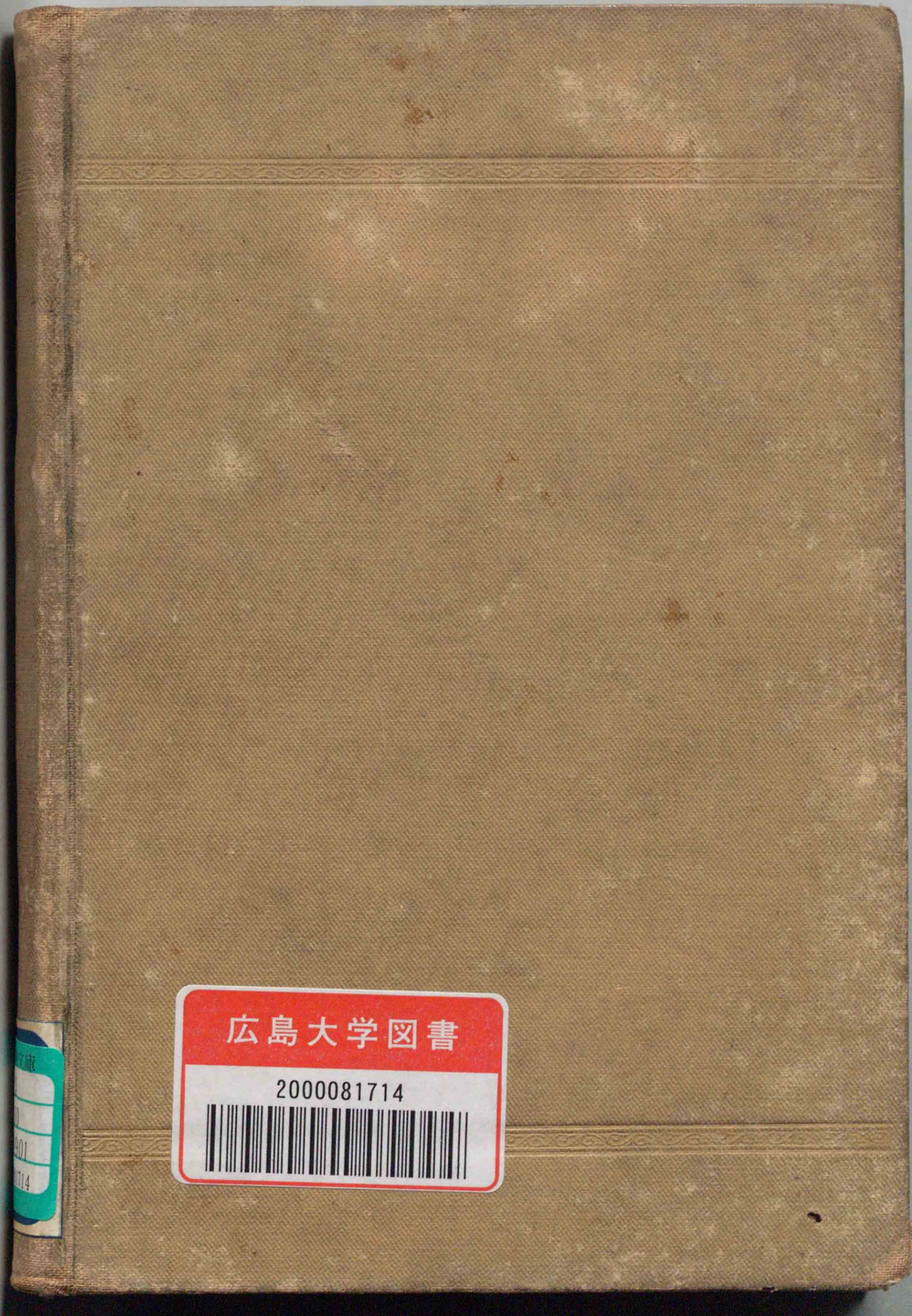
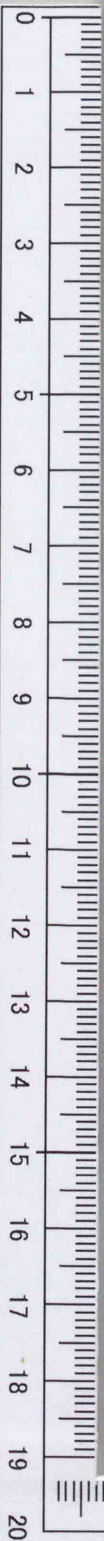
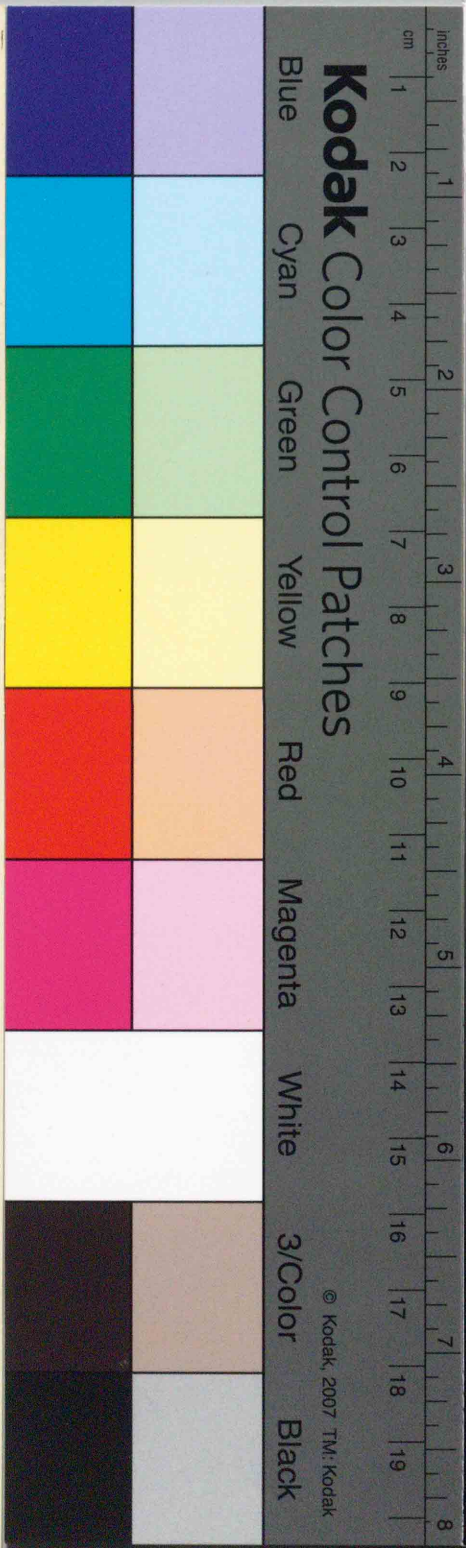


40112

教科書文庫

#3
410
41-1901
20000 81714



広島大学図書
2000081714




42
412
833k

教科書文庫
4
410
41-1901
2000081714

~~Belong to~~
S. D. K. A.

資料室

明治三十四年二月五日
文部省檢定濟
中學校數學科用教科書

高等師範學校教授理學士

國枝元治編

代數學教科書

上卷



東京

金港堂書籍株式會社

發 兌



Handwritten signature in blue ink on the brown paper cover.

文部省檢定濟に就き

京都帝國大學理工
科助教 理學士

林 鶴一氏編

一算術教科書

全二冊

上卷
下卷

定價金五拾五錢
定價金四拾五錢

本書は明治三十
三年六月七日

文部省檢定濟

に相成候請ふ倍
舊の愛顧を賜へ

高等師範學校教授
理學士

國枝元治氏編

一代數學教科書

全二冊

上卷
下卷

定價金七拾錢
定價金七拾錢

本書は明治三十
四年二月五日

文部省檢定濟

に相成候請ふ倍
舊の愛顧を賜へ

高等師範學校
監

根岸福彌氏編

一平幾何教科書

全一冊

定價金五拾錢

本書は明治三十
三年九月廿一日

文部省檢定濟

に相成候請ふ倍
舊の愛顧を賜へ

東京

日本橋區本町
三丁目拾七番地

金港堂書籍株式會社

緒 言

本書ハ中等教育ニ於ケル教科書ニ充
テシガ爲メニ編纂セルモノニシテ其材
料ノ分量配置等ハ重ニ文部省ニ於テ規
定セル中學校教授細目ニ從ヒタリ、是レ
編者モ大體ニ於テ之ト同意見ナルヲ以
テナリ。

從來刊行ノ代數學教科書ハ其種類尠
ナシトイフベカラズ、然ルニ又茲ニ此書
ヲ發行セルハ多少其趣旨ノ異ナル處ア
ルヲ期スレバナリ、即チ此書ニ於テハ形
式不易ノ原則ヲ論據トシテ初等數學ノ
範圍内ニ於テ理論ノ精確ト簡明トヲ圖
リ且ツ數學ト其應用トノ區別ヲ明カナ
ラシメンコトヲ務メタリ。

編者ハ此書ヲ編纂スルニ際リ内外諸
數學家ノ著書ニ負フ處尠少ナラザルコ

ナ茲ニ表白ス。

又編者ハ十分ノ注意ヲ怠タラザリシ
ト雖モ尙ホ改訂ヲ要スル點無キヲ保シ
難キヲ以テ版ヲ重ヌル毎ニ務メテ補正
ヲ加ヘント欲ス、故ニ若シ讀者ニシテ毫
厘ノ注意タリト雖モ之ヲ惜マル、
クンバ編者ハ滿腔ノ感謝ヲ以テ之ヲ迎
フベシ。

明治三十三年三月 編 者 識

代 數 學 教 科 書 上 卷

目 次

	頁數
第一章 緒論	1.
定義	1.
符號(附. 代數式及 \pm 數值)	3.
演習問題 1.	14.
積・因數・係數	15.
演習問題 2.	17.
冪・指數・次數・根	18.
演習問題 3.	22.
代數式ノ種類	23.
演習問題 4.	26.
第二章 負數	28.
定義	28.
絕對值或ハ純值	30.
正數及 \pm 負數ノ計算: — 加法	31.
減法	32.
數ノ大小	39.
演習問題 5.	40.

乘法	41.
除法	44.
演習問題 6.	46.
正量及 \pm 負量	46.
演習問題 7.	51.
第三章 整式ノ四則	53.
加法	53.
演習問題 8.	57.
降冪及 \pm 昇冪	58.
演習問題 9.	59.
減法	60.
演習問題 10.	62.
括弧用法	63.
演習問題 11.	65.
乘法:—單項式ノ乘法	66.
演習問題 12.	70.
單項式 \times 多項式 \times ノ乘法	70.
演習問題 13.	72.
多項式ノ乘法	73.
演習問題 14.	76.

次數	77.
多項式ノ平方	79.
連乘積	82.
二項式ノ冪	83.
分離係數法	84.
公式及 \pm 其應用	85.
演習問題 15.	87.
除法:—單項式ノ除法	90.
演習問題 16.	95.
多項式ノ除法	95.
演習問題 17.	97.
分離係數法	101.
割リ切レザル除法	101.
公式	103.
演習問題 18.	104.
基礎ノ法測	106.
第四章 一次方程式	108.
演習問題 19.	117.
演習問題 20.	120.
一次方程式應用問題	123.
演習問題 21.	136.

第五章 聯立一次方程式.....	145.
演習問題 22.	156.
演習問題 23.	160.
三ツ或ハ三ツ以上ノ未知數ヲ含ム聯立一次 方程式.....	161.
演習問題 24.	165.
聯立一次方程式應用問題.	166.
演習問題 25.	172.
第六章 因數.....	179.
定義.	179.
公式.....	180.
演習問題 26.	181.
演習問題 27.	187.
演習問題 28.	189.
第七章 最大公約數及ビ最小公倍數.....	192.
最大公約數.....	192.
演習問題 29.	195.
多項式ノ最大公約數.....	196.
演習問題 30.	206.
最小公倍數.....	207.

演習問題 31.	211.
多項式ノ最小公倍數.....	212.
演習問題 32.	214.
第八章 分數式.....	217.
定義.....	217.
約分.....	221.
演習問題 33.	224.
通分.....	225.
演習問題 34.	227.
加法及ビ減法.....	228.
演習問題 35.	233.
乘法.....	235.
除法.....	236.
演習問題 36.	240.
定理.....	243.
演習問題 37.	247.
第九章 分數方程式及ビ雜論.....	250.
分數方程式.....	250.
演習問題 38.	254.
應用問題.....	256.
演習問題 39.	259.

一次方程式雜論.....	262.
演習問題 40.....	270.

代 數 學 教 科 書

上 卷

第 一 章 緒 論.

1. 數ノ性質及ビ其算法等ニ付キ研究スル學問ヲ總稱シテ數學トイヒ、之ヲ諸分科ニ區別ス、算術トイヒ、代數學ト稱スルモ、何レモ其分科ニ過ギズ。

算術ニ於テハ確定シタル意義ヲ有スル數字ヲ用テ計算ノ方法等ヲ研究スレトモ、代數學ニ於テハ任意ノ數ニ付キテ之ヲ講究ス、即チ代數學ハ算術ノ擴張シタルモノニシテ其目的ハ重ニ計算ヲ簡明ニシ且ツ汎通ノ結果ヲ得ルニアリ。

代數學ニ於テハ斯カル目的ニ沿ハンガ爲メニ普通ノ數字ノ外ニ數ヲ代表セ

ル記號ヲ用ウ。

此記號ニハ通常小羅馬文字 $a, b, c, d,$
 \dots, x, y, z ヲ用非、時ニハ A, B, C, D 等ノ
 大羅馬文字、或ハ $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ 等ノ希臘文字
 ヲ用ウルコアリ。

此等ノ文字ハ任意ノ數ヲ代表スルコ
 ヲ得ルモノトス；但シ相連續セル演算中
 ニアリテハ同文字ハ恒ニ同數ヲ表ハス
 モノトス。

例 算術ニ於テハ $3+5 = 5+3$ ナルコヲ知ル、又
 同様ニ一數甲ニ他ノ數乙ヲ加ヘテ得ル處ノ和ハ乙
 ニ甲ヲ加ヘテ得ル處ノ和ト相等シキコヲ知ルナリ、
 此事柄ヲ代數學ニテハ $a+b = b+a$ ニテ表ハス、此
 處ニ於テ a 及ビ b ハ任意ノ數甲及ビ乙ヲ表ハスモ
 ノトス、然シニ號ノ兩邊ニ於ケル a (又ハ b) ハ同數ヲ
 表ハセルナリ；例令バ左方ノ a ガ 3 ヲ代表スルモノ
 ナラバ右方ノ a モ亦 3 ヲ代表スルモノナルベク、又
 左方ノ b ガ 5 ヲ代表スルモノナラバ右方ノ b モ亦
 5 ヲ代表スルモノナルベシ、即チ此ノ場合ニハ $3+5$

$=5+3$ トナル。此例ヲ見テモ數ヲ代表セル文字ヲ
 用ウルコノ如何ニ便利ナルカヲ知ラルベシ。

符 號 (附. 代數式及ビ數値)

2. 代數學ニ於テモ加減乗除ノ運算
 ヲ表ハスニ算術ニ於ケルト同ジ符號ヲ
 用ウ、即チ次ノ如シ。

加法ノ符號 $+$ 。此符號ハ「プラス」又ハ
 「ニ加フル」ト讀ミ、二數ノ間ニ置キテ其左
 ニアル數ニ其右ニアル數ヲ加フベキコ
 ヲ示ス；例令バ $2+5$ ハ 2 ニ 5 ヲ加フベキ
 コヲ意味シ、又 $a+b$ トアルキニハ a ニテ
 代表セル數ニ b ニテ代表セル數ヲ加フ
 ベシトイフコヲ意味ス。

注意 a ニテ代表セル數或ハ b ニテ
 代表セル數ト一々唱フル代リニ a トイ
 フ數又ハ b トイフ數トイヒ、或ハ單ニ a
 又ハ b ト呼ブ；例令バ $a = b$ ヲ加ヘヨト

イフキニハ a ニテ代表セル數ニ b ニテ代表セル數ヲ加ヘヨトイフヲ省略セルモノニシテ、此後ハ簡單ノ爲メニ屢々此ノ如キ記方ヲ用ウルヲアルベシ。

3. 減法ノ符號 — 此符號ハ「マイナス」或ハ「ヨリ引ク」ト讀ミ、二數ノ間ニ置キテ其左ニアル數ヨリ其右ニアル數ヲ減ズベシトイフ意義ヲ表ハス；例令バ $7-3$ トアルキニハ 7 ヨリ 3 ヲ減ズベシトイフヲ表ハシ、 $a-b$ ハ a ヨリ b ヲ減ズベキヲ示セルナリ。

又 $2+5-3$ ハ先ヅ $2+5$ ヲ加ヘ而シテ後其結果ヨリ 3 ヲ減ズベシトイフ義ヲ表ハス、同様ニ $a+b-c$ ハ先ヅ $a+b$ ヲ加ヘ而シテ後其結果ヨリ c ヲ減ズベシトノ意味ヲ示セルナリ。

以上ノ例ニ於テ示セル如ク、加減ノ演算ハ凡テ次ノ規約ニ從フテ行フベシ。

數個ノ數ガ加法或ハ減法ノ符號ヲ以テ連結サレタルキニハ其演算ノ順序ハ左ヨリ初メテ順次右ニ及ボスベシ。

4. 乗法ノ符號 \times . 此符號ハ「インツ」或ハ「ニ掛クル」ト讀ミ、二數ノ間ニ置キテ其左ニアル數ニ其右ニアル數ヲ乘ズベキヲ示ス；例令バ 7×4 ハ 7 ニ 4 ヲ乘ズベシトノ義ヲ示シ、又同様ニ $a \times b$ ハ a ニ b ヲ乘ズベキヲ意味ス。

又符號 \times ノ代リニ點 \cdot ヲ用非テ乘法ヲ示スコトアリ、但シ之ハ他ノ符號(例令バ小數點ノ如シ)ト混雜ノ虞ナキキニ限ル；例令バ 3.7 ト 3×7 トハ同ジク $3 = 7$ ヲ乘ズベキヲ示シ、同様ニ $a.b$ ト $a \times b$ トハ同ジ事柄ヲ表ハス。

尙ホ記法ヲ簡單ニナサンガ爲メニ文字ト文字トノ間或ハ數字ト文字トノ間ニハ全ク乗法ノ符號ヲ省略スルコトアリ；

例令バ ab , $a.b$ 或ハ $a \times b$ ハ何レモ同ジ事柄ヲ表ハシ, $7xy$, $7.x.y$ 及ヒ $7 \times x \times y$ ハ何レモ相同ジキナリ.

然レ此數字ト數字トノ間ニハ決シテ乘法ノ符號ヲ省略ス可カラズ, 何トナレバ若シ省略スレバ不都合ヲ生ズベキヲ以テナリ; 例令バ 27 ハ二十七トイフ數ノ記號ニシテ決シテ 2×7 ヲ示スモノニアラズ, 若シ之ヲ混用スレバ同記號ニシテ異ナリタル意味ヲ有スルニ至リ甚タシキ不都合ヲ生ズベシ.

5. 除法ノ符號 \div . 此符號ハ「バイ」或ハ「ヲ割ル」ト讀ミ, 二數ノ間ニ置キテ其左ニアル數ヲ其右ニアル數ニテ除スベキヲ意味ス; 例令バ $4 \div 2$ ハ 4 ヲ 2 ニテ除スベキヲノ記號ニシテ, 同様ニ $a \div b$ ハ a ヲ b ニテ除スベキヲ意味ス.

又屢々符號 $:$ ヲ用テ除法ヲ表ハス

ヲアリ; 例令バ $6:2$ ト $6 \div 2$ トハ同ジ事柄ヲ表ハシ, 又 $a:b$ ト $a \div b$ トハ同ジ事柄ヲ示ス.

又横線ヲ用テ除法ヲ示スヲアリ, 其記法ハ算術ニ於ケル分數ト同様ナリ; 即チ被除數ノ下ニ横線ヲ畫キ其下ニ除數ヲ記シテ之ヲ表ハス, 又斜線ヲ用ウルヲアリ; 例令バ $a \div b$, $\frac{a}{b}$, a/b ハ何レモ同ジ事柄ノ記號ナリ.

又 $2 \times 6 \div 3$ トアルキニハ 2×6 ヲ乘ジテ得タル結果ヲ 3 ニテ除スベシト云フ義ヲ示シ, 同様ニ $a \times b \div c$ トアルトキニハ先ヅ $a \times b$ ヲ乘ズベシ而シテ後其得タル結果ヲ c ニテ除スベシト云フヲ示ス, $ab \div c$ ト記スルモ同様ナリ.

上ニ擧ゲタル諸例ニ於テ示セル如ク乘法及ビ除法モ之ヲ連續シテ行フトキニハ加法及ビ減法ニ於ケルトキト同ジ

規約ノ存スルヲ見ルベシ。即チ

乗法及ビ除法ニ於テ演算ハ左ヨリ初
メテ順次右ニ及ボスベシ。

6. 等號 =. 此符號ハ「イークォルス」又
ハ「ニ等シ」ト讀ミ、二數ノ間ニ置キテ其左
ニアル數ガ其右ニアル數ト相等シキヲ
ヲ示ス;例令バ $2+3=5$ ハ $2=3$ ナ加ヘ
タル和ハ 5 ニ等シキヲ示セルナリ、同
様ニ $x+y=a$ ハ x ニテ代表セル數ニ y
ニテ代表セル數ヲ加ヘタル結果ハ a ニ
等シキヲ示ス。

不等號. $>$, $<$, \succ , \prec , \equiv .

符號 $>$ ハ二數ノ間ニ置キテ其左ニアル
數ハ其右ニアル數ヨリモ大ナルヲ示
ス;例令バ $5>3$ ノ如シ、又 a ガ b ヨリモ
大ナルコトヲ $a>b$ ニテ表ハス。

符號 $<$ ハ二數ノ間ニ置キテ其左ニアル
數ハ其右ニアル數ヨリモ小ナルヲ

示ス;例令バ $2<5$ ノ如シ、又 b ガ a ヨリモ
小ナルヲ $b<a$ ナ以テ表ハス。

符號 \succ ハ二數ノ間ニ置キテ其左ニアル
數ハ其右ニアル數ヨリモ大ナラザル
ヲ示ス;例令バ $3\succ 4$ ハ 3 ハ 4 ヨリモ大
ナラズト云フヲ示ス、又同様ニ $a\succ b$ ト
アルトキニハ a ハ b ヨリモ大ナラザル
ヲ示ス。

符號 \prec ハ二數ノ間ニ置キテ其左ニアル
數ハ其右ニアル數ヨリモ小ナラザル
ヲ示ス;例令バ $4\prec 3$ ノ如シ、同様ニ b ガ
 a ヨリモ小ナラザルヲ示ス爲メニハ
 $b\prec a$ ト記ス。

符號 \equiv ハ二數ノ間ニ置キテ兩數ノ相
等シカラザルヲ示ス;例令バ $2\equiv 5$ ハ 2
ト 5 トハ相等シカラザルヲ示シ同様
ニ a ト b トガ相等シカラザルヲ示ス
爲メニ $a\equiv b$ ト記ス。

7. 算術ニ於テ $2 = 5$ ナ加フレバ 7
トナルヲ以テ此 7 ナ以テ $2 = 5$ ナ加ヘ
テ得タル和又ハ 2 ト 5 トノ和トナス、即
チ $2+5$ ハ $2 = 5$ ナ加フベシト云フ演算
ヲ示シ 7 ナ以テ此結果ヲ表ハス、左レド
モ代數學ニ於テハ $a+b$ トアルトキニハ
 $a = b$ ナ加ヘヨト云フ演算ヲ示スト同
時ニ又之ハ $a = b$ ナ加ヘテ得タル和ヲ
表ハスモノトス、同様ニ又 $a+b+c$ トアル
トキニハ之ハ $a = b$ ナ加ヘ而ル後其結
果ニ c ナ加ヘヨト云フ演算ヲ示スト同
時ニ $a = b$ ナ加ヘ其和ニ c ナ加ヘテ得
タル和ヲ示スモノトス。

同様ニ $a-b$ トアルトキニハ之ハ a ヨ
リ b ナ減ズベシトイフ演算ヲ示セルト
同時ニ a ヨリ b ナ減ジテ得タル差ヲ表
ハスモノトス、又 $a \times b$ (或ハ ab 又ハ $a.b$) ハ
 $a = b$ ナ乗ズベシト云フ演算ヲ示セル

ト同時ニ其乘ジテ得タル結果ヲ示スモ
ノトス、 $a \div b$ ニ於テモ亦之ハ a ナ b ニテ
除スベシト云フ演算ヲ示セルト同時ニ
其結果ヲ示セルモノトス。

偕テ此 $a+b$, $a-b$, $a.b$, $a \div b$ 等ヲ演算ヲ
行フテ得タル結果ノ數ヲ表ハスモノト
見ルトキニハ之等ハ又至極大切ナルヲ
ヲ示スヲ見ルナリ、即チ其ノ數ノ成立ヲ
モ同時ニ表セルナリ、例令バ $a+b$ ト云フ
數ハ a ト云フ數ト b ト云フ數トノ和ナ
ルヲ表ハス、算術ニ於テハ決シテ此ノ
如キコトハ出來ザルナリ、何トナレバ $2+5$
 $= 7$ トアルトキニ $2+5$ ノ形ヲ用井ズシ
テ 7 ナ用井テ和トナス、偕此 7 ハ $3+4$ ト
モ見ルヲ得ル故ニ單ニ 7 ト書キタル
以上ハ既ニ其成立ニ付キテハ全ク無關
係ナリ、然ルニ代數學ニ於テハ上ニ言ヘ
ル如ク $a+b$ ハ一ノ數ヲ表ハスト同時ニ

其成立ヲモアラハス、 $a-b$, $a.b$ $a \div b$ ニ付キテモ同ジ、之レ亦代數學ノ大ヒニ便利ナル特徴ナリ。

乘法ノ場合ニ於テ其符號ヲ省略セルトキニハ演算ヲ示セルモノト見ルヨリモ寧ロ乘法ヲ施行シテ得タル結果ヲ示セルモノトシテ之ヲ取扱フヲ常トス;即チ ab ト記スルトキニハ之ハ a ニ b ヲ乗ジテ得タル結果チ一ノ全躰ノモノトシテ表ハセルモノナリトス;例令バ $a \times b \times c \times d$ トアルトキニハ a ニ b ヲ乗ジ其結果ニ c ヲ乗ジ又其結果ニ d ヲ乗ズベシトイフコトヲ示シ、同時ニ又此結果ヲ示セトモ、 $a \times bc \times d$ トアルトキニハ c ヲ b ニ乗ジテ得タル結果ナル bc ヲ a ニ乗ジ而シテ後其結果ニ d ヲ乗ズベキコトヲ示シ、且ツ又斯クシテ得タル結果ヲ示セルナリ。

8. 代數式. 數字、文字及ビ其他ノ數ヲ代表セル記號(後節ヲ參照セヨ)ヲ演算ノ符號ニテ連結セルモノヲ代數式ト稱ス。

例令バ $2ax-3bc+d$ ノ如キハ一ノ代數式ナリ。

項. 一ノ代數式ニ於テ符號 $+$ 或ハ $-$ ニテ相連レル部分ヲ此代數式ノ項ト稱ス。

例令バ上例ニ於テ $2ax$, $3bc$, d ハ各此代數式ノ項ナリ。

代數式ト唱スベキヲ略シテ單ニ式ト稱スルコトアリ。

9. 數値. 文字 a , b , c , 等ハ任意ノ數ヲ代表スルモノナレドモ、若シ a ハ 5 , b ハ 3 , c ハ 17 ヲ代表セルトキニハ、此 5 , 3 , 17 ヲ夫々 a , b , c ノ數値ト稱ス。

一ノ代數式中ノ文字ニ夫々數値ヲ與ヘ式中ニ示セル演算ヲ施行シテ得タル

數ヲ此代數式ノ數值ト稱ス。

數值ナル語ハ屢々略シテ單ニ值ト稱スルヲアリ。

例 $a=1, b=3, c=2$ ナル式 $a+5b-7c$ ノ數值ヲ求ム。

此處ニ於テ $a=1, b=3, c=2$ トハ a ノ數值ハ 1, b ノ數值ハ 3, c ノ數值ハ 2 ナリトイフヲナリ。

$$\text{故ニ} \quad a+5b-7c = 1+5 \times 3 - 7 \times 2.$$

$$\text{然ルニ} \quad 5 \times 3 = 15, \quad 7 \times 2 = 14.$$

故ニ 上式ハ次ノ如シ

$$1+15-14 = 16-14 = 2.$$

即チ求ムル處ノ式ノ數值ハ 2 ナリ。

演 習 問 題 1.

1. 次式ノ值ヲ求ム。

$$(1). \quad 15-8+5. \quad (2). \quad 30+2 \times 7-41.$$

$$(3). \quad 5 \times 7 \times 3 - 100 + 2 \times 3. \quad (4). \quad 1365 - 577 + 70 \times 4.$$

2. $a=1, b=2, c=4$ ナル式下式ノ數值ヲ求ム。

$$(1). \quad 3a+b+c. \quad (2). \quad 100a-23c+6.$$

$$(3). \quad 7abc. \quad (4). \quad ab+3c-11.$$

3. $a=2, b=1, c=3, d=5$ ナル式上ニ擧ゲタル四式及ビ下ノ諸式ノ數值ヲ計算セヨ。

$$(5). \quad ad-8b+bcd. \quad (6). \quad acd+bc+8-3d.$$

$$(7). \quad 31b-5d+9c+18.$$

4. $x=7, y=1, z=3$ ナル式次ノ諸式ノ數值ヲ計算セヨ。

$$(1). \quad 4x-yz+5z. \quad (2). \quad xyz-zy+zx.$$

$$(4). \quad 14yz-5y+7zx-9xy.$$

積. 因 數. 係 數.

10. ニツ或ハニツ以上ノ數ヲ相乘ジテ得タル結果ヲ其等ノ數ノ連乘積或ハ單ニ積ト稱シ、而シテ其各數ヲ此積ノ因數ト稱ス。

例令バ $2 \times 3 \times 7$ ノ結果 42 ハ 2, 3, 7 ノ連乘積或ハ積ニシテ 2, 3, 7 ハ夫々此積 42 ノ因數ナリ、同様ニ $3ab$ ハ 3, a, b ノ連乘積或ハ積ニシテ 3, a, b ハ夫々此積ノ因數ナリ。

一ノ積ノ因數中ニ數字アルトキニハ乘法ハ因數ノ順序ニ關係セズト云フ定

理(後章ヲ参照セヨ)ニ從ヒ、之ヲ最初ニ持チ來リ、文字ハ a, b, c, \dots ノ順序ニ記スルヲ常例トス、數字ノ因數二ツ以上アルトキニハ其積ヲ最初ニ持チ來ルナリ。

例令バ $3 \times a \times c \times 5 \times b \times d$ ニ於テ先ヅ 3 ト 5 トノ積 15 ヲ最初ニ持チ來リ而シテ $15abcd$ ト記ス。

11. 一ノ積ノ因數中ニ在ル數字ハ前節ニ從ツテ積ノ首メニ書シ之ヲ其餘ノ因數ノ係數ト稱ス。

例令バ上例 $15abcd$ ニ於テ 15 ハ $abcd$ ノ係數ナリ。

因數ガ文字ノミナルトキニハ此係數ハ 1 ナリ、而シテ此 1 ハ通常省略シテ記セズ。

係數ト云フ辭ノ意味ヲ擴張シテ一ノ積中ノ因數ヲ二組ニ分チ各ヲ他ノモノノ係數ト稱ス。

例令バ $3abx$ ニ於テ $3a$ ハ bx ノ係數ニシテ bx ハ $3a$ ノ係數ナリ、又 $3ab$ ハ x ノ係數ニシテ x ハ $3ab$ ノ係數ナリト稱ス。

此擴張サレタル意味ニ於ケル係數ト區別センガ爲メニ前ニ定義ヲ下シタル係數ヲ數係數ト稱スルコトアリ、左レトモ係數ト云フトキニハ大低前後ノ關係ヨリ其何レナルヤヲ判別シ得ルヲ以テ數係數ノ稱ヲ用ウルコトハ實際稀ナリト知ル可シ。

例令バ $3axy$ ニ於テ axy ノ係數ハ 3 ニシテ xy ノ係數ハ $3a$ ナリ。

演 習 問 題 2.

1. 次ノ諸式ノ因數ヲ舉ゲヨ。

(1). $14x$.

(2). $3ax$.

(3). $5by$.

(4). $\frac{1}{4}ab$.

(5). $7xyz$.

(6). $24abdyz$.

(7). $\frac{1}{10}bcxy$.

2. 次ノ諸數ノ積ヲ求ム。

(1). $3, a, 4, c$.

(2). $5, a, b, x, z$.

(3). $9, b, c, 2, x$.

(4). $7, 11, h, a, l, u, x, z$.

(5). $8, a, \frac{1}{2}, c, 7.$

3. 次ノ諸式ヲ書キ直セ.

(1). $a. 2. c.$

(2). $3. a. x. 5z.$

(3). $a. b. c. 9.$

(4). $2a. x. y. c.$

(5). $15. c. 7. d. a. x.$

(6). $37. a. k. m. x.$

4. 上ニ舉ゲタル諸式ニ於テ x, y, z, xy, yz 等ノ係數ヲ示セ.

5. 前諸例ニ於ケル數係數ヲ求ム.

冪. 指數. 次數. 根.

12. 一ノ積ガ二ツ或ハ二ツ以上ノ同因數ヨリ成ルトキニハ此積ヲ此因數ノ冪ト稱ス.

例令バ $aaaa$ ハ a ノ冪ナリ.

一ノ冪ニ於テ因數ノ數二ツアルトキニハ之ヲ此數ノ二乗, 自乗或ハ二冪又ハ平方トモ稱シ, 三個アルトキニハ三乗或ハ三冪又ハ立方ト稱シ, 又同因數ノ四個ヨリ成ルトキニハ四乗或

ハ四冪ト稱シ, 一般ニ n 個ヨリ成ルトキニハ n 乗或ハ n 冪ト稱ス.

例令バ $aaaa$ ハ a ノ四乗ナリ.

冪ノ記法. 一ノ冪中ニアル因數ノ數ヲ表ハス數字或ハ文字ヲ此因數ノ右肩ニ小記シテ此冪ヲ表ハス.

例令バ a ノ平方ハ a^2 ニテ表ハシ, 立方ハ a^3 ニテ表ハシ, 一般ニ a ノ n 乗ハ a^n ナリテ表ハス.

13. 一ノ冪ニ於テ其因數ノ右肩ニ小記シテ此冪ハ其因數ヲ幾回操廻シテ得タル連乘積ナルヤヲ示ス處ノ數字或ハ文字ヲ此冪ノ指數ト稱ス.

例令バ a^3 ニ於ケル 3 ハ a^3 ノ指數ニシテ, a^n ニ於ケル n ハ a^n ノ指數ナリ.

乘冪ノ辭ノ意味ヲ擴張シテ a ナリ a ノ一乗或ハ一冪ト稱シ, 同様ニ c ナリ c ノ一乗又ハ一冪ト稱シ, 一般ニ如何ナル數ニテモ之ヲ其數ノ一乗又ハ一冪ト稱ス, 而シテ之ヲ記スルニ當リテ前節ニ從ヒ a^1 ,

c^1 等ト記スベキナレドモ此 1 ハ通常省略シテ記セズ.

注意. 初學者ハ指數ト係數トノ區別ヲ誤解セザル様注意スベシ; 例令バ $3a$ ハ a ノ三倍ヲ示シテ 3 ハ係數ナリ a^3 ニ於ケル 3 ハ指數ニシテ之ハ a ヲ三度連乘シテ得タル積ヲ示スナリ.

14. 一ノ積(或ハ項)ノ次數トハ之ヲ構成セル文字ノ數或ハ指數ノ和ヲ云フナリ; 但シ數字ノ因數ハ如何ニ多クアルトモ次數ニハ關係ナシ.

例令バ $3abx^2$ ノ次數ハ 4 ナリ, 何トナレバ此積ハ $a, b, x, x,$ ノ四個ノ文字ヲ因數トシテ合ムヲ以テナリ, 又ハ a ノ指數 1 ト b ノ指數 1 ト x^2 ノ指數 2 トノ和ハ 4 トナルヲ以テナリ.

注意. 初學者ハ次數ト指數トノ區別ニ注意スベシ.

15. 二乗或ハ平方ガ a ニ等シキ數ヲ a ノ平方根又ハ二乗根ト稱ス.

例令バ 3 ノ平方ハ 9 ナルヲ以テ 3 ハ 9 ノ平方根ナリ.

三乗ガ a ニ等シキ數ヲ a ノ立方根或ハ三乗根ト稱ス.

例令バ 2 ノ三乗ハ 8 ナルヲ以テ 2 ハ 8 ノ立方根ナリ.

一般ニ n 乗ガ a ニ等シキトキニハ此ノ如キ數ヲ a ノ n 乗根ト稱ス.

根ハ次ノ如キ記號ヲ用弁テ之ヲ表ハス.

a ノ平方根ハ \sqrt{a} 或ハ \sqrt{a} ヲ以テ表ハシ, 其立方根ハ $\sqrt[3]{a}$ 又其 n 乗根ハ $\sqrt[n]{a}$ ヲ以テ表ハス. (此記法ニ付キテハ後章ニ詳説スベシ).

例令バ $\sqrt{9} = 3$ 或ハ $\sqrt[3]{8} = 2$ ナリ.

16. 全ク精密ニ計算スルヲ得ザル根ヲ不盡根數或ハ無理數ト稱ス.

例令バ $\sqrt{5}$ 或ハ $\sqrt[3]{21}$ ノ如キハ何レモ無理數ナリ.

無理數ハ根號 $\sqrt{\quad}$ (或ハ $\sqrt{\quad}$) ナ附シテ之ヲ表ハス;例令バ上ノ $\sqrt{5}$ (或ハ $\sqrt{5}$) 或ハ $\sqrt[3]{21}$ ノ如シ.

無理數ニ對シテ根號ヲ有セザル通常ノ數ヲ有理數ト稱ス.

例令バ 3, 15, 21 ノ如キ何レモ有理數ナリ.

演 習 問 題 3.

1. 次ノ諸式ヲ書き直セ.

- (1). $aaaaa$. (2). $bbcc$.
 (3). $abccc$. (4). $xyyyyy$.

2. 次ノ諸式ニ於テ各文字ノ指數ヲ舉ゲヨ.

- (1). abc^2 . (2). $6e^2h^3$.
 (3). $\frac{1}{4}ab^4c^8$. (4). $13a^3z^5$.
 (5). $7ad^2x^3y$.

3. 次ノ諸式ニ於テ指數ト係數トヲ舉ゲヨ.

- (1). $13a^4$. (2). $7x^7$.
 (3). $8y^5$. (4). z^8 .
 (5). $3h^4$. (6). $9b^7$.
 (7). c .

4. 上ニ舉ゲタル諸式ノ次數ヲ求ム.
 5. x, y, z ノ三乘根, 四乘根, n 乘根ヲ表記セヨ.

代 數 式 ノ 種 類.

17. 根號ヲ有スル代數式ヲ無理式ト稱シ, 之ヲ含マザル代數式ヲ有理式ト稱ス.

例令バ $16a^2\sqrt{xy} + 15yz^3$ ノ如キハ無理式ニシテ $a + \frac{x}{c} + \sqrt{8z}$ 又ハ $3ax + 3y + 5cz$ ハ各有理式ナリ.

一式ノ有理式タリ又ハ無理式タルヲハ數字ノ根號ヲ有スルヤ否ヤニハ關係ナシト知ルベシ;例令バ前例ノ第二式ニ於ケルガ如シ.

有理式中ニテ文字ヲ以テ除法ヲ示スモノナキトキニハ之ヲ完全式或ハ整式ト稱ス, 之ニ反シテ文字ヲ以テ除法ヲ示スモノヲ分數式ト稱ス.

例令バ $3ac - 7xy + 9d$ ノ如キハ整式ニシテ

$$\frac{a+cd-e}{b+3d}$$

ノ如キハ分數式ナリ。

唯一ツノ項ヨリ成ル代數式ヲ單項式ト稱ス。

二ツ或ハ二ツ以上ノ項ヨリ成ル代數式ヲ多項式ト稱ス。

又二ツノ項ヨリ成ル式ヲ二項式ト稱シ、三ツノ項ヨリ成ル式ヲ三項式ト稱スルコトアリ、逐次此ノ如シ。

例令バ $3ab^2x$ ハ單項式ニシテ、 $5a+7yz$ ノ如キハ二項式ナリ。

18. 等號ヲ以テ二式ヲ連結セルモノヲ等式ト稱シ、不等號ヲ以テ連結セルモノヲ不等式ト稱ス。

例令バ $a+b = x+y.$

ハ等式ニシテ

$$a+c < b+d.$$

ハ不等式ナリ。

19. 括弧 一ノ代數式ヲ一ツノ全

體トシテ取扱フコトヲ示サンガ爲メニ之ヲ括弧ノ間ニ挿入ス。

例令バ $a+(b+c+d)$ ニ於テ $b+c+d$ 一ノ全體ノモノトシ、即チ $b = c$ ヲ加ヘ其和ニ又 d ヲ加ヘテ得タル結果ヲ $a =$ 加フルコトヲ示サンガ爲メニ $b+c+d$ ヲ括弧ノ間ニ置キタルナリ。

括弧ノ種類ハ重ニ次ノ三種ナリ。

即チ

(), { }, [].

括線 —. 一式ノ上ニ一線ヲ横書シ此式全體ヲ一ノ括弧内ニ置キタルト同ジ事ヲ示スコトアリ、此横線ヲ括線ト稱ス。

例令バ \sqrt{abc} ハ $\sqrt{(abc)}$ ト同意味ヲ示シ積 abc ノ平方根ヲ示スモノナリ。

代數式ニ於テ各項ハ恰カモ之ヲ括弧内ニ置キタルガ如ク一ノ全體ノモノトシテ取扱フベシ。

演 習 問 題 4.

次ノ諸式ヲ計算セヨ.

1. $13-3+8-7.$ 2. $7+19-21-2.$
 3. $14-1-2+5.$ 4. $21+30-50+21-19.$

$a=1, b=3, c=2, d=5$ ナル 4 次ノ諸式ノ數値
ヲ計算セヨ.

5. $4a+b-3c+d.$ 6. $12a^2bd.$
 7. $15acd^2.$ 8. $ab+bc+cd+da.$
 9. $5bcd+6ad-30d.$ 10. $abc+bcd-cda-dab.$
 11. $c^3+4ad^2-3a^3-11d.$ 12. $abcd-3a^3d-2lc+d^3.$

$a=5, b=4, c=\frac{1}{2}$ ナル 4 次ノ諸式ノ數値ヲ求
ム.

13. $\sqrt{a^2-b^2}.$ 14. $\sqrt[3]{bc+a^2}.$
 15. $\sqrt{40abc}-3a.$ 16. $\sqrt[3]{25b-b^2c+\frac{1}{2}c^2-1}.$
 17. $\sqrt{(a+b)\sqrt[3]{3ab+2bc}}.$
 18. $\sqrt[3]{a^2+bc}\sqrt{abc^2+\frac{1}{2}a^2b+ac^2}.$

$a=20, b=15, c=0, d=3$ ナル 4 次ノ諸式ノ
數値ヲ計算セヨ.

19. $\frac{1}{3}bd-a^2c+\frac{1}{10}a^2.$ 20. $(5a-4b)^3-2(3b-10c)^3.$

21. $4a^3+4b^3+4c^3-3(b+c)(c+a)(a+b).$

22. $abd-bdc-ab+6abcd.$

$a=5, b=3, c=1, x=4$ ナル 4 次ノ諸式ノ數
値ヲ求ム.

23. $17(a+b)-3ac(b+x).$ 24. $\frac{5}{21}bx-\frac{100}{a^2x^2}-\frac{ac^3}{10bx}.$

25. $\frac{27-4a}{b^2x}+\frac{a(b+cx^2)}{abx^2}-\frac{a^2-b^2}{3cx^2}.$

26. $\sqrt[3]{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)}.$
 $\frac{\sqrt[3]{(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3)}}{b^2+2bc+c^2}.$

27. $a^4+b^4+c^4+x^4-2a^2x^2-2b^2c^2.$

28. $a=5, b=1$ ナル 4 次ノ等式ヲ證セヨ.

$$a^3-8b^3=(a+26)^3-6ab(a+26)^2-844.$$

第二章 負 數

20. $3-7$ ナル式ニテ示セル演算ハ算術ニ於テハ取扱フコトヲ得ザレド代數學ニ於テハ -4 トイフ記號ヲ用非テ此差ヲ表ハス;一般ニ a ガ b ヨリモ小ナルキニハ $a-b$ ハ $-(b-a)$ ナリト定ム,而シテ -7 或ハ $-(b-a)$ ノ如ク其前ニ符號 $-$ ヲ有スル數ヲ負數ト稱ス.

例令バ $2-3=-1, 2-4=-2, 2-5=-3, 2-9=-7,$
又 $2-12=-10$ ニシテ $-1, -2, -3, -7$ 又 -10 ハ何レモ負數ナリ.

倍一ノ代數式ノ數值ヲ計算スルニ當リ,其中ノ文字ノ數值ニヨリテ小ナル數ヨリ大ナル數ヲ減ズベキ演算ヲ生ズルコトアルベシ,此時ニハ負數ヲ用ウレバ直チニ其數值ヲ得ラルベシ.

例. $a=5, b=3, d=4, c=2$ ナルキ代數式

$3a+bd-15c$ ノ數值ヲ求ム.

$$\begin{aligned} 3a &= 15, bd = 12, 15c = 30 \text{ ナルヲ以テ與式ハ} \\ &= 15+12-30 \\ &= 27-30 \\ &= -3. \end{aligned}$$

即チ所要ノ數值ハ -3 ナリ.

注意. 以上ニ定義ヲ下シタル負數ナル數ハ是迄知レル處ノ數トハ全ク別種ノ新數ニシテ,其計算ノ方法及ビ應用上ノ解釋等ハ以下節ヲ逐フテ示ス處ノ如シ.

負數ニ對シテ通常ノ數ヲ正數ト稱シ,符號 $+$ ヲ前置シテ之ヲ表ハス;例令バ $+5, +13,$ 或ハ $+a$ ノ如キ何レモ正數ナリ.

正數ノ前ノ符號 $+$ ハ特別ノ場合ニアラザレバ之ヲ略スルヲ常トス;例令バ $+5, +13, +a$ 等ノ代リニ單ニ $5, 13, a$ ト記スルヲ常トス.

性質ノ符號. 元來符號 $+$ 或ハ $-$ ハ

演算ノ符號ナレ_レ、爾後此等ノ符號ハ又正數或ハ負數ヲ表ハス_{コト}ニ用井ラル、ニ至_レリ、此場合ニ於テ此二符號ノ性質ノ符號ト稱ス。

性質ノ符號₊ヲ正號ト稱シ、₋ヲ負號ト稱ス。

代數學ニ於テ用ウル處ノ符號ハ前章ニモ舉ゲタル如ク數多アレ_レ、單ニ符號ト稱スル_キニハ性質ノ符號ノミヲ指ス。

例令バ $+a$ (或ハ單ニ a)ノ符號トハ₊ヲ指シ、 $-a$ ノ符號トイヘ₋ヲ指ス、同様ニ $-a.b$ ノ符號トハ₋ニシテ決シテ乘法ノ符號ヲ指スニアラズ、此符號ヲ指ス_キニハ特ニ乘法ノ符號トイフナリ。

21. 絶對值或ハ純值. 性質ノ如何ニ(或ハ符號ノ如何ニ)拘ハラズシテ考ヘタル_キノ一數ノ大サヲ其數ノ絶對值或ハ純值ト稱ス。

例令バ $+5$ 及ビ -5 ノ絶對值ハ何レモ 5 ナリ。

正數及ビ負數ノ計算.

22. 加法. 正數ニ正數ヲ加フル_{コト}ハ既ニ算術ニ於テ知レル所ナリ.

例令バ 3 ト 5 トノ和ハ $3+5=8$ ニシテ、同様ニ a ト b トノ和ハ $a+b$ ナリ。

又二個ノ正數ノ和ハ之ヲ加ヘ合ハス順序ニ關係セズ.

$$\begin{aligned} \text{例令バ } 3+5 &= (1+1+1)+1+1+1+1 \\ &= (1+1+1+1+1)+1+1+1 \\ &= 5+3. \end{aligned}$$

$$\text{從ツテ } a+b = b+a.$$

負數ニ正數ヲ加フルニハ次ノ如クスベシ。

$$\begin{aligned} \text{例令バ } & -3+5 = 5-3 = 2. \\ \text{或ハ } & -9+2 = 2-9 = -7. \\ \text{同様ニ } & -b+a = a-b. \end{aligned}$$

負數ニ正數ヲ加フルニハ正數ヨリ負數ノ絶對值ヲ減ズベシ. 此結果ハ或ハ

正數タリ或ハ負數タリト知ルベシ。

正數 = 負數ヲ加フルコトハ負數 = 正數
ヲ加フルト同様ナリト定ム。

例令バ $5 + (-3) = -3 + 5 = 5 - 3 = 2.$

同様ニ $a + (-b) = -b + a = a - b.$

即チ $a + (-b) = a - b.$

故ニ 正數 = 負數ヲ加フルニハ負數ノ
絶對値ヲ減ズベシ。 此結果ハ或ハ正數
タリ或ハ負數タリト知ルベシ。

負數 = 負數ヲ加ヘタルモノハ其絶對
値ノ和ヲ絶對値トセル負數ナリト定ム。

例令バ $-3 + (-5) = -(3+5) = -8.$

同様ニ $-a + (-b) = -(a+b).$

23. 減法. 前節ニ舉ゲタル演算ノ規
約ニヨリテ正負ニ拘ハラズ二數ノ和ハ
見出スヲ得ルナリ。

今二數ノ和ト此二數中ノ一ツガ與ヘ
ラレテ他ノ數ヲ見出スヲ減法ト稱ス。

此定義ニヨレバ二數ノ差ハ前節ノ規

約ヲ用テ發見スル事ヲ得ベシ。

先ヅ 正數ヨリ正數ヲ減ズル事ハ既ニ
知ル處ナリ。

例令バ $5 - 3 = 2.$

或ハ $3 - 10 = -7.$

又 a ヨリ b ヲ減ズレバ $a - b$ トナリ, 此
ノ結果ハ a ガ b ヨリモ大ナルカ, 或ハ小
ナルカニ從ツテ或ハ正數タリ, 或ハ負數
タルナリ。

負數ヨリ正數ヲ減ジタルモノハ負數
ニシテ, 其ノ絶對値ハ二數ノ絶對値ノ和
ニ等シ。

例令バ $-3 - (+4) = -(3+4) = -7.$

同様ニ $-a - (+b) = -(a+b).$

何トナレバ $-(a+b) + b = -a$ ナレバナリ。

正數ヨリ負數ヲ減ズレバ正數ヲ得, 其
ノ絶對値ハ二數ノ絶對値ノ和ニ等シ。

例令バ $3 - (-5) = 3 + 5 = 8.$

同様 = $a - (-b) = a + b.$

負數ヨリ負數ヲ減ズルニハ第一ノ負數ニ第二ノ負數ノ絶對値ヲ加フベシ.

例 令バ $-3 - (-5) = -3 + 5 = 2.$

或ハ $-8 - (-3) = -8 + 3 = -5.$

同様ニ $-a - (-b) = -a + b.$

此結果ハ或ハ正數タリ或ハ負數タリト知ル可シ.

注意. 以上ノ減法ノ演算ノ方則ハ前節ノ加法ノ規約ト減法ノ定義トヲ用井テ檢證スルヲ得ベシ.

24. 今更メテ前二節ノ結果ヲ次ニ再記スベシ.

$$(+a) + (+b) = a + b.$$

$$a < b, \quad (-a) + (+b) = b - a.$$

$$a > b, \quad (-a) + (+b) = -(a - b).$$

$$a < b, \quad (+a) + (-b) = -(b - a).$$

$$a > b, \quad (+a) + (-b) = a - b.$$

$$(-a) + (-b) = -(a + b).$$

$$a < b, \quad (+a) - (+b) = -(b - a).$$

$$a > b, \quad (+a) - (+b) = a - b.$$

$$(-a) - (+b) = -(a + b).$$

$$(+a) - (-b) = a + b.$$

$$a < b, \quad (-a) - (-b) = b - a.$$

$$a > b, \quad (-a) - (-b) = -(a - b).$$

是ニ因テ次ノ法則ヲ得.

