幾何學教科書

立體

京都帝國大學理工科大學教授

理學士

三輪桓一郎著

東京

金港堂書籍株式會社

目　　錄

初等幾何學

立體之部

第六編

平面及ビ立體角

第一節

直線ト平面

平面ノ定義ハ平面幾何學ノ初ニ於テ既ニ揭ゲタリト雖モ立體幾何學ニ於テハ殊ニ平面ノ觀念ヲ確ムルコト必要ナルガ故ニ更ニ玆ニ揭ゲタリ.

定義 1. 平面トハ一ツノ面ニシテ其ノ上ノ任意ノ二點ヲ過ル直線ガ全ク其面上ニ在ルモノナリ.

故ニ一ツノ直線ハ其ノ二點ガ一ツノ平面上ニ在レバ全部其平面上ニ在ルナリ.

一ツノ直線ガ全ク平面上ニ在ルトキハ此平面ハ其直線ヲ含ムト云フ.

平面ハ限リナキ擴ガリヲ有スレトモ圖ニ於テ平

面ノ位置ヲ表スニ通常平行四邊形ヲ以テス.

直線ト平面ノ位置ノ關係ハ次ノ如シ.

1. 直線ハ全ク平面上ニ在ルカ(換言スレバ直線上ノ二點ガ平面上ニ在ルカ),

2. 直線ハ平面ト唯一點ニ於テ出會フカ,

3. 直線ト平面トガ何程延長サルヽモ決シテ出會ハザルカ.

以上三ツノ場合ニ限ル.

定義 2. 直線ト平面トガ何程延長サルヽモ決シテ出會ハザルトキハ互ニ平行ナリト云フ.

公理. 平面上ニ引ケル一ツノ直線ヲ軸トシテ此平面ヲ一周廻轉セシムルトキハ平面ハ空間ノ總テノ點ヲ通過ス.

定義 3. 一ツ或ハ之ヨリ多クノ線或ハ點ヲ含ム平面ガ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ルトキハ其等ノ線或ハ點ハ平面ヲ定ムト云フ.

定理 1. 一ツノ直線ト其上ニ在ラザル一ツノ點ハ平面ヲ定ム.

AB ヲ與ヘラレタル直線, C ヲ與ヘラレタル點ト

セヨ. 然ルトキハ AB ト C ヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ルベシ.

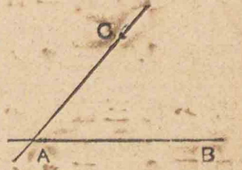
證. AB ヲ含ム任意ノ平面ハ AB ヲ軸トシテ之ヲ廻轉シ C 點ヲ含ム位置マテ來ラシムルヿヲ得(公理)即 AB ト C ヲ含ム一ツノ平面アルナリ.

次ニ平面ヲ此位置ヨリ如何程僅ニテモ廻轉セシムレハ C 點ハ其平面上ニ在ラザルナリ. 故ニ唯一ツニ限ル.

系 1. 一直線上ニ在ラザル三ツノ點ハ平面ヲ定ム.

何トナレハ三ツノ中任意ノ二ツヲ過ル直線ヲ引ケハ即本定理ニ據リテ直ニ證明スルヿヲ得.

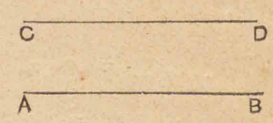
系 2. 相交ル二直線ハ平面ヲ定ム.



何トナレバ AB, AC ヲ相交ル二直線トセヨ. AC 上ノ一點 C ト AB ヲ含ム平面ハ唯一ツアルノミ(本定理). 而シテ AC ハ其上ノ二點 A, C ガ平面上ニ在ルヲ以テ全ク平面上ニ

在リ. 故ニ相交ル二直線 AB, AC ハ平面ヲ定ム.

系 3. 平行ナル二直線ハ平面ヲ定ム.



何トナレバ AB∥CD ナリトセヨ. CD 上ノ一點 C ト AB トヲ含ム平面ハ唯一ツアルノミ. 而シテ平行線ノ定義ニ據リ AB, CD ハ同一平面上ニ在リ. 故ニ平行ナル二直線 AB, CD ハ平面ヲ定ム.

二直線ノ相互ノ位置ノ關係ハ次ノ如シ.

1. 同一平面上ニ在リテ相交ルカ,
2. 平行ナルカ(勿論同一平面上ニ在リ),
3. 同一平面上ニ在ラズ(即相交ラズ,又平行ナラズ).

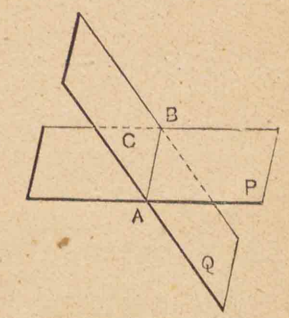
以上三ツノ場合ニ限ル.

故ニ立體幾何學ニ於テ二直線ノ平行ナルヿヲ證明スルニハ其同一平面上ニ在ルヿト, 決シテ出會ハザルヿト此二件ノ證明ヲ必要トス.

問題 1. 三ツノ直線ガ二ツ宛三ツノ點ニ於テ交ルトキハ此三直線ハ同一平面上ニ在リ.

問題 2. 三ツノ平行線ガ第四ノ直線ト交ルトキハ此四直線ハ同一平面上ニ在リ.

定理 2. 二ツノ平面ノ交リハ一ツノ直線ナリ.



P, Q ヲ出會フ所ノ二ツノ平面トセヨ, 然ルトキハ其交リハ直線ナルベシ.

證. 二ツノ平面ノ交リノ上ニ二點 A, B ヲ取リ直線 AB ヲ引ケ. 然ルトキハ直線 AB ハ双方ノ平面上ニ在リ(六編定義1). 而シテ此直線外ニ二ツノ平面ニ共通ノ點ナシ. 何トナレバ若シ此ノ如キ點(C)アリトセバ直線 AB ト點 C ヲ含ム平面ガ二ツアルヿトナル, 是レ定理1ニ戻ル. 故ニ二ツノ平面 P, Q ノ交リハ直線 AB ナリ.

平面ニ垂線ナル直線.

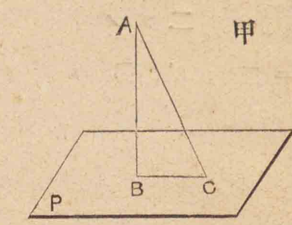
定義 4. 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ出會フ點ヲ其直線ノ足ト云フ.

定義 5. 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ出會ヒ, 其足ヲ過リテ平面上ニ引ケル總テノ直線ニ垂線ナ

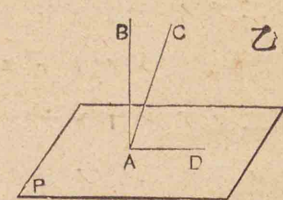
ル𪜈ハ其直線ハ平面ニ垂線ナリト云フ．而シテ其直線ト平面ハ互ニ垂直ナリト云フ．

平面ニ出會ヒ垂線ナラザル直線ヲ斜線ト稱ス．

定理 3. 一ツノ平面外ノ,或ハ其上ノ一點ヨリ其平面ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアルノミ．



AB ヲ平面 P 外(甲圖)或ハ其上(乙圖)ノ一點 A ヨリ平面 P ニ引ケル垂線トセヨ．然ル𪜈ハ A 點ヨリ平面 P ヘ其他ノ垂線アル能ハザルベシ．



證. 先ツ A ヲ P 外ニ在リトセヨ(甲圖)．若シ他ノ垂線(AC ノ如キ)アリトセハ BC ヲ結ヒ付ケ, △ABC ニ於テ ∠ABC=∠ACB=R∠ ナラサルベカラズ(六編定義5)是レ不合理ナリ．故ニ P ニ垂直ナル直線ハ AB 唯一ツアルノミ．

次ニ A ハ P 上ニ在リトセヨ(乙圖)．若シ他ノ垂線(AC ノ如キ)アリトセバ AB, AC ヲ含ム平面 Q ヲ畫ケ．

此平面ト P トノ交リヲ AD トセヨ(六編定.2)．然ル𪜈ハ ∠BAD=∠CAD=R∠ (六編定義5)ナラザルベカラズ．然ルニ平面 Q ノ上ニ於テ一ツノ直線 AD 上ノ一點 A ニ於テ之ニ二ツノ垂線アル能ハズ．故ニ P ニ垂直ナル直線ハ AB 唯一ツアルノミ．

系. 垂線ハ一ツノ點ヨリ一ツノ平面ヘ引ケル直線ノ中最短シ．

定義 6. 一ツノ點ヨリ一ツノ平面ヘノ距離トハ其點ヨリ此平面ヘ引ケル垂線ノ長サヲ云フ．

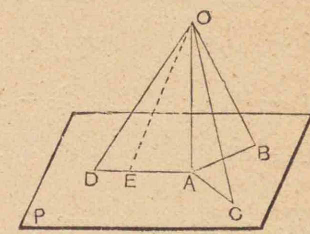
問題 3. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二點ヲ結ヒ付クル直線ノ中點ニ於テ之ニ垂直ナル平面ナリ．

玆ニ謂フ所ノ軌跡ハ平面幾何學ニ於テ陳ベタル軌跡ノ意義ヲ擴張シタルモノナルヲ以テ別ニ定義ヲ掲ケズ．

定理 4. 平面外ノ一點ヨリ此平面ヘ引ケル斜線ノ中, (I) 其足ガ垂線ノ足ヲ距ルコ相等シキモノハ相等シ． (II) 其足ガ垂線ノ足ヲ距ルコ大ナルモノハ小

ナルモノヨリ大ナリ.

平面P外ノ一點Oヨリ垂線OA, 斜線OB, OC, ODヲ引キ, $AB=AC$, $AD>AB$トセヨ. 然ルトキハ (I) $OB=OC$, (II) $OD>OB$ナルベシ.



Iノ證. $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ニ於テ $\angle OAB=\angle OAC=R\angle$, $AB=AC$ (假設), OAハ共通 故ニ兩三角形ハ全ク相等シ, 即 $OB=OC$.

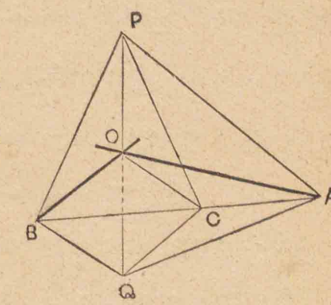
IIノ證. AD上ニ $AB=AE$ト取リ, OEヲ結ヒ付ク. 然ルトキハ $OE=OB$ (Iノ證) 而シテ平面OADノ上ニ於テ $OD>OE$, 故ニ $OD>OB$.

系. 本定理ノ逆モ亦眞ナリ.

定理 5. 一ツノ直線ガ二ツノ直線ノ交點ニ於テ各ニ垂線ナレバ其直線ハ此二直線ノ平面ニ垂線ナリ.

直線POガ二直線OA, OBノ交點Oニ於テ各ニ垂線ナリトセヨ. 然ルトキハPOハOA, OBノ定ムル平面ニ垂線ナルベシ.

證. OA, OBノ平面上ニOヲ過リ任意ニ引クル直線OCニPOガ垂線ナルコヲ證スレハ足レリ. 直線ABヲ引キOCトCニ於テ出會ハシメ, POヲQマデ延長シ



$OQ=PO$トシ, P, QヲA, C, Bニ結ヒ付ク. 然ルトキハ $\triangle PAQ$ニ於テ $PA=QA$, 又 $\triangle PBQ$ニ於テ $PB=QB$ナルコ明ナリ. 故ニ

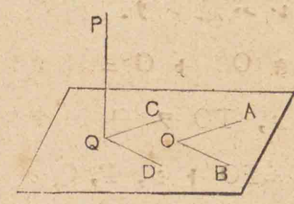
$\triangle PAB\equiv\triangle QAB$, 從テ $\triangle PBC\equiv\triangle QBC$, 依リテ $PC=QC$ 即 $\triangle PCQ$ハ二等邊ナリ. 故ニ $\angle POC=\angle QOC=R\angle$ 即POハOA, OBノ平面上ノ任意ノ直線ニ垂線ナルヲ以テ其平面ニ垂線ナリ

系 1. 同一ノ點ヲ過ル三ツノ直線ガ同一ノ直線ト垂線ナレハ皆同一ノ平面上ニ在リ.

系 2. 一ツノ定マレル直線ニ垂線ナル直線ガ其直線ヲ軸トシテ廻轉スルトキハ一ツノ平面ヲナス.

定義 7. 二ツノ出會ハザル直線ノナス角トハ一點ヨリ各ニ平行ナル二直線ノナス角ヲ云フ.

故ニ上ノ定理ニ於テ直線 PO ハ OA, OB ノ交點ヲ過ラズシテ右ノ圖ノ如ク Q 點ニ於テ AOB ノ平面ニ出會フモ $PQ \perp OA$, $PQ \perp OB$ ナル假設ガ與ヘラルレバ Q ヨリ OA, OB ニ平行ニ QC, QD ヲ引ケバ $\angle PQC$, $\angle PQD$ ハ何レモ直角ナリ故ニ PQ ハ此場合ニモ AOB ノ平面ニ垂線ナリト云フ.



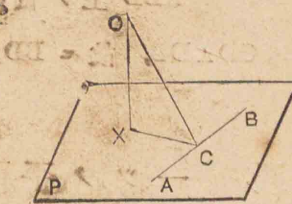
系 3. 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ垂線ナレバ其平面上ノ如何ナル線ニモ垂線ナリ.

問題 4. 一ツノ直線外ノ一ツノ點ヲ含ミ其直線ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ書クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

定理 6. 一ツノ平面ノ垂線ノ足ヨリ其平面上ノ任意ノ直線ヘ垂線ヲ引キ其

交點ト垂直線上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル直線ハ前ノ直線ニ垂線ナリ.

直線 $OX \perp$ 平面 P, AB ハ P 上ノ任意ノ直線ニシテ $XC \perp AB$ ナリトセヨ, 然ルトキハ $OC \perp AB$ ナルベシ.



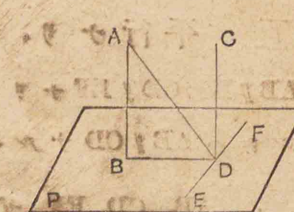
證. $OX \perp P$ 故ニ $OX \perp AB$ (六編定義 7)
又 $XC \perp AB$, 依リテ AB ハ OXC ノ平面ニ垂直ナリ (六編定.5, 系 2). 故ニ平面 OXC 上ノ直線 $OC \perp AB$.

問題 5. 定理 6 ノ逆二ツアリ, 之ヲ述ベ且證明セヨ.

定理 7. 二ツノ平行線ノ一ツガ一ツノ平面ニ垂直ナレバ他モ亦垂直ナリ.

$AB \parallel CD$, $AB \perp$ 平面 P ナリトセヨ. 然ルトキハ $CD \perp P$ ナルベシ.

證. 平行線 AB, CD ヲ含ム平面ト P トノ交リヲ BD トシ, D ヲ過リ BD ニ垂線 EF ヲ P ノ上ニ引キ AD ヲ結

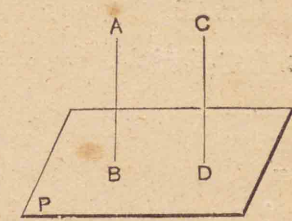


ヒ付ケヨ，然ルトキハ EF ハ AB, BD ト直角ヲナスヲ以テ平面 $ABD \perp EF$

故ニ平面 ABD 上ノ直線 $CD \perp EF$. 又 $AB \perp BD$,

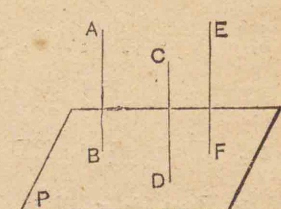
故ニ $CD \perp DB$, 故ニ BD, EF ノ含マルヽ平面 $P \perp CD$ ナリ.

系. 一ツノ平面ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ.



何トナレハ AB, CD ヲ平面 P ニ垂線ナリトセヨ，CD 上ノ一點 C ヨリ AB ニ平行ナル直線ハ P ニ垂直ナリ(本定理) 然ルニ C ヨリ P ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル(六編定.3) 故ニ $CD \parallel AB$ ナリ.

定理 8. 同一ノ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行ナリ.



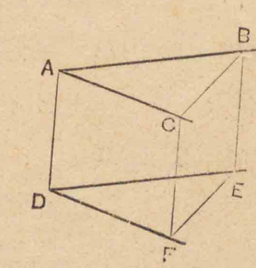
$AB \parallel EF$, $CD \parallel EF$ ナリトセヨ，然ルトキハ $AB \parallel CD$ ナルベシ.

證. AB, CD, EF ガ同一平

面上ニ在ル場合ハ平面幾何學ニ於テ已ニ證明シタリ. 依リテ次ニ同一平面上ニ在ラザル場合ヲ證明スベシ.

EF ニ垂直ナル平面 P ヲ書ケ. 然ルトキハ $AB \parallel EF$ 故ニ $AB \perp P$(六編定.7). 同樣ニ $CD \perp P$, 故ニ $AB \parallel CD$ (六編定.7, 系).

定理 9. 同一平面上ニ在ラザル二ツノ角ノ二邊ガ夫々平行ニシテ且同シ向キニ在ルトキハ二ツノ角ハ相等シ.



$\angle BAC$ ト $\angle EDF$ ハ同一平面上ニ在ラズシテ $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$ 且夫々同シ向キヲナストキハ $\angle BAC = \angle EDF$ ナルベシ.

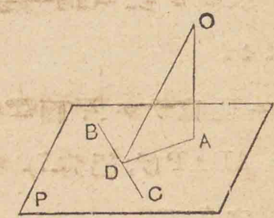
證 $AB = DE$, $AC = DF$ ト取リ, AD, BE, CF, BC, EF ヲ結ヒ付ケ.

然ルトキハ $AB \mathrel{\underline{\parallel}} DE$, 故ニ $AD \mathrel{\underline{\parallel}} BE$. 同樣ニ $AD \mathrel{\underline{\parallel}} CF$ 故ニ $BE \mathrel{\underline{\parallel}} CF$ (六編定.8) 故ニ $BC = EF$ 故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ 故ニ $\angle BAC = \angle EDF$.

作圖題 1. 與ヘラレタル點ヨリ與ヘ

ラレタル平面ヘ垂線ヲ引クコ.

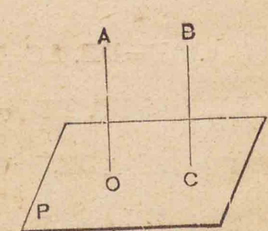
先ヅOヲ與ヘラレタル平面P外ノ與ヘラレタル點トス. OヨリPヘ垂線ヲ引クコ.



解. 平面P上ニ任意ノ直線BCヲ引キ, OヨリBCヘ垂線ODヲ引キ, P上ニ於テBCニ垂線DAヲ引キ, OヨリDAヘ垂線OAヲ引ク, OAハ求ムル所ノ垂線ナリ.

