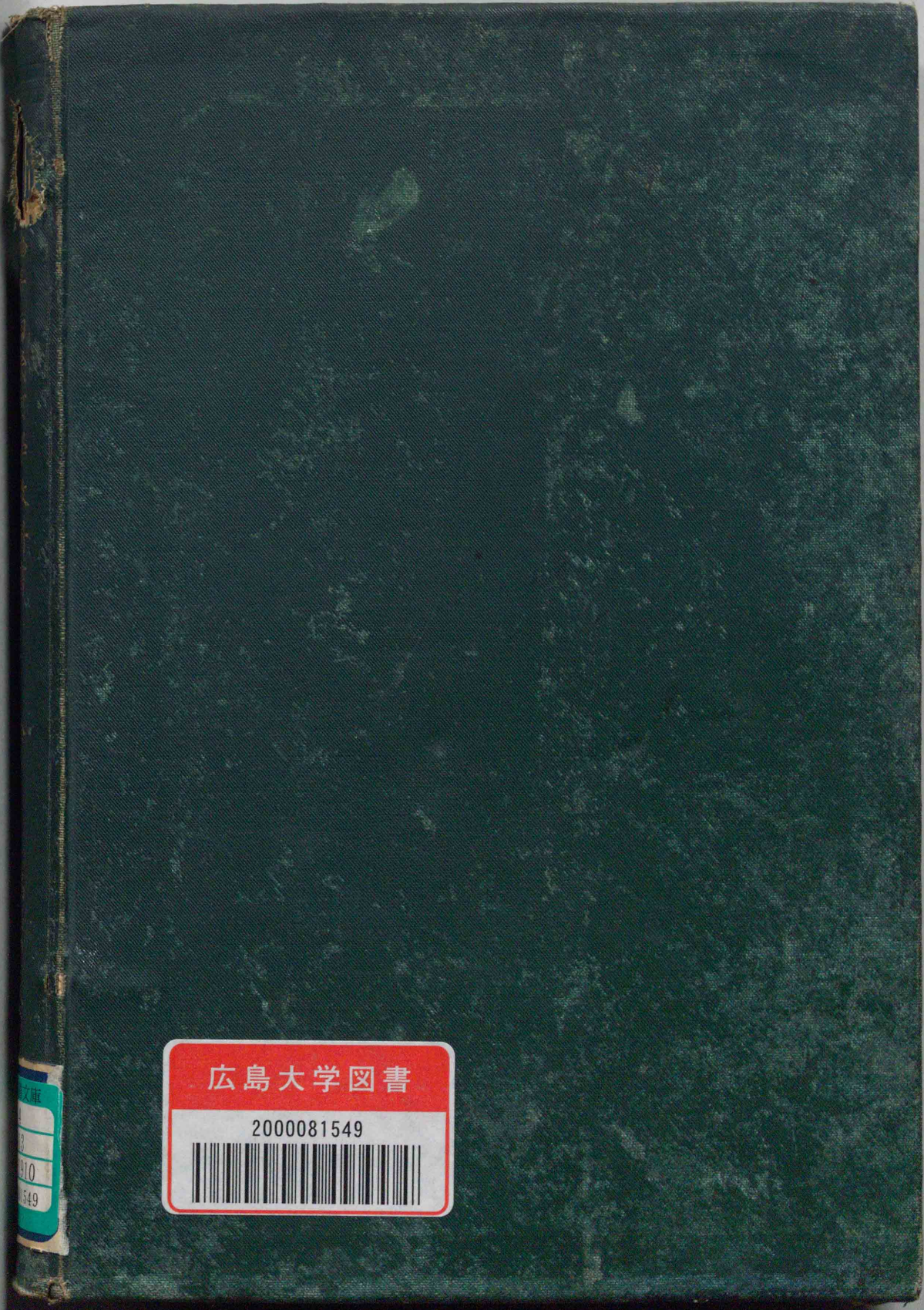
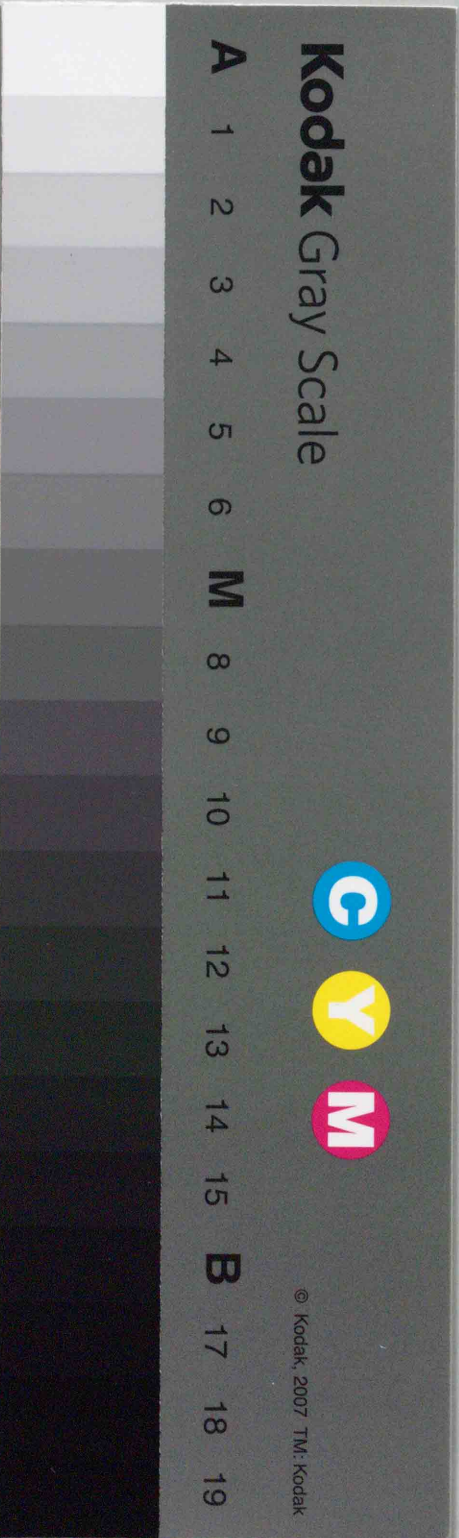
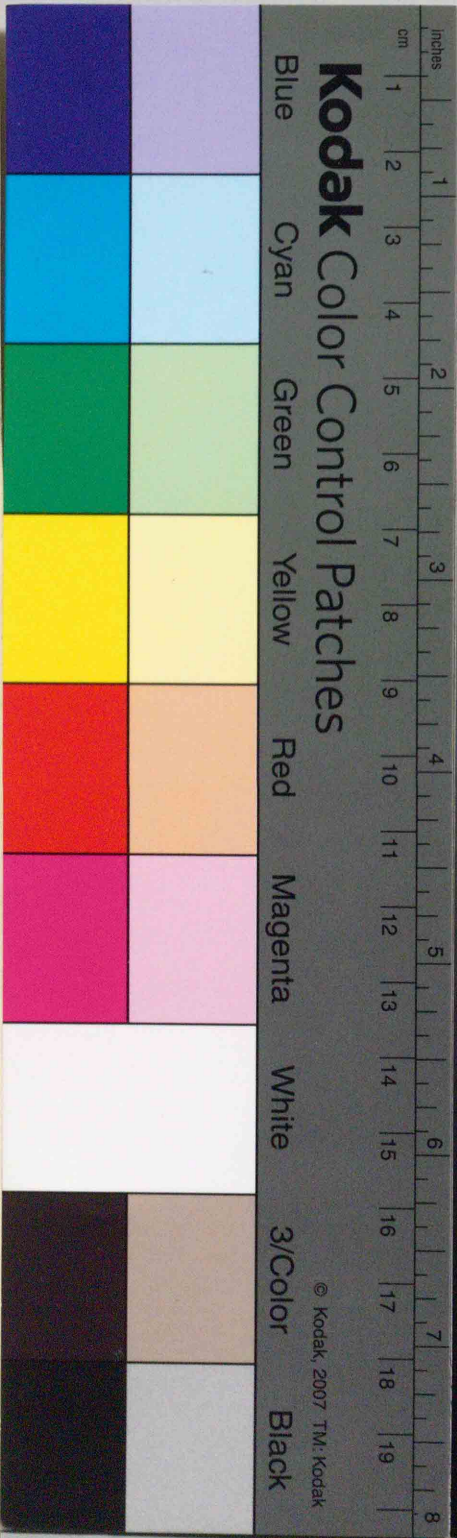


40107

教科書文庫

4
413
1910
41-1905
20000
81549



広島大学図書

2000081549



教科書文庫
4
413
41-1910
2000081549

42
413
明43

資料室

文部省檢定濟

修訂

平面幾何學教科書

広島大学図書

2000081549



全

理學士高橋豐夫

編纂

東京

春秋堂

緒言

本書ハ中學校及ビ之ト同程度ノ諸學校ニ於ケル教科書ニ充テシガ爲メニ編述セルモノナリ。

從來最モ多ク行ハレタル幾何學書ノ甚ダ良好ナルハ固ヨリ論ナシ。然レドモ幾多ノ數學教師ノ言フ所ト余ノ經驗トニ徴スルニ其書ハ適切ナルモノト信ズルコト能ハザルヲ遺憾トス。蓋シ其書ハ餘リニ論理ノ嚴格ナランコトニ重キヲ置クノ結果所論往々高尚トナリ生徒ノ年齢學力ニ相應セズ爲メニ斯學ヲ修ムルノ目的ヲ達スルコト能ハザルノミナラズ却テ彼等ノ腦力ノ發達ヲ障礙スルナキカノ疑ナキヲ得ズ。又其一小部分ノ他ハ一切記號ヲ用キズ總テ言語ノミヲ以テ論ズルニ據リ所論甚ダ冗長トナリ大ニ了解ニ苦マシムルコト多シ。之ニ反シテ適宜ニ記號ヲ用キルトキハ論理ノ嚴正ヲ失ハズ而カモ論證極メテ簡明トナリ又記號ニテ記シタルモノハ最モ見易キヲ以テ之ヲ口述シテ耳ヨリ入ルト同時ニ之ヲ見テ眼ヨリモ入ルガ故ニ記載ノ事項ヲ腦裡ニ印スルコト早ク且ツ深キハ他ニ比シテ更ニ大ナルコト言ヲ俟タズ。幾何學ニ於テ記號ヲ採用スルコトハ代數學トノ混同ヲ生ジ且ツ論理ノ脈絡ヲ中斷スルノ虞アリトノ論アレドモ其記號若ク



ハ式ヲ口述シ論證スルニ當リテハ無論幾何學ニ於ケル所定ノ言語ヲ用キ幾何學上ノ論法ニ據ルベキヲ以テ前述ノ如キ虞ハ毫モ之レアラザルベシ。

以上ノ所信ニ依リ余ハ本書ヲ編スルニ當リ(第一)比例論ニ於テゆくりつど流ノ插ミ合ヒノ論法ヲ排シ代數學ニ於ケル比例論ヲ採用セリ(第二)前後ノ關係ノ許ス限リ記號及ビ式ヲ採用セリ(第三)面積ノ編ニ於テハ或單位ヲ以テ計リタル數ニ付キテ論ジ且ツ計算問題ヲ諸所ニ挿入シテ幾何學ノ趣味ヲ與ヘ併セテ斯學ト算術及ビ代數學トノ關係ヲ知ラシムルコトヲ勉メタリ(第四)問題ノ配置ハ其最モ平易ナルモノヲ編中諸所ニ挿入シ次ニ每編ノ全般ニ關スルモノヲ其編ノ終リニ集メ而シテ稍困難ナルモノハ補習雜問題トシテ卷末ニ附セリ(第五)定理及ビ作圖題解法ノ證明ハ往々之ヲ省略セリ是生徒ヲシテ自ラ之ヲ補充セシメンガ爲メナリ。

余ハ本書編纂ニ深ク注意シタリト雖モ改良スベキ點少カラザルベシ讀者幸ニ忠言ヲ吝マズ編者ニ本書改良ノ便ヲ得シメバ豈當編者ノ幸ノミナランヤ。終リニ余ハ友人澤山勇三郎君ニ向テ深ク謝セザル可カラザルモノアリ君ハ周到綿密ナル注意ヲ以テ編纂中屢々有益ナル助言ヲ與ヘラントレバナリ。

明治三十八年七月

高橋豊夫識

修 訂

平面幾何學教科書

目 次

總 論

第一編 直 線

第一節 直線 角	13
第二節 平行直線	36
第三節 三角形	44
第四節 四邊形	67
第五節 多角形	74
第六節 對稱	78
第一編問題集	81

第二編 圓

第一節 圓ノ性質	90
第二節 中心角 弦 弓形内ノ角	99
第三節 切線	110
第二編問題集ノ一	119
第四節 作圖題	123
第二編問題集ノ二	141

第三編 比及ビ比例 相似形

第一節 定義 比及ビ比例ノ理ニ關スル定理	143
----------------------	-----

第二節 比及ビ比例ノ應用	149
第三節 相似形	155
第三編問題集ノ一	163
第四節 作圖題	164
第三編問題集ノ二	172
第五節 軌跡	172
軌跡問題	180
第四編 面積	
第一節 面積ノ比 多角形ノ面積	182
第四編問題集ノ一	216
第二節 作圖題	218
第四編問題集ノ二	229
第五編 正多角形及ビ圓	
第一節 正多角形ニ關スル定理 圓周ノ長サ 及ビ圓ノ面積	231
第二節 正多角形ノ作圖及ビ其邊長ノ計算等	239
第五編問題集	248
補習雜問題	251

修訂

平面幾何學教科書

總論

1. 定義 立體は空間の有限なる部分なり。

立體は大さ即ち長さ幅及び厚さを有す。

總テノ物體ハ空間中ニ在リテ其一部分ヲ充塞スルモノナリ。物體ヲ組織スル所ノ物質及ビ物質ニ屬スル性質重サ硬度ノ如キモノ)ニ毫モ關係スルコトナク唯其充塞スル場所ノ形大サ及ビ位置ノミニ付キテ考フルトキハ吾人ノ所謂立體ヲ得。

2. 定義 面は立體の限界なり。

面は長さ及び幅を有すれども厚さを有せず。

例ヘバコ、ニーツノ立方アレバ此立方ガ充塞スル空間ノ一部分ニ限界ナルベカラズ。此限界ハ即チ立方ノ面ナリ。而シテ此面ハ立方ト之ヲ圍

繞スル空間トノ境界ナルヲ以テ厚サヲ有セザルコト明カナリ。

3. 定義 線は面の限界なり。

線は長さを有すれども幅及び厚さを有せず。二面の相交はる所は線なり。

例へば立方ノ一ツノ面ヲ截テ二ツトナストキハ其各部ノ限界ナル切り目ハ線ナリ。而シテ此線ハ兩部ニ共通ナル境界ニシテ何レノ部分ニモ屬セザルモノナルヲ以テ幅ヲ有セザルコト明カナリ。

4. 定義 點は線の限界なり。

點は唯位置を有するのみにして大さなし。二線の相交はる所は點なり。

5. 定義 直線とは任意に其一部分を取り其兩端を他の何れの一部の上に如何様に置くも全く相合する線なり。

今一條ノ絹絲ヲ取り其
 兩端ヲ手ニ持テテ之ヲ緊張
 スルトキハ絲ハ或特種ノ形
 ヲナス。今此絲ノ太サ漸々減少シテ止ムコトナク
 終ニ其長サト形トノミヲ殘シテ太サハ全ク消滅セ

リト假想スルトキハ吾人ノ所謂直線ヲ得。

直線ハ雙方ヘ限リナク延長セルモノト考フルコトヲ得。

特ニ其一部分ヲ考フルキハ之ヲ**有限直線**ト稱ス

例題 直線ノ例ヲ舉ゲヨ。

6. 定義 折線とは若干の直線の接續せるものなり。

例題 折線ノ例ヲ舉
 ゲヨ。



注意 本書ニ於テハ
 直線ヲ略シテ單ニ線ト稱スルコトアリ。

7. 定義 平面とは其上に任意に取りたる二點を結び付くる直線が全く其面上に在るものなり。

精良ナル平面鏡ノ表面ハ平面ナリ。正シク直線ヲ成セル定規ノ縁ヲ斯ノ如キ鏡面上ニ置クトキハ其縁ト面トハ常ニ相密着シテ其間ニ少シノ空隙モアラザルベシ。

例題 平面ノ例ヲ舉ゲヨ。

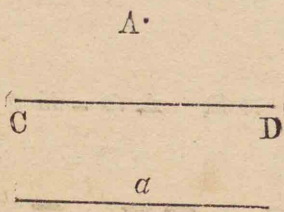
8. 定義 圖形とは立體、面、線及び點又は其集合なり。

平面圖形とは同一平面上に在る圖形なり。

9. 定義 平面幾何學は平面圖形の形、大小及び位置に付きて論ずる學科なり。

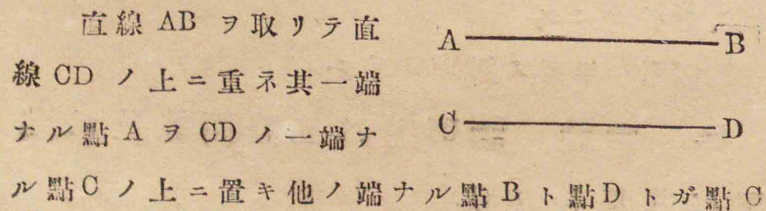
10. 點ノ位置ヲ圖上ニ顯ハスニハ一ノ黑點ヲ以テシ之ニ近ク置キタル一文字ヲ以テ之ヲ示ス。