(1). 同符號ノ數ヲ加フルニハ各數ノ絶對値ノ和ニ其符號ヲ附シ, 異符號ノ數ヲ加フルニハ各數ノ絶對値ノ差ヲ見出シ之ニ絶對値ノ大ナル方ノ數ノ符號ヲ附スベシ.

(2). 一數ヲ他數ヨリ減ズルニハ其符號ヲ變ジテ(1)ニヨリ之ヲ加フベシ.

25. 前諸節ニ於テハ文字ハ皆正數ヲ表ハスモノトセリ, 然レドモ文字ハ負數

ヲ表ハストシテモ上ノ結果ノ正當ナル
 一ハ容易ニ證スルヲ得。

負數ノ定義ニヨリテ $3-7=-4$ ナリ、
 而シテ之ハ又次ノ如ク考フルヲ得、即チ
 $3-7=3-3-4=0-4$ 、故ニ -4 トイフ負數
 ハ $0-4$ ノ名稱ナリト見ルヲ得ベシ、從
 ツテ $-c$ トイフ負數ハ $0-c$ ナル可シ。

今 b ガ正數ナルキハ $-b$ ハ負數ナレド
 モ b ガ負數 $-c$ ナルトキニハ $-b$ ハ何ヲ表
 ハスヤトイフニ此場合ニモ上ト同ジク
 $-b=0-b$ 而シテ $b=-c$ ナル故ニ $-b=0-b$
 $=0-(-c)=0+c=+c$ ト解釋スベシ。

因テ今

$$(+a) + (+b) = a+b, \quad (+a) - (-b) = a+b.$$

ニ於テ b ハ負數ニシテ $b=-c$ トスレバ明
 カニ

$$(+a) + (-c) = a-c, \quad (+a) - (+c) = a-c.$$

トナル、而シテ此結果ハ正當ナリ。

其他ノ場合ニ於テモ同様ニ證スルヲ
 得。

因テ 加法及ビ減法ヲ行フニ際シ文字
ハ正負何レノ數ニテモ表ハスト見ルヲ
得。

29. 代數的ノ和及ビ差. a ト b トノ
 和ハ $a+b$ ニシテ、 a ト $-b$ トノ和ハ $a-b$ ナリ、
 此處ニ於テ a, b ハ正負何レノ數ヲモ表ハ
 スヲ得、從ツテ此和ハ或ハ正數タリ或
 ハ負數タリ、而シテ其絕對値ハ二數ノ絶
 對値ノ和或ハ差ニ等シキナリ、偕上ノ
 $a+b$ 或ハ $a-b$ ノ如ク文字ノ數値ノ如何ニ
 係ハラズ其符號ヲ變ゼズシテ列記シタ
 ルモノヲ代數的ノ和ト稱ス。

例令ベ $a+b$ ハ a ト b トノ代數的ノ和ニシテ、 $a-c$ ハ
 a ト $-c$ トノ代數的ノ和ナリ。

文字ノ數値ノ正負如何ニ係ハラズ第
 一數ニ第二數ノ符號ヲ變ジテ列記シタ

ルモノヲ二數ノ代數的ノ差ト稱ス。

例令バ $a-b$ ハ a ト b トノ代數的ノ差ニシテ、 $a+c$ ハ a ト $-c$ トノ代數的ノ差ナリ。

27. 24節ヨリ性質ノ符號ト加法及ビ減法ノ符號トヲ混用シテモ差支ナキヲ見ルナリ、之レ甚ダ便利ナルヲナリ。

例令バ $a-b$ ハ a ヨリ b ヲ減シタル差ヲ表ハシ、此處ノ符號 $-$ ハ演算ノ符號ナレモ亦之ハ $a+(-b)$ トモ見ルヲ得、此場合ニハ符號 $-$ ハ性質ノ符號ナリ。

因テ同一ノ式中ニ於テ符號ハ演算ノ符號トモ或ハ性質ノ符號トモ見ルヲ得。

例令バ
$$= a+b-c+d.$$

ナル多項式アルニ元來之ハ $a=b$ ヲ加ヘ、其和ヨリ c ヲ減シテ得タル差ニ d ヲ加ヘタル結果ヲ示スモノナレモ、又之ハ前ニ得タル結果ニヨリテ $+a, +b, -c, +d$ ノ四數ノ和ト見ルヲモ得ルナリ。

此理ニヨリテ一ノ代數式中ノ各項ヲ正項及ビ負項ノ二ツニ區別ス、則チ前ニ

正號ヲ有スル項ヲ正項ト稱シ、負號ヲ有スル項ヲ負項ト稱ス。

前例ニ於テ $+a, +b, +d$ ハ何レモ正項ニシテ $-c$ ハ負項ナリ。

一ノ代數式ノ初項ガ正項ナルトキニハ其正號ハ之ヲ省略スルヲ常トス。

偕又文字ハ正負何レノ數ニテモ代表スルヲ得ルヲ以テ名ハ正項タリ負項タリトモ其數値ハ正負何レノ數タルヲモ得ルナリ、即チ正項ト云ヒ負項ト稱スル名稱ハ外形上ヨリ附シタル名稱ニ過ギズ。

28. 數ノ大小. 二個ノ正數 a ト b トニ於テ $a > b$ ガ正數ナルトキニハ a ハ b ヨリモ大ナリトイフヲハ既ニ知ル處ナリ; 例令バ 8 ハ 5 ヨリモ大ナリ。

今負數ニモ此定義ヲ適用スベキモノトス、即チ一般ニ

a, b ノ二數ニ於テ $a-b$ ガ正數ナルトキ
ニハ a ハ b ヨリモ大ナリト稱ス。

此大小ノ定義ニヨレバ直チニ次ノ性質ノ存スルヲ知ルナリ。

(1). 0 ハ何レノ正數ヨリモ小ナリ。

(2). 0 ハ何レノ負數ヨリモ大ナリ。

(3). 凡テノ正數ハ何レノ負數ヨリモ大ナリ。

(4). 負數ハ其絶對値ノ大ナルモノ程小ナリ。

今正負ノ數ヲ大小ノ順ニ列記スレバ次ノ如シ。

....., -100 , -10 , -9 , -8 , -7 , -6 ,,

-3 , -2 , -1 , 0 , 2 , 3 ,, 6 , 7 , 8 , 9 , 10 ... , 100 ,

演 習 問 題 5.

1. $5 = -7$ ヲ加フベシ。

2. -16 ヨリ 8 ヲ減ズベシ。

3. $-6 = 32$ ヲ加フベシ。

4. $+12 = -13$ ヲ加フベシ。

5. 15 ヨリ 21 ヲ減ズベシ。

6. 14 ヨリ -3 ヲ減ズベシ。

7. -8 ヨリ -15 ヲ減ズベシ。

8. $-4 = -19$ ヲ加フベシ。

9. $a=7, b=4, c=11$ ナルニ下式ノ數値ヲ求ム。

(1). $2a-bc$.

(2). $-ac+6ab$.

(3). a^2b+bc^2-abc .

(4). $17ab-4c^2$.

(5). $35ac-79b^2-c^3$.

10. 次ノ諸數ヲ大小ノ順ニ排列セヨ。

$0, -9, -4, 5, 23, -71, 41, 90$.

11. 次ノ諸數ヲ大小ノ順ニ排列セヨ。

$-35, 7, -23, 76, -100, -300, 500$.

29. 乘法. 正數ト正數トノ積ハ又一ノ正數ナルヲハ明カナリ。

例 合 べ $5 \times 3 = 15$.

同様ニ a ト b トノ積ハ ab ナリ,但シ a, b 等ノ文字ハ正數ヲ表ハスモノトス。

又 正數ト正數トノ積ハ乘數ト被乘數トヲ交換スルモ變ズルヲナシ。

例令バ 5×3 ハ 1 ナ五個集メタルモノヲ三個加ヘ合シタル高ニシテ次ノ如ク書キ表ハスヲ得。

$$5 \times 3 = \begin{cases} 11111 \\ 11111 \\ 11111 \end{cases}$$

此内ニハ 1 ハ總計 15 アルナリ、即チ $5 \times 3 = 15$ ナリ、今之ハ先ツ縦ニ 1 ナ三ツ記シ、而シテ之ヲ五行取りタリトモ見ルヲ得ベシ、然ルトキハ $15 = 3 \times 5$ ナリ、即チ

$$5 \times 3 = 3 \times 5.$$

同様ニ a, b ニテ正數ヲ表ハセバ

$$ab = ba.$$

負數ニ正數ヲ乘ズルニハ其絶對値ノ積ニ負號ヲ附スベシ。

$$\begin{aligned} \text{例令バ } (-4) \times (+3) &= -4 + (-4) + (-4) = -(4+4) + (-4) \\ &= -(4+4+4) = -(4 \times 3) = -12. \end{aligned}$$

從ツテ一般ニ a, b ヲ以テ正數ヲ表ハセバ

$$(-a) \times (+b) = -ab.$$

正數ニ負數ヲ乘ズルトイフヲハ負數ニ正數ヲ乘ズルト同様ナリト定ム。

$$\text{例令バ } 4 \times (-3) = -3 \times 4 = -12.$$

同様ニ a, b ニテ正數ヲ表ハセバ

$$(+a) \times (-b) = (-b) \times (+a) = -ba = -ab.$$

即チ $(+a) \times (-b) = -ab.$

因テ 正數ニ負數ヲ乘ズルニハ其絶對値ノ積ニ負號ヲ附スベシ。

最後ニ 負數ト負數トノ積ハ其絶對値ノ積ヲ絶對値トセル正數ナリト定ム。

$$\text{例令バ } (-4) \times (-3) = 4 \times 3 = 12.$$

同様ニ a, b ニテ正數ヲ表ハセバ

$$(-a) \times (-b) = ab.$$

30. 前節ノ結果ヲ再記スレバ

$$(+a) \times (+b) = ab. \quad (-a) \times (+b) = -ab.$$

$$(+a) \times (-b) = -ab \quad (-a) \times (-b) = ab.$$

此事柄ヲ約言スレバ次ノ如シ。

同號ハ正ヲ生ジ、異號ハ負ヲ生ズ。

之ヲ符號ノ定則ト稱ス。

又以上ノ結果ハ文字ノ正負ニ關セズ恒ニ正當ナリ。

例令バ b ハ負數ニシテ $-c$ ニ等シトセン、然ルキハ以上ノ式ハ

$$(+a) \times (-c) = -ac. \quad (-a) \times (-c) = ac.$$

$$(+a) \times (+c) = ac. \quad (-a) \times (+c) = -ac.$$

トナル、而シテ此結果ハ正當ナリ。

31. 除 法. 除法ハ乘法ノ逆算ナリ、從ツテ明カニ次ノ定則ノ存スルヲ見ルベシ。

a, b ニテ正數ヲ表ハセバ

$$(+ab) \div (+b) = a. \quad (+ab) \div (-b) = -a.$$

$$(+ab) \div (-b) = -a. \quad (-ab) \div (-b) = a.$$

即チ乘法ニ於ケルト同ジ符號ノ定則ノ存スルヲ見ル、即チ同號ハ正ヲ生ジ、異號ハ負ヲ生ズ。

此處ニ於テモ文字ハ正負何レノ數ヲ

代表セルトシテモ差支ナキトハ明瞭ナルベシ。

從ツテ乘法及ビ除法ニ於テモ文字ハ正負何レノ數ヲモ代表セルモノト見做スト得。

32. 以上ノ諸定則ノ説明ニハ整數ヲ用井タレモ又分數ヲ用ウルモ同ジク説明スルト得。

$$\text{例令バ} \quad \frac{3}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{2 \times 5} = \frac{7 \times 3}{5 \times 2} = \frac{7}{5} \times \frac{3}{2}.$$

$$\text{又} \quad \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{7}{5} = -\left(\frac{3}{2} \times \frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{7}{5} \times \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right).$$

$$\text{故ニ} \quad ab = ba.$$

他ノ場合モ同様ニ説明スルト得。

注意. 分數モ亦負數ト同ジク整數トハ別種ノ新數ニシテ數トイフ辭ノ意味ヲ擴張シテ得タル數ナリ、併シ其ヲ取扱フトハ算術ニ於テ已ニ知レルモノトシテ茲ニハ省略スベシ、又正ノ整數ニ對シテ負ノ整數アル如ク正ノ分數ニ對シテ負ノ分數アルトハ明カナルベク、其演算ノ方法等ハ整數ノ時ト同様ニシテ重テテ説クノ必要ナキヲ以テ之ヲ略ス。

演 習 問 題 6.

1. $7 = -11$ ヲ乘ゼヨ.
2. $-9 = -17$ ヲ乘ゼヨ.
3. -7 ト $+23$ トノ積ヲ求ム.
4. 次ノ二數ノ大小ヲ問フ.
 $(-3) \times 6,$ $4 - 14.$
5. -1 ト 16 トノ積ヲ求ム.
6. 29 ト -17 トノ積ヲ求ム.
7. $a = -2, b = 4, c = -1, x = 4, y = -5$ ナル \mathbb{R} 次式ノ値ヲ求ム.
 - (1). $ax^2.$
 - (2). $5c^2y.$
 - (3). $bxy.$
 - (4). $4bx + 6cy.$
8. $a = -4, b = 2, c = 5$ ナル \mathbb{R} 次式ノ値ヲ求ム.
 - (1). $a + (-b) + (-c).$
 - (2). $-a - (-b) - (-c) - 4.$

正 量 及 ビ 負 量.

33. 以上論ジ來レル \mathbb{T} ハ皆純粹ノ數ニ關スル \mathbb{T} ニシテ、從ツテ文字ハ皆數ヲ

代表スルモノニシテ決シテ量ノ大サヲ表ハスモノニアラズ. 例令バ $a+b$ トアル \mathbb{R} ニハ之ハ a 及ビ b ノ代表セル任意ノ二數ノ和ニシテ從ツテ又一ノ數ナリ、決シテ之ハ 5 錢ト 3 錢ト和即チ 8 錢トカ又ハ 2 尺ニ 5 尺ノ和即チ 7 尺ノ如ク量ヲ表ハスモノニアラズ.

注意. 原ト數學ハ數ノ學問ニシテ量ノ測算ハ其應用ニ止マルノミ、然ルニ初等算術ニ於ケル問題ノ多ハ量ノ計算ナルヲ以テ初學者ハ往々ニシテ數學ノ目的ハ量ノ計算ナリト誤解スルノ虞アリ之レ大ナル謬見ナリ、深ク注意アラフヲ要ス.

算術ニ於テ用ウル處ノ數ハ皆正數ニシテ從テ量ノ計算ニハ此數ヲ用非來レルナリ; 例令バ 15 里ノ 15 ハ一ノ正數ナリ.

然ルニ代數學ニ於テハ正數ノ外ニ負數ナル一種ノ數ヲ得タリ、今此數ハ應用上如何ニ用非ラル、ヤチ次ニ例ヲ以テ

示スベシ。

(1). 蝸牛アリ、一竿ノ中央ヨリ昇ルコト五尺ニシテ故障ニ逢ヒ三尺降リタリト云フ、然ルトキハ中央ヨリ何尺昇リタルヤトイフニ、 $5 - 3 = 2$ 即チ二尺ノ昇リトナルナリ。

然ルニ今二尺昇リテ后五尺降リタルキニハ、此章ニ擧ゲタル計算ノ方法ヲ應用シテ

$$2 - 5 = -3.$$

トナル、即チ -3 尺ノ昇リトナルナリ、借實際ニハ中央ヨリ 3 尺丈ケ降リテ居ルナリ、即チ -3 尺ノ昇リト云フコトハ 3 尺ノ降リト云フコトニ解釋スベキモノトナルナリ。

(2). 實業家アリ、二十萬圓ヲ以テ一ノ工業ニ従事シテ損失ヲ來シ二十五萬圓ヲ失ヘリト云フ、此人ノ資産幾何ト云フ

ニ

$$200000 - 250000 = -50000.$$

-5 萬圓トナル、之ヲ實際ニ徴スルニ二十五萬圓ノ内二十萬圓丈ケハ己レノ所持金ニテ支拂ヒ、五萬圓丈ケハ借財トナリ居ルナリ、即チ此人ノ資産ハ借財五萬圓ナリ、因テ -5 萬圓ノ資産ト云フコトハ借財五萬圓ニ當ルナリ。

(3). 一ノ方向ニ測リタル距離ヲ正數ヲ以テ表ハスキニハ之ト正反對ノ方向ニ測リタル距離ヲ表ハスニ負數ヲ以テス。例令バ一旅客アリ或街道ヲ東方ニ向ツテ進ムコト三里ニシテ急用出來シテ 7 里西方ニ戻リタリト云フ、然ルキハ出發點ヨリ何里東方ニ進ミタルカト云フニ

$$3 - 7 = -4.$$

即チ -4 里ノ進ミトナル、然ルニ實際ハ 4

里丈ケ西方ニ退キタルナリ,因テ-4里丈ケ東方ニ進ミタリト云フコハ4里丈ケ西方ニ進ミタリト云フコト解釋スベキナリ.

此等ノ例ニ於テ示セル如ク負數ヲ用井テ表ハス量ヲ負量ト稱シ,之ニ對シテ正數ヲ以テセルモノヲ正量ト稱ス.

例令バ-3尺,-5萬圓,-4里ノ如キハ負量ニシテ3尺,5萬圓,4里ノ如キハ正量ナリ.

一般ニ $-a$ 錢, $-b$ 尺等ノ如キハ負量ナリ.

凡テ收支,損益,昇降,前後等正反對ノ量ヲ計ルキニハ一方ヲ正數ヲ以テ表ハセバ他ハ負數ヲ以テ之ヲ表ハスナリ.

以上ノ如クシテ定メラレタル正量及ビ負量ハ之ヲ計算スルニ當リ前諸節ニ於テ得タル負數計算ノ諸法則ヲ如何ニ應用スルカハ明白ナルベシ.

例令バ或人五百圓ト二百圓トヲ受ケ取ルキニハ

合計七百圓ヲ受取ルコトニシテ,收入ヲ以テ三百圓ヲ餘シ二百圓ノ借金ヲ返ヘストキニハ $300 - (-200) = 500$ 即チ五百圓ノ全收入トナル等,其他皆此ノ如シ.

一ノ量ノ大サヲ正負ニ關係ナク考フルキニハ之ヲ其絕對値トイフ;例令バ利益金5圓モ-5圓即チ損失金5圓モ其絕對値ハ何レモ5圓ナリ.

演 習 問 題 7.

負數ヲ用井テ次ノ問題ヲ解ケ.

1. 一農夫年末ニ於テ其年ノ收穫米ノ高ヲ計算セシニ,自宅ノ收穫高ハ八十俵ニシテ小作人ヨリ受取タル高ハ五十俵ナリ,而シテ此内四十五俵ヲ賣拂ヒタリトイフ,現在ノ俵數如何,

2. 或人航海中暴風ニ逢ヒ北方ニ流サル、コト五里ニシテ漸ク順風ヲ得七里南方ヘ歸ルコトヲ得タリシニ,會々第二ノ颶風起リ又北方ニ三里流サレタリトイフ,然ルキハ初メノ位置ヨリ幾里北方ヘ流サレタルカ.

3. 或人甲地點ヲ通過後五時間ニテ乙地點ニ達

セリ、然ルニ此時ハ丙地點ヲ通過後八時間目ナリキ、然ルニハ甲地點通過ノ前後何時間目ニ乙地點ヲ通過セシカ。

4. 甲乙ノ二童相距タルヲ八間ニテ球ヲ投ゲテ相戯ル、アリ、今甲ヨリ投ゲタル球ハ乙ノ頭上ヲ過ルヲ四間ノ處ニ墮テタリ、次ニ乙ハ其處ニ至リ投ゲ歸セシニ此球ハ十六間ノ先キニ墜テタリト云フ、然ルニハ甲ヨリ何間距リタル處ニアリヤ、又乙ノ初メノ位置ヨリ何間距リ居ルカ。

5. 一商人五百圓ヲ益シ、其外ニ利金ヲ以テ三百圓ヲ支拂ヒ、七百圓ノ借金ヲ返濟シ、二百圓ヲ他人ニ貸シタリト云フ、此商人ノ全利ハ幾何圓ナリヤ。

第三章 整式ノ四則

加 法

34. 單項式ノ加法 一數ニ他ノ數ヲ加フルニハ其符號ヲ變ゼズシテ之ヲ列記スベシ。(前章ヲ見ヨ。)

例令バ $a+(+b)=a+b$ 又 $a+(-b)=a-b$.
次ニ一二ノ重要ナル法則ヲ舉ゲン。

數多ノ數ノ和ハ之ヲ加ヘ合ハス順序ニ關係セズ。之ヲ交換ノ法則ト稱ス。

二數ノ場合ハ既ニ前章ニ於テ知レル處ナリ、其他ノ場合モ同様ニ加法ノ性質ヨリ説明スルヲ得。

$$\begin{aligned} \text{例令バ } 2+3+1 &= 3+2+1 = 1+2+3 = 2+1+3 \\ &= 3+1+2 = 1+3+2 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 4+(-2)+5 &= (-2)+4+5 = 4+5+(-2) \\ &= 5+4+(-2) = 7. \end{aligned}$$

從ツテ一般ニ

$$\begin{aligned} a+b+c &= a+c+b = b+a+c = b+c+a \\ &= c+a+b = c+b+a. \end{aligned}$$

數多ノ數ノ和ハ之ヲ任意ノ數群ニ分
チ而シテ各群ノ和ヲ加ヘ合ハシタルモノ
ニ等シ. 之ヲ組合ノ法則ト稱ス.

何トナレバ

$$\begin{aligned} a+b+c &= b+c+a \text{ (交換ノ法則)} \\ &= (b+c)+a \\ &= a+(b+c). \text{ (交換ノ法則)} \end{aligned}$$

又 $a+b+c+d = c+d+a+b$ (交換ノ法則)

$$= (c+d)+a+b$$

上ノ結果ニヨリ $= (c+d)+(a+b)$

$$= (a+b)+(c+d).$$

其他皆此ノ如シ.

同類項. 同ジ文字ヨリ成ル數多ノ項
ヲ同類項ト稱ス.

例令バ $3ax^2, -15ax^2, ax^2$ ハ同類項ナリ.

同類項ヲ加ヘ合ハス₇ヲ同類項ヲ約
ス, 又ハ集メルト稱シ, 次ノ法則ニ從ツテ
之ヲ施行ス.

(1). 加ヘ合ハスベキ同類項ガ皆同ジ
符號ヲ有スルキニハ係數ノ和ヲ求メテ
之ヲ和ノ係數トシ其前ニ固有ノ符號ヲ
附スベシ.

例令バ $aby^2z, 2aby^2z, 12aby^2z$ ノ和ヲ求ムルキニハ
先ヅ $1+2+12=15$, 故ニ所要ノ和ハ $15aby^2z$ ナリ.

(2). 加ヘ合ハスベキ同類項ガ皆同符
號ヲ有シザルキニハ先ヅ正項ノ和ト負
項ノ和トノ係數ヲ算出シ, 而シテ此二係數
ノ差ヲ以テ所要ノ和ノ係數トシテ其前
ニハ此二係數中ノ大ナル方ヲ有スル和
ノ符號ヲ附スベシ.

例令バ $abx, -3abx, 5abx, 11abx, -9abx$ ノ和ヲ求ムル
ニハ, 先ヅ $abx, 5abx, 11abx$ ト $-3abx, -9abx$ トノ二組ニ分
チ, 各ヲ約シテ得タル $17abx$ ト $-12abx$ トヲ加フルナリ,
即チ $17-12=5$ ナル故ニ所要ノ和ハ $5abx$ ナリ.

上來得タル結果ニヨリ數多ノ單項式ノ和ハ次ノ如クシテ見出スベシ。

數多ノ單項式ヲ加フルニハ符號ヲ變ゼズシテ之ヲ列記シ、若シ同類項アルキニハ之ヲ約スベシ。

35. 多項式ノ加法. 數多ノ多項式ヲ加ヘ合ハスニハ符號ヲ變ゼズシテ其各項ヲ列記シ、同類項ハ之ヲ約スベシ。

例 1. $3a+6c$ ト $21a-13c+e$ トノ和ヲ求ム。

$$3a+6c+21a-13c+e = 24a-7c+e.$$

例 2. $a^2+3ab-5b^2, -2a^2-4ab+7b^2, 13a^2-10ab-3b^2$ ノ和ヲ求ム。

$$\begin{aligned} & a^2+3ab-5b^2-2a^2-4ab+7b^2+13a^2-10ab-3b^2 \\ & = a^2-2a^2+13a^2+3ab-4ab-10ab-5b^2+7b^2-3b^2 \\ & = 12a^2-11ab-b^2. \end{aligned}$$

同類項ヲ約スルニ便利ナランガ爲メニ通常同類項ヲ同ジ縦列ニ列記シテ加法ヲ施行ス。即チ次ニ示セルガ如シ。

前例ノ2ノ場合ニハ

$$\begin{array}{r} a^2+3ab-5b^2 \\ -2a^2-4ab+7b^2 \\ \hline 13a^2-10ab-3b^2 \\ \hline 12a^2-11ab-b^2. \end{array}$$

例. $2a+b-3c, 2b+c-3e$ ト $a+4c-d$ ノ和ヲ求ム。

$$\begin{array}{r} 2a+b-3c \\ \quad 2b+c-3e \\ \quad \quad a+4c-d \\ \hline 3a+3b+2c-3e-d. \end{array}$$

演 習 問 題 8.

次ノ式ヲ加ヘ合セヨ。

- $11abc, -3abc, 7bd, -9bd.$
- $3x^2+2xy+y^2, -4xy, -2x^2-2y^2.$
- $a^2b^2+b^2c^2, x^4-y^4-z^4.$
- $2mn-4ml-5ln, -5mn+6ml-12ln.$
- $13kx^3+22ly^3-mz^3, 2kx^3-20ly^3+7mz^3, -2kx^3-4ly^3+mz^3.$
- $2x^4-5y^2z^2+6z^4, -3y^4-4x^2z^2+5x^2y^2, -12x^4+8x^2y^2.$
- $x^4-3x^2+15x-4, -5x^3+4x^2-6x+1, -4x^4-5x^2+1.$
- $ab+bc-ca, bc+ca-ab, ca+ab-bc.$
- $2xy-yz-zx, 2yz-zx+xy, 2zx-xy-yz.$

$$10. \quad 20a^2b^2 - 10ab^3 - 7b^4, \quad 2a^4 - 4a^3b - 14a^2b^2 + 10ab^3, \\ -a^4 + 4a^3b - 5a^2b^2 + 3b^4.$$

36. 多項式アリテ同文字ノ種々ノ冪ヲ含ムキ、其最大ノ冪ヨリ初メテ指數ノ順序ニ從ヒ其小ナルモノ程右ニ列記シアルキニハ降冪ノ順ニ排列サレタリト云フ。

例令バ $3a^5 - 2a^4 + 7a^3 - a^2 - 15a + 9$ ハ a ノ降冪ノ順ニ排列サレタル式ナリ。

之ト反對ニ列記セラル、キニハ昇冪ノ順ニ排列サレタリト云フ。

例令バ $9 - 15a - a^2 + 7a^3 - 2a^4 + 3a^5$ ハ a ノ昇冪ノ順ニ排列サレアルナリ。

通常一ノ代數式ノ各項ハ a, b, c, \dots ノ順ニ列記スルカ、又ハ其中ノ或文字ニ付キ昇冪又ハ降冪ノ順ニ排列スルモノナリ。

例令バ $5a^2 + 3ab - b^2$ ノ如シ之ハ a ノ降冪ノ順ニ排列シアリ、同時ニ b ノ昇冪ノ順ニ排列シアルナリ。

又前節ノ例ニ於テ $3a + 3b + 2c - 3e - d$ ト記スル代リ

$= 3a + 3b + 2c - d - 3e$ ト記スル方順序良ク排列シアルトイフナリ。

例. $x^3 - 4x^2y + y^3 + y^2x, 5x^2y + 6y^3 - 7x^3$ 及ヒ

$$2x^2y - 3y^3 + 5xy^2.$$

ノ和ヲ求メ、且ツ x ノ降冪ノ順及ヒ y ノ昇冪ノ順ニ排列セヨ。

先ヅ加ヘ合ハスベキ各多項式ヲ所要ノ順ニ排列シテ加法ヲ行フコトノ如シ。

$$\begin{array}{r} x^3 - 4x^2y + xy^2 + y^3 \\ -7x^3 + 5x^2y \quad + 6y^3 \\ \hline 2x^2y + 5xy^2 - 3y^3 \\ \hline \text{和} \quad -6x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 4y^3. \end{array}$$

演 習 問 題 9.

次ノ諸式ヲ加ヘ且ツ順序能ク排列セヨ。

- $2b + c, -a + 4d, 4d - 3a, 7a - 5c.$
- $3l + 3n + 3m, -2n - 5m + l, -2m - 7l + 4n.$
- $a + b + c, b - 7a - 8d, 3d + 4c - 5a.$
 $12b - 19c + 23a.$
- $3x + 5z - y, 2y - 4x + 7z, -20x + 19y - 5z.$

次ノ諸式ヲ加ヘテ x ノ降冪或ハ昇冪ノ順ニ排列セヨ。

$$5. \quad x^3 - 4ax^2 - 2a^2x + a^3, \quad -3x^3 + 2ax^2 - a^2x + 4a^3, \\ -4a^2x + 15x^3, \quad -a^3 + 20ax^2 + 7a^2x.$$

$$6. \quad 2x^3 + 4x^2 + y^2 + x, \quad 12x^2 - 4x - 5x^3 + 5y^2, \quad -5y^2 + 4x, \\ -22x^2 + 7x - 9x^3 - 4y^2.$$

$$7. \quad 13x^4 + 2x^2y^2 + y^4, \quad -4x^2y^2 - 2y^4, \quad 12x^2y^2 - 3x^4.$$

次ノ諸式ヲ加ヘ a ノ降冪ノ順、及ヒ b ノ昇冪ノ順ニ排列セヨ。

$$8. \quad a^3 - ab^2 - a^2b, \quad b^3 - a^2b + 3b^2a, \quad -2b^3 - a^2b + ab^2.$$

$$9. \quad a^4 - b^4, \quad b^3a - a^3b, \quad 6a^2b^2 - 3a^3b, \quad 2b^4 - 5ab^3.$$

減 法

37. 單項式ノ減法. 一數ヨリ他ノ數ヲ減ズルニハ其符號ヲ變ジテ之ヲ列記スベシ. (前章ヲ參照セヨ.)

$$\text{即チ} \quad a - (+b) = a - b \quad \text{又} \quad a - (-b) = a + b.$$

數多ノ數ヲ減ジタル結果ハ減數ノ順序ニ關係セズ.

$$\text{例令ベ} \quad 8 - 3 - 4 = 8 - 4 - 3 = 1.$$

$$\text{同様ニ} \quad a - b - c = a - c - b.$$

數多ノ數ヲ順次ニ減ズルモ、亦此等ノ數ノ和ヲ減ズルモ其結果ハ相同ジ.

$$\text{例令ベ} \quad 8 - 3 - 4 = 8 - (3 + 4) \\ = 8 - 7 = 1.$$

$$\text{同様ニ} \quad a - b - c = a - (b + c).$$

33. 多項式ノ減法. 一ツノ代數式ヲ減ズルニハ其各項ノ符號ヲ變ジテ之ヲ列記シ、而シテ同類項ハ約スベシ.

$$\text{例.} \quad 4a^2 + 5ab - b^2 \quad \text{ヨリ} \quad a^2 - 2ab + 3b^2 \quad \text{ヲ減ズベシ.}$$

$$\text{差} \quad 4a^2 + 5ab - b^2 - a^2 + 2ab - 3b^2 \\ = 3a^2 + 7ab - 4b^2.$$

同類項ヲ約スルニ便利ナランガ爲メニ減ズベキ式ヲ減セラルベキ式ノ下ニ置キ、同類項ヲ上下相並ブ様ニナシ、下ノ項ノ符號ヲ胸算ニテ變更シテ之ヲ加ヘ合スベシ.

$$\text{例.} \quad \text{前例ヲ用ウレバ}$$

$$4a^2 + 5ab - b^2$$

$$a^2 - 2ab + 3b^2$$

差

$$3a^2 + 7ab - 4b^2.$$

借胸算ニテ符號ヲ變ジテ加法ヲ行フ
 其ニ中リ初學者ハ屢々誤算ヲ來スノ虞
 アリ、之ヲ避ケンニハ引クベキ式ノ符號
 ヲ變更シテ書下シ而シテ加法ヲ行フベ
 シ。

例合バ上例ヲ用ウレバ

$$4a^2 + 5ab - b^2$$

$$-a^2 + 2ab - 3b^2$$

$$3a^2 + 7ab - 4b^2.$$

ノ如シ、左レモ成ル可ク胸算ニテ前例ニ
 示セル如ク行フニ熟達センヲ要ス。

演 習 問 題 10.

1. $7a + 11c$ ヲリ $3a - 5c$ ヲ減ゼヨ.
2. $4a + 2b - c$ ヲリ $5a + b - 4c$ ヲ減ゼヨ.
3. $4ab - 2bc - ac$ ヲリ $3ab + 7bc - 3ac$ ヲ減ゼヨ.
4. $6y^2 - 9x^2 - 3$ ヲリ $5y^2 - 4x^2 + 1$ ヲ減ゼヨ.

5. $a^2 + 2ab + b^2$ ヲリ $a^2 - ab + 2b^2$ ヲ減ゼヨ.
6. $5x^2 - 6xy - y^2$ ヲリ $15xy - 4y^2 - 5x^2$ ヲ減ゼヨ.
7. $8x^3 + 13x^2y - 11xy^2 + y^3$ ヲリ $x^3 + 14x^2y - 4y^3$ ヲ減ヅテ
 得タル差ヨリ $2x^3 - 11xy^2$ ヲ減ゼヨ.
8. $13y^4 - 7xy^3 + 5x^2y^2 + x^3y + 15x^4$ ヲリ $6x^2y^2 - 7xy^3 - 3x^3y$ ヲ
 減ヅテ x ノ降冪ノ順ニ排列セヨ.
9. $\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{11}xy - y^2$ ヲリ $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{11}xy + 4y^2$ ヲ減ヅテ y ノ
 降冪ノ順ニ排列セヨ.
10. $4abc - a^3 + b^3$ ヲリ $3ab^2 - 2abc + 3a^2b$ ヲ減ヅテ a ノ昇
 冪ノ順ニ排列セヨ.
11. $1 - 15x - 7x^2$ ヲリ $3 + 4x - 4x^3$ ヲ減ヅテ其結果ヨリ
 $x^3 - 4x^2 - 4$ ヲ減ゼヨ.
12. $4a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 - 2a^2b - ab^2$ ヲ加ヘ其和ヨリ
 $2a^3 + 2b^3 - ab^2 - a^2b$ ヲ減ゼヨ.

括 弧 用 法.

39. 是迄得タル加法及ビ減法ノ諸法
 則ニヨリ括弧用法ヲ定ムルヲ次ノ知シ.

(1). 括弧ノ前ニ十號ヲ有スルキニハ
其内ノ各項ニ變化ナシニ其マ、之ヲ取

外ツスヲ得.

例. $a+(b-c+d)=a+b-c+d.$

逆ニ或式ノ任意ノ部分ヲ十號ヲ前ニ有スル括弧内ニ入ル、キニハ其部分ノ各項ノ符號ニ變化ナシ.

例. $a+b-c+d=a+(b-c+d).$

注意. 括弧内ニアル式ノ初項ガ正項ナルキニハ其十號ハ省略スルヲ常トス.

(2). 其前ニ一號ヲ有スル括弧ヲ除外ヅスキニハ其内ニアル各項ノ符號ヲ變ズベシ.

例. $a-(b+c-d)=a-b-c+d.$

逆ニ或式ノ任意ノ部分ヲ一號ヲ前ニ有スル括弧内ニ入ル、キニハ其部分ノ各項ノ符號ヲ變ズベシ.

例. $a-b-c+d=a-(b+c-d).$

時トシテハ括弧ノ内ニ括弧ヲ置クアリ、此時ニハ混雜ヲ避ケンガ爲メニ異

形ノ括弧ヲ用ウ.

例. $a-\{b+(c-d)\}$ ニ於テ $\{\}$ ハ一ノ括弧ニシテ此内ノ $b+(c-d)$ ノ全軀ヲ a ヨリ減ズルヲ示ス.

括弧ヲ幾双モ用ウルニハ上ノ法則ニ從ヒ一雙ツ、之ヲ除外シ、又ハ挿入スルナリ.

例.
$$\begin{aligned} a-[3b-\{4c-(d+e)\}] \\ &= a-[3b-\{4c-d-e\}] \\ &= a-[3b-4c+d+e] \\ &= a-3b+4c-d-e. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} a-3b+4c-d-e \\ &= a-3b+4c-(d+e) \\ &= a-3b+\{4c-(d+e)\} \\ &= a-[3b-\{4c-(d+e)\}]. \end{aligned}$$

演 習 問 題 11.

次ノ諸式ノ括弧ヲ外ヅシ且ツ之ヲ簡單ニセヨ.

1. $a-b-c-(a-b+c).$
2. $1-(1-a+(1-a+a^2)-(1-a+a^2+a^3)).$

3. $3x - 2y + 2z - (x + y - 2z) - (x + 4y + 5z).$
4. $3a - (2c - 2d) - \{a - c - (2b - 2d)\}.$
5. $7b - [3c - \{4b - (2a - 3c)\}].$
6. $5x - (3y + 2z) - [5x - (7z - 3y) + 5z - \{x - (z - 4y)\}].$
7. $2c - 4a + [4b - \{7a - (9b + c)\} + 12a].$
8. $16x + [7 - (4 + 5x) - 9y + \{6 - 4x + (3y - 11)\}].$
9. $4a - [4a - \{4a - (4a - \overline{4a - a})\}].$
10. $4x - [3y - \{5x - (4y - \overline{7x - 4y})\}].$
11. $y^4 - [3y^3 - (4y^3 - 7y^2) - \{6y^2 + (3y^2 - \overline{11y^3 - 12y^2})\}].$
12. $l - [m - \{2l - (m + \overline{n - l})\} - (3m - \overline{l + n})].$
13. $12pq - [pq - \{qr - (10pq + \overline{qr - 5})\} + 4qr].$
14. $x^4 - [x^3 - \{2x^2 + (x - \overline{7x - 4})\}] - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 4).$

乗 法

40. 單項式ノ乘法. 先ヅ一ニノ緊要ナル法則ヲ擧ゲン.

二數ヲ順次ニ或數ニ乗ズルモ, 亦此二數ノ積ヲ乗ズルモ其結果ハ相同ジ.

例令バ $7 \times 5 \times 4$ ノ場合ヲ考ヘン. 先ヅ7ヲ一列ニ五ツ書下シ之ヲ四列取ルベシ, 然ルキハ各列ノ和

ハ $7 \times 5 = 35$ ニシテ全跡ハ $7 \times 5 \times 4$ ナルベシ.

$$\left. \begin{array}{cccccc} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{諸テ又此中} = 7 \times 5 \times 4 \\ = 20 \text{個アル故ニ全跡} \\ \text{ハ} 7 \times 20 \text{ナルベシ, 故ニ} \\ 7 \times 5 \times 4 = 7 \times 20 = 7 \times (5 \times 4). \end{array}$$

同様ニシテ一般ニ $abc = a(bc)$ ナルコトヲ證スルヲ得.

又29節ニ得タル結果ト上ノ結果トヲ用井テ次ノ事ヲ證スルヲ得.

三ツノ數ヲ順次乗ジテ得ベキ積ハ此三ツノ因數ヲ如何ナル順序ニ取ルモ變ゼズ. 即チ

$$\begin{aligned} abc &= bca = cab = cba \\ &= acb = bac. \end{aligned}$$

一般ニ 數多ノ數ノ積ハ此等ノ數ノ順序ニ關係セズ. 之ヲ交換ノ法則ト稱ス.

又 數多ノ數ノ積ハ此等ノ數ヲ任意ニ分チタル各群ノ積ノ積ニ等シ. 之ヲ組合ノ法則ト稱ス.

此法則モ亦前ニ得タル結果ヨリ直チ
ニ證明スルヲ得。例令バ a, b, c, d, e ノ積
ニ付キテ考ヘンニ

$$abcde = abc \cdot d \cdot e = abc \cdot (de).$$

然ルニ $abc = a \cdot (bc).$

故ニ $abcde = a(bc)(de).$

又 $abcde = badec$ (交換ノ法則)

上ニヨリ $= b(ad)(ec).$

或ハ又 $abcde = (ba)(de)c.$

41. 12節ニ因テ $a^3 = a a a, a^5 = a a a a a.$

故ニ $a^3 \times a^5 = a a a \times a a a a a$

$$= a a a a a a a a$$

$$= a^8$$

$$[= a^{3+5}.]$$

同様ニ $a^m \times a^n = a^{m+n}.$

因テ次ノ法則ヲ得.

同文字ノ二ノ冪ノ積ハ又此文字ノ冪
ニノ其指數ハ二因數ノ指數ノ和ニ等シ.

之ヲ推擴メテ次ノ法則ヲ得.

同文字ノ多クノ冪ノ積ハ亦一ノ冪ニ
シテ其指數ハ各冪ノ指數ノ和ニ等シ.

例令バ $a^m a^n = a^{m+n}$ ノ如シ.

之ヲ指數ノ定則ト稱ス.

數多ノ單項式ヲ乘ズルニハ次ノ法則
ニ從フベシ.

- (1). 數字因數アルトキニハ其積ヲ先
ツ左端ニ記シ、次ニ各文字ヲ列記スベシ.
- (2). 斯クシテ得タル積中同文字アル
トキニハ前節ニ從ヒ冪ノ形ニ記スベシ.
- (3). 積ノ符號ハ符號ノ定則ニ從ヒ適
當ニ之ヲ定ムベシ.

今符號定則ヲ次ニ再記セン。即チ

$$\begin{cases} (+) \times (+) = (+). & (-) \times (-) = (+). \\ (-) \times (+) = (-). & (+) \times (-) = (-). \end{cases}$$

例 1. $a, -5ac$ ノ積ヲ求ム.

$$a \times (-5ac) = -5a^2c.$$

例 2. $-xy^2, axyz, -12ay^2z^2$ の積ヲ求ム
 $(-xy^2) \times (axyz) \times (-12ay^2z^2) = 12ax^2y^5z^3$.

演 習 問 題 12.

次ノ諸式ノ積ヲ求ム.

- | | | |
|--|--|-------------------|
| 1. $2ab, 3c.$ | 2. $-4bc, b^2c.$ | 3. $-7abc, bc^2.$ |
| 4. $-ab, -2bc, -3ca.$ | 5. $3xy, -yz, -x^2z^2.$ | |
| 6. $4a^3b^3, -3x^2y^3.$ | 7. $-6pq, 4qr, -pr.$ | |
| 8. $-11x^2y^2, 3xz, -\frac{1}{2}y^2z^2.$ | 9. $5axy, -3byz, -cax.$ | |
| 10. $-2x^2y, -\frac{2}{3}abxy^2.$ | 11. $3a^5b^4x, -4a^4b^5y.$ | |
| 12. $6a^4b^2x, -\frac{1}{3}a^2by, -7abx^3y^3.$ | | |
| 13. $ab^2cd^2, -9a^2bc^2d.$ | 14. $17ap^2qr^2, \frac{1}{2}bpq^2r^2.$ | |
| 15. $-3lm, -mn, lnx.$ | 16. $-3blx, -7cmx.$ | |
| 17. $6x^3y^2, 5a^3x^3.$ | 18. $-21a^2b^2x^4, \frac{1}{3}abx^2y^4.$ | |
| 19. $-21ad, -\frac{1}{4}bc, -\frac{1}{3}ad.$ | | |

42. 單項式ト多項式トノ乘法. 數多ノ項ヲ含ム式ニ單項式ヲ乘ズルニハ次ノ如クスベシ.

例 令バ $a+b = 4$ ヲ乘ズルニハ

$$(a+b) \times 4 = (a+b) + (a+b) + (a+b) + (a+b)$$

$$= a+b+a+b+a+b+a+b$$

$$= a+a+a+a+b+b+b+b$$

$$= a \times 4 + b \times 4.$$

從ツテ $(a+b) \times c = (a+b)c = ac+bc.$

同様ニ $(a+b+c)d = \{(a+b)+c\}d$

$$= (a+b)d + cd$$

$$= ad+bd+cd.$$

即チ一ノ多項式ニ單項式ヲ乘ズルニハ其各項ニ之ヲ乘ズベシ. 之ヲ分配ノ法則ト稱ス.

又一ノ單項式ニ多項式ヲ乘ゼンニハ

例 令バ $a+b+c$ ヲ d ニ乘ゼンニハ次ノ如クスベシ.

$$d(a+b+c) = (a+b+c)d \text{ (交換ノ法則)}$$

$$= ad+bd+cd$$

$$= da+db+dc.$$

即チ一般ニ一ノ單項式ニ一ノ多項式ヲ乘ゼンニハ此各項ヲ乘ジテ其和ヲ取ルベシ.

上ノ二ツノ結果ハ次ノ如クイヒ表ハ
スヲ得.

單項式ト多項式トノ積ハ多項式ノ各
項ニ單項式ヲ乘ジテ得タル積ノ和ニ等シ

例. $2a^2 - 3bc + b^2$ ト $-7b$ トノ積ヲ求ム.

$$\begin{aligned}(2a^2 - 3bc + b^2)(-7b) &= 2a^2(-7b) - 3bc(-7b) + b^2(-7b) \\ &= -14a^2b + 21b^2c - 7b^3.\end{aligned}$$

演 習 問 題 13.

次ノ諸式ノ積ヲ求ム.

- | | |
|---|---|
| 1. $a - b, a^2b.$ | 2. $a + 3b - c, -2c.$ |
| 3. $x + y - z, -2yz.$ | 4. $2l - m - 3n, -xy.$ |
| 5. $2xy - 3az, -4axyz.$ | 6. $a^3 - 5b^3 - 3abc, a^2b^2c.$ |
| 7. $a^2 - b^2 - c^2, -2abc.$ | 8. $5x^3 - 7x^2y + 6xy^2, 2yz.$ |
| 9. $7a^3b^2x^2 - 6ab^3cx^3 + 3a^2bc^3y^2, -b^2x^2.$ | |
| 10. $-l^2m + mn^2 - ln^2, -lmn.$ | |
| 11. $4pq - 6qr + 12pr, \frac{1}{2}p^2q^2r^2.$ | |
| 12. $5a^4b^2 - 6a^3b^3 - 4a^2b^4, \frac{1}{3}a^2b^3.$ | |
| 13. $21x^3y^3, \frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}by.$ | 14. $15a^4b^4, \frac{1}{4}ab - \frac{1}{3}b^2.$ |
| 15. $12x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 7x - 6, -\frac{1}{4}x^2.$ | |

16. $27a^2x^2y^2, \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}a^2xy^2 + \frac{1}{4}ax^2y^3.$

17. $4p^2q^2 - 3q^2r^2 + 5p^2r^2 - 13p^2qr, \frac{1}{3}pqr^2.$

43. 多項式ト多項式トノ乘法. 今
二ツノ二項式ノ場合ヲ考究セン.

例令バ $(a+b)(c+d)$ ヲ求ンガ爲メニ
 $c+d$ ヲ m ト置ケバ

$$(a+b)m = am + bm.$$

此處 $= m$ ノ代リ $= c+d$ ヲ置ケバ

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) \\ &= ac + ad + bc + bd.\end{aligned}$$

然ルニ今 $a+b$ 中ノ總テノ項即チ $+a$ ト $+b$
 $= c+d$ ノ各項 $+c$ ト $+d$ トヲ夫々乘ジテ得
ル積ハ $+ac, +bc, +ad, +bd$ ノ四項ナリ,之ヲ
加フレバ $ac + ad + bc + bd$ トナル,之レ上ニ得
タル $(a+b)(c+d)$ ノ積ナリ,因テ二ツノ二項
式ヲ乘ズルニハ一方ノ式ノ各項ニ他ノ
式ノ各項ヲ乘ジテ得タル積ヲ加フベシ.

此事ハ一般ニ成立ス,即チ一式中ニハ m 個ノ項
アリ,他ノ式中ニハ n 個ノ項アルニモ成立スルナリ.

即チ $(a+b+c+\dots) \times (p+q+r+\dots)$

ヲ考ヘシニ $(p+q+r+\dots)$ ヲ m ト置ケル。

$$(a+b+c+\dots)m = am+bm+cm+\dots$$

故ニ

m ヲ $(p+q+r+\dots)$ ト置ケル

$$(a+b+c+\dots) \times (p+q+r+\dots)$$

$$= a(p+q+r+\dots) + b(p+q+r+\dots) + c(p+q+r+\dots) + \dots$$

$$= ap+aq+ar+\dots + bp+bq+br+\dots + cp+cq+cr+\dots + \dots$$

故ニ 二ツノ多項式ノ積ハ一方ノ式ノ各項ニ他ノ方ノ式ノ各項ヲ乗ジテ得タル積ノ和ニ等シ。

例 1. $(a+b-c)(x+y) = ax+bx-cx+ay+by-cy.$

例 2. $(3a-4b)(a-5b) = 3a^2-4ab-15ab+20b^2$
 $= 3a^2-19ab+20b^2.$

此例ニ於テ $-4ab$ ト $-15ab$ トハ同類項ナルヲ以テ約シテ $-19ab$ ト記セルナリ。

以上論ズル處ニ於テ一式ノ項ト稱スルハ其前ニ有スル符號ヲモ含蓄シテノ稱ナルトニ注意センコトヲ要ス。

44. 二ツノ多項式ノ乘法ヲ施行スルニ當リ先ツ乘數及ビ被乘數ヲ其中ニ有スル或文字ノ降冪或ハ昇冪ノ順ニ排列シ、而シテ後同類項ヲ約スルニ便ナランガ爲メニ次ノ如キ方法ニ從ツテ其積ヲ求ムルヲ可トス。

例 1. $a^2-2ab+b^2$ ト a^2+ab-b^2 トノ積ヲ求ム。

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+b^2 \\ a^2+ab-b^2 \\ \hline a^4-2a^3b+a^2b^2 \\ + a^3b-2a^2b^2+ab^3 \\ - a^2b^2+2ab^3-b^4 \\ \hline a^4-a^3b-2a^2b^2+3ab^3-b^4. \end{array}$$

積

即チ被乘數ノ下ニ乘數ヲ記シ、次ニ横線ヲ畫シ而シテ後乘數ノ左端ヨリ順次各項ヲ被乘數ノ各項ニ乗ジ、所得ノ同類項ハ同縦列ニアル様ニ排列スルコト上ノ如クスベシ、乘數ノ各項ヲ乗ズルコト終レバ餘ハ單ニ加法ヲ行フニ止マルナリ。

例 2. $a^3-2a^2b+3ab^2-b^3 = a-b$ ヲ乘ゼヨ。

$$\begin{array}{r}
 a^3 - 2a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 a - b \\
 \hline
 a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 \\
 - a^3b + 2a^2b^2 - 3ab^3 + b^4 \\
 \hline
 a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 4ab^3 + b^4
 \end{array}$$

積

上ノ方法ニ從フトキニハ同類項ヲ約スルニ便利ナルノミナラズ、乗數及ビ被乗數ヲ同ジ様ニ a, b, c, \dots ノ順又ハ或文字ノ降冪或ハ昇冪ノ順ニ排列シテアルトキニハ其結果ハ其儘ニテ新ニ排列シ直スノ手數ヲ省略スルヲ得ルナリ。

例 3. $x^4 - 2x^3 + 5x - 4$ ト $2x^2 - x + 1$ トノ積ヲ求ム。

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 \quad + 5x - 4 \\
 2x^2 - x + 1 \\
 \hline
 2x^6 - 4x^5 \quad + 10x^3 - 8x^2 \\
 - x^5 + 2x^4 \quad - 5x^2 + 4x \\
 \quad + x^4 - 2x^3 \quad + 5x - 4 \\
 \hline
 2x^6 - 5x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 13x^2 + 9x - 4
 \end{array}$$

演 習 問 題 14.

