノ底面ヨリ同一ノ距離ニアル平面ニテ截リタル截リ口ノ面積相等シ。

問 題

69. 角錐ノ底ニ平行ナル截口ト底トノ面積ノ比ガ二定線分ノ比ニ等シキ樣ナル截口ノ位置ヲ決定セヨ。

70. 角錐ノ各側稜ノ中點ハ同一平面上ニアリ,コノ平面ニテノ截リ口ノ面積ハ底面積ノ四分ノ一ニ等シ。

第二章 體 積

39. 定義 立體ガ占ムル空間ノ有限ナル部分ノ大サヲ立體ノ **體積** ト云フ。

立體Aガ占ムル空間ノ部分ガソノ形ヲ變ズルコトナクシテ又他ノ立體Bニヨリテモ占メ得ルトキハ兩立體ハ **合同** ナリト云フ。

合同ナル二ツノ立體ノ體積ハ相等シ。

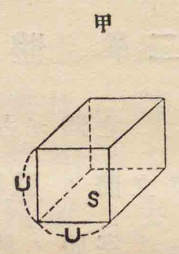
立體Aヲ二ツノ立體B,Cニ分ツトキハ,B,Cノ體積ノ和ハAノ體積ニ等シト云ヒ,AトBトノ體積ノ差ハCノ體積ニ等シト云フ。

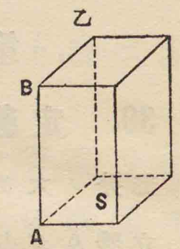
立體ノ體積ヲ計ルニハ單位トシテ各稜ガ單位ノ長サヲ有スル立方體ノ體積ヲ採用ス。

立方體ノ各稜ガ一尺ナルトキ,コレガ表ハス體積ノ單位ヲ **一立方尺** ト云ヒ,各稜ガ一米ナルトキニハ **一立方米** ト云フコトハ既ニ算術ニ於テ學ビタルガ如シ。

長サノ單位ヲUトシ,Uヲ一邊トスル正方形ヲS,又各稜Uナル立方體甲ノ體積ヲVトセヨ。

Sヲ底トシ側稜ABナル直方體乙ノ體積ハ



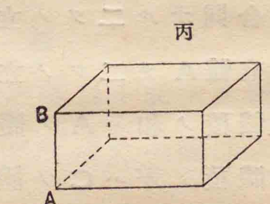


AB ガ單位ノ長サ U ノ p 倍即チ

$$AB=p.U$$

ナラバ,p ハ整數,分數,又ハ無理數ナリトモ,平面幾何(§111)ニテ述ベタルト同樣ニ V ノ p 倍ナリ,即チ乙ノ體積$=p.V$.

高サ AB ハ U ニ等シク,底面ガ單位面積 U^2 ノ q 倍ニ等シキ矩形ナル一ツノ直方體丙ノ體積ハ V ノ q 倍ナリ。卽チ



丙ノ體積$=q.V$ ニシテ,q ハ整數,分數又ハ無理數ニテモ宜ロシ。

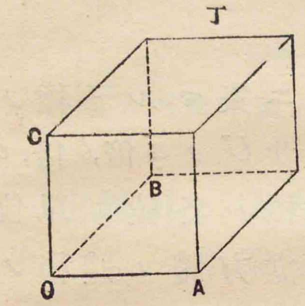
若シ丙ノ底面ノ相隣レル邊ノ長サガ夫々 $a.U$, $b.U$ ナルトキハ

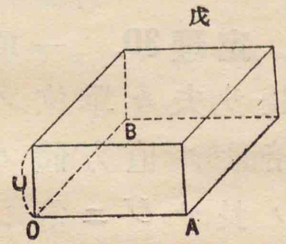
$$q=ab$$

ナルガ故ニ,

丙ノ體積$=ab.V$。

丁ハ直方體ニシテ,ソノ底面ノ一頂點 O ニ集マ





ル三稜ヲ OA, OB, OC トシ,OC ハ側稜ナリトセヨ。丁ノ底ト合同ナル矩形ヲ底トシ,高サ單位ノ長サ U ニ等シキ直方體ヲ戊トシ,OA, OB ハ夫々 U ノ a 倍,b 倍ナリトセヨ,卽チ

$$OA=a.U, \quad OB=b.U$$

然ラバ戊ノ底面積ハ單位面積 U^2 ノ ab 倍トナル,故ニ

戊ノ體積$=ab.V$

サテ丁ノ高サ OC ハ戊ノ高サノ c 倍ナルトキ

卽チ $OC=c.U$

ナルトキハ

丁ノ體積=戊ノ體積ノ c 倍

$=abc.V$

トナル。故ニ

定理30. 一頂點ニ集マル三稜ノ長サ夫々單位ノ長サUノa倍,b倍,c倍ナル直方體ノ體積ハ各稜ガ單位ノ長サUニ等シキ立方體ノ體積ノabc倍ナリ。(a,b,cハ整數,分數,無理數ノ何レナルモ同樣ナリ)。

一頂點ニ集マレル三稜ガ OA,OB,OC ナル直方體ハ,コノ三稜中ノ任意ノ二ツヲ相隣レル二邊トスル矩形ヲ底面トシ,殘レル一稜ヲ高サトスル直方體ト見做スコトヲ得ルガ故ニ,特ニ單位ヲ示ス必要ナキトキハコノ直方體ノ體積ヲ表ハスニ

$$OA \cdot OB \cdot OC$$

ト記ス。之レヲ **三線分ノ積** ト云フ,而シテ

$$OA = a.U,\quad OB = b.U,\quad OC = c.U$$

ナラバ,代數計算ノ形式ニ從ヒテ

$$OA \cdot OB \cdot OC = abc.\, U^3$$

トナル,因リテ

$$V = U^3$$

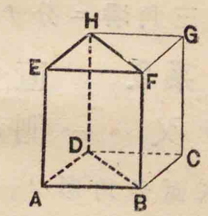
トナル。又

$$OA \cdot OB = ab.U^2$$

ハ底面ノ面積ヲ表ハスガ故ニ次ノ如ク述ブ:

定理31. 直方體ノ體積ハ底面ト高サトノ相乘積ニ等シ。

40. 定理32. 底面ガ直角三角形ナル直三角壔ノ體積ハ底面ト高サ又ハ一側稜トノ相乘積ニ等シ。

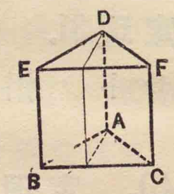


證明 ABDEFH ハ直三角壔ニシテ,ソノ底面 ABD ハ ∠BAD ガ直角ナル三角形トセヨ。AB, AD ヲ相隣レル二邊トスル矩形 ABCD ヲ作リ,コレヲ底面トシ高サ AE ニ等シキ一ツノ直方體 ABCDEFGH ヲ考ヘヨ。コノ直方體ハ平面 DBFH ニヨリ合同ナル二ツノ三角壔 ABDEFH, CDBGHF ニ分タル,故ニ

$$ABDEFH\text{ノ體積} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot AE$$

$=(\triangle ABD$ ノ面積$)\times($高サ $AE)$。

系 1.　直三角壔ノ體積ハ底面ト高サ又ハ一側稜トノ相乘積ニ等シ。



(直三角壔 ABCDEF ノ底面ヲナス三角形 ABC ノ最大ナル角ノ頂點ヨリ對邊ニ垂線ヲ下ストキハソノ足ハ對邊上ニアリ〔平面幾何 36 頁問題 19〕，コノ垂線ト一側稜トヲ含ム平面ニテ三角壔ヲ二ツノ夫々直角三角形ヲ底面トスル直三角壔ニ分チテ考ヘヨ)。

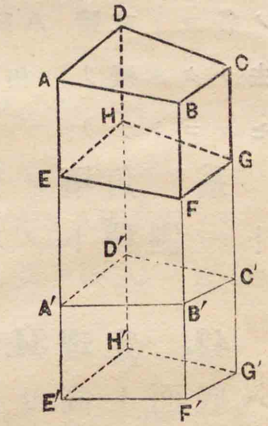
系 2.　直角壔ノ體積ハ底面ト高サ又ハ一側稜トノ相乘積ニ等シ。

(底面多角形ノ一頂點ヨリ出ヅルコノ多角形ノ對角線ト，コノ頂點ヲ通ル側稜トヲ含ム平面ヲ作リテ數多ノ直三角壔ニ分ツベシ)。

41.　定理 33.　角壔ノ體積ハ其ノ直截面ヲ底面トシ，側稜ノ一ツニ等シキ高サヲ有スル他ノ直角壔ノ體積ニ等シ。

積ニ等シ。

證明　假リニ四角壔ヲ取リ，底面ヲ ABCD, EFGH トセヨ。各側稜 AE, BF, CG, DH ヲ夫々コノ方向ニ延長シテコレ等ヲ夫々 A', B', C', D' ニテ截ル一ツノ直截面 $A'B'C'D'$ ヲ作リ，AA' ノ方向ニ A' ヨリ AE ニ等シク $A'E'$ ヲ取リ，E' ヲ通ル他ノ直截面 $E'F'G'H'$ ヲ作リ，直線 BB, CC', DD' トノ交點ヲ夫々 F', G', H' トセヨ。



$A'B'C'D'E'F'G'H'$ ハ元トノ角壔ノ直截面ヲ底トシ高サハ元トノ角壔ノ側稜ノ一ツニ等シキ直角壔ナリ，故ニ

$$A'E'=B'F'=C'G'=D'H'=AE=BH=CG=DH$$

因リテ

$$AA'=EE',\quad BB'=FF',\quad CC=GG',\quad DD'=HH'$$

又　$\square ABCD=\square EFGH, \square A'B'C'D'=\square E'F'G'H'$

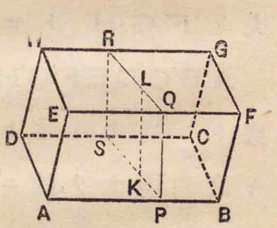
故ニ二ツノ立體 $ABCDA'B'C'D'$, $EFGHE'F'G'H'$

(一般ニ角壔ニアラズ)ハ E,E′ ガ夫々 A,A′ ニ, E′F′, E′H′ ガ夫々 A′B′, A′D′ ノ上ニ來ル樣ニ重ネ合ハスコトヲ得,卽チ合同ナリ,因リテ體積等シ,ソノ各ヨリ立體 A′B′C′D′,EFGH ノ體積ヲ取リ去リタル殘リハ相等シ,コレ卽チ證明セント欲セシコトナリ。

系 角壔ノ體積ハ直截面ノ面積ト一側稜トノ相乘積ニ等シ。[前定理系2]

42. 定理34. 平行六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ相乘積ニ等シ。

證明 ABCDEFGH ヲ平行六面體トシ,ソノ底ノ一ツヲ ABCD トセヨ。コノ六面體ハ ADHE,BCGF ガ底ナル一ツノ角壔ナリト考ヘテ,ソノ直截面 PQRS ヲ作レヨ。前定理系ニヨリ



平行六面體ノ體積＝PQRS ノ面積×AB。

平行線 PS,QR ノ距離ヲ KL トセバ,

PQRS ノ面積＝PS・KL

サテ PQRS ハ直截面ナルヲ以テ

$$PQ \perp AB,\ PS \perp AB$$

面 PQRS⊥ABCD

$\therefore$ KL⊥ABCD, KL⊥EFGH

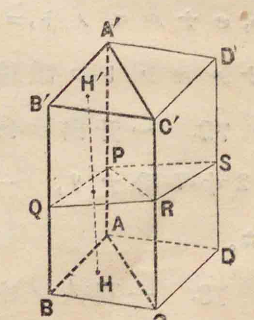
$\therefore$ 平行六面體ノ體積＝PS・KL・AB

＝(PS・AB)・KL

＝(底 ABCD ノ面積)×高サ。

43. 定理35. 三角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ相乘積ニ等シ。

證明 ABCA′B′C′ヲ三角壔トセヨ,底 ABC ノ二邊例ヘバ BA, BC ヲ隣レル二邊トスル平行四邊形 ABCD ヲ作リ,コレヲ底面トシ AA′ ヲ側稜ニ有スル平行六面體 ABCDA′B′C′D′ ヲ作レヨ。次ニ AA′ ト交ハル直截面 PQRS ヲ作リ,コノ面ト