線ノ位置ヲ顯ハスニハ一ノ黑條ヲ以テシ一ツノ文字或ハ其線上ノ點ニ命ジタルニツノ文字ヲ以テ之ヲ示ス。



點A, 線CD 又ハ線 a トイフガ如シ。

11. 定義 一つの直線を取り之を他の一つの直線の上に重ねるとき其兩端が夫々相合すれば此二直線は相等シといふ。



ノ同ジキ側ニ在ル様ニ置クトキニ若シ點Bガ點Dノ上ニ落ツレバ二直線AB, CDハ長サ相等シトイヒ又ハ單ニ此二直線ハ相等シトイフ。之ヲ下ノ如ク記ス。

AB=CD

上述ノ如ク爲ストキニ若シ點Bガ點Cト點Dトノ間ニ落ツレバ ABハCDヨリ小ナリトイヒ又ハCDハABヨリ大ナリトイフ。之ヲ下ノ如ク記ス。

AB<CD CD>AB

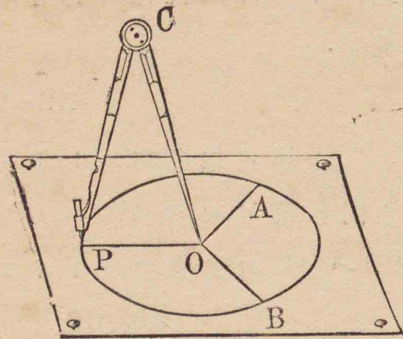
注意 一線ヲ取りテ他ノ一線ニ重ヌルトキ其兩端夫々相合スレバ二線相等シク若シ相合セザレバ一線ハ他ノ一線ヨリ大ナリトイヘリ。然レドモ斯ノ如ク二線ヲ相重ヌルコトヲ實行セザルモ「コムパス」ヲ用キテ二線ノ相等シキヤ否ヤヲ知ルヲ得ベシ。即チ「コムパス」ノ兩脚端ガ丁度AトBトニ當タル様ニ其兩脚ヲ開キ其儘之ヲ線CDノ上ニ移シ兩脚端ガ夫々CトDトニ合スルヤ否ヤヲ見ルベシ。若シ相合スレバABハCDニ等シク相合セザレバABハCDニ等シカラズ。ABハCDニ等シカラズトイフコトヲ下ノ如ク記スルコトアリ。

AB≠CD

12. 定義 二點間の距離とは此二點

を兩端と爲すところの直線の長さなり。

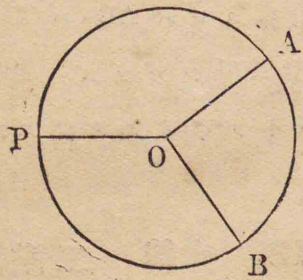
13. 今適宜「コムパス」ノ兩脚ヲ開キ其一脚ノ端ヲ紙面上ノ一點Oニ据エ置キ其開キノ變ラザル様ニCPヲCOノ周リニ回轉シPニ附着セル鉛筆ノ尖頭ヲシテ紙面上ニ滑走セシムレバABP



ノ如キ一線ノ生ズルヲ見ルベシ。此回轉中「コムパス」ノ開キハ終始變ラザルヲ以テ點Oヨリ線ABP上ノ任意ノ點A,B,P等ニ至ル距離皆相等シキコト明カナリ。

14. 定義 圓とは一線を以て圍みたる平面圖形にして其内の或一點より其線へ引ける直線皆相等しきものなり。此點を圓の中心と稱す。

15. 定義 圓周 或は周とは圓を圍むところの線なり。



[13]ニ於テ述ベタルガ如クニシテ畫キタル線ABPハ圓周ナリ。

16. 定義 半徑とは圓の中心より圓周へ引ける直線なり。

點Oハ圓ノ中心ニシテOA,OB等ハ半徑ナリ。

例題 圓周ノ例ヲ舉ゲヨ。

17. 定義 一つの圖形を取り他の一つの圖形の上に重ねるとき全部全く相合すれば此二つの圖形は全ク相等シといひ又は全等ナリといふ。

凡て圖形は其形と大きとを變ずることなくして其位置を變ずることを得べきものとす。

注意 一ツノ圖形ヲ取リテ他ノ圖形ニ重ヌルコトハ實地ニ之ヲナスノ要ナシ唯カクナシタルモノト假想スレバ足レリ。

18. 定義 公理とは證明を要せずして眞なることの明かなる眞理なり。

例へバ「量A=量B及ビ量A=量Cナルトキハ量B=量Cナリ」即チ「同一ナル量ニ等シキ量ハ相

等シハーツノ公理ナリ。[11]ニ於テ AB, CD ナル二線ガ各、同一ノ距離(「コムパス」ノ兩脚端ノ間ノ距離)ニ等シキトキハ此二線ハ相等シトイヘルハ即チ上ノ公理ノ適用ナリ。

廣く有らゆる種類ノ量ニ適用すべき公理を**普通公理**と稱す。

特に幾何學ノ圖形ニ關する公理を**幾何學公理**と稱す。

19. 普通公理

[1] 同じき量に等しき量は相等し。

[2] 相等しき量を他の相等しき量に加ふれば其和相等し。

[3] 相等しき量を他の相等しき量より減ずれば其残り相等し。

[4] 相等しき量の同じき倍數ノ量は相等し。

[5] 相等しき量の同じき分數ノ量は相等し。

[6] 完き量は其部分より大なり。

[7] 完き量は其總ての部分の和に等し。

[8] 相等しからざる量に相等しき量を加ふれば其和相等しからず。而して其大なる量に加へて得たる和は他の和より大なり。

[9] 相等しからざる量より相等しき量を減ずれば其残り相等しからず。而して其大なる量より減じて得たる残りは他の残りより大なり。

20. 定義 命題とは或事項の陳述なり。

例へバ完き量ハ其部分ヨリ大ナリハーツノ命題ナリ。

21 定義 定理とは既に眞なりと知る所の命題に依り證明せらるべき命題なり。

但し既に眞なりと知る所の命題は

公理又は既に證明したる定理なり。

定理は**假設**及び**終結**の二部より成る。假設とは云々なりと假定せられたる事項にして終結とは假設より出で來るべき事項なり。

例へば「一數ノ之ヲ記スル數字ノ和ガ九ノ倍數ナラバ其數モ亦九ノ倍數ナリ」ハ算術ノ一定理ナリ。茲ニ「一數ノ之ヲ記スル數字ノ和ガ九ノ倍數ナラバ」ト假定セルコトハ此定理ノ假設ニシテ之ヨリ出で來ル所ノ「其數モ亦九ノ倍數ナリ」トイフコトハ其終結ナリ。

22. 定義 系とは或命題より容易に推定し得べき他の命題なり。

例へば前節ノ例ニ舉ゲタル定理ヨリ「一數ノ之ヲ記スル數字ノ和ガ三ノ倍數ナラバ其數モ亦三ノ倍數ナリ」トイフ定理ヲ容易ニ推定スルコトヲ得ベシ。斯ノ如キモノヲ前定理ノ系トイフ。

23. 幾何學公理

公理壹 二點を通過して一つの直線を引くことを得而して唯一つに限る。

上ノ如クイフベキヲ略シテ次ノ如クイフコトアリ

二點は一直線を決定す。

24. 系1 一點に於て出會ふ所の二直線は相合して同一の直線となるにあらざれば再び出會ふ能はず。

25. 系2 二點又は一部分を共有する二直線は相合して同一の直線となる。

26. 公理貳 二點間に引ける種々の線の中最も短きものは直線なり。

27. 定義 作圖題とは幾何學的の方法に依りて作圖を爲すことを求むる命題なり。

所得の圖形を其**解**と稱す。

例へば「有限直線ヲ二等分スルコト」ハ一ツノ作圖題ニシテ其直線ヲ相等シキ二ツノ部分ニ分ツコトヲ求ムル命題ナリ。

28. 初等幾何學ニ於テ作圖ヲ爲スニ用キル器

具ハ唯目盛りセザル定規及ビ「コムパス」ノ二種ニ限ル。是規約ニ依リテ定ムル所ナリ。定規ハ直線ヲ引キ又ハ之ヲ延長スル用ヲ爲シ「コムパス」ハ圓ヲ畫キ或ハ距離ヲ移ス用ヲ爲ス。

29. 最初より爲し得るものと許容せられたる作圖を**公法**と稱す。公法に三あり次の如し。

公法壹 任意の一點より他の任意の一點へ直線を引くことを得。

公法貳 有限直線を任意の長さに延長することを得。

公法參 任意の點を中心とし任意の長さの直線を半徑として圓を畫くことを得。

第一編

直線

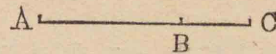
第一節

直線角

30. 有限直線 AB ヲ延長シ其上ニ任意ニ一點 C ヲ取ルトキハ AC ハ AB ト BC トノ和ニ等シ即チ

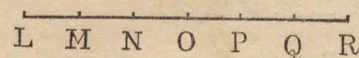
$$AC = AB + BC$$

又 AB ハ AC ト BC トノ



差ニ等シ即チ

$$AB = AC - BC$$



又有限直線 LM ヲ延長

シ其上ニ何レモ LM ニ等シク MN, NO, OP, PQ, QR ヲ取レバ LN ハ LM ノ二倍, LO ハ其三倍, LP ハ其四倍ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。

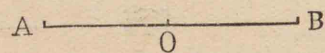
$$LN = 2LM \quad LO = 3LM \quad LP = 4LM$$

又上圖ヲ見ルトキハ直線ハ若干ニ等分セラルベキコトヲ知ル。即チ LM ハ LR ノ六分ノ一, LN ハ其三分ノ一, LO ハ其二分ノ一ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。

$$LM = \frac{LR}{6} \quad LN = \frac{LR}{3} \quad LO = \frac{LR}{2}$$

31. 圖ニ於テ

$$AO = BO = \frac{AB}{2}$$



ナルトキハ點Oヲ直線ABノ中點又ハ二等分點ト稱ス。

一つの有限直線の中點は一つ有り而して唯一つに限る。

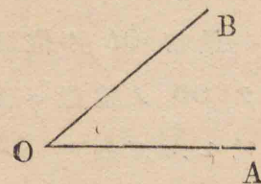
問題

1. 任意ニ二線ヲ引キ而シテ其和及ビ差ニ等シキ二線ヲ引ケ。
2. 任意ニ一線ヲ引キ而シテ之ヲ其三倍ニ等シクナルマデ延長セヨ。
3. [19]ニ列舉シタル九ツノ普通公理ニ於テ量ヲ直線ト定メ一ツ毎ニ圖ヲ作り而シテ式ヲ以テ之ヲ書キ表ハセ。

32. 定義 一點より二つの直線を引くときは此二つの直線は角ヲ爲スといひ又は角ヲ夾ムといふ。其點を角の

頂點と稱し二つの直線を各角の邊と稱す。

OA, OB ヲ一點Oヨリ引ケル二線トスレバOハ角ノ頂點, OA, OBハ各角ノ邊ナリ。

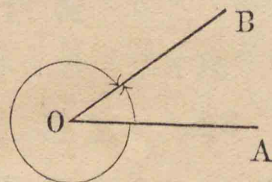


角ヲ示スニハ頂點ノ一文字ヲ以テシ角Oト呼ブ。又ハ頂點ノ一文字ヲ二邊上ノ二文字ノ間ニ置キ角AOB或ハ角BOAト呼ブ。又ハ角ノ内ニ置キタル一文字ヲ以テ之ヲ示スコトアリ, 角αトイフガ如シ。

記號∠ハ角ヲ表ハス。

33. 角ノ大サ

角ノ大サトハ如何ナルモノナルカヲ明カニセンニハ角ヲ以テ一直線ノ回轉ニヨリテ生ジタルモノト考フルヲ



ヨシトス。即チOAノ位置ニ於テ重ナリ合フ所ノ二線ノ一ツガ同一平面上ニ於テ點Oノ周リニ回轉シテOBノ位置ニ至ルトキハ此線ハ角AOBダケ回轉シタルトイフ。OAノ位置ヨリOBノ位置ニ至ルマデノ回轉ノ量ハ即チ角AOBノ大サナリ。

角の大きさは其二邊の開きの大きさに

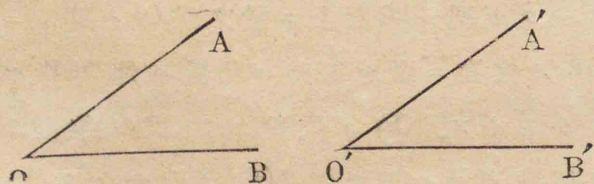
由るのみにして其長さには毫も關係することなし。

最初 OA ノ位置ニ在リタル線ガ上述ノ如クニシテ OB ノ位置ニ至ルニハ二様ノ途アリ。即チ圖ニ示セルガ如クハ時計ノ針ノ回轉スルガ如クニ回轉シ他ハ之ニ反ス。故ニ一點 O ヨリ引ケル二線 OA, OB ハ通常大サ相異ナル二角ヲ爲スモノト考フルコトヲ得。

頂點及ビ二邊ヲ共有スル所ノ上ニ云ヘルガ如キ二角ヲ **共軛角** ト稱シ其大ナル方ヲ **優角** ト稱シ、小ナル方ヲ **劣角** ト稱ス。

以下單ニ角トイフトキハ劣角ヲ指ス。

34. 定義 一つの角を取り之を他の一つの角の上に重ね全く相合せしむることを得るときは此二角は**相等シ**といふ。

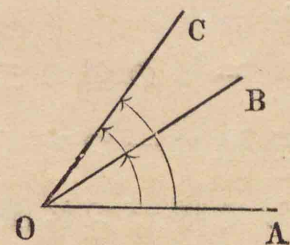


例ヘバ角 AOB ヲ取リテ角 A'O'B' ノ上ニ重テ頂

點 O ヲ頂點 O' ノ上ニ置キ邊 OA ヲ邊 O'A' ノ上ニ重ヌルトキ邊 OB ガ邊 O'B' ノ上ニ重ナレバ二角 AOB A'O'B' ハ相等シ。即チ

$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

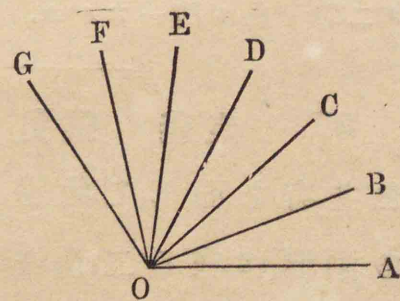
35. [33] ニ述ベタルガ如クニシテ OA ノ位置ヨリ OB ノ位置ニ至リタル直線ガ尙ホ同ジキ方ニ回轉シテ OC ノ位置ニ至ルトキハ角 AOC ハ二角 AOB, BOC ノ和ニ等シ。即チ



$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

又角 AOB ハ角 AOC ト角 BOC トノ差ニ等シ。即チ $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$

又右圖ニ於テ AOB, BOC, COD 等ノ諸角互ニ相等シケレバ角 AOC ハ角 AOB ノ二倍、角 AOD ハ角 AOB ノ三倍ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。



$$\angle AOC = 2\angle AOB \quad \angle AOD = 3\angle AOB$$

又角 AOB ハ角 AOG ノ六分ノ一、角 AOC ハ其三分ノ一ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。