證. BCハOD, DAニ垂線ナリ(作圖), 故ニ$BC \perp$平面ODA, 故ニ平面ODA上ノ直線$OA \perp BC$ 依リテOAハP上ノ二直線BC, DAニ垂線ナリ, 即$OA \perp$平面P.

次ニOヲ與ヘラレタル平面P上ノ與ヘラレタル點トス. OヨリPヘ垂線ヲ引クコ.



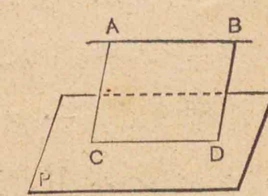
解. 平面P外ノ任意ノ一點BヨリPニ垂線BCヲ引キ(始メノ作圖) OヨリBCトOヲ含ム平面上ニ於テBCニ平行ニOAヲ引ク. OAハ求ムル所ノ垂線ナリ.

證明ハ明瞭ナルヲ以テ略ス.

平面ニ平行ナル直線及ビ平面

定理 10. 一ツノ直線ガ之ヲ含マザル平面上ノ直線ニ平行ナレバ其平面ニ平行ナリ.

$AB \parallel CD$, PヲCDヲ含ミABヲ含マザル一ツノ平面トセヨ 然ルトキハ$AB \parallel P$ナルベシ.



證. $AB \parallel CD$, 故ニ此二直線ヲ含ミ平面ADヲ書ク, 平面ADトPトノ交リハCDナリ.

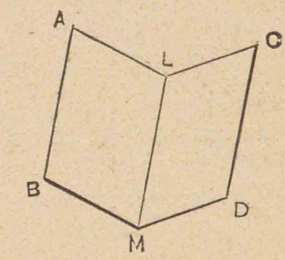
故ニAD上ノ直線ガPニ出會フ點ハCDノ上ヨリ他ナラズ.

故ニABガ若シPニ出會ヘバ其點ハCDノ上ナラザルベカラズ, 而シテABハCDニ出會フ能ハズ, 從ッテPニ出會フ能ハズ. 即$AB \parallel P$ナリ.

系. 平行ナル二ツノ直線ノ各ヲ含ミ他ヲ含マザル二ツノ平面ノ交リハ其二

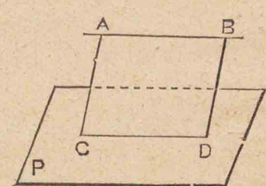
直線ニ平行ナリ.

何トナレバ平行ナル二直線AB, CDノ各ヲ含ム平面AM, CMノ交リヲLMトセヨ, ABハ平面CMニ出會フ能ハズ(本定理) 故ニ其上ノ直線LMニ出會フ能ハズ. 而シテAB, LMハ同一平面上ニ在リ故ニ AB∥LM, 同様ニ CD∥LM ナリ.



定理 11. 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行ナレハ其直線ハ之ヲ含ム平面ト前ノ平面トノ交リニ平行ナリ.

直線ABヲ平面Pニ平行ナリトセヨ, 然ルトキハABハ之ヲ含ム平面ADトPトノ交リCDニモ平行ナルベシ.



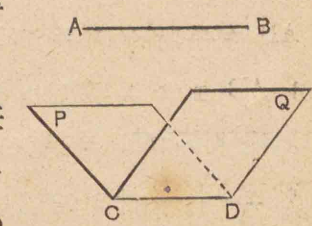
證. ABハPニ出會フ能ハズ(假設) 故ニ其上ノ直線CDニモ出會フ能ハズ, 而シテAB, CDハ同一平面上ニ在リ, 故ニAB∥CD.

系 1. 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行

ナレハ此平面上ノ任意ノ點ヲ過リ其直線ニ平行ナル直線ハ此平面上ニ在リ.

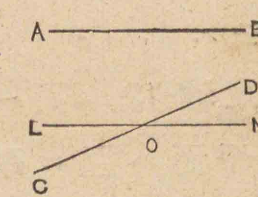
系 2. 一ツノ直線ガ二ツノ平面ニ平行ナレハ其ノ交リニモ亦平行ナリ.

何トナレハABガ二ツノ平面P, Qニ平行ナリトシ其ノ交リヲCDトセヨ, CD上ノ任意ノ一點ヲ過リABニ平行ナル直線ハPノ上ニモ同時ニQノ上ニモ在リ(系1.) 即P, Qノ交リCDト重ナラザルヲ得ズ, 故ニAB∥CDナリ.



作圖題 2. 同一平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行ナル平面ヲ引クヿ.

AB, CDヲ同一平面上ニ在ラザル二直線トシ, CDヲ含ミABニ平行ナル平面ヲ引クヿヲ求ム.



解. CD上ノ任意ノ一點OトABノ定ムル平面上ニ於テOヲ

過リ AB ニ平行線 LM ヲ引ク. CD, LM ノ定ムル平面ハ求ムル所ノモノナリ.

證. CD, LM ヲ含ム平面ハ AB ニ平行ナルヿハ定理10ニ據リテ明ナリ. 而シテ此平面ノ他ニハ解ナシ. 何トナレバ若シ CD, LM ノ平面ノ他ニ CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面(P)アリトセヨ. CD 上ノ一點 O ト AB ヲ含ム平面ヲ書ク, 然ル𪜈ハ此平面ト P トノ交リハ AB ニ平行ナリ(六編定.11). 而シテ O ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ハ即 LM ナリ. 故ニ P ハ CD, LM ノ平面ト相合ス. 故ニ求ムル所ノモノハ CD, LM ノ平面ヨリ他ニナシ.

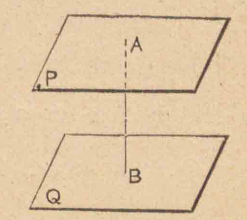
問題 6. 一ツノ點ヲ過リ二ツノ平行ナラザル直線ニ平行ナル平面ヲ引クヿ.

定義 8. 二ツノ平面ガ平行ナリトハ之ヲ何レノ方向ニ何程延長スルモ決シテ出會ハザル𪜈ヲ云フ.

定理 12. 同一ノ直線ニ垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ.

平面 P⊥直線 AB, 平面 Q⊥直線 AB ナリトセヨ,

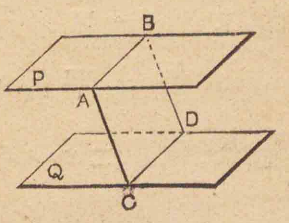
然ル𪜈ハ P∥Q ナルベシ.



證. 若シ P, Q ガ平行ナラズシテ相交レハ其交リノ上ノ任意ノ一點(X)ヲ A, B ニ結ビ付クレハ AB ハ P, Q ニ垂線ナルカ故ニ XA, XB ハ AB ニ垂線ナルベシ. 是レ不合理ナリ. 故ニ P, Q ハ出會フ能ハズ, 即互ニ平行ナリ (六編定義8).

定理 13. 一ツノ平面ガ二ツノ平行ナル平面ト交レハ其交リハ互ニ平行ナリ

平面 P∥平面 Q, 又平面 AD ト P, Q トノ交リヲ夫々 AB, CD トセヨ. 然ル𪜈ハ AB∥CD ナルベシ.



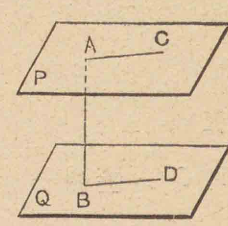
證. P, Q ハ決シテ出會フヿナシ. 故ニ AB, CD ハ出會フヿ能ハズ, 而シテ AB, CD ハ同一平面上ニ在リ. 故ニ AB∥CD ナリ.

問題 7. 二ツノ平行線ノ二ツノ平行ナル平面ノ間ニ夾マルヽ部分ハ相等シ.

定理 14. 二ツノ平面ガ平行ナレハ其

一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直ナリ.

平面 $P \parallel$ 平面 Q, 而シテ直線 $AB \perp P$ ナリトセヨ, 然ルトキハ $AB \perp Q$ ナルベシ.



證. AB ヲ含ミ任意ノ平面 AD ヲ書キ, P, Q ト夫々 AC, BD ニ於テ交ルトセヨ. 然ルトキハ $AC \parallel BD$ (六編定.13) 而シテ $AB \perp AC$ (假設) 故ニ $AB \perp BD$, 而シテ AD ハ任意ノ平面ナルカ故ニ AB ハ Q ノ上ニ於テ B 點ヲ過ル總テノ直線ニ垂線ナリ. 即 $AB \perp Q$ ナリ.

系 1. 一ツノ平面ニ平行ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ.

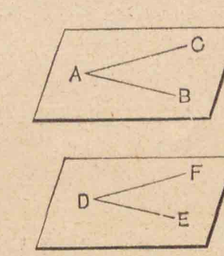
定義 9. 二ツノ平行ナル平面ノ距離トハ共通ノ垂線ガ其平面ノ間ニ夾マルヽ部分ノ長サナリ.

系 2. 二ツノ平行ナル平面ノ距離ハ常ニ相等シ.

問題 8. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ與ヘラレタル平面ニ平行ナル一ツノ平面ヲ書クヿヲ得, 而シテ唯一ツニ限ル.

定理 15. 一ツノ平面上ノ相交ル二直線ガ他ノ平面上ノ相交ル二直線ニ夫々平行ナレバ二ツノ平面ハ平行ナリ.

$AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$ ナリトセヨ, 然ルトキハ 平面 $BAC \parallel$ 平面 EDF ナルベシ.



證. 若シ二ツノ平面ガ平行ナラザレバ其交リハ互ニ平行ナル二直線 AB, DE ノ各ヲ含ム平面ノ交リナルガ故ニ AB, DE ニ平行ナラザルヲ得ズ (六編定.10, 系). 同様ニ又其交リハ AC, DF ニモ平行ナラザルヲ得ズ. 然ルニ一ツノ直線ガ相交ル二直線ニ平行ナル能ハズ, 故ニ二ツノ平面ハ出會フ能ハズ, 即平面 $BAC \parallel$ 平面 EDF ナリ.

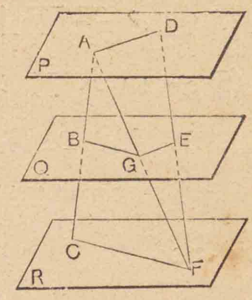
問題 9. 同一ノ平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ各ヲ含ミ他ニ平行ナル平面ヲ引ケバ二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ.

定理 16. 二ツノ直線ガ數多ノ平行ナル平面ト交ルトキハ之ガ爲ニ分タレタル

部分ハ比例ヲ成ス.

二ツノ直線AC, DFガ平行ナル平面(假リニ三ツトス)P, Q, Rト夫々A, B, C, 及ビD, E, Fニ於テ交ルトセヨ.

然ルトキハ AB:BC=DE:EF ナルベシ.



證. AFヲ結ビ付ケ, AFガQト交ル點ヲGトシBG, CF, GE, ADヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ平面ACFニ於テ BG//CF (六編定.13),

故ニ AB:BC=AG:GF,

又平面FADニ於テ GE//AD

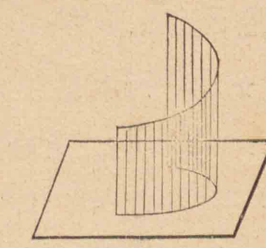
故ニ AG:GF=DE:EF,

依リテ AB:BC=DE:EF.

正射影

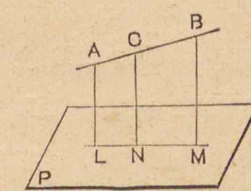
定義10. 一ツノ平面上ニ一ツノ點ノ正射影(或ハ略シテ射影)トハ此點ヨリ其平面上ニ引ケル垂線ノ足ナリ.

定義11. 一ツノ平面上ニ一ツノ線ノ正射影トハ其線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ.



定理17. 一ツノ平面上ニ一ツノ直線ノ射影ハ其ノ上ノ任意ノ二點ノ射影ヲ結ビ付クル直線ナリ.

ABヲ一ツノ直線, L, Mヲ平面P上ニAB上ノ任意ノ二點A, Bノ射影トセヨ. 然ルトキハP上ニ直線ABノ射影ハ直線LMナルベシ.

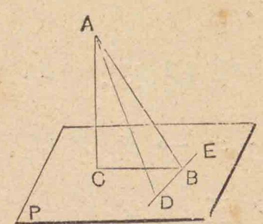


證. AB上ノ任意ノ一點Cノ射影ガ常ニLMノ上ニ在ルコトヲ證セントス. AL, BMハPニ垂直ナリ(假設) 故ニAL//BM, 依リテAL, BMノ平面ハAB, LMヲ含ム. 今此平面上ニ於テC點ヨリALニ平行ニCNヲ引キLMト出會フ點ヲNトセヨ

然ルトキハCNハPニ垂直ナリ(六編定.7) 即Cノ射影ハ常ニLM上ニ在リ. 故ニABノ射影ハLMナリ.

定理 18. 斜線ガ平面上ノ任意ノ直線トナス所ノ鋭角ノ中其ノ正射影トナス所ノモノガ最小ナリ.

AB ヲ平面 P ノ斜線, BC ヲ其ノ射影, DBE ヲ B ヲ過リ P 上ニ引ケル任意ノ直線トシ, $\angle ABD$ ヲ鋭角トセヨ. 然ルトキハ $\angle ABC<\angle ABD$ ナルベシ.



證. C ヲ AB 上任意ノ點 A ノ射影トセヨ, $BD=BC$ ト取リ AD ヲ結ビ付ケ. 然ルトキハ $AD>AC$, 而シテ $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ ニ於テ AB ハ共通, $BC=BD$, $AC<AD$. 故ニ $\angle ABC<\angle ABD$ (平面.一編定.17). 即定理ハ證明セラレタリ.

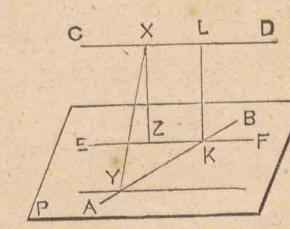
定義 12. 一ツノ直線ガ一ツノ平面トナス角トハ平面上其ノ正射影トナス角ヲ云フ.

問題 10. 斜線ハ平面上射影ニ垂線ナル直線ト直角ヲナス.

定理 19. 同一平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ各ニ垂線ナル直線ハ一ツアリ,

而シテ唯一ツニ限ル. 又此直線ハ二直線間ノ最短距離ナリ.

AB, CD ヲ同一平面上ニ在ラザル二ツノ直線トセヨ. 然ルトキハ AB, CD ノ何レニモ垂線ナル直線ハ一ツアルベク. 而シテ唯一ツニ限ルベシ.



證. AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 P ヲ畫キ(作圖2) EF ヲ P 上ニ CD ノ射影トセヨ. CD ハ AB ニ平行ナラズ, 故ニ EF ハ AB ニ交ル, 此交點ヲ K トシ, EF, CD ノ平面ニ於テ K ヨリ EF ニ垂線 KL ヲ引ケ, $EF /\!/ CD$, 故ニ $KL\perp CD$, 又 EF ハ CD 上總テノ點ノ射影ノ軌跡ナルヲ以テ $LK\perp$ 平面 P, 故ニ $LK\perp AB$ 即 KL ハ AB, CD ニ同時ニ垂線ナリ.

次ニ他ニ AB, CD ニ垂線ナル直線 XY ガアリトセヨ. 然ルトキハ XY ハ Y ヲ過リ CD ニ平行ナル直線ニ垂線ナルベシ. 從ヒテ平面 P ニ垂直ナリ. 然ルニ CD 上ノ點 X ヨリ P ニ垂直ナル直線ノ足ハ EF ノ上ニ限ル. 故ニ XY ハ同時ニ AB, CD ニ垂線ナラズ.

即 KL 唯一ツニ限ル.

最後ニ KL ハ AB, CD 間ニ引ケル直線ノ中,最小ナルベシ. 何トナレバ KL ノ他ノ直線 XY ハ P ニ垂直ナラズ 故ニ X ヨリ P ヘノ垂直線 XZ ヨリ大ナリ. 然ルニ XZ=KL, 従ッテ KL<XY 即 KL ハ AB, CD 間ノ最短距離ナリ.

第一節之問題

問題 11. 三ツノ平面ハ一般ニ一ツノ點ニ於テ交ル. 特別ナル場合ヲ示セ.

定義 13. 各頂點ガ同シ平面上ニアラザル多角形ヲ「ゴーシュ」多角形ト稱ス.

問題 12. 「ゴーシュ」四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ヒ付クル直線ハ平行四邊形ヲナス.

問題 13. 同一平面上ニ在リテ一點ニ交ラザル三直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

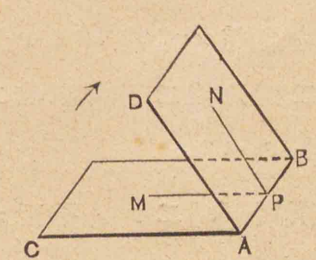
問題 14. 同一平面上ニ在ラザル四ツノ點ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ヲ求ム.

第二節

二面角, 立體角

定義 14. 相交ル二ツノ平面ハ二面角ヲナスト云フ. 其二ツノ平面ノ各ヲ二面角ノ**面**ト云ヒ, 其ノ交リヲ二面角ノ**稜**ト云フ.

圖ノ如キ二面角ヲ表スニ通常稜ヲ表ス文字ヲ中間ニ置キ二面角 CABD, 或ハ稜ヲ表ス文字ノミニテ二面角 AB ト記ス.



二面角 CABD ノ稜 AB 上ノ任意ノ一點 P ヨリ面 CB, DB 上ニ夫々 AB ニ垂線 PM, PN ヲ引キ, AB ヲ軸トシテ面 CB ヲ矢ノ方向ニ面 DB ト重ナルマデ廻轉セシムレバ直線 PM ハ平面角 MPN ヲ畫キテ PN ト重ナル(六編定.5, 系1). 而シテ面 CB ノ廻轉ノ度ト直線 PM ノ廻轉ノ度ハ相等シ. 且 P ヲ稜ノ上ノ何レノ點ニ取ルモ平面角 MPN ハ常ニ相等シ(六編定.9) 故ニ

二面角ノ大サヲ度ルニハ其ノ稜ノ上ノ任意ノ一

點ヨリ各ノ面上ニ於テ稜ニ垂線ニ引クル二直線ノ夾ム角ノ大サヲ以テス.

此角ヲ其二面角ヲ度ル**平面角**ト稱ス.

二ツノ二面角ハ其ヲ度ル平面角相等シケレハ重ヲ合スヿヲ得.

附言. 平面幾何學ニ於ケル對頂角,錯角,同位角,同傍內角等ノ意義ヲ推シ擴メ立體幾何學ニ於テモ對頂二面角,錯二面角,同位二面角,同傍內二面角等ノ語ヲ用フベシ.

問題15. 二ツノ平面ガ相交レハ對頂二面角ハ相等シ.