次ノ諸式ノ積ヲ求ム。

- $a+b-c, a-b-c.$
- $ax-by, 2ax+by.$
- $x^2-xy+y^2, x-y.$
- $4x^3-x^2-5x+2, 2x-3.$

- $17ax^3 - a^2x^2 + a^3x - 4a^4, x^2 - a^2.$
- $27x^4 - 36x^3 + 11x^2 - x + 5, -x^2 + 2x + 2.$
- $-3a^2b^2 + 4ab^3 + 15a^3b, 5a^2b^2 - ab^3 + 3b^4.$
- $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab, a + b + c.$
- $3x^2 + 2x + 2x^3 + 1 + x^4, x^2 - 2x + 1.$
- $-3a^3b + b^4 + 3a^2b^2 + a^4 - 3ab^3, a^2 + 2ab + b^2.$
- $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}.$
- $\frac{2}{3}a^2b^2 - \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{4}a^3b, \frac{1}{3}ab^2 - \frac{2}{3}a^2b.$
- $a^2b^2 - 2abcd + b^2d^2, ab + cd.$
- $23x^4 - \frac{1}{2}y^4 - 6x^2y^2, x^2 - \frac{1}{2}xy + 2y^2.$

45. n 文字ノ連乘積ナル項ヲ n 次ノ項ト稱スルヲハ既ニ知ル處ナリ。

整式ノ次數トハ其式中最大ノ次數ヲ有スル項ノ次數ヲイフナリ。

例令バ $3a^4 + 2a^2b - 4ab + b$ ノ次數ハ4ナリ。

又時々或特別ナル文字ニノミ着目シテ其次數ヲ考フル事アリ。

例令バ $3ax^2 + by^3$ ハ x ニ付イテハ二次ノ式ニシテ y ニ關シテハ三次ノ式ナリ。

此ノ如キ場合ニハ特別ニ着目サレタル文字ヨリ外ノ文字ハ數係數ノ如クニ取扱ハレテ次數ニハ關係セザルナリ。

盡ク同次ノ項ヨリ成ル整式ヲ同次式ト稱ス。

例令バ $a^2-2ab+b^2$ ハ二次ノ同次式ニシテ、
 $a^4-2a^2c^2+c^4$ ハ四次ノ同次式ナリ。

46. 定理. 同次式ノ積ハ亦一ノ同次式ナリ.

何シトナレバ積ノ項ハ何レモ乘數ノ或項ト被乘數ノ或項トノ積ニシテ其次數ハ兩數ノ次數ノ和ニ等シカルベク、從ツテ積モ亦一ノ同次式ニシテ其次數ハ乘數及被乘數ノ次數ノ和ニ等シカルベシ。

注意. 同次式ノ積ヲ求メタルキ其積ガ同次式ナラザルキニハ演算ニ誤アリト知ルベシ。

47. 或特別ナル文字ニ着目シテ一ノ代數式ヲ取扱フキニハ其文字ニ關シテ同次ノ項ハ括弧ヲ用井テ集ムルヲ常トス。

$$\begin{aligned} \text{例令バ} \quad & ax^4+bx^2-cx^2+4dx-ex+f \\ & = ax^4+(b-c)x^2+(4d-e)x+f. \end{aligned}$$

ト書クガ如シ、此處ニテハ x ニ着目シテ其降冪ノ順ニ排列シアルナリ。

又 $a^2+ab-ac+b^2$ ヲ a ニ着目シテ考フルキニハ

$$a^2+(b-c)a+b^2$$

ト書ス。

48. 多項式ノ平方. 先ヅ二項式ノ平方ヲ求メン。

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-c \\ a-c \\ \hline a^2-ac \\ \quad -ac+c^2 \\ \hline a^2-2ac+c^2 \end{array}$$

即チ

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2. \quad (a-c)^2 = a^2-2ac+c^2.$$

又

$$\begin{array}{r}
 a+b+c \\
 a+b+c \\
 \hline
 a^2+ab+ac \\
 +ab \quad +b^2+bc \\
 +ac \quad +bc+c^2 \\
 \hline
 a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.
 \end{array}$$

即チ

$$(a+b+c)^2 = a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2.$$

二項式及ビ三項式ノ平方ニ付キテハ
次ノ結果ヲ得タリ。

二項式ノ平方ハ其二項ノ平方ノ和ニ其
二項ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

三項式ノ平方ハ其三項ノ平方ノ和ニ
其三項中二ツノ積ノ二倍ヲ盡ク加ヘ
タルモノニ等シ。

此事ヲ三ツヨリ多クノ項ヲ有スル代
數式ノ平方ニ推擴ムルヲ得。即チ

一ノ多項式ノ平方ハ其内ノ總テノ項
ノ平方ノ和ニ相異ナル二項ノ積ノ二倍
ヲ盡ク加ヘタル和ニ等シ。

何トナレバ

$$\begin{aligned}
 &(a+b+c+d\dots)^2 \\
 &= (a+b+c+d+\dots)(a+b+c+d+\dots).
 \end{aligned}$$

諸二ツノ多項式ノ積ハ乘數ノ各項ト被乘數トノ
積ノ和ニ等シキヲ已ニ之ヲ知レリ、今乘數中ノ $+a$ 、
 $+b$ 、 $+c$ 、 \dots ヲ被乘數 $(a+b+c+d+\dots)$ ニ乘ズレバ明カ
ニ a^2 、 b^2 、 c^2 、 d^2 、 \dots 等各項ノ平方ヲ得ベク、然カモ此平方
ハ唯一ツナルベシ、次ニ乘數中任意ノ一項例令バ $+b$
ヲ取り被乘數中ニ之ト異ナル任意ノ一項例令バ $+c$
ヲ取り此積ヲ求ムレバ $+bc$ トナリ、又此 $+bc$ ナル積ハ
此時ニハ唯一ツアルノミ、何トナレバ被乘數中ニハ
 $+c$ ト云フ項ハ唯一ツナルヲ以テナリ、然ルニ又乘數
中ニモ $+c$ ト云フ項アル故ニ此項ヲ被乘數中ノ $+b$ ト
云フ項ニ乘ズレバ又 $+bc$ ト云フ積ヲ得、斯クシテ $+bc$ ト
ナル積ハ總計二ツアリテ然カモ二ツヨリ多クハア
ルヲナシ、其他ノ異ナリタル二項ノ積ニ付キテモ同
様ノ事柄成立スベシ。因テ所要ノ平方ハ其各項ノ
平方ノ和ニ相異ナル二項ノ積ノ二倍ヲ盡ク加ヘ合
シタルモノニ等シキナリ。

例. $x-y+z-w$ ノ平方ヲ求ムレバ

$$x^2+(-y)^2+z^2+(-w)^2+2x(-y)+2xz+2x(-w)$$

$$+ 2(-y)z + 2(-y)(-w) + 2z(-w)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 2xy + 2xz - 2xw - 2yz + 2yw - 2zw.$$

ヲ得ルナリ.

又 $(a^2 + b^2 - c^2)^2$ ハ次ノ如シ.

$$(a^2)^2 + (b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2a^2b^2 + 2a^2(-c^2) + 2b^2(-c^2)$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

49. 連乘積 數多ノ代數式ノ連乘積ヲ求ムルニハ先ツ其中ノ二式ノ積ヲ求メ、此ノ積ニ第三式ヲ乘ジ、其積ニ第四式、次ニ第五式ト逐次乘法ヲ行フベシ.

例. $x+a, x+b, x+c$ ノ三式ノ連乘積ヲ求メントスルニハ先ツ $x+a$ ト $x+b$ トノ積ヲ求メ、次ニ其積ニ $x+c$ ヲ乘ズルコトノ如クスベシ.

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \\ x+c \\ \hline x^3+(a+b)x^2+abx \\ +cx^2+(a+b)cx+abc \\ \hline x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc. \end{array}$$

其他之ニ準ズ.

50. 二項式ノ冪 前例ニ於テ $b=c=a$ ト置クトモ差支ナカルベシ. 然ルトキハ

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

ト成ル.

$$\text{又ハ } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

尙ホ二項式ノ高冪ハ前節ニヨリテ直チニ計算スルコトヲ得ベシ.

今次ニ讀者ノ記憶スベキ二三ノ冪ヲ舉ゲン.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$$

ニ號ノ左右ニ於テ土トアルトキニハ左ニ於テ+號ヲ取レバ右ニ於テモ+號ヲ取ルベク、左ニ於テ-號ヲ取レバ右ニ於テモ-號ヲ取ルベシ.

尙ホ高次ノ冪ニ付キテハ後章ニ説クベシ。

51. 分離係數法. 乘數及ビ被乘數ヲ或格段ナル文字ノ降冪或ハ昇冪ノ順ニ排列シテ其係數ノミヲ書キテ乘法ヲ行ヒ大ヒニ手數ヲ省略スルコトアリ.

例 1. $x^3 - 5x^2 + 2x - 9$ ト $x^2 - 11x - 3$ トノ積ヲ求ム.

44節ニ示セル如ク列記スルキ文字ヲ省略スルコト次ノ如クスルナリ.

$$\begin{array}{r}
 1 - 5 + 2 - 9 \\
 1 - 11 - 3 \\
 \hline
 1 - 5 + 2 - 9 \\
 -11 + 55 - 22 + 99 \\
 -3 + 15 - 6 + 27 \\
 \hline
 1 - 16 + 54 - 16 + 93 + 27
 \end{array}$$

故ニ積ハ $x^5 - 16x^4 + 54x^3 - 16x^2 + 93x + 27$.

此法ヲ分離係數法ト云フナリ.

若シ冪中缺クルモノアルキニ此法ヲ用ヰンニハ其所ニ0ヲ附スルナリ.

例 2. $x^4 + x^2 - 1$ ト $x^2 + 2x - 4$ トノ積ヲ求ム.

$$\begin{array}{r}
 1 + 0 + 1 + 0 - 1 \\
 1 + 2 - 4 \\
 \hline
 1 + 0 + 1 + 0 - 1 \\
 + 2 + 0 + 2 + 0 - 2 \\
 - 4 + 0 - 4 + 0 + 4 \\
 \hline
 1 + 2 - 3 + 2 - 5 - 2 + 4
 \end{array}$$

即チ積ハ $x^6 + 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 2x + 4$.

52. 公式及ビ其應用. 乘法ニ於ケル緊要ナル二三ノ結果ヲ次ニ擧ゲン.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc.$$

最初ノ二ツハ已ニ見出シタルモノナリ, 第三及ビ第四モ容易ニ見出スコトヲ得ベシ.

此四式ハ最モ緊要ナル式ニシテ學者タルモノ是非記憶セザルベカラズ. 此中第四ガ最モ一般ナル式ニシテ之ヨリ初メノ三式ヲ得ラルベシ.

此處ノ a, b, c ハ如何ナル數ヲモ代表ス

ルモノナリ, 故に a, b, c の代りに如何ナル代數式ヲ置換フルモ上ノ結果ハ正當ナリ.

此ノ如ク一般ニ通スル結果ヲ公式ト稱ス, 即チ公式ハ一ノ法則ヲ式ニテ表ハセルモノナリ.

上ノ公式ヲ應用シテ乘法ノ結果ヲ直チニ書き下スヲ得ル場合多シ.

$$\begin{aligned} \text{例 1. } (a+b+c)^2 &= a^2+2a(b+c)+(b+c)^2 \\ &= a^2+2ab+2bc+b^2+2bc+c^2. \end{aligned}$$

之レ已ニ得タル結果ナリ.

$$\begin{aligned} \text{例 2. } (4x^2+y^2)(4x^2-y^2) &= (4x^2)^2-(y^2)^2 \\ &= 16x^4-y^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 3. } (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) &= (x^2+y^2)^2-x^2y^2 \\ &= x^4+x^2y^2+y^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 4. } (x^3+2x^2-3x+1)^2 &= \{(x^3+2x^2)-(3x-1)\}^2 \\ &= (x^3+2x^2)^2-2(x^3+2x^2)(3x-1)+(3x-1)^2. \end{aligned}$$

$$\text{然ルニ } (x^3+2x^2)^2 = x^6+4x^5+4x^4.$$

$$(x^3+2x^2)(3x-1) = 3x^4+5x^3-2x^2.$$

$$(3x-1)^2 = 9x^2-6x+1.$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ } (x^3+2x^2-3x+1)^2 &= x^6+4x^5+4x^4 \\ &\quad -2(3x^4+5x^3-2x^2) \\ &\quad +9x^2-6x+1 \\ &= x^6+4x^5-2x^4-10x^3+13x^2-6x+1. \end{aligned}$$

演 習 問 題 15.

次ノ諸式ノ積ヲ求ム.

1. $x^3-ax^2+a^2x-a^3, x^2+ax+a^2.$
2. $x^3-6x^2+3x-3, x^2-3x-1.$
3. $p^3-p^2q+pq^2-q^3, p^2+2pq+q^2.$
4. $a^2x^2-axy+y^2, a^2x^2+axy+y^2.$
5. $4x^2+9y^2+z^2-3yz-2zx-6xy, 2x+3y+z.$
6. $a^2+4b^2+9c^2+6bc+3ca-2ab, a+2b-3c.$
7. $4a^4b^2-2a^2b^2c^2+b^2c^4, 4a^4b^2+2a^2b^2c^2+b^2c^4.$
8. $5x^6-7x^4+9x^3-x^2+3x-11, x^4-5x^3-x+1.$
9. $21x^5-3x^4-4x+2, -5x^5+13x^3-9x^2-x-3.$
10. $x^2-xy+x+y^2+y+1, x+y-1.$

次ノ積ヲ演算ヲ用弗ズシテ書下スベシ.

11. $(x+8)(x-8).$
12. $(x-3)(x-5).$
13. $(a-2b)(a+2b).$
14. $(a-c)(a-5c).$

15. $(x-3)(x+9)$. 16. $(a+8)(a+1)$.
 17. $(2x-1)(2x+1)$. 18. $(3x+y)(3x-y)$.
 19. $(3a-4b)(3a+b)$. 20. $(2a-3c)(3a-c)$.
 21. $(x+6z)(x-2z)$. 22. $(x-3y)(3x-y)$.
 23. $(x-a)(x+2a)$. 24. $(2ax-1)(3ax+1)$.
 25. $(2x-6y)(3x+y)$. 26. $(3ay-cz)(2ay+cz)$.
 27. $(ax^2-1)(2ax^2+1)$. 28. $(x^2+a^2-ax)(x^2-a^2-ax)$.
 29. $(a+b+c)(a-b-c)$. 30. $(2a^2-3b-c)(2a^2+3b+c)$.
 31. $(x^2-y^2-xy)(x^2-y^2+xy)$. 33. $(ax-by+cz)(ax+by+cz)$.

次ノ諸式ノ連乘積ヲ求ム。

33. $x+2y-z, x-y+2z, x-y-z$.
 34. $a+b+c+d, a+b-c-d, a-b+c-d, a-b-c+d$.
 35. $x^2-4xy+16y^2, x^2-y^2-xy, x^2+y^2+xy$.
 36. $a^2x^2+b^2y^2-abxy, a^2x^2-b^2y^2-abxy, abxy-a^2x^2+b^2y^2$.
 37. $x^4+y^4, x-y, x^2+y^2, x+y$.
 38. $(a^2x^2+y^2), (ax+y)^2, (ax-y)^2$.
 39. $4a^2-2ax+x^2, 4a^2+2ax+x^2, 16a^4-4a^2x^2+x^4$.
 40. $a+b+c, -a+b+c, a-b+c, a+b-c$.

公式ヲ用非テ次ノ積ヲ計算セヨ。

41. $(a^2x^4-a^4x^2-3a^3x^3)^2$. 42. $(abc-2a^3+3b^3+c^3)^2$.
 43. $(a^4-b^4-3b^2c^2)^2$. 44. $(2a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2)$.

45. $(x^2-y^2)(x^2+2y^2)(x^4-x^2y^2-2y^4)$.

46. $(a^2+b^2)^2(a+1)^2(a-1)^2$.

次式ノ三乗ヲ求ム。

47. $ax+by$.

48. $a+b-c$.

49. $x^2-y^2+z^2$.

50. $ax+by+cz$.

次ノ事項ヲ證明セヨ。

50. $(x^3+y^3+z^3) = (x+y+z)^3 - 3(y+z)(z+x)(x+y)$.

51. $(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) + bc + ca + ab$
 $= a^2 + b^2 + c^2$.

52. $x=b+c-2a, y=c+a-2b, z=a+b-2c$ ナラバ
 $x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy=0$.

53. $(b-c)(x-a)^2 + (c-a)(x-b)^2 + (a-b)(x-c)^2$
 $+ (b-c)(c-a)(a-b) = 0$.

除 法

53. 單項式ノ除法. 先ヅ必要ナル
法則ヲ擧ゲン.

除法ハ乘法ノ逆算ナリ. 今之ヲ式ヲ
以テ示セバ次ノ如シ. 即チ

$$a \times b \div b = a.$$

又ハ $a \div b \times b = a.$

此定義ヲ用井テ

$$\begin{aligned} a \times b \div c &= a \div c \times c \times b \div c \\ &= a \div c \times b \times c \div c \text{ (乘法ノ交換ノ法則)} \\ &= a \div c \times b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{次ニ} \quad a \div b \div c &= a \div c \times c \div b \div c \\ &= a \div c \div b \times c \div c \text{ (上ノ結果)} \\ &= a \div c \div b. \end{aligned}$$

因テ二數ニテ除スルトキニ其順序ハ
任意ニ取ルヲ得.

從ツテ一般ニ 一數ヲ數多ノ數ニテ除

スルキニ其順序ハ任意ニ取ルヲ得.
是レ交換ノ法則ナリ.

又數多ノ數ニテ或ハ除シ或ハ乘ズル

キニ其順序ハ任意ニ取ルヲ得.

例令バ $a \div b \times c \div d = a \times c \div b \div d = a \div d \div b \times c.$

次ニ

$$a \div b \div c \times c = a \div b, \text{從ツテ } a \div b \div c \times c \times b = a \div b \times b = a.$$

然ルニ $a \div b \div c \times c \times b = a \div b \div c \times cb = a \div b \div c \times bc.$

故ニ $a \div b \div c \times bc = a.$

從ツテ $a \div b \div c \times bc \div bc = a \div bc.$

故ニ $a \div b \div c = a \div bc.$

因テ 二數ニテ除スルモ此二數ノ積ニ
テ除スルモ其結果ハ異ナラズ.

從ツテ一般ニ 數多ノ數ニテ逐次除ス
ルモ此等ノ數ノ積ニテ除スルモ,亦此等
ノ數ヲ任意ニ分チタル各群ノ積ニテ順
次除法ヲ行フモ其結果ハ相同ジ.

例令バ $a \div b \div c \div d = a \div bc \div d = a \div bcd.$

54 一ノ冪ヲ同文字ノ他ノ冪ニテ除

スルニハ次ノ如クスベシ。

$$\begin{aligned} \text{例令バ } a^5 \div a^3 &= a^{2+3} \div a^3 \\ &= a^2 \times a^3 \div a^3 \\ &= a^2 [= a^{5-3}]. \end{aligned}$$

同様ニシテ一般ニ m ガ n ヨリモ大ナル
キニハ

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

因テ一ノ冪ヲ其ヨリモ指數ノ小ナル
同文字ノ冪ニテ除シテ得ル處ノ商ハ亦
同文字ノ冪ニシテ、其指數ハ被除數ノ指
數ヨリ除數ノ指數ヲ減ジタルモノニ等
シ。

注意. $m=n$ ノトキニ上ノ法則ニ從ヘ
バ $a^m \div a^m = a^0$ トナル、然ルニ a^0 ハ無意義ノ
モノナリ、(此記號ニ付キテハ後章ニ詳説
スベシ)併シ $a^m \div a^m = 1$ ハ明白ナルベシ、故
ニ此場合ニハ上ノ法則ヲ適用セズ。

次ニ除數ノ指數ガ被除數ノ指數ヨリ

モ大ナルキニハ次ノ如クス。

$$\text{例令バ } a^2 \div a^5 = a^2 \div a^2 \div a^3 = 1 \div a^3 = \frac{1}{a^3} [= \frac{1}{a^{5-2}}].$$

此場合ノ商ハ整式ノ形ニ表ハスヲ得
得ズシテ $\frac{1}{a^3}$ ノ如ク分數ノ形ヲ用ウルナ
リ。

一般ニ $m < n$ ナルキニハ

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

今此場合ニ強井テ前ノ法則ヲ適用セ
ントスレバ $a^m \div a^n = a^{-(n-m)}$ トナリ指數ハ
負數トナル、此場合ハ後章ニ説クベシ。

55. 一ノ單項式ヲ他ノ單項式ニテ除
スルニハ次ノ法則ニ從フベシ。

(1). 被除數ノ係數ヲ除數ノ係數ニテ
除シタルモノヲ商ノ係數トスベシ。

(2). 被除數及ビ除數ニ同文字ノ冪ヲ
含ムキニハ前節ニ從ツテ除法ヲ行フベシ。

(3). 除數中ニ無キ文字ガ被除數中ニ
アルキニハ其儘之ヲ列記スベシ。

(4). 被除數中ニ無キ文字ガ除數中ニアルキニハ其商ハ分數ノ形ニ書シ,此等ノ文字ヲ横線ノ下ニ記スベシ.

(5). 商ノ符號ハ31節ニ示セル處ニ從ヒ適當ニ之ヲ定ムベシ.

今符號ノ法則ヲ再記スレバ次ノ如シ.

$$(+)\div(+)=(+). \quad (-)\div(+)=(-).$$

$$(+)\div(-)=(-). \quad (-)\div(-)=(+).$$

例 1. $(-24a^2bc)\div(4abc)=-6a.$

例 2. $(17ax^2yz)\div(3axy^2z)=\frac{17x}{3y}.$

例 3. $(9ab^2xy)\div(-2a^2cyz)=-\frac{9b^2x}{2acz}.$

56. 單項式ニテ多項式ノ除法. 單項式ニテ多項式ヲ除スルニハ被除數ノ各項ヲ此單項式ニテ除シテ得ル處ノ商ヲ加フベシ.

例 1. a^3-5a^2b ヲ a^2 ニテ除スベシ.

$$(a^3-5a^2b)\div a^2 = a^3\div a^2 - 5a^2b\div a^2 = a-5b.$$

例 2. $7ax^3-28a^2x^4+49a^4x^2$ ヲ $7ax^2$ ニテ除スベシ.

$$(7ax^3-28a^2x^4+49a^4x^2)\div 7ax^2$$

$$= 7ax^3\div 7ax^2 - 28a^2x^4\div 7ax^2 + 49a^4x^2\div 7ax^2 \\ = x^3 - 4ax^2 + 7a^3.$$

演 習 問 題 16.

次ノ第一式ヲ第二式ニテ除スベシ.

1. $12x, -2x.$ 2. $10ab, 5b.$ 3. $27ax, -9a^2.$

4. $16a^2x^2, -8ax.$ 5. $-48xyz, 12x^2y.$ 6. $-36a^2b^2, -6ab^2.$

7. $49a^2b^3c^4, -7a^2b^2c^2.$ 8. $a^3x^4y^3, 2a^2x^4y^4.$ 9. $-8x^5y^{10}, 2x^4y^8.$

10. $-60x^2y^3z^5, -30x^3y^2z^4.$ 11. $125a^4b^4x^6, -25a^4b^5x^5.$

12. $-64a^4x^5y^6z^2, -32a^2xy^2z.$ 13. $25l^4m^5n^7, -5l^4m^3n^2.$

14. $27a^2p^6q^6x^2, 9ap^4q^5x^2.$ 15. $216x^5y^5z^7, -36x^7y^6z^4.$

16. $2x^2y^2-6xy^3, 2xy.$ 17. $3a^2x^4+9a^3x^3, -3a^2x^5.$

18. $-\frac{1}{2}x^4y^2+5x^3y^3, x^2y^2.$ 19. $36ab^3-12a^2b^2-18a^3b, 6ab.$

20. $18a^3x^4-72a^4x^3-36a^2x^3, -18a^2x^2.$

21. $-2a^5x^3-\frac{7}{3}a^4x^4, \frac{7}{3}a^4x^4.$ 22. $\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{2}xyz-\frac{5}{6}xy^2, 5xy.$

57. 多項式ヲ多項式ニテ除スル.

次ノ法則ニ從フベシ.

(1). 被除數及ビ除數ヲ或共通ノ文字ノ降冪(或ハ昇冪)ノ順ニ排列スベシ.

(2). 斯ク排列シタル後被除數ノ初項

ヲ除數ノ初項ニテ除シテ得タル商ヲ所要ノ商ノ第一項トス。

(3). 此第一ノ商ヲ除數ニ乗ジテ得タル積ヲ被除數ヨリ減ズベシ。

(4). (3)ニテ得タル剩餘ヲ又新ニ被除數トシテ上ノ方法ニ從ツテ除法ヲ續行スベシ。

今次ニ例ヲ擧ゲテ之ヲ示サン。

例 1. $2a^3 - 9a^2b + 3ab^2 + 4b^3$ ヲ $a - 4b$ ニテ除スベシ。

$$\begin{array}{r} a-4b \overline{) 2a^3 - 9a^2b + 3ab^2 + 4b^3} \\ \underline{2a^3 - 8a^2b} \\ -a^2b + 3ab^2 \\ \underline{-a^2b + 4ab^2} \\ ab^2 + 4b^3 \\ \underline{-ab^2 + 4b^3} \\ 0 \end{array}$$

即チ $2a^2 - ab - b^2$ ガ所要ノ商ナリ。

此處ニ示セル如ク減法ニヨリテ得タル剩餘ハ盡ク之ヲ書セズシテ唯次ノ除法ヲ行フニ必要ナル項丈ケヲ書キ下スナリ。例令バ上例ニ於テ第一ノ剩餘ハ

$-a^2b + 3ab^2 + 4b^3$ ナレドモ唯 $-a^2b + 3ab^2$ 丈ケヲ書シ $+4b^3$ ハ必要ノ生ズル迄ハ初メテ被除數ヲ記シタル處ニ預ケ置クナリ。

例 2. $4x^3 + 4x^2y - xy^2 + 3y^3$ ヲ $2x + 3y$ ニテ除スベシ。

$$\begin{array}{r} 2x+3y \overline{) 4x^3 + 4x^2y - xy^2 + 3y^3} \\ \underline{4x^3 + 6x^2y} \\ -2x^2y - xy^2 \\ \underline{-2x^2y - 3xy^2} \\ 2xy^2 + 3y^3 \\ \underline{2xy^2 + 3y^3} \\ 0 \end{array}$$

即チ所要ノ商ハ $2x^2 - xy + y^2$ 。

演 習 問 題 17.

次ノ第一式ヲ第二式ニテ除スベシ。

- $x^2 - 3x + 2, x - 1.$
- $x^2 - 5xy + 6y^2, x - 3y.$
- $a^2 - 11a + 30, a - 5.$
- $3a^2x^2 + 34ax + 11, 3ax + 1.$
- $6a^2x^2 - 7ax - 3, 2ax - 3.$
- $x^3 - xy^2 - x^2y + y^3, x + y.$
- $4x^2y + x^2z - 8xy^2 + 6y^2z - 5xyz, x - 2y.$
- $-4ax^3 + 5a^2x^2 - 2a^3x + a^4, -x + a.$
- $x^3 + 5ax^2 - 2a^2x - 24a^3, x + 4a.$
- $4x^4 - 12b^2x^2 + 9b^4, 2x^2 - 3b^2.$

11. $2x^4 - 5x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 + 15y^4, 2x - 5y.$
 12. $-x^4 + 3ax^3 - 3a^3x - a^4, -x^2 + a^2.$
 13. $2a^5 - 6a^4x + 9a^3x^2 + a^2x^3 - 5ax^4 + x^5, 2a^2 - x^2.$
 14. $x^4 - x^3 - 27x^2 + 25x + 50, x^2 - 25.$
 15. $3x^5 - 3x^4y - 7x^3y^2 - 2x^2y^3 + 2x^2y^4 + y^5, 3x^2 - y^2.$

58. 尙ホ二三ノ例ヲ舉ゲシ.

例 1. $4x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 8x - 15 \div 2x^2 + x - 3 =$ テ 除
スベシ.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 3 \overline{) 4x^5 + 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 8x - 15} \\ \underline{4x^5 + 2x^4 - 6x^3} \\ 2x^4 - x^3 + 6x^2 \\ \underline{2x^4 + x^3 - 3x^2} \\ -2x^3 + 9x^2 + 8x \\ \underline{-2x^3 - x^2 + 3x} \\ 10x^2 + 5x - 15 \\ \underline{10x^2 + 5x - 15} \\ 0 \end{array}$$

例 2. $a^4 + 4b^4 \div a^2 + 2ab + 2b^2 =$ テ 除 スベシ.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + 2b^2 \overline{) a^4 + 4b^4} \\ \underline{a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2} \\ -2a^3b - 2a^2b^2 \\ \underline{-2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3} \\ 2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4 \\ \underline{2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4} \\ 0 \end{array}$$

例 3. $a^4 + a^2b^2 + b^4 \div a^2 + ab + b^2 =$ テ 除 スベシ.

$$\begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 \overline{) a^4 + a^2b^2 + b^4} \\ \underline{a^4 + a^3b + a^2b^2} \\ -a^3b + b^4 \\ \underline{-a^3b - a^2b^2 - ab^3} \\ a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\ \underline{a^2b^2 + ab^3 + b^4} \\ 0 \end{array}$$

次ニ舉グル處ノ諸例ニ於テハ文字ノ
排列ノ仕方ニ注意スベシ.

例 4. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \div a + b + c =$ テ 除 スベシ.

先ヅ被除數ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列シ異文字ハ a, b, c
ノ順ニ列記スベシ.

$$\begin{array}{r} a + b + c \overline{) a^3 - 3abc + b^3 + c^3} \\ \underline{a^3 + a^2b + a^2c} \\ -a^2b - a^2c - 3abc \\ \underline{-a^2b - ab^2 - abc} \\ -a^2c + ab^2 - 2abc \\ \underline{-a^2c - abc - ac^2} \\ ab^2 - abc + ac^2 + b^3 \\ \underline{ab^2 + b^3 + b^2c} \\ -abc + ac^2 - b^2c \\ \underline{-abc - b^2c - bc^2} \\ ac^2 + bc^2 + c^3 \\ \underline{ac^2 + bc^2 + c^3} \\ 0 \end{array}$$

此結果ハ b 又ハ c ノ降冪ノ順ニ排列シテモ得ラル

ベシ.

今括弧ヲ用ウレバ上ノ演算ヲ簡單ニスルヲ得

ベシ.

即チ次ノ如シ.

$$\begin{array}{r} a+(b+c)a^3-3abc+b^3+c^3(a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2). \\ \hline a^3+a^2(b+c) \\ -a^2(b+c)-3abc \\ \hline -a^2(b+c)-a(b+c)^2 \\ \hline a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \\ \hline a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \end{array}$$

注意. 凡テ除法ヲ行フニハ先ヅ除數及ビ被除數ノ項ヲ順序長ク排列セザルニハ大ヒニ混雜ヲ來スモノニシテ爲メニ簡易ナル問題モ容易ニ解キ難キニ至ルコト往々ニ之有リ,初學者宜シク注意スベシ.

例 5. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ ヲ $x-y$ ニテ除スベシ.

先ヅ被除數ヲ x ノ降幕ノ順ニ排列シ,他ハ x, y, z ノ順ニ列記スベシ.

$$\begin{array}{r} (x-y)x^2(y-z)-xy^2-z^2+yz(y-z)(x(y-z)-z(y-z). \\ \hline x^2(y-z)-xy(y-z) \\ -xz(y-z)+yz(y-z) \\ \hline -xz(y-z)+yz(y-z) \end{array}$$

59. 除法ニ於テモ亦乘法ニ於ケルガ如ク分離係數法ヲ用井テ大ヒニ演算ヲ省略セラル、ニアリ.

例. $x^4+x^3+7x^2-6x+8$ ヲ x^2+2x+8 ニテ除スベシ.

$$\begin{array}{r} 1+2+8 \big) 1+1+7-6+8 \quad (1-1+1. \\ \underline{1+2+8} \\ -1-1-6 \\ \underline{-1-2-8} \\ 1+2+8 \\ \underline{1+2+8} \end{array}$$

即チ所要ノ商ハ

$$x^2-x+1.$$

60. 前三節ニ舉ゲタル例ニ於テハ皆割り切ル、場合ノミヲ考ヘタリ,然レモ或場合ニハ割り切レザルニアリ.

例令バ x^2-xy+y^2 ヲ $x-y$ ニテ除スベシト云フニ

$$\begin{array}{r} (x-y)x^2-xy+y^2(x \\ \hline x^2-xy \\ \hline y^2. \end{array}$$

剰餘トシテ y^2 ヲ得^ルタリ,此 y^2 ハ $x-y$ ニテ
ハ割リ切レザルナリ,此場合ニハ次ノ如
クシテ其商ヲ示ス.

$$(x^2 - xy + y^2) \div (x - y) = x \text{ ト 剰餘 } y^2$$

或ハ
$$= x + \frac{y^2}{x-y}$$

除法ニ於テ割リ切レザル $キ$ ニハ文字
ノ排列ノ仕方ニ因リテ得ル處ノ商ノ外
形モ亦變化ス.

例令 β 前例ニ於テ y ノ降冪ノ順ニ排列シテ行 β
 $キ$ ニハ次ノ如シ.

$$\frac{-y+x \quad y^2 - yx + x^2 \quad -y}{y^2 - yx} \quad x^2$$

即チ商ハ

$$-y \text{ ト 剰餘 } x^2$$

或ハ

$$-y + \frac{x^2}{x-y}$$

一般ニ一ノ多項式 A ガ他ノ多項式 B ニ
テ割リ切レザル $キ$ 其剰餘トハ整式ノ形
ノ商 C ト除數 B トノ積即チ BC ト被除數
 A トノ差ニシテ或ル特別ニ注目サレタ

ル文字ニ付キテ B ヨリモ低次ナルカ或
ハ之ヲ含マザル式ナイフナリ.

今 R ヲ以テ剰餘ヲ示セバ

$$A - BC = R.$$

ニシテ R ハ B ヨリモ特別ニ着目サレタル
文字ニ付キテハ低次ナルカ或ハ之ヲ含
マズ,而シテ此場合ノ商ハ次ノ如シ.

$$A \div B = C \text{ ト 剰餘 } R.$$

或ハ
$$A \div B = C + \frac{R}{B}$$

61. 次ノ公式ハ容易ニ證明スル Γ ヲ
得.

$$(x^2 + 2ax + a^2) \div (x + a) = x + a.$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) \div (x - a) = x - a.$$

$$(x^2 - a^2) \div (x + a) = x - a.$$

$$(x^2 - a^2) \div (x - a) = x + a.$$

$$(x^3 - a^3) \div (x - a) = x^2 + ax + a^2.$$

$$(x^3 + a^3) \div (x + a) = x^2 - ax + a^2.$$

$$(x^4 - a^4) \div (x - a) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3.$$

$$(x^4 - a^4) \div (x + a) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3.$$

$$(x^5 - a^5) \div (x - a) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4.$$

$$(x^5 + a^5) \div (x + a) = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4.$$

$$(x^4 + a^2x^2 + a^4) \div (x^2 + ax + a^2) = x^2 - ax + a^2.$$

$$(x^4 + a^2x^2 + a^4) \div (x^2 - ax + a^2) = x^2 + ax + a^2.$$

此等ノ公式ヲ應用シテ除法ノ商ヲ直
チニ胸算ニテ書下スルヲ得ル場合多シ。

演 習 問 題 18.

次ノ第一式ヲ第二式ニテ除スベシ。

1. $x^3 + x^2 - 9x + 12, x^2 - 3x + 3.$
2. $2x^3 + x^2 - 14x + 8, 2x^2 + 5x - 4.$
3. $3m^3 - 34m^2 - 10m + 7, m^2 - 11m - 7.$
4. $5a^6 - 8a^4 + 10a^2 - 7, 5a^4 - 3a^2 + 7.$
5. $x^8 + x^4 + 1, x^4 - x^2 + 1.$
6. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x - 9, x^2 + x - 3.$
7. $2x^3 - 5ax^2 - 4a^2x + 3a^3, x^2 - 2ax - 3a^2.$
8. $3 - 16a + 21a^2 - 21a^3 + 4a^4, 3 - 4a + 5a^2 - a^3.$
9. $6x^5 + 13x^4 + 8x^3 + 3x^2, 3x^3 + 2x^2 + x.$
10. $6x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 19x^2 - 14x + 24, 2x^3 - x^2 + 5x - 6.$

11. $l^5 - 5l^4 + 9l^3 - 6l^2 - l + 2, l^2 - 3l + 2.$
 12. $b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2 - 2a^2bc, ca + ab - bc.$
 13. $7ax^5 - 75a^2x^4 - 44a^3x^3 + 96a^4x^2 + 29a^5x - 13a^6, 7ax^2 + 2a^2x - a^3.$
 14. $2x^3 - 8x + x^4 + 12 - 7x^2, x^2 + 2 - 3x.$
 15. $1 - 2x^3 + x^6, 1 + x^2 - 2x.$
 16. $x^6 - 3x^4 + 2x - 2x^5 + 11x^2 - 1, x^2 - 1 - 2x.$
 17. $2ax^4 - a^2x^3 + 4a^3x^2 + 7a^4x + a^5, x^2 - ax + 3a^2.$
 18. $15x^6 - 20x^4 - 120x^2 - 29, 3x^4 - 7x^2 - 21.$
 19. $21a^4 + 38a^3 + a^2 - 5a - 25, 3a^3 + 5a^2 - a - 5.$
 20. $x^5 + x^4y + x^2y^2 - x^3 - x^2 + y, x^3 - x + y.$
 21. $x^7 - 2y^7 - 7x^5y^2 - 7xy^5 + 14x^3y^4, x - 2y.$
 22. $x^6 - 2x^3y^3 + y^6, x^2 + 2xy + y^2.$
 23. $7x^5 - 21x^4 + 16x^3 - 3x^2 - x - 4, x^2 - 3x + 2.$
 24. $x^6 + 3x^4y^2 - 6x^2y^4 + 8y^6, x^4 + x^2y^2 - 2y^4.$
 25. $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - x - 1, x^3 - 2x^2 + x - 1.$
 26. $x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz, x^2 + y^2 + z^2 + xy - xz + yz.$
- 次ノ27ヨリ34ニ至ル迄公式ヲ應用シテ除法ヲ行ヘ。
27. $(x - b)^3 + x^3, x + (x - b).$
 28. $(2a - b)^3 - b^3, 2(a - b).$
 29. $x^4 - (y - 2x)^4, 4xy - y^2 - 3x^2.$
 30. $a^5 + (a - 2b)^5, 2(a - b).$

31. $27x^3 + (x+2a)^3, 2(2x+a).$
32. $x^4 + (a+x)^2x^2 + (a+x)^4, a^2 + ax + x^2.$
33. $(x-a)^4 - (3x+a)^4, -2(x+a).$
34. $(a-b)^5 + (d-c)^5, a-b-c+d.$
- 次ノ第一式ヲ第二式ニテ除スベシ.
35. $(2x-a)^4 - (x+2a)^4, 3x^2 - 8ax - 3a^2.$
36. $3x^5 - 24x^4 + 52x^3 + 25x^2 - 171x^2 + 109x - 60,$
 $3x^3 - 12x^2 + 7x - 4.$
37. $a^3x^3 - b^3y^3 - c^3z^3 - ab^2x^2y + ac^2x^2z + a^2bxy^2 - a^2cxz^2 + bc^2y^2z$
 $+ b^2cyz^2, ax^2 + by^2 - cz^2.$
38. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b), a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b).$
39. $x^4(y-z) + y^4(z-x) + z^4(x-y), x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y).$
40. $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y), (y-z)(z-x)(x-y).$
41. $x^2 + 2ax + 27$ 凡 $x-a =$ テ割リ切ル、爲メニハ

$a=3$ 或ハ $a=-3$ ナルヲ證セヨ.

42. $x^4 + Kx^2y^2 + y^4$ 凡 $x^2 - xy + y^2 =$ テ割リ切ル、爲メニハ K ハ如何ナル値ヲ取ルベキカ.

62. 基礎ノ法則. 前ノ諸節ニ述ベタル處ノ交換ノ法則, 組合ノ法則, 及ビ分配ノ法則ノ三法則ヲ代數學ニ於ケル基礎

ノ三法則ト稱ス.

第 四 章 一 次 方 程 式.

63. 第一章ノ18節ニ於テ定義ヲ下シタル如ク、等式トハ二式ノ相等ヲ示サシメガ爲メニ等號ニテ以テ之ヲ連結セルモノヲイフナリ。

例令バ $3x=6$.

又ハ $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$.

ノ如キ何レモ等式ナリ。

一ノ等式ニ於テ等號ノ左ニアル式ヲ此等式ノ左邊ト稱シ、右ニアル式ヲ其右邊ト稱ス。

64. 等式ハ之ヲ二種ニ大別ス。

(1). 其内ニ含有セラル、處ノ文字ノ値ノ如何ニ係ハラズ恒ニ相等ノ關係ノ成立セル等式ヲ恒等式ト稱ス。

例令バ上例ニ於ケル

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2.$$

ノ如シ、此等式ハ x 及ビ a ノ値ノ如何ニ係ハラズ恒ニ成立スルモノナリ。

(2). 其内ニアル或特別ノ文字ニ格段ナル値ヲ與フルニ非ズンバ相等ノ關係ノ成立セザル等式ヲ方程式ト稱ス。

例令バ上例ニ於ケル

$$3x=6.$$

ノ如シ、此等式ハ $x=2$ ニ非ズンバ成立セザルナリ。

又 $ax=b+c$.

モ亦一ノ方程式ニシテ、此内ノ文字 x ガ $\frac{b+c}{a}$ トイフ格段ナル値ヲ取ルニ非ズンバ此等式ハ成立セズ。

一ノ方程式ノ成立センガ爲メニ或格段ナル値ヲ有スベキ文字ヲ未知數ト稱ス。

上例ニ於テ x ハ未知數ナリ。

又設令文字ニテ表ハサレ居ルト雖モ或ル與ヘラレタル數ヲ代表スルモノト見做スルニハ之ヲ既知數ト稱ス。

例令バ上例ニ於テ a, b, c ハ既知數ナリ。

未知數及ビ既知數ノ記法ノ混亂ヲ避ケンガ爲メニ通常未知數ハ羅馬字母ノ終リノ方ノ文字 x, y, z 等ヲ以テ之ヲ表ハシ、既知數ヲ表ハスニハ同字母ノ初メノ方ノ文字 a, b, c 等ヲ用ウ。

65. 一ノ方程式ヲシテ成立セシムル處ノ未知數ノ値ヲ求ムルヲ稱シテ此方程式ヲ解クトイヒ、而シテ此未知數ノ値ハ此方程式ニ適合ス或ハ此方程式ヲ満足スルト稱シ且ツ此値ヲ此方程式ノ根ト稱ス。

例令バ2ハ方程式 $3x=6$ ノ根ニシテ此値ハ此方程式ニ適合スト云フナリ。

99. 唯一ノ未知數 x ヲ含ミ其最高冪ガ x ナルキニハ此方程式ヲ一元一次方程式(或ハ單ニ一次方程式)ト稱シ、未知數ノ最高冪ガ x^2 ナルキニハ一元二次方程式(或ハ單ニ二次方程式)ト稱ス、

逐次斯ノ如シ。

例令バ $ax = b.$

ハ一元一次方程式ニシテ

$$ax^2 + bx = c.$$

ノ如キハ一元二次方程式ナリ。

注意. 一元トイフ辭ヲ簡單ノ爲メニ省略シテ單ニ一次方程式、或ハ二次方程式トイフコアルナリ。

67. 一次方程式ノ解法ハ單ニ次ノ公理ニ依ル。

- (1). 相等シキ數ニ同ジ數或ハ相等シキ數ヲ加フルモ其和ハ亦相等シ.
- (2). 相等シキ數ヨリ同ジ數或ハ相等シキ數ヲ減ズルモ其差ハ亦相等シ.
- (3). 相等シキ數ニ同ジ數或ハ相等シキ數ヲ乘ズルモ其積ハ亦相等シ.
- (4). 相等シキ數ヲ同ジ數或ハ相等シキ數ニテ除スルモ其商ハ亦相等シ.

例 令バ若シ $a=b$ ナラバ

$$a+c=b+c.$$

$$a-c=b-c.$$

$$ac=bc.$$

$$a \div c = b \div c.$$

68. 先ツ次ノ方程式ニ付キテ考究セシ.

$$3x = 12.$$

今3ニテ此方程式ノ兩邊ヲ除スレバ

$$x = 4. \quad (\text{公理 4.})$$

又同様ニ次ノ方程式ニ於テ

$$\frac{x}{3} = -5.$$

3ヲ兩邊ニ乗ズレバ

$$x = -15. \quad (\text{公理 3.})$$

次ニ

$$5x - 3x = 15 - 4 + 3.$$

此方程式ノ各邊ヲ夫々約スレバ

$$2x = 14$$

故ニ $x = 7.$

次ニ下ノ如キ方程式ヲ考究セシ.

$$4x - 5 = x + 13.$$

此方程式ニ於テハ其兩邊ニ未知數ヲ含有スルヲ以テ前例ト其趣ヲ異ニスレバ、次ノ如クスレバ之ヲ解クヲ得ルナリ.

先ツ兩邊ヨリ x ヲ減ジ、次ニ5ヲ兩邊ニ加フベシ。即チ

$$4x - x - 5 = 13. \quad (\text{公理 2.})$$

$$\text{次ニ} \quad 4x - x = 13 + 5. \quad (\text{公理 1.})$$

$$\text{因テ} \quad 3x = 18.$$

$$\text{故ニ} \quad x = 6.$$

一般ニ

$$ax + b = cx + d.$$

$$\text{ハ} \quad ax = cx + d - b.$$

$$\text{次ニ} \quad ax - cx = d - b.$$

$$\text{因テ} \quad (a - c)x = d - b.$$

$$\text{故ニ} \quad x = (d - b) \div (a - c).$$

$$\text{又ハ} \quad x = \frac{d-b}{a-c}.$$

上例ニ因テ次ノ法則ノ存スルヲ知ル。
一ノ方程式ニ於テハ其何レノ項ニテ
モ其符號ヲ變ジテ一邊ヨリ他邊ニ移ス
コトヲ得。

又方程式ノ總テノ項ノ符號ヲ變ズル
コトヲ得。 何ントナレバ是ハ總テノ項ヲ
 其他邊ニ移シテ等號ノ兩邊ヲ置換ヘタ
 ルト同様ナレバナリ。

$$\text{例令バ} \quad -x+3=4x-6.$$

$$-4x+6=x-3.$$

$$\text{又ハ} \quad x-3=-4x+6.$$

是レ原式ノ符號ヲ變シタルモノナリ。

69. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x}{3}-2=\frac{x}{12}-\frac{3}{4}.$$

先ヅ分數ノ分母ヲ除却スベシ,即チ分
 母ノ最小公倍數12ヲ此方程式ノ兩邊ニ
 乘ズレバ

$$4x-24=x-9.$$

$$\text{項ヲ移セバ} \quad 4x-x=-9+24.$$

$$\text{因テ} \quad 3x=15.$$

$$\text{故ニ} \quad x=5.$$

70. 前諸節ヨリ一般ニ一次方程式ノ
 解法ヲ定ムルコト次ノ如シ。

若シ分數アルキハ之ヲ整化スベシ,而
シテ未知數ヲ一邊ニ既知數ヲ他邊ニ移
スベシ,次ニ各邊ノ項ヲ約シタル後未知
數ノ係數ニテ兩邊ヲ除スベシ。

例 1. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$2x+3=16-(2x-3).$$

括弧ヲ外ヅセバ

$$2x+3=16-2x+3.$$

$$\text{項ヲ移セバ} \quad 2x+2x=16+3-3.$$

$$\text{項ヲ集ムレバ} \quad 4x=16.$$

$$\text{故ニ} \quad x=4.$$

例 2. 次ノ方程式ノ根ヲ求ム。

$$5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4).$$

先ヅ括弧ヲ外ヅセバ

$$5x - 6x + 30 = 2x + 10 + 5x - 20.$$

項ヲ移セバ $5x - 6x - 2x - 5x = 10 - 20 - 30.$

項ヲ集ムレバ $-8x = -40.$

故ニ $x = 5.$

71. 方程式ノ外觀ハ一次ヨリモ高次ナリト雖モ、前節ノ方法ニ從ヒ同類項ヲ約スレバ二次及ビ二次以上ノ項ハ盡ク消滅シテ殘ル處ノモノハ唯一次ノ項ノミヲ含ム方程式モ亦此處ニ於テ取扱フナリ。

例. $(x+1)(x-3)+2=x(x+5)+13$ ヲ解ク。

乘法ヲ完結スレバ

$$x^2 - 2x - 3 + 2 = x^2 + 5x + 13.$$

項ヲ移セバ $x^2 - 2x - x^2 - 5x = 13 + 3 - 2.$

項ヲ集ムレバ $-7x = 14.$

故ニ $x = -2.$

注意. 一ノ方程式ヲ解キタル後所得ノ根ガ此方程式ニ果シテ適合スルヤ否ヤヲ驗スルヲ甚ダ必要ナリ。

例. $x=2$ ガ次ノ方程式ニ適合スルヲ證セヨ。

$$3(x+3) - 12 = 4(x-5) + 15.$$

左邊ニ $x=2$ ト入ルレバ

$$3(2+3) - 12 = 15 - 12 = 3.$$

右邊ニ入ルレバ

$$4(2-5) + 15 = -12 + 15 = 3.$$

此二ツノ結果共ニ相等シ、即チ $x=2$ ハ與ヘラレタル方程式ニ適合ス。

演 習 問 題 19.

次ノ方程式ヲ解ク。

1. $3x - 11 = x + 1.$

2. $7x + 6 = 10x - 3.$

3. $6x - 15 = 4x - 5.$

4. $13x + 2 = 8x + 12.$

5. $x - 3(x+5) = 1 - 6x.$

6. $5(x-13) = x - 21.$

7. $13(x-1) - 4(x+6) = 4x - 2.$

8. $7x - 5(x+4) + 4(6-x) = 3x - 2(3+x).$

9. $25x - 7(49 - 3x) = 2(x+37) - 5(11x+24).$

10. $21 - 7x + 2(17 - 2x) = 4(5 - x) + 7(x - 17).$

11. $7(13 - 7x) - 35x = 7(3x - 1) - 7x.$

12. $81 + 23(x-3) = 7(x-3) + 17.$

13. $12 + 3(7x-10) - 6x = 7(4-x) - x.$

14. $2(3x-7)-5x=71-6x+2(16-x).$
 15. $\frac{1}{3}(3-x)+\frac{x}{6}=\frac{5}{2}-x+1.$
 16. $\frac{3x}{5}-4=\frac{12x}{3}-5x+4.$
 17. $31x+\frac{x}{2}+\frac{7}{3}=40x-\frac{35x}{6}-\frac{1}{3}.$
 18. $432-8(5+7x)=21(x-4)+160x+2.$
 19. $\frac{7}{3}-\frac{x}{7}=\frac{5x}{9}-\frac{2x}{21}-3-\frac{2}{21}.$
 20. $(x-2)(x-5)=x(x-3)-6.$
 21. $(3-x)(6x+1)=2x(4-3x).$
 22. $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{6}=\frac{x}{8}+\frac{1}{12}.$
 23. $\frac{x}{3}-1+\frac{x}{6}+\frac{2}{3}=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}+\frac{x}{5}-\frac{1}{30}.$
 24. $2-\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=\frac{3x}{4}-2\frac{1}{2}.$
 25. $x+1-7(x-1)^2=7x(2-x).$
 26. $(3x-1)(3x-2)-(4x-2)(2x-1)=\frac{1}{6}(2x-1)(3x-2).$
 27. $3(x-1)(x-2)(x-3)=(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3.$
 28. $(a+c)x+(a-c)x=a^2$
 29. $a(x+a)+b(b-x)=2ab.$
 30. $\frac{1}{2}(a+x)+\frac{1}{3}(2a+x)+\frac{1}{4}(3a+x)=3a.$
 31. $(x-a)(x-b)+(a+b)^2=x^2+ab.$
 32. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c).$
 33. $(x+a+b+c)(x+a-b-c)=(x-a-b+c)(x-a+b-c).$

72. 尚ホ二三ノ例ヲ次ニ示サン.