平面AA′C′Cトノ交ハリヲPRトス。PRハ平行四邊形PQRSノ面積ヲ二等分ス[28頁系1],故ニ定理33[74頁]ニヨリ

三角壔ABCA′B′C′ノ體積

$=$三角壔ACDA′C′D′ノ體積

$=\frac{1}{2}$(平行六面體ABCDA′B′C′D′ノ體積)

$=\frac{1}{2}$(底ABCDノ面積)×(高サHH′)

$=$(△ABCノ面積)×(角壔ノ高サHH′)。

系 角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ相乘積ニ等シ。

問題

71. 直方體ノ一頂點ニ集レル三稜ノ長サa, b, cナルモノト,コノ長サノ夫々p倍,q倍,r倍ナルモノトノ體積ノ比如何。

72. 一升桝ノ內法ハ縦横各々4寸9分,深サ2寸7分ナリ,一升桝ノ容積ハ幾立方分ナルカ。　答 64827立方分。

73. 一石入ノ水槽ノ內法,縦2尺4寸5分,横1尺8寸ナラシムルトキハ深サ幾尺ニナスベキカ。　答 1.47尺。

74. 一升ノ水ハ幾立方糎ナルカ,ソノ重サハ幾瓩ニシテ又幾匁ナルカ。　答 1804立方糎, 481匁。

75. 水200瓩ハ約幾合幾勺ナルカ。　答 1.1合。

76. 一平方糎ノ正方形ヲ壓ス大氣ノ力ハコノ正方形ヲ底トシ高サ約76糎ニ等シキ水銀柱ノ重サニ等シ,水銀ノ比重ヲ13.6トシテソノ壓力ノ强サヲ計算セヨ。　答 1033.6瓦。

77. 前問ニ於テ一平方寸ノ直方形ヲ壓ス大氣ノ壓力ハ約幾貫ナルカ。　答 約2.5貫。

78. 三角壔ノ側稜ノ長サ各々3尺ニシテ直截面ノ三邊ノ長サ夫々3寸,4寸,5寸ナルモノノ體積ハ幾立方寸ナルカ。　答 180立方寸。

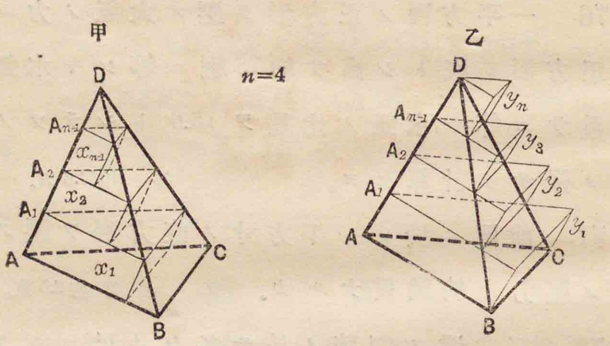
79. 體積1728立方寸ナル立方體ノ全表面積ハ幾平方寸ナルカ。　答 864平方寸。

80. 六角壔ノ底ハ一邊ノ長サa尺ナル正六角形,側稜ハ長サb尺ニシテ且ツ底面ト60°ノ傾角ヲナスト云フ,コノ角壔ノ體積ヲ求メヨ。

答 $\frac{3}{8}a^2b$ 立方尺。

44. 角錐ノ體積ヲ計算スルコトハ角壔ノ場合ノ如ク簡單ナラズ。

定理36. 底面積互ニ等シク,高サ又互ニ相等シキ二ツノ三角錐ノ體積ハ相等シ。



證明 D−ABC ヲ三角錐, ABC ヲソノ底, h ヲ高サトセヨ。稜 AD ヲ n 等分シ,ソノ各分點ヲ圖ノ如ク $A_1, A_2 \cdots\cdots A_{n-1}$ トシ,各分點ヲ通リ底ニ平行ナル截面ヲ作リ,甲圖ノ如クコレ等ノ$(n-1)$個ノ截口ノ各ヲ上底トシ側稜ハ DA ニ平行ニシテ高サハ何レモ $\frac{h}{n}$ ニ等シキ$(n-1)$個ノ三角壔ヲ作リ,ソノ體積ヲ夫々 $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$

トセヨ。次ニ乙圖ノ如ク底 ABC,及ビ各截面ヲ下底トシ,側稜ハ DA ニ平行ニシテ,高サハ $\frac{h}{n}$ ナル n 個ノ三角壔ヲ作リ,ソノ體積ヲ夫々 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n$ トセヨ。然ルトキハ

$$x_1=y_2,\quad x_2=y_3, \cdots\cdots x_{n-1}=y_n$$

トナル。

D−ABC ノ體積ヲ V,

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}=P$$

$$y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n=Q$$

トスルトキハ明ニ

$$P<V<Q$$

$$Q-P=y_1=\frac{\triangle ABC\times h}{n}。$$

サテ D′−A′B′C′ ハ高サ h ニシテ底 A′B′C′ ノ面積ハ △ABC ト等積ナル第二ノ三角錐トシ,ソノ體積ヲ V′ トセヨ。前ト同樣ニ稜 A′D′ ヲ同數ノ n 個ニ等分シテ,甲圖ニ相當スル$(n-1)$個ノ三角壔ヲ作リ,ソノ體積ヲ夫々

$$x_1', x_2', \cdots\cdots x'_{n-1}$$

トシ,又乙圖ニ相當スル n 個ノ三角壔ヲ作リ,ソノ體積ヲ夫々

$$y_1', y_2', \cdots\cdots y_n',$$

トセヨ。定理29系2 [63頁],定理35 [77頁]ニヨリ

$$x_1 = x_1',\ x_2 = x_2',\cdots\cdots x_{n-1} = x'_{n-1}$$

$$y_1 = y_1',\ y_2 = y_2',\cdots\cdots y_n = y_n'$$

ナルヲ以テ前ト同様ニ

$$P < V' < Q。$$

VトV'ノ値ハ共ニPトQトノ値ノ中間ニアルガ故ニVトV'トノ差ハ

$$Q-P = \frac{\triangle ABC.h}{n}$$

ヨリ小ナリ,コノQ−Pハnヲ大キク取ラバ如何程ニモ小サクナル,然ルニVトV'トハ夫々一定ノ値ヲ有スルモノト見ルガ故ニVトV'トノ差ハ一定ノ値αニシテαハ負ニアラズ。モシαガ零ナラズト考フルトキハ,nヲ大キク取ルコトニヨリ

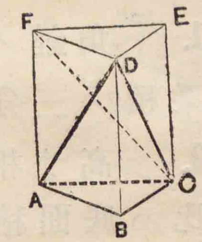
$$\alpha > \frac{\triangle ABC \times h}{n}$$

トナルコトヲ得,コレ不合理ナリ。因リテαハ零ナラザル可カラズ,即チ

$$V = V'。$$

定理37. 三角錐ノ體積ハ底ト高サトノ相乗積ノ三分ノ一ニ等シ。

證明 D−ABCヲ三角錐,△ABCヲ底,hヲ高サ,Vヲソノ體積トセヨ。△ABCヲ底,高サh,側稜ハDBニ平行ナル三角壔ABCEDFヲ作リFCヲ引クトキハ,コノ三角壔ハ三ツノ三角錐



DABC, DCEF, DACF

ニ分ル。D−CEF,D−ACFニ於テ△CEF,△ACFヲ底ト考フルトキハソノ面積相等シク,高サハDヨリ面ACEFヘノ垂線ナルガ故ニ相等シ,即チ

DCEFノ體積＝DACFノ體積

又D−ABCトD−CEFニ於テ△DEFヲ後者ノ底ト考フルトキハ兩三角錐ハ底面積相等シク,高サハ又hナリ,故ニ體積相等シ,即チ

$\triangle ABC \times h$＝ABCEDFノ體積

$$=3(\mathrm{D-ABC}\text{ ノ體積})$$

$$=3\mathrm{V}$$

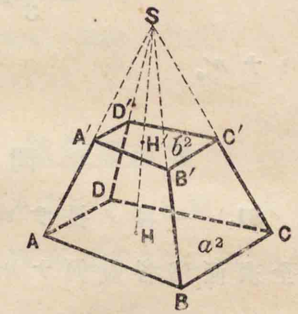
$$\therefore\quad \mathrm{V}=\frac{\Delta \mathrm{ABC}\times h}{3}。$$

系1. 角錐ノ體積ハ底ト高サトノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

系2. 高サ相等シキ兩角錐ノ體積ノ比ハ底面積ノ比ニ等シ,又底面積相等シキ兩角錐ノ體積ノ比ハ高サノ比ニ等シ。

45. 定義 角錐ノ底ニ平行ナル平面ニテコレヲ截リタルトキ,底ト截面トノ間ニアル立體ヲ__角錐臺__ト云ヒ,截リ口ト底トヲ又角錐臺ノ__兩底面__又ハ__底__ト云ヒ,兩底面間ノ距離ヲ__高サ__ト云フ。

定理38. 角錐臺ノ體積ハ兩底トソノ比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタルモノヽ三分ノ一ニ等シ。



圖ニ於テ SH ヲ角錐ノ高サ, V ヲ角錐臺 $\mathrm{ABCDA'B'C'D'}$ ノ體積, $h=\mathrm{H'H}$ ヲソノ高サ, a^2 ヲ下底ノ面積, b^2 ヲ上底ノ面積ヲ表スモノトセヨ。證明スベキコトハ

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)。$$

證明 V ハ元トノ角錐ノ體積ト,截口ヲ底トシ元トノ角錐ノ頂點Sヲ又頂點トスル角錐ノ體積トノ差ニ等シ,故ニ

$$\mathrm{V}=\frac{1}{3}a^2.\mathrm{SH}-\frac{1}{3}b^2.\mathrm{SH'}$$

$$=\frac{1}{3}[a^2(h+\mathrm{SH'})-b^2.\mathrm{SH'}]$$

$$=\frac{1}{3}[a^2.h+\mathrm{SH'}(a^2-b^2)],$$

然ルニ定理29系1 [67頁] ニヨリ

$$\frac{\mathrm{SH'}^2}{b^2}=\frac{(\mathrm{SH'}+h)^2}{a^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{SH'}}{b}=\frac{\mathrm{SH'}+h}{a}=\frac{h}{a-b}$$

コノ SH' ノ値ヲ V ノ式ノ右邊ニ入レテ

$$V=\frac{1}{3}\{a^2h+h.b(a+b)\}$$

$$=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

トナル。

問　題

81. 一稜ノ長サ a ナル正四面體ノ體積及ビ全表面積各幾何ナルカ。答 $\frac{1}{6\sqrt{2}}a^3,\ \sqrt{3}\,a^2.$

82. 角錐ノ底ヨリ高サノ n 分ノ一ノ距離ニアル截面ニテ截リテ得タル角錐臺ノ體積如何。

答　角錐ノ體積ノ $\left[1-\frac{(n-1)^3}{n^3}\right]$ 倍.

83. 四面體 ABCD ノ稜 AB ヲ延長シ,コノ直線上ニ二點 A′,B′ ヲ取リテ AB=A′B′ ナラシメバ四面體 A′B′CD ノ體積ハ ABCD ノ體積ニ等シ。

[A′,B′ ヨリ △ADC ニ下セル垂線ノ差ハ B ヨリ △ADC ニ下セル垂線ニ等シキコトアルヲ利用セヨ。]

84. 振レノ位置ニアル二直線 p, q ノ各ノ上ニ夫々定長ノ線分 AB,CD ヲ任意ニ取ルトキハ四面體 ABCD ノ體積ハ一定ノ値ヲ有ス。

85. 三角壔ノ底面ヲ ABC, 頂點 A,B,C ヲ通ル側稜上ノ任意ノ點ヲ夫々 A′,B′,C′ トスルトキハ立體 ABCA′B′C′ ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}(\text{角壔ノ直截面})\times(AA'+BB'+CC')$$

ニ等シ。

定義　斯ノ如キ圖形ヲ **截頭三角壔** ト云フ.