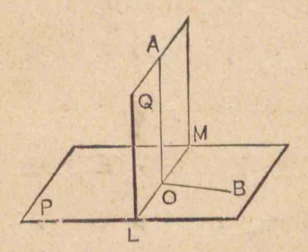
問題16. 二ツノ平行ナル平面ニ一ツノ平面ガ交レハ錯二面角,同位二面角ハ相等シク, 同傍內二面角ハ互ニ補角ヲナス.

問題17. 二ツノ二面角ノ面ガ二ツ宛夫々平行ナル𪜈ハ二ツノ二面角ハ相等シキカ或ハ補角ヲナス.

定義15. 二ツノ平面ノナス二面角ヲ度ル平面角ガ直角ナル𪜈ハ其二平面ハ互ニ**垂直ナリ**ト云フ.

定理20. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ其平面ニ垂直ナリ.

直線 OA⊥ 平面 P, Q ヲ OA ヲ含ム任意ノ平面トセヨ. 然ル𪜈ハ P⊥Q ナルベシ。



證. P, Q ノ交リヲ LM トシ O ヨリ P 上ニ LM ニ垂線 OB ヲ引ク, 然ル𪜈ハ OA, OB ハ LM ニ垂線ナルヲ以テ ∠AOB ハ P, Q ノナス二面角ヲ度ル平面角ナリ. 而シテ AO⊥P ナルカ故ニ∠AOB=R∠故ニ P⊥Q ナリ (六編定義15.)

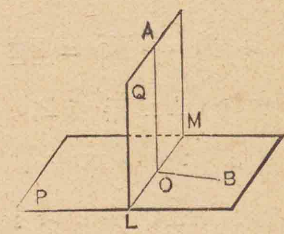
問題18. 一ツノ點ニ於テ相交ル三ツノ直線ガ互ニ垂線ナレハ其二ツ宛ヲ含ム三ツノ平面ハ互ニ垂直ナリ.

定理21. 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナレハ其一ツノ平面上ニ其交リニ垂線ナル直線ハ他ノ平面ニ垂直ナリ.

平面 P⊥ 平面 Q トシ, 其ノ交リ LM 上ノ一點 O ヨリ之ニ垂線 OA ヲ Q 上ニ引ク 然ル𪜈ハ OA⊥P

ナルベシ.

證. P上ニOBヲLMニ垂線ニ引ク, 然ルトキハ∠AOBハP, Qノナス二面角ヲ度ル平面角ナリ. 故ニ一直角ニ等シ(假設) 即OAハOM, OBニ垂線ナリ, 故ニOA⊥Pナリ.



系 1. 平面P⊥平面QナルトキハQ上ノ一點ヨリPニ垂直ナル直線ハQノ上ニ在リ.

系 2. 相交ル二ツノ平面ガ何レモ第三ノ平面ニ垂直ナレバ其交リモ亦此平面ニ垂直ナリ.

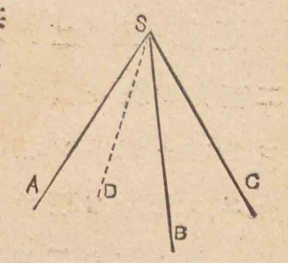
問題19. 三ツノ平面ノ各カ他ノ二ツニ垂直ナレバ其ノ交リナル三ツノ直線ノ各ハ他ノ二ツニ垂線ナリ.

問題20. 一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ヲ作ルヿ. 而シテ其平面ハ二ツノ面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナルヿヲ證セヨ.

定義 16. 一點ニ於テ出會フ三ツ或ハ三ツヨリ

多クノ平面ハ**多面角**或ハ**立體角**ヲナスト云フ.

平面ASB, BSC, CSD,........ガ共通ノ點Sニ於テ出會フトキハ一ツノ立體角ヲナスナリ.



Sヲ立體角ノ**頂點**, SA, SB, SC,......ヲ其ノ**稜**ト稱ス.

稜ニテ限ラレタル平面ノ部分ASB, BSC,......ヲ立體角ノ**面**ト稱シ, ∠ASB, ∠BSC,......ヲ立體角ノ**平面角**ト稱ス.

立體角ヲ表スニハ頂點ノ文字ヲ初ニ置キテS-ABCDノ如ク記スベシ.

立體角ノ面ノ數ガ三ツナルモノヲ**三面角**ト稱ス.

定義 17. 一ツノ立體角ノ任意ノ面ヲ延長シタルトキ立體角ガ其面ノ同ジ側ニ在ルトキハ之ヲ**凸多面角**ト稱ス. 然ラサルモノヲ**凹多面角**ト稱ス.

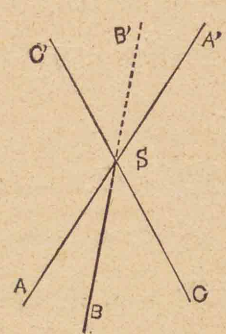
凸多面角ヲ其ノ各稜ニ交ルベキ一ツノ平面ニテ截ルトキハ其截リ口ハ凸多角形ナルヿ明ナリ.

本書ニ於テ單ニ多面角ト云フトキハ凸多面角ノヿ

ナリ.

定義 18. 二ツノ立體角ニ於テ其ノ平面角及ヒ二面角ガ夫々同シ順ニ(双方共ニ右ヨリ左ヘ,或ハ左ヨリ右ヘ)取リテ相等シキトキハ二ツノ立體角ハ重テ合スヲ得ルヿ明ナリ(勿論稜ノ長サニハ關セザルナリ) 此ノ如キ二ツノ立體角ハ相等シト云フ.

定義 19. 二ツノ立體角ニ於テ其ノ平面角及ヒ二面角ガ反對ノ順ニ(一ツハ右ヨリ左ヘ,一ツハ左ヨリ右ヘ)取リテ相等シキトキハ二ツノ立體角ハ重テ合スヿヲ得ズ(然レドモ一ツヲ裏返ストキハ他ニ重テ合スヿヲ得) 此ノ如キ二ツノ立體角ハ對稱ナリト云フ.

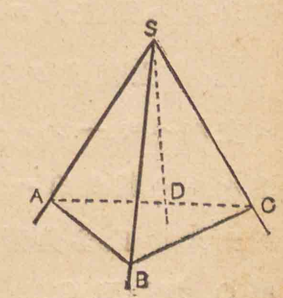


一ツノ立體角ノ總テノ稜ヲ其頂點ノ方ヘ延長スレハ即對稱ナル立體角ヲ得ベシ. 何トナレハ此二ツノ立體角ハ其ノ平面角及ヒ二面角ガ反對ノ順ニ取リテ相等シクレハナリ.

定理 22. 三面角ノ任意ノ二ツノ平面

角ノ和ハ他ノ一ツノ平面角ヨリ大ナリ.

三面角S-ABC ノ三ツノ平面角 ASB, BSC, CSA ノ中何レノ二ツヲ取ルモ其ノ和ハ他ノ一ツヨリ大ナルベシ.



證. 假リニ平面角 ASC ヲ最大ナリトシ, ∠ASC<∠ASB+∠BSC ナルヿヲ證スベシ.

面 ASC ノ上ニ於テ ∠ASD=∠ASB ナル樣ニ直線 SD ヲ引キ, A ヨリ直線 ADC ヲ引キ SD トDニ於テ交ラシメ, SB ヲ SD ト等シク取リ, AB, BC ヲ結ヒ付ケ. 然ルトキハ △ASB≡△ASD, 故ニ AB=AD, 然ルニ AB+BC>AC 故ニ BC>DC, 依リテ △BSC, △DSC ニ於テ其ノ二邊ガ相等シク第三邊ガ異ナルヲ以テ

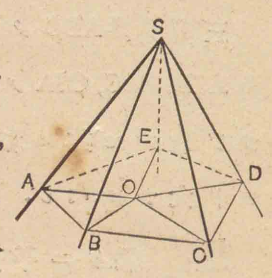
∠BSC>∠DSC,

依リテ ∠ASB+∠BSC>∠ASD+∠DSC,

即 ∠ASB+∠BSC>∠ASC.

定理 23. 一ツノ立體角ノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ.

一ツノ立體角S-ABC....ノ總テノ平面角ASB,BSC 等ノ和ハ四直角ヨリ小ナルベシ



證. 立體角ヲ其ノ總テノ稜ニ交ルベキ一ツノ平面ニテ截レ,然ルトキハ截リ口ハ多角形ABC....ヲナス. 此多角形內ノ任意ノ一點OヲA, B, C,....ニ結ビ付ク. 然ルトキハSヲ頂點トスル三角形ノ數ハOヲ頂點トスル三角形ノ數ニ等シ. 扨Aハ一ツノ三面角ノ頂點ナルヲ以テ

$$\angle SAE+\angle SAB>\angle EAB,$$

即 $$\angle SAE+\angle SAB>\angle EAO+\angle OAB.$$

其他B, C, D....ニ於テモ同樣ノ不等式ヲ得.

故ニ

$$\angle SAE+\angle SAB+\angle SBA+\ldots\ldots>\angle EAO+\angle OAB+\angle OBA+\ldots\ldots(1)$$

故ニSヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ總和ハOヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ總和ヨリ大ナリ.

而シテ又二組ノ三角形ノ數ハ同數ナルヲ以テ其ノ內角ノ和ハ相等シ.

即 $\angle SAE+\angle SAB+\ldots\ldots+$(Sニ於テノ平面角ノ和)

$=\angle EAO+\angle OAB+\ldots\ldots+$(O點ノ周圍ノ角ノ和) (2)

故ニ(1)及ビ(2)ニ依リテ

Sニ於ケル平面角ノ和<O點ノ周圍ノ角ノ和

即 Sニ於ケル平面角ノ和<4R∠.

第二節之問題

問題21. 一ツノ平面上ノ直線ガ他ノ平面上ニ其ノ射影トナス鋭角ノ中,二ツノ平面ノ二面角ヲ度ル平面角ガ最大ナリ.

問題22. 三面角ノ三ツノ稜ト相等シキ角ヲナス直線ヲ引クコ.

問題23. 三面角ノ各二面角ヲ二等分スル平面ハ一ツノ直線ニテ出會フ. 又此直線上ノ點ハ皆三ツノ面ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

問題24. 三面角ノ各稜ヲ含ミ之ニ對スル面ニ垂直ナル平面ハ一ツノ直線ニテ出會フ.

問題25. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面ノ平面角ノ二等分線トヲ含ム平面ハ一ツノ直線ニテ出會フ.

第三節
多面體

定義20. 多面體トハ數多ノ平面ヲ以テ界シタル立體ナリ.

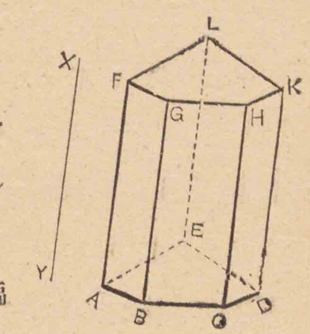
多面體ヲ界スル平面ノ其ノ限界タル部分ヲ多面體ノ**面**ト稱シ, 面ト面ノ交リヲ其ノ**稜**ト稱ス. 多面體ノ面ノナス立體角ノ頂點ヲ其ノ**頂點**ト稱ス.

四ツヨリ少ナキ平面ニテハ一ツノ場所ヲ圍ミ込ムコヲ得ス. 故ニ四ツノ面ヨリ成ル多面體ガ其最簡單ナルモノナリ.

多面體ハ其ノ面ノ數ニ依リテ**四面體,五面體,六面體**等ト稱ス.

定義21. 多面體ノ同一ノ面上ニ在ラザル任意ノ二ツノ頂點ヲ結ヒ付クル直線ヲ其ノ**對角線**ト稱ス.

定義22. **角壔**トハ一ツノ直線ニ平行ナル任意ノ數(三ツ以上)ノ平面ト其直線ニ出會ヒテ互ニ平行ナル二ツノ平面トニテ界スル多面體ナリ.



圖ニ於テ面AG, BH, CK,DL, EFハ直線XYニ平行ニシテ面ABCDE, FGHKLハXYニ出會フベク, 且互ニ平行ナリトス. XYニ平行ナル面ノ交リAF, BG等ハ皆互ニ平行ナリ(六編定.11系2), 又ABトFG, BCトGH等ハ互ニ平行ニシテ(六編定.13) 且相等シ. 故ニXYニ平行ナル面AG, BH等ハ皆平行四邊形ナリ. 之ヲ角壔ノ**側面**ト稱ス. 二ツノ側面ノ交リヲ**側稜**ト稱ス. 兩端ニ在ル二ツノ平行ナル面ABCDE, FGHKLハ全ク相等シキ多角形ナリ, 之ヲ角壔ノ**底面**(或ハ端面)ト稱ス.

圖ノ如キ角壔ヲ表スニ角壔 ABCDE-FGHKL, 或ハ角壔 ABCDE-F ヲ以テス.

定義23. 角壔ハ底面ノ邊ノ數ニ由リテ**三角壔,四角壔,五角壔**等ト稱ス.

定義24. 角壔ノ側稜ガ底面ニ垂直ナルトキハ之ヲ**直角壔**ト稱シ, 斜ナルトキハ之ヲ**斜角壔**ト稱ス.

定義25. 角壔ノ二ツノ底面ノ間ノ垂線距離ヲ其ノ高サト稱ス.

直角壔ニ於テハ其ノ側稜ハ即高サナリ.

定義26. 斜角壔ノ側稜ニ垂直ナル平面ニ由リテノ截リ口ヲ其ノ直截面ト稱ス.

問題26. 角壔ノ側面ノ面積ハ直截面ノ周ニ等シキ直線ト一ツノ側稜ノ包ム矩形ニ等シ.

定義27. 平行六面體トハ底面ガ平行四邊形ナル四角壔ナリ.

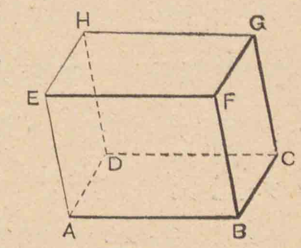
故ニ平行六面體ハ總テノ面ガ平行四邊形ナリ.

定理24. 平行六面體ノ相對スル面ハ平行ニシテ全ク相等シキ平行四邊形ナリ. 其ノ四ツノ對角線ハ同一點ヲ過リ互ニ二等分セラル.

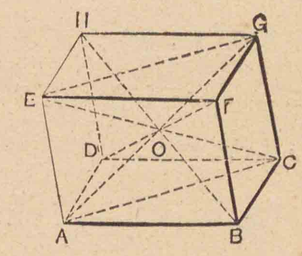
ABCD-EFGH ヲ平行六面體トセヨ, 然ルトキハ面 AC ト EG, 面 AF ト DG, 面 AH ト BG ハ平行ニシテ全ク相等シキ平行四邊形ナルベシ.

證. 平行六面體ハ總テノ面ガ平行四邊形ナルヲ以テ四ツ宛ノ稜 AB, DC, EF, HG; AD, BC, FG, EH

及ビ AE, BF, CG, DH ハ夫々平行ニシテ且相等シ. 故ニ相對スル面 AC, EG ニ於テ AB ト EF, BC ト FG ハ夫々平行ニシテ且相等シキヲ以テ ▱AC, ▱EG ハ平行ニシテ(六編定.15) 且全ク相等シ.(六編定.9) 其他ノ相對スル面モ同樣ニ平行ニシテ且全ク相等シ.



次ニ四ツノ對角線 AG, BH, CE, DF ハ同一ノ點 O ニ於テ交リ且互ニ二等分セラルベシ.



證. AC, EG ヲ結ビ付ク, AE, CG ハ各 BF ニ等シク且平行ナルヲ以テ互ニ相等シク且平行ナリ, 故ニ ACGE ハ平行四邊形ニシテ其ノ對角線 AG, CE ハ互ニ二等分セラル.

同樣ニ AG ト BH, AG ト DF モ亦互ニ二等分セラル.

故ニ四ツノ對角線ハ同一點ヲ過リ此點ニ於テ互ニ二等分セラル.

定義28. 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ其ノ

中心ト稱ス.

定義29. 平行六面體ノ各ノ面ガ矩形ナルモノヲ直六面體ト稱シ, 各ノ面ガ正方形ナルモノヲ立方ト稱ス.

系. 直六面體ノ四ツノ對角線ハ皆相等シ.

問題27. 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ十二ノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

問題28. 直六面體ノ一ツノ對角線ノ上ノ正方形ハ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

定義30. 角錐トハ一ツノ多角形ト此多角形ノ邊ヲ底邊トシ, 其平面外ノ一ツノ點ヲ頂點トシタル三角形トノ界スル多面體ナリ

其多角形ヲ角錐ノ底面, 各ノ三角形ナル面ヲ其ノ斜面ト稱シ斜面ノ交リヲ其ノ斜稜ト稱ス. 各ノ斜面ノ出會フ共通ノ點ヲ角錐ノ頂點ト稱シ, 頂點ヨリ底面ヘ引クル垂線ヲ其ノ高サト稱ス.

角錐ハ其ノ底面ノ邊ノ數ニ由リテ三角錐, 四

角錐等ト稱ス. 三角錐ハ又四面體トモ稱ス.

定義31. 角錐ノ底面ガ正多角形ニシテ頂點ヨリ底面ヘ引クル垂線ノ足カ其ノ中心ト合スルモノヲ直角錐ト稱ス.

直角錐ノ總テノ斜面ハ各全ク相等シキ二等邊三角形ナルコト明ナリ.

直角錐ノ斜面ノ高サヲ直角錐ノ斜高ト稱ス.

定理25. 角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ (I)斜稜及ヒ高サハ比例ニ分タル, (II)截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形ナリ.

角錐 S-ABCD ヲ其ノ底面 ABCD ニ平行ナル平面 KLMN ニテ截ルトキハ,

(I) 斜稜 SA, SB,....及ヒ高サ SH ハ同シ比ニ分タルベシ, (II) 截リ口 KLMN ハ底面 ABCD ニ相似ナル多角形ナルベシ.

(I)ノ**證.** AB//KL (六編定.13) 故ニ

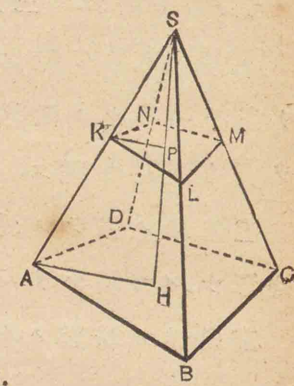
SA : SK = SB : SL　同樣ニ　SB : SL = SC : SM = ...

次ニ SH ガ平面 KLMN ニ出會フ點ヲ P トセヨ. AH,

KP ヲ結ヒ付ク, 然ルトキハ

AH//KP 故ニ SA : SK = SH : SP

即斜稜及ヒ高サハ同シ比ニ分タル.



(II)ノ**證.** AB//KL, BC//LM,

故ニ ∠ABC = ∠KLM (六編定. 9)

同樣ニ次キ々々ノ角ハ皆相等シ.

又 SB : SL = BA : LK, SB : SL = BC : LM

故ニ AB : KL = BC : LM 即 AB : BC = KL : LM

同樣ニ他ノ對應邊ハ皆比例ヲナス.