例 1. $\frac{4(x+2)}{5}-3=\frac{5x}{13}+4$ ヲ解ケ.

先ヅ分母ノ最小公倍数65ヲ兩邊ニ乗ズレバ

$$52(x+2)-195=25x+260.$$

括弧ヲ外ヅセバ $52x+104-195=25x+260.$

項ヲ移セバ $52x-25x=260-104+195.$

項ヲ集ムレバ $27x=351.$

故ニ $x=13.$

或場合ニハ一時ニ分數ヲ整化セザル
方都合好キアリ,次ニ之ヲ示サン.

例 2. $\frac{x-4}{9}+\frac{4x-2}{25}=\frac{x-1}{3}-\frac{x-9}{4}$ ヲ解ケ.

先ヅ9ヲ兩邊ニ乗ズレバ

$$x-4+\frac{36x-18}{25}=3x-3-\frac{9x-81}{4}.$$

項ヲ移セバ $\frac{36x-18}{25}+\frac{9x-81}{4}=2x+1.$

次ニ分母ノ最小公倍数100ヲ兩邊ニ乗ズレバ

$$144x-72+225x-2025=200x+100.$$

故ニ $144x+225x-200x=100+72+2025.$

$$169x=2197.$$

故ニ $x=13.$

小數ヲ係數及ビ既知數中ニ有スルキ
ニハ先ヅ之ヲ分數ニ換算シ而シテ後演

算ヲ行フベシ、左レモ時ニハ小數其儘ニ
テ演算ヲ行フ方都合好キトモアルナリ。

例 3. $0.5x - 0.3x = 0.25x - 1$ ヲ解ク。

先ヅ各小數ヲ分數ニ換算スレバ

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{10}x = \frac{1}{4}x - 1.$$

分母ノ最小公倍數12ヲ乘ズレバ

$$6x - 4x = 3x - 12.$$

項ヲ移セバ $6x - 4x - 3x = -12.$

$$-x = -12.$$

故ニ $x = 12.$

例 4. $2.25x - 0.125x = 3x + 3.75$ ヲ解ク。

項ヲ移セバ

$$2.375x - 0.125x - 3x = 3.75.$$

或ハ $-0.75x = 3.75.$

故ニ $x = -\frac{3.75}{0.75} = -5.$

演 習 問 題 20.

次ノ方程式ヲ解ク。

1. $2x - \frac{x-1}{2} = \frac{5x+4}{3} - 1.$ 2. $\frac{3x}{7} - \frac{5x-1}{14} = \frac{x+5}{21}.$

3. $\frac{3x+4}{5} - \frac{7x-1}{3} = -\frac{x+5}{2} - 5.$

4. $\frac{x+6}{11} + \frac{3x-5}{3} = \frac{3x+8}{11} - 2 + \frac{7x+5}{3}.$

5. $\frac{x-9}{7} + \frac{x-4}{3} + \frac{5}{21} = 0.$

6. $\frac{5(2x-5)}{8} - \frac{2x-6}{7} = \frac{5(3x+4)}{28}.$

7. $x + \frac{5}{3}(x-7) - \frac{1}{4}(x-8) = 3x - \frac{5x+3}{3}.$

8. $x + 26 = \frac{1}{14}(2x+14) - \frac{7x}{5}.$

9. $\frac{x-3}{4} = \frac{2x-12}{6} + \frac{3x-15}{9}.$

10. $\frac{x}{4} - 0.16x = 0.75 + 0.1x - \frac{17}{18}.$

11. $\frac{8x+1}{6} - \frac{3x+1}{2} = \frac{1-x}{3}.$

12. $0.3x + 0.3 + 4.25x = \frac{1}{2}x + 11.75 + \frac{1}{3}(2x-1).$

13. $\frac{3x-5}{8} + \frac{4x}{3} + \frac{x-3}{4} = 2 - \frac{x-15}{24}.$

14. $x + 4.3 = 0.6x + 0.5x - 0.3.$

15. $\frac{2x-1}{5} + \frac{5x-1}{7} = x + \frac{16}{3}(x-3).$

16. $\frac{1}{2}x - 3 + \frac{3}{4}x - 10 = \frac{10-x}{6} + \frac{x-4}{4}.$

17. $\frac{x+10}{3} - \frac{2}{3}(3x-4) + \frac{(3x-2)(2x-3)}{6} = x^2 - \frac{2}{15}.$

18. $\frac{x-5}{7} + \frac{x^2+6}{3} = \frac{x^2-2}{2} - \frac{x^2-x+1}{6} + 3.$

19. $0.5x + 3 = 0.15x + 0.3x + 4.$

20. $0.5x + 1.6 - 0.2x = 0.55x + 1.1.$

21. $\frac{3x^2-6}{5} - \frac{3x}{5} = \frac{6x(3x-6)}{30}.$

$$22. \quad 0.5x + \frac{0.45x - 0.75}{0.6} = \frac{1.2}{0.2} - 0.2x.$$

$$23. \quad a^2(a-x) - b^2(b+x) = abx.$$

$$24. \quad (p-x)(q-x) - p(q-x) = x^2 + pr.$$

$$25. \quad (x-a)^3(x+a-2b) = (x-b)^3(x-2a+b).$$

$$26. \quad (x+4a)(x-2a)^2 = (x+4b)(x-2b)^2.$$

一次方程式應用問題.

73. 是迄論ジ來レル處ハ代數學上ノ計算ノ方法ナリシヲ以テ、今ヨリ少シク其應用ヲ示ス處アラントス。

算術ニ於テ問題ヲ解クニハ先ツ求メント欲スル處ノ數即チ未知數ト與ヘラレタル數即チ既知數トノ間ノ關係ヲ究メ、而シテ所要ノ數ヲ見出ストハ讀者ノ已ニ熟知セル數ナリ、代數學ニ於テ應用問題ヲ解クモ亦之ニ同ジ、唯是ニ於テハ未知數ト既知數トノ間ノ關係ヲ文字ヲ以テ書表ハスヲ以テ方程式ヲ得、斯クシテ得タル方程式ヲ解ケバ所要ノ數ヲ得ルナリ。

此方程式ヲ書表ハスニ際シ注意ヲ要スルコトハ、第一ニ未知數ノ撰擇ナリ、若シ其撰擇宜ヲ得ザレバ簡單ナル問題モ爲

メニ複雑トナル虞アリ。

第二ニハ所得ノ方程式ノ各項ハ若シ名數ヲ取扱フ場合ニハ皆同一單位ヲ以テ計ラレタル數ヲ表ハササルベカラズ。(不名數ノキニハ顧慮ヲ要セズ)。

第三ニハ斯クシテ得タル方程式ヲ解キテ得ル處ノ根ガ果シテ所要ノ數ナリヤ否ヲ確ムルコトナリ。

此章ニ於テハ以上ノ如クシテ得タル方程式ガ一元一次方程式ナル場合ノミヲ考究セン。

方程式ヲ用井テ問題ヲ解クキニハ算術ニ於テ甚ダ複雑ナル問題ト雖モ甚ダ簡單トナルコト多ク、從テ如何ニ代數學ノ便利ナルカヲ窺知ルコトヲ得ベシ。

74. 與ヘラレタル問題ノ題意ヨリ方程式ヲ書キ表ハスコトハ初學者ノ屢々難シズル所ナルヲ以テ、問題ニ移ルニ先チ

文字ト符號トヲ以テ題意ヲ記スルコトヲ少シク示サントス。

例 1. x ヨリモ a 丈ク少ナキ數ヲ書キ表ハセ。

7ヨリモ2丈ク少ナキ數トイフキニハ其 $7-2=5$ ナルコトヲ直チニ知ルベシ、又13ヨリモ4丈ク少ナキ數トイヘバ其 $13-4=9$ ナルコトモ亦直チニ知リ得ル處ナリ、同様ニ x ヨリモ a 丈ク少ナキ數ハ $x-a$ ナリ。

例 2. 或數ヲ二ツニ分チ一方ハ13ニシテ他ハ x ナリ然ルキハ此數ハ $x+13$ ナリ。

例 3. 32ヲ二ツノ因數ニ分チタルキ一方ガ x ナルキニハ他ノ因數ハ $\frac{32}{x}$ ナリ。

例 4. 25個ノ菓子ヲ其數 y 丈クアル小兒ニ等分スルキニハ各兒ノ所得ハ $\frac{25}{y}$ 個ナリ。

例 5. 甲乙二人アリ最初甲ハ x 圓ヲ有シ、乙ハ y 圓ヲ有セシニ、其後乙ヨリ甲ニ a 圓ヲ與ヘ、甲ヨリ乙ニ b 圓ヲ送リタリトイフ、然ルトキハ甲ノ所持金ハ $(x+a-b)$ 圓ニシテ乙ノ所持金ハ $(y+b-a)$ 圓ナリ。

例 6. 一時間毎ニ三十哩ノ速度ヲ以テ馳行スル瀛車ガ a 哩丈ク馳スルニ要スル時間ハ $\frac{a}{30}$ 時間ナルベシ。

例 7. 或人 p 圓ヲ受取リ, q 圓ノ支拂ヲ成シ, r 圓ノ借金ヲ返却シ, s 圓ノ貸金ヲ受取タリトイフ, 而ル後此人ノ所持金ハ $(p-q-r+s)$ 圓ナリ.

例 8. a ニテ或數ヲ除シテ得タル商ハ p ニシテ剩餘ハ r ナリトイフ, 然ルニ此數ハ $ap+r$ ナリ.

例 9. 或人 y 年ノ後ニ其年齡三十五歳ナリトイフ, 然ルニ現今其人ノ年齡ハ $35-y$ ナルベシ.

例 10. 一ノ時計アリ, 日々進ム a 分ナリ, 而シテ或日ノ正午ニハ正當ナル時ヲ示シ居タリト云フ, 然ルニ一週間後ノ正午ニハ何分進ミ居ルヤトイフニ, 夫ハ $7a$ 分ナリ.

例 11. 相連續スル三整數ヲ書ク, 但シ最大ノ數ヲ x トセヨ.

$$x-2, x-1, x.$$

之ニ所要ノ數ナリ.

例 12. $2m$ ヲ以テ偶數ノ一般ナル形ヲ表ハシ $2m+1$ ヲ以テ奇數ノ一般ナル形ヲ表ハス, 但シ m ハ整數ナリ.

其他此ノ如キ問題ハ枚舉ニ違アラズト雖モ先ヅ之位ニ止メ餘ハ問題ヲ解ク

處ニ於テ讀者ノ練習ニ任スベシ.

75. 是ヨリ應用問題ノ解法ニ迂ラントス.

例 1. 甲乙二人ノ童子八十五個ノ菓子ヲ分配セシニ, 甲ノ所得ハ乙ノ所得ノ二倍ヨリモ少ナキ Γ 二十個ナリトイフ, 各ノ所得如何.

乙ノ所得ヲ x 個トセバ甲ノ所得ハ $(2x-20)$ 個ナリ.

兩所得ノ和ハ 85 個ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$$x+2x-20=85.$$

或ハ $3x=105.$

故ニ $x=35.$

即チ乙ノ所得ハ三十五個ニシテ甲ノ所得ハ

$$85-35=50.$$

即チ五十個ナリ.

例 2. 某數アリ其三倍ニ 5 ヲ加ヘタル和ハ其四倍ヨリ 8 ヲ減ジタル差ニ等シトイフ, 某數トハ如何.

x ヲ以テ某數ヲ表ハサシ.

此三倍 = 5ヲ加へタルモノハ $3x+5$ ニシテ此四倍ヨリ8ヲ減シタルモノハ $4x-8$ ナリ. 此兩數ハ題意ニヨリテ相等シキ故ニ次ノ方程式ヲ得.

$$3x+5=4x-8.$$

即チ $-x=-13.$

故ニ $x=13.$

即チ某數トハ十三ヲイフナリ.

例 3. 甲三圓ヲ所持シ乙ハ十二錢ヲ有スルキニ甲ヨリ幾錢ヲ乙ニ與フレバ甲ノ所持金ハ乙ノ所持金ノ五倍トナルヤ.

x 錢ヲ以テ甲ヨリ乙ニ與フル金高トセン.

然ルキハ甲ノ所持金ハ $(300-x)$ 錢ニシテ乙ノ所持金ハ $(12+x)$ 錢トナル, 因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$300-x=5(12+x).$$

項ヲ移セバ $-x-5x=60-300.$

$$-6x=-240.$$

故ニ $x=40.$

即チ甲ヨリ乙ニ四十錢ヲ與フベシ.

注意 73節ニ説キタル如ク名數ヲ取扱フ時ニハ

方程式ノ各項ハ皆同一單位ニテ計ラレタル數ヲ表ハサマル可カラズ.

例令バ此處ニ於テ單位ハ錢ナリ, 今若シ壹圓ヲ以テ單位トスレバ方程式ハ次ノ如ク書キ表ハサマル可カラズ.

$$3-x=5(0.12+x).$$

此方程式ヲ解ケバ $x=0.4.$ ヲ得.

諸同量ヲ求ムルニ當リ一方ニテハ40ヲ得, 他方ニテハ0.4ヲ得, 一見甚ダ奇ナルガ如シト雖モ, 少シモ怪シムニ足ラズ, 此二ツハ同シ事ヲ表ハセルナリ, 即チ前ニ於テハ錢ヲ單位トセルヲ以テ x モ亦錢ヲ單位トシテ計リタル數ナラザルベカラズ, 因テ $x=40$ ト得タルヲ以テ所要ノ金高ハ四十錢ト解釋スベキナリ, 然ルニ次ノ場合ニ於テハ單位ハ圓ナルヲ以テ x モ亦圓ヲ單位トシテ計リタル數ヲ表ハスモノナラザルベカラズ, 因テ $x=0.4$ ハ0.4圓即チ $\frac{4}{10}$ 圓即チ四十錢ト解釋スベキナリ.

上ノ如キ疑ノ生ズル理由ハ文字ハ數ヲ表ハスモノニシテ決シテ量ヲ表ハス

モノニアラズトイフニ注意セザルニ
因ルナリ、初學者往々ニシテ此ノ如キ誤
ヲ爲スコトアルヲ以テ宜シク注意スベ
シ。

例 4. 父子アリ、現今父ノ年ハ子ノ年
ノ四倍ナリ、然ルニ十四年ノ後ニハ子ノ
年ノ二倍ガ父ノ年ニ等シカルベシトイ
フ、現今父子各ノ年齢如何。

x ヲ以テ子ノ年齢ヲ表ハス數トセン。

然ルキトハ父ノ年ハ $4x$ 、十四年ノ後ニハ子ノ年ハ
 $x+14$ ニシテ父ノ年ハ $4x+14$ ナルベシ、因テ題意ニ依
リ次ノ方程式ヲ得。

$$4x+14=2(x+14).$$

項ヲ移セバ $4x-2x=28-14.$

$$2x=14.$$

故ニ $x=7.$

即チ現今子ノ年ハ七才ニシテ父ノ年ハ其四倍即
チ $7 \times 4 = 28$ 即チ二十八才ナリ。

例 5. 茲ニ一ノ仕事アリ、甲ハ八日ニ

テ之ヲ完結シ、乙ハ六日ニテ之ヲ結了ス
ト云フ、今甲乙二人共力シテ此仕事ニ従
事スルキニハ何日ノ後其ヲ結了スルヤ。

甲ハ八日ニテ仕事ヲ完結スル故ニ毎日爲ス仕事
ノ高ハ全躰ノ $\frac{1}{8}$ ニシテ乙ハ六日ヲ費ヤスヲ以テ日
々ノ仕事ノ高ハ全躰ノ $\frac{1}{6}$ ナリ、今 x ヲ以テ所要ノ日
數ヲ表ハストセバ此間ニ甲ノナス仕事ノ高ハ全躰
ノ $\frac{x}{8}$ ニシテ乙ノ爲ス高ハ $\frac{x}{6}$ ナリ、因テ題意ニヨリ

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{6} = 1.$$

24ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$3x+4x=24.$$

或ハ $7x=24.$

故ニ $x=3\frac{3}{7}$

即チ所要ノ日數ハ $3\frac{3}{7}$ 日ナリ。

例 6. 甲乙丙ノ三人或金高ヲ分配セ
シニ甲乙二人ノ所得ノ和ハ六十圓ニシ
テ甲ト丙トノ和ハ八十圓ナリ、且ツ又乙
ト丙トノ和ハ九十二圓ナリシトイフ、甲
乙丙各ノ所得如何。

今 x 圓ヲ以テ甲ノ所得ヲ表ハサシ、然ルニ $(60-x)$ 圓ハ乙ノ所得ニシテ $(80-x)$ 圓ハ丙ノ所得ナリ、故ニ此和即チ $(60-x)+(80-x)$ 圓ハ乙丙ノ所得ノ和ナリ、然ルニ乙丙ノ所得ノ和ハ 92 圓ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得、

$$(60-x)+(80-x)=92.$$

即チ $60-x+80-x=92.$

項ヲ移セバ $60+80-92=2x.$

或ハ $48=2x.$

故ニ $x=24.$

即チ甲ノ所得ハ二十四圓ナリ、

$$60-24=36.$$

即チ乙ノ所得ハ三十六圓ナリ、

又 $80-24=56.$

即チ丙ノ所得ハ五十六圓ナリ、

此處ニ得タル答ノ果タシテ正當ナルヤ否ヲ檢スルニハ乙丙ノ所得ノ和ガ九十二圓トナルヤ否ヲ檢スレバ足レリ、偕テ上ニ得タル乙丙ノ所得ノ和ヲ求ムレバ

$$36+56=92.$$

即チ上ニ得タル答ハ正當ナリ、

例 7. 茶商アリ、一斤ニ付キ二圓二十

五錢ノ茶ト一圓五十錢ノ茶トヲ混ジテ一斤ニ付キ一圓七十五錢ノ茶ヲ六十斤作ラントス、各斤數ヲ問フ、

x ヲ以テ二圓二十五錢ノ茶ノ斤數トセン、然ルニ一圓五十錢ノ茶ノ斤數ハ $60-x$ ナルベク從テ各ノ價ハ $225x$ 錢ト $150(60-x)$ 錢ナルベシ、然ルニ混合茶ノ一斤ノ價ハ一圓七十五錢ナル故ニ其總躰ノ價ハ 175×60 錢ナリ、因テ次ノ方程式ヲ得、

$$225x+150(60-x)=175 \times 60.$$

或ハ $225x-150x=175 \times 60-150 \times 60.$

或ハ $75x=1500.$

故ニ $x=20.$

次ニ $60-x=60-20=40.$

故ニ所要ノ斤高ハ二圓二十五錢ノ茶二十斤ト一圓五十錢ノ茶四十斤トナリ、

例 8. 時計ノ時針ト分針トガ八時ト九時トノ間ニ於テ重ナリ合フ時ヲ問フ、

今八時ノ後 x 分ヲ經テ重リ合フトセン、

時針ハ八時ニハ分針ヨリモ四十分ノ間隔丈ケ進ミ居ルナリ、故ニ分針ガ x 分丈ケ廻ル間ニ時針ノ廻ル

高ハ $x-40$ 分ナルベシ, 諸時針ノ速度ハ分針ノ速度ノ十二分ノ一ナル故ニ時針ノ廻リシ間隔ハ分針ノ廻リシ間隔ノ十二分ノ一ニ等シカルベシ, 因テ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{1}{12}x = x - 40.$$

或ハ $x = 12(x - 40).$

項ヲ移セバ $480 = 12x - x = 11x.$

故ニ $x = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}.$

即チ所要ノ時ハ八時後 $43\frac{7}{11}$ 分ナリ.

又或問題ヲ解クニ當リ直接ニ所要ノ數ヲ x ニテ表ハサズシテ他ノ數ヲ x ニテ表ハシテ方程式ヲ作り, 之ヲ解キテ得ル處ノ x ノ値ヨリ所要ノ數ヲ計算スル方却ツテ便利ナルコアリ. 次ノ例ヲ見ヨ.

例 9. 或人若干ノ金子ヲ其三子ニ分配スルニ當リ長子ニハ全額ノ三分ノ一ヨリモ二十圓多ク與ヘ, 次子ニハ其殘金ノ半分ヨリモ五圓少ナク與ヘ, 末子ニハ尙ホ殘ル處ノ高ノ三分ノ二ヨリモ五圓

丈ケ少ナク與ヘタリシニ, 尙ホ三十圓殘レリトイフ, 仍テ問フ三子ノ所得ノ全額幾何.

先ヅ x 圓ヲ以テ此人ノ所持金ノ全額トセン, 然ルキハ題意ニヨリ長子ノ所得ハ $(\frac{x}{3} + 20)$ 圓ニシテ次子ノ所得ハ $\frac{1}{2}\{x - (\frac{x}{3} + 20)\} - 5$ 圓ナリ, 而シテ末子ノ所得ハ $\frac{2}{3}[\frac{1}{2}\{x - (\frac{x}{3} + 20)\} + 5] - 5$ 圓ナリ, 且ツ殘金 30 圓ナルヲ以テ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{x}{3} + 20 + \frac{1}{2}\{x - (\frac{x}{3} + 20)\} - 5 + \frac{2}{3}\{\frac{1}{2}\{x - (\frac{x}{3} + 20)\} + 5\} - 5 = x - 30.$$

括弧ヲ外ヅシ項ヲ移シテ同類項ヲ約スレバ

$$\frac{80}{3} = \frac{x}{9}.$$

故ニ $x = 240.$

即チ全金額ハ二百四十圓ナリ, 故ニ

$$240 - 30 = 210.$$

因テ三子ノ所得總額ハ二百十圓ナリ.

注意. 未知數 x ノ値ガ時トシテハ負數トシテ得ラル、コアリ, 此時ニハ第二章ニ示セル通りニ解釋スベシ, 若適當ナル解釋ヲ得ザルコアラバ夫ハ問題ノ不

合理ナルヲ示セルナリ。

演 習 問 題 21.

1. 二數アリ, 其和ハ90ニシテ其差ハ14ナリトイフ, 各數ヲ求ム.
2. 如何ナル數ニ16ヲ加フレバ其數ノ五倍トナルヤ.
3. 36圓ヲ二人ニ分配セシニ一人ノ所得ハ他ノ者ノ所得ノ二倍ナリトイフ, 各ノ所得ヲ問フ.
4. 二數ノ差ハ17ニシテ其和ハ其差ノ五倍ヨリモ10丈ク多シトイフ, 各數ヲ求ム.
5. 甲乙二人アリ, 甲ハ100圓ヲ有シ乙ハ16圓ヲ有ス, 今甲ハ乙ニ何圓ヲ與フレバ乙ノ所有金ハ甲ノ所有金ノ三分ノ一ニ等シクナルカ.
6. 二數アリ, 其和ノ三倍ハ258ニシテ一數ハ他數ノ二倍ヨリモ8丈ク多シトイフ, 各數如何.
7. 某數ノ三分ノ一ハ其六分ノ一ヨリモ4丈ク多シトイフ, 某數トハ如何.
8. 甲乙二童合シテ80個ノ味柑ヲ有ス, 今乙が自分ノ所有スル數丈ク甲ヨリ分與セラレタリシニ尙

ホ乙ノ所有數ハ甲ノ三分ノ一ナリシトイフ, 初メ甲乙二童各幾個ヲ有セシヤ.

9. 某數アリ, 其六倍ヨリ35ヲ減ツタル差ハ14ヨリ其數ヲ減ツタル差ニ等シトイフ, 某數トハ如何.
10. 現今父ノ年ハ子ノ年ノ五倍ナレモ六年前ニハ父ノ年ハ子ノ年ノ九倍ナリシトイフ, 父子現今ノ年齢如何.
11. 甲乙丙ノ三人ノ所有金總額975圓ナリ, 而シテ甲ハ乙ノ二倍ヨリモ25圓多ク有シ丙ハ甲ノ五分ノ一ヨリモ27圓多ク有セリトイフ, 各ノ所有額ヲ問フ.
12. 某數ノ四分ノ一ト七分ノ一トノ差ノ二倍ハ其三分ノ一ト五分ノ一トノ差ヨリモ34多シトイフ, 某數トハ如何.
13. 甲乙二人若干金ヲ分配セシニ甲ノ所得ハ乙ノ所得ノ三倍ヨリモ14圓少ナク又其二倍ヨリモ同額丈ク多シトイフ, 各ノ所得及ビ總金高ヲ問フ.
14. 甲乙丙三人ニテ總額300圓ヲ義捐セリ, 甲ノ出金高ハ乙ノ出金高ヨリモ50圓多ク丙ノ出金高ハ乙ノ出金高ヨリモ20圓少ナシトイフ, 各ノ出金高ヲ問フ.
15. 父ノ年ハ56ニシテ子ノ年ハ22ナリ, 父ノ年ハ

子ノ年ノ三倍ナルルハ何時ナルヤ。

16. 一樽ノ酒アリ、貯藏中ニ漏リタル爲メ全量ノ四分ノ一ヲ失ヘリ、然ルニ此中ヨリ三升ヲ酌ミ出シタルニ尙ホ全量ノ半分餘レリトイフ、初メ此樽中ニ在リシ酒量ヲ問フ。

17. 二數ノ差ハ3ニシテ其平方ノ差ハ33ナリトイフ、二數ヲ求ム。

18. 或人年利一割六分ノ約束ニテ若干圓ヲ借金シ十年ノ後其利子ヲ計算セシニ元金ヨリモ多キヲ12圓ナリシトイフ、元金幾何ナリヤ。

19. 甲乙丙三人共同シテ林檎500個ヲ買ヘリ、甲ノ出金高ハ乙丙ノ出金高ノ和ニ等シク又乙ハ丙ノ $\frac{3}{2}$ 倍出金セリトイフ、然ラバ此三人如何ニ此林檎ヲ分配スベキカ。

20. 甲乙丙丁ノ四人合シテ若干圓ヲ所有セリ、甲ハ乙ヨリモ25圓多ク有シ、乙ト丙ト丁トハ合シテ38圓ヲ有シ、丁ハ甲ヨリモ30圓丈ク少ナク有シ、又丙ハ丁ヨリモ3圓丈ク多ク有セリトイフ、各ノ所有金高如何。

21. 金24圓ヲ男三人女五人小供二十人ニ分配セシニ、男一人ノ所得ハ女一人ノ所得ヨリモ2圓多ク

子供一人ノ所得ハ女一人ノ所得ノ半分ナリトイフ、各ノ所得幾何。

22. 三時ト四時トノ間ニ於テ時計ノ兩針ガ互ヒニ直角ヲナス時ヲ問フ。

23. 甲乙ノ二人175里ヲ距タル兩處ヨリ會合スル目的ヲ以テ出發セリ、偕甲ハ一時間ニ一里半ツ、歩シ、乙ハ一時間ニ二里ヅ、歩シ、毎日十時間ツ、旅行スルルニハ何日ノ後相會スルヤ。

24. 三斗六升ヲ入ル、水桶ヲ毎時一斗二升ツ、注入スル水管ニテ水ヲ充タサントス、然ルニ此桶ノ底ニ小孔アリテ毎時四升ツ、漏ストイフ、然ルルハ幾時間ニシテ此桶ハ充タサル、ヤ。

25. 或人ニ其年齢ヲ問ヒシニ、余ニ一人ノ子アリ今ヨリ四年前ニハ余ガ年ハ子ノ年ニ四倍シ、又今ヨリ十二年後ニハ余ガ年ハ子ノ年ニ二倍スベシトノ答ヲ得タリ、此人ノ年齢幾何ナルカ。

26. 甲乙ノ兩人或處ヲ出發シテ150里ヲ距ル某地ニ同時ニ達シタリ、偕甲ハ毎時2里ヲ歩シ乙ヨリモ二日ト五時間後ニ出發セリトイフ、乙ハ毎時何里ヲ歩シタルヤ、但シ甲乙共ニ毎日十時間ツ、旅行スルモノトス。

27. 四人ノ兄弟アリ,各々ノ年齢ハ其次ノ弟ノ年齢ヨリモ三年多ク,且ツ最長ノ兄ノ年齢ハ末ノ弟ノ年齢ノ四倍ナリトイフ,各ノ年齢如何.

28. 一商人若干ノ資金ヲ以テ一業ニ從事シ,初年ノ終リニ於テ元金ノ二倍ヨリモ100圓丈少ク少ク收得セリ,翌年又此増加セシ資本ニヨリ同業ニ從事シ,同年ノ終リニ其二倍ヨリモ100圓丈少ク少ク收得セリ,第三年ニ於テモ亦然リ,然ルニ三年ノ終リニハ其所有金元資金ニ三倍セリトイフ,問フ元資金ハ幾何ナルカ.

29. 1100圓ノ金ヲ甲乙丙丁四人ニ分配セリ,乙ノ所得ハ甲ノ所得ノ二倍ニシテ,丙ノ所得ハ甲乙二人ノ所得ノ和ニ等シク,丁ノ所得ハ乙丙二人ノ所得ノ和ニ等シトイフ,各ノ所得ヲ求ム.

30. 相連続スル二整数アリ,小ナル方ノ二分ノ一ト五分ノ一トノ和ハ大ナル方ノ三分ノ二ヨリモ1丈少ク多シトイフ,二數トハ如何.

31. 甲ハ200圓ヲ所持シ乙ハ140圓ヲ所持シテ共ニ旅行セシニ,途中強盜ニ逢ヒ甲ハ乙ノ三倍丈奪ヒ去ラレタリ,爲メニ兩人ノ所有高ハ同一トナリタリトイフ,各ノ失ヒシ金高ヲ問フ.

32. 或人七圓二十錢ニテ鶏卵ヲ買ハントセシニ,其價二割ヲ騰貴スルルニハ前ヨリモ其數80個少ナシトイフ,鶏卵百個ノ値ヲ問フ.

33. 時計ノ分針ガ六時ト七時トノ間ニ於テ時針ト六十度ノ角(即チ十分丈ケノ間隔)ヲナス時ヲ問フ.

34. 傭夫アリ,働キシ日ニハ60錢ノ給料ヲ受取リ怠リシ日ニハ38錢ノ過料ヲ出ス約束ヲ以テ,或人ニ使役セラレ,三十日ノ後ニ八圓二十錢ヲ受取リタリトイフ,働キシ日數ヲ問フ.

35. 或人死ニ臨ミテ其財産ヲ二男一女ニ遺セリ,仍テ遺言ニ從ヒ之ヲ分配セシニ,長男ノ所得ハ次男ノ所得ノ二倍ニシテ,次男ノ所得ハ娘ノ所得ノ二倍ナリ,又長男ト娘トノ所得ノ和ハ840圓ナリトイフ,各ノ所得幾何.

36. 酒精ト水トヲ混合セルモノアリ,其全量ノ三分ノ二ヨリ15升ヲ減シタルモノガ酒精ニシテ,其全量ノ五分ノ二ニ5升ヲ加ヘタルモノガ水ナリトイフ,然ラバ各何升ナルカ.

37. 60ヲ四部ニ分チテ第一部ノ5倍,第二部ヨリ1ヲ減シタルモノ,第三部ニ4ヲ加ヘタルモノ,第四部ノ半分ハ各相等シキ様ニセヨ.

38. 三人共ニ働キテ120日ニテ一事ヲ成就セシニ、甲ハ乙ノ $\frac{3}{4}$ 丈ケノ仕事ヲ成シ、乙ハ丙ノ $\frac{4}{5}$ 丈ケノ仕事ヲ成シタリトイフ、今各一人ニテ此仕事ヲ成スニハ幾日ヲ要スベキヤ。

39. 一隊ノ兵士ヲ正方形ニ密集セシムルヲ得タル後、戦争ノ爲メニ295人ヲ死傷ノ爲メニ失ヒタリシニ又正方形ニ整列セシムルヲ得タリ、去レテ此時ニハ一側ノ人數ハ前ノ時ヨリモ五人少ナカリシトイフ、問フ初メ幾人ナリシカ。

40. 財布ノ中ニ貨幣30個アリ、其價合計22.75圓ニシテ其中ノ若干個ハ一圓銀貨、一圓銀貨ノ數ノ四分ノ一ハ五十錢銀貨ニシテ、餘ハ五錢白銅貨ナリトイフ、各貨幣ノ數ヲ問フ。

41. 兎ノ九飛スル間ニ犬ハ七飛ス、然レテ兎ノ三飛ノ距離ハ犬ノ二飛ノ距離ニ等シトイフ、今兎ガ其四十飛ニ當ル距離ニ於テ犬ガ追ヒ初メタル時ニハ此兎ハ幾飛ノ後犬ノ爲メニ捕ハル、ヤ。

42. 一隊ノ兵士60日間ノ糧ヲ備ヘタルアリ、然ルニ10日ノ後急ニ1500人ノ兵ヲ増セシ爲メニ備フル處ノ糧ニテハ僅カニ20日ヲ支フルニ足ルトイフ、然ラバ初メノ兵數ハ幾何ナリシヤ。

43. 若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分配セシニ、甲ノ所得ハ全額ノ三分ノ一ヨリモ20圓多ク、乙ノ所得ハ其殘リノ半分ヨリモ10圓多ク、丙ハ其殘金ヲ取リシニ80圓ナリシトイフ、若干圓トハ幾何。

44. 一室ノ縦ハ横ヨリモ六尺長シ、今縦横各三尺ツ、増スルニハ面積ニ於テ2.75坪丈ケ増加ストイフ、此室ノ坪數ヲ問フ。

45. 甲乙二人一ツノ的ニ向ツテ射的ヲ行ヒシニ甲ハ二十射中十五命中シ、乙ハ二十射中十八命中セリ、而シテ兩人ニテ66命中セリトイフ、各ノ射數ヲ問フ。

46. 甲乙ノ二工夫アリ、或仕事ヲ甲ハ45日ニテ成就シ、乙ハ30日ニテ成就ストイフ、今甲此仕事ニ着手シテ若干日ノ後乙之ニ代リテ22日ニテ成就セリトイフ、然ラバ甲ノ働キシ日數如何。

47. 1000人ノ兵士ヲ五人ツ、ノ厚サノ樹形(中空ノ正方形)ニ並ベシニハ一側ノ人數ヲ幾人ツ、取ル可キヤ。

48. 一ノ袖時計ノ日々遅ル、時間ハ一ノ置時計ノ日々進ム時間ニ等シ、而シテ置時計ノ1201時間ハ袖時計ノ1199時間ニ等シトイフ、各時計ノ毎時間進

ミ又ハ遅ル、高ヲ問フ。

49. 或人若干町ノ地面ヲ每反80圓ニテ買ヘリ、然ルニ三年ノ後其價三倍セシヲ以テ之ヲ賣リテ元價ヲ引キ去リ殘金160圓ヲ得、其上ニ尙ホ3町2反ヲ餘セリトイフ、元ト何町ヲ買ヒシヤ。

50. 一斤五十錢ノ茶ト一圓二十錢ノ茶ト一圓八十錢ノ茶トノ三種ヲ買ヒタル人アリ、一圓八十錢ノ茶ノ斤數ハ五十錢ノ茶ノ斤數ノ二倍ニシテ、一圓二十錢ノ茶ノ斤數ハ五十錢ノ茶ノ斤數ノ三倍ニ等シ、若シ茶ノ值二割方高價ナルキニハ此人ハ九十二圓四十錢丈ケ尙ホ拂ハザル可カラズトイフ、問フ各茶ノ斤數如何。

51. 一隊ノ兵士ヲ二分シテ一ハ二人ノ厚サノ樹形ニ他ハ四人ノ厚サノ樹形ニ整列セシメタルニ一方ノ樹形ハ丁度他ノ方ノ樹形内ニ入ル、トヲ得タリトイフ、此兵員幾何ナルカ。

52. 甲乙ノ兩人共同シテ五百圓ヲ一銀行ニ預ケ或時ノ後其利子金45圓ノ内甲ハ27圓ヲ取リタリトイフ、各初メ何程ツ、出金セシカ。

第五章 聯立一次方程式.

76. 前章ニ於テハ未知數ノ數ハ唯一ニシテ且ツ一次ナル方程式ノ解法ヲ舉ゲタリ、今此章ニ於テハ數多ノ未知數ヲ有シ且ツ總テノ未知數ニ付キテ一次ナル方程式ノ解法ヲ述ベントス。

先ヅ二ツノ未知數 x, y ヲ含ム次ノ方程式ヲ考ヘン。

$$3x - 5y = 11 \dots\dots\dots(1)$$

此方程式ニ適合スル x, y ノ值ハ限無クアリ。今此方程式ヲ書キ改ムレバ

$$3x = 11 + 5y.$$

又ハ
$$x = \frac{1}{3}(11 + 5y).$$

儲此右邊ノ y ニ任意ノ值ヲ與フレバ夫ニ相應スル x ノ值ヲ得ベシ。例令バ $y=2$ ト置ケバ $x=7$, $y=3$ ト置ケバ $x=8\frac{2}{3}$, $y=8$ ト置ケバ $x=17$ ヲ得、其他斯ノ如シ。

即チ上ノ方程式ニ適合スル未知數ノ値ハ次ノ如ク幾通りモアルナリ。

$$\begin{cases} x=7 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=8\frac{2}{3} \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=17 \\ y=8 \end{cases}, \dots\dots$$

次ニ又二ノ未知數ヲ含ム他ノ方程式ヲ考ヘン。

$$x+3y=13\dots\dots\dots(2)$$

此方程式ハ次ノ如ク書表ハスヲ得
即チ

$$x=13-3y.$$

此方程式ニ適合スル未知數 x, y ノ値モ亦幾通モアルベシ。

偕此(1)及ビ(2)ノ二方程式ニ適合スル未知數ノ値ノ中ニハ同時ニ此二方程式ニ適合スルモノアルベシ。

今此値ヲ求メントスレバ x ハ(1)及ビ(2)ニ於テ相等シカルベキヲ以テ次ノ等式ヲ得。

$$\frac{1}{3}(11+5y)=13-3y.$$

3ヲ兩邊ニ乗ジ項ヲ移シテ同類項ヲ約スレバ

$$14y=28.$$

$$\text{故ニ} \quad y=2.$$

此値ヲ(2)ノ中ニ入ルレバ

$$x=13-6=7.$$

即チ(1)及ビ(2)ノ二ノ方程式ニ同時ニ適合スル未知數 x 及ビ y ノ値ハ $x=7, y=2$ ナリ。

此ノ如ク二ツノ未知數ヲ含ム二ツノ一次方程式ニ同時ニ適合スル未知數 x 及ビ y ノ値ハ唯一通りアルノミナリ。

定義. 二ツ或ハ二ツ以上ノ未知數ヲ含ム處ノ二ツ或ハ二ツ以上ノ方程式ガ其未知數ノ同値ニヨリテ適合サルベキモノナルキニハ之ヲ聯立方程式ノ一組ト稱ス。

聯立方程式ノ次數トハ其内ニ含ム總

テノ未知數ニ付キテ最高次ノ項ノ次數
ヲイフナリ。

故ニ聯立一次方程式トハ其内ニアル
總テノ未知數ニ付キテ唯一ノ項ノミ
ヲ含ム方程式ノ一組ヲイフナリ。

本章ニ於テハ先ヅ二ツノ未知數ヲ含
ム聯立一次方程式ヲ論ジ、次ニ三ツ或ハ
三ツ以上ノ未知數ヲ含ム聯立一次方
程式ヲ論ズベシ。

77. 聯立一次方程式ヲ解クニ通常三
法アリ、然レモ何レノ法ニ於テモ其主眼
トスル處ハ一ニシテ先ヅ二ツノ與ヘラ
レタル方程式ヨリ唯一ツノ未知數ヲ含
ム一次方程式ヲ作ルニアリ、此第三ノ方
程式ヲ作ルコトヲ稱シテ此中ニ含マレ
ザル未知數(二ツノ内ノ何レカーツ)ヲ逐
出ス(或ハ除却ス)トイフナリ、斯ク一ツ
ノ未知數ヲ逐出シテ得タル第三ノ一次

方程式ハ前章ニ舉ゲタル方法ニテ之ヲ
解キ其根ヲ第一或ハ第二ノ何レカヘ入
レテ第二ノ未知數ノ値ヲ見出スナリ、次
ニ其三法ヲ舉グベシ。

(1). (加減法). 或適當ナル數ヲ二ツノ
方程式ノ兩邊ニ乘ジテ二ツノ未知數中
何レカーツノ係數ヲ相等シクシ、而シテ
此二方程式ヲ加ヘ或ハ減ジテ此未知數
ヲ逐出シ、他ノ未知數ノミヲ含ム方程式
ヲ作ルベシ。

例. 次ノ一組ノ聯立一次方程式ヲ解ケ。

$$2x + 7y = 35,$$

$$5x - 3y = 26.$$

x ヲ逐出サンガ爲メニ第一ノ方程式ニ5ヲ乘シ、
第二ノ方程式ニ2ヲ乘ズベシ、然ルルハ次ノ一組ノ
方程式ヲ得。

$$10x + 35y = 175,$$

$$10x - 6y = 52.$$

第一ノ方程式ヨリ第二ノ方程式ヲ減ズレバ

$$35y + 6y = 175 - 52.$$

或ハ $41y = 123.$

故ニ $y = 3.$

此値ヲ第一第二何レカノ原方程式中ニ入ルレバ
 x ノ値ヲ得ベシ。例令バ第二ノ方程式ニ入ルレバ

$$5x - 3 \times 3 = 26.$$

或ハ $5x = 26 + 9 = 35.$

故ニ $x = 7.$

即チ所要ノ未知數ノ値ハ次ノ如シ。

$$x = 7, \quad y = 3.$$

若シ最初ニ x ノ代リニ y ヲ逐出サント欲スレバ,
第一ノ方程式ニ 3, 第二ノ方程式ニ 7ヲ乘ズベシ, 然
ルトキハ

$$6x + 21y = 105,$$

$$35x - 21y = 182.$$

ヲ得. 加ヘ合スレバ

$$6x + 35x = 105 + 182.$$

或ハ $41x = 287.$

故ニ $x = 7.$

y ノ値ハ前ノ如ク, 此 x ノ値ヲ第一或ハ第二ノ方
程式ノ何レカニ入ルレバ見出スヲ得ベシ.

注意. 上ノ如ク一ノ未知數ヲ逐出シ
テ得タル第三ノ方程式ノ根ヲ求メ, 此値
ヲ第一或ハ第二ノ方程式中何レカーツ
ニ入レテ他ノ未知數ヲ見出シタル後, 所
得ノ二ツノ未知數ノ値ヲ他ノ方程式(即
チ最後ニ用井ラレザリシ方程式)中ニ入
レテ, 果タシテ其値ガ適合スルヤ否ヤヲ
驗スルヲ必要ナリ, 若シ此時相等ノ關係
成立セザルヲアラバ何處ニカ演算ニ誤
アルヲ知ルベシ.

例令バ上例ニ於テ $y = 3$ ヲ第二ノ方程式中ニ入レ
テ $x = 7$ ヲ得タリ, 今此 $x = 7, y = 3$ ヲ第一ノ方程式中ニ
入ルレバ

$$2 \times 7 + 7 \times 3 = 35.$$

或ハ $14 + 21 = 35.$

故ニ $35 = 35.$

即チ相等ノ關係ハ成立スルヲ以テ, 所得ノ値ハ與
ヘラレタル方程式ニ適合スルナリ, 從テ演算ニ誤ナ
キヲ證ス.

(2). (置換法.) 一ノ方程式ヨリ一ノ未知數ノ値ヲ他ノ未知數ヲ以テ表ハシ、之ヲ第二ノ方程式中ニアル此未知數ニ代用スベシ.

前例ヲ用キニ、第一ノ方程式ヨリ

$$2x = 35 - 7y.$$

或ハ $x = \frac{1}{2}(35 - 7y), \dots\dots\dots (a)$

此 x ノ値ヲ第二ノ方程式中ニ入ルレバ

$$\frac{3}{2}(35 - 7y) - 3y = 26.$$

或ハ $175 - 35y - 6y = 52.$

$$123 = 41y.$$

故ニ $y = 3.$

此値ヲ (a) カ或ハ第二ノ方程式カ何レカーツニ入レテ x ノ値ヲ求ムルヲ前ノ如シ.

或ハ第二ノ方程式ヨリ

$$5x - 26 = 3y.$$

又ハ $y = \frac{1}{3}(5x - 26), \dots\dots\dots (b)$

此 y ノ値ヲ第一ノ方程式中ニ入ルレバ

$$2x + \frac{1}{3}(5x - 26) = 35.$$

或ハ $6x + 35x - 182 = 105.$

項ヲ移シ同類項ヲ約スレバ

$$41x = 287.$$

$$x = 7.$$

此値ヨリ y ノ値ヲ求ムレバ前ノ如シ.

(3). (等置法.) 二ツノ方程式ニ於テ同未知數ノ値ヲ他ノ未知數ニテ表シ、所得ノ二式ヲ等號ヲ以テ連結スベシ. 此方法ハ既ニ此章ノ初メニ於テ示シタルモノナリ.

又前例ヲ用キニ.

第一ノ方程式ヨリ $x = \frac{1}{2}(35 - 7y).$

第二ノ方程式ヨリ $x = \frac{1}{5}(26 + 3y).$

ヲ得. 此二式ヲ等號ニテ連結スレバ

$$\frac{1}{2}(35 - 7y) = \frac{1}{5}(26 + 3y).$$

10ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$175 - 35y = 52 + 6y.$$

項ヲ移シ同類項ヲ集ムレバ

$$123 = 41y.$$

故ニ $y = 3.$

此値ヲ用キテ x ノ値ヲ前ト同様ニシテ見出スナ

リ。

又ハ第一ノ方程式ヨリ

$$y = \frac{1}{4}(35 - 2x).$$

第二ノ方程式ヨリ $y = \frac{1}{3}(5x - 26).$

ヲ得。此二式ヲ相等シト置ケバ

$$\frac{1}{4}(35 - 2x) = \frac{1}{3}(5x - 26).$$

21ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$105 - 6x = 35x - 182.$$

項ヲ移シ、同類項ヲ集ムレバ

$$287 = 41x.$$

故ニ $x = 7.$

此値ヨリ y ノ値ヲ見出ス。前ノ如シ。

以上ノ三法中其何レヲ擇ブヤハ遭遇スル所ノ問題ニヨリテ自カラ定マルベク、左レモ夫ハ熟練ヲ積ムニ非ザレバ直チニ其見分ケヲ付クルヲ難カルベキヲ以テ、初學者ハ何レノ方法ヲ用ウルモ差支ナシ。

78. 前節ニ舉ゲタル三法ハ普通ノ解法ナレモ、時トシテハ他ノ方法ヲ用ウル

方簡便ナルヲアリ、今一例ヲ次ニ舉ゲン。

例. 次ノ一組ノ聯立方程式ヲ解ク。

$$7x - 3y = 29.$$

$$3x - 7y = 1.$$

此方程式ハ前節ノ諸法ニヨリテ解クヲ得レモ、亦次ノ如クシテ解クニハ幾分カ簡單ナリ。

二式ヲ相加フレバ

$$7x - 3y + 3x - 7y = 29 + 1.$$

同類項ヲ約スレバ $10x - 10y = 30.$

又ハ10ニテ除スレバ $x - y = 3. \dots\dots\dots(1)$

次ニ第一式ヨリ第二式ヲ減ズレバ

$$7x - 3y - 3x + 7y = 29 - 1.$$

同類項ヲ約スレバ $4x + 4y = 28.$

4ニテ除スレバ $x + y = 7. \dots\dots\dots(2)$

(1)及ビ(2)ヲ加フレバ $2x = 10.$

故ニ $x = 5.$

(1)ヲ(2)ヨリ減ズレバ $2y = 4.$

故ニ $y = 2.$

即チ所要ノ値ハ $x = 5, y = 2.$

注意. 代數學ニ於テ問題ヲ解クニ當

り、屢々一般ノ方法ニ依ラズシテ或特別ナル方法ニ依ル方便利ナルヲアリ、左レ此之ハ經驗ヲ重キタルモノニ非ザレバ夫ヲ見分クルヲ難キヲ以テ、初學者ハ一般ノ方法ニ依リテ解クヲ勤メ猥リニ簡單ナル別法ヲ案出センニ究々トシテ却テ大切ナル時ヲ費ヤサシラン様ニ注意スベシ。

演習問題 22.

次ノ方程式ヲ解ケ。

1. $4x - 3y = 5, 3x - 2y = 4.$
2. $x + 6y = 9, 5x + 9y = 3.$
3. $11x + 5y = 1, x - 2y = 5.$
4. $3x - 2y = 1, 5x + y = 32.$
5. $x - 2y = 9, 4y + 3x = -23.$
6. $x + 2y = 17, 3x - 4y = 1.$
7. $2x - \frac{y}{4} = 13, 3x - y = 12.$
8. $\frac{x+3}{5} - \frac{y}{3} = -1, \frac{2x-10}{2} + \frac{y}{9} = 3.$

9. $3(x-1) + 2y = 2, 3x - (4y+6) = 11.$
10. $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{3}(y+4) = 1, 2x - \frac{1}{2}(4y-6) = 7.$
11. $0.2x + y = -6, 2x - y = 61.$
12. $x - 7 = 3(y-3) - 2, y + 3 = 2(x-7) - (2y-4).$
13. $0.3x + 0.25y = 5, 0.5x - 0.16y = 1.$
14. $0.2x + 0.3y = 6, 0.5x + 0.25y = 8.$
15. $465x + 430y = 35, 21x - 3y = 24.$
16. $21x - 3(y+6) = 51, 9x + 8y = 11.$
17. $\frac{1}{3}(x-1) + \frac{1}{4}(y-3) = 9, \frac{1}{4}(x+3) - \frac{1}{3}(y-1) = 2.$
18. $\frac{5x-3y}{8} = x+y+2, 3x - \frac{y+4}{2} = 5.$
19. $5(x-3) - 2(y-5) = 1, \frac{2x-y}{2} = 1 + \frac{6x-4y}{8}.$
20. $7x - 3y = 4(x+6) - 2(y-5), 2x - y = 15.$
21. $0.5x - y = 0.25(3x - 2y), 3x - 0.2y = 2x + 11.$

79. 尙二三ノ特別ノ例ヲ次ニ示サン。

例 1. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ。

$$\frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 1, \frac{8}{x} + \frac{9}{y} = 7.$$

此處ニ於テ $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{y}$ ヲ未知數ト考フレバ、此等ノ方程式ハ聯立一次方程式ト見做スヲ得ベシ。

第一式ニ 3 ヲ乘ツテ第二式ニ加フレバ

$$\frac{12}{x} + \frac{8}{x} = 3 + 7.$$

或ハ $(12+8)\frac{1}{x}=10.$

即チ $20 \times \frac{1}{x}=10.$

故ニ $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}.$

因テ $x=2.$

第一式ヨリ $\frac{4}{2}-\frac{3}{y}=1.$

項ヲ移シテ同類項ヲ約スレバ
 $\frac{3}{y}=1.$

或ハ $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}.$

故ニ $y=3.$

即チ所要ノ値ハ $x=2, y=3.$

例 2. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ク.

$$(x-2)(y+1)-x(y-3)=1-y,$$

$$y(x-3)+(1-x)(4+y)=2-8x.$$

此方程式ハ外見上一次ナラザレモ, 乘法ヲ行ヒ同類項ヲ約スレバ直チニ一次ノ聯立方程式トナルナリ.

即チ

$$xy-2y+x-2-xy+3x=1-y,$$

$$xy-3y+4-4x+y-xy=2-8x.$$

或ハ $-2y+x-2+3x=1-y,$

$$-3y+4-4x+y=2-8x.$$

項ヲ移シ同類項ヲ約スレバ

$$4x-y=3,$$

$$4x-2y=-2.$$

是レ聯立一次方程式ノ一組ナリ.