86. 四面體 ABCD ノ稜 AC,ED ノ中點ヲ夫々 E,G トスルトキハ四ツノ四面體 EGBC,EGBA, EGAD, EGCD ノ體積ハ互ニ相等シ。

87. 四面體 ABCD ノ稜 AC, AD, BD, BC ノ中點ヲ夫々 E, F, G, H トシ直線 AB,CD ノ最短距離ヲ d トスルトキハ ABCD ノ體積ハ

$$\frac{2}{3}d\times(\text{平行四邊形 EFGH ノ面積})$$

ニ等シ。　[前問利用]

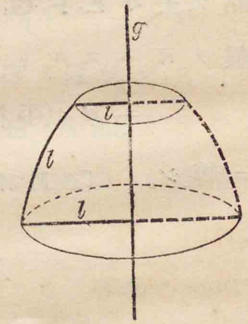
第三編

曲面ヲ有スル立體

第一章 直圓壔,直圓錐

46. 定義 平面ニ非ラザル面ヲ **曲面** ト云フ。

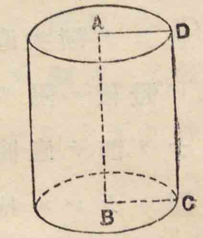
平面ガ其ノ上ニアル一直線 g ヲ軸トシテ 360° 回轉シ,再ビ舊位置ニ復スルトキ,コノ平面上ニアル一ツノ線 l ガ畫ク面ヲ **旋轉面** ト云ヒ,直線 g ヲ其ノ **軸** ト云フ。



旋轉面ニヨリテ圍マレタル立體ヲ **旋轉體** ト云フ。

矩形ノ一邊ヲ軸トシ,回轉セシメテ得タル立體ヲ **直圓壔** ト云ヒ,回轉軸ヲ又直圓壔ノ **軸** ト云フ。軸ニ隣レル二邊ハ二ツノ圓ヲ生ズ,コ

レヲ直圓壔ノ **兩底面**,軸ニ平行ナル邊ガ畫ク曲面ヲ **側面**,軸トセル邊ノ長サ卽チ兩底面間ノ距離ヲ **高サ** ト云フ。



直圓壔ノ軸ヲ含ム任意ノ平面ト側面トノ交ハリハ互ニ平行ナル二線分トナル。コノ各ヲ直圓壔ノ **母線** ト云フ。

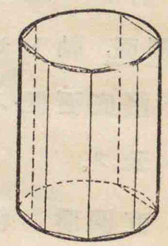
直圓壔ノ底ニ平行ナル平面ハ軸及ビ母線ニ垂直ナリ,コレヲ **直截面** ト云ヒ,ソノ截口ハ底ト合同ナル圓ナリ,コノ圓ノ半徑ヲ直圓壔ノ **半徑** ト云フ。

直圓壔ノ一ツノ底面ニ內接又ハ外切スル多角形ヲ底トシ,高サ直圓壔ノ高サニ等シキ直角壔ノ他ノ底面ハ又直圓壔ノ他ノ底面ニ內接又ハ外切ス。斯樣ナル直角壔ハ直圓壔ニ **內接** 又ハ **外切** スト云フ。

47. 直圓壔ノ側面積及ビ體積.

直圓壔ニ內接スル正多角壔ノ側面積及ビ體積

積ハソノ底ヲナス正多角形ノ邊數ガ增大スルニ從ヒテ漸次直圓壔ノ側面積及ビ體積ニ限リナク近ヅクモノナリ,卽チ直圓壔ハ底面ガ單ニ圓トナレル特別ノ直角壔ナリト見テ側面積及ビ體積ヲ計算ス。故ニ次ノ定理ヲ得:



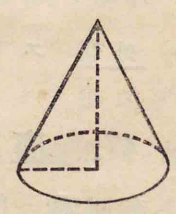
定理39. 直圓壔ノ側面積ハ一ツノ底ノ周ト高サトノ相乘積ニ等シ[61頁系]。又體積ハ一ツノ底ノ面積ト高サトノ相乘積ニ等シ[78頁系]。

系 直圓壔ノ半徑ヲ r, 高サヲ h ニテ表ハストキハ

側面積 $=2\pi rh$, **全表面積** $=2\pi r(r+h)$,

體積 $=\pi r^2h$。

48. **定義** 直角三角形ガソノ直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ回轉シ再ビ舊位置ニ來リタルトキ生ズル立體ヲ**直圓**



錐ト云ヒ,軸トセル邊ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**,直角ヲ夾ム他ノ邊ガ畫ケル圓ヲ**底面**又ハ**底**,直角三角形ノ斜邊ノ長サヲ**斜高**,又斜邊ガ畫ケル曲面ヲ**側面**,底面上ニアラザル軸ノ端ヲ**頂點**又ハ**頂**ト云フ。

頂點ト底ノ周上ノ一點トヲ結ブ線分ヲ**母線**ト云フコトアリ。

角錐ガ直圓錐ト同一ノ頂點ヲ有シ角錐ノ底ガ直圓錐ノ底ニ內接又ハ外切スルトキ,コノ角錐ハ直圓錐ニ**內接**又ハ**外切**スト云フ。

49. 直圓錐ノ體積及ビ側面積.

直圓錐ニ內接スル正多角錐ノ底ノ邊數ガ漸次增大スルトキハ,直圓錐ノ體積ニ正多角錐ノ體積ハ限リナク近ヅク,一方ニハコノ正多角錐ノ體積ハ圓錐ノ底ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ限リナク近ヅク,ヨリテ次ノ定理ヲ得:

定理40. 直圓錐ノ體積ハ底ト高サトノ積ノ三分ノ一ニ等シ.

系1. 直圓錐ノ底ノ半徑ヲ r, 高

サヲ h ニテ表ハストキハ

$$\textbf{體積}=\frac{1}{2}\pi r^2.h.$$

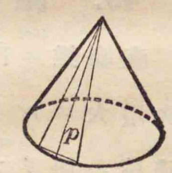
系 2. 直圓錐ノ體積ハコレト等高,等底ノ直圓壔ノ體積ノ三分ノ一ニ等シ。

定理 41. 直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ相乘積ノ二分ノ一ニ等シ。

證明 直圓錐ニ内接スル正多角錐ノ斜高[95 頁]ヲ p, 又其ノ正角錐ノ底ノ周ヲ s トセヨ。コノ角錐ノ側面積ハ

$$\frac{1}{2}s.p$$

ナリ。



正角錐ノ底ノ邊數ヲ漸次增大スルコトニヨリ, p ハ直圓錐ノ斜高ニ漸次限リナク近ヅキ, s ハ直圓錐ノ底ノ周ニ漸次限リナク近ヅク。一方ニコノ正角錐ノ側面積ハ直圓錐ノ側面積ニ漸

次限リナク近ヅク。因リテ直圓錐ノ側面積ハ底ノ周ト斜高トノ相乘積ノ二分ノ一ニテ表ハスコトヲ得ルモノナリ。

系 1. 直圓錐ノ高サヲ h, 斜高ヲ l, 底ノ半徑ヲ r ニテ表ハストキハ

$$\textbf{側面積}=\pi rl,$$
$$\textbf{全表面積}=\pi r(l+r),$$
$$l=\sqrt{r^2+h^2}。$$

系 2. 直圓錐ノ一ツノ母線ノ中點ヲ通リ底ニ平行ナル截リ口ノ周ト斜高トノ相乘積ハ側面積ニ等シ。

50. 定義 直圓錐ノ底トコレニ平行ナル截面トノ間ニアル直圓錐ノ部分ヲ **直圓錐臺** ト云ヒ,截面ト元トノ底面トヲ其ノ **兩底面,** 又兩底面間ノ距離ヲ **高サ,** 兩底面間ニアル斜高ノ部分及ビ側面ノ部分ヲ夫々直圓錐臺ノ **斜高, 側面** ト云フ。

二等邊梯形ガソノ兩底ノ中點ヲ通ル直線ヲ軸トシテ 180° 回轉スルトキハ一ツノ直圓錐臺

ヲ生ズ。

直圓錐臺ハ一ツノ直圓錐ヨリ他ノ直圓錐ヲ取リ去レル殘リナルヲ以テ次ノ定理ハ容易ニ證明スルコトヲ得:

定理42. 直圓錐臺ノ兩底面ノ半徑ヲ夫々 R, r, 高サヲ h, 斜高ヲ l ニテ表ハストキハ

$$l^2=h^2+(R-r)^2,$$

側面積 $=\pi(R+r)l,$

體積 $=\frac{1}{3}\pi h(R^2+Rr+r^2)$。

證明 圖ニ於テ 定理41ニヨリ,

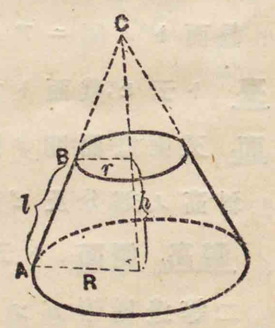
側面積 $=\frac{1}{2}[2\pi R(l+BC)-2\pi r.BC]$

然ルニ

$$\frac{BC}{r}=\frac{l+BC}{R}$$

∴ $R\cdot BC-r.BC=r.l$

∴ 側面積 $=\pi(R+r).l$。



體積ハ定理38ト同樣ニ證明スルコトヲ得。

系 直圓錐臺ノ側面積ハ兩底ヨ

リ等距離ニアル截面ノ周ト斜高トノ積ニ等シ。

問題

88. 半徑1糎ナル硝子製ノ圓筒アリ,ソノ側面ニ1立方糎宛ノ容積ヲ表ハスベキ目盛ヲ附セントス,目盛ノ間隔ヲ如何程ニスベキカ。 答 0.318糎

89. 直徑2糎,長サ3尺ノ純金ノ棒ノ價格約幾圓ナルカ。金ノ比重ヲ19.4,一匁ノ價格5圓,$\pi=3.1416$ トシテ計算セヨ。 答 7387.5圓

90. 截口ガ正方形ナル直角壔ノ木材アリ,コレヨリ最モ大ナル直圓壔形ノ柱ヲ作ルトキハ木材ノ幾割ヲ削ルコトヽナルカ。 答 2.15割

91. 矩形ノ隣レル二邊ノ長サ a, b ナルモノノ邊ヲ夫々軸トシテ回轉セシメテ得タル二ツノ直圓壔ノ側面積及ビ體積ノ比各如何。

92. 漏斗ノ直圓錐形ノ部分ノ底ノ直徑10糎,高サ10糎ナリト云フ。コノ部分ノ容積ハ約幾合幾勺ナルカ。1立ヲ5.5合,$\pi=3.1416$ トシテ

計算セヨ。　答 1.4合

93. 三角形ノ三邊ノ比ガ 3:4:5 ナルトキ,ソノ各邊ヲ軸トシテ回轉シタルトキ生ズル三ツノ立體ノ體積ノ比如何。　答 20:15:12

94. 直圓錐ト之レニ外切スル正三角錐トノ體積ノ比如何。　答 $\pi:3\sqrt{3}$.