故ニ多角形 ABCD ∽ 多角形 KLMN.

系 1. 角錐ノ底面ニ平行ナル平面ニ由リテノ截面ノ比ハ頂點ヨリ其平面ニ至ル距離ノ比ノ二乘比ニ等シ.

系 2. 相等シキ高サノ二ツノ角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニシテ且底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其ノ截面ノ比ハ底面ノ比ニ等シ.

定理 26. 任意ノ多面體ノ面ノ數及ヒ頂點ノ數ノ和ハ稜ノ數ヨリ二ツ多シ.

F ヲ面ノ數, V ヲ頂點ノ數, E ヲ稜ノ數トセヨ.

然ルトキハ $F+V=E+2$ ナルベシ.

證. 多面體ヲ組ミ立ツル順序ヲ,先ツ一ツノ面ヲ取リ之ニ一ツ宛次キ々々ノ面ヲ加ヘテ最後ノ面ニ至ルモノト想像セヨ.

扨第一ノ面ガ a 邊ノ多角形ナレハ其ノ頂點ハ多面體ノ頂點トナリ, 其ノ邊ハ多面體ノ稜トナルナリ

故ニ第一ノ面ニ於テハ $V=E.$

次ニ b 邊ヲ有スル第二ノ面ヲ加フレハ二ツノ面ハ二ツノ頂點及ヒ一ツノ稜ヲ共有ス.

故ニ $V=a+b-2,$ $E=a+b-1,$

故ニ第二ノ面ニ於テハ $V+1=E.$

此ノ如ク一面ヲ加フル毎ニ稜ノ數ハ頂點ノ數ヨリ一ツ宛多ク增加ス.

故ニ第三ノ面ニ於テハ $V+2=E,$

第四ノ面ニ於テハ $V+3=E,$

即頂點ト稜ノ數ノ關係ハ頂點ノ數ニ組ミ立テツヽ

進ム所ノ面ノ數ヨリ常ニ一ツ少キ數ヲ加ヘタルモノガ稜ノ數ニ等シキナリ．故ニ最後ノ面ヨリ一ツ前ノ面 F−1 番目マデ組ミ立テタル時ノ頂點ト稜ノ數ノ關係ハ　$V+(F-2)=E$.

是ニ於テ最後ノ面ヲ加フルモ，言ヒ換ヘレバ多面體ヲ完成シタル際ニモ此面ヲ加ヘタル爲ニ頂點モ稜モ增加スルヿナク，其關係ハ前ノ如クナルベシ故ニ　$V+F-2=E$,　即　$V+F=E+2$.

定義32.　正多面體トハ總テノ面ガ相等シキ正多角形ニシテ，總テノ立體角ガ相等シキ多面體ナリ．

定理27.　正多面體ハ五種アリ，而シテ唯五種ニ限ル．

一ツノ立體角ヲナスニハ三ツ或ハ三ツヨリ多クノ平面ガ一點ニ出會フヿヲ要ス．

又立體角ノ頂點ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ．

以上二ツノ條件ヲ以テ下ニ正多面體ノ種類ヲ吟味スベシ．

扨先ツ正三角形ニテ作リ得ル立體角ハ三ツノ正三角形，四ツノ正三角形，五ツノ正三角形，以上三種ノ外ニ有ル能ハズ．何トナレバ正三角形ノ一ツノ角ハ$\frac{2}{3}$R∠ナルヲ以テ之ヲ六ツ合スレバ 4R∠ニ等シクシテ立體角ヲナス能ハザレバナリ．

次ニ正四角形，正五角形ハ各三ツノ面ヲ以テ立體角ヲナシ得レ圧三ツヨリ多クノ面ニテハ平面角ノ和ガ 4R∠ニ等シク或ハ之ヨリ大ナルヲ以テ立體角ヲナス能ハズ．

正六角形ハ三ツニテ既ニ 4R∠ニ等シキヲ以テ立體角ヲナス能ハズ．正七角形以上ナレバ不能ナルヿ勿論ナリ．

故ニ正多面體ハ其ノ立體角ヲナス面ガ

I.　三ツノ正三角形，　　II.　四ツノ正三角形，
III.　五ツノ正三角形，　　IV.　三ツノ正方形，
V.　三ツノ正五角形，

以上五種ニ限リ此外ニ有ル能ハズ．

下ニ此五種ノ正多面體ハ各幾面體ナルカヲ論ズベシ．

F ヲ面ノ數，V ヲ頂點ノ數，E ヲ稜ノ數，S ヲ

總テノ頂點ニ於ケル平面角ノ數トセヨ.

I ノ場合. 先ツ各ノ面ガ三角形ナルヲ以テ一ツノ面ノ平面角ノ數ハ三ツアリ, 故ニ S ハ面ノ數 F ノ三倍ニ等シ.

即　　$3F=S.$

次ニ多面體ノ一ツノ頂點ニ於ケル平面角ノ數ハ三ツナルヲ以テ S ハ頂點ノ數 V ノ三倍ニ等シ,

即　　$3V=S.$

次ニ一ツノ面ニ於ケル稜ノ數ト平面角ノ數ハ相等シ, 而シテ一ツノ稜ハ二ツノ面ニ共通ナリ.

故ニ又 S ハ稜ノ數 E ノ二倍ニ等シ.

即　　$2E=S$

又何レノ多面體ニ於テモ

$F+V=E+2$ (定理26)

依リテ　$3F=3V=2E,\quad F+V=E+2$

ナル一組ノ通元方程式ヲ得タリ,

之ヲ解キテ　　$F=4.$　　即正四面體ナリ.

同樣ニ下ノ次キ々々ノ通元方程式ヲ得.

II ノ場合. $3F=4V=2E,\quad F+V=E+2.$

之ヲ解キテ　　$F=8.$　　即正八面體ナリ.

III ノ場合. $3F=5V=2E,\quad F+V=E+2.$

之ヲ解キテ　　$F=20.$　　即正二十面體ナリ.

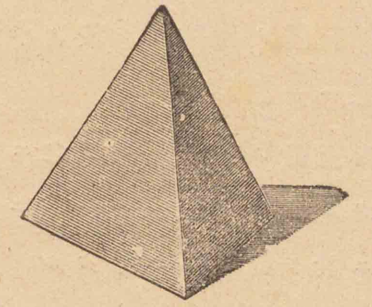
IV ノ場合. $4F=3V=2E,\quad F+V=E+2.$

之ヲ解キテ　　$F=6.$　　即正六面體ナリ.

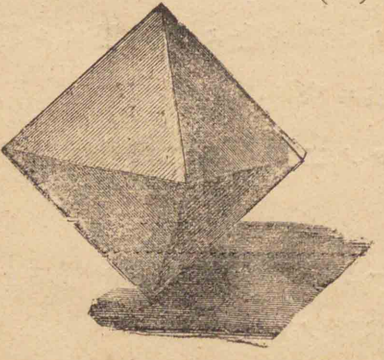
V ノ場合. $5F=3V=2E,\quad F+V=E+2.$

之ヲ解キテ　　$F=12.$　　即正十二面體ナリ

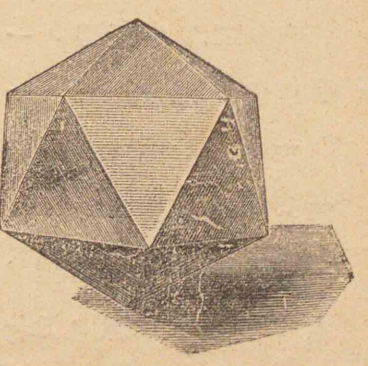
(I)



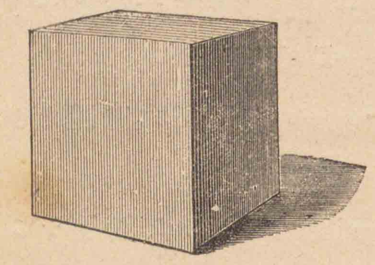
(II)



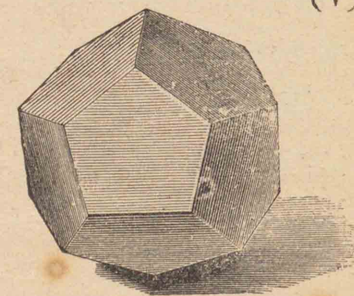
(III)



(IV)



(V)



第三節之問題

問題29. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ヒ付クル三ツノ直線ハ一點ニ交ル.

問題30. 四面體ノ各ノ頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ヒ付クル四ツノ直線ハ一點ニ交ル。又此四直線ハ其點ニ於テ比 3:1 ニ分タル。

此點ヲ四面體ノ**重心**ト稱ス.

問題31. 四面體ノ一ツノ稜ヲ含ミ之ニ對スル稜ノ中點ヲ過ル平面ハ一點ニ交ル.

問題32. 四面體ノ六ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ一點ニ交ル.

問題33. 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル面ヘ引タル垂線ノ足ハ其面ノ中心ナリ.

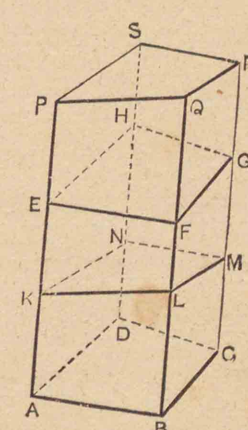
第四節

多面體ノ體積

定義33. 立體ノ**體積**トハ其ノ境界內ノ場所ノ量ナリ.

單ニ二ツノ立體ガ相等シト云フヿハ其ノ體積ガ等シキヿニシテ重ネ合スヿヲ得ルト得サルトニ係ラザルナリ.

定理28. 斜角壔ハ其ノ直截面ニ等シキ底面及ヒ其ノ側稜ニ等シキ側稜ヲ有スル直角壔ニ等シ.



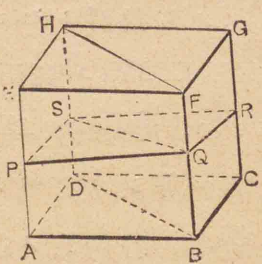
ABCD-EFGH ヲ斜角壔, KLMN ヲ其ノ直截面トセヨ, 然ルトキハ ABCD-EFGH ハ底面ガ KLMN ニ等シク, 側稜ガ AE ニ等シキ直角壔ニ等シカルベシ.

證. 斜角壔ノ總テノ側面ヲ延長シ, KP=AE ト取リ P ヲ過リ KLMN ニ平行ナル平面 PQRS ヲ書ク. 然ルトキハ角壔 KLMN-PQRS ハ其ノ側稜

KP ガ底面 KLMN ニ垂直ナルヲ以テ直角壔ナリ. 而シテ側稜 KP ハ斜角壔ノ側稜 AE ニ等シク, 叉多面體 ABCD-KLMN ト多面體 EFGH-PQRS トハ其ノ總テノ對應スル稜及ヒ立體角ガ夫々相等シキヿヲ容易ニ證明スルヿヲ得. 故ニ重ネ合ハスヿヲ得, 即全ク相等シ. 依リテ此二ツノ多面體ノ各ニ多面體 KLMN-EFGH ヲ加ヘタルモノハ相等シ. 即斜角壔 ABCD-EFGH=直角壔 KLMN-PQRS.

定理29. 平行六面體ノ二ツノ相對スル稜ヲ含ム平面ハ之ヲ二ツノ相等シキ三角壔ニ分ツ.

平行六面體 ABCD-EFGH ノ相對スル稜 BF, DH ヲ含ム平面 BDHF ハ之ヲ二ツノ相等シキ三角壔 ABD-EFH, BCD-FGH ニ分ツベシ.

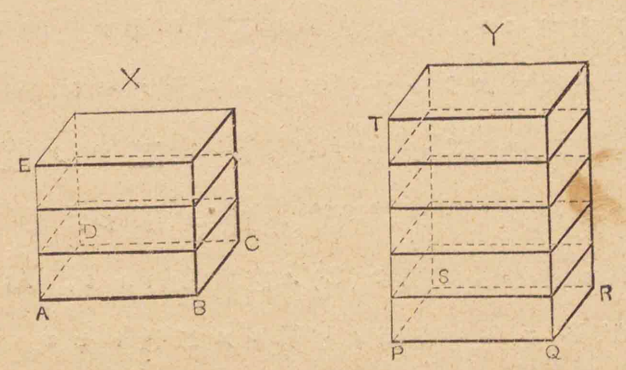


證. 先ツ ABD-EFH, BCD-FGH ハ各三角壔ナルヿ明ナリ. 次ニ平行六面體ノ直截面ヲ PQRS トセヨ. 然ルトキハ PQRS ガ平行四

邊形ナルヿハ容易ニ證明スルヿヲ得. SQ ハ其ノ對角線ナルヲ以テ △PQS≡△QRS, 而シテ PQS, QRS ハ二ツノ三角壔ノ直截面ナリ. 故ニ二ツノ三角壔ハ底面ガ夫々 PQS, QRS ニ等シク, 側稜ガ AE ニ等シキ直三角壔ニ等シ (六編定.28). 然ルニ二ツノ直角壔ハ底面ガ全ク相等シク, 側稜ガ相等シキトキハ重ネ合スヿヲ得ルハ明ナリ. 故ニ

三角壔 ABD-EFH=三角壔 BCD-FGH.

定理30. 底面ガ全ク相等シキ二ツノ直六面體ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ.



二ツノ直六面體 X, Y ニ於テ AE, PT ヲ各ノ高サトシ, 底面 ABCD≡底面 PQRS トセヨ, 然ルトキハ X:Y=AE:PT ナルベシ

證. 先ツ AE ト PT ガ公度ヲ有スル場合トス.
AE ヲ m 個ニ等分シ, 其一部分ガ PT ノ中ニ丁度 n 個ダケ含マレタリトセヨ. 然ルトキハ

$$AE:PT=m:n.$$

AE, PT ノ各分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ書ケ, X, Y ハ夫々 m, n 個ノ全ク相等シキ直六面體ニ分タルヽコハ容易ニ證明スルヲ得. 依リテ

$$X:Y=m:n,$$

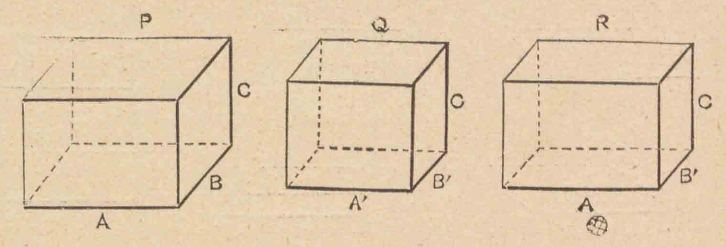
故ニ
$$X:Y=AE:PT.$$

次ニ AE, PT ガ公度ヲ有セザル場合ニモ尚此定理ハ成リ立ツベシ. 其證明ハ平面幾何學ノ比例ノ部ニテ屢々論ジタリシヲ以テ茲ニハ畧スベシ.

定理 31. 高サガ相等シキ二ツノ直六面體ノ比ハ其ノ底面ノ比ニ等シ.

P, Q ヲ相等シキ高サ (C) ノ直六面體トシ, A, B 及ビ A′, B′ ヲ各ノ底面ノ相隣レル二邊トセヨ.
然ルトキハ　$P:Q=A.B:A'.B'$ ナルベシ.

證. 高サ C, 底面ノ二邊ガ A, B′ ナル直六面體 R ヲ作レ. 直六面體ハ何レノ稜ニテモ高サト考フ



コヲ得,
故ニ定理 30 ニ依リテ $P:R=B:B'$
又同様ニ　$R:Q=A:A'$
此二ツノ比例式ヨリ相乘比ノ定理ニ依リ

$$P:Q=(B:B')\,(A:A'),$$

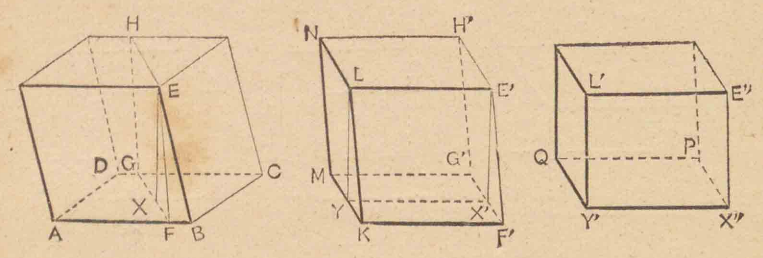
即
$$P:Q=A.B:A'.B'.$$

即定理ハ證明セラレタリ.

系. 底面ガ相等シク, 高サガ相等シキ二ツノ直六面體ハ相等シ.

定理 32. 一ツノ平行六面體ハ其ノ高サト, 底面ノ底邊及ヒ高サトヲ三ツノ稜トスル直六面體ニ等シ.

ABCD-E ヲ一ツノ平行六面體トシ, EX ヲ其ノ高サ, AB, FG ヲ夫々底面ノ底邊及ヒ高サトセヨ.



然ルトキハ ABCD-E ハ一ツノ頂點ニ出會フ三ツノ稜ガ夫々 EX, AB, FG ニ等シキ直六面體ニ等シカルベシ.

證. 平行六面體 ABCD-E ハ ▱CE ヲ底面, AB ヲ側稜トスル斜角壔ト考フコヲ得. 故ニ其體積ハ直截面 EFGH ニ等シキ底面, AB ニ等シキ側稜ヲ有スル直角壔ニ等シ(六編定.28). E'F'G'H'-L ヲ (AB=KF' ▱EG≡▱E'G') 此ノ如キ直角壔トセヨ. 又 ▱E'G' ハ矩形ナラザルガ故ニ此平行六面體(上ノ直角壔ハ勿論一ツノ平行六面體ナリ)ハ E'F'KL ヲ底面トシ, F'G' ヲ側稜トスル斜角壔ト考フコヲ得. 故ニ其體積ハ直截面 E'X'YL (∠H'E'L=R∠ナルヲ以テ直截面ハ E'L ヲ含ム)ニ等シキ底面, F'G' ニ等シキ側稜ヲ有スル直角壔ニ等シ. Y'X''PQ-E'' ヲ (F'G'=X''P, ▭E'Y≡▭E''Y') 此ノ如キ直角壔トセヨ.

故ニ ABCD-E=KF'G'M-E'=Y'X''PQ-E''

而シテ此終リノ直角壔ハ總テノ面ガ矩形ニシテ一ツノ直六面體ナリ.

且 E''X''=E'X'=EX

X''Y'=F'K=AB

X''P=F'G'=FG

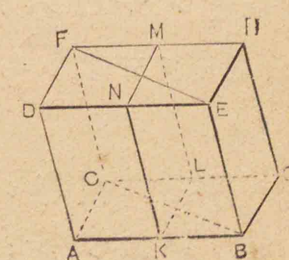
即任意ノ平行六面體 ABCD-E ハ其ノ高サ EX ト底面 ABCD ノ底邊 AB, 高サ FG トニ等シキ三ツノ稜 E''X'', X''Y', X''P ヲ有スル直六面體ニ等シ.