第一ヨリ第二ノ方程式ヲ減ズレバ

$$y=5.$$

此値ヲ第一ノ方程式中ニ入ルレバ

$$4x-5=3.$$

或ハ $4x=5+3=8.$

故ニ $x=2.$

即チ所要ノ値ハ $x=2, y=5.$

例 3. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ク.

$$ax-by=a^2+b^2, \quad bx-ay=2ab.$$

第一ノ方程式ニ b ヲ乗シ, 第二ノ方程式ニ a ヲ乗シテ相減ズレバ

$$abx-b^2y-abx+a^2y=a^2b+b^3-2a^2b.$$

同類項ヲ約スレバ $(a^2-b^2)y=(b^2-a^2)b=-(a^2-b^2)b.$

故ニ $y=-b.$

之ヲ第一ノ方程式中ニ入ルレバ

$$ax+b^2=a^2+b^2.$$

或ハ $ax=a^2.$

故 $=$ $x=a,$
即チ所要ノ根ハ $x=a, y=-b.$

演 習 問 題 23.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2},$

$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 4.$

2. $\frac{8}{x} + \frac{3}{y} = 3,$

$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}.$

3. $(x-3)(y+4) = (x-1)(y+3), x(y+8) = y(x-10) + 22.$

4. $\frac{17}{16x} - \frac{1}{2y} = \frac{13}{16},$

$\frac{5}{2x} + \frac{1}{y} = 3.$

5. $3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2,$

$5\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{2y}\right) = 12\frac{1}{2}.$

6. $\frac{4}{x} + \frac{5}{3y} = \frac{1}{3},$

$3\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = \frac{11}{10},$

7. $\frac{6}{x} - \frac{3}{y} = 1,$

$\frac{24}{x} + \frac{14}{y} = -\frac{1}{3}.$

8. $x(5-y) = y(3-x) + 8, 3x(x+2y) = 3x^2 - 2y(1-3x) - 2.$

9. $(a+b)x - cy = bc, x+y = a+c.$

10. $cx + ay = 2ac, cx - ay = 0.$

11. $a(x-a) + b(y-b) = 0, b(x+y-b) + a(x-y-a) = 0.$

12. $(a+c)x - (a-c)y = 4ac, (a-c)x + (a+c)y = 2a^2 - 2c^2.$

三ツ或ハ三ツ以上ノ未知數ヲ含ム
聯立一次方程式.

80. 先ツ三ツノ未知數ヲ含ム聯立一次方程式ヲ考ヘン.

此場合ニハ三ツノ方程式ガ與ヘラレザレバ未知數ノ値ヲ定ムルヲ得ズ.

偕三ツノ未知數(例令バ x, y, z)ヲ含ム聯立方程式ヲ解クニハ先ツ第一及ビ第二ノ方程式ヨリ一ツノ未知數(例令バ z)ヲ逐出シ,次ニ第三ノ方程式ト第一或ハ第二ノ内何レカーツノ方程式トヨリ同ジ未知數(例令バ z)ヲ逐出シ,斯クシテ二ツノ未知數(例令バ x, y)ヲ含ム二ツノ方程式ヲ作ルベシ,而シテ後此二ツノ方程式ヲ前諸節ノ方法ニヨリテ解キテ二ツノ未知數ノ値ヲ求メ,最後ニ此二ツノ値ヲ與ヘラレタル三ツノ方程式中何レカーツ

ニ入レテ先キニ逐出シタル未知數ノ値ヲ見出スベシ.

例 1. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ.

$$x+3y+5z=6, \dots\dots\dots(1)$$

$$2x-y-4z=5, \dots\dots\dots(2)$$

$$7x-2y+6z=2. \dots\dots\dots(3)$$

(1) 及ビ (2) ヨリ z ヲ逐出セバ

$$14x+7y=49. \dots\dots\dots(4)$$

(2) 及ビ (3) ヨリ z ヲ逐出セバ

$$20x-7y=19. \dots\dots\dots(5)$$

(4) 及ビ (5) ヨリ $x=2, y=3$ ヲ得、之ヲ與ヘラレタル方程式(2)ニ入ルレバ

$$4-3-4z=5.$$

或ハ $-4z=4.$

故ニ $z=-1.$

即チ $x=2, y=3, z=-1$ ガ所要ノ根ナリ.

例 2. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1, \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 4, \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{1}{z} = 16. \dots\dots\dots(3)$$

此等ノ方程式ノ左邊ニ於テ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ヲ未知數ト見做スキニハ一次方程式ト全ク同様ニソ解クヲ得.

(1) 及ビ (2) ヨリ $\frac{1}{z}$ ヲ逐出シ, (2) 及ビ (3) ヨリ $\frac{1}{z}$ ヲ逐出

セバ

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3, \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{2}{x} + \frac{6}{y} = 12. \dots\dots\dots(5)$$

(4) 及ビ (5) ヲ解ケバ $\frac{1}{x} = -3$ 及ビ $\frac{1}{y} = 3$ ヲ得、之ヲ(1)ニ

入ルレバ $\frac{1}{z} = 1.$

ヲ得、即チ $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = 1$ ガ所要ノ根ナリ.

81. 四ツ或ハ四ツ以上ノ未知數ヲ含ム四ツ或ハ四ツ以上ノ聯立一次方程式ヲ解ク方法モ前節ニ於ケルト少シモ異ナルヲナシ. 即チ先ツ與ヘラレタル一組ノ方程式ヨリ或一ツノ未知數ヲ逐出シ、元ヨリモ一ツ丈ケ未知數ノ數ノ少ナキ聯立方程式ヲ作り、逐次斯クノ如クシテ遂ニ一元一次方程式ヲ求メテ未知數ノ値ヲ見出シ、所得ノ未知數ノ値ヲ用弁テ第二ノ未知數ノ値ヲ見出シ、順次斯ク

ノ如クシテ總テノ未知數ノ値ヲ見出ス
ナリ。

例. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ク。

$$u+x+y+z=-1, \dots\dots\dots(1)$$

$$2u+2x-3y+z=2, \dots\dots\dots(2)$$

$$u-3x-6y+4z=1, \dots\dots\dots(3)$$

$$3u+x-8y-z=0. \dots\dots\dots(4)$$

(1)ト(2),(2)ト(3),(1)ト(4)ヨリ z ヲ逐出セバ

$$u+x-4y=3, \dots\dots\dots(5)$$

$$7u+11x-6y=7, \dots\dots\dots(6)$$

$$4u+2x-7y=-1. \dots\dots\dots(7)$$

次ニ(5)ト(6),(6)ト(7)ヨリ y ヲ逐出セバ

$$11u+19x=5, \dots\dots\dots(8)$$

$$25u+65x=55. \dots\dots\dots(9)$$

(8)及ヒ(9)ヨリ $u=-3, x=2$ ヲ得,此値ヲ(5)ニ入ルレ

バ

$$-3+2-4y=3.$$

$$-4y=4.$$

故ニ

$$y=-1.$$

此 u, x, y ノ値ヲ(1)ニ入ルレバ

$$-3+2-1+z=-1.$$

故ニ

$$z=1.$$

即チ $u=-3, x=2, y=-1, z=1$ ヲ所要ノ根ナリ。

演 習 問 題 24.

次ノ方程式ヲ解ク。

1. $x+y+z=6,$

2. $2x-y-z=2,$

$$2x-y+3z=11,$$

$$5x+y-2z=3,$$

$$x+3y-2z=2.$$

$$x-4y+z=9.$$

3. $y-z=8,$

4. $2x-3z=11,$

$$z+x=6,$$

$$5z+x=12,$$

$$x-2y=5.$$

$$3x-4y=5.$$

5. $2x-y-z=3,$

6. $2x-y=13,$

$$x+2y-3z=4,$$

$$3y-z=68,$$

$$3x-5y+2z=1.$$

$$4z+2x=14.$$

7. $2x+y+z=13,$

8. $x-y+2z=44,$

$$x+2y+z=-9,$$

$$2x+3y-z=68,$$

$$x+y+2z=4.$$

$$3x-2y+z=35.$$

9. $x-y+z=2,$

10. $3x+3y+7z=25,$

$$5x+2y+6z=5,$$

$$9x+4y+5z=21,$$

$$x-3y+4z=10.$$

$$6x-3y+4z=28.$$

11. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1,$ 12. $ny + mz = mn,$

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} + 4z = -3,$ $lz + nx = nl,$

$\frac{5x}{9} + \frac{3y}{8} - \frac{z}{4} = \frac{8}{3},$ $mx + ly = lm.$

13. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{5}{z} = 1,$ 14. $\frac{8}{x} - \frac{4}{y} = 5,$

$\frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{17}{10},$ $\frac{2}{y} + \frac{9}{z} = 1,$

$\frac{1}{x} - \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = \frac{3}{2},$ $\frac{3}{z} + \frac{1}{x} = 1.$

15. $u + x + y + z = 1,$ 16. $u - x + y - z = 26,$

$2u - x + 2y - 4z = 5,$ $2u + \frac{x}{2} + y + \frac{z}{4} = 12,$

$u + 6x - y + 9z = 4,$ $3u - \frac{x}{6} - 2y + \frac{z}{8} = 1,$

$3u + 2x + 4y + 3z = -1.$ $2u + x + 3y + 2z = 9.$

17. $y - z = a,$ 18. $\frac{a}{2x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 3,$

$x - z = b,$ $\frac{a}{2x} + \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 1,$

$x + y = c.$ $\frac{a}{x} - \frac{b}{y} - \frac{c}{z} = 0.$

19. $x + y + z = a,$

$y + z + u = b,$

$z + u + x = c,$

$u + x + y = d.$

聯立一次方程式應用問題.

82. 是ヨリ數多ノ未知數ヲ含ム聯立

一次方程式ニテ解キ得ベキ應用問題ヲ揭ゲントス.

例 1. 甲乙ノ兩人合セテ金 12 圓ヲ有シ、此金ヲ以テ甲ハ一斤 50 錢ノ茶ヲ買ヒ、乙ハ一斤 30 錢ノ茶ヲ買ヒシニ總テ三十斤ノ茶ヲ得タリトイフ、甲乙各ノ所持金如何.

x 錢ヲ以テ甲ノ所持金トシ、y 錢ヲ以テ乙ノ所持金トセン、然ルルハ題意ニ因リ

$x + y = 1200 \dots \dots \dots (1)$

又甲ノ買ヒタル茶ノ斤數ハ $\frac{x}{50}$ ニシテ、乙ノ買ヒタル斤數ハ $\frac{y}{30}$ ナリ、故ニ題意ニヨリ

$\frac{x}{50} + \frac{y}{30} = 30 \dots \dots \dots (2)$

此(1)及ヒ(2)ノ聯立方程式ヲ解クベ所要ノ答ヲ得ベシ.

(2)ニ 150 ヲ乘ズレバ $3x + 5y = 4500 \dots \dots \dots (3)$

(1)ト(3)トヨリ y ヲ逐出セバ $2x = 1500.$

故ニ $x = 750.$

此値ヲ(1)ニ入ルレバ $750 + y = 1200.$

故ニ $y=450.$

即チ甲ノ所持金ハ七圓五十錢ニシテ乙ノ所持金ハ四圓五十錢ナリ.

例 2. ニツノ有効數字ヨリ成ル二桁ノ數アリ,此數ハ其十位ノ數ト一位ノ數トノ和ノ四倍ニ等シ,若シ十位ノ數ト一位ノ數トヲ交換スレバ此和ノ六倍ニ9ヲ加ヘタルモノニ等シクナルト云フ,此數ヲ求ム.

x ヲ以テ十位ノ數ヲ表ハシ, y ヲ以テ一位ノ數ヲ表ハセバ所要ノ數ハ $10x+y$ ナリ,故ニ題意ニヨリ

$$10x+y=4(x+y) \dots\dots\dots(1)$$

次ニ十位ノ數ト一位ノ數トヲ交換スレバ $10y+x$ トナル故ニ題意ニヨリ

$$10y+x=6(x+y)+9 \dots\dots\dots(2)$$

(1)及ヒ(2)ヲ書キ直セバ $6x-3y=0, \dots\dots(3)$

$$4y-5x=9 \dots\dots(4)$$

(3)ヨリ $x=\frac{2}{3}y \dots\dots\dots(5)$

此値ヲ(4)ニ入ルレバ $4y-\frac{5}{3}y=9.$

$$\frac{7}{3}y=9.$$

故ニ $y=6.$

此値ヲ(5)ニ入ルレバ $x=3.$

ヲ得,即チ所要ノ數ハ $10 \times 3 + 6 = 36$ ナリ.

例 3. 一商人若干圓ヲ以テ酒若干升ヲ買ヘリ,若シ酒ノ價一升ニ付キ五錢丈ケ高價ナルキニハ二斗四升丈ケ少ナク,又一升ニ付キ七錢丈ケ高價ナルキニハ三斗二升丈ケ少ナク受取ルベキナリトイフ,問フ一升ノ價及ビ買ヒタル酒ノ量ハ如何.

x 錢ヲ以テ一升ノ價トシ, y 升ヲ以テ買ヒタル酒ノ量トセン,然ルレハ題意ニヨリ

$$(x+5)(y-24)=xy, \dots\dots\dots(1)$$

$$(x+7)(y-32)=xy \dots\dots\dots(2)$$

此一組ノ方程式ヲ得. 括弧ヲ外ツシ同類項ヲ約セバ

$$5y-24x=120, \dots\dots\dots(3)$$

$$7y-32x=224 \dots\dots\dots(4)$$

y ヲ逐出セバ $8x=280.$

故ニ $x=35.$

此値ヲ(3)ニ入ルレバ $5y - 24 \times 35 = 120$.

或ハ $5y = 120 + 24 \times 35 = 960$.

故ニ $y = 192$.

即チ一升ノ價ハ35錢ニシテ買ヒタル高ハ192升ナリ.

例 4. 甲乙丙ノ三工夫アリ,或仕事ニ從事セルニ甲乙共ニ働クキニハ48日ニテ此仕事ヲ成就シ,甲丙共ニ働クキニハ30日ニテ成就シ,乙丙共ニ働クトキニハ $26\frac{2}{3}$ 日ニテ成就ストイフ,今三人單獨ニ働クキニハ各幾日ニシテ成就スルヤ.

今甲乙丙ガ單獨ニ此仕事ヲ成就スル日數ヲ夫々 x, y, z ヲ以テ表ハシ又1ヲ以テ此仕事ノ全躰ヲ表ハセバ甲乙丙ガ一日ニ成ス仕事ハ夫々 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ナルベシ,故ニ題意ニヨリ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{48}, \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{30}, \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{26\frac{2}{3}} = \frac{3}{80}, \dots\dots\dots(3)$$

(1),(2)ノ和ヨリ(3)ヲ減ズレバ

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{48} + \frac{1}{30} - \frac{3}{80} = \frac{1}{60}$$

故ニ $x = 120$.

(1)ニ此値ヲ入ルレバ $\frac{1}{120} + \frac{1}{y} = \frac{1}{48}$.

即チ $\frac{1}{y} = \frac{1}{48} - \frac{1}{120} = \frac{1}{80}$.

故ニ $y = 80$.

又 x ノ値ヲ(2)ニ入ルレバ $\frac{1}{120} + \frac{1}{z} = \frac{1}{30}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{30} - \frac{1}{120} = \frac{1}{40}$$

故ニ $z = 40$.

即チ甲ハ120日乙ハ80日丙ハ40日ニテ此仕事ヲ成就ス.

注意. 聯立一次方程式ニテ解クヲ得ル問題ハ又一元一次方程式ニテモ解クヲ得ル場合アリ,又一元一次方程式ニテ解クヲ得ル問題ニシテ聯立一次方程式ニテモ解クヲ得ルモノアリ,其何レヲ用ウルガ都合好キヤハ問題ニ因テ定マルベシ,去レモ大抵聯立方程式ヲ用ウル方演算ハ少シク冗長ナレモ其筋

道ヲ明了ナラシムル便益アリ、學者宜シク兩法ヲ試ミテ其間ノ消息ヲ會得スベシ。

演 習 問 題 25.

1. 甲乙ノ二數アリ、甲ノ三倍ハ乙ノ四倍ヨリモ4丈ケ多ク、其和ハ其差ノ五倍ナリトイフ、二數トハ如何。

2. 甲乙ノ兩人若干圓ヲ有ス、甲ハ乙ヨリ10圓ヲ受取ルキニハ其所有額ハ乙ノ所有額ニ二倍シ、乙ハ甲ヨリ45圓ヲ受取ルキニハ其所有額ハ甲ノ所有額ニ八倍ストイフ、各ノ所有額如何。

3. 二ツノ有効數字ヨリ成ル二桁ノ數アリ、之ニ9ヲ加フレバ其數字ノ順序轉倒シ、又十位ノ數ノ二倍ハ一位ノ數ヨリモ2丈ケ多シトイフ、此數ヲ求ム。

4. 或人若干圓ヲ以テ豚肉30斤ト牛肉50斤トヲ買ヒ、豚肉ハ原價ノ5割牛肉ハ原價ノ二割五分ノ利ヲ得テ賣リシニ4圓ノ利ヲ得タリ、今若シ兩肉共ニ三割ノ利ヲ以テ賣ルキニハ利金ハ前ヨリモ少ナキ710錢ナリトイフ、問フ兩肉各一斤ノ原價如何。

5. 或人金225圓ヲ以テ一匹ノ代價12 $\frac{1}{2}$ 圓ノ牝牛ト21圓ノ羊トヲ買ヒ、牝牛ハ二割羊ハ一割ノ利ヲ得テ賣リシニ257 $\frac{1}{2}$ 圓ヲ得タリトイフ、然ラバ牝牛ト羊各幾頭ヲ買ヒシカ。

6. 一ノ釣竿アリ、其長サ5ト7トノ割合ヲ有スル二ツノ部分ヨリ成ル、今長キ方ノ三倍ニ短カキ方ノ九倍ヲ加ヘタルモノハ竿ノ長サノ五倍ヨリモ長キト一間ナリトイフ、竿ノ長サ及ビ其二部ノ長サ各如何。

7. 二ツノ有効數字ヨリ成ル二數アリ、其一ハ他ノ數字ノ位置ヲ轉倒シタルモノニシテ、此二數ノ和ハ55、差ハ9ナリトイフ、各數ヲ問フ。

8. 或人三十個ノ銀貨ヲ有ス、其價ハ合計6圓ニシテ其種類ハ五拾錢、貳拾錢及ビ拾錢ナリ、今五拾錢銀貨ヲ五錢白銅貨ニ、拾錢銀貨ヲ壹錢銅貨ニ兩替スルキニハ其總數ハ210個トナルトイフ、各貨ノ數幾千ナルカ。

6. 或人二圓五十錢ノ金子ヲ一群ノ乞食ニ分配セントスルニ、大人ニハ一人前四錢、小兒ニハ一人前三錢ヲ與フルキニハ三十錢ヲ餘シ、若シ分配額ヲ五厘ゾ、増スルキニハ二錢五厘不足ストイフ、乞食ノ人

數大人小兒各幾何ナルカ:

10. 2200 貫ノ貨物ヲ馬車ト牛車トニ積載セントスルニ、馬車四輛ト牛車八輛、若クハ馬車八輛ト牛車五輛ヲ要ストイフ、然ラバ馬車ト牛車トノ積載量如何.

11. ニツノ有効數字ヨリナル某數アリ、其一位ノ數ハ十位ノ數ノ三倍ヨリモ1少ナク、又此數ハ其一位及ヒ十位ノ數ノ和ノ四倍ヨリモ6少シトイフ、某數トハ如何.

12. 上下二種ノ小麥粉若干斤アリ、今下粉ニ上粉ノ半分ヲ混合シテ毎斤ノ代價ヲ上下二種ノ粉ノ平均價額ヲ以テ賣リシニ丁度二種ノ粉ノ全原價ヲ得タリ、今若シ此兩種ヲ全ク混シテ同價ヲ以テ賣リ原價ヲ得ントスレバ5斤餘ルベシトイフ、兩種ノ粉各何斤ナルカ、但シ其原價ハ毎斤1ト $\frac{3}{5}$ トノ割合ヲナセリトイフ.

13. ニツノ有効數字ヨリ成ル二位ノ數アリ、其數ハ其數字ノ和ノ四倍ニ等シキニハニツノ數字ノ間ニ如何ナル關係アリヤ.

14. 甲乙ノ二工或仕事ニ從事セシニ、甲ハ五日間之ニ從事シタル後ニ乙其後ヲ引受ケテ十二日間ニ

テ成就セリ、若シ乙ガ八日間働キタル後甲ガ之ヲ引受クルナラバ十日間ニテ之ヲ成就スベシトイフ、今甲乙單獨ニ働キタラバ各幾日間ニテ此仕事ヲ成就スベキヤ.

15. 或ル農夫其取得セシ大豆八斗小豆三斗ヲ金15.70圓ニ賣レリ、其後大豆ハ前ト同價ニテ五斗小豆ハ前價ヨリモ二割安ニテ七斗ヲ賣リ金15.40圓ヲ得タリトイフ、然ラバ大小豆各一升ノ代價如何.

16. 或紡績會社ニテ男工二百人女工三百五十人ヲ使用シ日々ノ賃金106圓ヲ拂ヘリ、然ルニ物價騰貴ノ爲メ男工ノ賃錢ハ二割、女工ノ賃錢ハ二割五分増加セシニ日々仕拂フベキ賃金ニ24圓ノ増加ヲ來セリトイフ、然ラバ原ト男女兩工ノ毎日ノ平均賃錢幾何ナリシヤ.

17. 三個ノ矩形ノ地面アリ、其面積ハ1, 2, 3ノ割合ヲナシ、第二ノ長サハ第一ノ長サノ二倍ヨリモ8間長ク其巾ハ第一ヨリモ2間狭シ、第三ノ長サハ第一ノ長サノ三倍ヨリモ12間短ク其巾ハ4間廣シトイフ、各面積ヲ問フ.

18. 或書ノ第一版ハ紙數1200頁ヲ上中下ノ三冊ニ分テリ、然ルニ第二版ニ於テ上卷ノ紙數ヲ九分ノ

一丈ケ減ツ、中卷ニ40頁ヲ増シ、下卷ニ10頁ヲ増セシニ、三卷共ニ紙數相等シクナレリトイフ、然ラバ第一版ニ於テ上中下各幾頁ヨリ成リシカ。

19. 三ツノ有効數字ヨリ成ル三位ノ數アリ、其數字ノ和ハ11ニシテ一位ノ數ハ十位ノ數ノ二倍ナリ、又其數字ノ位置ヲ轉倒シテ得ル處ノ數ハ原數ノ二倍ヨリモ160多シトイフ、原數如何。

20. 45個ノ林檎ヲ甲乙丙ノ三童ニ分配セシニ、乙ノ所得ノ二倍ハ甲丙ノ所得ノ和ニ等シク、丙ノ所得ノ三倍ハ甲乙ノ所得ノ和ヨリモ三個多シトイフ、各ノ所得如何。

21. 或人二種ノ株券若干枚ヲ有ス、但シ一枚ノ額面ハ何レモ百圓ニシテ一種ハ三分五厘利附、一種ハ四分利附ナリ、而シテ此二種ノ株券ヨリ一年間ニ120圓ノ利ヲ收ムトイフ、今三分五厘利附ノ方ヲ一株毎ニ108圓ニ四分利付ノ方ヲ一株毎ニ120圓ニ賣ルルニハ3672圓ヲ得ベシトイフ、然ラバ各種株券ノ數如何。

22. 或人二萬五千圓ヲ有ス、今其一部ヲ以テ五分利附公債證書額面百圓ニ付キ九十圓ノ相場ニテ若干枚ヲ買ヒ、殘金ヲ年四分五厘ノ利ニテ預ケタリ、由テ此人千三百十五圓ノ歲入ヲ得ルトイフ、公債證書

額面ノ總高如何。

23. 甲乙丙ナル三個ノ水管ヲ以テ水槽ヲ充タスニ甲ト乙トニテハ二十分間ヲ要シ、乙ト丙トニテハ十五分間、甲ト丙トニテハ十八分間ヲ要ストイフ、今三個同時ニ水ヲ送ルルニハ要スル處ノ時間幾干ナルカ。

24. 甲乙丙ノ三人ニテ一樽ノ麥酒ヲ十五日間ニテ飲盡セリ、今甲乙兩人ニテハ丙ノ飲量ノ三分ノ四ヲ飲ミ、丙ノ飲量ハ乙ノ飲量ノ二倍ナリトイフ、今甲乙丙各單獨ニテハ幾日間ニテ此一樽ノ麥酒ヲ飲ミ盡スベキカ。

25. 急行列車ガ144哩ヲ走スルニ要スル時間ト普通列車ガ同距離ヲ走スルニ要スル時間トハ2ト3トノ割合ヲナセリ、今兩車同時ニ此距離ノ兩端ヨリ出發シテ二時三十分ノ後相會セリ、但シ此間ニ急行車ハ少シモ停車セズ、普通車ハ十五分間停車セリトイフ、兩車ノ速度如何。

27. 或學校ノ入學試験ニ於テ受験生ノ三分ノ一ハ落第セリ、而シテ及第點ノ最下限ハ總テノ受験生ノ平均點數ヨリモ多キ Γ 2、又及第生ノ平均點數ヨリモ少ナキ Γ 11ニシテ、落第生ノ平均點數ノ二倍ヨ

リモ少ナキコトナリトイフ、及第點ノ最下限ヲ問フ。

27. 甲ノ現今ノ年齢ハ甲ノ年齢ガ乙ノ現今ノ年齢ニ等シカリシキ乙ノ取リタル年齢ノ二倍ニ等シク、而シテ乙ガ甲ノ現今ノ年齢トナルキハ甲乙二人ノ年齢ノ和ハ百二十六トナル可シトイフ、甲及ヒ乙ノ現今ノ年齢ヲ求ム。

28. 甲乙ノ兩人競走スルニ當リ、第一回目ニハ甲ハ乙ヨリ十間後ヨリ走り出シ三十秒ニシテ乙ニ追ヒ付キ、第二回目ニハ甲ハ乙ヨリモ三十二秒後ニ走り出シ六分ノ後ニハ乙ヲ追ヒ越スヲ廿四間ナリトイフ、甲及ヒ乙ノ走ル速度ヲ求ム。

29. 三桁ノ數アリテ其一位ノ數ハ0ナリ、今其十位ノ數ト百位ノ數トヲ置キ換フレバ此數ハ180丈ケ減少ス可ク、又若シ百位ノ數ヲ二等分シ十位ノ數ト一位ノ0トヲ置キ換フレバ454丈ケ減ゼラルベシトイフ、此數ヲ求ム。

第六章 因 數.

83. abc ノ如キ一數アルキニ a, b, c ナ夫々此數ノ因數ト稱スルヲハ已知ル所ナリ、諸一般ニ一ノ整式ガ二ツ或ハ二ツ以上ノ整式ノ連乘積ニ等シキキニハ此等ノ各整式ヲ此整式ノ因數ト稱ス。

例令バ $ax^2 - 2ax - 3a = a(x+1)(x-3)$ ナル故ニ $a, (x+1), (x-3)$ ナ夫々此整式 $ax^2 - 2ax - 3a$ ノ因數ト稱ス。

一ノ整式ガ數多ノ因數ノ積ナルキニハ此等ノ因數ヲ見出スヲ得ベシ、今次ニ其簡單ナル場合ヲ論ゼン。

84. 單項因數. 一ノ整式ノ各項ニ共通ノ文字ヲ含ムキニハ、此式ハ此文字ニテ割リ切ラル、明カナリ、因テ此式ノ因數ノ一ハ此文字ナリ。

例令バ $ax^2 - dx + cx = x(ax - d + c)$ 於テ各項ニ x ヲ含ム、即チ

$$ax^2 - dx + cx = x(ax - d + c).$$

又 $abx^2 + aby^2 - abz^2 = ab(x^2 + y^2 - z^2)$.

85. 既 = 乗法 = ヨリテ次ノ諸公式ヲ得タリ.

$$(1). \quad x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2.$$

$$(2). \quad x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2.$$

$$(3). \quad x^2 - a^2 = (x+a)(x-a).$$

$$(4). \quad x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b).$$

$$(5). \quad acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d).$$

$$(6). \quad x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2).$$

$$(7). \quad x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2).$$

此等ノ公式ヲ應用スレバ或整式ノ因數ヲ容易ニ發見スルヲ得ル場合往々之レアリ, 次ニ節ヲ逐フテ之ヲ示スベシ.

86. 例 1. $x^2 + 4x + 4$ ノ因數ヲ求ム.

此式ハ次ノ如ク書キ直スヲ得.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2.$$

之ヲ公式(1)ニ比格スレバ

$$= (x+2)^2.$$

例 2. $x^2 + 2abx + a^2b^2 = x^2 + 2(ab)x + (ab)^2.$

公式(1)ニ依リ $= (x+ab)^2.$

例 3. $a^2x^2 + 2acx + c^2 = (ax)^2 + 2 \cdot c \cdot ax + c^2.$

公式(1)ニ依リ $= (ax+c)^2.$

例 4. $a^2 - 4ax + 4x^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2x + (2x)^2.$

公式(2)ニ依リ $= (a-2x)^2.$

注意. 一般 $= (x-a)^2 = (a-x)^2$ ナル故ニ此處ニ與ヘラレタル式ハ又 $(2x-a)^2 =$ 等シ.

又一般 $= x^2 - a^2$ ノ形ニ置クヲ得ベキ整式ハ公式(3)ニ依リ $(x+a)(x-a)$ ノ形ニ記スルコトヲ得, 即チ $(x+a)$ 及ビ $(x-a)$ ノ二ツノ因數ニ分タルルナリ.

例 1. $a^2x^2 - b^2 = (ax+b)(ax-b).$

例 2. $a^2 - 9c^2 = (a+3c)(a-3c).$

例 3. $(x+a)^2 - (x-c)^2 = \{(x+a) + (x-c)\} \{(x+a) - (x-c)\}$
 $= (2x+a-c)(a+c).$

例 4. $4ax^4 - 25ay^4 = a(4x^4 - 25y^4)$
 $= a(2x^2 + 5y^2)(2x^2 - 5y^2).$

演習問題 26.

次ノ諸式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. $4x^2 + 4x + 1.$

2. $36a^2 - 12a + 1.$

3. $a^2x^2 - 6ax + 9$. 4. $1 + 14y + 49y^2$.
 5. $9a^2 - 4b^2$. 6. $25x^2 - 10ax + a^2$.
 7. $9x^2 - 12x + 4$. 8. $49 + 28y + 4y^2$.
 9. $4a^2b^2 - 20abc + 25c^2$. 10. $a^2x^2 - 18abxy + 81b^2y^2$.
 11. $4x^4 + 24x^2 + 36$. 12. $4x^2 - (x - 2y)^2$.
 O 13. $x^4 + a^2x^2 + \frac{a^4}{4}$. 14. $4(x + y)^2 - (x - y)^2$.
 15. $125y^2 - 100ay + 20a^2$. 16. $9x^2 - (2x - a)^2$.
 17. $25a^4x^4 + 20a^2x^2y^2 + 4y^4$. 18. $36a^2x^2 - 4b^2y^2$.
 O 19. $x^2 - xy + \frac{y^2}{4}$. 20. $3x^3 - 42ax^2 + 147a^3x$.
 21. $x^5 - 4y^4$. O 22. $(1 + y)^4 - y^2$.
 23. $7x^4 - 41x^2 + 4$. 24. $(x - y)^2 + 2z(x - y) + z^2$.
 25. $(a - b)^2 - 2(a - b)(b - c) + (b - c)^2$.
 O 26. $(a + b - c)^2 - 4c^2$. 27. $(4a - b)^2 - 9b^2$.
 28. $9x^2 - (x - 2y)^2$. 29. $a^2x^2 - (2ax - by)^2$.
 30. $(ax + by)^2 - 4(by - 2cz)^2$. O 31. $(4x - y)^2 - 6y(4x - y) + 9y^2$.
 32. $(2x - y - 2z)^2 - (x + y - 3z)^2$.
 33. $(ax - cz)^2 - (ax + by - 3cz)^2$.
 O 34. $(x^2 - 2x + 1)^2 + 2x(x^2 - 2x + 1) + x^2$.
 35. $(3x^4 - 4x^2 - 1)^2 - (2x^2 + 3)^2$.
 36. $(4a - b + 2c)^2 - (3a + 2b - 3c)^2$.

- O 37. $49x^2y^2 - 14xy(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2$.
 38. $(x + b)^4 - (b - z)^4$.

87. 又 85 節ノ公式(4)ヲ用井テ直チニ
 因數ニ分解シ得ル場合アリ. 即チ一般
 ノ形ハ次ノ如キモノナリ.

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b).$$

此場合ニハ $x^2 + px + q$ ナル三項式ニ於テ
 q ナ二ツノ因數ニ分テバ一般ニ數多ノ
 因數ノ組ヲ得ベシ, 此組ノ中ニ就キテ各
 因數ノ和ガ p ニ等シキ様ナル組ヲ取り,
 此中ノ一因數ヲ a トシ他ヲ b トスベシ.

例 1. $x^2 + 5x + 6$ ナ因數ニ分解セヨ.

諸 6 ハ 1 ト 6 トノ積トモ, 2 ト 3 トノ積トモ, 亦 -2 ト
 -3 トノ積トモ, 或ハ亦 -1 ト -6 トノ積トモ見做ス
 ナ得ベシ, 然ルニ此四組ノ中ニ付キテ各因數ノ和ノ
 +5 トナルモノハ 2 ト 3 トヨリ成ル組ニ外ナラズ, 故
 ニ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).$$

ナリ. 今上ノ事柄ヲ式ニラ書キ表ハセバ次ノ如シ.

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 2 \times 3$$

$$=(x+2)(x+3).$$

例 2. $x^2-11x-12$ を因数 = 分解セヨ.

-12 は $-3, 4; 3, -4; -2, 6; 2, -6; -1, 12; 1, -12$.

等ノ數組ノ因数 = 分タル、就中其因数ノ和ノ -11 トナル者ハ最後ニ與ヘラレタル組即チ $1, -12$ トイフ組ナリ、故ニ

$$x^2-11x-12=(x+1)(x-12).$$

又上ノ專柄ヲ式ニテ書示セバ

$$\begin{aligned} x^2-11x-12 &= x^2+(1-12)x+1 \times (-12) \\ &= (x+1)(x-12). \end{aligned}$$

時ニハ公式(5)ヲ用井テ因数 = 分解シ得ル場合アリ、今其公式ヲ再記スレバ

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d).$$

此場合ニハ視察ニ因リテ a, b, c, d ナル四數ヲ發見セザルベカラズ、從テ前ノ諸例ニ於ケルヨリモ幾分カ困難ナリ。

又格段ナル場合トシテ a 或ハ c ノ内何レカ一ツガ 1 ニ等シキヲアリ、此時ニハ困難ノ度モ減ゼラル、ナリ。

今例ヲ以テ其解法ヲ示サン。

例 3. $6x^2+23x+21$ を因数 = 分解セヨ。

此式ニ於テ 6 ハ 2×3 ニ等シク、 21 ハ 3×7 ニ等シ、而シテ $2 \times 7 + 3 \times 3 = 14 + 9 = 23$ ナリ、故ニ $a=2, c=3, b=3, d=7$ ト置キテ

$$6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7).$$

例 4. $7x^2+11x-6$ を因数 = 分解セヨ。

此式ニ於テ 7 ハ 1 ト 7 トノ積ニ等シク、 -6 ハ 2 ト -3 トノ積ニ等シク、且ツ $7 \times 2 + (-3) \times 1 = 11$ ナル故ニ

$$7x^2+11x-6=(7x-3)(x+2).$$

ト成ル、此場合ハ a, c ノ中ノ一ツガ 1 ニ等シキ時ナリ。

例 5. $10x^2-x-3$ を因数 = 分解セヨ。

此式ニ於テ $10 = 2 \times 5$ 、 $-3 = 1 \times (-3)$ ニシテ、且ツ $5 \times 1 + (-3) \times 2 = -1$ ナル故ニ

$$10x^2-x-3=(5x-3)(2x+1).$$

時ニハ公式(6)或ハ(7)ヲ用ウル場合アリ。今其公式ヲ再記スレバ

$$x^2+a^2=(x+a)(x^2-ax+a^2).$$

$$x^2-a^2=(x-a)(x^2+ax+a^2).$$

此公式ノ應用サル、場合ニハ與ヘラ

レタル式ガ二ツノ數ノ立方ノ和或ハ差ノ形ニ書直サル、時ニ限ルナリ。

今例ヲ以テ之ヲ示サン。

例 6. x^3+8c^3 ヲ因數ニ分解セヨ。

此式ノ中ニ於テ $8c^3=(2c)^3$ ナルヲ以テ

$$\begin{aligned}(x^3+8c^3) &= (x+2c)\{x^2-2cx+(2c)^2\} \\ &= (x+2c)(x^2-2cx+4c^2).\end{aligned}$$

例 7. $a^3y^3-27b^3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

$$\begin{aligned}a^3y^3-27b^3 &= (ay)^3-(3b)^3 \\ &= (ay-3b)(a^2y^2+ay\cdot 3b+3^2b^2) \\ &= (ay-3b)(a^2y^2+3aby+9b^2).\end{aligned}$$

例 8. $125-64a^6$ ヲ因數ニ分解セヨ。

$$\begin{aligned}125-64a^6 &= 5^3-4^3(a^2)^3 \\ &= 5^3-(4a^2)^3 \\ &= (5-4a^2)(5^2+5\times 4a^2+4^2a^4) \\ &= (5-4a^2)(25+20a^2+16a^4).\end{aligned}$$

例 9. $\frac{1}{27}+8x^3$ ヲ因數ニ分解セヨ。

$$\begin{aligned}\frac{1}{27}+8x^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3+(2x)^3 \\ &= \left(\frac{1}{3}+2x\right)\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\times 2x+(2x)^2\right\} \\ &= \left(\frac{1}{3}+2x\right)\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{3}x+4x^2\right).\end{aligned}$$

演 習 問 題 27.

次ノ諸式ヲ因數ニ分解セヨ。

- | | |
|--------------------------------|------------------------------|
| 1. $x^2-5x+6.$ | 2. $x^2-x-20.$ |
| 3. $a^2+2a-24.$ | 4. $x^2-7ax+12a^2.$ |
| 5. $x^2+12bx-13b^2.$ | 6. $a^2x^2+3ax-28.$ |
| 7. $3x^2-5x-2.$ | 8. $25x^2-35x-8.$ |
| 9. $15x^2-11x+2.$ | 10. $a^3x^3-1.$ |
| 11. $27a^3+64b^3.$ | 12. $4y^4-2y^2-56.$ |
| 13. $(x-y)^2-3(x-y)z+2z^2.$ | 14. $(2a-b)^3-(a-2b)^3.$ |
| 15. $(4ax-by)^3+(ax-4by)^3.$ | 16. $7y^2-3y-22.$ |
| 17. $a^6-x^3y^3.$ | 18. $5a^2-3ax-8x^2.$ |
| 19. $125x^6-y^3z^3.$ | 20. $6a^2x^2-10ax+4.$ |
| 21. $21y^4+11y^2-2.$ | 22. $a^4x^2-7a^2x-60.$ |
| 23. $6x^2y^2-xy-35.$ | 24. $14a^2x^2+26ax+12.$ |
| 25. $2l^4+l^2-3.$ | 26. $77y-15y^2-10.$ |
| 27. $35a^2x^2-38abxy+8b^2y^2.$ | 28. $2(x-a)^2-a(x-a)-21a^2.$ |
| 29. $(x-3a)^3-8(3x-a)^3.$ | 30. $15a^4-19a^2b+6b^2.$ |
| 31. $27a^2x^4-30ax^2-8.$ | 32. $56x^4+16x^2y^2-6y^4.$ |

88. 既ニ乘法ニ於テ次ノ結果ヲ見出

シタリ.

$$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4.$$

此結果ヲ應用スレバ又容易ニ或代數式ヲ因數ニ分解スルヲ得.

例 1. a^4+a^2+1 ヲ因數ニ分解セヨ.

$$a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

例 2. $16+4b^2+b^4$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned} 16+4b^2+b^4 &= 2^4+2^2b^2+b^4 \\ &= (2^2+2b+b^2)(2^2-2b+b^2) \\ &= (4+2b+b^2)(4-2b+b^2). \end{aligned}$$

尙ホ二三ノ例ヲ次ニ擧ゲン.

例 1. $4ab^2+4a^3-8a^2b$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned} 4ab^2+4a^3-8a^2b &= 4a(b^2+a^2-2ab) \\ &= 4a(b^2-2ab+a^2) \\ &= 4a(b-a)^2. \end{aligned}$$

例 2. a^4-16b^4 ヲ因數ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned} a^4-16b^4 &= a^4-(2b)^4 \\ &= (a^2+4b^2)(a^2-4b^2) \\ &= (a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b). \end{aligned}$$

例 3. $4a^3-8a^2b+5ab^2-b^3$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned} 4a^3-8a^2b+5ab^2-b^3 &= 4a^3-4a^2b-4a^2b+4ab^2 \\ &\quad +ab^2-b^3 \\ &= 4a^2(a-b)-4ab(a-b)+b^2(a-b) \\ &= (a-b)(4a^2-4ab+b^2) \\ &= (a-b)(2a-b)^2. \end{aligned}$$

例 4. $a^4+b^4-11a^2b^2$ ヲ因數ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned} a^4+b^4-11a^2b^2 &= a^4-2a^2b^2+b^4-9a^2b^2 \\ &= (a^2-b^2)^2-9a^2b^2 \\ &= \{(a^2-b^2)-3ab\}\{(a^2-b^2)+3ab\} \\ &= (a^2-3ab-b^2)(a^2+3ab-b^2). \end{aligned}$$

例 a^6-b^6 ヲ因數ニ分解セヨ.

$$\begin{aligned} a^6-b^6 &= (a^3+b^3)(a^3-b^3) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2) \\ &= (a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

演習問題 28.

次ノ諸式ヲ因數ニ分解セヨ.

1. $a^2x^4+a^4x^2+a^6.$

2. $p^3x^2-27x^5.$

3. $81a^4-16b^4.$

4. $16+4a^2b^2+a^4b^4.$

5. $p^4+q^4-18p^2q^2.$

6. $4m^4+n^4-85m^2n^2.$

7. $x^4-23x^2y^2+25y^4.$

8. $x^3+(x+y)ax+a^2y.$

9. $ax^2 + by^2 + (a+b)xy$. 10. $6bx(a^2+1) - a(4x^2+9b^2)$.
11. $x^4 + 81b^2x^2 + 6561b^4$. 12. $x^4 - 13x^2y^2 + 36y^4$.
13. $x^3 - 3x^2 - x + 3$. 14. $xz + yw - xw - yz$.
15. $16x^4 + y^4 - 28x^2y^2$. 16. $a^4 + a^2b^2 - b^2c^2 - c^4$.
17. $1 + bx^2 - (a^2 + ab)x^4$. 18. $81x^4 - 625y^4$.
19. $a^4x^4 + 16a^2x^2y^2 + 256y^4$.
20. $x^2(a-b)^2 - 2xy(a^2-b^2) - 3y^2(a+b)^2$.
21. $x^5 - 256z^5$. 22. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 2(ac - bd)$.
23. $25x^2y^2 - 2y^2z^2 - y^4 - z^4$. 24. $b^3 + ab^2 + a + b$.
25. $xz^2 + yw^2 - xw^2 - yz^2$. 26. $(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)^2 - 16x^4y^4$.
27. $a^3 + a^2 - 64a - 64$. 28. $x^7 + x^4 - 16x^3 - 16$.
29. $a^9 + a^3x^6 - 8a^5x^3 - 8x^9$.
30. 次ノ式ハ $x+y+z$ ノ因數ヲ有スルヲ證セヨ。
 $(3x+4y-2z)^2 - (2x+3y-3z)^2$.
31. $(x^2-5x+6)(x-1)$ ハ (x^2-3x+2) ニテ割リ切ル、ヲ證セヨ。
32. $(x^3-x^2-4)^3 - (x^3-2x^2-3)^3$ ハ $x-1$ トイフ因數ヲ有スルヲ證セヨ。
33. $(x^2+2x-15)^2 - (x^2-4x+3)^2$ ハ $(x-3)(x+2)$ ニテ割リ切ル、ヲ證セヨ。
 次ノ等式ヲ證セヨ。

34. $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$
 $= (x+y+z)(x-y-z)(x+y-z)(x-y+z)$.
35. $abc(a^3+b^3+c^3 - b^3c^3 - c^3a^3 - a^3b^3) = (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)$.
36. $8a^3(x+1) - 2a^2(2a-b)(x-y) + b^3(y+1)$
 $= (4a^2 - 2ab + b^2)\{2a(x+1) + b(y+1)\}$.
37. $b(x^3+a^3) + ax(x^2-a^2) + a^3(x+a) = (a+b)(x+a)(x^2-ax+a^2)$.

第七章 最大公約數及ビ最小公倍數.

最大公約數.

90. ニツ或ハニツ以上ノ整式ヲ割リ盡シ得ベキ整式ヲ其等ノ整式ノ公約數ト稱ス.

例 令バ ax ハ $2ax^2, 5a^2xy, ax^2 - a^2x$ ノ三個ノ整式ヲ割リ盡シ得ベキヲ以テ ax ハ此等ノ整式ノ公約數ナリ.

又 $abxy^2, bxyz, ab^2x^2y$ ニ於テ b, x, y, bx, by, xy, bxy 等何レモ皆公約數ナリ.

公約數ノ中ニテ其次數ノ最高ナルモノヲ最大公約數ト稱ス.

例 令バ前例ノ $abxy^2, bxyz, ab^2x^2y$ ノ公約數 b, x, y, bx, by, xy, bxy ノ中ニ於テ最高次ノモノハ bxy ナリ, 故ニ bxy ハ與ヘラレタル三整式ノ最大公約數ナリ.

91. 單項式ノ最大公約數. 先ヅ例ヲ舉ゲテ之ヲ示サン.

例 令バ $ab^2c^3, 4a^2bc^3, 7a^3b^2c^2$ ノ最大公約數ヲ求メントスルニ, 此各式ニ於テ a, b, c ノ三文字ヲ共通ニ有スル

トハ一見シテ明了ナル事實ナリ, 故ニ abc ハ公約數ナルベシ, 諸今與ヘラレタル三式ハ a ヨリモ高次ノ a ノ冪ニテ同時ニ割リ盡スヲ得ズ, b ヨリモ高次ノ b ノ冪ニテ同時ニ割リ盡スヲ得ズ, 又此三式ハ c^2 ヨリモ高次ノ c ノ冪ニテ同時ニ割リ盡スヲ得ズ, 故ニ此三式ハ abc^2 ヨリモ高次ノ式ニテ割リ盡スヲ得ズ, 即チ abc^2 が公約數ノ中ニテ最高次ノモノナリ, 因テ所要ノ最大公約數ハ abc^2 ナリ.

又 $15x^3y^3z^5, 30x^2y^5z^4, 45x^2y^4z^5$ ノ三式ニ於テ之ヲ同時ニ割盡シ得ベキ x ノ最高冪ハ x^2 ニシテ, y ノ最高冪ハ y^3, z ノ最高冪ハ z^4 ニシテ, 係數 $15, 30, 45$ ノ最大公約數ハ 15 ナルヲ以テ, 與ヘラレタル三式ノ公約數中最高次ノモノハ $15x^2y^3z^4$ ニ外ナラズ, 故ニ $15x^2y^3z^4$ が所要ノ最大公約數ナリ.

上ノ諸例ニヨリ次ノ法則ヲ得.

與ヘラレタル單項式ニ共通ノ總テノ文字ヲ書キ列テ, 各式ニ於ケル各文字ノ最低冪ノ指數ヲ各文字ニ附シ, 若シ與ヘラレタル式ガ數係數ヲ有スルキニハ其最大公約數ヲ斯シテ得タル式ノ數係

トスベシ,然ルキハ所得ノ式ハ所要ノ最大公約數ナリ.

92. 多項式ノ因數ヲ知レルキノ最大公約數. 此場合ニモ亦前節ニ於ケル如ク直チニ最大公約數ヲ書下スヲ得.

即チ與ヘラレタル各式ニ共通ナル總テノ因數ヲ列記シ,各因數ノ指數ハ與ヘラレタル式中ニテ其最低冪ノ指數ヲ以テ其指數トスベシ,若シ與ヘラレタル各式ガ數係數ヲ有スルキニハ其最大公約數ヲ所得ノ式ノ數係數トナスベシ.

例 1. $(a+b)^2(a-c)^3, 3(a+b)^3(a-c)$ ノ二式ノ最大公約數ヲ求ム.

今此二式ニ共通ナル因數ハ $(a+b)$ ト $(a-c)$ トニシテ $(a+b)$ ノ最低冪ハ $(a+b)^2$ ニシテ $(a-c)$ ノ最低冪ハ $(a-c)$ ナリ,故ニ $(a+b)^2(a-c)$ ガ所要ノ最大公約數ナリ.

例 2. $4ax^2(x-b)^3(x+c)^3, 6a^2x^4(x-b)(x+c)^5$ ノ二式ノ最大公約數ヲ求ム.

先ヅ數係數4ト6トノ最大公約數ハ2ナリ,次ニ共通ノ因數ハ $a, x, (x-b), (x-c)$ ノ四個ニシテ, a ノ最低冪ハ a, x ノ最低冪ハ $x^2, (x-b)$ ノ最低冪ハ $(x-b)$ ニシテ, $(x+c)$ ノ最低冪ハ $(x+c)^3$ ナルヲ以テ, 所要ノ最大公約數ハ $2ax^2(x-b)(x+c)^3$ ナリ.

例 3. $x^3-a^2x, ax^4-2a^2x^3+a^3x^2$ ノ二式ノ最大公約數ヲ求ム.

先ヅ與ヘラレタル式ヲ因數ニ分解スベシ,即チ

$$x^3-a^2x=x(x^2-a^2)=x(x-a)(x+a).$$

$$\begin{aligned} ax^4-2a^2x^3+a^3x^2 &= ax^2(x^2-2ax+a^2) \\ &= ax^2(x-a)^2. \end{aligned}$$

即チ與ヘラレタル二式ハ次ノ形トナル.

$$x(x-a)(x+a), ax^2(x-a)^2.$$

此二式ニ共通ノ因數ハ x ト $(x-a)$ トニシテ x ノ最低冪ハ x ニシテ $(x-a)$ ノ最低冪ハ $(x-a)$ ナルヲ以テ, 所要ノ最大公約數ハ $x(x-a)$ ナリ.

演 習 問 題 29.

次ノ各式ノ最大公約數ヲ求ム.