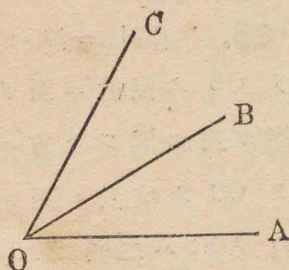
$$\angle AOB = \frac{\angle AOG}{6}$$

$$\angle AOC = \frac{\angle AOG}{3}$$

36. 圖ニ於テ $\angle AOB = \angle BOC = \frac{\angle AOC}{2}$

ナルトキハ直線 OB ヲ角 AOC ノ二等分線ト稱ス。

一つの角の二等分線は一つ有り而して唯一つに限る。

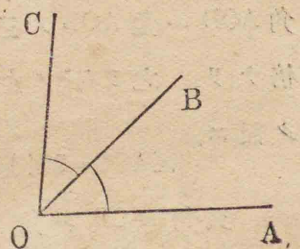


問題

4. [35] ノ第二圖ニ於テ何レガ角 AOE ノ二等分線ナルカ。又角 AOF ノ二等分線ハ如何ナル角ノ二等分線ト同一ナルカ。

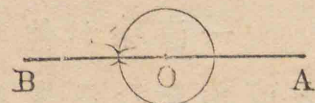
37. 定義 隣角とは頂點及び一邊を共有し而して此邊の兩側に在る二角なり。

圖ニ於テ二角 AOB, BOC ハ隣角ナリ。



38. 定義 平角とは其二邊が頂點の兩側に在りて同一直線上に在る角なり。

一點 O ヨリ引ケル二線 OA, OB ガ AOB ナル一線ヲナストキハ OA, OB ハ平角ヲナス。時計ノ分針ガ三十分間ニ回轉スル角ハ平角ナリ。



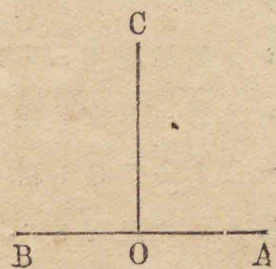
39. 定義 相等しき隣角の共通ならざる二邊が頂點の兩側に於て同一直線上に在るときは此隣角を各直角と稱す。

直角は平角の半分に等し。

AOC, BOC ハ相等シキ隣角ニシテ其共通ナラザル二邊 OA, OB ガ AOB ナル一線ヲナストキハ AOC, BOC ハ各直角ナリ。

直角ヲ表ハスニ R. ∠ ナル記號ヲ用キルコトアリ。

例題 直角ノ例ヲ舉ゲヨ



40. 定義 一直線が他の一直線に

出會ひて之と直角をなすときは其一を他の垂線といひ又二線は互に垂直なりといふ。

一直線が他の一直線に出會ひて之と直角をなさざるときは其一を他の斜線なりといふ。

上ノ圖ニ於テ CO ト AB トハ互ニ垂直ナリ。之ヲ次ノ如ク記ス。

$$CO \perp AB$$

二線ノ交點 O ヲ垂線ノ足ト名ヅク。

注意 垂線 CO ハ OA, OB ノナス平角 $\triangle O B$ ノ二等分線ナリ。

41. 注意 直角ハ大サノ定マレル角ナルヲ以テ單位トシテノ用ニ適ス。然レドモ直角ハ稍大ニシテ實地應用ニハ不便尠カラザルヲ以テ之ヲ小分シテ別ニ單位ヲ設ク。即チ一直角ノ $\frac{1}{90}$ ヲ度ト稱シ一度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ分ト稱シ一分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ秒ト稱ス。°'〃ヲ度分秒ノ記號トス。例ヘバ三度十二分二十秒ヲ $3^{\circ} 12' 20''$ ト記ス。

問題

5. 時計ノ時針ガ一平角ヲ回轉スルニハ何時間ヲ要スルカ。

6. 六時ニハ時計ノ時針ト分針トハ如何ナル角ヲナスカ。

7. 三時ニハ時計ノ時針ト分針トハ何度ノ角ヲ爲スカ。九時ニハ如何。(針ノ動ク向キト同ジキ向キニ分針ヨリ時針ノ方ヘ計リテ)

8. 直角ノ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ ヲ各度分秒ニテ書キ表ハセ。

9. 時計ノ時針ガ 1° , 60° , 225° , 300° ヲ回轉スルニハ各何分ヲ要スルカ。

42. 定義 二角ノ和直角に等しきときは其一を他の餘角といふ。

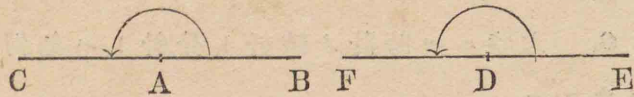
43. 定義 二角ノ和平角に等しきときは其一を他の補角といふ。

44. 定義 銳角とは直角より小なる角なり。

45. 定義 鈍角とは直角より大にして平角より小なる角なり。

定理 1

46. 平角は皆相等し。



假設 AB, AC ヲ一平角ノ兩邊トシ A ヲ其頂點トス。又 DE, DF ヲ他ノ一平角ノ兩邊トシ D ヲ其頂點トス。

終結 AB, AC ノナス平角 BAC ハ DE, DF ノナス平角 EDF ニ等シ。

證明 AB, AC ノナス角ハ平角ナルヲ以テ AB, AC ハ CAB ナル同一直線上ニ在リ。 [38]
 同理ニ依リテ DE, DF モ亦 FDE ナル同一直線上ニ在リ。 [38]

故ニ直線 CAB ヲ取リテ直線 FDE ノ上ニ重ネ點 A ヲ點 D ノ上ニ置キ AB ヲ DE ノ上ニ重ヌレバ AC ハ DF ノ上ニ重ナル [25]

即チ AB, AC ノナス平角ハ DE, DF ノナス平角ニ合ス。

故ニ此二角ハ相等シ。 [34]

47. 系1 直角は皆相等し。

如何トナレバ直角ハ平角ノ半分ニシテ [39]

相等シキ角ノ半分ハ相等シケレバナリ。 [19]ノ5

48. 系2 直線上の一点より之に一つの垂線を引くことを得而して唯一つに限る。 [40]ノ(注意)及ビ[36]

49. 系3 相等しき角の餘角は相等し。

50. 系4 相等しき角の補角は相等し。

51. 系5 二つの共軛角相等しきときは其各角は平角なり。

定理 2

52. 一直線が他の一直線と出會ひてなす二つの隣角の和は二直角に等し。

假設 直線 CO ガ直線

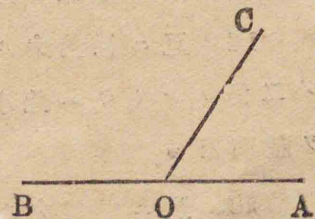
BA ト點 O ニ於テ出會フ

終結 隣角 COA, COB ノ

和ハ二直角ニ等シ。

證明 隣角 COA, COB ノ

和ハ OA, OB ノナス角ナリ。



BOA ハ一直線ナルヲ以テ OA, OB ノナス角ハ平角ナリ。 [38]

$$\text{故ニ } \angle COA + \angle COB = 2R. \angle$$

53. 系 一點より數多の直線を引くとき其各線が順次に其次の直線となす總ての角は合せて四直角に等し。

問題

10. 一直角ノ $\frac{3}{5}$ = 等シキ角ノ餘角ハ直角ノ幾分ナルカ、又之ヲ度ニテ表ハセバ如何。

11. $79^\circ 13' 52''$ ナル大サノ角ノ餘角及ビ補角ハ各、幾許ナルカ。

12. 二線相交ハリテナス所ノ四角ノ一ガ直角ナレバ他ノ三角モ亦各、直角ナルコトヲ證明セヨ。

13. 一線ガ他ノ一線ト出會ヒテナス所ノ二ツノ隣角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナルヲ證明セヨ。

14. 互ニ補角ナル二角ノ大ナル方ガ小ナル方ノ二倍ナルトキハ此小ナル角ハ 60° = 等シキコトヲ證明セヨ。

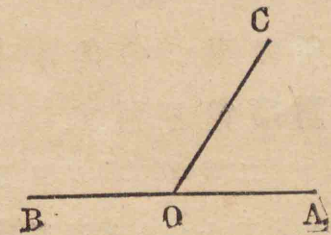
15. 互ニ補角ナル二ツノ隣角ノ二等分線ガナス角ハ直角ノ幾分ナルカ。

定理 3

54. 二つの隣角の和が二直角に等しければ其共通ならざる二邊は同一直線上に在り。

假設 COA, COB ハ二ツノ隣角ニシテ其和ハ二直角ニ等シ

終結 二邊 OA, OB ハ同一直線上ニ在リ。



證明 二角 COA, COB ノ和ハ OA 及ビ OB ノナス角ナリ。

而シテ $\angle COA + \angle COB = 2R. \angle$ [假設]
故ニ OA 及ビ OB ノナス角ハ二直角即チ平角ニ等シ。
故ニ OA, OB ハ同一直線上ニ在リ。 [38]

問題

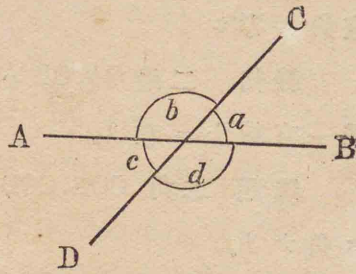
16. 二ツノ直線 AO, BO ガ直線 CD ノ反對ノ側ニ在リテ點 O = 於テ之ニ出會ヒ而シテ二ツノ角 AOD, BOC 相等シケレバ AO, BO ハ同一ノ直線上ニ在ルコトヲ證セヨ。

17. 四ツノ直線 AO, BO, CO, DO ガ一點 O = 於

テ出會ヒ而シテ角 AOB ハ角 COD = 等シク角 AOD
ハ角 BOC = 等シケレバ AO ト CO 及ビ BO ト DO ハ
何レモ同一ノ直線上ニ在ルコトヲ證セヨ。

55. 定義 二直線相交はりてなす
所の四つの角の中、隣角ならざる二角を
對頂角と稱す。

二線 AB, CD ガ相交
ハリテ a, b, c, d ナル四
ツノ角ヲナセバ a 及ビ
c ハ 對頂角ナリ。又 b
及ビ d ハ 對頂角ナリ。



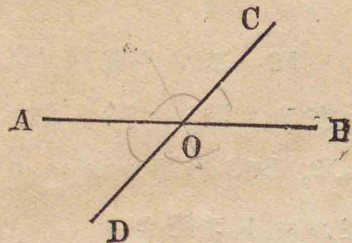
定理 4

56. 二つの直線相交はるときは對
頂角は相等し。

假設 AB, CD ヲ一
點 O = 於テ相交ハルニ
線トス。

終結 對頂角
∠AOD, ∠BOC ハ相等シ。

證明 AB ハ一直



線ナルヲ以テ $\angle BOC + \angle AOC = 2R.\angle$ [52]

又 CD ハ一直線ナルヲ以テ

$\angle AOD + \angle AOC = 2R.\angle$ [52]

然ルニ二直角即チ平角ハ皆相等シキヲ以テ [46]

$$\angle BOC + \angle AOC = \angle AOD + \angle AOC$$

雙方ヨリ $\angle AOC$ ヲ減ズレバ

$$\angle BOC = \angle AOD$$

同理ニ由リテ $\angle AOC = \angle BOD$

問題

18. 對頂角ノ一ヲ二等分スル直線ハ他ノ一ヲ
モ亦二等分ス

定理 5

57. 直線外の一ノ點ヨリ此直線ヘ一
ツノ垂線ヲ引クことを得、而して唯一
ツに限る。

假設 AB ヲ與ヘラレタル一線トシ O ヲ其外
ニ在ル一定點トス。

終結 O ヲヨリ AB ヘ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ

ヲ折リ返シ圖形 $C'OD$ ヲ有スル平面ノ部分ニ重ネヨ。

然レバ OC ハ OC' ニ重ナリ。

[$\because COD, C'OD$ ハ各、直角ナルヲ以テ相等シ]

OC ハ OC' ニ合シ點 C ハ點 C' ノ上ニ落ツ。

[\because 作圖ニ依リテ $CO=C'O$]

故ニ $CD=C'D$

[\because 此二線ハ同ジキ兩端ヲ有スル

ヲ以テ全ク相合ス]

故ニ $CD+C'D=2CD$

又 $CO+C'O=2CO$

然ルニ 直線 $CC' <$ 折線 CDC' [26]

即チ $2CO < 2CD$

故ニ $CO < CD$

即チ CO ハ C ヨリ AB へ引ケル他ノ任意ノ直線ヨリ小ナリ。

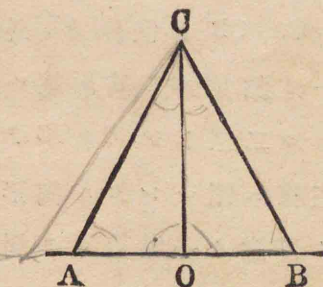
故ニ CO ハ C ヨリ AB へ引ケル總テノ直線ノ中、最短ナル直線ナリ。

59. 定義 點と直線との距離とは此點より此直線へ引ける垂線の長さなり。

定理 7

60. 直線外の一點より此線へ垂線及び斜線を引くとき垂線の足より等距離に於て直線を截る所の二つの斜線は相等し。

CO ヲ直線 AB 外ノ一
點 C ヨリ AB へ引ケル垂
線トシ CA, CB ヲ斜線トシ
 $OA=OB$ トスレバ $CA=CB$



證明 CO ヲ折リ目ト

シテ平面ヲ折リ圖形 COB

ヲ有スル平面ノ部分ヲ圖形 COA ヲ有スル平面ノ部分ニ重ネヨ。

然レバ OB ハ OA ニ重ナリ。

[$\because COB, COA$ ハ各、直角ナルヲ以テ相等シ]

OB ハ OA ニ合シ點 B ハ點 A ノ上ニ落ツ。

[\because 假設ニ依リテ $OA=OB$]

故ニ CA ハ CB ニ合ス。

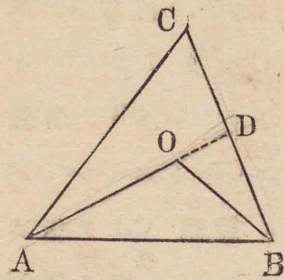
故ニ $CA=CB$

注意 本定理ニ於テハ是マデノ如ク假設ト終結トヲ別々ニ明記セズ。今後モ往々斯ノ如ク略記スルコトアルベシ

定理 8

61. 直線外の一 點より此直線の兩端へ引ける二直線の和は其三線に圍まれたる圖形内の一 點より同じき二點へ引ける二直線の和より大なり。

CA, CB ヲ直線 AB 外ノ一定點 C ヲリ其兩端へ引ケル二線トシ, OA, OB ヲ此三線ニ圍マレタル圖形内ノ任意ノ一 點 O ヲリ引ケル二線トスレバ



$$CA + CB > OA + OB$$

證明 AO ヲ延長シ點 D = 於テ BC = 出會ハシメヨ

然レバ $CA + CD > DA$ [26]

雙方へ DB ヲ加フレバ

$$CA + CD + DB > DA + DB$$

即チ $CA + CB > DA + DB \dots\dots(1)$

又 $DB + DO > OB$ [26]

雙方へ OA ヲ加フレバ

$$DB + DO + OA > OB + OA$$

即チ $DA + DB > OA + OB \dots\dots(2)$

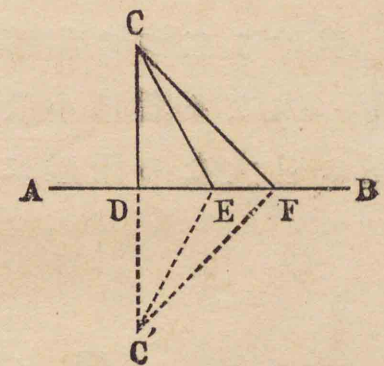
故ニ(1)及ビ(2)ヨリ

$$OA + CB > OA + OB$$

定理 9

62. 直線外の一 點より此線へ引ける二つの斜線の中垂線の足より大なる距離に於て直線を截る斜線は小なる距離に於て之を截るものより大なり。

CD ヲ直線 AB 外ノ一 點 C ヲリ之へ引ケル垂線トシ CE, CF ヲ二ツノ斜線トシ
 $DF > DE$ トスレバ
 $CF > CE$



證明 CD ヲ延長シ C'D ヲ CD = 等シク取り CE, C'F ヲ引ケ。

然レバ $CE = C'E$ [60]

∵ ED ⊥ CC' CD = C'D

又 $CF = C'F$ [60]

而シテ $CF + C'F > CE + C'E$ [61]

故ニ $2CF > 2CE$

故ニ $CF > CE$

63. 系1 直線外の一 點より此線へ二つの相等しき斜線を引くことを得、而して唯二つに限る。

64. 系2 直線外の一 點より此線へ引ける二つの相等しき斜線は垂線の足より相等しき距離に於て此線を截る。

65. 系3 直線外の一 點より此線へ引ける二つの相等しからざる斜線の中、大なる者は小なる者よりも垂線の足より大なる距離に於て此線を截る。

問題

21. 線外ノ一 點ヨリ此線へ引ケルニツノ相等シキ斜線ハ垂線ト等角ヲナス。又此線ト等角ヲナス。

22. 線外ノ一 點ヨリ此線へ垂線及ビ斜線ヲ引クトキ垂線ト等角ヲナス所ノニツノ斜線ハ相等シク之ト大角ヲナス所ノ斜線ハ小角ヲナスモノヨリ大ナリ。

66. 定義 有限直線の中點に於て之に垂直なる直線を其線の垂直二等分線と稱す。

定理 10

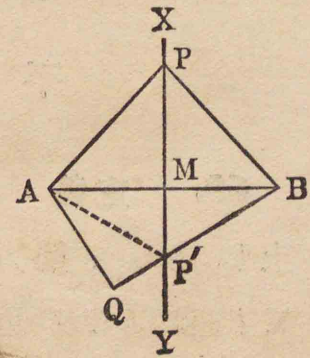
67. 有限直線の垂直二等分線上の點は皆其線の兩端より等距離に在り、而して其垂線外の點は皆不等距離に在り。