系. 高サ及ヒ底面ガ相等シキ平行六面體ハ相等シ.

本定理及ヒ定理31系ニ依リテ證明スルヲ得.

定理33. 三角壔ハ之ト等シキ底面,等シキ高サノ平行六面體ニ等シ.

ABC-DEF ヲ一ツノ三角壔トセヨ, 然ルトキハ此角壔ハ之ト等シキ底面, 等シキ高サノ平行六面體ニ等シカルベシ.



證. 稜 BE ヲ含ミ 平面

DC ニ平行ナル平面 EG ヲ引キ，又 FC ヲ含ミ平面 AE ニ平行ナル平面 CH ヲ引キ，二ツノ底面 ABC, DEF ノ延長ト出會ハシメヨ．然ルトキハ 平行六面體 ABGC-DEHF′ ヲ得．而シテ此六面體ハ三角壔 ABC-DEF ノ二倍ニ等シ(六編定29)．次ニ AB ノ中點 K ヲ過リ 平面 AF ニ平行ナル平面 KLMN ヲ引ケバ平行六面體 ABGC-DEHF ハ二ツノ全ク相等シキ平行六面體ニ分タル(其證明ハ容易ナリ)．故ニ其半分ノ平行六面體 AKLC-DNMF ハ三角壔 ABC-DEF ニ等シ．而シテ ▱AL＝△ABC ニシテ且與ヘラレタル三角壔ト此平行六面體トハ共通ノ高サヲ有ス．故ニ三角壔 ABC-DEF ハ之ト等シキ底面，等シキ高サノ平行六面體ニ等シ．

系 1. 角壔ハ之ト等シキ底面,等シキ高サノ平行六面體ニ等シ．

角壔ヲ三角壔ニ分チ本定理ニ依リテ證明スルヲ得．

系 2. 相等シキ底面及ビ相等シキ高サノ角壔ハ相等シ．

系1. 及ヒ定理32系ニ依リ容易ニ證明スルヲ得．

系 3. 底面ガ相等シキ角壔ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ．

各角壔ハ底面及ヒ高サ相等シキ直六面體ニ等シキヲ以テ定理30ニ依リテ容易ニ證明スルヲ得．

系 4. 高サガ相等シキ角壔ノ比ハ其ノ底面ノ比ニ等シ．

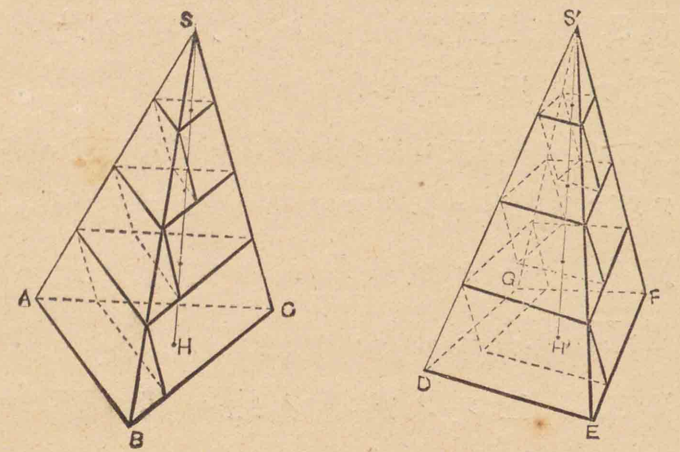
系 5. 二ツノ角壔ノ比ハ其ノ高サ及ヒ底面ノ比ノ相乘比ニ等シ．

定理 34. 相等シキ底面及ヒ相等シキ高サノ角錐ハ相等シ．

S-ABC, S′-DEFG ヲ二ツノ角錐トシ，其ノ底面 ABC, DEFG ガ相等シク且高サ SH, S′H′ ガ相等シトセヨ，然ルトキハ二ツノ角錐ハ相等シカルベシ，

證． 二ツノ角錐ノ高サヲ若干ノ部分ニ等分シ，各分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ畫キ，各ノ截面ノ下ニ，各截面ヲ上ノ底面トシ，角錐ノ高サヲ等分シタル一部分ヲ高サトスル所ノ角壔ヲ作レ．

アルトキハ二ツノ角錐ノ相對應スル截面ガ相等シク

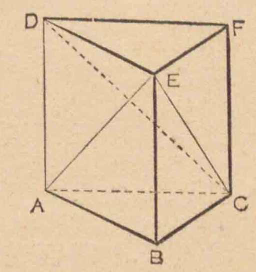


(六編定.25,系2) 高サガ相等シキヲ以テ相對應スル角壔ハ夫々相等シ(六編定.33,系2). 故ニ S-ABC, S′-DEFG ノ內ニ作ラレタル角壔ノ和ヲ夫々 V, V′ ニテ表セハ　　　V = V′

今各ノ高サヲ分チタル部分ノ數ヲ漸々增ストキハ V, V′ ハ漸々大キクナリ, 其部分ノ數ヲドコマデモ大キクスルトキハ終ニ V ノ限リハ S-ABC ニ等シク, V′ ノ限リハ S′-DEFG ニ等シカルベシ. 然ルニ V, V′ ハ角錐ノ內ニ在ル角壔ノ數ノ如何ニ係ラズ, 常ニ相等シ. 故ニ S-ABC ハ S′-DEFG ニ等シ.

定理35. 一ツノ三角壔ハ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヿヲ得.

ABC-DEF ヲ一ツノ三角壔トセヨ. 然ルトキハ之ヲ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヿヲ得ベシ.



證. 二ツノ平面 EAC, EDC ヲ畫ケバ角壔ハ EABC, EDAC, EDFC ナル三ツノ三角錐ニ分タル.

扨 EABC, EDFC ニ於テ ABC, DEF ヲ夫々ノ底面, E,C ヲ夫々ノ頂點ト考フレハ底面 ABC= 底面 DEF ニシテ, 高サハ平行ナル平面 ABC ト DEF トノ距離ナルヲ以テ相等シ. 故ニ EABC=CDEF (六編定.34).

又 EDAC, EDFC ニ於テ DAC, DFC ヲ夫々ノ底面, E ヲ共通ノ頂點ト考フレハ　底面 DAC=DFC ニシテ, 高サハ何レモ E ヨリ平面 DACF ニ至ル垂線ナリ. 故ニ EDAC=EDFC (六編定.34). 故ニ三ツノ三角錐ハ相等シ.

系1. 角錐ハ底面及ヒ高サガ相等シキ角壔ノ三分ノ一ニ等シ.

系2. 二ツノ角錐ノ比ハ其ノ底面ノ比及ヒ高サノ比ノ相乘比ニ等シ.

第四節之問題

問題34. 正四面體內ノ任意ノ一點ヨリ四ツノ面ヘ引ケル垂線ノ和ハ此四面體ノ高サニ等シ.

問題35. 四面體內ニ一點ヲ求メ, 此點ヲ共通ノ頂點トシ,四ツノ面ヲ夫々底面トスル四ツノ四面體ヲ相等シクスルヿ.

第六編之問題

問題36. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ,二ツノ與ヘラレタル直線ニ出會フ直線ヲ引クヿ.

問題37. 一ツノ直線ヲ過ル無數ノ平面アリ, 一ツノ點Aヨリ其等ノ平面ヘ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ.

問題38. 二ツノ三面角ハ其ノ平面角ガ夫々相等シキ𪜈ハ重ネ合スヿヲ得ルカ或ハ對稱ナリ.

問題39. 一ツノ二面角ガ直角ナル三面角ニ於テ何レニテモ一ツノ稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ直角三角形ナリ.

問題40. 正四面體ノ高サハ其ノ足ヨリ一ツノ面ヘ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ.

定義34. 二ツノ多面體ニ於テ

I. 相似ノ位置ニ在ル面ガ相似形,

II. 相似ノ位置ニ在ル二面角ガ夫々相等シ,

III. 相似ノ位置ニ在ル立體角ガ夫々相等シ.

ナル三ツノ要件ノ中, IトII, 或ハIトIIIヲ備フル𪜈ハ二ツノ多面體ハ相似ナリト云フ

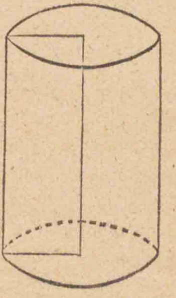
問題41. 二ツノ相似多面體ハ相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル同シ數ノ角錐ニ分ツコヲ得.

問題42. 二ツノ相似多面體ノ比ハ相對應スル稜ノ比ノ三乘比ニ等シ.

問題43. 角錐ヲ其ノ斜稜ノ中點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ爲ニ分タレタル二ツノ體ノ比如何.

第七編
圓壔 圓錐 球
第一節
直圓壔 及ヒ 直圓錐

定義1. 矩形ヲ其一邊ヲ軸トシテ一周廻轉セシムルトキ生スル立體ヲ**直圓壔**ト稱シ, 其邊ヲ直圓壔ノ**軸**ト稱ス.



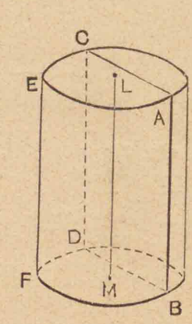
軸ニ對スル邊ハ一周廻轉シテ一ツノ曲面ヲ生シ, 軸ニ隣レル二邊ハ之ニ垂直ニシテ且相等シキヲ以テ軸ニ垂直ナル二ツノ全ク相等シキ圓ノ平面ヲ成ス. 故ニ直圓壔ハ一ツノ曲面ト二ツノ圓ノ平面トニテ界セラル. 此二ツノ圓ヲ直圓壔ノ**底面**(或ハ端面)ト稱シ, 底面ノ圓ノ半徑ヲ直圓壔ノ**半徑**ト稱ス. 軸ノ長サヲ直圓壔ノ**高サ**ト稱シ, 軸ニ對スル邊(卽廻轉スル邊)ヲ直圓壔ノ**母線**ト稱

本書ニハ直圓壔ノミヲ論ズルヲ以テ略シテ單ニ

圓壔ト稱スルヿアリ.

定理1. 直圓壔ノ一ツノ母線ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ矩形ナリ.

AB ヲ圓壔 BFD-AEC ノ一ツノ母線 LM ヲ其軸トセヨ. 然ルトキハ AB ヲ含ム平面ト圓壔ノ曲面及ビ底面トノ交リ ABDC ハ矩形ナルベシ.

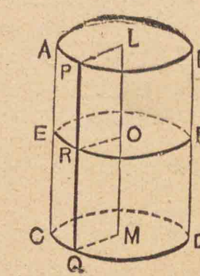


證. 平面ト曲面トノ交リナル CD 線上ノ一點 C ヨリ AB ニ平行ナル直線ヲ引ケ. 然レハ AB∥LM ナルヲ以テ此直線ハ軸 LM ニ平行ナルベシ, 即一ツノ母線ナリ. 故ニ曲面ノ上ニ在リ, 而シテ勿論截リタル平面ノ上ニモアリ. 故ニ曲面ト平面トノ交リナリ. 故ニ交リノ線 CD ハ一ツノ母線ナリ. 故ニ ABDC ハ平行四邊形ナリ. 而シテ軸 LM ⊥ 底面, 依リテ 母線 AB ⊥ 底面. 故ニ ∠CAB=R∠ 即 ABDC ハ矩形ナリ.

系. 直圓壔ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ矩形ナリ.

定理2. 直圓壔ノ底面ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口ハ底面ニ等シキ圓ナリ.

LM ヲ圓壔 CQD-APB ノ軸トシ, 線 ERF ヲ底面ニ平行ナル平面ト曲面トノ交リトセヨ. 然ルトキハ ERF ハ底面ニ等シキ圓ナルベシ.

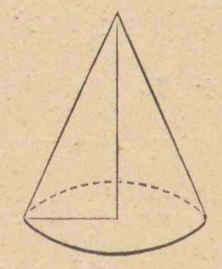


證. R ヲ交リノ上ノ任意ノ一點トシ, R ヲ過リ母線 PRQ ヲ引ケ. 軸ト截リタル平面トノ交リヲ O トシ, OR, MQ ヲ結ビ付ケ. 然ルトキハ OR∥MQ, OM∥RQ, 故ニ OR=MQ, 故ニ O ヨリ交リノ上ノ任意ノ點ヘノ距離ハ皆圓壔ノ半徑ニ等シ. 而シテ勿論一ツノ平面ノ上ニ在リ. 故ニ截リ口ハ中心 O ナル底面ニ等シキ圓ナリ.

系. 直圓壔ノ曲面ハ軸ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ.

定義2. 直角三角形ヲ其直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一周廻轉セシムルトキ生スル立體ヲ直圓錐

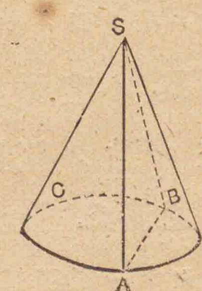
ト稱シ，其邊ヲ直圓錐ノ**軸**ト稱ス.



斜邊ハ一周廻轉シテ一ツノ曲面ヲ生シ，軸ト直角ヲナス邊ハ軸ニ垂直ナル一ツノ圓ノ平面ヲナス. 故ニ直圓錐ハ一ツノ曲面ト圓ノ平面トニテ界セラル. 此圓ノ面ヲ直圓錐ノ**底面**ト稱シ，底面ノ圓ノ半徑ヲ直圓錐ノ**半徑**ト稱ス. 軸ノ長サヲ直圓錐ノ**高サ**ト稱シ，斜邊(即廻轉スル邊)ヲ直圓錐ノ**母線**(或ハ斜高)ト稱ス.

本書ニハ直圓錐ノミヲ論スルヲ以テ畧シテ單ニ圓錐ト稱スルヿアリ.

定理3. 直圓錐ノ頂點ヲ過ル平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ.



Sヲ圓錐S-ABCノ頂點トセヨ. 然ルトキハSヲ過ル平面ト圓錐ノ曲面及ヒ底面トノ交リSABハ二等邊三角形ナルベシ.

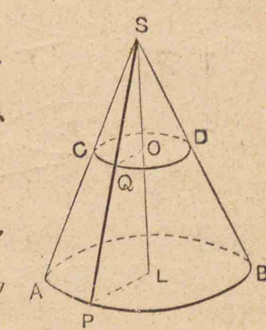
證. 直線SA, SBヲ引ク. 然ル

トキハSA, SBハ何レモ母線ナリ. 故ニ曲面ノ上ニ在リ，而シテ勿論截リタル平面ノ上ニモアリ. 即曲面ト平面トノ交リナリ. 故ニ截リ口SABハ三角形ナリ. 而シテSA=SB 故ニSABハ二等邊三角形ナリ.

系. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

定義3. 軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ノ頂角ヲ直圓錐ノ**頂角**ト稱ス.

定理4. 直圓錐ノ底面ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口ハ圓ナリ.



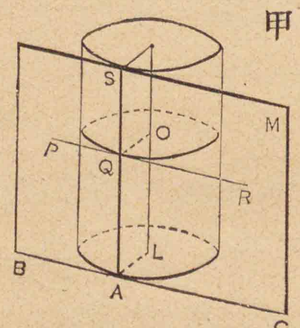
SLヲ圓錐S-APBノ軸トシ，線CQDヲ底面ニ平行ナル平面ト曲面トノ交リトセヨ. 然ルトキハCQDハ圓ナルベシ.

證. Qヲ交リノ上ノ任意ノ一點トシ，Qヲ過リ母線SQPヲ引ク，軸ト截リタル平面トノ交リヲOトシ. OQ, LPヲ結ヒ付ク.

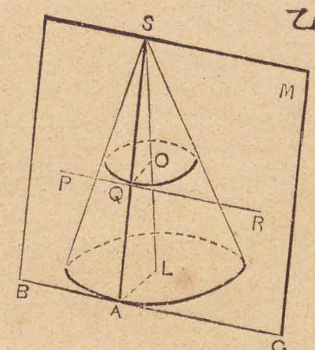
然ルトキハ OQ∥LP, 故ニ SL:SO=PL:QO
而シテ SL, SO, PL ハ不變ナルヲ以テ QO モ不變ナリ.
故ニ O ヨリ交リノ上ノ任意ノ點ヘノ距離ハ皆 OQ ニ等シ. 而シテ勿論一ツノ平面上ニ在リ. 故ニ截リ口ハ中心 O ナル一ツノ圓ナリ.

定理 5. 直圓壔或ハ直圓錐ノ一ツノ母線ト其ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ其母線ノ外ノ點ニ於テ圓壔或ハ圓錐ト出會フヿナシ.

甲



乙



AS ヲ圓壔(甲圖) 或ハ圓錐(乙圖)ノ一ツノ母線, BAC ヲ其ノ端 A ニ於ケル底面ノ切線トシ. AS, BC ヲ含ム平面ヲ M トセヨ. 然ルトキハ M ト圓壔或ハ圓

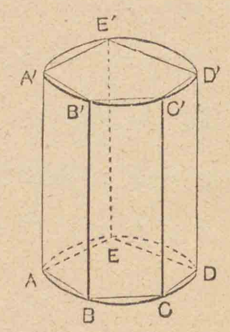
錐トハ AS ノミヲ共通ニ有シ其外ノ點ニ於テ出會フヿナカルベシ.

證. 平面 M 上ニ於テ AS 外ニ任意ノ點 P ヲ取レ, 今 P ガ圓壔或ハ圓錐ノ外ニ在ルヿヲ證スベシ.
扨 P ヲ含ミ底面ニ平行ナル平面ヲ書キ之ト平面 M トノ交リヲ PQR, 又之ト軸トノ交リヲ O トシ, 圓壔或ハ圓錐トノ交リヲ中心 O, 半徑 OQ ナル圓トセヨ(七編定.2,4). 底面ノ中心 L ト A ヲ結ヒ付ク, 然ルトキハ PQR∥BAC, OQ∥LA. 故ニ ∠OQP=∠LAB =R∠. 故ニ PQR ハ Q ニ於テ截リ口ノ圓ノ切線ナリ. 依リテ P ハ圓周ノ外ニ在リ, 從フテ圓壔或ハ圓錐ノ外ニ在リ. 即平面 M ハ母線 AS ノ外ニ於テ圓壔或ハ圓錐ニ出會ハズ.

定義 4. 圓壔或ハ圓錐ト唯一ツノ母線ニ於テ出會ヒ其他ニ於テ決シテ出會ハザル平面ヲ圓壔或ハ圓錐ノ**切平面**ト稱シ, 平面ハ其母線ニ於テ圓壔或ハ圓錐ニ**切ス**ト云フ.

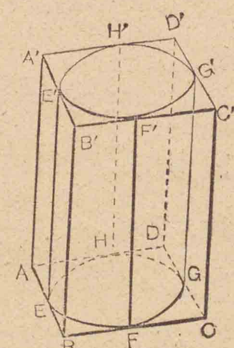
定義 5. 直角壔ノ底面ガ直圓壔ノ底面ニ內接スルトキハ其角壔ハ其圓壔ニ**內接ス**ト云フ.