1. $ab^3c^2, a^4b^2c^3.$

2. $ax^2y^3, bxy^3z^2.$

3. $81a^3x^2, 27a^2x^3.$

4. $6a^2b^2x^3y, 3ab^3x^2y^2, abx^4y^4.$

5. $3m^3n^3, 7m^2n^5, 9m^4n^4.$ 6. $pq^2r^5, p^3q^3r^2, p^4q^2r^4.$
 7. $a^2-b^2, a^2-ab-ac+bc.$ 8. $x^3-y^3, ax^2+axy-2ay^2.$
 9. $(x-y)^2, x^2-y^2, x^3-y^3.$ 10. $x^4+x^2+1, x^3-1.$
 11. $(x-a)(x-b), (x-b)(x-c), (x-a)(x-b)(x-c).$
 12. $3x^2-4x, 9x^2-16.$
 13. $(a-b)(b-c)^2x^2, (a-b)^3(b-c)xy.$
 14. $3x^2y^3z^2-12x^2yz^4, x^3y^2z-2x^3yz^2.$
 15. $a^2-3ab-18b^2, a^2+2ab-3b^2, a^2+ab-6b^2.$
 16. $4x^2-8x+3, 8x^3-1, 4x^2-1.$
 17. $xz(x-y)(x-z), yz(y-z)(y-x).$
 18. $l^3-27m^3, l^4-81m^4.$ 19. $a^2x^2-16b^2y^2, a^3x^3-64b^3y^3.$
 20. $5x^2-7x-6, 5x^3-2x^2-3x, 25x^2+5x-6.$
 21. $a^2x^2-2a^3x+a^4, (x-a)(x^2-a^2), (x^2-a^2)(x^3-a^3).$
 22. $(x^3-y^3), x^4+x^2y^2+y^4, x^4-x^2y^2-2xy^3-y^4.$

93. 二多項式ノ最大公約數. 與ヘラレタル多項式ガ其因數ニ分解サレ居ル場合ニハ, 前節ニ擧ゲタル通り視察ニ因テ所要ノ最大公約數ヲ發見スルヲ容易ナレトモ, 其然ラザル場合ニハ, 前章ニ言ヘル如ク多項式ノ因數ハ一般ニ之ヲ見

出スヲ甚ダ困難ナルヲ以テ所要ノ最大公約數ヲ求メンニハ因數ニ分解スル方法ヲ用非テハ甚ダ困難ナリ, 去レトモ次ノ方法ニ從ヘバ最大公約數ノ存スル場合ニハ常ニ之ヲ見出スヲ得ベシ. 即チ與ヘラレタル二式ガ若シ單項因數ヲ含ムキニハ之ヲ取り去リ而シテ後先ヅ之ヲ或格段ナル共通ノ文字ニ關シテ降冪ノ順ニ排列スベシ, 次ニ斯シテ得タル式中其文字ニ付キテ高次ノ式ヲ低次ノ式ニテ除スベシ, 若シ兩式同次ナラバ何レヲ除數トシテモ差支ナシ, 斯シテ若シ剩餘ヲ生ズレバ之ヲ新ニ除數トシ前ノ除數ヲ被除數トシテ除法ヲ行ヒ, 尙ホ剩餘アラバ之ヲ新除數トナシ前ノ除數ヲ被除數トナシテ除法ヲ行ヒ遂ヒニ剩餘ナキニ至リテ止ムベシ, 然ルキハ單項因數ノ最大公約數ト此最後ノ除數トノ積

ガ所要ノ最大公約數ナリ。從ツテ若シ
單項因數ニ最大公約數ナキハ此最
後ノ除數ガ所要ノ最大公約數ナリ。

此方法ハ算術ニ於テ最大公約數ヲ求ムル方法ト
酷似セルナリ。

例. $a^2x^3 - 4a^2x^2 + 3a^2x$ ト $4ax^3 - 9ax^2 - 15ax + 18a$ トノ最大
公約數ヲ求ム。

先ヅ第一式ハ a^2x ノ單項因數ヲ有シ第二式ハ a ノ
單項因數ヲ有ス。即チ

$$a^2x^3 - 4a^2x^2 + 3a^2x = a^2x(x^2 - 4x + 3),$$

$$4ax^3 - 9ax^2 - 15ax + 18a = a(4x^3 - 9x^2 - 15x + 18).$$

此單項因數ノ最大公約數ハ a ナルヲ明カナリ、次
ニ吾人ハ $x^2 - 4x + 3$ ト $4x^3 - 9x^2 - 15x + 18$ トノ最大公約數
ヲ求メザルベカラズ。即チ次ノ如シ。

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 3 \quad 4x^3 - 9x^2 - 15x + 18 \quad (4x + 7) \\ \underline{4x^3 - 16x^2 + 12x} \\ 7x^2 - 27x + 18 \\ \underline{7x^2 - 28x + 21} \\ x - 3 \quad x^2 - 4x + 3 \quad (x - 1) \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -x + 3 \\ \underline{-x + 3} \end{array}$$

故ニ $x - 3$ ガ多項式ノ最大公約數ナリ。

因テ與式ノ最大公約數ハ $a(x - 3)$ ナリ。

94. 二ツノ多項式ノ單項式ナラサル
最大公約數ヲ求ムル法則ハ次ノ如クシ
テ證明スルヲ得。

先ヅ此法則ハ次ノ二定理ニ因レルナ
リ。

第一. P ガ A ノ約數ナラバ之又 mA ノ
約數ナリ。

第二. P ガ A 及ビ B ノ公約數ナラバ之
又 $mA \pm nB$ ノ約數ナリ; 如何トナレバ P ガ
A 及ビ B ノ公約數ナル故ニ $A = pP$, $B = qP$
ナル可シ、故ニ

$$mA \pm nB = (mp \pm nq)P.$$

即チ P ハ $mA \pm nB$ ノ約數ナリ。

之ヨリ前節ノ法則ヲ説明セン。

A 及ビ B ナ以テ與ヘラレタル二式ト
シ或共通ノ格段ナル文字ニ關シテ降冪

ノ 順 = 排 列 セ ラ レ 且 ツ A ハ B ヨ リ モ 高 次 ナ ラ ズ ト セ ン .

倍 A = テ B ナ 除 シ テ 商 ト シ テ p ナ 得 剩

$$\begin{array}{r} A) B \quad (p \\ \underline{pA} \\ \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{餘 ト シ テ } C \text{ ナ 得 タ} \\ \text{リ ト ス レ バ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} C) A \quad (q \\ \underline{qC} \\ \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} B = Ap + C \dots \dots (1) \\ \text{次 } = A \text{ ナ } C \text{ ニ テ 除} \\ \text{シ 商 } q \text{ 剩 餘 } D \text{ ナ 得 タ} \\ \text{リ ト ス レ バ} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} D) C \quad (\dots \\ \underline{\dots} \\ \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} R) S \quad (s \\ \underline{sR} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} A = Cq + D \dots \dots (2) \\ \text{斯 ク 除 法 ナ 繼 續 シ} \end{array}$$

テ 遂 = 除 數 ガ R ナ ル キ = 割 リ 切 レ タ リ ト セ ン , 然 ル キ ハ R ガ A ト B ト ノ 最 大 公 約 數 ナ ル ヲ 證 セ ン ト ス ル ナ リ .

倍 (1) 式 ナ 書 キ 直 セ バ

$$B - Ap = C \dots \dots \dots (3)$$

此 式 ノ 左 = 於 ケ ル A ト B ト ノ 任 意 ノ 公 約 數 ハ 定 理 第 二 = ヨ リ テ C ノ 約 數 ナ

リ , 故 = A ト B ト ノ 任 意 ノ 公 約 數 ハ 必 ズ A ト C ト ノ 公 約 數 ナ リ . 又 (1) 式 ヨ リ A ト C ト ノ 任 意 ノ 公 約 數 ハ 必 ズ B ノ 約 數 ナ リ , 故 = A ト C ト ノ 任 意 ノ 公 約 數 ハ 又 A ト B ト ノ 公 約 數 ナ リ .

故 = A ト B ト ノ 公 約 數 ハ 全 ク A ト C ト ノ 公 約 數 = 相 同 ジ , 從 テ A ト B ト ノ 最 大 公 約 數 ハ A ト C ト ノ 最 大 公 約 數 = 等 シ .

同 理 = 因 テ A ト C ト ノ 最 大 公 約 數 ハ C ト D ト ノ 最 大 公 約 數 = 等 シ ク , 從 ツ テ A ト B ト ノ 最 大 公 約 數 ハ C ト D ト ノ 最 大 公 約 數 = 等 シ , 最 後 = A ト B ト ノ 最 大 公 約 數 ハ S ト R ト ノ 最 大 公 約 數 = 等 シ カ ル ベ シ , 然 ル = R ハ S ナ 割 リ 切 ル 故 = S ト R ト ノ 最 大 公 約 數 ハ R 夫 自 身 ナ リ , 故 = R ハ A ト B ト ノ 最 大 公 約 數 ナ リ .

95. 以 上 ノ 最 大 公 約 數 ナ 見 出 ス 方 法 中 除 法 ナ 行 フ 場 合 = 於 テ 被 除 數 或 ハ 除

數ヲ任意ノ單項式ヲ以テ乘ジ或ハ除スルモ得ル處ノ結果ハ正當ナリ、何トナレバ斯ノ如キ乘法或ハ除法ハ多項因數ニ影響ヲ及ボササルヲ以テナリ。故ニ以上ノ法則ニ從テ除法ヲ繼續セル場合ニ分數ノ形ノ商ヲ得ルヲ避ケンガ爲メニ適宜ニ除數或ハ被除數ニ單項式ヲ乘ジ或ハ之ヲ以テ除シテ演算ヲ簡單ニスルヲ得。

次ニ尙ホ二三ノ例ヲ舉ゲテ最大公約數ヲ求ムル方法ヲ示サン。

例 1. $2x^2-5x+2$ ト $4x^3+12x^2-x-3$ トノ最大公約數ヲ求ム。

$$\begin{array}{r} 2x^2-5x+2 \quad 4x^3+12x^2-x-3 \quad (2x+11) \\ \underline{4x^3-10x^2+4x} \\ 22x^2-5x-3 \\ \underline{22x^2-55x+22} \\ 50x-25 \end{array}$$

剰餘ノ $50x-25=25(2x-1)$ 而シテ 25 ヲ以テ之ヲ除シ上述ノ通り斯クシテモ差支ナキ故ニ $2x-1$ ヲ新除數

トセシ。

$$\begin{array}{r} 2x-1 \quad 2x^2-5x+2 \quad (x-2) \\ \underline{2x^2-x} \\ -4x+2 \\ \underline{-4x+2} \end{array}$$

故ニ所要ノ最大公約數ハ $2x-1$ ナリ。

例 2. $2x^4-4x^3-11x^2+2x+5$ ト $x^4+x^3-10x^2-17x-5$ トノ最大公約數ヲ求ム。

$$\begin{array}{r} x^4+x^3-10x^2-17x-5 \quad 2x^4-4x^3-11x^2+2x+5 \quad (2) \\ \underline{2x^4+2x^3-20x^2-34x-10} \\ -6x^3+9x^2+36x+15 \end{array}$$

此剰餘ヲ 3 ニテ除シテ新除數トナシ除數ニ 2 ヲ乘シテ被除數トシテ除法ヲ行フベシ。

$$\begin{array}{r} -2x^3+3x^2+12x+5 \quad 2x^4+2x^3-20x^2-34x-10 \quad (-x) \\ \underline{2x^4-3x^3-12x^2-5x} \\ 5x^3-8x^2-29x-10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \text{ 剰餘} = \text{乘ズレバ} \quad 10x^3-16x^2-58x-20 \quad (-5) \\ \underline{10x^3-15x^2-60x-25} \\ -x^2+2x+5 \end{array}$$

此剰餘 $-x^2+2x+5 = -1$ ヲ乘シテ新除數トナセバ

$$\begin{array}{r} x^2-2x-5 \quad -2x^3+3x^2+12x+5 \quad (-2x-1) \\ \underline{-2x^3+4x^2+10x} \\ -x^2+2x+5 \\ \underline{-x^2+2x+5} \end{array}$$

故ニ所要ノ最大公約數ハ $x^2 - 2x - 5$ ナリ.

例 3. $2x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3 + ax^5 - 2ax^4y - ax^3y^2 + 4ax^2y^3 - 4axy^4$ トノ最大公約數ヲ求ム.

先ヅ第一式ハ x ナル單項式ヲ因數ニ有シ第二式ハ ax ナル單項式ヲ因數ニ有スルヲハ視察ニヨリテ明了ナリ, 此因數ヲ預カリ置キ, 殘ル處ノ二式

$$2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 2y^3, \quad x^4 - 2x^3y - x^2y^2 + 4xy^3 - 4y^4$$

ノ最大公約數ヲ求メ.

第二式ニ 2 ヲ乘シ被除數トスベシ.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 2y^3 \quad 2x^4 - 4x^3y - 2x^2y^2 + 8xy^3 - 8y^4 \quad (x) \\ \underline{2x^4 - 5x^3y + 3x^2y^2 - 2xy^3} \\ x^3y - 5x^2y^2 + 10xy^3 - 8y^4 \end{array}$$

此剩餘ニ 2 ヲ乘シテ除法ヲ繼續スレバ

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - 2y^3 \quad 2x^3y - 10x^2y^2 + 20xy^3 - 16y^4 \quad (y) \\ \underline{2x^3y - 5x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4} \\ -5x^2y^2 + 17xy^3 - 14y^4 \end{array}$$

此剩餘ハ y^2 ヲ因數ニ有スルヲ以テ之ニテ除シテ新ニ除數トナシ上ノ除數ニ 5 ヲ乘シテ被除數トナシテ演算ヲ行フベシ.

$$\begin{array}{r} -5x^2 + 17xy - 14y^2 \quad 10x^3 - 25x^2y + 15xy^2 - 10y^3 \quad (-2x) \\ \underline{10x^3 - 34x^2y + 28xy^2} \\ 9x^2y - 13xy^2 - 10y^3 \end{array}$$

此剩餘ニ 5 ヲ乘シテ除法ヲ繼續スレバ

$$\begin{array}{r} -5x^2 + 17xy - 14y^2 \quad 45x^2y - 65xy^2 - 50y^3 \quad (-9y) \\ \underline{45x^2y - 153xy^2 + 126y^3} \\ 88xy^2 - 176y^3 \end{array}$$

此剩餘ハ $88y^2(x-2y)$ ニ等シキヲ以テ $88y^2$ ナル單項式ニテ除シ其商 $x-2y$ ヲ除數トスベシ.

$$\begin{array}{r} x-2y \quad -5x^2 + 17xy - 14y^2 \quad (-5x+7y) \\ \underline{-5x^2 + 10xy} \\ 7xy - 14y^2 \\ \underline{7xy - 14y^2} \\ 0 \end{array}$$

故ニ所要ノ最大公約數ハ $x-2y$ ニ單項因數ノ最大公約數ヲ乘シタルモノナラザルベカラズ, 然ルニ單項因數 x ト ax トノ最大公約數ハ x ナルヲ以テ $x(x-2y)$ ガ與式ノ最大公約數ナリ.

56. 數多ノ多項式ノ最大公約數.

先ヅ 三ツノ多項式ノ最大公約數ヲ求ムルキニハ其中任意ノ二式ノ最大公約數ヲ求メ, 其結果ト第三式トノ最大公約數ヲ求ムレバ可ナリ. 其他之ニ準ズ.

其理ハ今 A, B, C ヲ以テ與ヘラレタル

三式トシ A ト B トノ最大公約數ヲ D トスレバ D ト C トノ任意ノ公約數ハ A, B, C ノ公約數ニシテ又 A, B, C ノ任意ノ公約數ハ又 D ト C トノ公約數ナリ, 故ニ D ト C トノ最大公約數ハ A, B, C ノ最大公約數ナリ.

例. x^3+x^2-4x-4 , x^3-x^2-4x+4 , x^3-x^2-x-2 ノ最大公約數ヲ求ム.

先ヅ第一及ヒ第二ノ兩式ノ最大公約數ヲ求ムレバ其ノ x^2-4 ナルヲ知ル, 次ニ此 x^2-4 ト第三式トノ最大公約數ハ $x-2$ ナリ, 故ニ $x-2$ ガ所要ノ最大公約數ナリ.

演 習 問 題 30.

次ノ諸式ノ最大公約數ヲ求ム.

1. x^3-4x^2+7x-6 , x^3-5x^2+x+10 .
2. $x^4-4x^3+7x^2-2x-5$, x^3+4x^2-6x-5 .
3. $x^3+5x^2+10x+12$, x^3+4x^2+5x+6 .
4. $x^3+3x^2-8x-24$, $x^3+3x^2-5x-15$.
5. a^3-a^2-5a-3 , $a^3-4a^2-11a-6$.
6. x^4-2x^3-4x-7 , $x^4+x^3-3x^2-x+2$.

7. $2x^3+3x^2y-y^3$, $4x^3+xy^2-y^3$.
8. $x^3-4x+15$, x^4+x^2+25 .
9. $2x^3+4x^2-7x-14$, $6x^3-10x^2-21x+35$.
10. $3x^4-3x^3-2x^2-x-1$, $9x^4-3x^3-x-1$.
11. $x^3+2ax^2-13a^2x+10a^3$, $8a^3-10a^2x+ax^2+x^3$.
12. $2x^4-2x^3+x^2+3x-6$, $4x^4-2x^3+3x-9$.
13. a^3+3a^2-a-3 , $a^4+4a^3-12a-9$, a^3+4a^2+2a-3 .
14. $3am^3-3a^2m^2+2a^3m-2a^4$, $3am^4+12a^2m^3+2a^3m^2+8a^4m$.
15. $2y^4+7y^3+y^2-9y+3$, $y^4+9y^3+11y^2-11y+2$.
16. $10x^3+25ax^2-5a^3$, $4x^3+9ax^2-2a^2x-a^3$.
17. $24x^4y+72x^3y^2-6x^2y^3-90xy^4$, $6x^4y^2+13x^3y^3-4x^2y^4-15xy^5$.
18. $4x^5+14x^4+20x^2+70x$, $8x^7+28x^6-8x^5-20x^4+56x^3$.
19. $9a^4+2a^2x^2+a^4$, $3a^4-8a^3x+5a^2x^2-2ax^3$.
20. m^5-m^3-m+1 , $m^7+m^6+m^4-1$.
21. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$, $ab(x^3+y^3)+xy(a^2y+b^2x)$.
22. $y^5+y^4x+y^2x^3-x^5$, $y^7-y^3x^4-yx^6+x^7$.

最 小 公 倍 數.

97. 一ノ整式ガ數多ノ整式ニテ割リ切ラル、キニハ之ヲ此等ノ式ノ公倍

數ト稱ス。

與ヘラレタル多クノ整式ノ公倍数ハ
又多數ニ存在スベシ、此等ノ公倍数中次
數ノ最小ナルモノヲ與式ノ最小公倍
數ト稱ス。

98. 單項式ノ最小公倍数. 數多ノ
單項式ノ最小公倍数ハ視察ニ依ツテ見
出スヲ得.

例. $a^2x^2y, 3bx^3y^2$ ノ最小公倍数ヲ求メントスルニ、
二式中ニ存スル文字ハ a, b, x, y ニシテ其最高冪ハ夫
々 a^2, b, x^3, y^2 ナリ、且ツ係數ノ最小公倍数ハ明カニ 3 ナ
リ、故ニ $3a^2bx^3y^2$ ハ任意ノ公倍数ノ因數中ニ含マレザ
ル可カラズ、且ツ又之ヨリモ次數ノ小ナル式ハ與式
ノ公倍数タルコトヲ得ズ、故ニ所要ノ最小公倍数ハ
 $3a^2bx^3y^2$ ナリ。

又 $2a^3bcx, 3a^2b^2cy, 6bcxy^2$ ノ最小公倍数ヲ求メシニ、先
ヅ係數ノ最小公倍数ハ 6 ナリ、次ニ各式ニ含マル
ル文字ハ a, b, c, x, y ニシテ其最高冪ハ夫々 a^3, b^2, c, x, y^2
ナリ、故ニ與式ノ公倍数ハ少ナクモ $6a^3b^2cxy^2$ ナラザル

ベカラズ、若シ之ヨリモ一次ニテモ次數小ナラバ公
倍数タルコトヲ得ザルベシ、因テ所要ノ最小公倍数ハ
 $6a^3b^2cxy^2$ ナリ。

上ノ例ニ示セル如ク單項式ノ最小公
倍数ヲ求メシニハ 與ヘラレタル各式中
ノ文字ヲ盡ク取り、各ニ其式中ノ各文字
ノ最高冪ノ指數ヲ附シ、與式ノ數係數ノ
最小公倍数ヲ以テ其數係數トナスベシ。

99. 因數ノ明カナル多項式ノ最小
公倍数. 與ヘラレタル多クノ多項式
ノ因數ノ明カナルキニハ其最小公倍数
ハ前ト同ジク視察ニ依リテ直チニ見出
スヲ得ベシ、即チ此 最小公倍数ハ各式
中ノ異ナリタル因數ヲ悉ク取り之ニ其
式中ノ最高冪ノ指數ヲ附スベシ、若シ數
係數アルキニハ其最小公倍数ヲ以テ所要
ノ最小公倍数ノ數係數トナスベシ。

例 1. $(x-a)(x-b)^2, 3(x-b)(x-c)^4$ ノ最小公倍数ヲ求

ム.

此式中ニアル因数ハ $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ ニシテ其最高冪ハ夫々 $(x-a)$, $(x-b)^2$, $(x-c)^4$ ニシテ、數係數ノ最小公倍數ハ 3 ナリ、故ニ所要ノ最小公倍數ハ

$$3(x-a)(x-b)^2(x-c)^4 \text{ ナリ.}$$

例 2. $(a-c)(x^2-y^2)$, $(a^2-2ac+c^2)(x+y)$, $(a+c)(x^2+2xy+y^2)$ ノ最小公倍數ヲ求ム.

與ヘラレタル三式ハ次ノ如ク其因数ニ分解スルコトヲ得ベシ. 即チ

$$(a-c)(x+y)(x-y), (a-c)^2(x+y), (a+c)(x+y)^2.$$

此三式中ニ含マルル因数ハ $(a-c)$, $(a+c)$, $(x-y)$, $(x+y)$ ニシテ其最高冪ハ夫々 $(a-c)^2$, $(a+c)$, $(x-y)$, $(x+y)^2$ ナル故ニ與式ノ最小公倍數ハ $(a-c)^2(a+c)(x-y)(x+y)^2$ 或ハ $(a-c)(a^2-c^2)(x+y)(x^2-y^2)$ ナリ.

例 3. $a^2x(x+a)(x-b)$, $ax^2(x^2-a^2)$, $bx^2(x+b)(x+a)^2$ ノ最小公倍數ヲ求ム.

與式中ニ含マルル、因数中單項因数ハ a, b, x ニシテ、多項因数ハ $x+a$, $x-a$, $x+b$, $x-b$ ナリ、而シテ其最高冪ハ夫々 a^2, b, x^3 , $(x+a)^2$, $(x-a)$, $(x+b)$, $(x-b)$ ナルヲ以テ所要ノ最小公倍數ハ

$$a^2bx^3(x-a)(x+a)^2(x-b)(x+b) = a^2bx^3(x+a)(x^2-a^2)(x^2-b^2)$$

ナリ.

演 習 問 題 31.

次ノ諸式ノ最小公倍數ヲ求ム.

1. $2a^2b^4, a^3b^3.$
2. $3xy^2z^4, 4x^3yz^3.$
3. $12a^2x^3, 24a^3x^2.$
4. $6p^3q^2r^3, 9pq^4r^5.$
5. $12a^3b^3x^5, 48a^4b^2x^3.$
6. $21l^3m^5x^4, 28l^5m^2x^6.$
7. $a(x-y), a^2(x-z).$
8. $(x-a)(x-b)^2, (x^2-a^2)(x-b).$
9. $ax^2(a-b)(2a-x), a^2x(2a-x)^2.$
10. $(a^2-x^2), (a+x)^2.$
11. $3xy(x-y)^2, 4y^2(x^2-y^2).$
12. $2a^2xy^2, 3ax^3y^3, 9a^3x^2y^5.$
13. $x^2-3x+2, x^2+4x-5.$
14. $3x^2-2x-1, x^2-1.$
15. $a^3(a-b)(a-c), a^2b(b-c)(b-a).$
16. $a^2y^2(a+y), ay(a^2-y^2).$
17. $x^2-5ax+25a^2, x^3+125a^3.$
18. $4x^2-2x-6, 2x^2-5x+3.$
19. $x^3+3x^2y+2xy^2, x^4+4x^3y+3x^2y^2.$
20. $(x+y)^2, (x^2-y^2), (x-y)^2.$
21. $x^3-y^3, x^4+x^2y^2+y^4.$
22. $a^3x^2, ax(x^2-y^2), (a-x)(x+y).$
23. $x^2+2x+1, x^2-2x-3, x^2+4x+3.$
24. $(a^2-b^2)(x^2-y^2), (a^3-b^3)(x-y), (a^3+b^3)(x+y).$
25. $x^2+9ax+20a^2, x^2-2ax-24a^2, x^2-ax-30a^2.$

26. $ax^2(a^2-x^2), bx^2y(a-x)(b-y), abxy(a+x)(b+y).$

27. $5l^3m^2(x-z)^2, 15l^2m(x^2-z^2), lm^5(x+z)^2.$

28. $a^2x^2-7axy+12y^2, a^2x^2-6axy+8y^2, a^2x^2-5axy+6y^2.$

100. 數多ノ多項式ノ最小公倍數.

先ツ二ツノ多項式ノ最小公倍數ニ付キテ考究セン.

與式ノ因數ノ分明ナラザルキニハ先ツ其二式ノ最大公約數ヲ求メヨ、而ル後二式ノ中何レカーツヲ此最大公約數ニテ除シテ得タル商ヲ他ノ式ニ乘ズベシ、是レ所要ノ最小公倍數ナリ。

今 A 及ビ B ナテ與ヘラレタル二式トシ、H ナテ其最大公約數ヲ表ハシ、A ト B ト ナ H ニテ除シテ得ル商ヲ夫々 a 及ビ b ナテ以テ表ハセバ

$$A = aH, \quad B = bH.$$

H ハ A ト B トノ最大公約數ナルヲ以テ a ト b トハ公約數ヲ有セズ、故ニ a ト b ト

ノ最小公倍數ハ ab ナリ、因テ A ト B ト即チ aH ト bH トニテ割り盡シ得ベキ最低次ノ式ハ abH ニ外ナラズ、故ニ所要ノ最小公倍數ハ abH ナリ。今 L ナテ以テ最小公倍數ヲ表ハセバ

$$L = abH = Ab = Ba = \frac{AB}{H}.$$

故ニ又二式ノ最小公倍數ハ其積ヲ其最大公約數ヲ以テ除シテ得ル商ニ等シ。

例. x^3+2x-3 ト x^3+2x^2-5x+2 トノ最小公倍數ヲ求ム.

先ツ與式ノ最大公約數ヲ求ムレバ $x-1$ ナリ得、故ニ

$$x^3+2x-3 = (x^2+x+3)(x-1),$$

$$x^3+2x^2-5x+2 = (x^2+3x-2)(x-1).$$

故ニ所要ノ最小公倍數ハ

$$(x-1)(x^2+x+3)(x^2+3x-2).$$

三ツノ多項式ノ最小公倍數ヲ求メンニハ(若シ與式ノ因數ガ分明ナラザルキニハ)先ツ與式ノ中ノ任意ノ二式ノ最小公倍數ヲ求メ此結果ト第三式トノ最小

公倍數ヲ求ムレバ可ナリ。其他之ニ準
ズ。

101. 前節ヨリ直チニ次ノ定理ヲ得。
即チ

二ツノ整式ノ積ハ其最小公倍數ト最
大公約數トノ積ニ等シ。

何トナレバ今前節ニ於ケル記號ヲ用ケレバ

$$L = \frac{AB}{H}$$

Hヲ此等式ノ兩邊ニ乘ズレバ

$$LH = AB.$$

即チA, Bノ積ハ其最大公約數Hト其最小公倍數Lト
ノ積ニ等シ。

演 習 問 題 32.

次ノ諸式ノ最小公倍數ヲ求ム。

1. $x^2 - 11x + 28, x^3 - 11x^2 + 33x - 20.$

2. $x^2 - a^2, x^2 - (a+b)x + ab, x^3 - b^3.$

3. $6(x^2 - 25), x^2 - x - 20, 16(x^2 - 16).$

4. $4ax^3 + 4bx^3, a^2x^2 - b^2x^2, 8a^2bx - 8ab^2x.$

5. $x^2 - 7x + 12, x^2 + 5x - 24, x^2 + 4x - 32.$

6. $6x^2 + x - 2, 21x^2 + 17x + 2, 14x^2 - 5x - 1.$

7. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$

8. $2x^3 - x^2 - 26x - 15, 2x^3 - 9x^2 + 2x + 5.$

9. $x^2 + 5xy - 36y^2, 3x^3 - 19x^2y + 7xy^2 + 84y^3.$

10. $15(x^2y - xy^2), 28(x^3 - xy^2), 35(xy^2 + y^3).$

11. $x^2 - 1, x^3 - 1, x^3 + 1.$

12. $x^3 + 1, x^2 + x + 1, x^4 + x^2 + 1.$

13. $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3, a^3 + a^2b - ab^2 - b^3.$

14. $a^2 - b^2, a^3 - b^3, a^3 + b^3, a^6 + b^6.$

15. $x^3 - 2x^2y - xy^2 + 2y^3, x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3.$

16. $x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5, x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 5x - 3.$

17. $a^5x - 12a^3x + 27ax, a^4x^2 - 18a^2x^2 + 45x^2.$

18. $ax^3 - a^2x^2 - a^3x + a^4, a^2x^5 + a^3x^4 - a^4x^3 - a^5x^2.$

19. $x^4 - 2x^3 + 64x - 128, x^3 + 8x^2 - 32x - 192.$

20. $x^4 - y^4, x^3 - y^3, x^8 - y^8.$

21. $a^3 - b^3, a^3 + b^3, a^4 + a^2b^2 + b^4.$

22. $x^2 - 3ax - 70a^2, x^3 - 39a^2x + 70a^3, x^3 - 48a^2x + 7a^3.$

23. $a^2x^2 - b^2y^2, a^3x^3 + a^2bx^2y + ab^2xy^2 + b^3y^3,$

$$a^3x^3 - a^2bx^2y + ab^2xy^2 - b^3y^3.$$

24. $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$, $x^4 + 2x^3y - 13x^2y^2 - 8xy^3 + 36y^4$,
 $x^4 - 2x^3y - 13x^2y^2 + 8xy^3 + 36y^4$.

第八章 分 數 式.

102. 算術ニ於テ知ル如ク一ノ整數ヲ他ノ整數ニテ除スルニ當リ多クノ場合ニハ其商ハ整數ナルヲ得ズ,例令バ24ヲ6ニテ除セバ商4ヲ得レド,7ハ4ニテ割り切レズ,又5ハ9ニテ割り切レザルナリ.

是ニ於テカ算術ニ於テハ分數ト稱スル新數ヲ導入セルナリ,即チ横線ノ上下ニ被除數ト除數トヲ記シテ其商ヲ表ハスモノトシ之ヲ分數ト名ヅクルナリ,例令バ分數 $\frac{7}{4}$ ハ7ヲ4ニテ割りタル商ヲ表ハシ,又5ヲ9ニテ除シテ得ル商ハ分數 $\frac{5}{9}$ ナリトイフナリ.

而シテ横線ノ上ニアル數ヲ分子ト稱シ,其下ニアル數ヲ分母ト稱ス.

斯クシテ新タニ得タル分數ノ演算ノ

法則ハ整數ノ演算ニ矛盾ヲ來ササル様ニ定メラレタルコト等算術ニ於テ知ル所ナルヲ以テ茲ニハ再記セズ。

要スルニ分數ハ除法ニ於ケル制限ヲ取除カンガ爲メニ導入サレタル新數ナリ、即チ分數ヲ用ウレバ被除數ハ除數ノ倍數ナラザルモ其商ヲ見出スコトヲ得ルナリ、是レ恰カモ減法ノ制限ヲ取除カンガ爲メニ負數ヲ導入セルト一般ナリ。

代數學ニ於テモ亦分數式ナルモノアリ、其演算ノ法則ハ算術ニ於ケル分數ノ場合ト酷似セルナリ、即チ本章ニ於テ論ズル所ノ如シ。

103. 分數式. 除法ノ場合ニ於テ割リ切レザルキニハ被除數ノ下ニ横線ヲ畫キ其下ニ除數ヲ記シテ其商ヲ表ハシタリ、此ノ如キ式ヲ分數式ト稱スルコトハ第一章ニ於テ下シタル定義ニヨリテ既

ニ知ル所ナリ、今之ヲ再記スレバ次ノ如シ。

一横線ノ上下ニ各一ノ整式ヲ記シ、下式ヲ以テ上式ヲ除シタル商ヲ表ハスルニハ之ヲ分數式ト稱シ、被除數ヲ分子除數ヲ分母ト稱ス。

分子及ビ分母ヲ其分數式ノ兩項ト稱ス。

例令バ $\frac{a}{b}$ ハ一ノ分數式ニシテ a ハ分子ニシテ b ハ分母ナリ、而シテ此 a ト b トヲ此分數式ノ兩項ト稱ス、且ツ定義ニヨリテ

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

ナリ。

104. 定理. 一ノ分數式ノ兩項ヲ同一ノ數ヲ以テ乘ジ、或ハ除スルモ其値ハ變ゼズ。

何トナレバ $\frac{a}{b}$ ヲ以テ與ヘラレタル分

數式トスレバ定義ニヨリテ

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

此兩邊ニ一數 m チ乘ズレバ

$$\frac{a}{b} \times b \times m = a \times m.$$

或ハ $\frac{a}{b} \times bm = am.$

bm ニテ兩邊ヲ除スレバ

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

即チ一ノ分數式ノ兩項ニ同一ノ數ヲ乘ズルモ其值ハ變ゼズ.

次ニ與ヘラレタル分數式ガ $\frac{am}{bm}$ ノ形ナリトセン, 然ルキハ

$$\frac{am}{bm} \times bm = am.$$

兩邊ヲ m ニテ除スレバ

$$\frac{am}{bm} \times b = a.$$

此兩邊ヲ b ニテ除スレバ

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

即チ一ノ分數式ノ兩項ヲ同一ノ數ニテ除スルモ其值ハ變ゼズ.

注意 此處ノ同一ノ數トハ數字ニテ表ハサル、數ノ外ニ代數式ヲモ意味スルコト勿論ナリ.

105. 約分. 一ノ分數式ノ兩項ニ公約數ヲ含ムキニハ, 之ニテ兩項ヲ除シテ其形ヲ簡約スルヲ得.

例令バ $\frac{ax^2}{bxy}$ ナル分數式ニ於テ其兩項ハ x ナル公約數ヲ有スルヲ以テ, 之ニテ除スレバ $\frac{ax}{by}$ トナル.

此ノ如ク一ノ分數式ノ兩項ヲ其公約數ニテ除シテ其形ヲ簡約スルヲ約分ト稱ス.

一ノ分數式ヲ約分スルモ其值ノ變ゼザルコトハ前節ノ定理ニヨリテ明カナリ.

一ノ分數式ノ兩項ガ公約數ヲ含有セザルキニハ此分數式ヲ既約分數式ト稱ス.

例令バ $\frac{ax}{by}$ ハ一ノ既約分數式ナリ, 何トナレバ其兩項 ax ト by トハ公約數ヲ有セザレバナリ.

又 $\frac{bx-c}{x^2+dx+e}$ モ亦一ノ既約分數式ナリ、何トナレバ
其兩項 $bx-c$ ト x^2+dx+e トハ公約數ヲ有セザレバナリ。

一ノ分數式ヲ既約分數式ニ化スルヲ
ヲ稱シテ其分數式ヲ最モ簡單ナル形ニ
化スルトイフ。

一ノ分數式ヲ最モ簡單ナル形ニ化セ
シニハ、其兩項ヲ兩項ノ最大公約數ヲ以
テ除スベシ。

例. $\frac{4a^2xy}{6ax^2y}$ ヲ最モ簡單ナル形ニ化セヨ。

此分數式ノ分母、分子ノ最大公約數ハ $2axy$ ナリ、故
ニ之ニテ兩項ヲ除スルハ $\frac{2a}{3x}$ ヲ得、之レ所要ノ形ナ
リ。

一ノ分數式ヲ既約分數式ニ化スルニ
當リ一時ニ兩項ヲ其最大公約數ヲ以テ
除スル代リニ、任意ノ公約數ヲ以テ幾回
モ除シ、遂ニ既約分數式トナル迄此方法
ヲ反覆スル方便ナリ。

例 1. $\frac{2a^3x^2yz^3}{12ax^4y^2z}$ ヲ既約分數式ニ化スベシ。

$$\frac{2a^3x^2yz^3}{12ax^4y^2z} = \frac{a^2x^2yz^3}{6x^4y^2z} = \frac{a^2yz^3}{6x^2y^2z} = \frac{a^2z^3}{6x^2yz}$$

$$= \frac{a^2z^2}{6x^2y}$$

此演算ハ簡略ニ次ノ如ク記スルヲ得。

$$\frac{2a^3x^2yz^3}{12ax^4y^2z} = \frac{a^2z^2}{6x^2y}$$

例 2. $\frac{y^4-z^4}{(y+z)^2(y-z)^2}$ ヲ最モ簡單ナル形ニ化スベシ。

$$\frac{y^4-z^4}{(y+z)^2(y-z)^2} = \frac{(y^2+z^2)(y^2-z^2)}{(y+z)^2(y-z)^2} = \frac{(y^2+z^2)(y+z)(y-z)}{(y+z)^2(y-z)^2}$$

$$= \frac{y^2+z^2}{(y+z)(y-z)} = \frac{y^2+z^2}{y^2-z^2}$$

與ヘラレタル分數式ニ於テ其兩項ノ
最大公約數ガ視察ニヨツテ見出サレザ
ルキニハ、前章ニ舉ゲタル方法ニ從ツテ
之ヲ見出スベシ。

例. $\frac{x^3-2x^2+x+4}{2x^3-9x^2+17x-12}$ ヲ既約分數式ニ化スベシ。

先ヅ分母ト分子ノ最大公約數ヲ前章ニ舉ゲタ
ル方法ニ從ツテ見出スルキニハ x^2-3x+4 ヲ得、之ニテ
兩項ヲ除シテ $\frac{x+1}{2x-3}$ ヲ得、之レ所要ノ式ナリ。

注意. 分數式ノ兩項ノ符號ヲ變ズル
モ更ニ其値ニ變化ヲ生ゼザルベシ、何ト

ナレバ斯クスルコハ分子及ビ分母ニ俱
ニ-1ヲ乗ズルコト同ジナレバナリ。

演 習 問 題 33.

次ノ諸式ヲ既約分數式ニ化スベシ。

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{3a^2bx^3}{12ab^2y^3}$ | 2. $\frac{4a^3b^2x^2y^3}{6ab^3x^3y}$ |
| 3. $\frac{x^5y^3z^4}{x^3y^6z^3}$ | 4. $\frac{45a^3b^2c^2xy^5}{125a^2b^4c^3x^2y^3}$ |
| 5. $\frac{36ab^3cd^4xy^2z^3}{81a^2b^4c^2dx^2yz^4}$ | 6. $\frac{5a^7b^6x^{11}y^5z^3}{13a^{10}b^4x^5y^7z^5}$ |
| 7. $\frac{a^2-ab}{2ab}$ | 8. $\frac{x^2-y^2}{y(x+y)}$ |
| 9. $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}$ | 10. $\frac{b^2-ab}{b^2-a^2}$ |
| 11. $\frac{1-x^3}{(1-x)^2}$ | 12. $\frac{(a+b)^2}{a^3+b^3}$ |
| 13. $\frac{12a^2-3b^2}{(2a+b)^2}$ | 14. $\frac{x^3-8y^3}{(x-2y)(x+y)^2}$ |
| 15. $\frac{x-3}{9-x^2}$ | 16. $\frac{a^5-4a^3b^2}{a^2b^3-4b^5}$ |
| 17. $\frac{20a^2x^2-5b^2y^2}{30ax^3-15bx^2y}$ | 18. $\frac{a^2x^2y^2-x^4y^4}{x^4y^4-a^4}$ |
| 19. $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3+b^3}$ | 20. $\frac{x^3-y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$ |
| 21. $\frac{4a^2x^2-b^2}{8a^3x^3-b^3}$ | 22. $\frac{2x^2-5x-3}{6x^2+x-1}$ |
| 23. $\frac{4a^2y^2+4aby+b^2}{4a^2y^2-b^2}$ | 24. $\frac{ab+(a+b)x+x^2}{ac+(a+c)x+x^2}$ |
| 25. $\frac{a^2-a(x+y)+xy}{a^2-a(x+z)+xz}$ | 26. $\frac{42-13x+x^2}{30-11x+x^2}$ |

- | | |
|--|---|
| 27. $\frac{x^2-10x+21}{x^3-46x-21}$ | 28. $\frac{a^2-9a+20}{a^2-a-20}$ |
| 29. $\frac{x^2-5xy+6y^2}{x^2+xy-12y^2}$ | 30. $\frac{p^2x^2+4px+4}{p^2x^2+5px+6}$ |
| 31. $\frac{(x^3-y^3)(x+y)}{x^4+x^2y^2+y^4}$ | 32. $\frac{(a-x)(a^3+x^3)}{(a+x)(a^3-x^3)}$ |
| 33. $\frac{(p^3-q^3)(p^2-pq+q^2)}{(p^3+q^3)(p^2+pq+q^2)}$ | 34. $\frac{x^2-4ax+4a^2}{x^3-4ax^2+8a^2x-8a^3}$ |
| 35. $\frac{x^4-y^4}{(x^3+y^3)(x-y)}$ | 36. $\frac{x^3+x^2-10x+8}{x^3+4x^2-x-4}$ |
| 37. $\frac{2x^4-2x^3+3x^2+3x-9}{x^4-2x^3+2x^2-x-6}$ | 38. $\frac{x^5-x^4-2x^3+2x^2+3x-3}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+3x+3}$ |
| 39. $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$ | 40. $\frac{x^4-x^3-x-1}{x^4-x^3-2x^2-x-3}$ |
| 41. $\frac{x^5-x^4+x^3-2x^2-2x+3}{x^5-x^4+3x^3-4x^2+2x-3}$ | |

106. 通分. 分母ノ異ナル數多ノ分數式ヲ各ノ値ヲ變ズルコトナクシテ同一ノ分母ヲ有スル分數式ニ化スルコトヲ名ツケテ此等ノ分數式ヲ通分スルト稱ス。

數多ノ分數式ヲ通分スルニハ總テノ分數式ノ分母ノ公倍數ヲ求メ、之ヲ以テ各分數式ノ分母トシ、此公倍數ヲ各分數式ノ分母ニテ除シテ得ル商ヲ其分數式ノ分子ニ乗ジタルモノヲ以テ各分數式

ノ 分 子 ト ス ベ シ .

例 令 $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ナル三分數式ヲ通分セントスレバ、先ヅ總テノ分母即チ b, d, f ノ公倍數ヲ求ムベシ、今 M ヲ以テ此公倍數ヲ表ハシ、之ヲ各分母 b, d, f ニテ除シテ得ル商ヲ夫々 p, q, r トセシ、然ルニ此 p, q, r ヲ各分數式ノ分子 a, c, e ニ夫々乘シタルモノハ ap, cq, er ナリ、即チ所要ノ分數式ハ

$$\frac{ap}{M}, \frac{cq}{M}, \frac{er}{M}.$$

ナリ。此等ノ分數式ハ夫々原ノ分數式ト同値ナルヲハ104節ノ定理ニ因リテ明カナルベシ。

分數式ヲ通分スルニ當リ分母ハ成ル可ク簡單ナルモノヲ採ルヲ可トス、即チ各分數式ノ分母ノ最小公倍數ヲ求メ、之ヲ以テ分數式ノ分母トナスベシ、斯クスレバ演算ノ勞ヲ省クヲ得ベク且ツ所得ノ結果モ亦簡單ナリ、斯クスルヲ稱シテ各分數式ヲ其最小公分母ニ通分スルト稱ス。

例. $\frac{x}{ab^2(x-a)}, \frac{y}{cb(x^2-a^2)}, \frac{z}{a^2b(x+a)}$ ヲ最小公分母ニ

通分セヨ。

先ヅ諸分母ノ最小公倍數ヲ求ムレバ

$$a^2b^2(x^2-a^2).$$

ヲ得。之ヲ各分母ヲ以テ除スレバ商トシテ

$$a(x+a), ab, b(x-a).$$

ヲ得。

$$\begin{aligned} \text{故} = \frac{x}{ab^2(x-a)} &= \frac{x \cdot a(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)} = \frac{ax(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}, \\ \frac{y}{ab(x^2-a^2)} &= \frac{y \cdot ab}{a^2b^2(x^2-a^2)} = \frac{aby}{a^2b^2(x^2-a^2)}, \\ \frac{z}{a^2b(x+a)} &= \frac{z \cdot b(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)} = \frac{bz(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}. \end{aligned}$$

演 習 問 題 34.

次ノ諸分數式ヲ最小公分母ニ通分セヨ。

- $\frac{1}{4a}, \frac{3}{8a^2}, \frac{5}{12a^3}$ 2. $\frac{x+y}{3x^2}, \frac{x-y}{3a^2x}, \frac{x^2}{2a^2}$
- $\frac{a}{x-a}, \frac{x}{a-x}, \frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{ax}{a^2-x^2}$
- $\frac{a}{a+x}, \frac{x}{a-x}, \frac{3a}{2x}$
- $\frac{x}{x-y}, \frac{y}{x+y}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
- $\frac{1}{x-1}, \frac{x}{(x-1)^2}, \frac{3}{x+1}, \frac{4}{(x+1)^3}, \frac{5}{x^2-1}$
- $\frac{x}{(x-y)(z-x)}, \frac{y}{(y-z)(x-y)}, \frac{z}{(z-x)y-z}$

8. $\frac{a}{x-a}, \frac{a+x}{x^2+ax+a^2}, \frac{ax}{x^3-a^3}$.
9. $\frac{x-1}{x^2-5x+6}, \frac{x-2}{x^2-4x+3}, \frac{x-3}{x^2-3x+2}$.
10. $\frac{1}{x^2-ax+a^2}, \frac{1}{x^2+ax+a^2}, \frac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$.
11. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}, \frac{1}{x^2-(a+c)x+ac}, \frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$.

107. 分數式ノ加法及ビ減法.

同一ノ分母ヲ有スル二ツノ分數式ノ和或ハ差ハ其分子ノ和或ハ差ヲ分子トシ共通ノ分母ヲ分母トセル分數式ニ等シ.

$$\text{例令バ } \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} \text{ ニシテ, } \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = \frac{b-c}{a}$$

ナリ.

二ツノ分數式ガ同一ノ分母ヲ有セザルキニハ先ヅ之ヲ通分シ而シテ後上ノ法則ヲ適用スベシ.

$$\text{例令バ } \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc}{ac} + \frac{ad}{ac} = \frac{bc+ad}{ac}$$

二ツ以上ノ分數式ヲ加ヘ或ハ減ズルニハ全ク上述ト同様ニシテ行フヲ得,

即チ先ツ與ヘラレタル諸分數式ヲ通分シ斯クシテ得タル諸分數式ノ分子ニ付キテ所要ノ演算ヲ行フテ得タル結果ヲ分子トシ共通ノ分母ヲ分母トスベシ.

$$\text{例 1. } \frac{a}{x}, \frac{b}{x}, \frac{c}{y} \text{ ノ和ヲ求ム.}$$

$$\text{先ヅ通分スレバ } \frac{ay}{xy}, \frac{by}{xy}, \frac{cx}{xy} \text{ トナル.}$$

因テ所要ノ和ハ

$$\frac{ay+by+cx}{xy} = \frac{(a+b)y+cx}{xy}$$

$$\text{例 2. } \frac{1}{x+a} \text{ ト } \frac{a}{x^2-a^2} \text{ トノ和ヲ求ム.}$$

先ヅ分母ノ最小公倍數ハ x^2-a^2 ナル故ニ通分スレ

$$\text{バ } \frac{x-a}{x^2-a^2}, \frac{a}{x^2-a^2}$$

トナル、之ヲ加フレバ

$$\frac{x-a+a}{x^2-a^2} = \frac{x}{x^2-a^2}$$

之レ所要ノ和ナリ.

$$\text{例 3. } \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+1} \text{ ヲ加ヘ, 其和ヨリ } \frac{x}{x^2-1} \text{ ヲ}$$

減ゼヨ.

$$\text{求ムル處ノ者ハ } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2-1} \text{ ナリ.}$$

與ヘラレタル分數式ノ分母ノ最小公倍數ハ x^2-1 ナル故ニ通分スレバ

$$\frac{x+1}{x^2-1}, \frac{x-1}{x^2-1}, \frac{x}{x^2-1}.$$

トナル、之ニ所要ノ演算ヲ行ヘバ

$$\frac{(x+1)+(x-1)-x}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}.$$

之レ所要ノ結果ナリ。

數多ノ分數式ノ加法或ハ減法ノ符號ヲ以テ連結サレタルモノヲ簡單ニスルトハ、之ヲ一ノ分數式ニ直シ而シテ既約分數式ニ化スルコトイフナリ。

例 4. $\frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b}$ ヲ簡單ニセヨ。

分母ノ最小公倍数ハ a^2-b^2 ナリ。

$$\begin{aligned} \text{因テ } \frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{a+b} &= \frac{ab}{a^2-b^2} - \frac{b(a-b)}{a^2-b^2} \\ &= \frac{ab-b(a-b)}{a^2-b^2} \\ &= \frac{b^2}{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

例 5. $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} + \frac{2a}{a^2+x^2} + \frac{4a^3}{a^4+x^4}$ ヲ簡單ニセ

ヨ。

此ノ如キ場合ニ於テハ總テノ分數式ヲ一時ニ通分シテ加ヘ合ハスヨリモ次ノ如ク順次ニ演算ヲ施行スル方却テ簡單ナリ。

先ヅ初メノ二項ノ和ヲ求メン。

$$\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} = \frac{(a+x)+(a-x)}{a^2-x^2} = \frac{2a}{a^2-x^2}. \dots (1)$$

$$\text{次ニ } \frac{2a}{a^2-x^2} + \frac{2a}{a^2+x^2} = \frac{2a(a^2+x^2)+2a(a^2-x^2)}{a^4-x^4} = \frac{4a^3}{a^4-x^4}. \dots (2)$$

$$\text{次ニ } \frac{4a^3}{a^4-x^4} + \frac{4a^3}{a^4+x^4} = \frac{4a^3(a^4+x^4)+4a^3(a^4-x^4)}{a^8-x^8} = \frac{8a^7}{a^8-x^8}. \dots (3)$$

即チ所要ノ答ハ $\frac{8a^7}{a^8-x^8}$ ナリ。

注意. (1)ニ於テ加ヘ合ハスベキ分數式ト(2)ニ於テ加ヘ合ハスベキ分數式トヲ比格スルニ、(2)ニ於テ $2a$ トイフ共通ノ因數ヲ有スル外ハ形ニ於テハ甚ダ相似タリ、唯(1)ニ於テ a, x トアル代リニ(2)ニ於テハ夫々 a^2, x^2 トアルノミ、故ニ直チニ(1)ノ結果ヨリ(2)ノ結果ヲ書下スコトヲ得ベシ、同様ニシテ(3)ノ結果モ亦直チニ書下スコトヲ得ベシ。

例 6. $\frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+3}$ ヲ簡單ニセヨ。

本題ニ於テモ總テノ分數ヲ一時ニ通分セザルヲ可トス。

先ヅ上例ニ於ケル如ク類似ノ項ヲ集ムベシ。

$$\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9}.$$

$$\begin{aligned} \text{次} &= \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-1} = \frac{3(x-1) - 3(x+1)}{x^2-1} = \frac{-6}{x^2-1} \\ \text{因テ} & \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} + \frac{-6}{x^2-1} \\ &= \frac{6(x^2-1) - 6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)} \\ &= \frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)} \end{aligned}$$

例 7. $\frac{1}{2x^2+x-1} + \frac{1}{3x^2+4x+1}$ ヲ簡單ニセヨ.

先ヅ $\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)}$, $\frac{1}{3x^2+4x+1} = \frac{1}{(3x+1)(x+1)}$

故ニ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x^2+x-1} + \frac{1}{3x^2+4x+1} &= \frac{1}{(2x-1)(x+1)} + \frac{1}{(3x+1)(x+1)} \\ &= \frac{(3x+1) + (2x-1)}{(2x-1)(x+1)(3x+1)} \\ &= \frac{5x}{(2x-1)(x+1)(3x+1)} \end{aligned}$$

例 8. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$ ノ値ヲ求ム.

此式中各分數式ノ分母ノ最小公倍數ヲ見出スニ當リ次ノ事ニ注意スルヲ要ス.

$$(a-c) = -(c-a),$$

$$(b-a) = -(a-b),$$

$$(c-b) = -(b-c).$$

因テ與式ハ次ノ如ク記スルヲ得.

$$\frac{b+c}{(a-b)(c-a)} - \frac{c+a}{(b-c)(a-b)} - \frac{a+b}{(c-a)(b-c)}$$

分母ノ最小公倍數ハ $(a-b)(b-c)(c-a)$ ナルヲ直チニ見出サルベシ.

因テ與式ハ

$$\begin{aligned} &= \frac{-(b+c)(b-c) - (c+a)(c-a) - (a+b)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-(b^2-c^2) - (c^2-a^2) - (a^2-b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \end{aligned}$$

演習問題 35.