95. 直圓錐臺ノ高サh,兩底面ノ半徑ヲ夫々R,rトスルトキハ,ソノ體積ハ高サh,半徑R+hノ二分ノ一ニ等シキ直圓壔,及ビ高サh,底面ノ半徑 R∼r ノ二分ノ一ニ等シキ直圓錐ノ體積ノ和ニ等シ。

96. 直圓錐ノ體積ハ底ノ中心ヨリ母線ニ下セル垂線ト側面積トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

97. 直圓錐臺ノ斜高ガ兩底ノ半徑ノ和ニ等シキトキ,高サハコレ等ノ半徑ノ比例中項ノ二倍ニ等シ。又體積ハ全表面積ト高サトノ相乘積ノ六分ノ一ニ等シ。

第二章　球

51. 定義　一定點Oヨリ一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ハ一ツノ曲面ナリ,コレヲ **球面** ト云フ。球面ハ空間ノ一部ヲ圍ム,コノ立體ヲ **球** ト云ヒ,定點Oヲ球ノ **中心** 又ハ **球心** ト云フ。

球心Oナル球ヲ球Oト記ス。

球心ヨリ球面ノ任意ノ一點ニ至ル線分ハ一定ノ長サヲ有ス,コレヲ球ノ **半徑** ト云フ。

球心ヲ通ル任意ノ直線ハ必ズ球面トニ點ニ於テ交ハリ,コノ二點間ノ距離ハ半徑ノ二倍ニ等シ,コノ二點ガ決定スル線分ヲ球ノ **直徑** ト云フ。球心ハ直徑ノ中點ナリ。

球心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナル點ハ **球ノ內ニアリ** ト云ヒ,半徑ニ等シキ點ハ **球ノ上ニアリ**,又半徑ヨリ大ナル點ハ **球ノ外ニアリ** ト云フ。

定理43.　半徑相等シキ二ツノ球

ハ合同ナリ。

52.　定義　球心ヲ通ル任意ノ平面ト球トノ交ハリナル截口ハ皆合同ナル圓ニシテ,ソノ半徑ハ球ノ半徑ニ等シ,コノ圓ヲ球ノ**大圓**ト云フ。

球ノ一ツノ大圓ヲ考ヘ,ソノ一ツノ直徑ヲ軸トシテコノ大圓ヲ 180° 回轉セシムルトキハ元トノ球ヲ生ズ,故ニ

定理 44.　球ハ一ツノ旋轉體ニシテ,任意ノ直徑ハ軸トナルコトヲ得。

圓ノ任意ノ直徑ヲ軸トシテコノ圓ヲ回轉セシムルトキハ球ヲ生ズ。

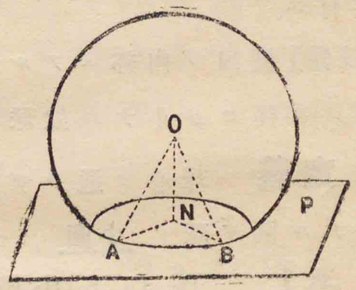
系 1.　球面上ノ二點ガ一ツノ直徑ノ兩端ナルトキハ,コノ二點ヲ通ル大圓ハ無數ニ多シ,若シ直徑ノ兩端ナラザルトキハコノ二點ヲ通ル大圓ハ常ニ唯一ツアリ。

系 2.　一ツノ球ノ二個ノ大圓ノ

周ハ一ツノ直徑ノ兩端ニ於テ相交ハル。

53.　定理 45.　平面ガ球面ト二點ヲ共有スルトキハ一ツノ圓周ヲ共有ス。

證明　平面 P ガ球 O ト二點 A, B ヲ共有ストセヨ。



若シ P ガ球心 O ヲ通ルトキハ平面 P ト球トハ一ツノ大圓ヲ共有ス。次ニ平面 P ハ O ヲ通ラザルモノトセヨ。O ヨリ P ニ垂線 ON ヲ下シ,ソノ足ヲ N トス。OA, OB, AN, BN ヲ作レヨ。△OAN, △OBN ハ二ツノ直角三角形ニシテ

$$OA = OB = \text{球ノ半徑}$$

$$ON\ \text{ハ共通}$$

故ニ　$$\triangle OAN \equiv \triangle OBN$$

$$\therefore\ AN = BN$$

サテNヲ中心,NAヲ半徑トシテ平面P上ニ一ツノ圓ヲ畫クトキハ,コノ圓周上ノ一點ハ皆Oヨリノ距離ガOA卽チ球ノ半徑ニ等シク,P平面上コノ圓周上ニアラザル點ハOヨリノ距離ガ球ノ半徑ニ等シカラズ;故ニ球面ト平面PトハNヲ中心,NAヲ半徑トスル一ツノ圓周ヲ共有ス。

【注意】圓Nノ內部ニアル點ハOヨリノ距離ガ球ノ半徑ヨリ小ナル故球ノ內ニアル點ナリ。

定義　球心ヲ通ラザル平面ト球トノ交ハリナル圓ヲ球ノ **小圓** ト云フ。

系1.　球心ト小圓ノ中心トヲ通ル直線ハ小圓ノ平面ニ垂直ナリ。

球ノ半徑ヲR,小圓ノ半徑ヲr,球心ト小圓ノ中心トノ距離ヲhニテ表ハストキハ

$$r^2=R^2-h^2。$$

系2.　球心ヨリ相等シキ距離ニアル平面上ノ小圓ハ相等シ。距離不等ナルトキハ,大ナル距離ニアルモノハ小ナル距離ニアルモノヨリ小ナリ。

系3.　球面上ノ一點ヲ通リ,コノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル平面ハコノ點以外ニ球ト一點ヲモ共有セズ。

系4.　球面上ノ一點ヲ通リ,コノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナラザル平面ハ球ト一ツノ圓ヲ共有ス。

[球心ヨリ平面ニ垂線ヲ下ストキハソノ長サ半徑ヨリ小ナリ。]

系5.　球面ト唯一點ヲ共有スル平面ハコノ點ヲ通ル球ノ半徑ニ垂直ナリ。

定義　球面ト唯一點ヲ共有スル平面ヲ球ノ **切面**,ソノ點ヲ **切點** ト云ヒ,球ト平面トハ互ニ **切ス** ト云フ。

球ト一ツノ圓ヲ共有スル平面ハ球ト **相交ハル** ト云ヒ,球ト一點ヲモ共有セザル平面ハ **相交ハラズ** ト云フ。

系 6.　球心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナル平面ハ球ト交ハリ,半徑ニ等シキモノハ切シ,半徑ヨリ大ナルモノハ交ハラズ。コノ逆モ亦眞ナリ。

45. 定義　球面上ノ一點ヲ通リ,コノ點ヲ通ル半徑ニ垂直ナル直線ヲ **切線**, ソノ點ヲ **切點** ト云ヒ,直線ト球トハ互ニ **切ス** ト云フ。

一點ガ球面上ニアルトキ,球ハコノ點ヲ **通ル** ト云フ。

問　題

98. 二定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハ一ツノ平面ナリ。

99. 一直線上ニアラザル三定點ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ。

100. 一圓周ヲ通ル球ノ中心ノ軌跡ハコノ圓ノ中心ニ於テソノ平面ニ垂直ナル直線ナリ。

101. 四面體ノ四頂點ヲ通ル球ハ常ニ唯一ツアリ。

コノ球ヲ四面體ノ **外接球** ト云フ。

102. 正四面體ノ一稜ノ長サ a ナルモノニ外接スル球ノ中心ハ高サヲ頂點ヨリ 3 ト 1 トノ比ニ内分スル點ニシテ,半徑ハ $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$ ニ等シ。

103. 球面上ノ一點ヲ通ル切線ノ軌跡ハソノ點ヲ切點トスル切面ナリ。

104. 球面上ノ一點ヲ通リ,切線ニアラザル直線ハ更ニ他ノ一點ヲ球面ト共有ス。

定義　球面ト直線トガ二點ヲ共有スルトキ,球ト直線ハ **相交ハル** ト云ヒ,一點ヲモ共有セザルトキハ **相交ハラズ** ト云フ。

105. 球面ト唯一點ヲ共有スル直線ハコノ點ニ於ケル一ツノ切線ナリ。

106. 球ノ一定切線ニ切スル大圓ハ唯一ツアリ,而シテコレニ切スル小圓ハ限リナクアリ。

107. 前問ニ於ケル大圓及ビ小圓ノ中心ノ軌跡如何。

108. 球外ノ一定點ヨリ,コノ球ニ引ケル切線

ノ切點ノ軌跡ハ一ツノ小圓ナリ,又切線ハ一ツノ直圓錐ノ側面ヲ作リ,定點ト切點トノ距離ハ一定ナリ。

定義　コノ距離ヲ定點ヨリノ切線ノ**長サ**ト云ヒ,一定點ヲ頂トシ前ノ小圓ヲ底トスル直圓錐ヲ球ノ**包圍圓錐**ト云フ。時トシテ一定點ヲ通ル凡ベテノ切線ノ軌跡ヲ**包圍圓錐面**ト云フコトアリ,コノ場合ニハ底ヲ考ヘズ。

109. 半徑rナル球ノ中心ヨリ距離aニアル點ヲ頂トスル包圍圓錐ノ底ノ半徑ハ$\frac{1}{a}r\sqrt{a^2-r^2}$,高サハ$\frac{1}{a}(a^2-r^2)$,斜高ハ$\sqrt{a^2-r^2}$ナリ。

110. **定義**　二ツノ球ノ中心ヲ通ル直線ヲ**中心線**ト云ヒ,中心間ノ距離ヲソノ**長サ**ト云フ。

二ツノ球面ガ二點ヲ共有スルトキハ又一ツノ圓ヲ共有ス,コノ圓ノ中心ハ中心線上ニアリテ,圓ノ平面ハ中心線ニ垂直ナリ。

定義　斯樣ナル二球ハ**相交ハル**ト云フ。

111. 二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ,

ソノ點ハ中心線上ニアリテ,兩球ハソノ點ニ於テ同一ノ切面ヲ有ス。

定義　斯樣ナル二球ハ**相切ス**ト云ヒ,ソノ共通ナル點ヲ**切點**ト云フ。

55. **定義**　平行ナル二截面ノ間ニアル球面ノ部分ヲ**球帶**ト云ヒ,二截面間ノ距離ヲ**高サ**ト云フ。

一截面ニヨリテ分タレタル球ノ二ツノ部分ノ各ヲ**球缺**,截面ノ截リ口ナル圓ヲ**底**,底ノ中心ニ於テコレニ垂直ナル直線ガ球缺內ニアル部分ヲ**高サ**ト云フ。

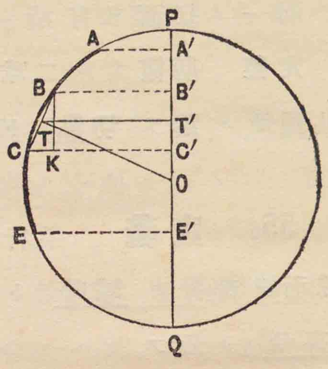
球缺ノ底ガ大圓ナルモノヲ**半球**ト云フ。

定理 46.　球帶ノ面積ハ大圓ノ周ト高サトノ相乘積ニ等シ。

證明　圓 O ノ直徑ヲ PQ トシ,ソノ一ツノ側ニアル弧ヲ AE トセヨ。PQ ヲ軸トシテ圓ヲ回轉スルトキハ弧 AE ハ一ツノ球帶ヲ生ズ。

弧 AE ヲ n 等分シ,ソノ一ツヲ弧 BC,O ヨリ弦

BC ニ引ケル垂線ノ足ヲT,又A,B,C,E,T ガPQ上ニ投ズル正射影ヲA′,B′,C′,E′,T′トセヨ。A′E′ハ考ヘタル球帶ノ高サトナル。



弦 BC ガ回轉シテ生ゼシ旋轉面ハ一ツノ直圓錐臺ノ側面トナルガ故ニ,ソノ面積ヲSニテ表ハサバ

$$S=\pi(BB'+CC')\cdot BC$$ [94 頁定理 42]