多角形ABCDEガ直圓壔ノ底面ニ内接スルトキ各頂點ヲ過リ母線AA′, BB′等ヲ引キ, A′B′C′D′E′ヲ結ビ付ケヨ. 母線ハ皆平行ナルヲ以テAA′トBB′, BB′トCC′等ヲ含ミ平面ヲ畫ケバ ABB′A′, BCC′B′等ハ皆矩形(七編定.1)ニシテ直角壔ABCDE-A′B′C′D′E′ヲナス. 故ニ圓壔ニ内接スル直角壔ノ側稜ハ圓壔ノ母線ナリ.



定義6. 直角壔ノ底面ガ直圓壔ノ底面ニ外接スルトキハ其角壔ハ其圓壔ニ**外接**スト云フ.

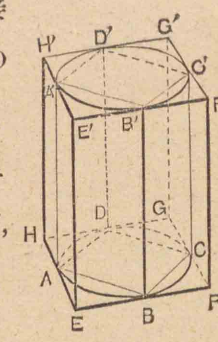
多角形ABCDガ直圓壔ノ底面ニ外接スルトキAB, BC等ノ切點E, F等ニ於テ圓壔ノ母線EE′, FF′等ヲ引キABトEE′, BCトFF′等ヲ夫々含ム所ノ平面ヲ畫キ 圓壔ノ他ノ底面ノ延長ト多角形A′B′C′D′ニ於テ出合ハシメヨ. 此等ノ平面ハ皆軸ニ平行ナルヲ以テABCD-A′B′C′D′ハ一ツノ直角壔ニシテ其側面ハ皆圓壔ノ切平面ナリ(七編定.5)



故ニ圓壔ニ外接スル直角壔ノ側面ハ皆圓壔ノ切平面ナリ.

定理6. 圓壔ハ之ニ内接或ハ外接スル底面ガ正多角形ナル直角壔ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ.

證. ABCDヲ圓壔ノ底面ニ内接スル正方形トシ. EFGHヲA,B,C,Dニ引ケル切線ノナス正方形トセヨ. ABCD, EFGHヲ夫々底面トシ圓壔ニ内接,外接スル直角壔ABCD-A′B′C′D′, EFGH-E′F′G′H′ヲ書ク(七編定義5,6). 然ルトキハ圓壔ハ内接直角壔ヨリ大ニシテ外接直角壔ヨリ小ナルコハ公理的ナリトス.

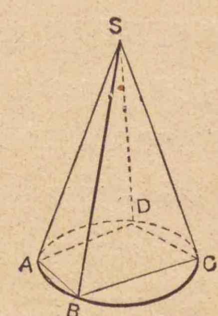


今内接正方形及ビ外接正方形ノ邊數ヲ漸次二倍ニナシ 之ヲ底面トスル直角壔ヲ書ケバ角壔ノ底面ノ周ガ漸次圓壔ノ底面ノ圓周ニ近ツクト同時ニ内接角壔ノ側面ハ漸次增大シ, 外接角壔ノ側面ハ漸次減少シ, 二ツナガラ圓壔ノ曲面タルコニ近ヅクベシ. 故ニ内接,外接角壔ノ底面ノ邊數ヲドコマ

デモ增スルトキハ其ノ周ノ限リガ圓周ナル(平面,四編補定理3)ト同時ニ角壔ノ側面ノ限リハ圓壔ノ曲面ナルベシ. 故ニ圓壔ハ之ニ内接或ハ外接スル底面ガ正多角形ナル直角壔ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ.

定義7. 角錐ノ底面ガ直圓錐ノ底面ニ内接シ, 頂點ガ共通ナルトキハ其角錐ハ其圓錐ニ内接スト云フ.

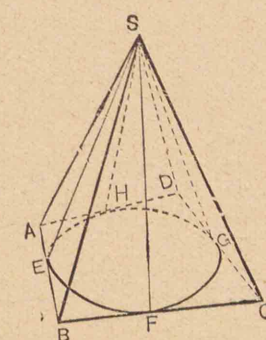
多角形 ABCD ガ圓錐ノ底面ニ内接スルトキ圓錐ノ頂點ト多角形ノ各邊トヲ含ム平面ヲ書ケバ二等邊三角形 SAB 等ニテ圓錐ニ交リ(七編定.3) 角錐 S-ABCD ヲナス. 故ニ圓錐ニ内接スル角錐ノ斜稜ハ圓錐ノ母線ナリ.



定義8. 角錐ノ底面ガ直圓錐ノ底面ニ外接スルトキハ其角錐ハ其圓錐ニ外接スト云フ.

多角形 ABCD ガ圓錐ノ底面ニ外接スルトキ AB, BC 等ノ切點 E, F 等ニ於テ圓錐ノ頂點 S ヨリ母線 SE, SF ヲ引キ, AB ト SE, BC ト SF 等ヲ夫々含ム所ノ平面

ヲ書ケバ此等ノ平面ハ皆 S ニ於テ相交リ. 角錐 S-ABCD ヲナス. 而シテ其斜面 SAB 等ハ皆圓錐ノ切平面ナリ(七編定.5) 故ニ圓錐ニ外接スル角錐ノ側面ハ皆圓錐ノ切平面ニシテ頂點ハ共通ナリ.



定理7. 直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ.

定理6ノ圓壔ヲ圓錐ニ, 角壔ヲ角錐ニ換ヘ, 同樣ニ證明スルヿヲ得.

第二節

球

定義9. 半圓ヲ其直徑ヲ軸トシテ一周廻轉セシムルトキ生スル所ノ立體ヲ**球**ト稱ス. 球ヲ界スル表面即半圓周ガ廻轉シテ生スル所ノ曲面ヲ**球面**ト稱ス.

廻轉セシメタル半圓ノ中心ヨリ球面上ノ何レノ點ヘノ距離ハ皆半圓ノ半徑ナルヲ以テ總テ相等シ. 此中心ヲ球ノ**中心**ト稱ス. 中心ヨリ球面ノ任意ノ點ヘ引ケル直線ヲ球ノ**半徑**ト稱ス. 中心ヲ過リ兩端ガ球面ニ終ル直線ヲ球ノ**直徑**ト稱ス. 直徑ハ半徑ノ二倍ナリ. 直徑ノ兩端ニ在ル二ツノ點ヲ**對點**ト稱ス.

空間ノ一點ヨリ球ノ中心ニ至ル距離ガ其ノ半徑ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從フテ其點ハ球面ノ外ニ, 或ハ其ノ上ニ, 或ハ其ノ内ニ在ルコト明ナリ.
故ニ球面ニ次ノ如キ定義ヲ與フルコトヲ得.

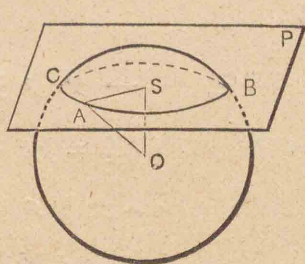
球面ハ一ツノ定マレル點ヨリ定マレル距離ニ

在ル點ノ軌跡ナリ.

而シテ球ハ此球面ヲ以テ圍マレタル立體ナリト云フヲ得ベシ.

定理8. 球ヲ平面ニテ截リタル截リ口ハ圓ナリ.

平面Pガ中心Oナル球ヲ截リ平面ト球面トノ交リヲABCトセヨ. 然ルトキハABCハ圓ナルベシ.



證. 先ツ平面ガ球ノ中心ヲ過ルトキハ截リ口ハ球ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ナルコトハ明瞭ナリ.

次ニ平面ガ中心ヲ過ラザル場合ヲ論ズベシ.

Oヨリ平面Pヘ垂線OSヲ引キ, 交リノ上ノ任意ノ點Aヲ取リOA, SAヲ結ビ付クヨ, OAハ球ノ半徑ナルヲ以テ不變ナリ, 從フテ其ノ正射影SAハ不變ナリ. 故ニ截リ口ABCハSヲ中心トセル一ツノ圓周ナリ.

定義10. 球ノ中心ヲ過ル平面ニ依リテノ截

ロヲ大圓ト稱シ，其他ノ平面ニ依リテノ截リロヲ小圓ト稱ス.

系 1. 球ノ中心ヨリ等距離ニ在ル小圓ハ相等シク．距離ノ等シカラザル小圓ハ球ノ中心ニ近キモノガ他ヨリ大ナリ.

系 2. 一ツノ球ノ任意ノ二ツノ大圓ハ其ノ直徑ニテ交ル.

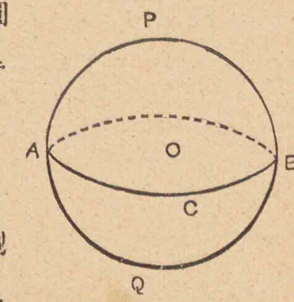
何トナレハ大圓ノ平面ハ球ノ中心ヲ過ルヲ以テ交リハ各ノ大圓ノ直徑ナレハナリ.

系 3. 球面上對點ナラザル任意ノ二點ハ大圓ヲ定ム.

何トナレハ其二點ト中心トヲ過ル平面ハ唯一ツニ限レハナリ.

問題44. 球面上ノ一ツノ點ニ於テ出會フ所ノ大圓ハ又其ノ對點ニ於テ出會フ.

定理 9. 大圓ハ球ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ.



ACB ヲ中心 O ナル球ノ大圓トセヨ. 然ルトキハ之ニ依リテ分タレタル二ツノ部分 APB, AQB ハ全ク相等シカルベシ.

證. 一ツノ部分 AQB ヲ倒マニシテ他ノ部分 APB ノ上ニ兩方ノ大圓ヲ重ネ合セ，而シテ二ツノ部分ハ此大圓ノ同シ側ニ在ル樣ニ置ク. 然ルトキハ二ツノ部分ノ表面 APB, AQB ノ上ノ點ハ總テ中心 O ヨリ等距離ニ在ルヲ以テ(七編定義9)二ツノ表面ハ全ク重ナリ合フ. 故ニ二ツノ部分ハ全ク相等シ.

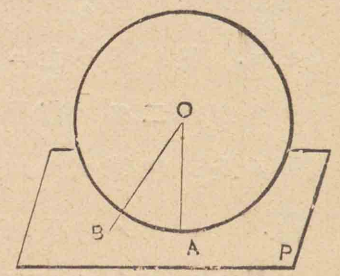
定義 11. 大圓ニ依リテ分タレタル球ノ各ノ部分ヲ半球ト稱ス.

定理 10. 球面ト一點ニ於テ出會ヒ其他ニ於テ出會ハザル平面ハ一ツ有リ，而シテ唯一ツニ限ル.

A ヲ中心 O ナル球面上ノ一點トセヨ，然ルトキハ此點ノミニ於テ球面ニ出會ヒ其他ノ點ニ於テ再ヒ出會ハザル平面ハ一ツハ必ス有ルベク. 而シテ唯

一ツニ限ルベシ.

證. OA ヲ結ヒ付ク.



A ニ於テ之ニ垂直ナル平面 P ヲ引ク. 然ルトキハ O ヨリ平面 P 上ノ他ノ點(B ノ如キ)ヘ引ケル直線ハ何レモ OA ヨリ大ナリ(六編定.3) 故ニ P 上 A ノ他ノ點ハ何レモ球ノ外ニ在リ(七編定義9). 故ニ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル平面ハ其他ノ點ニ於テ球面ト出會ハザルナリ.

次ニ此ノ如キ平面ハ一ツヨリ外ニナシ.

何トナレハ A ヲ過ル其他ノ平面ヲ書クハ OA ハ其平面ヘ斜線ナルヲ以テ O ヨリ之ヘ引ケル垂線ハ(OS トス)半徑 OA ヨリ小ナリ. 故ニ垂線ノ足(S)ハ球ノ内ニ在リ(七編定義9). 故ニ此平面ハ球ト(中心 S, 半徑 SA ナル)圓ニ於テ交ル(七編定.8). 故ニ唯一點ヲ球面ト共通ニ有スル平面ハ一ツニ限ル.

定義12. 球面ト唯一點ニ於テ出會ヒ, 四方ヘ限リ無ク延長スルモ再ヒ之ト出會ハザル平面ヲ球ノ**切平面**ト稱シ, 平面ハ其點ニ於テ球ニ**切ス**

ト云フ. 其點ヲ**切點**ト稱ス.

依リテ本定理ヲ下ノ如ク述フルヿヲ得.

球ノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル平面ハ此球ニ切ス.

系1. 此定理ノ逆モ亦眞ナリ.

系2. 切平面上ニ在リテ切點ヲ過ル直線ハ再ヒ球面ト出會ハズ.

定義13. 球面ト一點ニ於テ出會ヒ双方ヘ限リナク延長スルモ再ヒ之ト出會ハザル直線ヲ球ノ**切線**ト稱シ, 直線ハ其點ニ於テ球ニ**切ス**ト云フ. 其點ヲ**切點**ト稱ス.

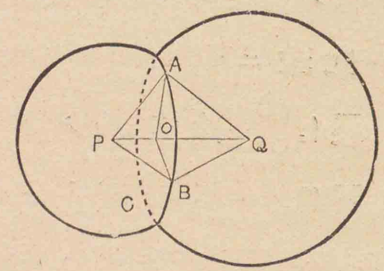
系3. 球ノ切線ハ其ノ切點ヘ引ケル半徑ニ垂線ナリ.

定義14. 二ツノ球ノ各ガ一部分他ノ内ニ在リテ一部分他ノ外ニ在ルトキハ, 二ツノ球ハ**交ル**ト稱シ, 二ツノ球面ノ出會フ所ヲ其ノ**交リ**ト稱ス.

定理11. 二ツノ球ノ交リハ圓ナリ.

中心 P, Q ナル二ツノ球ノ交リ ABC ハ圓ナルベシ

證. 交リノ上ニ任意ノ二點A, Bヲ取リ, PA, PB, QA, QBヲ結ヒ付ケヨ. 然ルトキハ $\triangle PAQ \equiv \triangle PBQ$ 故ニA, Bヨリ共通ノ底邊PQヘ引クル垂線ハ同一點Oニ於テ出會ヒ, 且相等シ. 故ニ二ツノ球ノ交リノ上ノ任意ノ點ハ皆Oニ於テPQニ垂直ナル平面上ニ在リテ且Oヨリ相等シキ距離ニ在リ. 故ニ交リハOヲ中心トセル圓周ナリ.



系1. 二ツノ球ノ交リノ圓ノ平面ハ其ノ中心ヲ結ヒ付クル直線ニ垂直ナリ.

系2. 唯一點ニ於テ出會ヒ,一ツガ全ク他ノ外ニ在ルカ, 或ハ一ツガ全ク他ノ內ニ在ル二ツノ球アリ.

何トナレハ相交ル二ツノ球ノ中心ヲ漸々遠サケ或ハ漸々近ツクルトキハ其ノ交リナル圓周ハ漸々小サクナリ, 其ノ中心距離ヲ半徑ノ和或ハ差ニ等シカラシムルトキハ 圓ノ半徑ハ限リナク小サク 即

一ツノ點トナル. 故ニ二ツノ球ハ唯一點ニ於テ出會ヒ, 各ガ全ク他ノ外ニ在ルカ, 或ハ一ツガ全ク他ノ內ニ在リ.

定義15. 唯一點ニ於テ出會フ所ノ二ツノ球ハ**相切ス**ト稱ス. 而シテ各ガ全ク他ノ外ニ在ルカ, 或ハ一ツガ全ク他ノ內ニ在ルカニ從フテ**外切**或ハ**內切ス**ト云フ.

系3. 二ツノ球ガ相切スレバ其ノ中心ヲ結ヒ付クル直線ハ切點ヲ過ル.

問題45. 二ツノ球ガ相切スレハ其ノ切點ニ於テ共通ノ切平面ヲ有ス.

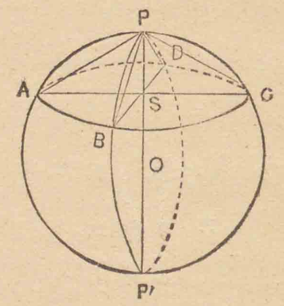
定義16. 大圓或ハ小圓ノ平面ニ垂直ナル球ノ直徑ノ兩端ヲ其圓ノ**極**ト稱シ, 其直徑ヲ其圓ノ**軸**ト稱ス.

定義17. 一ツノ圓ノ極ヨリ其圓周上ノ一點ニ至ル大圓弧ノ長サヲ此圓ノ**極距離**ト稱ス.

定理12. 一ツノ圓ノ極距離ハ相等シ.

P, P′ヲ圓ABCDノ二ツノ極トシ, PAP′C, PBP′Dヲ兩極ヲ過ル大圓トセヨ. 然ルトキハ弧PA, PB, PC

PD ハ相等シカルベシ.



證. 圓 ABCD ノ中心ヲトセハ △PSA, △PSB 等ノ相等シキヿハ直ニ證明スルヲ得. 故ニ弦 PA, PB 等ハ相等シ. 依リテ弧 PA, PB 等ハ相等シ.

系1. 大圓ノ二ツノ極ヨリノ極距離ハ皆相等シ.

何トナレハ P, P′ ヲ大圓 ABCD ノ二ツノ極トスレハ 弧 PA, P′A, PB, P′B 等ハ大圓 PAP′C, PBP′D ノ中心ニ於テノ直角ニ對スル弧ナルヲ以テ各四分圓ニ等シケレハナリ.

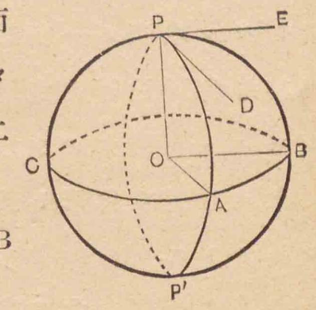
系2. 大圓上ノ(對點ナラザル)二點ヨリ球面上ノ一點ニ至ル大圓弧ガ各四分圓ニ等シケレバ其點ハ其大圓ノ極ナリ

定義18. 球面上二ツノ相交ル圓周ノナス角トハ其交點ニ於テノ各ノ切線ノナス角ヲ云フ.

定義19. 球面角トハ二ツノ大圓ノナス角

ヲ云フ.

定理13. 一ツノ球面角ハ其ノ頂點ヲ極トシタル大圓ノ, 其角ノ邊ノ間ニ夾マレタル弧ノ上ニ立ツ中心角ニ等シ.



APB ヲ中心 O ナル球ノ球面角トシ, 其頂點 P ヲ極トシタル大圓 ABC ノ周ガ球面角ノ二邊ノ間ニ夾マレタル弧ヲ AB トセヨ. 然ルトキハ球面角 APB ハ ∠AOB ニ等シカルベシ.

證. P ニ於テ圓 PAP′, PBP′ ニ夫々切線 PD, PE ヲ引ケ, 然ルトキハ PD, PE ハ何レモ PO ニ垂線ナルヲ以テ夫々 OA, OB ニ平行ナリ. 故ニ ∠DPE=∠AOB, 即球面角 APB ハ中心角 AOB ニ等シ.