次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

1. $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$

3. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}$

5. $\frac{1+x}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}$

7. $a+x + \frac{x^2}{a-x}$

9. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}$

11. $\frac{a-b}{b} + \frac{2a}{a-b} - \frac{a^3+a^2b}{a^2b-b^3}$

13. $\frac{2x}{x-1} - \frac{x}{x+1} + \frac{2x}{x-3}$

15. $\frac{3}{a-x} - \frac{1}{a+x} + \frac{4}{x}$

17. $\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{4x-6} + \frac{2x}{4x^2-9}$

2. $\frac{3a-5y}{4a} + \frac{4y-2a}{3a}$

4. $\frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xy}$

6. $\frac{x}{a(x-a)} - \frac{a}{x(x-a)}$

8. $\frac{a-b}{a^2b} - \frac{a+b}{ab^2}$

10. $\frac{x}{x-y} - \frac{3y}{x+y} + \frac{2xy}{x^2-y^2}$

12. $\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2} + \frac{b-x}{x^2+4}$

14. $\frac{4x}{y} - \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$

16. $\frac{a}{a-x} + \frac{a}{a+x} - \frac{4a^2x^2}{a^4-x^4}$

18. $\frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}$

19. $\frac{1}{x-a} + \frac{x-a}{x^2+ax+a^2} - \frac{a}{x^2-a^2}$.
20. $\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.
21. $\frac{1}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{3}{x+4} - \frac{1}{x+6}$.
22. $\frac{x^2-2x+3}{x^3+1} + \frac{x-2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}$.
23. $\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{x^3+x^2-x-1} + \frac{1}{(x+1)^2}$.
24. $\frac{1}{(x-3)(x-4)} - \frac{2}{(x-2)(x-4)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)}$.
25. $\frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x^2+x+1} + \frac{x-2x^2}{x^3-1}$.
26. $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-xy+y^2} + \frac{2y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$.
27. $\frac{x+y}{ax+y} + \frac{x-y}{ax-y} + \frac{2(ax^2+y^2)}{a^2x^2+y^2}$.
28. $\frac{2a}{(x-2a)^2} - \frac{x-a}{x^2-5ax+6a^2} + \frac{2}{x-3a}$.
29. $\frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{2}{x^2-4x+3} - \frac{3}{x^2-5x+4}$.
30. $\frac{1}{x^2+5x+6} - \frac{2}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+4x+3}$.
31. $\frac{1}{a-2b} - \frac{4}{a-b} + \frac{6}{a} - \frac{4}{a+b} + \frac{1}{a+2b}$.
32. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$.
33. $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$.
34. $\frac{b}{(a-b)(a-c)} + \frac{c}{(b-c)(b-a)} + \frac{a}{(c-a)(c-b)}$.
35. $\frac{z}{(x-y)(x-z)} + \frac{x}{(y-z)(y-x)} + \frac{y}{(z-x)(z-y)}$.

36. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}$.
37. $\frac{a^2bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2ab}{(c-a)(c-b)}$.
38. $\frac{1+x}{(x-y)(x-z)} + \frac{1+y}{(y-z)(y-x)} + \frac{1+z}{(z-x)(z-y)}$.
39. $\frac{p+q-r}{(p-q)(p-r)} + \frac{q+r-p}{(q-r)(q-p)} + \frac{r+p-q}{(r-p)(r-q)}$.
40. $\frac{x^2}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)} + \frac{y^2}{(y^2-z^2)(y^2-x^2)} + \frac{z^2}{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}$.
41. $\frac{x+y}{(p-q)(p-r)} + \frac{y+z}{(q-r)(q-p)} + \frac{z+x}{(r-p)(r-q)}$.
42. $\frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{b^2-(c+a)^2}{(b+c)^2-a^2} + \frac{c^2-(a+b)^2}{(c+a)^2-b^2}$.
43. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-y)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

108. 分數式ノ乘法. 二ツノ分數式

ノ積ハ各分數式ノ分子ノ積ヲ分子トシ,
分母ノ積ヲ分母トセル分數式ニ等シ.

例令バ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ノ積ハ次ノ如シ.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

通常次ノ如クシテ之ヲ證ス.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \times b &= a, \frac{c}{d} \times d = c \text{ ナル故} = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \left(\frac{c}{d} \times d\right) \\ &= a \times c, \text{或ハ} \frac{a}{b} \times b \times \frac{c}{d} \times d = ac, \text{或ハ} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times b \times d \\ &= ac, \text{或ハ} \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times (bd) = ac, \text{故} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

又數多ノ分數式ノ積ハ其總テノ分子ノ積ヲ分子トシ、總テノ分母ノ積ヲ分母トセル分數式ニ等シ。

例令バ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf}$.

例 1. $\frac{4a}{3b}$ ト $\frac{27c}{12a}$ トノ積ヲ求ム。

$$\frac{4a}{3b} \times \frac{27c}{12a} = \frac{4a \times 27c}{3b \times 12a} = \frac{3c}{b}.$$

例 2. $\frac{1-x}{1+2x}$, $\frac{1+x}{1-2x}$, $\frac{2-x}{2+x}$ ノ積ヲ求ム。

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+2x} \times \frac{1+x}{1-2x} \times \frac{2-x}{2+x} &= \frac{(1-x)(1+x)(2-x)}{(1+2x)(1-2x)(2+x)} \\ &= \frac{(1-x^2)(2-x)}{(1-4x^2)(2+x)}. \end{aligned}$$

注意. 此處ニ於テ $(1-x)(1+x)$ ノ代リニ $1-x^2$ ヲ採リ、又 $(1+2x)(1-2x)$ ノ代リニ $1-4x^2$ ヲ採用セリ、去レモ多クノ場合ニ於テハ因數ハ成可ク掛合ハサマルヲ可トス、何トナレバ屢々最後ノ結果ニ於テ其兩項ニ共通ノ因數ヲ約スルヲ生ズベケレバナリ。

109. 分數式ノ除法. 一ノ分數式ヲ

他ノ分數式ニテ除スルニハ除數ノ分子ト分母トノ位置ヲ轉換シテ得ル分數式ヲ以テ被除數ニ乘ズベシ。

例令バ $\frac{a}{b}$ ヲ $\frac{c}{d}$ ニテ除スルニハ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ヲ乘ズベシ。即チ

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \\ &= \frac{ad}{bc}. \end{aligned}$$

除法ハ乘法ノ逆算ナリトイフヲ用井テ容易ニ之ヲ檢證スルヲ得ベシ。一ノ分數式ノ分子ト分母トノ位置ヲ轉換シテ得ル分數式ヲ其分數式ノ反數ト稱ス。

例令バ $\frac{c}{d}$ ノ反數ハ $\frac{d}{c}$ ナリ。

又一ノ整式ハ1ヲ分母ニ有スル分數式ト見ルヲ得ベク、因テ又一ノ整式ノ反數トハ1ヲ分子トシ其整式ヲ分母トセル分數式ヲイフナリ。

例令バ $\frac{1}{a}$ ハ a ノ反數ニシテ $\frac{1}{ax^2+1}$ ハ ax^2+1 ノ反

數ナリ。

上ノ分數式除法ノ定則ハ次ノ如ク言
ヒ表ハスヲ得。

任意ノ分數式ニテ除スルニハ其反數
ヲ乘ズ可シ。

例 1. $b \div \frac{c}{a} = \text{テ除スベシ。}$

$$b \div \frac{c}{a} = \frac{b}{1} \div \frac{c}{a} = \frac{b}{1} \times \frac{a}{c} = \frac{ab}{c}.$$

例 2. $\frac{ax^2}{by^2} \div \frac{ax}{by} = \text{テ除スベシ。}$

$$\frac{ax^2}{by^2} \div \frac{ax}{by} = \frac{ax^2}{by^2} \times \frac{by}{ax} = \frac{x}{y}.$$

例 3. $\frac{abx}{cy} \div bx = \text{テ除スベシ。}$

$$\frac{abx}{cy} \div bx = \frac{abx}{cy} \times \frac{1}{bx} = \frac{a}{cy}.$$

例 4. $\frac{a+4b}{a^2+5ab} \div \frac{ab+4b^2}{a^3+5a^2b} = \text{テ除スベシ。}$

先ヅ $\frac{a+4b}{a^2+5ab} = \text{於テ分母 } a^2+5ab = a(a+5b).$

$$\text{故ニ } \frac{a+4b}{a^2+5ab} = \frac{a+4b}{a(a+5b)}.$$

$$\text{次ニ } \frac{ab+4b^2}{a^3+5a^2b} = \frac{b(a+4b)}{a^2(a+5b)}.$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ } \frac{a+4b}{a^2+5ab} \div \frac{ab+4b^2}{a^3+5a^2b} &= \frac{a+4b}{a(a+5b)} \div \frac{b(a+4b)}{a^2(a+5b)} \\ &= \frac{a+4b}{a(a+5b)} \times \frac{a^2(a+5b)}{b(a+4b)} \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

110. 次ニ複雑ナル分數式ノ例ヲ舉ゲ
ン。

例 1. $a + \frac{ab}{a-b} = b - \frac{ab}{a+b}$ ヲ乘ゼヨ。

$$\text{先ヅ } a + \frac{ab}{a-b} = \frac{a(a-b)+ab}{a-b} = \frac{a^2}{a-b},$$

$$b - \frac{ab}{a+b} = \frac{b(a+b)-ab}{a+b} = \frac{b^2}{a+b}.$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ } \left(a + \frac{ab}{a-b}\right) \times \left(b - \frac{ab}{a+b}\right) &= \frac{a^2}{a-b} \times \frac{b^2}{a+b} \\ &= \frac{a^2b^2}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}. \end{aligned}$$

例 2. $\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}$ ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \div \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)$$

$$= \frac{ad+bc}{bd} \div \frac{ad-bc}{bd}$$

$$= \frac{ad+bc}{bd} \times \frac{bd}{ad-bc}$$

$$= \frac{ad+bc}{ad-bc}.$$

例 3. $\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$ ヲ簡單ニセヨ。

$$\text{先ヅ } \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$\begin{aligned} \text{次} &= 1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} = \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \\ &= \frac{2ab}{(a+b)^2} \\ \text{故} &= \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}} = \frac{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}}{\frac{2ab}{(a+b)^2}} \\ &= \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \div \frac{2ab}{(a+b)^2} \\ &= \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \times \frac{(a+b)^2}{2ab} \\ &= \frac{2(a+b)}{a-b} \end{aligned}$$

例 4. $\frac{x}{1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}}}$ ナ簡單ニセヨ.

$$\begin{aligned} \text{與式} &= \frac{x}{1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}}} = \frac{x}{1 + \frac{x(1-x)}{1+x^2}} \\ &= \frac{x}{\frac{1+x}{1+x^2}} = \frac{x(1+x^2)}{1+x} \end{aligned}$$

演 習 問 題 36.

次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

1. $\frac{a^2}{3c} \times \frac{9bc}{a^2}$, 2. $\frac{4ab}{5c^2} \times \frac{bc}{a^2}$.

3. $\frac{bc}{a^2} \times \frac{ca}{b^2} \times \frac{ab}{c^2}$
4. $\frac{ax}{by} \times \frac{bz}{cx} \times \frac{cy}{az}$
5. $\frac{4bx^3}{3cy^2} \div \frac{2bcx}{acy}$
6. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \div \frac{a}{d}$
7. $\frac{a^2xy^2}{b^2cz^2} \div \frac{ax^2y}{bcz^3}$
8. $\frac{a^2b}{x^2y} \times \frac{b^2c}{y^2z} \times \frac{c^2a}{z^2x}$
9. $24a^2x \div \frac{6b^2y}{7ax^2}$
10. $\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x^2-1}{x^2+1}$
11. $\frac{a-b}{a+2b} \times \frac{a^2-4b^2}{a+b} \times \frac{a+b}{(a-b)^2}$
12. $\frac{ax}{x+a} \times \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a} \right)$
13. $\frac{1}{a^2-b^2} \div \frac{1}{(a+b)^2}$
14. $\frac{4(ax-x^2)}{a(a+x)^2} \div \frac{12x^2}{a(a^2-x^2)}$
15. $\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \times \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$
16. $\left(x + \frac{xy}{x-y} \right) \div \left(y - \frac{xy}{x+y} \right)$
17. $\frac{a^2-4ax}{a^2+4ax} \div \frac{a^2-2ax}{ax+4x^2}$
18. $\frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-4} \times \frac{x-4}{x-1}$
19. $\frac{x^5-y^5}{x^4+2x^2y^2+y^4} \times \frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2} \times \frac{x+y}{x^3-y^3}$
20. $\frac{a^3-x^3}{a^3+x^3} \div \frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}$
21. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \times \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right)$
22. $\frac{a+x}{(a-x)^2} \times \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} \times \frac{a^4-x^4}{(a+x)^3}$
23. $\left(\frac{x^2}{1-x^4} + \frac{2x^4}{1-x^8} \right) \times \left(\frac{x+1}{x} \right)^2$
24. $\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{c^2-a^2-b^2+2ab} \div \frac{a+b+c}{b+c-a}$
25. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9} \times \frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$
26. $\frac{x^2-(y+z)^2}{x^2-(y-z)^2} \times \frac{y^2-(x-z)^2}{y^2-(x+z)^2}$
27. $\left(\frac{x}{yz} - \frac{y}{zx} - \frac{z}{xy} - \frac{2}{x} \right) \times \left(1 - \frac{2z}{x+y+z} \right)$
28. $\frac{x^2+2xy+4y^2}{x^3+y^3} \div \frac{x^3-8y^3}{x^2-xy+y^2}$
29. $\left(\frac{x^4}{a^4} - \frac{a^4}{x^4} \right) \div \left(\frac{x}{a} - \frac{a}{x} \right)$
30. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6} \times \frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3} \times \frac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$

31. $(1 - \frac{2xy}{x^2+y^2}) \div (\frac{x^3-y^3}{x-y} - 3xy)$. 32. $1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$

33. $\frac{x^2-4x+3}{x^2-8x+15} \times \frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+9} \div \frac{x^2-2x+1}{x^2-10x+25}$

34. $\frac{\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{6}}{\frac{11x-5}{7} - \frac{2x-3}{2}}$. 35. $1 - \frac{x}{1-x + \frac{2x^2}{1-x}}$

36. $\frac{a^2x^2-4abxy+4b^2y^2}{a^4x^4-16b^4y^4} \div \frac{a^2x^2-4b^2y^2}{a^2x^2+4b^2y^2}$

37. $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$. 38. $\frac{1}{1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}}}$

39. $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. 40. $\frac{\frac{p}{q} - \frac{q}{r}}{\frac{p}{q} + \frac{q}{r}}$

41. $\frac{1 + \frac{b}{a+b}}{1 - \frac{a}{a-b}}$. 42. $\frac{x-1 + \frac{3}{x-5}}{x+1 + \frac{11}{x-5}}$

43. $\left\{ \frac{a}{a+x} + \frac{a-x}{x} \right\} \div \left\{ \frac{x}{a+x} - \frac{a-x}{x} \right\}$.

44. $(b + \frac{ab}{b-a})(b - \frac{ab}{a+b})(\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2})$.

45. $(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x})(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x}) \div (\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x})(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2})$.

46. $\frac{\frac{x+y}{x+2y} + \frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x} - \frac{y}{x+2y}}$

47. $\frac{4a(a^2-x^2)}{3b(c^2-x^2)} \div \left[\frac{a^2-ax}{bc+bx} \times \frac{a^2+2ax+x^2}{c^2-2cx+x^2} \right]$.

48. $\frac{x^2-x + \frac{x-1}{x+1}}{x + \frac{1}{x+1}}$. 49. $\frac{\frac{x+1}{x-2} - \frac{x+2}{x-4}}{x - \frac{x^2}{x-4}}$

50. $\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2-b^2}}$

51. $(\frac{a^2+b^2}{2ab} - 1) \times \frac{ab^2}{a^3+b^3} \div \frac{4ab(a+b)}{a^2-ab+b^2}$.

52. $(\frac{x^4-1}{x^2-2x+1} \div \frac{x^2+x}{x-1}) \times \frac{x^5-x^3}{x^3+1} \div (x - \frac{1}{x})$.

53. $\frac{\frac{1+x}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^3}}{\frac{1+x^2}{1+x^3} - \frac{1+x^3}{1+x^4}}$. 54. $\frac{\frac{a-x}{a^2+x^2} - \frac{a^2+x^2}{a^3-x^3}}{\frac{a^2-x^2}{a^3+x^3} - \frac{a^3+x^3}{a^4-x^4}}$

55. $\frac{1}{x+y} \div \left[\frac{y}{2} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} \right) \times \frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2} \right]$.

111. 次ノ定理ハ緊要ナリ.

定理. 若シ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \dots$ 等ガ互ニ
相等シキ分數式ナルニハ各式ハ次ノ
分數式ニ等シ.

$$\frac{pa+qc+re+\dots}{pb+qd+rf+\dots}$$

何トナレバ今相等シキ分數式ヲ $x =$
等シトスレバ

$$\frac{a}{b} = x, \frac{c}{d} = x, \frac{e}{f} = x, \dots$$

ナルヲ以テ

$$a=bx, c=dx, e=fx, \dots$$

$$\text{故} = pa=pbx, qc=qdx, re=rfx, \dots$$

之等ヲ加フレバ

$$\begin{aligned} pa+qc+re+\dots &= pbx+qdx+rfx+\dots \\ &=(pb+qd+rf+\dots)x. \end{aligned}$$

故 =

$$\frac{pa+qc+re+\dots}{pb+qd+rf+\dots} = x = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

系. 若シ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$ ナラバ各
分數式ハ又次ノ式ニ等シ.

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$$

之レ本定理ニ於テ $p=q=r=\dots=1$ ナル
場合ナリ.

尙ホ二三ノ例題ヲ次ニ擧ゲン.

例 1. 若シ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ナラバ次ノ三等式ハ常ニ成
立スベシ.

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \dots (1)$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \dots (2)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \dots (3)$$

今 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = x$ トセシ、然ルルハ

$$a=bx, c=dx.$$

ナルヲ以テ

$$\frac{a+b}{b} = \frac{bx+b}{b} = x+1.$$

又

$$\frac{c+d}{d} = \frac{dx+d}{d} = x+1.$$

故 =

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

次 =

$$\frac{a-b}{b} = \frac{bx-b}{b} = x-1.$$

$$\frac{c-d}{d} = \frac{dx-d}{d} = x-1.$$

故 =

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

次 =

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{bx+b}{bx-b} = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$\frac{c+d}{c-d} = \frac{dx+d}{dx-d} = \frac{x+1}{x-1}.$$

故 =

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

例 2. 若シ a, b, c ガ相等シカラズシテ

$$\frac{b-c}{x} = \frac{c-a}{y} = \frac{a-b}{z}$$

ナルルニハ

$$x+y+z=0 \quad \text{及} \quad ax+by+cz=0.$$

ナルヲ證セヨ.

先ヅ

$$\frac{b-c}{x} = \frac{c-a}{y} = \frac{a-b}{z} = p$$

トセシ、然ルルハ

$$b-c=xp, c-a=yp, a-b=zp. \dots\dots(1)$$

又此等ノ等式ヨリ

$$a(b-c)=axp, b(c-a)=byp, c(a-b)=czp. \dots(2)$$

(1)ノ各式ヲ加フレバ

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=xp+yp+zp.$$

或ハ $0=(x+y+z)p.$

$p \neq 0$ ナル故ニ

$$x+y+z=0.$$

又(2)ノ各式ヲ加フレバ

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=(ax+by+cz)p.$$

或ハ $0=(ax+by+cz)p.$

$p \neq 0$ ナル故ニ

$$ax+by+cz=0.$$

例 3. $x = \frac{a+b}{2}$ ナルニ次式ノ値ヲ求ム.

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}.$$

先ヅ $x-a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{1}{2}(b-a).$

$$x-b = \frac{a+b}{2} - b = \frac{1}{2}(a-b).$$

故ニ $\frac{x-a}{x-b} = \frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\frac{1}{2}(a-b)} = -1.$

又 $x-2a+b = \frac{a+b}{2} - 2a + b = \frac{1}{2}(b-a).$

$$x+a-2b = \frac{a+b}{2} + a - b = \frac{3}{2}(a-b).$$

故ニ $\frac{x-2a+b}{x+a-2b} = \frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\frac{3}{2}(a-b)} = -1.$

因テ $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b} = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0.$

演 習 問 題 37.

次ノ諸式ヲ簡單ニセヨ.

1. $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) \div \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2-y^2}\right).$

2. $\frac{1}{y} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+2y}\right) - \frac{2}{x^2+xy-2y^2}.$

3. $\frac{2}{x^3-x^2+x-1} - \frac{2}{x^3+x^2+x+1}.$

4. $\frac{x^2-12x+32}{2x^3-21x^2+30x+80}.$

5. $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)(x+y) - \left(\frac{x+y}{p} - \frac{x-y}{q}\right).$

6. $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2} \div \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right).$

7. $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}} \left(1 + \frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right).$

8. $\frac{x}{2} \left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right) \times \frac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2} \div \frac{1}{x+y}.$

9. $\left\{ \frac{b + \frac{a-b}{1+ab}}{1 - \frac{(a-b)b}{1+ab}} - \frac{a - \frac{a-b}{1-ab}}{1 - \frac{a(a-b)}{1-ab}} \right\} \div \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$

10. 若シ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ ナラバ

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2.$$

ナ ル ㄱ ヲ 證 セ ヨ.

11. 若シ $\frac{x}{a-b} = \frac{y}{b-c} = \frac{z}{c-a}$ ナラバ
 $x+y+z=0.$

ナ ル ㄱ ヲ 證 セ ヨ.

12. 若シ $\frac{y+z}{ay+bz} = \frac{z+x}{az+bx} = \frac{x+y}{ax+by}$ ナラバ各分數式

ハ $\frac{2}{a+b}$ ニ 等 シ キ ㄱ ヲ 證 セ ヨ.

13. $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ ナル ㄱ ニ ハ
 $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z.$

ノ 値 如 何.

14. $x = \frac{2b^2 - a^2 + d^2}{3a}$ 及 $y = \frac{2a^2 - b^2 + d^2}{3b}$ ナル ㄱ ニ ハ
 $\frac{a}{b+y} = \frac{b}{a+x}.$

ナ ル ㄱ ヲ 證 セ ヨ.

15. 次式ヲ簡單ニセヨ.

$$\left\{ \frac{(a-b)^3}{(a+b)} + 3 \frac{(a-b)^2}{(a+b)} + 3 \frac{(a-b)}{(a+b)} + 1 \right\} \div \left\{ \frac{(a+b)^3}{(a-b)} + 3 \frac{(a+b)^2}{(a-b)} + 3 \frac{a+b}{a-b} + 1 \right\}.$$

16. 次式ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{(a+b-c)^2 - d^2}{(a+b)^2 - (c+d)^2} + \frac{(b+c-a)^2 - d^2}{(b+c)^2 - (a+d)^2} + \frac{(c+a-b)^2 - d^2}{(c+a)^2 - (b+d)^2}.$$

17. $x = \frac{ab}{a+b}$ ナル ㄱ $\frac{a-2x}{b-2x}$ ノ 値 ヲ 求 ム.

18. $x+y = \frac{4cd}{c+d}$ ナル ㄱ 次式ノ 値 ヲ 求 ム.

$$\frac{x+y+2c}{x+y-2c} + \frac{x+y+2d}{x+y-2d}.$$

19. $x = \frac{3y}{4}$ ナラバ次式ノ 値 如 何.

$$\frac{y}{y+x} + \frac{x}{y-x} - \frac{x^2}{y^2-x^2}.$$

20. $x = \frac{a+1}{ab+1}, y = \frac{ab+a}{ab+1}$ ナラバ次式ノ 値 如 何.

$$\frac{x+y-1}{x-y+1}.$$

第九章 分數方程式及ビ雜論.

112. 分數方程式. 本章ニ於テハ一
次方程式ニテ解キ得ベキ場合ノミヲ取
扱フベシ.

例 1. $\frac{x+4}{3x-8} = \frac{x+5}{3x-7}$ ヲ解ク.

分母ノ最小公倍数ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$(x+4)(3x-7) = (x+5)(3x-8).$$

或ハ $3x^2 + 5x - 28 = 3x^2 + 7x - 40.$

$$2x = 12.$$

故ニ $x = 6.$

注意. 此例ニ於ケル如ク一ノ方程式
ガ公約數ヲ有セザル分母ヲ有スル處ノ
二ツノ分數式ヨリ成ルキニハ, 甲ノ分子
ニ乙ノ分母ヲ乘ジ乙ノ分子ニ甲ノ分母
ヲ乘ジテ分母ヲ取去レバ分母ノ最小公
倍数ヲ乘ジテ整化シタルトナルナリ.

例 2. $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{x+5}$ ヲ解ク.

分母ノ最小公倍数ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$(x+3)(x+5) + 2(x+5)(x-3) = 3(x-3)(x+3).$$

或ハ $x^2 + 8x + 15 + 2x^2 + 4x - 30 = 3x^2 - 27.$

$$12x = -12.$$

故ニ $x = -1.$

例 3. $\frac{2x-5}{5} + \frac{x-3}{2x-15} = \frac{4x-3}{10} - \frac{11}{10}$ ヲ解ク.

本題ノ如キ場合ニハ分母ノ最小公倍
數ヲ一時ニ乘ズルハ得策ニアラズ, 次ノ
如キ順序ヲ以テ其形ヲ簡單ニスルヲ可
トス.

先ヅ 10 ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$4x-10 + \frac{10x-30}{2x-15} = 4x-3-11.$$

或ハ $\frac{10x-30}{2x-15} = -4.$

2x-15 ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$10x-30 = -8x+60.$$

或ハ $18x = 90.$

故ニ $x = 5.$

例 4. $\frac{25-\frac{x}{3}}{x+1} + \frac{16x+4\frac{1}{3}}{3x+2} = 5 + \frac{23}{x+1}$ ヲ解ク.

項ヲ移セバ

$$\frac{16x+4\frac{1}{3}}{3x+2} - 5 = \frac{23}{x+1} - \frac{25-\frac{x}{3}}{x+1}.$$

或ハ
$$\frac{x-5\frac{1}{3}}{3x+2} = \frac{\frac{x}{3}-2}{x+1}$$

分母ノ最小公倍数ヲ乗シテ整化スレバ

$$x^2 - 5\frac{1}{3}x + x - 5\frac{1}{3} = x^2 + \frac{2}{3}x - 6x - 4.$$

或ハ
$$\frac{2}{15}x = \frac{9}{5}$$

故ニ
$$x = 3\frac{3}{8}$$

例 5.
$$\frac{x-8}{x-10} + \frac{x-4}{x-6} = \frac{x-5}{x-7} + \frac{x-7}{x-9}$$
 ヲ解ケ.

分母ヲ拂ヒ去ルヲ即チ整化スルヲニヨリテモ此方程式ヲ解クヲ得レモ、次ノ如クスレバ其解法ハ簡單ナリ.

即チ項ヲ移セバ

$$\frac{x-8}{x-10} - \frac{x-5}{x-7} = \frac{x-7}{x-9} - \frac{x-4}{x-6}.$$

兩邊ヲ別々ニ簡約スレバ

$$\frac{(x-8)(x-7) - (x-5)(x-10)}{(x-10)(x-7)} = \frac{(x-7)(x-6) - (x-4)(x-9)}{(x-9)(x-6)}.$$

或ハ

$$\frac{x^2 - 15x + 56 - x^2 + 15x - 50}{(x-10)(x-7)} = \frac{x^2 - 13x + 42 - x^2 + 13x - 36}{(x-9)(x-6)}.$$

或ハ
$$\frac{6}{(x-10)(x-7)} = \frac{6}{(x-9)(x-6)}.$$

此兩邊ニ於テ分子相等シキ故ニ分母モ亦相等シカラザル可カラズ.

故ニ
$$(x-10)(x-7) = (x-9)(x-6).$$

或ハ
$$x^2 - 17x + 70 = x^2 - 15x + 54.$$

$$16 = 2x.$$

故ニ
$$x = 8.$$

又次ノ如クシテモ解クヲ得.

與ヘラレタル方程式ハ次ノ如ク書キ表ハスヲ得.

$$\frac{(x-10)+2}{x-10} + \frac{(x-6)+2}{x-6} = \frac{(x-7)+2}{x-7} + \frac{(x-9)+2}{x-9}.$$

故ニ
$$1 + \frac{2}{x-10} + 1 + \frac{2}{x-6} = 1 + \frac{2}{x-7} + 1 + \frac{2}{x-9}.$$

或ハ
$$\frac{1}{x-10} + \frac{1}{x-6} = \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-9}.$$

項ヲ移セバ

$$\frac{1}{x-10} - \frac{1}{x-7} = \frac{1}{x-9} - \frac{1}{x-6}.$$

故ニ
$$\frac{3}{(x-10)(x-7)} = \frac{3}{(x-9)(x-6)}.$$

餘ハ前ノ如シ.

例 6.
$$\frac{5x-8}{x-2} + \frac{6x-44}{x-7} = \frac{10x-8}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$$
 ヲ解ケ.

除法ニヨツテ

$$5 + \frac{2}{x-2} + 6 - \frac{2}{x-7} = 10 + \frac{2}{x-1} + 1 - \frac{2}{x-6}.$$

或ハ
$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-7} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-6}.$$

$$\frac{-5}{(x-2)(x-7)} = \frac{-5}{(x-1)(x-6)}.$$

故ニ兩邊ノ分母ハ相等シカルベシ.

$$\text{即チ} \quad (x-2)(x-7)=(x-1)(x-6).$$

$$\text{或ハ} \quad x^2-9x+14=x^2-7x+6.$$

$$8=2x.$$

$$\text{故ニ} \quad x=4.$$

例 7. 次ノ一組ノ方程式ヲ解ケ.

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{5y+4}, \quad \frac{1}{2x-3} = \frac{2}{7y-6}.$$

整化スレバ

$$5y+4=3x+2, \quad 7y-6=4x-6.$$

$$\text{或ハ} \quad 5y-3x+2=0, \quad 7y-4x=0.$$

トナル. 此一組ノ聯立方程式ヲ解ケバ

$$x=14, \quad y=8.$$

注意. 分數方程式ヲ解クニ當リ未知數ヲ含メル分母ヲ乘ジテ整化スルトハ未知數ハ此分母ヲ0ニ等シクスル如キ値ヲ有セズトイフ假定ニ據ルナリ.

演 習 問 題 38.

次ノ方程式ヲ解ケ.

$$1. \quad \frac{3x-1}{11} - \frac{2(x-1)}{5} = \frac{2-x}{10}.$$

$$2. \quad \frac{x+4}{3x-8} = \frac{x+5}{3x-7}.$$

$$3. \quad \frac{3-4x}{6} - \frac{5-8x}{12} = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$4. \quad \frac{x-4}{2x+5} = \frac{3x+1}{6x+5}.$$

$$5. \quad \frac{5x-7}{1+x} = \frac{15x-11}{1+3x}.$$

$$6. \quad \frac{1}{3x+9} + \frac{2}{5x+1} = \frac{2}{x+3}.$$

$$7. \quad \frac{1}{4x+12} - \frac{3}{4x+1} = \frac{2}{x+3}.$$

$$8. \quad \frac{3}{x+3} - \frac{4}{2x-4} = \frac{1}{x-1}.$$

$$9. \quad \frac{6x+13}{15} - \frac{3x+5}{5x-25} = \frac{2x}{5}.$$

$$10. \quad \frac{6x}{x-7} - \frac{x}{x-6} = 5.$$

$$11. \quad \frac{1}{\frac{5}{2}x+4} - \frac{1}{\frac{3}{2}x+2} = \frac{1}{x+6}.$$

$$12. \quad \frac{2}{3x-1} - \frac{1}{2x+2} = \frac{1}{6x-1}.$$

$$13. \quad \frac{6x+8}{2x+1} - \frac{2x+38}{x+12} = 1.$$

$$14. \quad \frac{x}{x+4} - \frac{8}{x+16} = 1.$$

$$15. \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{8}{x}.$$

$$16. \quad \frac{2x-5}{5} + \frac{x-3}{2x-15} = \frac{4x-14}{10}.$$

$$17. \quad \frac{3x}{x+1} - \frac{2x-1}{x-1} + \frac{9}{2x+1} = 0.$$

$$18. \quad \frac{8x}{x^2-1} = \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}.$$

$$19. \quad \frac{4}{2x+3} - \frac{2}{2x+1} = \frac{5}{4x+6} - \frac{2\frac{1}{2}}{4x+2}.$$

$$20. \quad \frac{4}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 0.$$

$$21. \quad \frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x-8}{x-6} + \frac{x+1}{x-1}.$$

$$22. \quad \frac{x-3}{x-4} - \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}.$$

$$23. \quad \frac{2x+5}{2x+4} - \frac{2x-6}{2x-7} = \frac{2x-4}{2x-5} - \frac{2x-15}{2x-16}.$$

$$24. \quad \frac{x+7}{x+9} - \frac{x+9}{x+11} = \frac{x+13}{x+15} - \frac{x+15}{x+17}.$$

$$25. \quad \frac{2x+3}{x+3} + \frac{2x+27}{x+15} = \frac{2x+9}{x+6} + \frac{2x+21}{x+12}.$$

$$26. \quad \frac{x+2}{x} + \frac{x-7}{x-5} = \frac{x+3}{x+1} + \frac{x-6}{x-4}.$$

$$27. \quad \frac{x-a}{x+b} + \frac{x-b}{x+a} = 2.$$

28. $\frac{4x-17}{x-4} + \frac{10x-13}{2x-3} = \frac{8x-30}{2x-7} + \frac{5x-4}{x-1}$.
29. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2,$ 30. $2x-4y=7,$
- $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 9.$ $\frac{2x}{3y} + \frac{11}{10} = \frac{8x-5y}{5y}.$
31. $x-2y=1,$ 32. $\frac{1}{2x+3y} = \frac{1}{5x-y},$
- $\frac{x+1}{y+1} - \frac{x-2}{y} = \frac{1}{y}.$ $\frac{1}{x-4} = \frac{1}{2y-8}.$
33. $\frac{x+y-3}{x-5} + 7 = 0,$ 34. $4x+y=11,$
- $\frac{6y-10(x-1)}{x-2y} + \frac{6}{x-2y} + \frac{3}{2} = 0.$ $\frac{y}{5x} = \frac{7x-y}{3x} - \frac{23}{15}.$
35. $\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-b}{x+b} = \frac{2(a+b)}{x}.$ 36. $\frac{a+c}{x+2b} + \frac{b+c}{x+2a} = \frac{a+b+2c}{x+a+b}.$
37. $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{2}{x+a+b}.$ 38. $\frac{a-x}{a+x} + \frac{4ax}{a^2-x^2} + \frac{a+x}{a-x} = 1.$

113. 應用問題. 次ニ二三ノ應用問題ノ解方ヲ示サン.

例 1. 上中下ノ雞卵アリ, 上ハ一圓ニ付キ中ヨリモ十個少ナク, 下ハ三圓ニ付キ中ヨリモ五十個多ク購求スルヲ得, 且ツ中卵ノ價ハ上下兩種ノ平均價額ニ等シトイフ, 仍テ間フ一圓ニ付キ幾個ノ中卵ヲ購求スルヲ得ルカ.

x ヲ以テ一圓ニテ購求シ得ル處ノ中卵ノ數ヲ表ハサン, 然ルルハ上卵一個ノ價ハ $\frac{1}{x-10}$ 圓ニシテ下卵一個ノ價ハ $\frac{3}{3x+50}$ 圓ナルベシ, 且ツ上下兩種各一個ノ價ノ平均ハ中卵一個ノ價即チ $\frac{1}{x}$ 圓ニ等シカルベキヲ以テ

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-10} + \frac{3}{3x+50} \right) = \frac{1}{x}.$$

故ニ整化スレバ

$$x(3x+50) + 3x(x-10) = 2(x-10)(3x+50).$$

$$\text{或ハ } 3x^2 + 50x + 3x^2 - 30x = 6x^2 + 40x - 1000,$$

$$20x = 1000.$$

$$\text{故ニ } x = 50.$$

即チ一圓ニ付キ中卵ハ五十個購求スルヲ得.

例 2. 汽車アリ甲停車場ヲ發シテ等速度ヲ以テ進行シ數時間ノ後乙停車場ニ到着セリ, 若シ其速度毎時6哩丈ケ大ナルキニハ4時間速ク到着シ, 又若シ其速度毎時6哩丈ケ小ナルキニハ6時間遅ク到着スベシトイフ, 甲乙兩處ノ距離ヲ問フ.

汽車ノ速度ヲ毎時 x 哩ナリトシ、 y ヲ以テ甲ヨリ乙ニ至ルニ要セシ時間數ヲ表ハサシ、然ルルハ兩處ノ距離ハ xy 哩ナルベシ、今第一ノ場合ニ於テハ毎時 $x+6$ 哩ノ速度ヲ有スルルニ要スル時間ハ $y-4$ 時間ナルヲ以テ兩處ノ距離ハ $(x+6)(y-4)$ 哩ニ等シカルベク、第二ノ場合ニハ毎時 $x-6$ 哩ノ速度ヲ以テ走ルトキニハ $y+6$ 時間ヲ要ス可キヲ以テ兩處ノ距離ハ又 $(x-6)(y+6)$ 哩ナルベシ、故ニ

$$xy = (x+6)(y-4) = (x-6)(y+6).$$

此方程式ヨリ次ノ二式ヲ得.

$$\begin{aligned} xy &= (x+6)(y-4) \\ &= xy + 6y - 4x - 24. \end{aligned}$$

或ハ $6y - 4x = 24. \dots\dots\dots (1)$

及ヒ $xy = (x-6)(y+6)$
 $= xy - 6y + 6x - 36.$

或ハ $6x - 6y = 36. \dots\dots\dots (2)$

(1)及ヒ(2)ノ一組ノ聯立方程式ヲ解キテ次ノ根ヲ得.

$$x = 30, \quad y = 24.$$

故ニ $xy = 720.$

即チ所要ノ距離ハ720哩ナリ.

例 3. 一ノ分數ノ分母ハ分子ヨリモ4丈ケ大ナリ、今分子及ヒ分母ノ各ヨリ5ヲ減ジテ得タル分數ノ反數ト原分數ノ四倍トノ和ハ5ニ等シトイフ、原分數ヲ求ム.

原分數ノ分子ヲ x ニテ表ハサシ、然ルルハ此分數ハ $\frac{x}{x+4}$ ナル可ク、又此分母及ヒ分子ノ各ヨリ5ヲ減シテ得タル分數ノ反數ハ $\frac{x-1}{x-5}$ ナルベシ、故ニ題意ニヨリテ

$$\frac{x-1}{x-5} + 4 \cdot \frac{x}{x+4} = 5.$$

整化スレバ

$$(x-1)(x+4) + 4x(x-5) = 5(x-5)(x+4).$$

或ハ $x^2 + 3x - 4 + 4x^2 - 20x = 5x^2 - 5x - 100.$

$$12x = 96.$$

故ニ $x = 8.$

即チ原分數ハ $\frac{8}{12}$ ナリ.

演 習 問 題 39.

1. 一分數アリ其分子ヨリ3ヲ減ズレバ $\frac{1}{2}$ トナリ、其分母ニ9ヲ加フレバ $\frac{1}{3}$ トナルトイフ、此分數ヲ求ム.

2. 或分數ノ分子ニ5ヲ加ヘ分母ヨリ4ヲ減シテ得ル分數ハ其分子ノ二倍ニ3ヲ加ヘ分母ノ二倍ヨリ11ヲ減シテ得ル分數ニ等シク、此分數ノ分母ヨリ3ヲ減シタルモノハ $\frac{1}{3}$ ニ等シトイフ、此分數ヲ求ム。

3. 甲乙ノ兩市二十四里ノ距離ヲ以テ一河ノ同沿岸ニ在リ、今一旅客甲ヲ發シテ乙ニ向ヒ最初ノ半行程ハ舟ニ依リ、後半行程ハ陸上ヲ進ミ乙ニ達スル迄ニ $17\frac{1}{2}$ 時間ヲ費シタリ、然ルニ歸途ニハ同様ニ路ヲ選ミシカニ陸行ニハ前ノ $\frac{1}{4}$ ノ速度ヲ以テ進ミタル爲メ15時間ニテ甲ニ歸着セリトイフ、陸行及ビ舟行ノ速度ヲ求ム。

4. 一分數ノ分母ニ3ヲ加ヘ分子ニ1ヲ加ヘテ得ル分數ハ此分數ノ分母ヨリ6ヲ減シ分子ヨリ8ヲ減シテ得ル分數ニ等シク、又此分數ノ分子ヨリ3ヲ減シ分母ニ1ヲ加ヘテ得ル分數ハ其分子ヨリ5ヲ減シ分母ヨリ2ヲ減シテ得ル分數ニ等シトイフ、此分數ヲ求ム。

5. 上中下三種ノ砂糖アリ、上二斤下一斤ノ値ノ和ハ中三斤ノ値ニ等シク、且ツ金拾三圓二十錢ヲ以テハ中ハ上ヨリモ十斤多ク買フヲ得、又此三倍ノ

金高ニテハ下ハ中ヨリモ八十斤多ク購求スルヲ得トイフ、仍テ問フ金拾三圓二十錢ニテハ幾斤ノ上砂糖ヲ購求スルヲ得ルカ。

6. 長サ92呎ノ列車ト長サ84呎ノ列車トガ一定ノ速度ヲ以テ並行セル線路ニ沿フテ進行セルアリ、若シ二列車ノ方向相反スルニハ始メ相逢フテヨリ相別ル、迄一秒半ヲ費スベク、若シ其方向同一ナルニハ速キ列車ガ遅キ列車ニ追及シテヨリ全ク之ヲ抜キ越ス迄ニ六秒ヲ費スベシトイフ、二列車ノ速度各如何。

7. 十六里ノ河流ヲ上下スルニ十時間ヲ要ス、而シテ五時間漕ギ上ル行程ハ三時間漕ギ下ル行程ニ等シトイフ、河流ヲ漕ギ上ル時間及ビ漕ギ下ル時間幾何、又問フ水手ノ漕グ速サ及ビ水流ノ速サ幾何。

8. 二輪自轉車アリ、百二十「メートル」ノ距離ヲ行ク間ニ前輪ハ後輪ヨリモ十二回餘計轉廻ス、又若シ前輪ノ周圍ノ長サヲ其四分ノ一丈ケ増シ後輪ノ周圍ノ長サヲ其五分ノ一丈ケ増スニハ同距離ヲ行ク間ニ前輪ハ後輪ヨリモ八回餘計ニ廻轉ストイフ、前後ノ輪ノ周圍ノ長サヲ求ム。

9. 荷物列車甲地ヲ出發シテヨリ一時間ヲ經テ

旅客列車が同方向ニ出發セリ、然ルニ乙地マデノ全距離ノ五分ノ三ヲ行キタル時荷物列車ハ其汽罐ニ損所ヲ生シタル爲メ其速度ヲ半減シテ進行セシニ出發後二時間ノ後乙地ヲ距タル八里ノ處ニテ旅客列車ニ追附カレタリトイフ、但シ旅客列車ノ速度ハ荷物列車ノ初メノ速度ノ二倍ナリトイフ、甲乙兩處ノ距離及ビ旅客列車ノ速度如何。

10. 汽車アリ一時間進行セル後漏罐ニ損處ヲ生シタル爲メ二十四分間停車シ、其後ハ前ノ $\frac{3}{4}$ ノ速度ヲ以テ進ミシニ定刻ヨリハ十五分後レテ目的地ニ到着セリ、若シ汽罐ノ破損ヲシテ尙ホ五哩進ミシ後ニ起ラシメバ其上尙ホ二分後レテ到着スベシトイフ、汽車ノ初メノ速度及ビ進行セシ距離ヲ問フ。

一次方程式雜論.

114. 一次方程式ノ根ノ吟味. 一ノ未知數 x ヲ含ム一次方程式ハ一般ニ次ノ形ヲ有スルコトハ既ニ知ル處ナリ.

$$\text{即チ} \quad ax=b.$$

此處ニテ a, b ハ既知數ナリ.

此方程式ノ根ハ明カニ

$$x=\frac{b}{a}.$$

ナリ. 偕 a, b ガ種々ノ格段ナル値ヲ有スルキニハ此根モ亦格段ナル値ヲ有スベシ、今次ニ其場合ヲ區別シテ攻究セン.

(i). $a \neq 0, b=0$ ナル場合. 此時ニハ $x=\frac{0}{a}$ ナル故ニ $x=0$ ナリ.

(ii). $a=0, b=0$ ナル場合. 此時ニハ x ノ値ハ $\frac{0}{0}$ トナル、偕 $\frac{0}{0}$ ハ如何ナルモノナルヤハ未タ知ラザル處ナリ、左レニ與ヘラレタル方程式ハ此場合ニ於テ

$$0 \cdot x=0$$

トナル、此式ニ於テ x ニ如何ナル數ヲ與フルモ兩邊ハ常ニ 0 トナリ此方程式ニ適合スルヲ以テ x ノ値ハ限無ク存ス、即チ其値ハ不定ナリ、從ツテ $\frac{0}{0}$ ナル式ヲ以テ不定ノ形トイフナリ.

(iii). $a=0, b \neq 0$ ナル場合. 此時ニハ與

ヘラレタル方程式ハ

$$0.x=b.$$

トナル、偕 x = 如何ナル値ヲ與フルモ $0.x$ ハ 0 トナリ而シテ $b \neq 0$ ナル故ニ此方程式ニ適合スル x ノ値ハナシ。

此ノ如キ場合ニハ方程式ハ不能ナリトイフナリ。

115. 一次方程式 $ax=b$ ノ根ハ一ツ有リテ且ツ唯一ツナリ、但シ $a \neq 0$ ナリトス。

此方程式ニ適合スル x ノ値ハ $\frac{b}{a}$ ナリ、即チ根ハ一ツアルナリ。

次ニ α, β ナル二ツノ根ヲ有スト假定セン、然ルキハ

$$a.\alpha=b,$$

$$a.\beta=b.$$

ナルベク、兩式ノ差ヲ求ムレバ

$$a(\alpha-\beta)=0.$$

偕テ $a \neq 0$ ナル故ニ $\alpha-\beta=0$ 、即チ $\alpha=\beta$ ナ

ラザルベカラズ、因テ根ノ數ハ唯一ツナリ。

116. 二ツノ未知數ヲ有スル聯立一次方程式。

此一般ナル形ハ次ノ如シ。

$$ax+by+c=0, \dots\dots\dots(1)$$

$$a'x+b'y+c'=0. \dots\dots\dots(2)$$

a, b, c, a', b', c' 等ハ何レモ既知數ナリ。

注意. a', b', c' ノ如ク文字ニ (') ナル記號ヲ附シタルモノハ代數學ニ於テ屢々用井ラル、ナリ、其ハ斯クスルキハ至極便利ナル事アルヲ以テナリ、例令バ此處ニ於テハ同文字ニ (') ナ附シタルモノハ同ジ未知數ノ係數ヲ表ハセルナリ。

又時ニハ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots\dots$ ノ如キ記號ヲ用ウルヲアリ。

(1) 式ノ兩邊ニ b' ヲ乘ジ、(2) 式ノ兩邊ニ b ヲ乘ジテ得ル二式ヲ相減ズレバ

$$(ab' - a'b)x = bc' - b'c.$$

故 = $x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}.$

次 = (1) 式ノ兩邊 = a' ナ乗ジ, (2) 式ノ兩邊 = a ナ乗ジテ得ル二式ヲ相減ズレバ

$$(ab' - a'b)y = ca' - c'a.$$

故 = $y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$

因テ與ヘラレタル方程式ノ根トシテ

$$x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

ヲ得.

此結果ヲ記憶シ置クキニハ二ツノ未知數ヲ含ム聯立一次方程式ヲ解クニ甚ダ便利ナリ.

十字法. 與ヘラレタル方程式ト其根トヲ再記スレバ

方程式 $\left. \begin{array}{l} ax + by + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{array} \right\} \dots\dots\dots(1)$

根 $x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b} \dots\dots\dots(2)$

ナリ. (2) ナ見ルニ x, y ノ分母ハ相等シ,

故ニ此共通ノ分母ト二ツノ分子トノ三式ヲ記憶スレバ可ナリ.

x ノ答數ノ分子ハ(1)ニ於テ x ノ行ハ無キモノト考ヘ, 其右ニ隣レル行ノ上ノ係數 b ナ筋違ニ既知數 c' ニ乗ジ, 其積 bc' ヨリ他ノ筋違ヒニ乗ジテ得ル積 $b'c$ ナ減ジタルモノナリ. 次ニ y ノ分子ハ(1)ニ於テ y ノ行ヲナキモノト考ヘ, 其右ニ隣レル上ノ數 c ヨリ初メ筋違ヒニ乗ジテ得ル積 ca' ヨリ他ノ筋違ヒニ乗ジテ得ル積 $c'a$ ナ減ジタルモノナリ. 最後ニ共通ノ分母ハ常數項(未知數ヲ含マザル項タイプ)ノ行即チ c ノ行ハナキモノト考ヘ, 右ニ隣レル行ヲキ故ニ前ニ戻リテ x ノ行ノ上ノ係數即チ a ヨリ筋違ヒニ係數ヲ乗ジテ得ル積 ab' ヨリ他ノ筋違ヒニ乗ジテ得ル係數ノ積 $a'b$ ナ減ジタルモノナリ.

此ノ如ク筋違ヒニ積ヲ取リテ分子及

ビ分母ヲ作ル故ニ之ヲ十字法ト名ヅク。

此方法ヲ以テ x, y ノ値ヲ示ス公式ヲ記憶スルヲ得ベシ。

注意. 此處ニ於テ得タル x, y ノ分數式ノ形ノ値ハ $ab'-a'b \neq 0$ ト假定シテ得タルモノナリ。

117. ニツノ未知數ヲ有スル聯立一次方程式ノ根ノ吟味。

$ab'-a'b \neq 0$ ナルキニハ x, y ハ各一個ノ一定ノ値ヲ有ス可ク其場合ハ別ニ吟味セザル可シ, 次ニ吟味セントスル處ハ $ab'-a'b=0$ ナル場合ナリ。

(I). $ab'-a'b=0, b'c-bc' \neq 0$ ナル場合. 此時ニハ方程式ハ不能ナリ。

(II). $ab'-a'b=0, b'c-bc'=0$ ナル場合. 此時ニハ x ノ値ハ不定ナリ。

(III). $ab'-a'b=0, ac'-a'c \neq 0$ ナル場合. 此

時ニハ方程式ハ不能ナリ。

(IV). $ab'-a'b=0, ac'-a'c=0$ ナル場合. 此時ニハ y ノ値ハ不定ナリ。

此處ノ(I)及ビ(III)或ハ(II)及ビ(IV)ハ何レモ同時ニ起ルベキモノナリ. 今次ニ之ヲ詳説セン。

$$ab'-a'b=0 \text{ ナル故ニ} \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

此分數式ガ各 q ニ等シトスレバ

$$a=a'q, \quad b=b'q.$$

故ニ與ヘラレタルニツノ方程式ハ

$$q(a'x+b'y)=-c, \\ a'x+b'y=-c'.$$

トナル, 故ニ此二方程式ノ同時ニ成立ツ爲メニハ $c=c'q$ ナルヲ要ス, 偕 $q=\frac{a}{a'}$ 故ニ $c=c'\frac{a}{a'}$ 或ハ $ac'-a'c=0$ 又 $q=\frac{b}{b'}$, 故ニ $c=c'\frac{b}{b'}$ 即チ $b'c-bc=0$ ナルヲ要ス, 即チ(II)ト(IV)トハ同時ニ起ルナリ, 且ツ此場合ニハ

第一ノ方程式ハ第二ノ方程式ニ或常數 q ナ乗ジテ得ラル、モノナルヲ以テ二ツノ方程式ハ唯一ツノ方程式ニ歸ス、故ニ此場合ニハ根ノ値即チ x, y ノ値ハ不定ナリ。

若シ $c \neq c'q$ ナラバ $ac' - a'c \neq 0$ 、同時ニ $bc' - b'c \neq 0$ ナリ、即チ (I) 及ビ (III) ハ同時ニ起ルナリ、且ツ此場合ニハ二ツノ方程式ハ同時ニ成立ツヲ得ズ即チ方程式ハ不能ナリ。

以上ハ a, a', b, b' ガ夫々 0 ニアラズトシテ論ジタリ、一々此等ノ係數ノ 0 ニ等シキキヲ論ズベキナレト此場合ハ容易ナルヲ以テ之ヲ略ス、學生等宜シク演習問題トシテ試ムベシ。

演 習 問 題 40.