T ハ BC ノ中點ナルヲ以テ

$$S=2\pi\cdot TT'\cdot BC$$

B ヨリ CC′ ニ下セル垂線ノ足ヲKトセヨ,

△BCK, △TOT′ ハ等角ナリ

$$\therefore\quad \frac{BC}{BK}=\frac{TO}{TT'}$$

$$\therefore\quad BC\cdot TT'=BK\cdot TO=B'C'\cdot TO$$

$$\therefore\quad S=2\pi\cdot OT\cdot B'C'$$

弧 AE ヲ n 等分シタル各分點ヲ順次ニ弦ニテ結ビ,Oヨリソノ弦ニ垂線ヲ下ストキハ長サ何レモ OT ニ等シ,故ニ屈折線 AB……E ガ回轉シテ生ジタル n 個ノ曲面ノ面積ノ和ハ

$$2\pi\cdot OT\cdot A'E'$$

トナル。

n ガ增大スルニ從ヒテ OT ハ圓ノ半徑ニ漸次近ヅキ,上ノ式ハ球帶ノ面積ニ漸次近ヅク。斯ノ如クニシテ球帶ノ面積ハ終ニ球ノ大圓ノ周ト高サトノ積ニヨリテ表ハサル。

系 1. 球ノ半徑ヲ r,球帶ノ高サヲ h ニテ表ハストキハ

$$\textbf{球帶ノ面積} = 2\pi rh。$$

球欿ハ一ツノ球帶ト考フルコトヲ得,故ニ

系 2. 球缺ノ曲面積ハ大圓ノ周ト高サトノ相乘積ニ等シ。

系 3. 半徑 r ナル球ノ表面積 S ハ

$$S=4\pi r^2$$

ナリ。

56. 定理47. 球ノ體積ハ其ノ面積ト半徑トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

證明 球面上ニ頂點ヲ有スル多面體ヲ作リ球ノ中心ト各頂點トヲ結ブトキハ多面體ノ體積ハ角錐ノ積體ニ分タル。サテ多面體ノ頂點ノ數ヲ漸次增大スルト同時ニソノ各面ノ大サヲ漸次減少セシメ,ソノ各面ノ和ヲ球面積ニ近ヅカシムルトキハ,コノ多面體ノ體積ハ球ノ體積ニ近ヅクモノト考フルコトヲ得。コノ際ニ球心ヨリ各面ニ至ル垂線ノ長サハ漸次球ノ半徑ニ近ヅク。卽チ前ニ述ベタル角錐ノ高サハ何レモ球ノ半徑ニ近ヅキ,角錐ノ底面ノ和ハ球面ニ漸次近ヅク。カクノ如クニシテ球ノ體積ハ高サ球ノ半徑ニ等シク,底ハ球ノ表面積ニ等シキ一ツノ角錐ノ體積ト同一ナルモノナリ,卽チ

$$\text{球ノ體積}=\frac{1}{3}\text{表面積}\times\text{半徑}.$$

系 半徑 r ナル球ノ體積 V ハ

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

ナリ。

57. 定義 球心ヲ通ル直線ニヨリテ限ラルヽ二ツノ半平面ハ球面ヲ二ツノ部分ニ分ツ,ソノ各ヲ**月形**(ツキガタ)ト云フ。ソノ一ツヲ考フルトキ,コレヲ內部ニ有スル前ノ半平面ガ作ル二面角ヲ月形ノ**角**ト云フ。

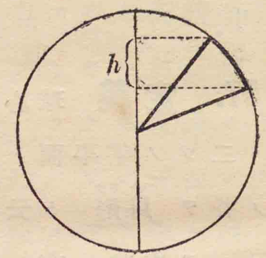
定理48. 月形ノ角ト四直角トノ比ハ月形ノ面積ト球ノ表面積トノ比ニ等シ。

58. 定義 圓ノ扇形ガソノ弧ト交ハラザル直徑ヲ軸トシテ回轉シタルトキ生ズル立體ヲ**球扇**ト云ヒ,扇形ノ弧ガ畫ク球帶ヲ球扇ノ**底**ト云フ。

定理49. 球扇ノ體積ハ底面積ト球ノ半徑トノ積ノ三分ノ一ニ等シ。

［定理47ノ證明ノ如クニ考ヘヨ。］

系　半徑rナル球ノ球帶ノ高サhナルトキハ,コノ球帶ヲ底トスル球扇ノ體積Vハ



$$V=\frac{1}{3}(2\pi r.h)r$$

$$=\frac{2}{3}\pi r^2h$$

ナリ。

59.　定理50.　半徑rナル球ノ球缺ノ高サh,底ノ半徑aナルトキハソノ體積vハ

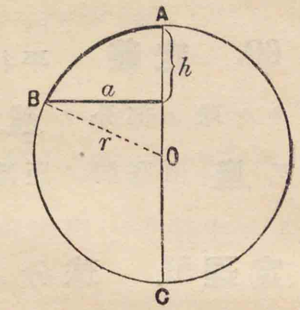
$$V=\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3$$

$$V=\frac{\pi a^2h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}$$

ナリ。

證明　$h<r$ナルトキハ球缺ノ體積ハ,ソノ曲

面ヲ底トスル球扇ノ體積ヨリ,コノ球缺ノ底ヲ底トシ,球心ヨリコレニ下セル垂線ヲ高サトスル直圓錐ノ體積ヲ減ジタルモノニ等シ,卽チ



$$V=\frac{3}{2}\pi r^2h-\frac{1}{3}\pi a^2(r-h),$$

然ルニ△ABCハ直角三角形ナルガ故ニ

$$a^2=h(2r-h) \qquad (1)$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{3}\pi h[2r^2-(2r-h)(r-h)]$$

$$=\frac{1}{3}\pi h(3rh-h^2)$$

$$=\pi rh^2-\frac{1}{3}\pi h^3,$$

又(1)ヨリ,$rh=\frac{1}{2}(a^2+h^2)$

$$V=\frac{1}{2}\pi a^2h+\frac{1}{6}\pi h^3。$$

$h>r$ナルトキハ同様ニシテ

$$V=\frac{2}{3}\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi a^2(h-r)$$

トナルヲ以テ前ト同一ノ公式ヲ得。

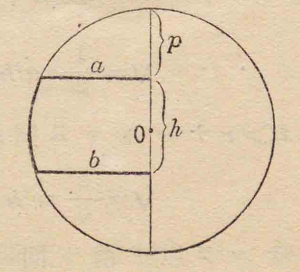
60. 定義　平行ナル二截面ノ間ニ夾マレタル球ノ部分ヲ**球分**ト云ヒ,ソノ二ツノ截口ヲ**底**,兩底間ノ距離ヲ**高サ**ト云フ。

定理51.　球分ノ兩底ノ半徑ガ a, b ニシテ高サ h ナルトキハ,ソノ體積 V ハ

$$V=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)h+\frac{1}{6}\pi h^3$$

ナリ。

證明　球分ノ底ノ中心ヲ結ブ線分ハ高サ h ニ等シ,コレヲ一方ニ延長シテ球面ト交ハラシメ,ソノ延長部ヲ p トセヨ。圖ニ於テ p ハ半徑 a ナル底ノ中心ヲ越エテ延長シタル部分トセヨ。然ルトキハ部分ノ體積ハ高サ $(h+p)$ 及ビ p ナル二ツノ球缺ノ體積ノ差ナリ, 因リテ



$$V=\frac{1}{2}\pi b^2(h+p)+\frac{1}{6}\pi(h+p)^3$$
$$=\frac{1}{2}\pi a^2p-\frac{1}{6}\pi p^3$$
$$=\frac{1}{2}\pi b^2h+\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi p(b^2-a^2+h^2+hp).$$

球ノ半徑ヲ r トセバ,前定理ノ證明中ニアル(1)ト同樣ニ

$$b^2-a^2=(p+h)(2r-p-h)-p(2r-p)$$
$$=2rh-h^2-2ph$$
$$\therefore\ b^2-a^2+h^2+hp=h(2r-p)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$又\quad a^2=p(2r-p)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1),(2)ニヨリ V ノ右邊ノ最後ノ項ハ

$$\frac{1}{2}\pi a^2h$$

トナル,故ニ

$$V=\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)h+\frac{1}{6}\pi h^3.$$

問　題

112.　地球ヲ一ツノ球ト見做ストキハ,南緯30°ト北緯30°トノ間ニアル面積ハ地球全面積ノ半バニ等シ。

113. 丁度球ヲ容ルヽニ足ル立方形ノ箱ノ體積トコノ球ノ體積トノ比ハ $6:\pi$ ナリ。

114. 球ト同一ノ體積ヲ有スル立方體ノ全表面積ハコノ面積ノ約 1.24 倍ナリ。

115. 地球ノ大圓ノ周ハ殆ンド 40000 粁ナリ表面積及ビ體積如何。$\pi=3.1416$ トシテ計算セヨ。　答 509×10^6 平方粁, 108×10^{10} 立方粁。

116. 矩形ABCDノ邊AB,CDヲ夫々直徑トシテ外側ニ半圓ヲ畫キ,コノ全圖形ヲAB,CDノ中點ヲ通ル直線ノ周リニ回轉セシムルトキ生ズル立體ノ體積ハ

$$\frac{1}{12}\pi\, AB^2(2AB+3AD)。$$

117. 半徑 r ナル球ノ中心ヨリノ距離ガ d ニ等シキ球外ノ一點ヨリコノ球ノ表面ヲ見ルトキ,ソノ見得ル部分ト球ノ全面積トノ比ハ

$$(d-r):2d$$

ナリ。

附　　錄

問　題　集

I　平面,直線,多面角

1. 平面M外ノ一定點ヨリM上ニアル任意ノ直線 a ニ垂線ヲ下シ,ソノ足ニ於テM上ニ a ニ垂線ヲ作ルトキハ又他ノ一定點ヲ通ル。

2. 相交ル二定平面M, Nノ各ト相等シキ傾角ヲナス直線ハM, Nノナス角ヲ二等分スル二ツノ平面ノ何レカニ平行ナリ。

3. 平面M上ニアル一圓周ノ任意ノ一點ト,M外ノ一定點トヲ結ブ線分ノ中點ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ。

4. 平面M上ノ二點A,Bニ於テコレニ垂直ナル二ツノ線分AA′, BB′アリ,M上ニ一點Pヲ取リテ $\angle A'PA=\angle B'PB$ ナラシムルトキ,Pノ軌跡ハ圓ナリ。

5. 直線ABニ於テ相交ハル二平面M,Nノ各ノ上ニアラザル一點EヨリM, Nニ夫々垂線EC, EDヲ下シ,ソノ足ヲC,Dトス,DヨリMニ下セル垂線ノ足FトCトヲ結ブ直線ハABニ垂直ナリ。

6. 一定點ヲ通リ二定平面ノ各ト垂直ナル平面ヲ

作レ。

7. 平面M外ノ二點A,BヨリMニ垂線AE,BFヲ下シ,ソノ足ヲE,Fトス,ABニ垂直ナル平面トMトノ交線ハEFニ垂直ナリ。

8. 二平面M,Nノ一ツM上ニアル一點Aニ於テMニ垂直ナル直線ガNト交ハル點ヲBトシ,AヨリNニ下セル垂線ノ足ヲCトス,BCハM,Nノ交線ニ垂直ナリ。

9. Oニ於テ相交ハル三直線ヲAA′, BB′, CC′トス, OA=OA′,OB=OB′,OC=OC′ナルトキハ平面ABCハ平面A′B′C′ニ平行ナリ。

10. 前問ニ於テOA:OA′=OB:OB′=OC:OC′ナルトキ,平面ABC,A′B′C′ハ互ニ平行ス。

11. 一定平面ニ平行ナル任意ノ平面ガ捩レノ位置ニアル二定直線a,bノ各ト交ハル點ヲA,Bトス,線分ABヲAヨリ定比ニ內分スル點ノ軌跡如何。

12. 相交ハレル二平面M,Nノ上ニ夫々定點A,Bアリ,M,Nノ交線上ニ點Pヲ取リAP+PBヲ最短ナラシメヨ。

13. 平面Mノ一方ノ側ニ二定點A,Bアリ,M上ニ點Pヲ取リAP+PBヲ最小ナラシメヨ。

14. 平面Mノ兩側ニ夫々定點A,Bアリ,M上ニ一點

Pヲ取リPA,PBノ差ヲ最大ナラシメヨ。

15. 圓Oノ中心ヲ通リ,コノ圓ノ平面ニ垂直ナル直線ヲgトシ,一定點ヲAトス。g上ニ點Pヲ取リ,Pヨリ圓Oノ周上ノ一點Bニ至ル距離PBトPAトノ和ヲ最小ナラシメヨ。

16. 前問ニ於テPBトPAトノ差ヲ最大ナラシメヨ。

17. 一直線ト二定點トガ與ヘラレタルトキ,コノ直線上ニ一點Pヲ取リ,Pヨリ二定點ニ至ル距離ノ和ヲ最小ナラシメヨ。 [附錄問題15利用]

18. 二平面M,Nノ交線ヲg,M上ノ一定點ヲAトス,g上ニ點Pヲ取リAPトNトガナス傾角ヲ最大ナラシメヨ。

19. 相交ハル二平面ノ各ヨリノ距離ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡如何。

20. 定長ノ線分ノ兩端ガ垂直ニシテ且ツ捩レノ位置ニアル二定直線ノ各ノ上ニ動クトキ,ソノ中點ノ軌跡如何。

21. Oニ於テ相交ハル二直線ノ各ニ一點Pヨリ垂線ヲ下シソノ足ヲA,Bトス,OA+OBガ不易ナルトキPノ軌跡如何。

22. 互ニ捩レノ位置ニアル三直線a,b,cノ各トP,Q,Rニ於テ夫々交ハリ且ツPQ:QRガ定比ニ等シキ直

線ヲ作レ。

[31頁問題23利用]