定義20. 月形トハ二ツノ大圓ノ半圓周ヲ以テ圍ミタル球面ノ一部分ナリ.

定義21. 月形ヲ圍ム半圓周ノナス角ヲ其月形ノ角ト稱ス.

系1. 二ツノ月形ノ比ハ其ノ角ノ比

ニ等シ.

系2. 月形ト全球面トノ比ハ其ノ角ト四直角トノ比ニ等シ.

定義22. 球面多角形トハ大圓ノ弧ヲ以テ圍ミタル球面ノ一部分ナリ.

其邊,角,頂點等ノ定義ハ平面多角形ニ於テ與ヘタルモノト同様ナルヲ以テ之ヲ畧ス.

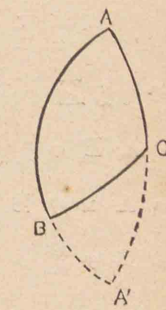
單ニ球面多角形ト云フ𪜈ハ其邊ハ何レモ劣弧ナルモノトス.

球面多角形ハ之ヲ同シ球面上ノ他ノ部分或ハ等シキ半徑ノ他ノ球面上ニ移シ，全ク其面上ニ在ル樣ニ置クヿヲ得.

故ニ二ツ或ハ二ツヨリ多クノ球面多角形ヲ較ブル𪜈ハ總テ同シ球面上或ハ相等シキ半徑ノ球面上ニ在ルモノトス.

定義23. 球面三角形トハ三ツノ邊ヲ有スル球面多角形ナリ.

球面三角形ノ角ハ皆劣角ナリ. 何トナレハ三角形 ABC ニ於テ 邊 AB, AC ハ劣弧ナルヲ以テ之ヲ



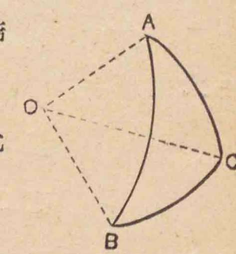
延長シ對點 A′ ニ於テ出會ハシメヨ.

然ル𪜈ハ 角 ABC ニ角 A′BC ヲ加ヘタルモノガ二直角ニ等シ

故ニ角 ABC ハ劣角ナリ, 同樣ニ其他ノ角モ皆劣角ナリ.

定理14. 球面三角形ノ二邊ハ合セテ他ノ邊ヨリ大ナリ.

ABC ヲ一ツノ球面三角形トセヨ. 然ル𪜈ハ其ノ任意ノ二邊(AC, CB トス)ノ和ハ他ノ一邊(AB)ヨリ大ナルベシ.



證. A,B,C ヲ球ノ中心 O ニ結ヒ付ケヨ. 然ル𪜈ハ相等シキ圓ノ中心角ノ比ハ其ガ立ツ所ノ弧ノ比ニ等シキヲ以テ

$\angle AOB : \angle BOC : \angle COA = AB : BC : CA$

依リテ $\angle AOB : \angle BOC + \angle COA = AB : BC + CA$

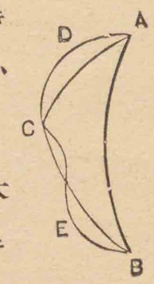
而シテ O ニ於テ一ツノ三面角ヲナスヲ以テ

$$\angle AOB < \angle BOC + \angle COA$$

故ニ $$AB < BC + CA.$$

定理15. 球面上ノ二點間ノ最短キ途ハ此二點ヲ過ル大圓ノ劣弧ナリ.

A, B ヲ球面上ノ二點トセヨ. 然ルトキハ A ヨリ B ニ至ル球面上ノ最短キ途ハ A, B ヲ過ル大圓ノ劣弧 AB ナルベシ.



證. ADCEB ヲ A ヨリ B ニ至ル大圓弧ニアラザル他ノ線トセヨ. 其上ニ任意ノ一點 C ヲ取リ, AC, CB ヲ大圓弧ニテ結ビ付ケ. 然ルトキハ

弧 AB < 弧 AC + 弧 CB　(七編定.14)

次ニ線 ADC, 線 CEB 上ニ夫々 D, E ヲ取リ前ト同樣ニ大圓弧ニテ結ビ付クレハ

弧 AC < 弧 AD + 弧 DC,

弧 CB < 弧 CE + 弧 EB

故ニ　弧 AB < 弧 AD + 弧 DC + 弧 CE + 弧 EB

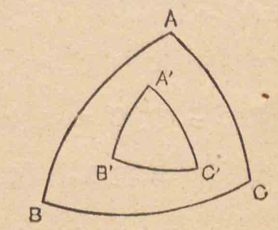
此方法ヲドコマデモ續クレハ其限リハ下ノ如キ不等式ヲ得ルニ至ルベシ.

弧 AB < 線 ADCEB

故ニ大圓弧 AB ハ A ヨリ B ニ至ル最短キ途ナリ.

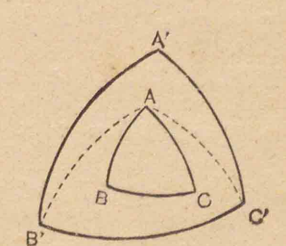
定義24. 一ツノ球面三角形ノ各邊ノ二ツノ極ノ中,其邊ニ對スル頂點ト同シ側ニ在ルモノヲ頂點トスル所ノ三角形ヲ元ノ三角形ノ**極三角形**ト稱ス.

圖ニ於テ ABC ヲ一ツノ球面三角形トシ, 其ノ邊 BC ノ二ツノ極ノ中, A' ヲ BC ニ對スル頂點 A ト同シ側ニ在ルモノトシ. 次ニ B' ハ CA ニ就テ, C' ハ AB ニ就テ同シ關係ノ點ナレハ三角形 $A'B'C'$ ハ三角形 ABC ノ極三角形ナリ.



定理16. 一ツノ球面三角形ガ他ノ球面三角形ノ極三角形ナルトキハ後ノ三角形モ亦前ノ三角形ノ極三角形ナリ.

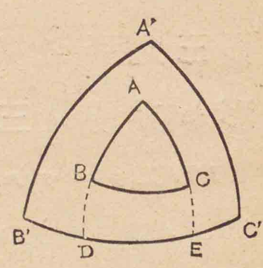
$A'B'C'$ ヲ一ツノ球面三角形 ABC ノ極三角形トシ, A', B', C' ヲ夫々邊 BC, CA, AB ノ極トセヨ. 然ルトキハ ABC ハ $A'B'C'$ ノ極三角形ナルベシ.



證. B′ハ弧ACノ極ナリ. 故ニ弧AB′ハ四分圓周ナリ(七編定.12,系1). 同様ニ弧AC′モ四分圓周ナリ. 故ニAハ弧B′C′ノ極ナリ(七編定.12,系2). 而シテA′ハAト同シ側ニ在リ(七編定義24). 故ニAA′ハ四分圓周ヨリ小ナリ, 即AハB′C′ノ二ツノ極ノ中A′ト同シ側ニ在ルモノナリ.

同様ニB, CモC′A′, A′B′ノ極ニシテB′, C′ト同シ側ニ在リ. 故ニABCハA′B′C′ノ極三角形ナリ.

定理17. 球面三角形ノ各ノ角ト其ノ極三角形ノ之ニ對應スル邊ノ上ニ立ツ中心角トハ互ニ補角ナリ.



ABCヲ球面三角形トシ, A′B′C′ハ其ノ極三角形ニシテA′, B′, C′ヲ夫々邊BC, CA, ABノ極トセヨ. 然ルトキハ 角A, B, Cハ夫々邊B′C′, C′A′, A′B′ノ上ニ立ツ中心角ト互ニ補角ヲナスベシ.

證. 邊AB, AC或ハ其ノ延長(圖ニ於テハ延長ノ場合)ガB′C′或ハ其ノ延長ト出會フ點ヲ夫々D, Eト

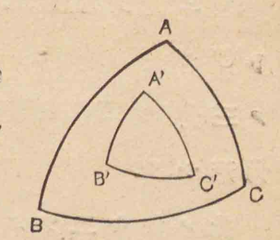
セヨ. AハB′C′ノ極ナルヲ以テ∠AハDEノ上ニ立ツ中心角ニ等シ(七編定.13). 又B′, C′ハCA, ABノ極ナルヲ以テ 弧B′E, C′Dハ何レモ四分圓ナリ.

故ニ 弧B′E+弧C′D=弧DE+弧B′C′=半圓周 故ニ DEノ上ニ立ツ中心角+B′C′ノ上ニ立ツ中心角=2R∠

即∠AトB′C′ノ上ニ立ツ中心角トハ互ニ補角ナリ.

同様ニ∠B, ∠Cハ夫々C′A′, A′B′ノ上ニ立ツ中心角ト互ニ補角ナリ.

定理18. 球面三角形ノ三ツノ角ノ和ハ六直角ヨリ小ニシテ二直角ヨリ大ナリ.



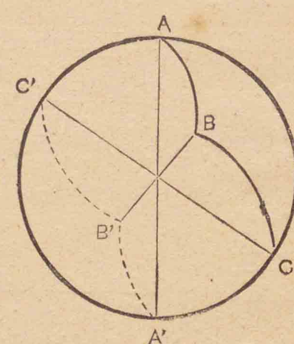
ABCヲ球面三角形トセヨ. 然ルトキハ∠A+∠B+∠Cハ六直角ヨリ小ニシテ二直角ヨリ大ナルベシ.

證. ∠A, ∠B, ∠Cハ各二直角ヨリ小ナリ(七編定義23). 故ニ其和ハ六直角ヨリ小ナリ.

次ニ A'B'C' ヲ ABC ノ極三角形トセヨ. 然ルトキハ ∠A ト邊 B'C' ノ上ニ立ツ中心角トノ和ハ二直角ニ等シ(七編定.17). ∠B, ∠C ニ於テモ同様ナリ.
故ニ三ツノ角 A, B, C ノ和ト邊 B'C', C'A', A'B' ノ上ニ立ツ中心角トノ和ハ六直角ニ等シ. 然ルニ A', B', C' ヲ中心ニ結ビ付クレバ一ツノ三面角ヲナス. 而シテ三面角ノ頂點ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ (六編定.23). 故ニ三ツノ角 A, B, C ノ和ハ二直角ヨリ大ナリ.

定義25. 二ツノ球面三角形ニ於テ一ツノ各頂點ガ他ノ各頂點ノ對點ナルトキハ此二ツノ三角形ヲ**對稱球面三角形**ト稱ス.

圖ニ於テ A ト A', B ト B', C ト C' ガ夫々對點ナルトキハ二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ハ對稱三角形ナリ.



此ノ如キ二ツノ三角形ハ其ノ相對應スル邊及ビ角ハ相等シ(其證明ハ容易ナリ)ケレドモ其ノ順序ガ反對ナルヲ以テ之ヲ重ネ合スコトヲ得ズ

茲ニ取除ケノ場合トシテ二ツノ三角形ガ二等邊ナルトキハ順序ハ何レヨリスルモ同シコトナルヲ以テ之ヲ重ネ合スコトヲ得, 即全ク相等シ,

二ツノ球面三角形ノ各頂點ガ互ニ對點ナラザルモ其ノ邊及ビ角ガ夫々相等シク, 而シテ其ノ順序ガ反對ナルトキハ此二ツノ三角形ヲ各ノ頂點ガ他ノ頂點ノ對點ナル様ニ置クコトヲ得ベシ. 故ニ此條件ヲ備フルトキハ位置ノ如何ニ係ラズ之ヲモ對稱球面三角形ト稱スルコトアリ.

問題46. 二ツノ對稱球面三角形ハ相等シ.

第二節之問題

問題47. 同シ平面上ニ在ラザル四ツノ點ハ球ヲ定ム.

問題48. 四面體ノ四ツノ面ニ切スル球ヲ畫クコト.

此ノ如キ球ハ四面體ニ**內接**シ, 四面體ハ球ニ**外接**スト云フ.

問題49. 球面三角形ノ周ハ大圓ノ周ヨリ小ナリ.

問題50. 二ツノ球面三角形ハ下ノ場合ニ於テ重ヲ合スコヲ得ルカ, 或ハ對稱ナリ.

I. 二ツノ邊ト其夾角ガ夫々相等シキ件.

相對應スル邊ガ同シ順ニ在ル件ハ平面幾何學ニ於ケル如ク重ヲ合シテ證明スベシ. 又反對ノ順ニ在ル件ハ一ツノ對稱三角形ヲ作レハ他ト重ヲ合スコヲ得.

II. 二ツノ角ト其間ノ邊ガ夫々相等シキ件.

I ト同樣ニ證明スベシ.

III. 三ツノ邊ガ夫々相等シキ件.

三ツノ邊ハ球ノ中心ニ於テ三面角ヲナスガ故ニ第六編問題38ニ依リテ證明スルヲ得.

IV. 三ツノ角ガ夫々相等シキ件.

各ノ三角形ノ極三角形ヲ書ケバ此極三角形ハ定理17ニ依リテ三ツノ邊ガ相等シ　故ニ III ノ場合ニ歸ス然ル後定理16ニ依リテ證明スルヲ得.

問題51. 二等邊球面三角形ノ相等シキ邊ニ對スル二ツノ角ハ相等シ.

問題52. 問題51ノ逆モ眞ナリ.

問題53. 球面三角形ノ二角相等シカラザレバ其大角ニ對スル邊ハ小角ニ對スル邊ヨリ大ナリ.

問題54. 問題53ノ逆モ眞ナリ.

定義26. 球面三角形ノ三ツノ角ノ和ト二直角トノ差ヲ**球面過剩**ト稱ス.

問題55. 球面三角形ハ其ノ球面過剩ノ半分ニ等シキ角ヲ有スル月形ニ等シ.

第七編之問題

問題56. 一ツノ圓壔ノ軸ノ上ニ中心ヲ有シ其ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル球面ト圓壔ノ曲面トハ其球ノ大圓ニシテ且圓壔ノ底面ニ等シキ圓ニ於テ出會ヒ,其他ニ於テ出會ハズ.

問題57. 一ツノ圓錐ノ軸ノ上ノ一點ヲ中心トシ,其點ヨリ母線ニ引ケル垂線ニ等シキ半徑ヲ有スル球面ト圓錐ノ曲面トハ其球ノ小圓ニ於テ出會ヒ,其他ニ於テ出會ハズ.

上ノ二ツノ場合ニ於テ球ト圓壔或ハ圓錐トハ相切スト云フ.

問題58. 高サ及ヒ直徑ノ等シキ圓壔ノ軸ノ中點ヲ中心トシ其ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル球面ハ圓壔ノ曲面ト其球ノ大圓ニ於テ出會ヒ, 其ノ二ツノ極ニ於テ底面ニ切シ其他ノ點ニ於テ出會ハズ.

問題59. 圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ノ三角形ノ內接圓ノ中心ヲ中心トシ, 其ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル球ハ圓錐ノ曲面ト其球ノ小圓ニ於テ出會ヒ其ノ一ツノ極ニ於テ底面ニ切シ其他

ノ點ニ於テ出會ハズ.

上ノ二ツノ場合ニ於テ球ハ圓壔或ハ圓錐ニ內接シ,圓壔或ハ圓錐ハ球ニ外接スト云フ.

第八編

立體ノ面積及ヒ體積ノ計算

面積

下ニ掲クルモノヽ中，其最明瞭ナルモノハ證明ヲ畧ス.

1. 直角壔ノ側面ノ面積.

直角壔ノ側面ノ面積ヲ表ス數 (a) ハ其ノ底面ノ周ノ長サヲ表ス數 (p) ト側稜ノ長サヲ表ス數 (h) トノ相乘積ニ等シ.

即 $$a=ph.$$

斜角壔ナレハ底面ノ周ノ代リニ直截面ノ周ヲ用フベシ(第六編問題26).

2. 直角錐ノ斜面ノ面積.

直角錐ノ斜面ノ面積ヲ表ス數 (a) ハ其ノ底面ノ周ノ長サヲ表ス數 (p) ト斜高ノ長サヲ表ス數 (s) トノ相乘積ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ.

即 $$a=\tfrac{1}{2}ps.$$

定義. 角錐或ハ圓錐ヲ其底面ニ平行ナル平面

ニ依リテ截ルトキハ底面ト此截面トノ間ニ夾マルヽ部分ヲ**截頭角錐**或ハ**截頭圓錐**ト稱ス. 截面ト元ノ底面トヲ何レモ其ノ**底面**ト稱シ，錐體ノ斜面及ヒ斜高ガ兩底面ノ間ニ截リ取ラレタル部分ヲ截頭錐體ノ**斜面**及ヒ**斜高**ト稱ス.

注意. 截頭角錐ノ如クニシテ其ノ斜面ヲ延長スルモ一點ニ交ラザル立體アリ 此ノ如キ體ト截頭角錐トヲ混同スベカラズ.

3. 截頭直角錐ノ斜面ノ面積.

截頭直角錐ノ斜面ハ皆全ク相等シキ二等邊梯形ナルコハ明ナリ. 故ニ斜面ノ面積ヲ表ス數 (a) ハ二ツノ底面ノ周ノ長サヲ表ス數 (p,p') ノ和ノ半ト斜高ノ長サヲ表ス數 (s) トノ相乘積ニ等シ.

即 $$a=\tfrac{1}{2}(p+p')s.$$

4. 直圓壔ノ曲面ノ面積.

直圓壔ハ之ニ內接或ハ外接スル底面ガ正多角形ナル直角壔ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シキヲ以テ(七編定.6)直圓壔ノ曲面ノ面積ヲ表ス數 (a) ハ直角壔ノ側面ノ面積ヲ表ス數 ph (八編1)

ノpカ圓周ノ長サニ等シクナリシ場合ナリ．今直圓壔ノ半徑ノ長サヲ表ス數ヲrトセバ　pハ$2\pi r$トナルガ故ニ　$a=2\pi rh.$

5. 直圓錐ノ曲面ノ面積.

直圓錐ハ之ニ內接或ハ外接スル直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ(七編定.7)　故ニ直圓錐ノ曲面ノ面積,半徑ノ長サ及ヒ斜高(母線)ノ長サヲ表ス數ヲ夫々a, r, sトセバ八編2,ヨリ

$$a=\tfrac{1}{2}\times 2\pi rs=\pi rs.$$

問題60. 直圓錐ノ高サト半徑トヲ以テ曲面ノ面積ヲ表セ.

6. 截頭直圓錐ノ曲面ノ面積.

截頭直圓錐ハ之ニ內接或ハ外接スル截頭直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ　(其證明ハ容易ナリ)　故ニ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積,兩底面ノ半徑ノ長サ及ヒ斜高ノ長サヲ表ス數ヲ夫々a, r_1, r_2, sトセバ八編3ヨリ

$$a=\tfrac{1}{2}(2\pi r_1+2\pi r_2)s=\pi(r_1+r_2)s$$

系.　斜高ノ中點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニ

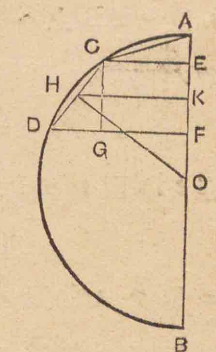
テノ截リ口ノ圓ノ半徑ノ長サヲ表ス數ヲrトセバ

$$r_1+r_2=2r$$

故ニ　$$a=2\pi rs.$$

7. 球ノ面積.