XY ヲ有限直線 AB ノ

垂直二等分線トス。

① P ヲ XY 上ノ任意ノ一 點トシ PA, PB ヲ引ケバ
PA = PB

② Q ヲ XY 外ノ任意ノ一 點トシ QA, QB ヲ引ケバ
QA ≠ QB



證明 ① AB ノ中點ヲ M トス。

PM ⊥ AB AM = BM [假設]

故ニ PA = PB [60]

② BQ ト XY トノ交點ヲ P' トシ AP' ヲ引ケ。

然レバ AQ < AP' + P'Q ΔQ < AP' + P'Q [26]

而シテ $\Delta P' = BP'$ □
 故ニ $\Delta Q < BP' + P'Q$
 即チ $\Delta Q < BQ$

68. 系 二つの定點より等距離に在る二點を通過する直線は其二定點を結び付くる直線の垂直二等分線なり。

第二節

平行直線

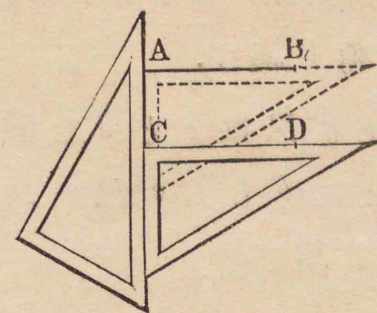
69. 定義 平行直線とは同一平面上に在りて雙方へ何程延長するも決して出會はざる直線なり。

通常之ヲ略シテ單ニ**平行線**トイフ
 例ヘバ AB, CD ノ如シ。

同一平面上ニ在リテ \overline{AB}
 平行ナラザル二線ヲ十分 \overline{CD}
 延長スレバ必ズ相交ハル。

70. 平行線ヲ引クハ二ツノ定規ヲ以テス。

其一ハ三角定規ナルヲ可トス。(ニツナガラ三角定規ナルモ可ナリ) 其方法ハ先ヅ一ツノ定規ヲ平行線ヲ引カントスル平面上ニ据エ置キ而シテ他ノ定規ノ縁ヲ前ノ定規ノ縁ニ密着セシメツト之ヲ一方ニ動カシ此定規ノ他ノ縁ニ沿ヒテ直線ヲ引クナリ。斯ノ如クニシテ得ルトコロノ AB, CD ハ平行線ナリ。



AB ガ CD ニ平行ナリトイフコトヲ次ノ如ク記スルコトアリ。

$AB \parallel CD$

例題 平行線ノ例ヲ舉ゲヨ。

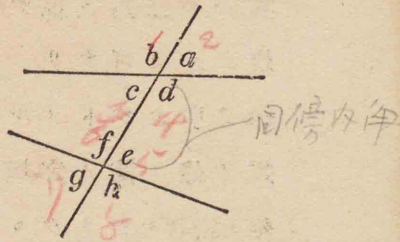
71. 公理 同一の點を通過し同一の直線に平行なる直線は唯一つに限る。

72. 系 二平行線の一に交はる線は亦他の一にも交はる。

73. 定義 一直線が他の二直線に交はれば八つの角をなす。其相互の關係に由りて下の如く之に命名す。

四つの角 a, b, g, h を各、
外角と稱す。

四つの角 c, d, e, f を各、
内角と稱す。



d と f 又は c と e を錯角と稱す。

a と c, b と d, c と e 又は d と h を同位角と稱す。

定理 11

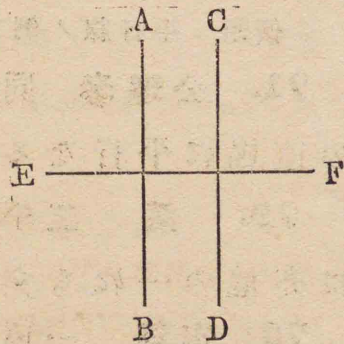
74. 同一直線に垂直なる二直線は互に平行なり。

假設 $AB \perp EF$

$CD \perp EF$

終結 $AB \parallel CD$

證明 若シ AB, CD



ガ互に平行ナラザレバ之ヲ雙方へ十分延長スレバ何レノ方カノ或點ニ於テ出會フ。

然レバ AB ト CD トハ其點ヨリ EF へ引ケルニツノ垂線トナル。

是不合理ナリ。

[57]

[∵ 直線外ノ一點ヨリ之へ引ケル垂線

ハ唯一ツニ限ルモノナレバナリ]

故ニ AB ト CD トハ之ヲ雙方へ何程延長スルモ決して出會フコトナシ。

即チ AB, CD ハ互ニ平行ナリ。

定理 12

75. 一直線が二平行線の一に垂直なれば他の一にも亦垂直なり。

假設 $AB \parallel CD$

$EF \perp AB$

終結 $EF \perp CD$

證明 先ツ EF ハ CD

ニ交ハルベシ如何トナレバ

EF ハ CD ノ平行線ナル AB ニ

交ハレバナリ [72]

EF ト CD トノ交點ヲ H トセヨ H ヲ通過シテ EF ニ垂直ナル一線 MN ヲ引ケ然レバ $MN \parallel AB$ [74]

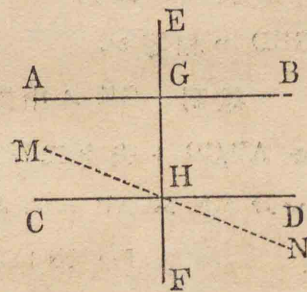
[∵ $MN \perp EF$ $EF \perp AB$]

然ルニ $CD \parallel AB$

[假設]

故ニ MN ト CD トハ相合ス。

[71]



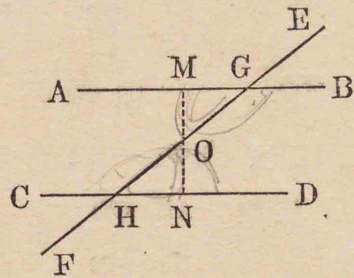
[∵ 同一ノ點Hヲ通過シ同一ノ直線 AB = 平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル]

故ニ EF ⊥ CD

定理 13

76. 一直線が二平行線に交はりてなす錯角は相等し.

假設 一線 EF ガ二平行線 AB, CD ト夫々二點 G, H = 於テ相交ハル.



終結 錯角 AGH, GHD ハ相等シ.

證明 GH ノ中點Oヲ通過シCDへ垂線MNヲ引キ AB, CD ト夫々二點 M, N = 於テ交ハラシメヨ. 然レバ MN ハ AB ニモ亦垂直ナリ. [75]

[∵ MN ⊥ CD AB ∥ CD]

即チ HN, GM ハ各, MN = 垂直ナリ.

圖 HON ヲ其平面内ニ於テ點Oノ周リニ二直角ダケ回轉シテ ON ヲ OM ニ重ネヨ.

然レバ OH ハ OG ニ重ナリ.

[∵ (56) = 依リテ ∠HON = ∠GOM]

OH ハ OG ニ合シ點Hハ點Gノ上ニ落ツ.

[∵ 作圖 = 依リテ OH = OG]

是ニ由リテ二垂線 HN, GM ハ相合ス. [57]

故ニ二角 OGM, OHN ハ相合ス.

故ニ錯角 AGH, GHD ハ相等シ.

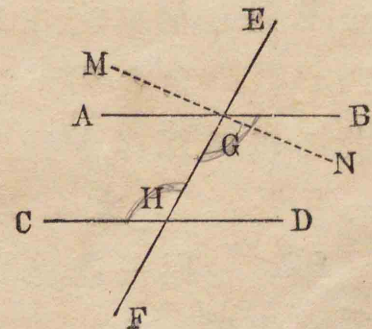
77. 系 1 一直線が二平行線に交はりてなす同位角は相等し.

78. 系 2 一直線が二平行線に交はれば其同じ側に在る二つの内角の和及び二つの外角の和は何れも二直角に等し.

定理 14

79. 一直線が二直線と交はりてなす錯角相等しければ其二直線は互に平行なり.

假設 一線 EF ガ二線 AB, CD ト夫々 G, H = 於テ交ハリ錯角 AGH, GHD ハ相等シトス.



終結 AB ∥ CD

證明 點Gヲ通過

シ CD = 平行ナル直線 MN ヲ引ケ。
 然レバ $\angle MGH = \angle GHD$ [76]
 [∵ EF ガ二平行線 MN, CD ト交
 ハリテ爲ス錯角ナレバナリ]
 然ルニ $\angle AGH = \angle GHD$ [假設]
 故ニ $\angle MGH = \angle AGH$
 故ニ二線 MN, AB ハ重ナリ合ヒテ一線トナル。
 然ルニ $MN \parallel CD$
 故ニ $AB \parallel CD$

80. 系 1 一線が二線と交はりて
 なす同位角相等しければ其二線は互に
 平行なり。

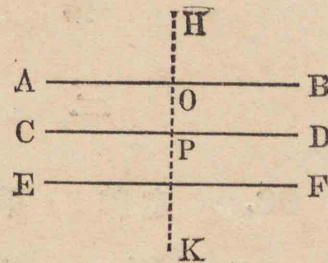
蓋シ [70] = 於テ述ベタル平行線ヲ引ク方法ハ
 平行線ノ此性質ニ由ルモノナリ。

81. 系 2 一線が二線と交はると
 き其同じ側に在る二つの内角の和又は
 二つの外角の和が二直角に等しければ
 其二線は互に平行なり。

定理 15

82. 同一直線に平行なる二直線は
 互に平行なり。

假設 $AB \parallel EF$
 $CD \parallel EF$
 終結 $AB \parallel CD$
 證明 EF = 垂直
 ナル線 HK ヲ引ケ。
 然レバ $AB \parallel EF$ ナルヲ
 以テ $HK \perp AB$ [75]
 又 $CD \parallel EF$ ナルヲ以テ $HK \perp CD$ [75]
 故ニ二角 HOB, HPD ハ各直角ナルヲ以テ相等シ。
 故ニ $AB \parallel CD$ [80]



問題

- 23. [76]ノ圖ニ於テ錯角 BGH, GHD ハ相等シキ
 コトヲ證明スベシ。
- 24. 一角ノ二邊ガ夫々他ノ一角ノ二邊ニ平行
 ナレバ其二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ。
- 25. 一角ノ二邊ガ夫々他ノ一角ノ二邊ニ垂直
 ナレバ其二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ。
- 26. 二邊ガ夫々互ニ平行ナル二角ノ二等分線
 ハ互ニ平行ナルカ或ハ互ニ垂直ナリ。

第三節 三角形

83. 定義 平面形とは線を以て圍みたる平面の一部分なり。

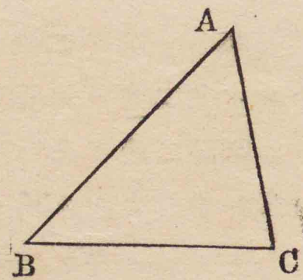
84. 定義 直線形又は多角形とは直線を以て圍みたる平面形なり。

85. 定義 三角形とは三直線を以て圍みたる直線形なり。

86. 定義 多角形を圍む所の各直線の其境界をなす部分を其邊と稱し、總ての邊の和を其周と稱す。

圖ニ示スモノハ三角形ニシテ之ヲ三角形 ABC トイフ。BC, CA, AB ハ其三角形ノ邊ナリ。

三角形ヲ表ハスニ \triangle ナル記號ヲ用キルコトアリ。



87. 定義 多角形の二邊の夾む其

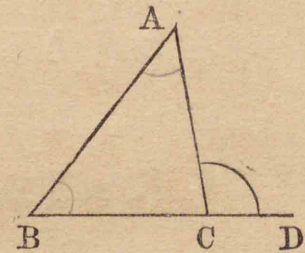
形内の角を其内角と稱す。通常之を單に多角形の角と稱す。

上圖ニ於テ角 ABC, 角 BCA, 角 CAB ハ三角形ノ角ナリ。

88. 定義 多角形の一邊と其隣邊の延長との夾角を多角形の外角と稱す。

三角形に於ては一外角の隣角にあらざる二つの内角を各、此外角の内對角と稱す。

圖ニ於テ角 ACD ハ三角形 ABC ノ外角ニシテ二角 CAB, ABC ハ各、其内對角ナリ。



89. 定義 等邊三角形とは三邊皆相等しき三角形なり。

90. 定義 二等邊三角形とは二邊相等しき三角形なり。

91. 定義 三角形の何れの邊をも其底邊と稱することを得。之に對する

角の頂點を三角形の**頂點**と稱し頂點より底邊或は其延長へ引ける垂線の長さを三角形の**高サ**と稱す。

二等邊三角形に於ては相等しき二邊の夾角の頂點を特に頂點と稱し之に對する邊を其底邊と稱す。

92. 定義 三角形の一角が直角なれば之を**直角三角形**と稱す。

直角三角形に於て直角に對する邊を其**斜邊**と稱す。

93. 定義 **鈍角三角形**とは一角が鈍角なる三角形なり。

94. 定義 **等角三角形**とは三角皆相等しき三角形なり。

問題

27. 一多角形ヲ作ルニ必要ナル直線ノ最小數ハ幾何ナルカ。

28. 任意ノ二等邊三角形ヲ作レ。

29. 任意ノ鈍角三角形ヲ作り其各邊ヲ順次ニ底邊ト見做シ高サヲ表ハス所ノ垂線ヲ引キ(三角定規ニテ)之ヲ延長セヨ。

30. 直角三角形ニ於テ直角ヲ夾ム所ノ二邊ノ一ヲ底邊ト見做セバ他ノ一邊ハ何ヲ表ハスカ。

31. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ。

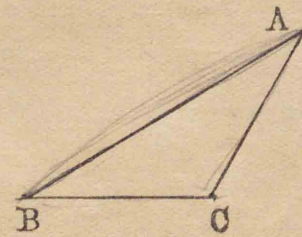
定理 16

95. 三角形の一邊は他の二邊の和より小なり。

三角形 ABC ニ於テ其任意ノ一邊 AB ハ他ノ二邊 BC, CA ノ和ヨリ小ナル

コトヲ證明セントス。

證明 若シ AB ガ BC
又ハ AC ノ何レカ一ヨリ
大ナラザルトキハ



$AB < BC + CA$ ナルコト明カナリ。

AB ガ他ノ二邊ノ何レヨリ大ナルモ

$AB < BC + CA$

如何トナレバ AB ハ二點 A, B ノ間ニ引ケル直線ナ
ルヲ以テ折線 ACB ヨリ小ナリ。 [26]

96. 系 三角形の一邊は他の二邊の

差より大なり。

97. 注意 $\triangle ABC$ = 於テ角 A, B, C = 對スル邊 BC, CA, AB ノ長ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハセバ

$$a < b+c \quad b < c+a \quad c < a+b$$

$$a > b-c \quad b > c-a \quad c > a-b$$

問題

32. 長サ二尺, 三尺及ビ六尺ナル三線ニテ三角形ヲ作り得ルカ。一尺二尺及ビ三尺又ハ三尺, 五尺及ビ七尺ニテハ如何

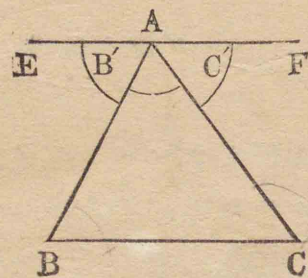
33. 三角形内ノ一點ヲ其一邊ノ兩端ニ結ビ付クル二線ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。[61]ヲ見ヨ

34. 三角形内ノ一點ヲ其三角ノ頂點ニ結ビ付クル直線ノ和ハ其三邊ノ和ヨリ小ニシテ此和ノ半ヨリ大ナリ。

定理 17

98. 三角形の三角の和は二直角に等し。

三角形 ABC = 於テ三角 A, B, C ノ和ハ二直角ニ等シキコトヲ證明セントス。



證明 一頂點 A ヲ通過シ底邊 BC = 平行ナル線 EF ヲ引ケ

然レバ $B' = B \quad C' = C$ [76]

[\therefore 一線ガ二平行線ニ交ハリテナス錯角ナレバナリ]

故ニ $B' + C' = B + C$

故ニ又 $A + B' + C' = A + B + C$

然ルニ $A + B' + C'$ ハ AE ト AF トガナス平角即チ二直角ニ等シ。

故ニ $A + B + C = 2R. \angle$

99. 系 1 三角形は一つより多くの直角又は鈍角を有するを得ず。

100. 系 2 直角三角形の二鋭角は互に餘角なり

101. 系 3 等角三角形の各角は一直角の三分の二即ち 60° なり。

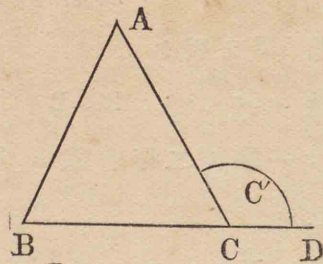
102. 系 4 二つの三角形の二角が夫々相等しければ残りの一角も亦相等し。

定理 18

103. 三角形の外角は其二つの内對

角の和に等し。

三角形 ABC ノ外角
ACD ガ其二ツノ内對角
BAC, ABC ノ和ニ等シキ
コトヲ證明セントス。



證明 $C + C' = 2R. \angle$ [52]

又 $A + B + C = 2R. \angle$ [98]

故ニ $C + C' = A + B + C$

故ニ $C' = A + B$

104. 系 三角形の外角は其内對角の何れよりも大なり。

問題

35. 直角三角形ノ一角 $58^\circ 12' 47''$ ナルトキハ他ノ二角ノ大サ各如何

36. Dヲ $\triangle ABC$ 内ノ一點トスレバ
 $\angle BDC > \angle BAC$

37. $\triangle ABC$ ニ於テ角 $A > B + C$ ナレバ角 A ハ鈍角ナリ, 角 $A = B + C$ ナレバ角 A ハ直角ナリ, 角 $A < B + C$ ナレバ角 A ハ鋭角ナリ.