23. 一定ノ平面ニ平行ナル三ツノ直線ガ二ツ宛捩レノ位置ニアルトキ,コノ三直線ト夫々交ハル直線ハ又他ノ一定ノ平面ニ平行ナリ。

24. 捩レ四邊形ABCDノ邊AB,BC,CD,DAト任意ノ一平面トノ交點ヲ夫々P,Q,R,Sトスルトキハ

$$\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{DR}\cdot\frac{DS}{AS}=1。$$

25. 捩レ四邊形ABCDノ一組ノ對邊AB,CDノ中點ヲ通ル平面トBC,ADトノ交點ヲQ,SトスルトキハBQ:QC＝AS:SD。

26. 二定直線ノ各ノ上ニ夫々兩端ヲ有シ,一定ノ平面ニ平行ニシテ且ツ定長ニ等シキ線分ノ位置ヲ決定セヨ。

27. 直線aノ上ニアル二點A,Bヨリ他ノ直線bニ垂線AP,BQヲ下シソノ足ヲP,Qトス,AP＝BQナルトキハABノ中點トPQノ中點トヲ結ブ直線ハa,bノ各ニ垂直ナリ。

28. 二定直線a,bノa上ノ一點ヨリbニ垂線ヲ下シソノ長サヲ定長ナラシメヨ。

29. 三面角ノ三稜角ノ二等分面ハ同一ノ直線ヲ通

ル。

30. 三面角ノ三ツノ面又ハソノ延長ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ頂點ヲ通ル四ツノ直線ナリ。

31. 三面角A(BCD)ノ各稜ノ上ニB,C,Dヲ取リAB＝AC＝ADナラシムルトキハ,ソノ各ハ△BCDノ外接圓ノ半徑ヨリ大ナリ。

32. 三面角ノ各面角ノ二等分線ヲ通リ,ソノ面ニ垂直ナル三ツノ平面ハ同一ノ直線ヲ通ル。

33. 三面角ノ各稜又ハソノ延長ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ハ頂點ヲ通ル四ツノ直線ナリ。

34. 三面角O(ABC)ノ面角∠AOB,∠BOC,∠COAノ二等分線ヲ夫々OC′,OA′,OB′トス,三ツノ平面AOA′,BOB′,COC′ハ同一ノ直線ヲ通ル。

35. 三面角ノ二ツノ面角ガ同時ニ直角ナラザルトキ,各稜ヲ含ミ對面ニ垂直ナル三平面ハ同一ノ直線ヲ通ル。[先ヅ二ツノ平面ヲ作リ,ソノ交線ニ垂直ナル平面ニテ三面角ヲ截リ,ソノ截口ヲ利用セヨ。]

36. 三角形ABCノBCノ中點Dヲ通リ,三角形ノ面ニ垂直ナル直線上ニ一點Vヲ取ルトキハ

$$2\angle AVD<\angle AVB+\angle AVC.$$

37. **定義**　三面角O(ABC)ノ各稜OA,OB,OCヲ頂點Oヲ越エテ夫々延長シ,コレヲ夫々OA′,OB′,OC′

トス。　三面角 O(A′B′C′) 又ハコレト合同ナル三面角ト三面角 O(ABC) トハ互ニ對稱ナリト云フ。

互ニ對稱ナル二ツノ三面角ニ於テハ一方ノ三ツノ面角ハ夫々他ノ方ノ三ツノ面角ニ等シク,兩方ノ相等シキ面角ニ對スル稜角ハ相等シ。

38. 一ツノ三面角ノ一稜角ガ他ノ一ツノ三面角ノ一稜角ニ等シク,コレ等ノ稜ニ於テ夫々相交ハル一方ノ二ツノ面角ガ他ノ方ノ二ツノ面角ニ夫々相等シキトキハ,兩三面角ハ合同又ハ對稱ナリ。

39. 互ニ對稱ナル二ツノ三面角ノ一ツガ相等シキ二ツノ面角ヲ有スルトキハ兩三面角ハ合同ナリ。

40. 一ツノ三面角ノ三ツノ面角ガ他ノ一ツノ三面角ノ三ツノ面角ニ夫々相等シキトキハ兩形ハ合同ナルカ又ハ對稱ナリ。

[項點 O,O′ ヨリ相應スル稜 OA, O′A′ 上ニ等長ノ線分ヲ夫々取リ,ソノ端ニ於テ OA, O′A′ ニ垂直ナル平面ヲ作リ問題38ニ歸セヨ。]

41. 二ツノ三面角ニ於テ,一方ノ一ツノ面角ハ他ノ方ノ一ツノ面角ニ等シク,コノ面角ヲ作ル一方ノ二稜ノ稜角ガ夫々他ノコレニ相應スル稜角ニ相等シキトキハ兩形ハ合同ナルカ又ハ對稱ナリ。[一ツノ三面角ノ各稜ヲ延長シテ對稱三面角ヲ作リ,第二ノ三面角ヲ

コノ何レカノ上ニ重ネヨ。]

42. 四面角ヲ一平面ニテ截リ,ソノ截口ヲ平行四邊形ナラシメヨ。

43. O ニ於テ互ニ直角ニ交ハル三直線 OA, OB, OC ノ各ノ上ニ點 D, E, F ヲ夫々取ルトキハ $\triangle DEF$ ハ鋭角三角形ナリ。

44. 前問ニ於テ O ヨリ平面 DEF ニ下セル垂線ノ足ハ $\triangle DEF$ ノ垂心ナリ。[D ヨリ EF ニ下セル垂線ノ足ヲ T トセヨ, $EF \perp DT$, $EF \perp OD$, $\therefore EF \perp$ 平面 ODT, 故ニ兩平面 DEF, ODT ハ互ニ垂直ナリ,從ヒテ O ヨリ DEF ニ下セル垂線ノ足ハ直線 DT 上ニアリ。]

45. 問題43ニ於テ $\triangle DEF$ ヲ與ヘラレタル鋭角三角形ナラシメヨ。[計算ニヨリテ OD, OE, OF ノ長サヲ知ルカ又ハ前問ヲ利用セヨ。]

II 多面體

46. 四面體 ABCD ニ於テ, $\triangle BCD$ ノ内部ニ一點 H ヲ取ルトキハ

$$\angle BAC + \angle BAD > \angle HAC + \angle HAD,$$

$$\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB > \angle HAB + \angle HAC + \angle HAD.$$

47. 四面體 ABCD ノ內部ニ一點 P ヲ取ルトキハ,

$\angle APB+\angle BPC+\angle CPA>\angle ADB+\angle BDC+\angle CDA$ 又

AP, BP, CP, DP ガ夫々對邊面ト交ハル點ヲ A′,B′,C′,D′ トスルトキハ

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1.$$

[P 及ビ各頂點ヨリ對面ニ垂線ヲ下セ。]

48. 四面體ノ各面ガ互ニ合同ナルトキハ凡ベテ鋭角三角形ナリ。[對稜相等シキコトヲ證明セヨ。]

49. 四面體 ABCD ノ三頂點 B, C, D ノ各ニ集マル三ツノ面角ノ和ガ夫々二直角ニ等シキトキハ四ツノ面ハ互ニ合同ナル三角形ナリ。[BC ヲ軸トシテ△BAC ヲ回ハシ, BCD ノ平面上ニ來ラシメ A ガ取ル位置ヲ BC ニ對シテ D ト反對ノ側ニアル樣ニセヨ, △CAD, △BAD ニ就イテモ同樣ニセヨ。]

50. 四面體ノ各稜ノ中點ヲ通リ,コレニ垂直ナル六ツノ面ハ同一ノ點 O ヲ通ル,而シテ O ハ四頂點ヨリ等距離ニアリ。

51. 四面體ノ各稜角(四面體ノ內部ニ向フ稜角)ヲ二等分スル六ツノ平面ハ同一ノ點ヲ通ル,コノ點ハ四ツノ面ヨリ等距離ニアリ。

52. 四面體ノ各面ノ重心ト,ソノ面ニ對スル頂點トヲ結ブ四ツノ線分ハ同一ノ點ヲ通リ各ハ他ヲ 3 ト 1 トノ比ニ分ツ。

コノ點ヲ四面體ノ**重心**ト云フ。

53. 四面體ノ一組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ線分ノ中點ハ四面體ノ重心ナリ。

54. 四面體ノ內部ニ一點ヲ取リ,コレト四ツノ頂點トヲ結ビテ得ル四ツノ四面體ノ各ノ體積ヲ同一ナラシメヨ。

55. 三面角ノ內部ニアル一定點 P ヲ通ル平面ニテ三ツノ稜ヲ點 A, B, C ニテ截リ P ヲ △ABC ノ重心ナラシメヨ。

56. 前問ニ於テ P ヲ通ラザル適當ナル平面ニテ三面角ヲ截リテ得タル四面體ノ重心ヲ P ナラシメヨ。

57. 四面體ノ一ツノ底面ニ平行ナル截リ口ノ重心ノ軌跡如何。

58. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ブ三ツノ線分ノ中,二ツガ直交スルトキハ殘リノ線分ガ交ハル對稜ハ等長ナリ,

59. 四面體ノ一組ノ對稜ガ等長ナルトキハコノ各ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ノ周ハ不變ナリ。

60. 四面體ノ一組ノ對稜ガ垂直ナルトキ,コノ二稜ニ平行ナル平面ニテノ截口ヲ正方形ナラシメヨ。

61. 四面體ヲ一組ノ對稜ノ各ニ平行ナル平面ニテ截リ,ソノ截リ口ノ面積ヲ最大ナラシメヨ。

62. 四面體 ABCD ニ於テ ∠BAC ハ直角, ∠BAD ト ∠CAD トノ和ハ二直角ニ等シク,且ツ AB=AC ナルトキハ $BC^2+CD^2+DB^2=2(AB^2+AC^2+AD^2)$。

63. 四面體 ABCD ノ底 BCD ハ等邊三角形ニシテ且ツ ∠BAC, ∠CAD, ∠DAB ガ何レモ直角ナルトキハ

(1) AB=AC=AD,

(2) 高サ AH ノ二乘ハ AB ノ二乘ノ三分ノ一ニ等シ。

(3) H ヨリ他ノ面ニ至ル距離ノ三倍ハ AB ニ等シ。

64. 四面體ノ各稜ノ二乘ノ和ハ各組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三線分ノ二乘ノ和ノ四倍ニ等シ。

65. 正四面體ノ高サハソノ足ヨリ他ノ面ニ下セル垂線ノ三倍ニ等シ。

66. 四面體 ABCD ノ面 ABC, DBC ガ作ル稜角ヲ二等分スル平面ト稜 AD トノ交點ヲ P トス,

$$AP:PD=\triangle ABC:\triangle BCD。$$

67. 四面體ノ四ツノ頂點ヨリノ距離ノ二乘ノ和ガ最小ナル點ノ位置ヲ索メヨ。

68. 四面體 ABCD ノ底 BCD ニ平行ナル平面ガ AB, AC, AD ト交ハル點ヲ B′,C′,D′ トシ, C′D′, D′B′, B′C′ ノ中點ヲ夫々 P, Q, R トスルトキハ, BP, CQ, DR ハ同一ノ點ヲ通ル,

69. 立方體ノ一ツノ對角線ヲ AA′ トス,コノ對角線ト交ハラザル他ノ六ツノ稜ノ中點ハ一ツノ平面正六角形ノ頂點トナル。

70. 平行六面體ノ一ツノ面ヲ AB′CD′ トシ A,B′,C,D′ ヲ通ル他ノ稜ノ端ヲ夫々 C′,D,A′,B トス:

(1) 四面體 ABCD ノ一組ノ對稜ノ中點ヲ結ブ線分ハ平行六面體ノ三ツノ對角線ノ交點ヲ通リ,ソノ長サハ夫々平行六面體ノ稜ノ長ニ等シ。

(2) ABCD ノ各組ノ對稜ノ中點ヲ夫々結ブ三ツノ直線ガ互ニ垂直ナルトキ,平行六面體ハ直六面體ナリ。

(3) ABCD ノ三組ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキ,平行六面體ノ各面ハ菱形ナリ。