次ノ 1 ヨリ 8 迄ノ方程式ヲ解ク。

1. $ax+b=(b-c)x+a+c.$ 2. $\frac{1}{ax+c}=\frac{1}{bx+c}.$
3. $\{ax+(bx-cx-d)\}=cx+d.$
4. $lx(mx+n)=(lx+n)(mx+l).$
5. $(a-x)(b-x)=(c-x)(d-x).$
6. $\frac{a-b}{x}=\frac{c-d}{x-1}.$ 7. $ax-by=a^2, bx-ay=b^2.$

$$8. \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1, \frac{b}{x} + \frac{a}{y} = 1.$$

次ノ 9 ヨリ 12 迄ノ方程式ヲ吟味セヨ。

9. $(ax+b)(cx+d)=ax(cx+c)+cx(b-a)+d(ax+b).$
10. $\frac{a+b}{x+c}=\frac{2a}{x+d}+\frac{2b-(a+b)}{x+d}.$
11. $px+q=2px-q-(px-2q).$
12. $x+l+(2x-3m)=3x+4n-l-m.$

公式ヲ用ニテ次ノ 13 ヨリ 20 迄ノ方程式ヲ解ク。

13. $2x+y=4, 10x-4y=2.$
14. $\frac{1}{2}x+y+1=0, 7x-2y-34=0.$
15. $x-6y-1=0, 3x-7y+8=0.$
16. $2x-6y-3=0, 8x+3y-3=0.$
17. $ax+by=0, bx-ay=a^2+b^2.$
18. $x-y=a, ax+by=a^2-ab-b^2.$
19. $ax-dy=b-c, abx+cdy=b^2+c^2.$
20. $(a+b)x+y=a+c, (b+c)x+ay=a^2+ac,$

次ノ方程式ヲ吟味セヨ。

21. $3x+7y=1, 2x+3y+5=8-x-4y.$

22. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{1}{6}, \frac{1}{2}x-y+3=x-\frac{4}{3}y+4.$

23. $31x=8y-4, 62x-16y+8=0.$

24. $\frac{1}{x+3}=\frac{1}{y-1}, \frac{1}{y-3}=\frac{1}{x+1}.$

25. $ax+by=a+b, a(cx+b-c)+b(cy-a-c)=0.$

26. $\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+y}=0, \frac{2}{a+b+x}+\frac{1}{a-b+\frac{1}{2}y}=0.$

答

演 習 問 題 1.

1. ⁽¹⁾ 12; ⁽²⁾ 3; ⁽³⁾ 11; ⁽⁴⁾ 1068; 2. ⁽¹⁾ 9; ⁽²⁾ 14; ⁽³⁾ 56; ⁽⁴⁾ 3.
 3. ⁽¹⁾ 10; ⁽²⁾ 137; ⁽³⁾ 42; ⁽⁴⁾ 0; ⁽⁵⁾ 17; ⁽⁶⁾ 26; ⁽⁷⁾ 51.
 4. ⁽¹⁾ 40; ⁽²⁾ 39; ⁽³⁾ 121.

演 習 問 題 2.

1. ⁽¹⁾ 14, x; ⁽²⁾ 3, a, x; ⁽³⁾ 5, b, y; ⁽⁴⁾ $\frac{1}{4}$, a, b; ⁽⁵⁾ 7, x, y, z;
⁽⁶⁾ 24, a, b, d, y, z; ⁽⁷⁾ $\frac{1}{10}$, b, c, x, y.
 2. ⁽¹⁾ 12ac; ⁽²⁾ 5abxz; ⁽³⁾ 18bcx; ⁽⁴⁾ 77ahluxz; ⁽⁵⁾ 14ac.
 3. ⁽¹⁾ 2ac; ⁽²⁾ 15axz; ⁽³⁾ 9abc; ⁽⁴⁾ 2acxy; ⁽⁵⁾ 105acd; ⁽⁶⁾ 37akmx.
 4. xノ係數:—問題1ニテハ ⁽¹⁾ 14; ⁽²⁾ 3a; ⁽⁵⁾ 7yz; ⁽⁷⁾ $\frac{1}{10}bcy$;
 2ニテハ ⁽²⁾ 5abz; ⁽³⁾ 18bc; ⁽⁴⁾ 77ahluz; 3ニテハ ⁽²⁾ 15az;
⁽⁴⁾ 2acy; ⁽⁵⁾ 105acd; ⁽⁶⁾ 37akm: yノ係數:—1ニテハ
⁽³⁾ 5b; ⁽⁵⁾ 7xz; ⁽⁶⁾ 24abdz; ⁽⁷⁾ $\frac{1}{10}bcx$; 3ニテハ ⁽⁴⁾ 2acx;
 zノ係數:—1ニテハ ⁽⁵⁾ 7xy; ⁽⁶⁾ 24abdy; 2ニテハ
⁽²⁾ 5abx; ⁽⁷⁾ 77ahlux; 3ニテハ ⁽²⁾ 15ax: yzノ係數:—1ニ
 テハ ⁽⁵⁾ 7x; ⁽⁶⁾ 24abd: xzノ係數:—1ニテハ ⁽⁵⁾ 7y; 2ニ

テハ $(2) 5ab$; $(4) 77ahlu$; 3 ニテハ $(2) 15a: xy$ ノ係數: -1
 ニテハ $(5) 7z$; $(7) \frac{1}{10}bc$; 3 ニテハ $(4) 2ac: xyz$ ノ係數: -1
 ニテ $(5) 7$.

5. 1 ニテハ $(1) 14$; $(2) 3$; $(3) 5$; $(4) \frac{1}{4}$; $(5) 7$; $(6) 24$; $(7) \frac{1}{10}$; 2
 ニテハ $(1) 12$; $(2) 5$; $(3) 18$; $(4) 77$; $(5) 14$; 3 ニテハ $(1) 2$;
 $(2) 15$; $(3) 9$; $(4) 2$; $(5) 105$; $(6) 37$.

演 習 問 題 3.

- $(1) a^5$; $(2) b^3c^2$; $(3) abc^3$; $(4) xy^5$.
- $(1) 1, 1, 2$; $(2) 2, 2$; $(3) 1, 4, 8$; $(4) 3, 5$; $(5) 1, 2, 3, 1$.
- 係數: $(1) 13$; $(2) 7$; $(3) 8$; $(4) 1$; $(5) 3$; $(6) 9$; $(7) 1$.
 指數: $(1) 4$; $(2) 7$; $(3) 5$; $(4) 3$; $(5) 4$; $(6) 7$; $(7) 1$.
- 1 ニテハ $(1) 5$; $(2) 5$; $(3) 5$; $(4) 6$; 2 ニテハ $(1) 4$; $(2) 4$;
 $(3) 13$; $(4) 8$; $(5) 7$; 3 ニテハ $(1) 4$; $(2) 7$; $(3) 5$; $(4) 3$; $(5) 4$;
 $(6) 7$; $(7) 1$.
- $\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[4]{x}$; $\sqrt[n]{x}$; $\sqrt[3]{y}$; $\sqrt[4]{y}$; $\sqrt[n]{y}$; $\sqrt[3]{z}$; $\sqrt[4]{z}$; $\sqrt[n]{z}$.

演 習 問 題 4.

1. 11. 2. 3. 3. 16. 4. 3. 5. 6. 6. 180.
 7. 750 8. 24. 9. 30. 10. 11. 11. 60. 12. 128.
 13. 3. 14. 3. 15. 5. 16. $\frac{1}{2}$. 17. 21. 18. $\frac{4}{3}$.

19. 45. 20. 57250. 21. 14000. 22. 600. 23. 31.
 24. $2\frac{95}{168}$. 25. $\frac{37}{144}$. 26. $\frac{9}{16}$. 27. 145.

演 習 問 題 5.

1. -2 . 2. -26 . 3. 26. 4. -1 . 5. -6 . 6. 17.
 7. 7. 8. -23 . 9. $(1) -30$; $(2) 91$; $(3) 372$; $(4) -8$;
 $(5) 100$.
 10. $-71, -9, -4, 0, 5, 23, 41, 90$.
 11. $-300, -100, -35, -23, 7, 76, 500$.

演 習 問 題 6.

1. -77 . 2. 153. 3. -161 . 4. $(-3) \times 6 < (4-14)$.
 5. -16 . 6. -493 . 7. $(1) -32$; $(2) -25$; $(3) -80$; $(4) 94$.
 8. $(1) -11$; $(2) 7$.

演 習 問 題 7.

1. 八十 2. 一里 3. 三時間前.
 4. 甲ノ背后四間. 乙ノ初メノ位置ヨリ十二間.
 5. 千七百圓.

演 習 問 題 8.

1. $8abc - 2bd.$
2. $x^2 - 2xy - y^2.$
3. $a^2b^2 + b^2c^2 + x^4 - y^4 - z^4.$
4. $2lm - 17ln - 3mn.$
5. $13kx^3 - 2ly^3 + 11mz^3.$
6. $-10x^4 - 3y^4 + 6z^4 - 5y^2z^2 - 4x^2z^2 + 13x^2y^2.$
7. $-3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 9x - 2.$
8. $ab + bc + ca.$
9. $0.$
10. $a^4 + a^2b^2 - 4b^4.$

演 習 問 題 9.

1. $3a + 2b - 4c + 8d.$
2. $-3l - 4m + 5n.$
3. $12a + 14b - 14c - 5d.$
4. $-21x + 20y + 7z.$
5. $13x^3 + 18ax^2 - a^2x + 5a^3.$
6. $-12x^3 - 6x^2 + 8x - 2y^2.$
7. $10x^4 + 10x^2y^2 - y^4.$
8. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$
9. $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$

演 習 問 題 10.

1. $4a + 16c.$
2. $-a + b + 3c.$
3. $ab - 9bc + 2ac.$
4. $y^2 - 5x^2 - 4.$
5. $3ab - b^2.$
6. $5x^2 - 21xy + 3y^2 + 5z^2$
7. $5x^3 - x^2y + 5y^3.$
8. $15x^4 + 4x^3y - x^2y^2 + 13y^4.$

9. $-5y^2 - \frac{6}{11}xy + \frac{5}{8}x^2.$
10. $b^3 - 3ab^2 + 6abc - 3a^2b - a^3.$
11. $2 - 19x - 3x^2 + 3x^3.$
12. $-a^3 + 3a^2b - ab^2 - b^3.$

演 習 問 題 11.

1. $-2c.$
2. $a - a^3.$
3. $x - 7y - z.$
4. $2a + 2b - c.$
5. $-2a + 11b.$
6. $x - 2y - z.$
7. $a + 13b + 8c.$
8. $7x - 6y - 2.$
9. $3a.$
10. $16x - 11y.$
11. $y^4 - 10y^3 + 14y^2.$
12. $3l + m - 2n.$
13. $pq - 4qr + 5.$
14. $-2x^3 + x^2 - 7x.$

演 習 問 題 12.

1. $6abc.$
2. $-4b^3c^2.$
3. $-7a^2bc^3.$
4. $-6a^2b^2c^2.$
5. $3x^3y^2z^3.$
6. $-12a^3b^3x^3y^3.$
7. $24p^2q^2r^2.$
8. $\frac{3}{2}x^3y^4z^3.$
9. $15abcx^2y^2z^2.$
10. $7abx^3y^3.$
11. $-12a^3b^3xy.$
12. $14a^7b^3x^4y^4.$
13. $-9a^3b^3c^3d^3.$
14. $\frac{1}{2}abp^3q^3r^4.$
15. $3l^2m^2n^2x.$
16. $21bclmxy.$
17. $30a^3x^6y^3.$
18. $-7a^3b^3x^6y^4.$
19. $-a^2bcd^2.$

演 習 問 題 13.

1. $a^3b - a^2b^2.$
2. $-2ac - 6bc + 2c^2.$
3. $-2xyz - 2y^2z + 2y^2z^2.$

4. $-2lxy + mxy + 3nxy.$ 5. $-8ax^2y^2z + 12a^2xy^2z.$
 6. $a^5b^2c - 5a^4b^3c - 3a^3b^4c^2.$ 7. $-2a^3bc + 2ab^3c + 2abc^3.$
 8. $10x^3yz - 14x^2y^2z + 12xy^3z.$ 9. $-7a^3b^4x^4 + 6ab^5cx^5 - 3a^2b^3c^3x^2y^2.$
 10. $l^3m^2n - lm^2n^3 + l^2mn^3.$ 11. $2p^3q^3r^3 - 3p^2q^3r^3 + 6p^3q^2r^3.$
 12. $\frac{5}{3}a^6b^4 - 2a^5b^5 - \frac{4}{3}a^4b^6.$ 13. $7ax^4y^3 - 3bx^3y^4.$
 14. $3a^5b^5 - 5a^4b^6.$ 15. $-2x^6 + \frac{1}{2}x^5 - x^4 - \frac{7}{6}x^3 + x^2.$
 16. $3a^3x^5y^2 - 7a^4x^3y^4 + \frac{2}{7}a^3x^5y^5.$
 17. $14p^3q^3r^2 - \frac{2}{2}p^3q^3r^4 + \frac{3}{2}p^3q^3r^4 - \frac{1}{2}p^3q^3r^3.$

演 習 問 題 14.

1. $a^2 - 2ac - b^2 + c^2.$ 2. $2a^2x^2 - abxy - b^2y^2.$
 3. $x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - y^3.$ 4. $8x^4 - 14x^3 - 7x^2 + 19x - 6.$
 5. $17ax^5 - a^2x^4 - 16a^3x^3 - 3a^4x^2 - a^5x + 4a^6.$
 6. $-27x^5 + 90x^5 - 29x^4 - 49x^3 + 15x^2 + 8x + 10.$
 7. $75a^5b^3 - 30a^4b^4 + 68a^3b^5 - 13a^2b^6 + 12ab^7.$
 8. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$ 9. $x^6 - 2x^3 + 1.$
 10. $a^6 - a^5b - 2a^4b^2 - 2a^3b^3 - ab^5 + b^6.$
 11. $\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{14}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{8}.$
 12. $-\frac{1}{6}a^5b^2 - \frac{1}{4}a^4b^3 + \frac{3}{2}a^3b^4 - \frac{1}{6}a^2b^5.$
 13. $a^3b^3 - a^2b^2cd - abc^2d^2 + c^3d^3.$
 14. $23x^6 - \frac{2}{3}x^5y + 40x^4y^2 + 3x^3y^3 - \frac{2}{2}x^2y^4 + \frac{1}{4}xy^5 - y^6.$

演 習 問 題 15.

1. $x^5 + a^2x^3 - a^3x^2 - a^5.$ 2. $x^5 - 9x^4 + 20x^3 - 6x^2 + 6x + 3.$
 3. $p^5 + p^4q - pq^4 - q^5.$ 4. $a^4x^4 + a^2x^2y^2 + y^4.$
 5. $8x^3 + 27y^3 + z^3 - 18xyz.$ 6. $a^3 + 8b^3 - 27c^3 + 18abc.$
 7. $16a^2b^4 + 4a^4b^4c^4 + b^4c^8.$
 8. $5x^{10} - 25x^9 - 7x^8 + 39x^7 - 41x^6 + 15x^5 - 42x^4 + 65x^3 - 4x^2$
 $+ 14x - 11.$
 9. $-105x^{10} + 15x^9 + 273x^8 - 228x^7 + 26x^6 - 70x^5 - 43x^4 + 62x^3$
 $- 14x^2 + 10x - 6.$
 10. $x^3 + 3xy + y^3 - 1.$ 11. $x^2 - 64.$
 12. $x^2 - 8x + 15.$ 13. $a^2 - 4b^2.$ 14. $a^2 - 6ac + 5c^2.$
 15. $x^2 + 6x - 27.$ 16. $a^2 + 9a + 8.$ 17. $4x^2 - 1.$
 18. $9x^2 - y^2.$ 19. $9a^2 - 9ab - 4b^2.$ 20. $6a^2 - 11ac + 3c^2.$
 21. $x^2 + 4xz - 12z^2.$ 22. $3x^2 - 10xy + 3y^2.$ 23. $x^2 + ax - 2a^2.$
 24. $6a^2x^2 - ax - 1.$ 25. $6x^2 - 16xy - 6y^2.$
 26. $6a^2y^2 + acyz - c^2z^2.$ 27. $2a^2x^4 - ax^3 - 1.$
 28. $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - a^4.$ 29. $a^2 - b^2 - 2bc - c^2.$
 30. $4a^2 - 9b^2 - 6bc - c^2.$ 31. $x^4 - 3x^2y^2 + y^4.$
 32. $a^2x^2 + 2acxz - b^2y^2 + c^2z^2.$
 33. $x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 3xy^2 - 3xz^2 - 3y^2z - 3yz^2 + 3xyz.$

34. $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2$
 $+ 8abcd.$
35. $x^6 - 4x^5y + 15x^4y^2 + 2x^3y^3 - 9x^2y^4 - 28xy^5 - 16y^6.$
36. $-a^6x^6 + 3a^5bx^5y - 2a^4b^2x^4y^2 - a^3b^3x^3y^3 + 2a^2b^4x^2y^4 - ab^5xy^5 - b^6y^6.$
37. $x^5 - y^5.$ 38. $a^5x^5 - 2a^4x^4y^4 + y^5.$
39. $256a^8 + 16a^4x^4 + a^8.$ 40. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$
41. $a^4x^5 - 6a^5x^7 + 7a^6x^6 + 6a^7x^5 + a^8x^4.$
42. $4a^6 + 9b^6 + c^6 - 4a^4bc + 6ab^4c + 2abc^4 - 12a^3b^3 - 4a^3c^3 + 6b^3c^3$
 $+ a^2b^2c^2.$
43. $a^5 - 2a^4b^4 - 6a^4b^2c^2 + 9b^4c^4 + 6b^6c^2 + b^8.$
44. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^4 - c^4.$ 45. $x^5 - x^4y^4 - 4x^2y^6 - 4y^8.$
46. $a^5 + 2(b^2 - 1)a^6 + (b^4 - 4b^2 + 1)a^4 - 2(b^4 - b^2)a^2 + b^4.$
47. $a^3x^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + b^3y^3.$
48. $a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b + 3ab^2 - 3a^2c + 3ac^2 - 3b^2c + 3bc^2 - 6abc.$
49. $x^5 - y^5 + z^5 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 3x^4z^2 + 3x^2z^4 + 3y^4z^2 - 3y^2z^4 - 6x^2y^2z^2.$
50. $a^3x^3 + b^3y^3 + c^3z^3 + 3a^2bx^2y + 3ab^2xy^2 + 3a^2cx^2z + 3ac^2xz^2 + 3b^2cy^2z$
 $+ 3bc^2yz^2 + 6abcxyz.$

演 習 問 題 16.

1. $-6.$ 2. $2a.$ 3. $-\frac{3x}{a}.$ 4. $-2ax.$

5. $-\frac{4z}{x}.$ 6. $6a.$ 7. $-7bc^2.$ 8. $\frac{a}{2x}.$
9. $-4xy^2.$ 10. $\frac{2yz}{x}.$ 11. $-\frac{5x}{b}.$ 12. $2a^2x^4y^4z.$
13. $-5m^2n^5.$ 14. $3apq.$ 15. $-\frac{6z^3}{x^2y}.$ 16. $xy - 3y^2.$
17. $-x - 3a.$ 18. $-\frac{1}{2}x^2 + 5xy.$ 19. $6b^2 - 2ab - 3a^2.$
20. $-ax^2 + 4a^2x + 2x.$ 21. $-\frac{6a}{7x} - \frac{3}{2}.$
22. $\frac{x}{15} + \frac{z}{60} - \frac{y}{6}.$

演 習 問 題 17.

1. $x - 2.$ 2. $x - 2y.$ 3. $a - 6.$
4. $ax + 11.$ 5. $3ax + 1.$ 6. $x^2 - 2xy + y^2.$
7. $4xy + xz - 3yz.$ 8. $4ax^2 - a^2x + a^3.$ 9. $x^2 + ax - 6a^2.$
10. $2x^2 - 3b^2.$ 11. $x^3 - xy^2 - 3y^3.$ 12. $x^2 - 3ax + a^2.$
13. $a^3 - 3a^2x + 5ax^2 - x^3.$ 14. $x^2 - x - 2.$
15. $x^3 - x^2y - 2xy^2 - y^3.$

演 習 問 題 18.

1. $x + 4.$ 2. $x - 2.$ 3. $3m - 1.$
4. $a^2 - 1.$ 5. $x^4 + x^2 + 1.$ 6. $x^2 - 2x + 3.$
7. $2x - a.$ 8. $1 - 4a.$ 9. $2x^2 + 3x.$

10. $3x^3 - x - 4$. 11. $l^3 - 2l^2 + l + 1$. 12. $-ca - ab - bc$.
13. $x^3 - 11ax^2 - 3a^2x + 13a^3$. 14. $x^2 + 5x + 6$.
15. $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$. 16. $x^4 - 2x^2 - 4x + 1$.
17. $2ax^2 + a^2x - a^3 + \frac{3a^4x + 4a^5}{x^2 - ax + 3a^2}$.
18. $5x^2 + 5$ † 剩餘 $20x^2 + 76$.
19. $7a + 1$ † 剩餘 $3a^2 + 31a - 20$.
20. $x^2 + xy + y^2$ † 剩餘 $-x^2 + y - y^2$.
21. $x^6 + 2x^5y - 3x^4y^2 - 6x^3y^3 + 2x^2y^4 + 4xy^5 + y^6$.
22. $x^4 - 2x^3y + 3x^2y^2 - 6xy^3 + 9y^4$ † 剩餘 $-12xy^5 - 8y^6$.
23. $7x^3 + 2x + 3$ † 剩餘 $4x - 10$.
24. $x^2 + 2y^2$ † 剩餘 $-6x^2y^4 + 12y^6$.
25. $x^2 - x + 1$ † 剩餘 $2x^2 - 3x$. 26. $x - y + z$.
27. $x^2 - bx + b^2$. 28. $4a^2 - 2ab + b^2$.
29. $5x^2 - 4xy + y^2$. 30. $a^4 - 4a^3b + 16a^2b^2 - 24ab^3 + 16b^4$.
31. $7x^2 - 2ax + 4a^2$. 32. $3x^2 + 3ax + a^2$.
33. $40x^3 + 16ax^2 + 8a^2x$.
34. $(a-b)^4 + (a-b)^3(c-d) + (a-b)^2(c-d)^2 + (a-b)(c-d)^3 + (c-d)^4$.
35. $5x^2 + 5a^2$. 36. $x^3 - 4x^2 - x + 15$.
37. $a^2x - b^2y + c^2z$. 38. $a + b + c$.
39. $x^2 + x(y+z) + y^2 + yz + z^2$. 40. $x + y + z$.
42. $k = 1$.

演 習 問 題 19.

- | | | | |
|----------------------|-----------|---------------|--------------------------------|
| 1. 6. | 2. 3. | 3. 5 | 4. 2. |
| 5. 4. | 6. 11. | 7. 7. | 8. $\frac{1}{3}$. |
| 9. 3. | 10. 11. | 11. 1. | 12. -1. |
| 13. 2. | 14. 13. | 15. 3. | 16. 5. |
| 17. 1. | 18. 2. | 19. 9. | 20. 4. |
| 21. $-\frac{1}{3}$. | 22. 2. | 23. 1. | 24. $\frac{54}{1}$. |
| 25. 6. | 26. 2. | 27. 2. | 28. $\frac{a}{2}$. |
| 29. $b - a$. | 30. a . | 31. $a + b$. | 32. $\frac{1}{3}(a + b + c)$. |
| 33. $\frac{bc}{a}$. | | | |

演 習 問 題 20.

- | | | | |
|----------------------------|--|---------------|-----------------------|
| 1. 1. | 2. 7. | 3. 7. | 4. -1. |
| 5. 5. | 6. $6\frac{3}{4}$. | 7. 8. | 8. $-11\frac{6}{7}$. |
| 9. 7. | 10. 7. | 11. 4. | 12. 3. |
| 13. 2. | 14. 28. | 15. 3. | 16. 16. |
| 17. 2. | 18. -23. | 19. 20. | 20. 2. |
| 21. 2. | 22. 5. | 23. $a - b$. | 24. $-\frac{pr}{q}$. |
| 25. $\frac{1}{2}(a + b)$. | 26. $\frac{4(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$. | | |

演 習 問 題 21.

1. 52, 38. 2. 4. 3. 十二圓卜廿四圓.
 4. 56, 39. 5. 十三圓. 6. 60, 26. 7. 24.
 8. 甲七十個, 乙拾個. 9. 7. 10. 父六十才, 子十二才.
 11. 甲 565 圓, 乙 270 圓, 丙 140 圓. 12. 420.
 13. 甲 70 圓, 乙 28 圓, 總額 98 圓.
 14. 甲 140 圓, 乙 90 圓, 丙 70 圓.
 15. 五年前. 16. 一斗二升. 17. 7, 4. 18. 20 圓.
 19. 甲 250 個, 乙 150 個, 丙 100 個.
 20. 甲 40 圓, 乙 15 圓, 丙 13 圓, 丁 10 圓.
 21. 男三圓, 女一圓, 子供五十錢. 22. $32\frac{8}{11}$ 分.
 23. 5 日. 24. 四時間半. 25. 三十六才.
 26. 一里半. 27. 十二才, 九才, 六才, 三才.
 28. 百四十圓.
 29. 甲 100 圓, 乙 200 圓, 丙 300 圓, 丁 500 圓. 30. 50, 51.
 31. 甲 90 圓, 乙 30 圓. 32. 一圓五十錢.
 33. $21\frac{9}{11}$ 分 或 $43\frac{7}{11}$ 分. 34. 二十日.
 35. 長男 672 圓, 次男 336 圓, 女 168 圓.
 36. 酒精八斗五升. 水六斗五升. 37. 3, 16, 11, 30.

38. 甲 480 日, 乙 360 日, 丙 288 日. 39. 1024 人.
 40. 一圓銀貨 20 個, 五十錢銀貨 5 個, 五錢白銅貨 5 個.
 41. 240 飛. 42. 1000 人. 43. 300 圓. 44. 六坪.
 45. 四十射. 46. 十二日. 47. 55 人. 48. 3 秒.
 49. 4.9 町. 50. 一圓八十錢ノ茶百廿斤, 一圓二十錢
 ノ茶百八十斤, 五十錢ノ茶六十斤.
 51. 192 人. 52. 甲三百圓, 乙二百圓.

演 習 問 題 22.

1. 2, 1. 2. -3, 2. 3. 1, -2. 4. 5, 7.
 5. -1, -5. 6. 7, 5. 7. 8, 12. 8. 7, 9.
 9. 3, -2. 10. 13, 11. 11. 25, -11. 12. 17, 7.
 13. 6, 12. 14. 10, 12. 15. 1, -1. 16. 3, -2.
 17. 21, 33. 18. 2, -2. 19. 4, 7. 20. 19, 23.
 21. 10, -5.

演 習 問 題 23.

1. 2, 1. 2. 4, 3. 3. 5, -2. 4. 1, 2.
 5. 1, -3. 6. 6, -5. 7. 12, -6. 8. 1, -1.
 9. c, a. 10. a, c. 11. a, b.
 12. a+c, a-c.

演 習 問 題 24.

1. 3, 1, 2. 2. 2, -1, 3. 3. 11, 3, -5.
 4. 7, 4, 1. 5. -1, -2, -3. 6. 17, 21, -5.
 7. 11, -11, 2. 8. 17, 19, 23. 9. -1, -1, 2.
 10. 1, -2, 4. 11. 3, 2, -1. 12. $\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}$.
 13. 1, 2, 5. 14. 2, -4, 6. 15. 4, 1, -3, -1.
 16. 5, -6, 7, -8. 17. $\frac{1}{2}(b+c-a), \frac{1}{2}(c+a-b), \frac{1}{2}(c-a-b)$.
 18. $\frac{a}{2}, b, c$.
 19. $\frac{1}{3}(b+c+d-2a), \frac{1}{3}(c+d+a-2b), \frac{1}{3}(d+a+b-2c),$
 $\frac{1}{3}(a+b+c-2d)$.

演 習 問 題 25.

1. 甲 12, 乙 8. 2. 甲 56 圓, 乙 43 圓. 3. 34.
 4. 豚肉十錢, 牛肉廿錢. 5. 牝牛八頭, 羊五十頭.
 6. 竿ノ長サ 12 尺, 二ツノ部分ノ長サ 7 尺ト 5 尺.
 7. 23, 32. 8. 五拾錢銀貨五個, 貳拾錢銀貨拾個,
 拾錢銀貨拾五個.
 9. 大人廿五人, 小兒四十人.
 10. 馬車 150 貫, 牛車 200 貫. 11. 38.

12. 上粉 10 斤, 下粉 35 斤.
 13. 一位ノ數ハ十位ノ數ノ二倍ニ等シ.
 14. 甲廿日, 乙十六日. 15. 大豆十四錢, 小豆十五錢.
 16. 男工廿五錢, 女工十六錢.
 17. 48 坪, 96 坪, 144 坪.
 18. 上卷 450 頁, 中卷 360 頁, 下卷 390 頁.
 19. 236. 20. 甲 18 個, 乙 15 個, 丙 12 個.
 21. 三分五厘利附株券廿四枚, 四分利附株券九枚.
 22. 一万八千圓. 23. $11\frac{1}{3}$ 分間.
 24. 甲 42 日, 乙 70 日, 丙 35 日.
 25. 急行車 36 哩, 普通車 24 哩. 26. 60.
 27. 甲 56 才, 乙 42 才.
 28. 一分間 = 甲ハ 200 間, 乙ハ 180 間. 29. 860.

演 習 問 題 26.

1. $(2x+1)^2$. 2. $(6a-1)^2$. 3. $(ax-3)^2$. 4. $(1+7y)^2$.
 5. $(3a-2b)(3a+2b)$. 6. $(5x-a)^2$. 7. $(3x-2)^2$.
 8. $(7+2y)^2$. 9. $(2ab-5c)^2$. 10. $(ax-9by)^2$.
 11. $(2x^2+6)^2$. 12. $(x+2y)(3x-2y)$. 13. $\left(x^2+\frac{a^2}{2}\right)^2$.
 14. $(x+3y)(3x+y)$. 15. $5(5y-2a)^2$. 16. $(x+a)(5x-a)$.
 17. $(5a^2x^2+2y^2)^2$. 18. $(6ax-2by)(6ax+2by)$.

19. $(x - \frac{y}{2})^2$, 20. $3x(x-7a)^2$. 21. $(x^3 - 2y^2)(x^3 + 2y^2)$.
 22. $(1+y+y^2)(1+3y+y^2)$. 23. $(lx^2 - 2)^2$.
 24. $(x-y+z)^2$. 25. $(a-2b+c)^2$. 26. $(a+b-3c)(a+b+c)$.
 27. $8(a-b)(2a+b)$. 28. $4(x+y)(2x-y)$.
 29. $(by-ax)(3ax-by)$. 30. $(ax-by+2cz)(ax+3by-2cz)$.
 31. $16(x-y)^2$. 32. $(x-2y+z)(3x-5z)$.
 33. $(2cz-by)(2ax+by-4cz)$. 34. $(x^2-x+1)^2$.
 35. $(3x^4-6x^2-4)(3x^4-2x^2+2)$. 36. $(a-3b+5c)(7a+b-c)$.
 37. $(7xy-a^2-b^2)^2$.
 38. $(x+z)(x-z+2b)(x^2+z^2+2bx-2bz+2b^2)$.

演 習 問 題 27.

1. $(x-2)(x-3)$. 2. $(x-5)(x+4)$. 3. $(a-4)(a+6)$.
 4. $(x-3a)(x-4a)$. 5. $(x-b)(x+13b)$. 6. $(ax-4)(ax+7)$.
 7. $(x-2)(3x+1)$. 8. $(5x+1)(5x-8)$. 9. $(3x-1)(5x-2)$.
 10. $(ax-1)(a^2x^2+ax+1)$. 11. $(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$.
 12. $(2y^2+7)(2y^2-8)$. 13. $(x-y-z)(x-y-2z)$.
 14. $(a+b)(7a^2-13ab+7b^2)$.
 15. $5(ax-by)(13a^2x^2+abxy+13b^2y^2)$.
 16. $(y-2)(7y+11)$. 17. $(a^2-xy)(a^4+a^2xy+x^2y^2)$.
 18. $(a+x)(5a-8x)$. 19. $(5x^2-yz)(25x^4+5x^2yz+y^2z^2)$.

20. $2(ax-1)(3ax-2)$. 21. $(3y^2+2)(7y^2-1)$.
 22. $(a^2x+5)(a^2x-12)$. 23. $(2xy-5)(3xy+7)$.
 24. $2(ax+1)(7ax+6)$. 25. $(l-1)(l+1)(2l^2+3)$.
 26. $(5-y)(15y-2)$. 27. $(5ax-4by)(7ax-2by)$.
 28. $(x+2a)(2x-9a)$. 29. $-(5x+a)(43x^2-50ax+19a^2)$.
 30. $(3a^2-2b)(5a^2-3b)$. 31. $(3ax^2-4)(9ax^2+2)$.
 32. $2(2x^2+y^2)(14x^2-3y^2)$.

演 習 問 題 28.

1. $a^2(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$. 2. $x^2(p-3)(p^2+3p+9)$.
 3. $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$.
 4. $(4-2ab+a^2b^2)(4+2ab+a^2b^2)$.
 5. $(p^2-4pq-q^2)(p^2+4pq-q^2)$.
 6. $(2m^2-9mn-n^2)(2m^2+9mn-n^2)$.
 7. $(x-y)(x+y)(x-5y)(x+5y)$. 8. $(x+a)(x^2+ay)$.
 9. $(x+y)(ax+by)$. 10. $(2ax-3b)(3ab-2x)$.
 11. $(x^2-9bx+81b^2)(x^2+9bx+81b^2)$.
 12. $(x-2y)(x+2y)(x-3y)(x+3y)$.
 13. $(x-3)(x-1)(x+1)$. 14. $(x-y)(z-w)$.
 15. $(4x^2-6xy+y^2)(4x^2+6xy+y^2)$. 16. $(a-c)(a+c)(a^2+b^2+c^2)$.
 17. $(1-ax_2)(1+ax^2+bx^2)$. 18. $(3x-5y)(3x+5y)(9x^2+25y^2)$.

19. $(a^2x^2 - 4abxy + 16b^2y^2)(a^2x^2 + 4abxy + 16b^2y^2)$.
 20. $(ax + ay - bx + by)(ax - 3ay - bx - 3by)$.
 21. $(x - 2z)(x + 2z)(x^2 + 4z^2)(x^4 + 16z^4)$.
 22. $(a - b - c + d)(a + b - c - d)$.
 23. $(5xy - y^2 - z^2)(5xy + y^2 + z^2)$. 24. $(a + b)(b^2 + 1)$.
 25. $(x - y)(z - w)(z + w)$. 26. $(x^2 + y^2)^2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$.
 27. $(a - 8)(a + 8)(a + 1)$.
 28. $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)(x + 1)(x^2 - x + 1)$.
 29. $(a - 2x)(a^2 + x^2)(a^2 + 2ax + 4x^2)(a^4 - a^2x^2 + x^4)$.
 34.

演 習 問 題 29.

1. ab^2c^2 . 2. xyz^2 . 3. $27a^2x^2$. 4. abx^2y .
 5. m^2n^3 . 6. pq^2r^2 . 7. $a - b$. 8. $x - y$.
 9. $x - y$. 10. $x^2 + x + 1$. 11. $x - b$. 12. $3x - 4$.
 13. $(a - b)(b - c)x$. 14. $x^2yz(y - 2z)$. 15. $a + 3b$.
 16. $2x - 1$. 17. $z(x - y)$. 18. $l - 3m$. 19. $ax - 4by$.
 20. $5x + 3$. 21. $(x - a)^2$. 22. $x^2 + xy + y^2$.

演 習 問 題 30.

1. $x - 2$. 2. $x^2 - x - 1$. 3. $x + 3$. 4. $x + 3$.

5. $a^2 + 2a + 1$. 6. $x + 1$. 7. $2x - y$.
 8. $x^2 - 3x + 5$. 9. $2x^2 - 7$. 10. $3x^2 + 1$.
 11. $x^2 - 3ax + 2a^2$. 12. $2x^2 - 3$. 13. $a + 3$.
 14. $3am^2 + 2a^3$. 15. $y^2 + 2y - 1$. 16. $x^2 + 2ax - a^2$.
 17. $xy(2x^2 + xy - 3y^2)$. 18. $2x(2x + 7)$.
 19. $3a^2 - 2ax + x^2$. 20. $m^4 + m^3 - 1$. 21. $ax + by$.
 22. $y^4 + yx^3 - x^4$.

演 習 問 題 31.

1. $2a^3b^4$. 2. $12x^3y^2z^4$. 3. $24a^3x^3$. 4. $18p^3q^4r^5$.
 5. $48a^4b^3x^5$. 6. $84l^5m^5x^6$. 7. $a^2(x - y)(x - z)$.
 8. $(x^2 - a^2)(x - b)^2$. 9. $a^2x^2(a - b)(2a - x)^2$.
 10. $(a - x)(a + x)^2$. 11. $12xy^2(x + y)(x - y)^2$. 12. $18a^3x^3y^5$.
 13. $(x - 1)(x - 2)(x + 5)$. 14. $(x^2 - 1)(3x + 1)$.
 15. $a^3b(a - b)(a - c)(b - c)$. 16. $a^2y^2(a^2 - y^2)$.
 17. $x^3 + 125a^3$. 18. $(x^2 - 1)(2x - 3)$.
 19. $x^2(x + y)(x + 2y)(x + 3y)$. 20. $(x - y)^2(x + y)^2$.
 21. $(x^2 - xy + y^2)(x^3 - y^3)$. 22. $a^3x^2(a - x)(x^2 - y^2)$.
 23. $(x^2 - 9)(x + 1)^2$. 24. $(a^5 - b^5)(x^2 - y^2)$.
 25. $(x - 6a)(x + 4a)(x + 5a)$. 26. $abx^2y(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$.
 27. $15l^5m^5(x^2 - z^2)^2$. 28. $(ax - 2y)(ax - 3y)(ax - 4y)$.

演 習 問 題 32.

1. $(x-4)(x-7)(x^2-7x+5)$.
2. $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$.
3. $48(x^2-16)(x^2-25)$.
4. $8abx^3(a^2-b^2)$.
5. $(x-3)(x-4)(x+8)$.
6. $(2x-1)^2(3x+2)(7x+1)$.
7. $(x-1)(x-4)(x^2-5x+6)$.
8. $(x-1)(x+3)(2x^2-7x-5)$.
9. $(x^2+5xy-36y)(3x^2-7xy-21y^2)$.
10. $420xy^2(x^2-y^2)$.
11. x^6-1 .
12. $(x+1)(x^4+x^2+1)$.
13. $(a^2-b^2)^2$.
14. $a^{12}-b^{12}$.
15. $(x^2-y^2)(x^2-4y^2)$.
16. $(x^2-1)(x^2-3x-5)(x^2-5x+3)$.
17. $ax^2(a^2-3)(a^2-9)(a^2-15)$.
18. $a^2x^2(x^2-a^2)^2$.
19. $(x-2)(x+4)(x^2-4x+16)(x^2+4x-48)$.
20. $(x^2+xy+y^2)(x^3-y^3)$.
21. a^6-b^6 .
22. $(x-10a)(x^2-7ax+10a^2)(x^3-48a^2x+7a^3)$.
23. $(a^4x^4-b^4y^4)$.
24. $(x^4-5x^2y^2+4y^4)(x^4-22x^2y^2+81y^4)$.

演 習 問 題 33.

1. $\frac{ax^3}{4by^3}$.
2. $\frac{2a^2y^2}{3bx}$.
3. $\frac{x^2z}{y^3}$.
4. $\frac{9ay^2}{25b^2ca}$.
5. $\frac{4d^3y}{9abcxz}$.
6. $\frac{5b^2x^4}{13a^2y^2z^2}$.
7. $\frac{a-b}{2b}$.
8. $\frac{x-y}{y}$.

9. $\frac{x-y}{x+y}$.
10. $\frac{b}{b+a}$.
11. $\frac{1+x+x^2}{1-x}$.
12. $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$.
13. $\frac{6a-3b}{2a+b}$.
14. $\frac{x^2+2xy+4y^2}{(x+y)^2}$.
15. $\frac{-1}{3+x}$.
16. $\frac{a^3}{b^3}$.
17. $\frac{2ax+by}{3x^2}$.
18. $\frac{-x^2y^2}{x^2y^2+a^2}$.
19. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.
20. $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}$.
21. $\frac{2ax+b}{4a^2x^2+2abx+b^2}$.
22. $\frac{x-3}{3x-1}$.
23. $\frac{2ay+b}{2ay-b}$.
24. $\frac{b+x}{c+x}$.
25. $\frac{a-y}{a-z}$.
26. $\frac{7-x}{5-x}$.
27. $\frac{x-3}{x^2+7x+3}$.
28. $\frac{a-4}{a+4}$.
29. $\frac{x-2y}{x+4y}$.
30. $\frac{px+2}{px+3}$.
31. $\frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}$.
32. $\frac{a^2-ax+x^2}{a^2+ax+x^2}$.
33. $\frac{p-q}{p+q}$.
34. $\frac{x-2a}{x^2-2ax+4a^2}$.
35. $\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$.
36. $\frac{x-2}{x+1}$.
37. $\frac{2x^2-3}{x^2-x-2}$.
38. $\frac{x-1}{x+1}$.
39. $\frac{1}{x^2-y^2}$.
40. $\frac{x^2-x-1}{x^2-x-3}$.
41. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

演 習 問 題 34.

1. $\frac{6a^2}{24a^3}, \frac{a}{24a^3}, \frac{10}{24a^3}$.
2. $\frac{2a^2(x+y)}{6a^2x^2}, \frac{2x(x-y)}{6a^2x^2}, \frac{3x^4}{6a^2x^2}$.
3. $\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}, \frac{-x(x+a)}{x^2-a^2}, \frac{a^2}{x^2-a^2}, \frac{-ax}{x^2-a^2}$.
4. $\frac{2ax(a-x)}{2x(a^2-x^2)}, \frac{2x^2(a+x)}{2x(a^2-x^2)}, \frac{3a(a^2+x^2)}{2x(a^2-x^2)}$.

5. $\frac{x(x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$, $\frac{y(x-y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}$, $\frac{(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4}$.
6. $\frac{(x^2-1)(x+1)}{(x^2-1)^2}$, $\frac{x(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$, $\frac{3(x^2-1)(x-1)}{(x^2-1)^2}$, $\frac{4(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$,
 $\frac{5(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$.
7. $\frac{x(y-z)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$, $\frac{y(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$, $\frac{z(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$.
8. $\frac{a(x^2+ax+a^2)}{x^3-a^3}$, $\frac{x^2-a^2}{x^3-a^3}$, $\frac{ax}{x^3-a^3}$.
9. $\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $\frac{(x-3)^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.
10. $\frac{x^2+ax+a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$, $\frac{x^2-ax+a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$, $\frac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$.
11. $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\frac{x-b}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, $\frac{x-a}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

演 習 問 題 35.

1. $\frac{2x}{x^2-y^2}$. 2. $\frac{a+y}{12a}$. 3. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. 4. $\frac{x+y+z}{xyz}$.
5. $\frac{1+x^2}{1-x^2}$. 6. $\frac{x+a}{ax}$. 7. $\frac{a^2}{a-x}$. 8. $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$.
9. $\frac{4x}{(x-1)(x^2-1)}$. 10. $\frac{x^2+3y^2}{x^2-y^2}$. 11. $\frac{b}{a-b}$.
12. $\frac{12x^2+8x}{x^4-16}$. 13. $\frac{3x^3-11x}{(x^2-1)(x-3)}$. 14. $\frac{4x^3}{y(x^2-y^2)}$.
15. $\frac{2a(x+2a)}{x(a^2-x^2)}$. 16. $\frac{2a^2}{a^2+x^2}$. 17. $\frac{1}{2(2x+3)}$.
18. $\frac{x^2+4ax-a^2}{(x^2-a^2)^2}$. 19. $\frac{2x^3+a^3}{(x+a)(x^3-a^3)}$. 20. $\frac{12}{(x^2-1)(x^2-4)}$.

21. $\frac{48}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$. 22. $\frac{x^2-2x}{x^3+1}$.
23. $\frac{x}{x^3+x^2-x-1}$. 24. 0. 25. $\frac{2}{x^3-1}$.
26. $\frac{2(x+y)}{x^2+xy+y^2}$. 27. $\frac{4(a^3x^4-y^4)}{a^4x^4-y^4}$. 28. $\frac{x}{(x-2a)^2}$.
29. 0. 30. $\frac{-3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$. 31. $\frac{24b^4}{a(a^2-b^2)(a^2-4b^2)}$.
32. 0. 33. 0. 34. $\frac{bc+ca+ab-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.
35. $\frac{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}{(x-y)(y-z)(z-x)}$. 36. 0. 37. 0. 38. 0.
39. $\frac{2qr+2rp+2pq-2p^2-2q^2-2r^2}{(p-q)(p-r)(r-p)}$. 40. 0.
41. $\frac{p(y-x)+q(z-y)+r(x-z)}{(p-q)(q-r)(r-p)}$. 42. 1.
43. $\frac{bc^2+ca^2+ab^2-3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$.

演 習 問 題 36.

1. $\frac{3b}{c}$. 2. $\frac{4b^2}{5ac}$. 3. 1. 4. 1.
5. $\frac{2ax}{3cy}$. 6. $\frac{c}{b}$. 7. $\frac{ayz}{bx^2}$. 8. $\frac{a^3b^3c^3}{x^3y^3z^3}$.
9. $\frac{28a^3x^3}{b^2y}$. 10. $\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. 11. $\frac{a-2b}{a-b}$. 12. $a-x$.
13. $\frac{a+b}{a-b}$. 14. $\frac{a(a-x)^2}{3x(a+x)}$. 15. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.
16. $\frac{x^2(x+y)}{y^2(x-y)}$. 17. $\frac{x(a+2x)}{a^2}$. 18. 1.

19. $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ 20. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$ 21. $\frac{x}{x-y}$
 22. 1. 23. $\frac{(1+x)(1+x^2)}{(1-x)(1+x^4)}$ 24. $\frac{a+b-c}{c+a-b}$
 25. $\frac{(x-1)^3}{(x-3)^3}$ 26. $\frac{(x-y-z)(y-x+z)}{(x-y+z)(y-x-z)}$
 27. $\frac{(x-y-z)(x+y-z)}{xyz}$ 28. $\frac{1}{(x-2y)(x+y)}$
 29. $\frac{(x^2+a^2)(x^4+a^4)}{a^3x^3}$ 30. 1. 31. $\frac{1}{x^2+y^2}$
 32. $\frac{1}{1+x}$ 33. $\frac{(x-5)^2}{(x-3)^2}$ 34. $\frac{7}{3(8x+11)}$
 35. $\frac{1-x}{1+x^2}$ 36. $\frac{1}{(ax+26y)^2}$ 37. $1+x$
 38. $\frac{1+x^2}{1+x}$ 39. $\frac{y-x}{y+x}$ 40. $\frac{pr-q^2}{pr+q^2}$ 41. $\frac{a(b-a)}{b(a+b)}$
 42. $\frac{x-5}{x-3}$ 43. $\frac{a^2}{2x^2-a^2}$ 44. $\frac{b^4}{a^2+b^2}$ 45. 1.
 46. 1. 47. $\frac{4(c-x)}{3(a+x)}$ 48. $x-1$ 49. $\frac{3}{4(x-2)}$
 50. $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$ 51. $\frac{(a-b)^2}{8a(a+b)^2}$ 52. $\frac{x^3(x^2+1)}{x^3+1}$ 53. $\frac{1+x^4}{x(1+x^2)}$
 54. $\frac{(a+x)(a^3+x^3)}{ax(a^2+ax+x^2)}$ 55. 1.

演 習 問 題 37.

1. $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}$ 2. $\frac{1}{x^2+xy-2y^2}$ 3. $\frac{4}{(x^2-1)(x^2+1)}$
 4. $\frac{x-4}{2x^2-5x-10}$ 5. $\frac{2x}{q}$ 6. 1.

7. $\frac{(x+y+z)^2}{2yz}$ 8. 1. 9. $\frac{ab}{a+b}$
 13. 0. 15. $\frac{(a-b)^3}{(a+b)^3}$ 16. $\frac{a+b+c+3d}{a+b+c+d}$
 17. $-\frac{a}{b}$ 18. 2. 19. $2\frac{2}{7}$
 20. a.

演 習 問 題 38.

1. 4. 2. 6. 3. $\frac{11}{13}$ 4. $\frac{15}{46}$
 5. $\frac{1}{5}$ 6. $\frac{13}{19}$ 7. $-\frac{43}{40}$ 8. $\frac{9}{7}$
 9. 20. 10. $\frac{35}{6}$ 11. -14. 12. $\frac{3}{25}$
 13. 2. 14. 8. 15. $\frac{3}{2}$ 16. 5.
 17. -5. 18. $\frac{1}{16}$ 19. $\frac{1}{2}$ 20. -2.
 21. 4. 22. $\frac{13}{2}$ 23. 3. 24. -13.
 25. -9. 26. 2. 27. $-\frac{a+b}{2}$ 28. $\frac{5}{2}$
 29. $\frac{1}{3}$, 1. 30. $31\frac{1}{2}$, 14. 31. 5, 2. 32. 8, 6.
 33. 4, 6. 34. 2, 3. 35. $\frac{ab}{b-a}$ 36. $-2(a+b+c)$
 37. $-\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 38. $-\frac{a}{3}$

演 習 問 題 39.

1. $\frac{9}{12}$. 2. $\frac{2}{7}$. 3. 陸行 = $\frac{1}{2}$ 每時 $1\frac{1}{2}$ 里,
舟行 = $\frac{1}{2}$ 每時 $1\frac{1}{2}$ 里. 4. $\frac{7}{5}$.
5. 百十斤. 6. 每時 30 哩, 50 哩.
7. 漕キ上ル時間 $6\frac{1}{2}$ 時間, 下ル時間 $3\frac{1}{2}$ 時間; 水手ノ
漕力每時 $3\frac{1}{2}$ 里, 水流ノ速サ每時 $\frac{1}{2}$ 里.
8. 前輪ノ周圍二メートル, 後輪ノ周圍二メートル半.
9. 兩處ノ距離廿里, 旅客列車ノ速度每時十二里.
10. 速度 $\frac{1}{2}$ 每時廿五哩, 全距離 $47\frac{1}{2}$ 哩.

演 習 問 題 40.

1. 1. 2. 0. 3. 0.
4. $\frac{ln}{ln-l^2-mn}$. 5. $\frac{ab+cd}{a+b-c-d}$. 6. $\frac{a-b}{a-b-c+d}$.
7. a^2+b^2, ab . 8. $a+b, a+b$. 9. 不定.
10. 不能. 11. 不定. 12. 不能. 13. 1, 2.
14. 4, -3. 15. -5, -1. 16. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$. 17. $b, -a$.
18. $a-b, -b$. 19. $\frac{b}{a}, \frac{c}{d}$. 20. 0, $a+c$.
21. 不能. 22. 不能. 23. 不定. 24. 不定.
25. 不定. 26. 不能.

明治三十三年五月廿五日印
同 三十二年五月三十日發
同 三十四年一月廿八日訂正再版印刷
同 三十四年二月一日發 行

著 作 者 國 枝 元 治

發 行 兼
印 刷 者

金港堂書籍株式會社

東京市日本橋區本町三丁目十七番地

同 社 長

代 表 者 原 亮 一 郎

東京市下谷區龍泉寺町四百十四番地

印 刷 所 帝 國 印 刷 株 式 會 社

東京市京橋區築地三丁目十五番地

賣 捌 所 各 府 縣 特 約 販 賣 所

(著 作 權 所 有)

定 價 金 七 拾 錢 (代 數 學 教 科 書)