全等三角形

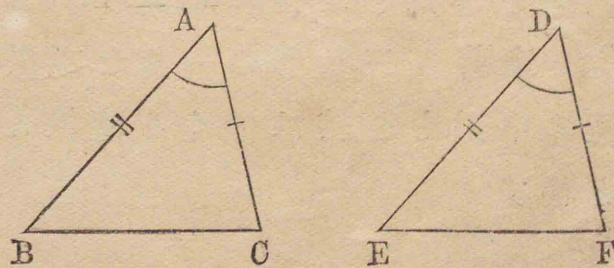
105. 全等ナル圖形ハ唯其位置相異ナルノミニテ形ト大サトハ同一ナルヲ以テ斯ノ如キ圖形ノ部分ナル角, 線等ハ皆夫々相等シキコト明カナリ. 二ツノ全等ナル三角形ニ於テハ各形ノ三邊ト三角トハ互ニ相等シキヲ以テ今其一ヲ取り他ノ一ノ上ニ重スルハ各形ノ三邊ガ圍ム所ノ平面ノ部分ハ全ク相合 [17]ヲ見ヨ

二ツノ三角形 ABC, DEF ガ全等ナルトキハ之ヲ次ノ如ク記スルコトアリ.

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

定理 19

106. 二つの三角形に於て二邊と其夾角相等しければ此二つの三角形は全等なり.



假設 $\triangle ABC, \triangle DEF$ = 於テ

$AB=DE \quad AC=DF \quad A=D$

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle ABC$ ヲ取り之ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ重ネ邊
AB ヲ邊 DE ノ上ニ置キ角 A ヲ角 D ノ上ニ重ネヨ。

然レバ $A=D$ ナルヲ以テ邊 AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナル。

而シテ $AB=DE$ ナルヲ以テ
點 B ハ點 E ノ上ニ落ツ。

又 $AC=DF$ ナルヲ以テ
點 C ハ點 F ノ上ニ落ツ。

故ニ邊 BC ハ邊 EF ニ合シ
ニツノ三角形ハ全ク相合ス。

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

而シテ $BC=EF \quad B=E \quad C=F$

107. 二つの三角形が全等なるとき
は其等邊と等角とは恒に相對す。

108. 定義 三角形の一角を頂點と
其對邊の中點とを結び付くる直線を其
中線と稱す

問題

38. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ其底邊
ノ垂直二等分線ナリ。

39. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線上ニ在ル
任意ノ點ハ底邊ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。

40. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ出ヅル中
線ハ相等シ。

定理 20

109. 二等邊三角形の等邊に對する
角は相等し。

假設 $\triangle ABC$ = 於テ

$AB=AC$

終結 $C=B$

證明 AD ヲ頂角 BAC

ノ二等分線トセヨ

然レバ $\triangle ABD, \triangle ACD$ = 於テ

$AB=AC$

[假設]

AD ハ兩形ニ通ジ, $\angle BAD = \angle CAD$

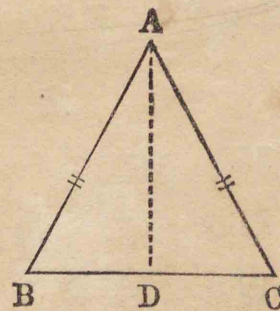
[作圖]

即チ二邊ト夾角トガ相等シキヲ以テ

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

[106]

因リテ兩形ニ共通ナル邊 AD ノ對角 $\angle ABC, \angle ACB$ ハ



相等シ.

[107]

110. 系 三角形の三邊相等しければ其三角も亦相等し.

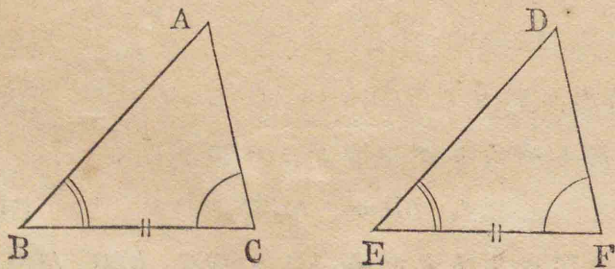
問題

41. 等邊三角形 ABC ノ三邊 AB, BC, CA ヨリ順次ニ夫々相等シキ長サ AA', BB', CC' フ截レバ△A'B'C' モ亦等邊ナリ.

42. ニツノ二等邊三角形ガ同ジ底邊上ニ立ツトキハ其二頂點ヲ通過スル直線ハ底邊ノ垂直二等分線ナリ. [1] [109] 及ビ [106] ニ依リテ又 [2] [68] ニ依リテ之ヲ證明セヨ.

定理 21

111. 二つの三角形に於て一邊と其兩端に於ての角相等しければ此二つの三角形は全等なり.



假設 △ABC, DEF = 於テ

BC=EF B=E C=F

終結 △ABC ≡ △DEF

證明 △ABC フ取り之ヲ△DEF ノ上ニ重ネ點

B フ點E ノ上ニ置キ邊 BC フ邊 EF ニ重ネヨ.

然レバ BC=EF ナルヲ以テ

點C ハ點F ノ上ニ落ツ

又 B=E ナルヲ以テ BA ハ ED ニ重ナリ

而シテ又 C=F ナルヲ以テ CA ハ FD ニ重ナル

故ニ點A ハ ED 上ニ在ルト同時ニ亦 FD 上ニモ在ラザル可カラズ

故ニ A ハ ED ト FD トノ交點D ノ上ニ落ツ

故ニ二ツノ三角形ハ全ク相合ス.

故ニ △ABC ≡ △DEF

而シテ A=D AB=DE AC=DF [107]

112. 系 二つの三角形に於て其二角夫々相等しく而して一雙の等角に對する邊相等しければ此二つの三角形は全等なり.

問題

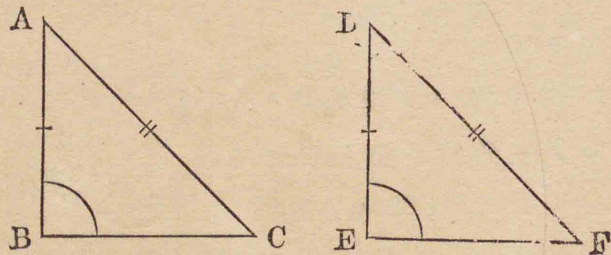
43. 三角形ノ一角ノ二等分線ガ其對邊ニ垂直

ナレバ此三角形ハ二等邊ナリ。

44. 二等邊三角形 ABC ノ底角 B, C (底邊ノ兩端ニ於テノ角)ノ二等分線ガ夫々 AC, AB ト點 D, E ニ於テ出會フトキハ $BD=CE$

定理 22

113. 二つの直角三角形に於て斜邊と他の一邊とが夫々相等しければ此二つの三角形は全等なり。



假設 直角三角形 ABC, DEF ニ於テ

斜邊 $AC=DF$ $AB=DE$

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ重ネ點 A ヲ點

D ノ上ニ置キ邊 AB ヲ邊 DE ニ重ネヨ。

然レバ $AB=DE$ ナルヲ以テ

點 B ハ點 E ノ上ニ落ツ

又二角 B, E ハ各直角ナルヲ以テ相等シ

故ニ BC ハ EF ニ重ナル

而シテ點 C ハ點 F ノ上ニ落ツ

如何トナレバ若シ C ガ F ノ上ニ落チザレバ BC, EF ハ相等シカラズ。

EC, EF ガ相等シカラザレバ AC, DF モ亦相等シカラザルベシ。 [62]

是假設ニ合ハズ

故ニ點 C ハ點 F ノ上ニ落チ AC ハ DF ニ合シニツノ三角形ハ全ク相合ス

故ニ $\triangle ABC = \triangle DEF$

定理 23

114. 三角形の二角相等しければ之に對する二邊相等しく此三角形は二等邊なり

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ

$B=C$

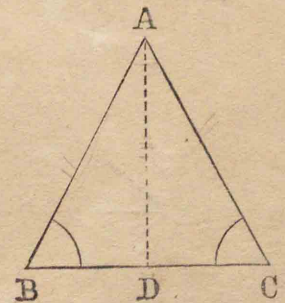
終結 $AC=AB$

證明 AD ヲ頂角 A ノ

二等分線トセヨ

然レバ $\triangle ABC, ACD$ ニ於テ

$\angle BAD = \angle CAD$



[作圖]

$\angle ABC = \angle ACB$ [假設]

而シテ AD ハ共通ナリ

故ニ $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ [112]

因リテ $AB = AC$

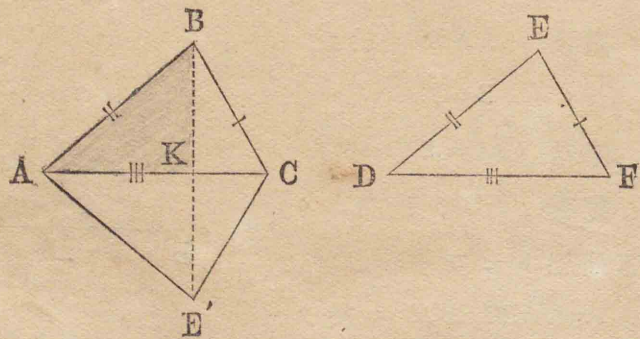
115. 系 三角形の三角相等しければ其三邊も亦相等し。

問題

45. 三角形ノ一角ノ外角ノ二等分線ガ其角ノ對邊ニ平行ナレバ此三角形ハ二等邊ナリ。

定理 24

116. 二つの三角形に於て三邊夫々相等しければ此二つの三角形は全等なり。

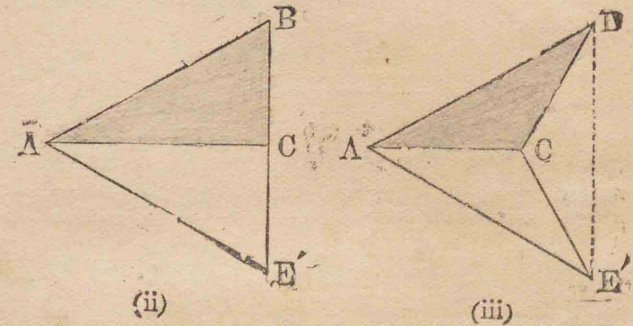


假設 $\triangle ABC, DEF$ = 於テ

$BC = EF \quad CA = FD \quad AB = DE$

終結 $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明 $\triangle DEF$ ノ頂點 D ヲ $\triangle ABC$ ノ頂點 A ノ上ニ置キ邊 DF ヲ邊 AC ニ重ネ點 B ト點 E トガ AC ノ反對ノ側ニ在ル横ニ置ケ然レバ $AC = DF$ ナルヲ以テ點 F ハ點 C ノ上ニ落ツ點 E' ヲ點 E ノ落ツル點トセヨ



若シ(ii) CB ト CE' トガ同一直線上ニ在レバ ABE' ナル二等邊三角形ヲ得。

因リテ $\angle ABC = \angle AE'C$ [109]

若シ CB ト CE' トガ同一直線上ニ在ラザレバ BE' ヲ引ケ

然レバ $\angle ABE' = \angle AE'B$ [109]

又 $\angle CBE' = \angle CE'B$ [109]

上ノ二式ヲ (i) 相加へ或ハ (iii) 前式ヨリ後式ヲ減ズ
レバ $\angle ABC = \angle AEC$

即チ $\angle ABC = \angle DEF$

即チ二ツノ三角形 ABC, CEF ハ二邊相等シク其夾
角相等シキヲ以テ全等ナリ。 [106]

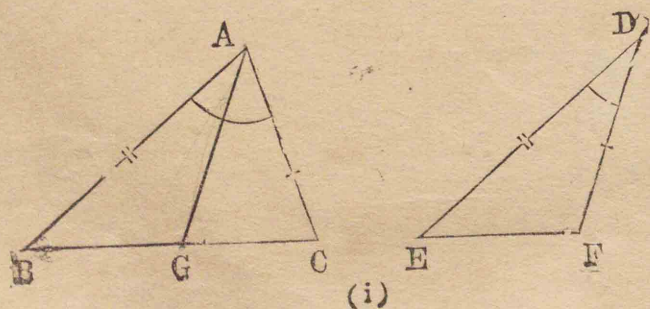
問題

46. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ出ヅル中線ハ本
形ヲ二ツノ全等ナル直角三角形ニ分ツ。

47. 一邊相等シキ二ツノ等邊三角形ハ全等ナ
リ。

定理 25

117 二つの三角形に於て二邊夫々
相等しく其夾角不等なれば大角の對邊
は小角の對邊より大なり。



假設 $\triangle ABC, DEF$ = 於テ

$AB = DE$ $AC = DF$ $A > D$

終結 $BC > EF$

證明 $\triangle DEF$ ヲ取リ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ネ點 E ヲ
點 B ノ上ニ置キ邊 ED ヲ邊 BA ニ重ネ點 O ト點 F
トガ AB ノ同ジキ側ニ在ル様ニ置ケ
然レバ $AB = DE$ ナルヲ以テ

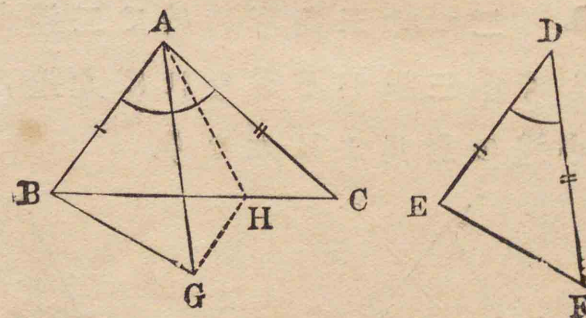
點 D ハ點 A ノ上ニ落ツ

$D < A$ ナルヲ以テ

DF ハ角 BAC 内ニ在ル直線 AG ノ如キ位置ヲ取
點 G ヲ點 F ノ落ツル點トセヨ

(i) 若シ點 G ガ邊 BC 上ニ在レバ

BC ハ BG 即チ EF ヨリ大ナルコト明カナリ。



(ii)

(ii) 若シ點 G ガ BC 上ニ在ラザレバ

角 GAC ノ二等分線ヲ引キ點 H = 於テ BC = 出會ハ
シメ GH ヲ結ビ付ケヨ。

然レバ $\triangle AGH, ACH$ ハ二邊ト夾角相等シキヲ以テ
全等ナリ, [106]

故ニ $HG = HC$ [107]

然ルニ $BH + HG > BG$ [95]

故ニ $BH + HC > BG$

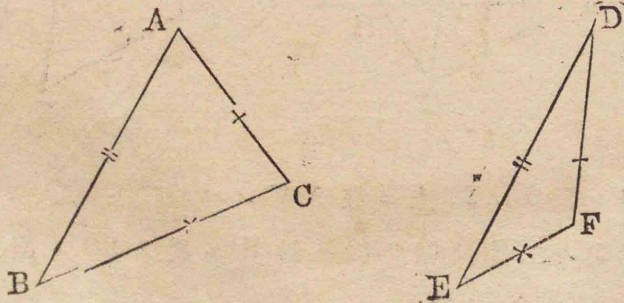
即チ $BC > EF$

問題

48. D ハ $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點ニシテ角 ADB
ガ鈍角ナレバ $AB > AC$

定理 26

118. 二つの三角形に於て二邊夫々
相等しく第三邊が不等なれば大邊の對
角は小邊の對角より大なり.