(4) 平行六面體ハ四面體 ABCD ノ各面ニヨリテ五ツノ部分ニ分レ,ソノ中四ツノ各ノ體積ハ平行六面體ノ體積ノ六分ノ一ニ等シ。

71. 四面體ノ二組ノ對稜ガ夫々垂直ナルトキハ殘リノ一組ノ對稜モ亦垂直ナリ。

定義 斯樣ナル四面體ヲ **直稜四面體** ト云フ。

72. 四面體 ABCD ハ

$$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

ナルトキ直稜四面體ナリ。

73. 直稜四面體ノ四ツノ高サハ同一ノ點ヲ通ル。

74. 四面體ノ四ツノ高サガ同一ノ點ヲ通ルモノハ直稜四面體ナリ。

75. 底面ガ平行四邊形ナル角錐ヲ底ノ一稜ヲ含ム平面ニテ截リ,ソノ體積ヲ二等分セヨ。

76. 四面體ノ一組ノ對稜ノ中點ヲ通ル平面ハソノ體積ヲ二等分ス。［附錄問題 25 利用］

77. **正多面體**　各面ガ合同ナル正多角形ニシテ,且ツ各稜角ガ互ニ相等シキ多面體ヲ <u>正多面體</u> ト云フ。

凸正多面體ノ各頂點ニ於ケル多面角ハ互ニ合同ナリ。

凸正多面體ノ一頂點ニ集マル面ハ

(i)　三個ノ正三角形,

(ii)　四個ノ正三角形,

(iii)　五個ノ正三角形,

(iv)　三個ノ正四角形,

(v)　三個ノ正五角形,

ノ五ツノ場合ヨリ多カラズ。［定理 24］

コノ五ツノ場合ニ相應シ,各一ツノ凸正多面體ハ存在スルモノニシテ,ソノ名稱ハ

(i)　ノ場合ニ　正四面體

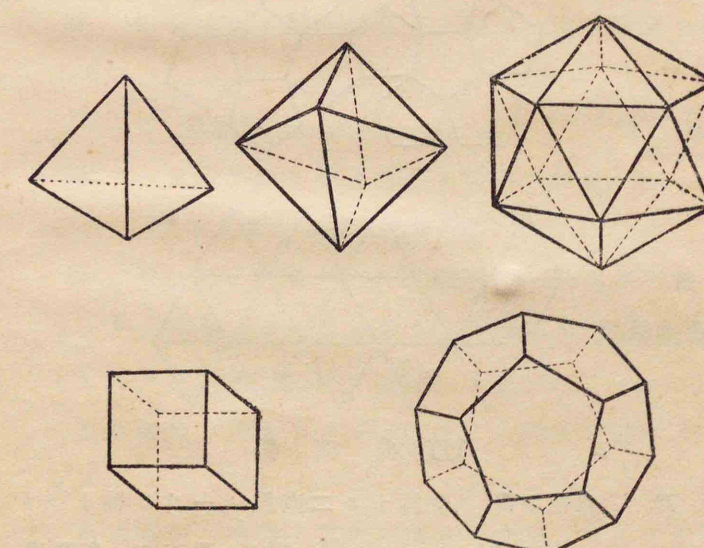
(ii)　ノ場合ニ　正八面體

(iii)　ノ場合ニ　正二十面體

(iv)　ノ場合ニ　立方體(正六面體)

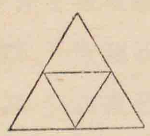
(v)　ノ場合ニ　正十二面體

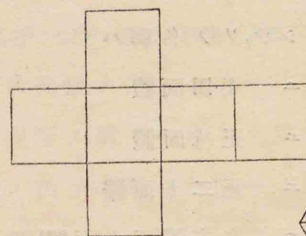
ト云フ。

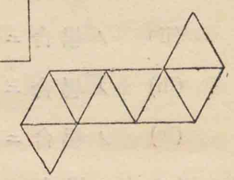


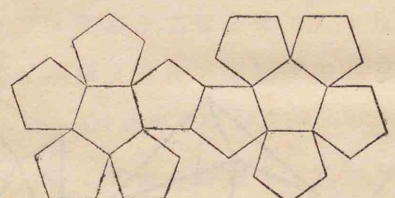
厚紙ニ次ノ圖ヲ畫キテ,不用ノ部分ヲ截取リ然ル後ニ各線ヲ折リ目トシテ折リ,五種ノ正多面體ヲ作リテ

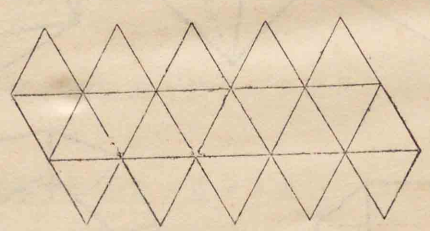
見ヨ。











III 曲面體

78. **直圓壔面** 平行ナル二直線ノ一ツヲ軸トシ、他ノモノガ囘轉シタルトキ生ジタル曲面ヲ **直圓壔面** ト云ヒ,前ノ直線ヲ又コノ曲面ノ **軸** ト云フ。

直圓壔面上ノ一點ヲ通リ軸ニ平行ナル直線ハ全ク

ソノ面上ニアリ。

斯様ナル直線ヲ **母線** ト云フ。

79. 直圓壔面上ノ一點 A ヨリ軸ニ垂線 AB ヲ引キ, A ヲ通リ AB ニ垂直ナル平面ヲ作ルトキハ唯一ツノ母線ヲ含ム。

斯様ナル平面ヲ **切面** ト云フ。切面ハ一ツノ母線ニ沿ヒテ直圓壔面ニ切スト云フ。切點ハコノ母線上ノ凡テノ點ナリト考フ。

80. 直圓壔面ノ軸ニ垂直ナル截面ハ皆合同ナル圓ナリ。

コレヲ **直截面** ト云フ。

81. 一定點ヲ通リ直圓壔面ニ切面ヲ作レ。

［定點ヲ通ル直截面ヲ作レ。］

82. O ニ於テ相交ハル二直線 a,b ノ一ツ a ヲ軸トシテ b ガ囘轉シタルトキ,生ジタル曲面ヲ **直圓錐面** ト云ヒ, a ヲソノ **軸**, O ヲ **頂點** ト云フ。

直圓錐面ハ頂點ニヨリテ二ツノ合同ナル部分ニ分タル。

直圓錐面ハ空間ヲ三ツノ部分ニ分ツ。ソノ中軸ヲ含ムモノ二ツアリ

コノ部分ヲ **內部** ト云フ。

直圓錐面上ノ一點ト頂點トヲ結ブ直線ハ全ク面上ニ

アリ。

斯樣ナル直線ヲ **母線** ト云フ。

83. 軸ヲ含ム平面ト直圓錐面トノ交線ハ二ツノ母線ナリ,而シテコレ等ノ母線ガ互ニナス角ノ中,ソノ內部ガ直圓錐面ノ內部ニアルモノノ大サハ一定ナリ。

コノ角ヲ直圓錐面ノ **頂角** ト云フ。

84. 頂角相等シキ二ツノ直圓錐面ハ合同ナリ。

85. 直圓錐面ヲ軸ニ垂直ニシテ,頂點ヲ通ラザル平面ニテ截リタル截口ハ圓ナリ。

コレヲ **直截面** ト云フ。

86. 直圓錐面ノ一ツノ直截面ノ切線ト,頂點トヲ含ム平面ハ唯一ツノ母線ヲ含ム。

斯樣ナル平面ヲ **切面**, ト云ヒ,切面ハ一ツノ母線ニ沿ヒテ直圓錐面ニ切ストト云フ。切點ハコノ母線上ノ凡テノ點ナリト考フ。

87. 一定點ヲ通リ,直圓錐面ニ切面ヲ作レ。

88. 與ヘラレタル三面角ノ各稜ヲ通ル直圓錐面ヲ作レ。〔軸ノ位置ヲ定ムルダケニテヨロシ。〕

コレヲ三面角ノ **外接直圓錐面** ト云フ。

89. 一定ノ三面角ノ各面ニ夫々切スル直圓錐面ヲ作レ。

コレラノ中,面ノ延長ト切セザルモノヲ三面角ノ **內**

切直圓錐面 ト云フ。

90. 球ノ一ツノ大圓ノ周上ノ各點ニ於テコノ圓ノ平面ニ垂直ナル直線ハ球ニ切ス,而シテソノ軌跡ハ一ツノ直圓壔面ナリ,且ツコノ直圓壔面ノ一切面ハ前ノ大圓周上ノ一點ニ於テ球面ニ切ス。

斯樣ナル直圓壔面ヲ球ノ **包圍直圓壔面** ト云ヒ,コノ直圓壔面トソノ球ニ切スル直截面トガ作ル直圓壔ヲ球ノ **外切直圓壔** ト云フ。

91. 球ノ體積ハソノ外切直圓壔ノ體積ノ三分ノ二ナリ。

92. 球ノ表面積ハソノ外切直圓壔ノ全表面積ノ三分ノ二ナリ。

93. 球ノ包圍直圓錐面〔104頁〕ト,ソノ球ニ切スル直截面トハ二ツノ直圓錐ヲ作ル,ソノ中一ツハ球ヲ內部ニ有ス。コノ場合ニ球ハ直圓錐ニ內切シ,直圓錐ハ球ニ外切スト云フ。

球ノ體積ヲ V, ソノ表面積ヲ S, コノ球ノ外切直圓錐ノ體積ヲ V', ソノ全表面積ヲ S' トスルトキハ

$$V:V'=S:S'.$$

94. 一稜ノ長サ a ナル正四面體ノ各面ニ切スル球ノ半徑ノ大サ如何。

〔但シ面ノ延長部ニ切點ヲ有セザルモノ〕

コノ球ヲ内切球ト云フ。

95. 球面上ニ各頂點ヲ有スル平行六面體ハ直六面體ナリ。[面ト球トノ交ハリヲ考ヘヨ。]

96. 三角形 ABC ガ一邊 CA ヲ軸トシテ回轉シタルトキ生ズル立體ノ體積ハ線分 AB ガ畫ク曲面積ト C ヨリ AB ニ下セル垂線トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

97. 三角形 ABC ガ C ヲ通リ, AB ニ平行又ハ AB ノ延長ト交ハル直線ヲ軸トシテ回轉シ,生ジタル立體ノ體積ハ線分 AB ガ畫ク曲面積ト C ヨリ AB ニ下セル垂線トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

98. 前二問ニ於ケル回轉體ノ體積ハ三角形 ABC ノ重心ガ回轉ノ際畫ク圓周ト三角形 ABC ノ面積トノ相乘積ニ等シ。

[重心ヨリ回轉軸ニ下セル垂線ノ三倍ハ A,B,C ヨリ下セル垂線ノ和ニ等シキコトヲ利用セヨ。]

99. 三角形 ABC ガ全クソノ外部ニアル一直線 a ヲ軸トシテ回轉シタルトキ生ゼシ立體ノ體積ハコノ三角形ノ重心ガ回轉ノ際畫ク圓周ト三角形ノ面積トノ相乘積ニ等シ。

[A,B,C ヨリ a ニ垂線ヲ下シテ直圓錐臺ノ體積ノ公式ヲ應用シ,同時ニ三角形ノ面積ヲ梯形ノ面積ニテ表ハシ前問ノ註ヲ利用セヨ。]

100. 捩レ四邊形ノ四邊又ハソノ延長ガ一ツノ球ニ切スルトキハソノ四ツノ切點ハ同一ノ平面上ニアリ。

[附錄問題24ノ逆ヲ利用。]

101. 同一ノ頂點ヲ有スル二ツノ直圓錐面ノ交線ナル母線ノ位置ヲ決定セヨ。[一般ニ四ツアリ,頂點ヲ中心トシテ一ツノ任意ノ球ヲ作レ。]

102. 一定點ヲ通リ二定球ノ各ニ切スル共通切線ヲ作ル。[前問利用。]

103. 一定點 A ヲ通ル任意ノ直線ト一定ノ球面トノ交點ヲ P, Q トスルトキハ, AP. AQ ハ一定ニシテ, A ヨリ切線ヲ引キウルトキハソノ長サノ二乘ニ等シ。