半圓周ACDBヲ若干等分シ，CDヲ其一部分トシ弦CDヲ引キ，ABヘ垂線CE, DFヲ引ク．扨ABヲ軸トシテ半圓ヲ廻轉セシムレバ半圓周ハ球面ヲ生シ，梯形CDFEハ截頭直圓錐ヲ生ズ．CDノ中點HヨリABニ垂線HKヲ引キ．CD, HKノ長サヲ表ス數ヲ夫々x, yトセバ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ス數ハ　$2\pi xy$ (八編6.系)ナリ．中心OトHヲ結ヒ付ク，EFニ平行ニCGヲ引ク



$$\triangle OHK \sim \triangle CDG,$$

故ニ　$$OH:HK=CD:CG,$$

即　$$OH:HK=CD:EF.$$

今OH, EFノ長サヲ表ス數ヲ夫々d, pトセバ上ノ比例式ヨリ　$$d:y=x:p$$

即　$$xy=dp$$

ヲ得. 故ニ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ス數ハ

$$2\pi dp$$

ナリ. 依リテ總テノ弦ヲ AB ノ周リニ廻轉セシメ生シタル截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ス數ヲ求ムルヲ得. 而シテ d ハ何レノ弦ニ於テモ相等シク. 又各ノ弦ノ AB 上ヘノ正射影ヲ夫々 $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots$ トセハ總テノ曲面ノ面積ノ和ヲ表ス數ハ

$$2\pi d(p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots)$$

ニ等シ. 而シテ球ノ半徑ノ長サヲ表ス數ヲ r トセハ

$$p_1+p_2+p_3+\ldots\ldots=2r$$

故ニ總テノ曲面ノ面積ノ和ヲ表ス數$=2\pi d\times 2r$.

扨半圓周ヲ等分スル數ヲ限リナク增ストキハ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ノ和ハドコマデモ球ノ表面積ニ接近シ其限リハ之ニ等シクナル. 之ト同時ニ d ノ長サハ漸々大キクナリ終ニ r ニ等シクナル. 故ニ球ノ面積ヲ表ス數ヲ a トセハ

$$a=2\pi r\times 2r=4\pi r^2.$$

系 1. 二ツノ球面ノ面積ノ比ハ各ノ半徑ノ比ノ二乘比ニ等シ.

定義. 球ヲ二ツノ平行ナル平面ニテ截ルトキハ其間ニ夾マルヽ球面ノ部分ヲ**帶**ト稱シ, 此二ツノ平面ノ距離ヲ帶ノ**高サ**ト稱ス.

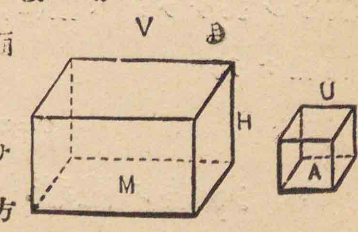
系 2. 帶ノ面積. 球ノ半徑ノ長サ, 帶ノ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々 r, p トセハ帶ノ面積ヲ表ス數 $a=2\pi rp$ ナリ.

體積

一ツノ立體ノ體積ヲ計ルニハ長サノ單位ヲ稜トシテ作リタル立方ヲ體積ノ單位トス. 例ヘハ長サノ單位ガ一尺ナレハ各ノ稜ノ長サガ一尺ナル立方ヲ體積ノ單位トス(之ヲ立方尺ト云フ).

8. 直六面體ノ體積.

直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ其底面ノ面積及ヒ高サノ長サヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ.



V ヲ與ヘラレタル直六面體トシ, M ヲ其ノ底面, H ヲ其ノ高サトス. U ハ長サノ單位 L ヲ稜トスル立方

ニシテ　即體積ノ單位ナリ．A ハ L ノ上ノ正方形ニシテ面積ノ單位ナリ．

扨直六面體及立方ハ角壔ノ特別ナル場合ナルヲ以テ　$V:U=(M:A)\,(H:L)$ (六編定.33系5)

扨 U, A, L ハ夫々體積，面積及ヒ長サノ單位ナルヲ以テ　V, M, H ノ大サヲ表ス數ヲ夫々 v, m, h トセハ

$$v:1=(m:1)\,(h:1)=mh:1 \quad 即 \quad v=mh.$$

系．底面 M ノ二邊ノ長サヲ表ス數ヲ a, b トセハ $m=ab$ ナルヲ以テ $v=abh.$

故ニ直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ其一ツノ頂點ニ出合フ三ツノ稜ノ長サヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ．

立方ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ稜ノ長サヲ表ス數ノ三乘冪ニ等シ．

9. 角壔ノ體積．

角壔ノ體積ヲ表ス數(v)ハ底面ノ面積ヲ表ス數(m)ト高サノ長サヲ表ス數(h)ノ相乘積ニ等シ(證明ハ8ト同樣ナリ)

即

$$v=mh.$$

10. 角錐ノ體積．

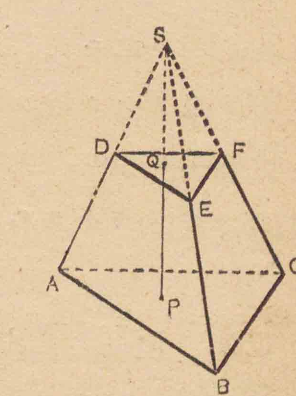
角錐ノ體積ヲ表ス數(v)ハ底面ノ面積ヲ表ス數(m)ト高サノ長サヲ表ス數(h)ノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ(六編定.35,系1)

即

$$v=\tfrac{1}{3}mh.$$

11. 截頭角錐ノ體積．

截頭角錐ノ體積ヲ表ス數(v)ハ兩底面ノ面積ヲ表ス數($m_1,\ m_2$)及ヒ其ノ比例中項($\sqrt{m_1 m_2}$)ノ和ト高サノ長サヲ表ス數(h)トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ，



ABC-DEF ヲ與ヘラレタル截頭角錐トシ，二ツノ底面 ABC, DEF ノ面積ヲ表ス數ヲ夫々 m_1, m_2 トシ，高サ PQ ノ長サヲ表ス數ヲ h トセヨ．總テノ斜面ヲ延長シ S ヲ頂點トスル角錐ヲ作レ．然ルトキハ截頭角錐ノ體積ヲ表ス數ハ二ツノ角錐 S-ABC ト S-DEF トノ體積ヲ表ス數ノ差ニ等シ．今 S-DEF ノ高サヲ表ス數ヲ假リニ x トセハ

$$v=\tfrac{1}{3}m_1(h+x)-\tfrac{1}{3}m_2x \ldots\ldots(1)$$

又 $\triangle ABC:\triangle DEF=(AB:DE)^2$ ナルニ依リ AB, DE ノ

長サヲ表ス數ヲ假リニ y, z トセハ

$$m_1 : m_2 = (y : z)^2,$$

依リテ $\sqrt{m_1} : \sqrt{m_2} = y : z$

而シテ $h+x : x = y : z = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2}$

此比例式ヨリ $x = \dfrac{h\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}$

之ヲ(1)式ノ x ニ代用セハ

$$v = \tfrac{1}{3}h(m_1 + \sqrt{m_1 m_2} + m_2).$$

12. 直圓壔ノ體積.

直圓壔ハ之ニ内接或ハ外接スル直角壔ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ(七編定.6). 故ニ直圓壔ノ體積, 其ノ半徑ノ長サ及ヒ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々 v, r, h トセハ八編 9 ヨリ

$$v = \pi r^2 h.$$

13. 直圓錐ノ體積.

直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ(七編定.7) 故ニ直圓錐ノ體積, 其ノ半徑ノ長サ及ヒ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々 v, r, h トセハ八編10ヨリ

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

14. 截頭直圓錐ノ體積.

截頭直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル截頭直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク增シタルモノニ等シ.

故ニ其ノ體積, 二ツノ底面ノ半徑ノ長サ及ヒ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々 v, r_1, r_2, h トセハ八編11ヨリ

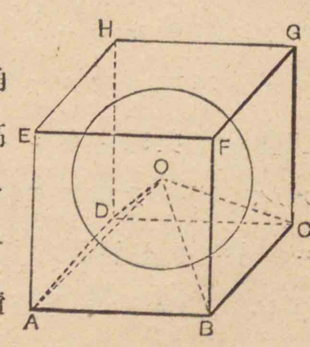
$$v = \tfrac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

15. 球ノ體積.

球ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ面積ヲ表ス數ト半徑ノ長サヲ表ス數トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

與ヘラレタル球ノ中心ヲOトシ, 之ニ外接スル立方 ABCD-EFGH ヲ作レ(立方ハ球ニ外接シ得ルハ明ナリ.而シテ其ノ稜ハ即球ノ直徑ニ等シ). 中心Oヲ八ツノ頂點ニ結ヒ付クレハOヲ頂點トシ, 立方ノ各面ヲ底面トスル O-ABCD ノ如キ六ツノ直角錐ヲ得. 而シテ各角錐ノ高サハ皆球ノ半徑ニ等シキヲ以テ其長サヲ表ス數ハ r ナリ. 故ニ六ツノ角錐ノ體積

甲

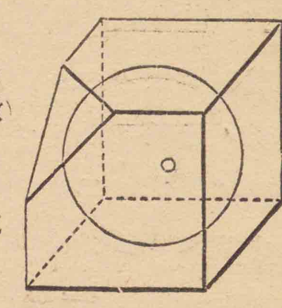


ノ和即球ニ外接スル立方ノ體積ヲ表ス數ハ

$\frac{1}{3}\times r\times$(立方ノ面積ヲ表ス數)

(八編13). 次ニ乙圖ノ如ク各頂點ニ於ケル三面角ヲ截リ球ニ切スル八ツノ平面ヲ作レ. 斯クシテ得タル外接多面體ハ立方ヨリモ小ニシテ球ノ體積ニ近キ體積ヲ有スベシ, 今中心O ヲ此多面體ノ各ノ頂點ニ結ビ付クレハ多面體ノ各面ヲ底面トシ球ノ半徑ヲ高サトスル所ノ多クノ角錐ヲ得. 而シテ各角錐ノ體積ヲ表ス數ハ各底面ノ面積ヲ表ス數トrトノ相乘積ノ$\frac{1}{3}$ニ等シ. 故ニ總テノ角錐ノ體積ヲ表ス數ハ

乙



$$\frac{1}{3}\times r\times(\text{多面體ノ面積ヲ表ス數})$$

上ノ如ク次キ々々ニ外接多面體ノ立體角ヲ截リ球ニ切スル平面ヲ作ルヿヲ限リナク續クルトキハ外接多面體ハ漸次球ニ等シキヿニ近ヅキ終ニ球ト等シクナル. 而シテ其間外接多面體ノ體積ヲ表ス數ハ常ニ $\frac{1}{3}\times r\times$(多面體ノ面積ヲ表ス數)

ニ等シ. 故ニ球ノ體積ヲ表ス數ヲvトセハ

$$v=\frac{1}{3}\times r\times(\text{球ノ面積ヲ表ス數}).$$

系1. 球ノ面積ヲ表ス數＝$4\pi r^2$ナルヲ以テ

$$v=\frac{1}{3}\times r\times 4\pi r^2,$$

即 $$v=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

系2. 二ツノ球ノ體積ノ比ハ各ノ半徑ノ比ノ三乘比ニ等シ.

問題61. 球ノ體積ガ與ヘラレテ面積ヲ求ムルヿ.

第八編之問題

問題62. 直六面體ノ三ツノ稜ノ比ガ 2:3:4 ニシテ其體積ハ3立方尺ナリ. 其三ツノ稜ノ長サ各幾寸ナルカ.

問題63. 正四面體ノ一ツノ稜ノ長サガ與ヘラレテ體積ヲ表スヿ.

問題64. 曲面ノ面積ガ相等シキ二ツノ直圓壔ノ體積ノ比ヲ求ム.

問題65. 體積ガ相等シキ二ツノ直圓壔ノ曲面ノ面積ノ比ヲ求ム.

問題66. 一ツノ稜ノ長サガ與ヘラレタル正四面體ニ內接或ハ外接スル球ノ半徑ヲ求ム.

問題67. 球ノ面積或ハ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ全面積或ハ體積ノ三分ノ二ニ等シ.

問題68. 軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ガ正三角形ナル圓錐ニ內接或ハ外接スル球ノ半徑ガ與ヘラレテ圓錐ノ曲面ノ面積及ヒ體積ヲ求ム.

問題69. 半徑ノ長サガ r ナル球ノ中心ヲ距ルヿ

d ナル點ニ在ル光リガ球面ヲ照ラス部分ノ面積ヲ求ム.

雜問題

第六編之部

1. 與ヘラレタル平面上ニ其平面外ノ二點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ム.

2. 一直線上ニアラザル三點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ム.

3. A, B ハ平面 P ノ同シ側ニ在ル二點ナリ. 平面 P 上ニ一點 C ヲ求メ直線 AC, BC ノ和ヲ最小ニスルコ.

4. A, B ハ平面 P ノ反對ノ側ニ在ル二點ナリ. 平面 P 上ニ一點 C ヲ求メ直線 AC, BC ノ差ヲ最大ニスルコ.

5. 平面 P 上ノ與ヘラレタル點 A ヨリ P 上ニ直線 AC ヲ引キ, P 外ノ與ヘラレタル點 B ヨリ AC ヘ引クル垂線ヲ與ヘラレタル有限直線ニ等シカラシメントス. AC ノ引キ方ヲ求ム.

6. 一ツノ線ノ一ツノ平面上ニ於ケル射影ガ直線ナレバ其線ハ其平面ニ垂直ナル一ツノ平面上ニ在リ.

7. 與ヘラレタル平面上ノ與ヘラレタル點ヲ過リ其平面上ニ, 空間ノ與ヘラレタル直線ト直角ヲナスベキ直線ヲ引クコ.

8. 二點 A, B ヨリ平面 P ヘ垂線 AC, BD ヲ引キ, 又直線 AB ニ垂直ナル平面 Q ヲ畫キ, Q ト P トノ交リヲ LM トセハ CD⊥LM ナルベシ.

9. 四ツノ面ヨリ成ル立體角(四面角トモ云フ)ヲ一ツノ平面ニテ截リ其截リ口ヲ平行四邊形ナラシメンコヲ求ム.

10. 四面體ノ二双ノ相對スル稜ガ夫々直角ヲナセハ第三双モ亦直角ヲナス.

11. 四面體ノ重心ヨリ此體ノ外ニ在ル一ツノ平面ヘ引クル垂線ノ四倍ハ四ツノ頂點ヨリ其平面ヘ引クル垂線ノ和ニ等シ.

12. 立方ヲ一ツノ平面ニテ截リ其截リ口ヲ正六邊形ニスルコ.

13. 同一平面上ニ在ラザル與ヘラレタル三ツノ限リナキ直線ヲ夫々三ツノ稜トスル平行六面體ヲ作ルコ.

14. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ガ

之ニ對スル稜ヲ分ツ二ツノ分ノ比ハ其二面角ノ二ツノ面ノ比ニ等シ.

15. 與ヘラレタル二ツノ立方ノ比ニ等シキ比ヲ有スル二直線ヲ求ムルヿ.

第七編之部

16. 球面ノ一部分ヲ與ヘ其ノ中心ヲ求ムルヿ.

17. 與ヘラレタル直線ヲ含ミ與ヘラレタル球ニ切スル平面ヲ書クヿ.

18. 與ヘラレタル二點ヨリノ距離ガ夫々與ヘラレタル二直線ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.

19. 與ヘラレタル二點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.

20. 球面外ノ一點ヨリ其球ニ引ケル切線ハ相等シ. 又此切線ノ軌跡ハ一ツノ直圓錐ノ曲面ナリ.

21. 球面上ノ與ヘラレタル二點ヲ過ル大圓ヲ畫クヿ.

22. 與ヘラレタル大圓弧ヲ二等分スルヿ.

23. 與ヘラレタル球ノ直徑ヲ求ムルヿ.

第八編之部

24. 底面ガ正六邊形ナル截頭直角錐ノ一ツノ底面ノ一邊ハ 8 寸, 他ノ底面ノ一邊ハ 6 寸, 而シテ高サハ30寸ナリト云フ. 其ノ體積ヲ求ム.

25. 埃及ノ一ツノ「ピラミッド」ノ底面ハ一邊ノ長サ20「メートル」ノ正方形ニシテ其ノ斜面ハ皆正三角形ナリト云フ. 其ノ體積ヲ求ム.

26. 矩形ノ相隣レル二邊ヲ夫々軸トシテ廻轉セシメ生シタル二ツノ圓壔ノ體積ノ比ハ各ノ軸ノ比ノ反比ニ等シ.

27. 底面ガ球ノ大圓ニ等シク, 高サガ球ノ直徑ニ等シキ圓壔及ヒ圓錐アリ. 然ルトキハ 圓錐,球,圓壔ノ體積ノ比ハ 1:2:3 ナルベシ.

28. 一邊ノ長サ a ナル正三角形ト同シ平面上ニ其頂點ヲ過リテ引キタル直線ヲ軸トシテ此三角形ヲ一廻轉セシメ生スル所ノ體ノ體積ヲ求ム.

29. 直圓錐ノ底面ニ平行ナル平面ヲ引キ其ノ曲面ノ面積ヲ二等分スルヿ.

30. 地球,月,太陽ノ半徑ノ比ハ 11:3:1232

ナリ. 地球ノ面積及ヒ體積ヲ夫々ノ單位トシテ月,太陽ノ面積及ヒ體積ヲ表ヒ.

31. 半徑ノ長サrナル球ニ直圓壔ヲ内接シ(兩底面ノ圓周ガ球面ト小圓ニテ出會フ場合ヲ云フ)兩底面ノ面積ノ和ヲ曲面ノ面積ノ半分ニ等シクスルフ.

32. 半徑ガ10寸ナル球面上ニ在ル球面三角形ノ三ツノ角ガ夫々一直角ノ$\frac{10}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{9}$,ナリ. 此球面三角形ノ面積ヲ求ム.

明治三十七年一月十一日
中學校數學科用教科書
文部省檢定濟

明治三十六年 二 月二十五日印刷
明治三十六年 二 月二十八日發行
明治三十六年十二月二十一日訂正再版印刷
明治三十六年十二月二十五日發行

著作者 三輪桓一郎

發行兼印刷者 金港堂書籍株式會社
東京市日本橋區本町三丁目十七番地

同社長
代表者 原亮一郎
東京市下谷區龍泉寺町四百十四番地

印刷所 株式會社秀英舍
東京市京橋區西紺屋町廿六七番地

賣捌所 各府縣特約販賣所

幾何學教科書(立體)
定價金四拾錢

文部省檢定濟

寺野博士

用器畫教科書

附圖共