假設 $\triangle ABC, DEF$ ニ於テ

$$AB = DE \quad AC = DF \quad BC > EF$$

終結 $A > D$

證明 若シ $A > D$ ニアラザレバ $A = D$

カ或ハ $A < D$ カノ一ナルベシ

然ルニ若シ $A = D$ トセバ

兩三角形ハ全等トナリ $BC = EF$ ナルベシ [106]

是假説ニ戻ル

若シ又 $A < D$ トセバ $BC < EF$ ナルベシ [117]

是モ亦假説ニ戻ル

故ニ $A > D$ ナラザルベカラズ

問題

49. D ハ三角形 ABC ノ一邊 BC ノ中點ニシテ
 $AB > AC$ ナレバ角 ADB ハ鈍角ナリ.

定理 27

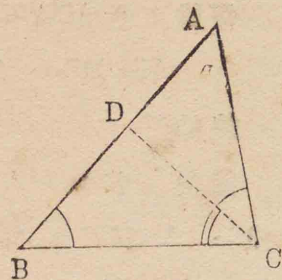
119. 三角形の二角が不等なれば大
角の對邊は小角の對邊よりも大なり.

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ

$$C > B$$

終結 $AB > AC$

證明 角C内ニ於テ
角Bニ等シク $\angle BCD$ ヲ作
リCDヲ引ケバCDハ點A
ト點Bトノ間ニ於テAB
ニ出會フ



然レバ $DB = DC$ [114]

而シテ $AD + DC > AC$ [95]

故ニ $AD + DB > AC$

即チ $AB > AC$

定理 23

120. 三角形の二邊不等なれば大邊の對角は小邊の對角より大なり.

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ

$AB > AC$

終結 $C > B$

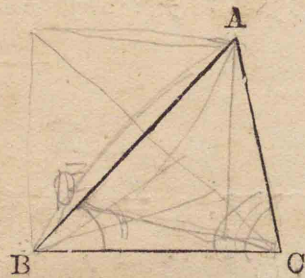
證明 若シ $C > B$ ニ

アラザレバ $C = B$ カ或ハ

$C < B$ カノーナルベシ

然ルニ若シ $C = B$ トセバ $AB = AC$ [114]

是假設ニ戻ル



若シ又 $C < B$ トセバ $AB < AC$ [119]

是モ亦假設ニ戻ル

故ニ $C > B$ ナラザル可ラス.

問題

50. ADヲ $\triangle ABC$ ノ中線トス [1] $BC > 2AD$ ナレバ角Aハ鈍角ナリ [2] $BC = 2AD$ ナレバ角Aハ直角ナリ [3] $BC < 2AD$ ナレバ角Aハ鋭角ナリ.

51. [120]ノ圖ニ於テABヨリACニ等シクADヲ取りCDヲ結ビ付ケ [109]ト [104]トニ依リテ本定理ヲ證明セヨ.

121. 或定理の假設を終結とし其終結を假設となす所の一命題を原定理の逆と稱す或は此等の二命題は互ニ逆ナリといふ.

或定理が眞なるも其逆は必ずしも眞ならず.

例ヘバ「 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB = AC$ ナレバ $C = B$ 」ナル命題ト「 $\triangle ABC$ ニ於テ $C = B$ ナレバ $AB = AC$ 」ナル命題トハ互ニ逆ナリ而シテ何レモ眞ナルコトハ既ニ [109] 及ビ [114]ニ於テ證明シタルガ如シ. 然レドモ「二角各直角ナレバ此二角ハ相等シ」ハ眞ナレ

ドモ其逆ナル「二角相等シケレバ此二角各、直角ナリ」ハ必ズシモ真ナラザルコト言フ俟タズ

是ニ由リテ今一定理ノ真ナルコトヲ知ルモ其逆モ亦真ナリト直チニ断定スルヲ得ズ。其真ナルト真ナラザルトハ別ニ推究スルヲ要ス。

定理の假設が複雑なるときは其一部分と終結とを交換して得る所の命題を原定理の逆と稱す。

[117]ト [118]トニ於ケル二定理ノ如シ

122. [118]ノ定理ヲ證明シタル方法ハ間接法ト稱スルモノニシテ其法ハ若シ本定理ノ終結ガ真ナラズシテ之ニ異ナル事項ガ真ナリトセバ常ニ或不合理ノ關係ヲ生ズルコトヲ示シ以テ本定理ノ終結ガ真ナラザル可カラズト推定スルナリ。

問題

52. 第二節ニ於ケル諸定理中互ニ逆ナル二定理ヲ指示セヨ

53. 第三節ニ於テ互ニ逆ナル定理ハ上記ノ定理20ト23及ビ定理25ト26トノ外尙ホ一雙アリ。其何レナルカラ指示セヨ。

54. 第三節ニ於ケル諸定理中 [118]ノ定理ノ外間

接法ニ依リテ證明セラレタル定理ヲ指示セヨ

第四節 四形邊

123. 定義 四邊形とは四直線を以て圍みたる直線形なり。

124. 定義 梯形とは一雙の相對する邊は平行にして他の一雙の相對する邊は平行ならざる四邊形なり。

平行なる二邊を各梯形の底と稱す。

125. 定義 平行四邊形とは二雙の相對する邊が平行なる四邊形なり。

記號□を以て平行四邊形を表はすことあり。

126. 定義 矩形とは總ての角が直角に等しき四邊形なり。

記號□を以て矩形を表はすことあり。

127. 定義 菱形とは總ての邊が相等しき四邊形なり。

128. 定義 正方形とは總ての角が直角に等しく總ての邊が相等しき四邊

第四節 定義法

parallel gram

Rectangular

形なり。

129. 定義 四邊形の相對する角の頂點を結び付くる直線を其對角線と稱す。

定理 29

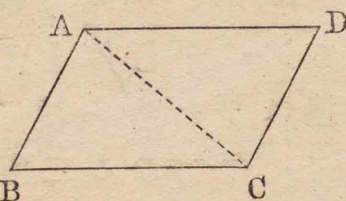
130. 平行四邊形に於て ①相對する邊は相等し ②相對する角は相等し。

平行四邊形 ABCD に於テ

① $AD=BC$ $AB=DC$

② $\angle ABC=\angle ADC$

$\angle PAD=\angle BCD$



ナルコトヲ證明セントス。B

證明 對角線 AC ヲ引ケ

$\triangle ABC, ADC$ に於テ AC ハ兩形ニ共通ニシテ

$\angle BAC=\angle ACD$ $\angle BCA=\angle CAD$ [76]

[\because ACガ二平行線ニ出會ヒテナス錯角ナレバナリ]

故ニ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ [111]

故ニ $AD=BC$ $AB=DC$

$\angle ABC=\angle ADC$

同様ニ對角線 BD ヲ引キテ $\angle BAD=\angle BCD$ ナルコ

トヲ證明スルヲ得ベシ。

131. 系 1 平行四邊形の各對角線

は之を全等なる兩三角形に分つ。

132. 系 2 平行四邊形の相隣れる二角は互に補角なり。

133. 系 3 平行四邊形にして其一角直角なるものは矩形なり。

134. 系 4 平行四邊形にして其二隣邊相等しきものは菱形なり。

135. 系 5 矩形、菱形及び正方形は皆平行四邊形なり。

問題

55. 平行四邊形ノ一角 $124^\circ 15'$ ナルトキハ他ノ三角各、何度ナルカ。

56. 平行四邊形ノ二隣角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ

57. 平行四邊形ノ二對角線相等シケレバ本形ハ矩形ナリ。

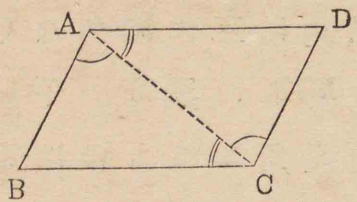
58. 菱形ノ各對角線ハ其角ヲ二等分ス。

定理 30

136. 四邊形の一雙の相對する邊相

等しく且つ互に平行なれば此四邊形は平行四邊形なり。

四邊形 ABCD = 於テ
AD=BC AD || BC
ナレバ ABCD ハ平行四邊形ナリ



證明 對角線 AC ヲ引ケ

△ADC, ABC = 於テ AD=BC [假設]

∠DAC=∠ACB [76]

而シテ AC ハ兩形ニ共通ナリ

故ニ △ADC≡△ABC [106]

因リテ ∠DCA=∠CAB

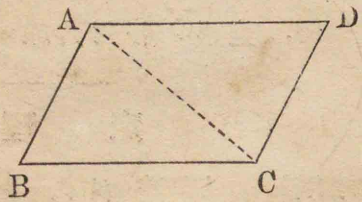
故ニ CD || AB [79]

而シテ假設ニ依リテ AD || BC

故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ。 [125]

定理 31

137. 四邊形の二雙の相對する邊相等しければ此四邊形は平行四邊形なり。



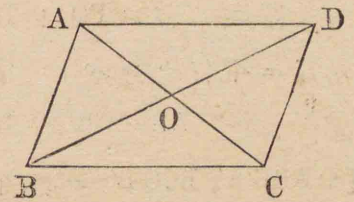
四邊形 ABCD = 於テ AB=DC AD=BC ナレバ ABCD ハ平行四邊形ナリ。

[對角線ヲ引キ(116) (79) 等ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得]

定理 32

138. 平行四邊形の對角線は互に二等分す。

平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ點 O ニ於テ相交ハレバ



AO=CO BO=DO

[111] 等ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得。

問題

59. 平行四邊形ニシテ其二對角線互ニ垂直ナルモノハ菱形ナリ

60. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ナリ。

定理 33

139. ！若干の平行線が一直線と交はりて之を相等しき部分に截れば如何な

る直線と交はるも亦之を相等しき部分に截る。

假設 平行線 AA', BB', CC' ガ一線 PQ ト Δ, B, C ニ於テ交ハリ $AB=BC$ トス。

終結 AA', BB', CC' ガ他ノ任意ノ一線 RS ト A', B', C' ニ於テ交ハレバ

$$A'B' = B'C'$$

證明 若シ PQ ト RS トガ互ニ平行ナレバ

$$AB = A'B' \quad BC = B'C' \quad [130]$$

[$\because ABB'A', BCC'B'$ ハ各, 平行四邊形ナレバナリ]

$$\text{然ルニ} \quad AB = BC \quad [\text{假設}]$$

$$\text{故ニ} \quad A'B' = B'C'$$

若シ PQ ト RS トガ互ニ平行ナラザレバ

Δ, B ヨリ RS ニ平行線 AL, BM ヲ引ケ

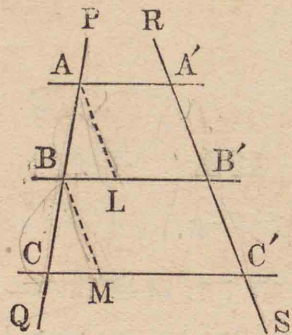
然レバ AL, BM ハ各, RS ニ平行ナルヲ以テ互ニ平行ナリ。 [82]

$$\triangle ABL, \triangle BCM \text{ニ於テ} \quad AB = BC \quad [\text{假設}]$$

$$\angle BAL = \angle CBM \quad \angle ABL = \angle BCM \quad [77]$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABL \cong \triangle BCM \quad [111]$$

$$\text{因リテ} \quad AL = BM$$



$$\text{然ルニ} \quad AL = A'B' \quad BM = B'C' \quad [130]$$

$$\text{故ニ} \quad A'B' = B'C'$$

140. 系 1 三角形の一邊の中點より底邊に平行に引ける直線は他の一邊の中點を通過す。

141. 系 2 三角形の二邊の中點を結び付くる直線は **1** 底邊に平行なり **2** 底邊の半に等し。

1 フ直接ニ并ニ間接法ニ依リテ證明セヨ

142. 系 3 直角三角形の斜邊の中點は其三頂點より等距離に在り。

143. 系 4 梯形の平行ならざる二邊の中點を結び付くる直線は **1** 底に平行なり **2** 兩底の和の半に等し。

問題

61. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結び付クル直線ハ之ヲ四ツノ全等ナル三角形ニ分ツ。

62. 四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結び付クル直線ハ一ツノ平行四邊形ヲナス而シテ其周ハ原形

ノ對角線ノ和ニ等シ.

第五節
多角形

144. 定義 多角形の相隣らざる二角の頂點を結び付くる直線を其對角線と稱す.

145. 定義 多角形の一邊と之に隣れる邊の延長との夾角を其外角と稱す.

146. 定義 等邊多角形とは其邊皆相等しき多角形なり.

例題 等邊多角形ノ例ヲ舉ゲヨ

147. 定義 等角多角形とは其角皆相等しき多角形なり.

例題 等角多角形ノ例ヲ舉ゲヨ.

148. 定義 正多角形とは等邊にして等角なる多角形なり.

例題 正多角形ノ例ヲ舉ゲヨ.

149. 定義 多角形の何れの邊を延長するも形内に入らざるものを凸多角形と稱す.

單ニ多角形トイヘバ凸多角形ヲ指ス.

150. 定義 五邊を有する多角形を五邊形と稱し、六邊を有する多角形を六邊形と稱す又之を五角形、六角形ともいふ. 其他之に準ず.

三角形は多角形の最も簡單なるものなり.

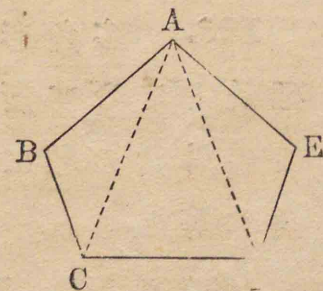
定理 34

151. 多角形の内角の和は其邊數の二倍の直角より四直角だけ小なり.

多角形 ABC...Eノ角ヲ A, B, C...Eニテ表ハシ其邊數ヲ nニテ表ハセバ

$$A+B+C+\dots+E = 2nR.\angle - 4R.\angle$$

證明 一頂點 Aヨ



リ之ニ隣ラザル總テノ頂點ヘ對角線ヲ引ケバ n-2

箇ノ三角形ヲ得ベシ。

如何トナレバ角 Aヲ夾ム二邊 AB, AE ヲ除クノ外總テノ他ノ邊ハ各一三角形ノ一邊トナレバナリ。

斯ノ如クニシテ得タル $n-2$ 箇ノ三角形ノ内角ノ和ハ多角形ノ内角ノ和ニ等シ。

今各三角形ノ内角ノ和ハ二直角ナルヲ以テ $n-2$ 箇ノ三角形ノ内角ノ和ハ直角ノ $2n-4$ 倍ニ等シ。

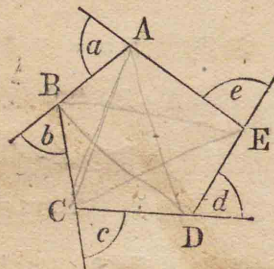
$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad A+B+C+\dots+E &= 2nR.\angle - 4R.\angle \\ &= n180^\circ - 360^\circ \end{aligned}$$

152. 系 邊數 n なる等角多角形ノ各角ハ $\frac{2(n-2)}{n}R.\angle$ 即ち $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ に等シ。

定理 35

153. 多角形ノ各邊を順次に一方へ延長してなす所ノ總テノ外角ノ和ハ四直角ニ等シ。

多角形 ABC...E ノ邊 AB, BC, ... EA ヲ順次ニ一方



へ延長シテ爲ス所ノ外角ヲ a, b, c, \dots, e トスレバ

$$a+b+c+\dots+e=4R.\angle$$

證明 多角形ノ角ヲ A, B, ... E ニテ表ハセバ

$$A+a=2R.\angle \quad [52]$$

$$B+b=2R.\angle \quad [52]$$

....

$$E+e=2R.\angle$$

故ニ多角形ノ邊數ヲ n ニテ表ハセバ

$$(A+B+\dots+E) + (a+b+\dots+e) = 2n.R.\angle$$

$$\text{然ルニ} \quad A+B+\dots+E = 2nR.\angle - 4R.\angle \quad [151]$$

$$\text{故ニ} \quad a+b+\dots+e = 4R.\angle$$

問題 *

63. 六角形ノ總テノ内角ノ和ハ八直角ニ等シ。

64. 等角五角形ノ各角ハ一直角ノ五分ノ六即チ 108° ニ等シ。

65. 正八角形, 正十角形, 正十二角形及ビ正十五角形ノ各角ノ大サヲ求ム [135°, 144°, 150°, 156°]

66. 等角多角形アリ其四角ノ和ハ七直角ニ等シ其多角形ノ邊數幾許. [n=16]

67. 多角形アリ其總テノ内角ノ和ハ其各邊ヲ順次ニ一方へ延長シテナス所ノ總テノ外角ノ和ニ

等シ其多角形ノ邊數幾許.