104. 一定點 A ト A ヲ通ラザル一定平面上ノ任意ノ一點 P トヲ結ブ半直線 AP 上ニ點 Q ヲ取リ, AP·AQ ヲ一定ノ値ニ等シカラシメバ, Q ノ軌跡ハ A ヲ通ル一ツノ球面ナリ,而シテコノ球ノ中心ハ A ヲ通リ平面ニ垂直ナル直線上ニアリ。

105. 球面上ノ一定點 A ト球面上ノ任意ノ一點 Q トヲ通ル半直線 AQ 上ニ P ヲ取リ, AP·AQ ヲ一定値ナラシムルトキ, P ノ軌跡ハ球ノ A ヲ通ル直徑ニ垂直ナル平面ナリ。

106. 球 O ノ表面上ノ一定點ヲ A, 直線 AO ニ垂直ナル任意ノ平面ヲ M, 球ノ任意ノ小圓ヲ C トス。 A ト

圓 C 上ノ一點トヲ通ル直線ガ M ト交ハル點ノ軌跡ハ一ツノ圓ナリ。[前問利用。]

107. 三ツノ球面ハ一般ニ二點ヲ共有ス。

108. 球ノ中心ノ位置ト半徑トヲ決定スルトキ,球ハ作ラルヽモノトシテ,次ノ作圖題ヲ解ケ:

(1) 三角形ノ三頂點ヲ通リ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(2) 二定點ヲ通リ,一定平面ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(3) 一定點ヲ通リ,二定平面ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(4) 三ツノ定平面ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

109. 同一平面上ノ同一點ニ於テ,コノ平面ニ切スル二球ハ相切スト云フ。

二球相切スルトキハソノ切點ハ中心線上ニアリ。

110. (1) 二定點ヲ通リ一定ノ球ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。[定球ノ中心ハ既知ノモノトス。]

(2) 一定點ヲ通リ,二定球ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(3) 一定點ヲ通リ,一定平面ニ切シ,一定球ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(4) 二定平面ニ切シ,一定球ニ切シ,一定ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(5) 一定平面,二定球ニ切シ,定長ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

(6) 三定球ニ切シ,定長ノ半徑ヲ有スル球ヲ作レ。

111. (1) 定圓周及ビ一定點ヲ通ル球ヲ作レ。

(2) 三定點ヲ通リ,一定平面ニ切スル球ヲ作レ。

(3) 三定點ヲ通リ,一定球ニ切スル球ヲ作レ。

(4) 二定點ヲ通リ,二定平面ニ切スル球ヲ作レ。

(5) 一定點ヲ通リ,三定平面ニ切スル球ヲ作レ。

112. 二定球 O, O′ ノ各ニ切スル任意ノ球ノ切點ヲ結ブ直線ハ OO′ ト一般ニ交ハリ,ソノ交點ハ線分 OO′ ヲ球 O, O′ ノ半徑ノ比ニOヨリ外分又ハ内分スル點ナリ。[平面幾何附錄問題199參照。]

113. (1) 二定點ヲ通リ,二定球ニ切スル球ヲ作レ。

[前問,附錄問題103及平面幾何附錄問題198參照。]

(2) 一定點ヲ通リ,三定球ニ切スル球ヲ作レ。

(4) 四定球ニ切スル球ヲ作レ。

114. (1) 二定點ヲ通リ一定平面,一定球ニ切スル球ヲ作レ。[平面幾何附錄問題196ノ方法ニ倣ヘ。]

(2) 一定點,二定球,一定平面ニ切スル球ヲ作レ。

(3) 三定球,一定平面ニ切スル球ヲ作レ。

115. **球面上ニアル圓ノ極** 球面上ニアル圓ノ中心ヲ通ル球ノ直徑ノ兩端ヲコノ圓ノ **極** ト云フ。

(1) 大圓又ハ小圓ノ周上ノ任意ノ一點ハソノ一ツノ極ヨリノ距離不變ナリ。

(2) 兩脚器ヲ開キ,ソノ兩尖端間ノ距離ヲ a トス,コレヲ以テ一球面上ノ一點 P ヲ極トスル圓 K ヲ畫キ,ソノ周上ノ任意ノ三點ヲ取リテ A, B, C ト名ヅク。兩脚器ニテ AB, BC, CA ノ長サヲ計リ,一平面上ニ三角形 ABC ト合同ナルモノヲ作リ,ソノ外接圓ヲ畫クトキハ圓 K ト合同ナリ。コノ圓ノ半徑ヲ r トス。サテ一ツノ直角三角形ヲ作リ,ソノ一邊ヲ a ニ等シカラシメ,直角頂ヨリ斜邊ニ至ル垂線ノ長サヲ r ニ等シカラシムルトキハ,ソノ斜邊ハ前ノ球ノ直徑ニ等シ。

コノ方法ニヨリ一ツノ與ヘラレタル球體ノ半徑ヲ知ルコトヲ得ベシ。

[注意] 平行二平面ニテ球ヲ夾ミ,ソノ距離ニヨリテ球ノ直徑ヲ知ルコトヲ得ベシ。

(3) 球面上ニ於テ與ヘラレタル圓ノ極ノ位置ヲ決定セヨ。

(4) 球面上ノ二定點ヲ通ル大圓ヲ畫ケ。

(5) 球面上ノ三定點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

116. **大圓ノ交角** 球ノ二ツノ大圓ノ交點ノ一ツニ於テ,ソノ各ノ圓ニ引ケル切線ガ作ル角ヲ大圓ノ **交角** ト云ヒ,交角ノ大サ直角ナルトキハ兩大圓ハ互ニ **垂直ナリ** 又ハ **直角ニ交ハル** ト云フ。

(1) 球面上ノ一點 P ヲ通ル二ツノ大圓ノ交角ノ一ツハ,兩大圓ノ平面ガ作ル二面角ノ一ツニ等シ。

(2) 球面上ノ一定點ヲ通リ,且ツ一定ノ大圓ニ直交スル他ノ大圓ヲ畫ケ。

117. **球面三角形** 球ノ中心 O ヲ頂點トスル三面角 O-ABC ノ稜ト球面トノ交點ヲ A, B, C トス。球面ガコノ三面角ニヨリテ截リ取ラルヽ部分ヲ **球面三角形 ABC** ト云ヒ,A, B, C ヲ球面三角形ノ **頂點**,三面角ノ各面ト球面トノ交線ヲ三角形ノ **邊**,三面角ノ各稜角ヲ球面三角形ノ **內角** ト云ヒ,平面三角形ノ如ク角 A, 角 B, 角 C ト稱ス。

(1) 球面三角形 ABC ノ邊ハ頂點ヲ二ツ宛結ブ大圓ノ弧ナリ。

(2) 角 A ノ大サハ A ニ於テ邊 AB, AC ニ引ケル切線ガ互ニ作ル角ニ等シ。

(3) 球面三角形ノ三ツノ內角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。 [56 頁問題 48]

(4) 三ツノ内角ガ各 90° ナルモノヲ作レ。

(5) 球面三角形ノ各角ガ 90° ナルトキハ各邊ノ長サハ大圓ノ周ノ四分ノ一ニ等シ。

118. 球面三角形ノ一ツノ頂點ヲ通ル大圓ヲ畫クトキ,頂點ニ於テコノ大圓ニ引ケル切線ガ同一ノ頂點ニ於テ二邊ニ引ケル切線ノナス角ヲ二等分スルトキハコノ大圓ヲソノ頂點ニ於ケル角ノ **二等分線** ト云フ。

一頂點ヲ通ル大圓ガ對邊ト直交スルトキハ球面三角形ノ **垂線** ト云ヒ,一頂點ト對邊ノ中點ヲ通ル大圓ヲ球面三角形ノ **中線** ト云フ。

球面三角形ニ於テ

(1) 三ツノ内角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ通ル

(2) 三中線ハ同一ノ點ヲ通ル。[附錄問題34]

(3) 何レノ内角モ直角ニ等シカラザルトキ,ソノ三ツノ垂線ハ同一ノ點ヲ通ル。[附錄問題35]

119. 球面三角形 ABC ノ各邊ヲ夫々含ム三ツノ大圓 BC, CA, AB ノ極ヲ A′B′C′ トスルトキハ一ツノ球面三角形 A′B′C′ ヲ得,コレヲ元トノ三角形ニ對シテ極三角形ト云フ。

球面三角形及ビソノ極三角形ノ各邊ガ球ノ中心ニ於テ張ル角ノ關係ガ53頁問題41ト同一ナルモノ存在ス。

120. 球面三角形ノ任意ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ

大ナリ。[定理23利用]

121. 球面三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヲ通ル球ノ直徑ノ他ノ端ヲ A′, B′, C′ トスルトキ,球面三角形 ABC, A′B′C′ ハ互ニ **對稱** ナリト云フ。

互ニ對稱ナル二ツノ二等邊球面三角形ハ合同ナリ。

122. 球面三角形 ABC ト,コレニ對稱ナル球面三角形 A′B′C′ トハ一般ニ合同ナラズ,然レドモ一方ノ三邊ハ夫々他ノ方ノ三邊ニ等シク,一方ノ二邊ガ作ル角ハ他ノ方ノコレニ相應スル二邊ガ作ル角ニ等シ。

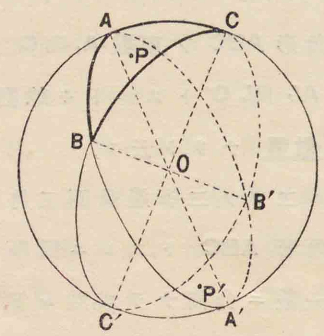
123. 球面三角形 ABC ノ三頂點ヲ通ル小圓ノ極ヲ P トセバ, P ヲ通ル直徑ノ他ノ端 P′ ハ三角形 ABC ニ對稱ナル球面三角形 A′B′C′ ノ三頂點ヲ通ル小圓ノ極ナリ。[次頁ノ圖ヲ見ヨ]

124. 互ニ對稱ナル二ツノ球面三角形ノ面積ハ相等シ。[前問ヲ利用セヨ]

125. **球面過剩** 球面三角形ノ三ツノ内角ノ和ヨリ二直角ヲ減ジタル殘リヲコノ三角形ノ **球面過剩** ト云フ。

半徑 r ナル球 O ノ上ニアル球面三角形 ABC ノ面積ハ球面過剩ニ比例シ,ソノ値ハ

$$\frac{A^\circ+B^\circ+C^\circ-180^\circ}{180^\circ}\times\pi r^2.$$



證明　對稱球面三角形ヲ A'B'C' トセヨ,

$$月形\ BACA'\ ノ面積 = \frac{A^\circ}{180^\circ}\cdot 2\pi r^2$$

$$月形\ A'BC'B'\ ノ面積 = \frac{B^\circ}{180^\circ}\cdot 2\pi r^2$$

$$月形\ ACBC'\ ノ面積 = \frac{C^\circ}{180^\circ}\cdot 2\pi r^2$$

邊々相加ヘ,球面三角形 ABC ト A'B'C' トガ等積ナルコトヲ利用セバ　〔前　問〕,

$$2\times(球面三角形\ ABC\ ノ面積) + 球面積ノ二分ノ一 = \left(\frac{A^\circ+B^\circ+C^\circ}{180^\circ}\right)2\pi r^2$$

$$球面積ノ半バ = 2\pi r^2$$

$$\therefore\quad 球面三角形\ ABC\ ノ面積 = \left(\frac{A^\circ+B^\circ+C^\circ-180^\circ}{180^\circ}\right)\pi r^2$$

大正九年十月二十五日印刷
大正九年十月二十八日發行
大正九年十二月九日訂正再版印刷
大正九年十二月十二日訂正再版發行

最新立體幾何教科書
（大正十年版）

定價金參拾七錢

大正十三年度臨時定價　金六拾七錢

編　者　中川銓吉

東京市神田區通神保町九番地
發行兼印刷者　合資會社　冨山房

同所合資會社冨山房社長
代表者　坂本嘉治馬

大阪市西區阿波座二番町十六番地
印刷所　余部交進社

發行所　東京市神田區通神保町　合資會社　冨山房

（電話本局三〇一四番 本局三七六〇番）　（振替貯金口座東京五〇一番）電報略號（ヤマフ）

縣立廣島第一中學校第五學年

光田 [illegible] 月