[$n=4$]

第六節

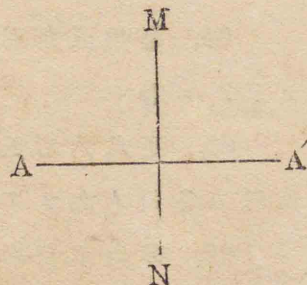
對稱

直線に關する對稱

154. 定義 一定直線が二點を結び
付くる直線の垂直二等分線なるときは
此二點は其定直線に關して對稱ナリと
いふ.

定直線を對稱の軸と稱す.

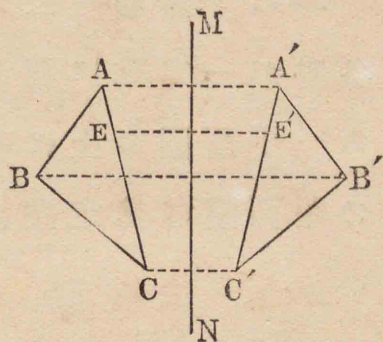
直線 MN ガ二點 A, A'
ヲ結び付クル直線ノ垂直
二等分線ナルトキハ A, A'
ハ MN ニ關シテ對稱ノ點
ニシテ MN ハ對稱ノ軸ナ
リ.



155. 定義 二つの平面圖の各形の
各點が一定直線に關して對稱なる點を

他の一平面圖の上に有するときは此二
つの平面圖は其定直線に關して對稱な
りといふ.

例ヘバ ABC ナル圖
上ノ任意ノ點 E ノ直線
MN ニ關シテ對稱ナル
點 E' ハ A'B'C' ナル圖上
ニ在リ, 又 A'B'C' ナル圖
上ノ任意ノ點ノ MN ニ
關シテ對稱ナル點ハ
ABC ナル圖上ニ在ルトキハ ABC ト A'B'C' トハ軸
MN ニ關シテ對稱ナリ.



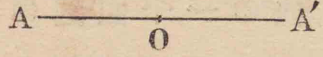
二ツノ平面圖ガ軸ニ關シテ對稱ナルトキハ此
軸ヲ折り目トシテ其一圖ノ平面ヲ折リ返シ他ノ圖
ノ平面ニ重ヌレバ二ツノ圖ハ全ク相合ス.

點に關する對稱

156. 定義 一定點が他の二點を結
び付くる直線の中點なるときは此二點
は其定點に關して對稱ナリといふ.

定點を對稱の中心と稱す.

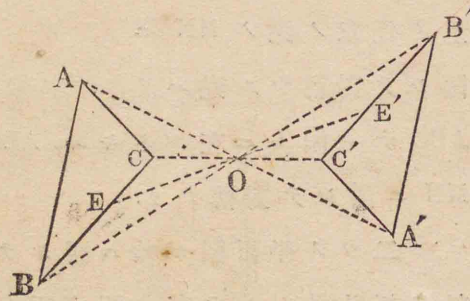
點 O ガ直線 AA' ノ
 中點ナルトキハ二點 A, A'



ハ點 O ニ關シテ對稱ニシテ O ハ對稱ノ中心ナリ。

157. 定義 二つの平面圖の各形の各點が一定點に關して對稱なる點を他の一平面圖の上に有するときは此二つの平面圖は其定點に關して對稱なりといふ。

例へバ ABC
 ナル圖上ノ任意
 ノ點 E ノ點 O ニ
 關シテ對稱ナル
 點 E' ハ $A'B'C'$ ナ



ル圖上ニ在リ、又 $A'B'C'$ ナル圖上ノ任意ノ點ノ點 O ニ關シテ對稱ナル點ハ ABC ナル圖上ニ在ルトキハ ABC ト $A'B'C'$ トハ點 O ニ關シテ對稱ナリ。

二ツノ平面圖ガ點ニ關シテ對稱ナルトキハ其一ヲ其平面内ニ於テ此點ノ周リニ二直角ダケ回轉スレバ二ツノ圖ハ全ク相合ス。

158. 一平面圖ガ一直線ニ依リテ之ニ關シテ對稱ナル二圖ニ分タレ得ルトキハ此圖ハ其線ニ關

シテ對稱ナリトイヒ或ハ**線對稱**ヲ有ストイフ
 其線ヲ**對稱ノ軸**ト稱ス。

又一平面圖ニ於テ其内ニ在ル一點ヲ通過スル總テノ直線ガ此點ニ關シテ對稱ナル二點ニ於テ此圖ノ周ニ出會フトキハ此圖ハ其點ニ關シテ對稱ナリトイヒ或ハ**點對稱**ヲ有ストイフ。其點ヲ**對稱ノ中心**ト稱ス。

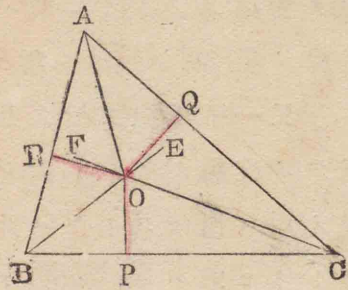
問題

- 68. 平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ關シテ對稱ナリ。 0+
- 69. 菱形ノ各對角線ハ其對稱ノ軸ナリ。 2
- 70. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ其對稱ノ軸ナリ。 3
- 71. 平行四邊形ノ其一對角線ニ關シテ對稱ナルモノハ菱形ナリ。 4

第一編問題集

159. 問題 72. 三角形ノ各角ノ二等分線ハ同一点ヲ通過ス而シテ此點ヨリ三邊ニ至ル距離相等シ。

證明 BE, CF ヲ
夫々 $\triangle ABC$ ノ二角
B, C ノ二等分線トシ
先ヅ此二線ノ相交ハ
ルコトヲ證明スベシ
若シ BE, CF ガ相交
ハラザレバ



$BE \parallel CF$

然レバ $\angle CBE + \angle BCF = 2R. \angle$ [78]

是不合理ナリ.

[\because 此二角ハ各, 三角形ノ角ノ半ナルヲ以テ
其和ハ $2R. \angle$ ヨリ小ナレバナリ]

故ニ BE, CF, ハ相交ハル.

Oヲ其交點トシ線 AOヲ引ケ

是ニ於テ AO ガ角 BAC ヲ二等分スルコトヲ證明ス
レバ三角ノ二等分線ガ皆一點 Oヲ通過スルコトト
ナル.

OP, OQ, OR ヲ Oヨリ三邊ヘ引ケル垂線トセヨ.

今 $\triangle BOP \equiv \triangle BOR$ [112]

[\because OB ハ共通 $\angle OBP = \angle OBR, \angle OPB = \angle ORB$]

因リテ $OP = OR$

同様ニ $OP = OQ$

故ニ $OQ = OR$

然ルトキハ $\triangle AOQ \equiv \triangle AOR$ [113]

[\because OQA, ORA ハ各, 直角ニ等シク, 斜邊
AO ハ共通, $OQ = OR$ ナレバナリ]

因リテ $\angle OAQ = \angle OAR$

故ニ 三角形ノ三角ノ二等分線ハ皆一點 Oヲ通過ス
而シテ點 Oヨリ三邊ニ至ル距離 OP, OQ, OR 相等シ.

此點ヲ三角形ノ **内心** ト稱ス.

160. 問題 73. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線

ハ同一ノ點ヲ通過ス而

シテ此點ヨリ三頂點ニ

至ル距離相等シ.

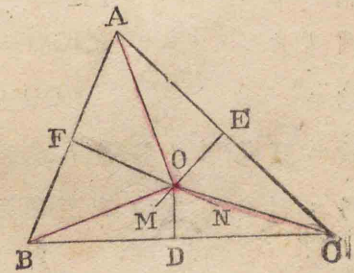
證明 EM, FN ヲ

夫々 $\triangle ABC$ ノ二邊 AC,

AB ノ垂直二等分線ト

シ先ヅ此二線ノ相交ハ

ルコトヲ證明スベシ.



若シ EM, FN ガ相交ハラザレバ

$EM \parallel FN$

然レバ $AC \perp EM$ ナルヲ以テ [假設]

$AC \perp FN$ ナルベシ [75]

然ルニ $AB \perp FN$ [假設]

故ニ點 Aヨリ一線 FNヘ二ツノ垂線ヲ得.

是不合理ナリ [57]

故ニ EM, FN ハ相交ハル

Oヲ其交點トシ、之ト BCノ中點 Dトヲ結ビ付ケヨ
是ニ於テ ODガ BCニ垂直ナルコトヲ證明スレバ三
ツノ垂直二等分線ガ皆一點Oヲ通過スルコトトナ
ル。 OA, OB, OC, ヲ引ケ

FOハABノ垂直二等分線ナルヲ以テ

AO = BO [67]

同様ニ AO = CO [67]

故ニ BO = CO

然ルトキハ $\triangle BOD \cong \triangle COD$ [116]

因リテ $\angle BDO = \angle CDO$

故ニ $OD \perp BC$

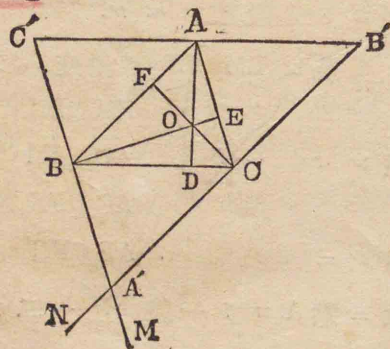
故ニ三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ皆一點Oヲ通
過ス、而シテOヨリ三頂點ニ至ル距離 OA, OB, OC相
等シ。

此點ヲ三角形ノ外心ト稱ス

161. 問題 74.

三角形ノ各頂點ヨリ其
對邊ヘ引ケル三垂線ハ
同一ノ點ヲ通過ス。

AD, BE, CFヲ
 $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリ其
對邊ヘ引ケル垂線トス



レバ此三線ハ一點ニ於テ相交ハル。

證明 A, B 及ビ Cノ各點ヲ通過シ夫々 BC, CA
及ビ ABニ平行線ヲ引ケバ其各線ハ他ノ二線ト交
ハリ $A'B'C'$ ナル三角形ヲ成スベシ。

[例ヘバ CN, BMハ A' ニ於テ相交ハル

$\therefore CA \parallel BM$ ニシテ CN, CAハ相交ハレバナリ [124]

四邊形 ABCB'ハ其二雙ノ對邊互ニ平行ナルヲ以テ
平行四邊形ナリ。 [125]

故ニ $BC = AB'$ [130]

又 ACBC'ハ平行四邊形ナルヲ以テ

$BC = AC'$

故ニ $AB' = AC'$

即チ Aハ $B'C'$ ノ中點ナリ

而シテ $AD \perp BC$ ナルヲ以テ

$AD \perp B'C'$ [75]

故ニ ADハ $\triangle A'B'C'$ ノ一邊 $B'C'$ ノ垂直二等分線ナリ
同様ニ BE, CFハ夫々邊 $C'A'$, $A'B'$ ノ垂直二等分線ナ
ルコトヲ證明スルヲ得。

故ニ三線 AD, BE, CFハ一點Oヲ通過ス。 [160]

此點ヲ三角形ノ垂心ト稱ス。

162. 問題 75. 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ

通過ス而シテ此點ヨリ各頂點ニ至ル距離ハ其中線

ノ三分ノ二ナリ。

證明 BE, CF ヲ $\triangle ABC$

ノ二ツノ中線トスレバ此二

線ハ相交ハル

如何トナレバ若シ相交ハラ
ザレバ

$$\angle EBC + \angle FCB = 2R. \angle$$

ナラザル可カラズ。

是不合理ナルコト明カナリ

故ニ BE, CF ハ相交ハル

O ヲ其交點トシ線 AO ヲ引ケ AO ヲ延長シ點 D ニ於テ BC

ニ出會ハシノ AD ハ中線ナルコトヲ證明セントス。

B ヨリ FC ニ平行線ヲ引キ, AD ノ延長ト點 H ニ於

テ出會ハシメヨ

然レバ $AO = OH$ [140]

$$[\because \triangle ABH \text{ニ於テ } AF = BF, FO \parallel BH]$$

CH ヲ結び付ケヨ

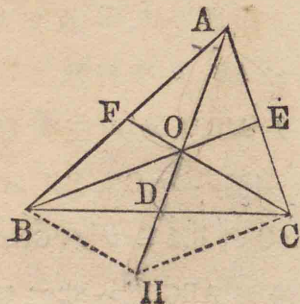
然レバ $OE \parallel HC$ [141]

$$[\because \triangle ACH \text{ニ於テ } AO = HO, AE = CE]$$

故ニ OBHC ハ平行四邊形ナリ [125]

故ニ OH ハ BC ヲ二等分ス [138]

即チ AD ハ中線ナリ



故ニ三中線 AD, BE, CF ハ一點 O ニ於テ相交ハル。

$$\text{又 } OD = \frac{OH}{2} = \frac{AO}{2} \text{ ナルヲ以テ}$$

$$AO = \frac{2}{3} AD$$

同様ニ $BO = \frac{2}{3} BE$ $CO = \frac{2}{3} CF$

三角形ノ三中線ノ交點ヲ其重心ト稱ス。

76. 一雙ノ對頂角ノ二等分線ハ同一直線上ニ
在リ。

77. 二雙ノ對頂角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナル
二直線ナリ。

68. 78. 四邊形ノ周ハ其二對角線ノ和ヨリ大ニシ
テ其二倍ヨリ小ナリ。

69. 79. 正三角形 ABC ノ二角 B, C ノ二等分線ノ
交點ヨリ邊 AB, AC へ平行ニ引ケル二線ハ邊 BC ヲ
三等分ス。

80. 三角形ノ一中線ハ其一端ヨリ出ヅル所ノ
二邊ノ和ノ半ヨリ小ニシテ其和ト底邊トノ差ノ半
ヨリ大ナリ。

81. 三角形ノ三中線ノ和ハ三邊ノ和ヨリ小ニ
シテ三邊ノ和ノ半ヨリ大ナリ。

82. 三角形ノ中線ガ之ニ隣レル二ツノ不等ナ
ル邊トナス角ノ中, 小邊トナス角ハ大邊トナス角ヨ
リ大ナリ。

83. 三角形ノ二邊ガ不等ナレバ小邊へ引ケル中線ハ大邊へ引ケル中線ヨリ大ナリ.

84. 二等邊三角形ノ庭邊上ノ任意ノ一點ヨリ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ハ底邊ノ一端ヨリ其對邊ニ至ル距離ニ等シ.

85. 二等邊三角形ノ底邊ノ延長上ノ任意ノ一點ヨリ二邊ニ至ル距離ノ差ハ底邊ノ一端ヨリ其對邊ニ至ル距離ニ等シ.

86. 正三角形内ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ至ル距離ノ和ハ一定ノ長サナリ.

87. 四邊形ハ①二雙ノ對角相等シキトキ②二對角線ガ其中點ニ於テ相交ハルトキハ平行四邊形ナリ.

88. 平行四邊形 AECD ニ於テ E ガ邊 AD ノ中點, F ガ邊 BC ノ中點ナレバ BE, DF ハ對角線 AC ヲ三等分ス.

89. 三角形ノ一角ノ二等分線ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線トハ同一ノ點ヲ通過ス, 而シテ此點ハ三邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

此點ヲ三角形ノ**傍心**ト稱ス.

90. O ヲ三角形 ABC ノ傍心トシ角 BAC ノ内ニ在リトセヨ. O ヲリ AB, AC ノ延長へ夫々垂線



OE, OF ヲ引ケバ AE, AF ハ何レモ此三角形ノ周半ニ等シ.

91. 多角形ノ任意ノ一邊ハ他ノ總テノ邊ノ和ヨリ小ナリ.

92. 正多角形アリ其外角ノ一ハ一直角ノ三分ノ二ナリ其邊數幾何. $[n=6]$

93. 邊數 n ナル多角形ニ於テ總テ幾何ノ對角線ヲ引キ得ルカ. $\left[\frac{n(n-3)}{2} \right]$

162° 一角等角

第二編

圓

第一節

圓の性質

163. 定義 圓とは一線を以て圍みたる平面圖形にして其内の或一點より其線へ引ける直線皆相等しきものなり。

此點を圓の中心と稱す。 [14]

164. 定義 圓周或は周とは圓を圍むところの線なり。通常圓周を圓と稱す。 [15]

165. 定義 半徑とは圓の中心より圓周へ引ける直線なり。 [16]

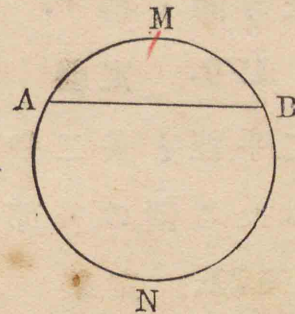
166. 定義 直徑とは圓の中心を通過する直線にして其兩端は圓周上に在るものなり。

圓の定義に依りて一つの圓の半徑は皆相等し。故に半徑の二倍なる直徑も亦相等し。

167. 定義 弧とは圓周の一部分なり。

圖ニ於テ AMB ハ弧ナリ。

半圓周とは圓周の半に等しき弧なり。



168. 定義 弦とは圓周上に在る任意の二點を結び付くる直線なり。

直線 AB ハ弦ナリ。

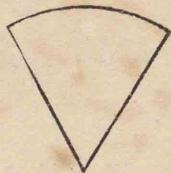
一つの弦は圓周を二弧に分つ。此二弧を共軛弧と稱す。共軛弧の大きき相異なるときは其大なるものを優弧といひ其小なるものを劣弧といふ。

單ニ弧トイフトキハ劣弧ヲ指ス。AMB 及ビ ANB ハ共軛弧ナリ。

169 定義 弓形とは弧及び其兩端の間の弧にて圍みたる圓の一部分なり



圓の半に等しき弓形を半圓と稱す。



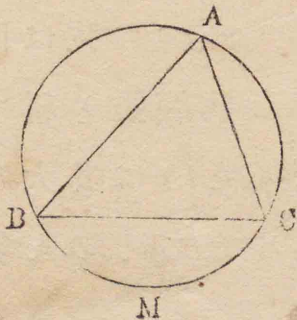
170. 定義 扇形とは二半徑と其二半徑が夾む弧とを以て圍みたる圓の一部分なり。

171. 定義 同心圓とは同じき中心を有する圓なり。

172. 定義 圓周上の一點を頂點とし此點より引ける二弦を其邊となす所の角を周ニ於テノ角と稱す。

角BACノ如シ。此角ハ弧BMCノ上ニ立ツトイフ。

又角BACヲ弓形BAC内ノ角トシ又此弓形ハ此角ヲ含ムトイフ。



173. 定義 切線とは圓周と唯一點に於て出會ひ雙方へ何程延長するも再び之と出會はざる直線なり。

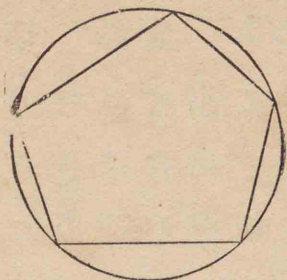
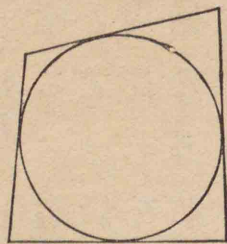
切線が圓周に出會ふ點を切點と稱す。

174. 定義 二圓周が唯一點を共有するときは二圓は相切スといふ。而して此二圓の各が全く他の外に在れば此二圓は外切スといひ、一圓が全く他の内に在れば此二圓は内切スといふ。

175. 定義 二圓周が二點を共有するときは二圓は相交ハルといふ。

176. 定義 二點に於て圓周に交はる限りなき直線を割線と稱す。

177. 定義 多角形の總ての邊が其内に在る一圓周の切線なれば圓は多角形に内接スといひ多角形は圓に外接スといふ。

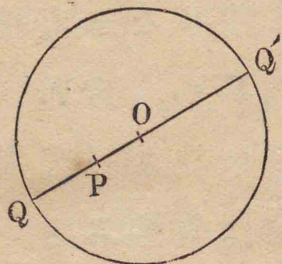


178. 定義 多角形の總ての頂點が其外に在る一圓周上に在れば圓は多角形に**外接ス**といひ多角形は圓に**内接ス**といふ。

定理 1

179. 圓の中心と一點との距離は此點が圓内に在れば半徑より小なり圓周上に在れば半徑に等し、圓外に在れば半徑より大なり。

O ヲ圓ノ中心トシ P ヲ任意ノ一點トスレバ OP ハ P ガ圓内ニ在レバ半徑ヨリ小ナリ、圓周上ニ在レバ半徑ニ等シ。圓外ニ在レバ半徑ヨリ大ナリ、



證明 二點 O, P ヲ通過スル直線ハ圓周ト二點 Q, Q' ニ於テ交ハル而シテ唯此二點ニ限ル。

如何トナレバ此直線上 O ヨリ半徑ニ等シキ距離ノ點ハ唯二ツニ限レバナリ。

若シ P ガ Q, Q' ノ間ニ在レバ P ハ圓内ニ在リテ PO ハ OQ 即チ半徑ヨリ小ナリ。

若シ P ガ Q 或ハ Q' ト合スレバ P ハ圓周上ニ在リテ OP ハ半徑ニ等シ。

若シ P ガ OQ 或ハ OQ' ノ延長上ニ在レバ P ハ圓外ニ在リテ OQ 或ハ OQ' 即チ半徑ヨリ大ナリ。

180. 系 圓の中心より一點に至る距離が半徑より小なれば此點は圓内に在り、半徑に等しければ圓周上に在り、半徑より大なれば圓外に在り。 [間接法]

問題

94. 圓ノ中心ハ圓ノ對稱ノ中心ナリ。
95. 圓ハ唯一ツノ中心ヲ有ス。

定理 2

181. 直径は圓及び圓周を二等分す。

AOBヲ圓AMBノ直径トスレバAOBハ此圓及び其周ヲ二等分ス。

證明 AOBヲ折り目トシテ圓ANBノ平面ヲ折り返シ圓AMBノ平面ニ重ネヨ。

然ルトキハ二弧ANB,AMBハ全ク相合ス。

如何トナレバ若シ二弧全ク相合セザレバ其二弧ノ上ニ中心ヨリノ距離相等シカラザル點アルベシ

即チ二ツノ半径ハ相等シカラザルコトトナル

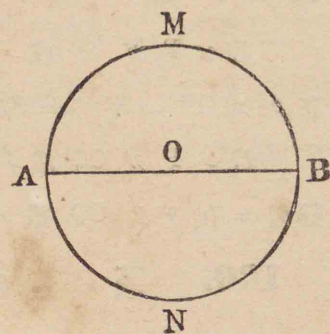
是不合理ナリ

[166]

故ニ二弧全ク相合ス

故ニ二弧ANB, AMBハ相等シク各半圓周ナリ。

又直径ノ兩側ニ在ル二弓形ハ各半圓ナルコト明カナリ。



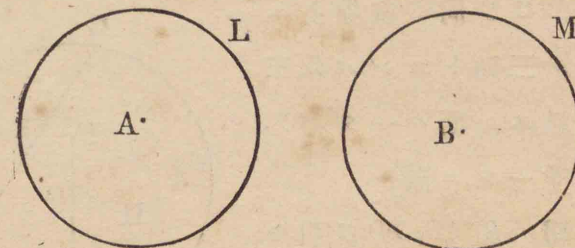
問題

96. 如何ナル弧ハ其共軌弧ト相等シキカ

97. 圓ノ直径ハ其對稱ノ軸ナリ。

定理 3

182. 相等しき半径の圓は全等なり



L及びMヲ相等シキ半径ノ二圓トシ其全等ナルコトヲ證明セントス。

證明 L圓ヲ取りM圓ノ上ニ重ネ中心Aヲ中心Bノ上ニ置キ而シテ[181]ニ於テノ如ク間接法ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得ベシ。

183. 系1 相合する二圓は相等しき半径を有す。

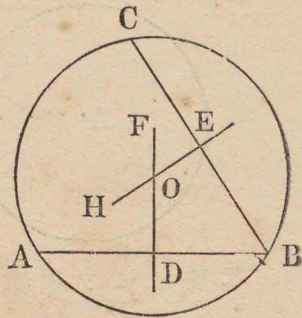
184. 系2 二圓相合するときは其一を共通中心の周りに回轉するも二圓は常に相合す。

定理 4

185. 同一直線上に在らざる三點を通過する圓周は一つ有り、而して唯一つに限る。

A, B, C ヲ同一直線上ニ在ラザル三點トスレバ此三點ヲ通過スル圓ハ一ツ有リ。而シテ唯一ツニ限ル。

證明 線 AB, BC ヲ引キ其各線ノ垂直二等分線 DF, EH ヲ引ケ



然レバ DF, EH ハ一點ニ於テ相交ハリ其交點 O ハ A, B, C ヨリ等距離ニ在リ [150] 故ニ O ヲ中心トシ OA, OB, OC ノ中ノ一ヲ半径トシテ圓ヲ畫ケバ其圓ハ A, B, C ヲ通過ス即チ A, B, C ヲ通過スル圓ハ一ツ有リ。

次ニ A, B ヨリ等距離ナル點ハ線 DF 外ニハ無ク又 B, C ヨリ等距離ナル點ハ線 EH 外ニハ無シ [67]

而シテ DF, EH ハ一ツヨリ多クノ點ニ於テ相交ハルコトナシ [24]

故ニ A, B, C ヨリ等距離ナル點ハ唯一ツニ限ル

故ニ A, B, C ヲ通過スル圓ハ唯一ツニ限ル。

186. 系 1 同じき三點を通過する二圓周は全く相合す。

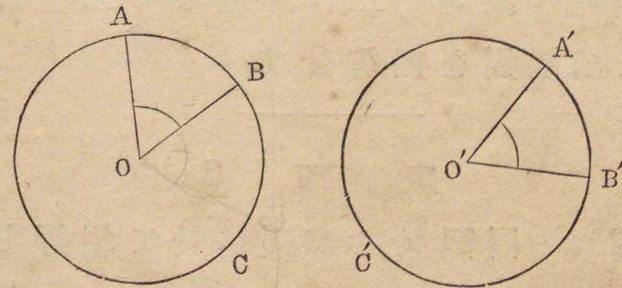
187. 系 2 二圓周は相合するにあらざれば二つより多くの點を共有するを得ず。

第二節

中心角 弦 弓形内ノ角

定理 5

188. 同圓又は等圓に於て中心角相等しければ其二邊の夾む弧も亦相等し。



假設 ABC, A'B'C' ヲ二等圓トシ其中心角 AOB, A'O'B' ハ相等シトス。

終結 二弧 $AB, A'B'$ は相等シ.

證明 圓 ABC を取り圓 $A'B'C'$ の上ニ重ネ中心 O を中心 O' の上ニ置ケバ二圓ハ相等シキヲ以テ其周ハ相合ス

OA ガ $O'A'$ ニ重ナルマデ共通中心ノ周リニ ABC を回轉スルモ二圓周ハ離ルゝコトナク二點 A, A' ハ相合ス

又 $\angle AOB = \angle A'O'B'$ ナルヲ以テ OB ハ $O'B'$ ニ重ナリ二點 B, B' ハ相合ス

故ニ弧 AB ハ弧 $A'B'$ ニ合ス

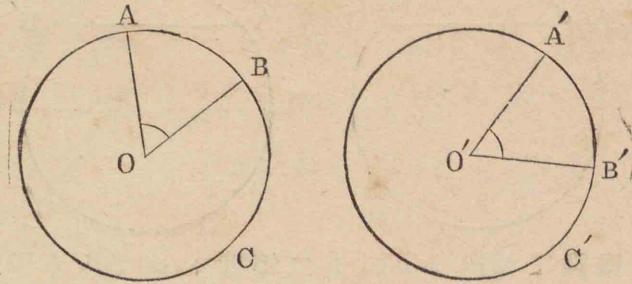
故ニ此二弧ハ相等シ.

189. 系 1 同圓又は等圓に於て中心角不等なれば大角の二邊の夾弧は小角の二邊の夾弧より大なり.

190. 系 2 互に垂直なる二直徑は圓及び圓周を四等分す.

定理 6

191. 同圓又は等圓に於て相等しき弧(優弧をも含む)に對する中心角は相等し.



假設 $ABC, A'B'C'$ を二等圓トシ二弧 $AB, A'B'$ ハ相等シトス

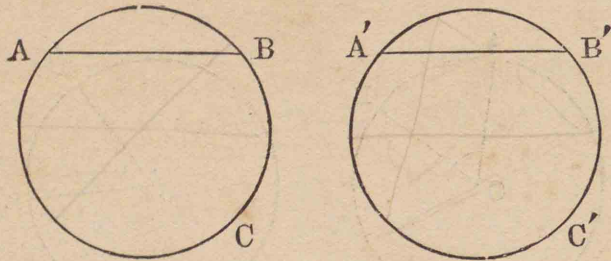
終結 $\angle AOB = \angle A'O'B'$

[188] ニ於テノ如ク一圓ヲ他ノ圓ノ上ニ重ヌルコトニ依リテ, 或ハ[189]ヲ用キ間接法ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得.

192. 系 同圓又は等圓に於て弧不等なれば大弧に對する中心角は小弧に對する中心角より大なり.

定理 7

193. 同圓又は等圓に於て相等しき弧に對する弦は相等し.



假設 ABC, A'B'C' ヲ二等圓トシ AB, A'B' ヲ其等弧トス.

終結 二弦 AB, A'B' ハ相等シ

證明 [188] = 於テノ如ク一圓ヲ他圓ノ上ニ重スルコトニ依リテ二弧 AB, A'B' ノ相合スルコトヲ證明スルヲ得

因リテ二弦 AB, A'B' ハ相合ス故ニ相等シ.

194. 系 同圓又は等圓に於て弧不
等なれば大弧に對する弦は小弧に對す
る弦より大なり.

注意 コゝニ弧ハ劣弧ヲ指ス

定理 3

195. 同圓又は等圓に於て相等しき
弦に對する弧は相等し.

假設 ABC, A'B'C' ヲ二等圓トシ AB, A'B' ヲ其等弦トス.

終結 二弧 AB, A'B' ハ相等シ.

證明 [194] ヲ用キ間接法ニ依リテ之ヲ證明スヨ.

196. 系 同圓又は等圓に於て弦不
等なれば大弦に對する弧は小弦に對す
る弧より大なり.

注意 コゝニ弧ハ劣弧ヲ指ス

定理 9

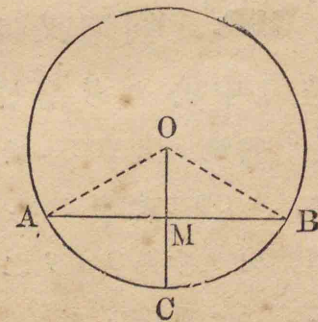
197. 弦に垂直なる半徑は其弦及び
之に對する弧を二等分す.

假設 AB ヲ弦トシ O
ヲ中心トシ OC ヲ點 M = 於
テ AB = 垂直ナル半徑トス.

終結 AM = BM

弧 AC = 弧 BC

證明 OA, OB ヲ引ケ
ニツノ直角三角形 OAM,
OBM ハ全等ナリ



[113]

[∵ 斜邊 OA, OB ハ相等シク OM ハ兩形ニ通ズ]

故ニ AM = BM

又 ∠AOC = ∠BOC

次、是れ、四つ、圓に記述スル
 二等辺三角形、頂角、二等分線、其、底邊、垂直ニ等分線ナリ

故ニ 弧AC=弧BC [188]



198. 系 弦の垂直二等分線は圓の中心を通過す。

問題

98. 圓心ヨリ弦(直径ニアラザル)ノ中點へ引ケル直線ハ其弦ニ垂直ナリ。

99. ニツノ同心圓ノ周ヲ一直線ニテ截レバ兩圓周ノ間ニ夾マレタル其直線ノ部分ハ相等シ。

定理 10

199. 同圓又は等圓に於て相等しき弦は中心より等距離に在り。

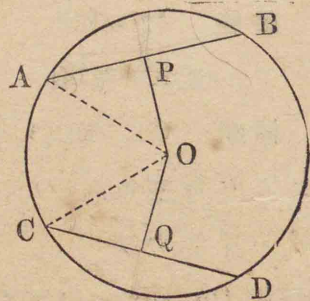
假設 圓ABCニ於テ AB, CDヲ等弦トシ、OP, OQヲ中心Oヨリ之ニ引ケル垂線トス。

終結 OP=OQ

證明 OA, OCヲ引

ケ

然レバニツノ直角三角形 AOP, COQニ於テ



OA=OC

AP=CQ

[197]

[∵等弦 AB, CDノ半ナレバナリ]

故ニ $\triangle AOP \equiv \triangle COQ$

[113]

故ニ OP=OQ

200. 系 同圓又は等圓に於て中心より等距離に在る弦は相等し。

定理 11

201. 同圓又は等圓に於て二弦不等なれば大弦は小弦よりも中心に近し。

假設 圓ABCニ於テ AB, CDヲ二弦トシ

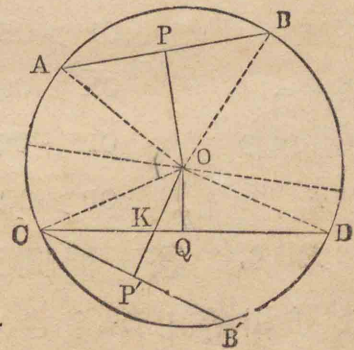
AB < CDトス。

又 OP, OQヲ中心Oヨリ夫々二弦 AB, CDニ引ケル垂線トス

終結 OP > OQ

證明 AO, BO, CO, DOヲ引ケ

角 AOCヲ二等分スル所ノ直径ヲ折リ目トシテ圓ヲ折リ ABヲ有スル半圓ノ平面ヲ他ノ半圓ノ平面ニ



重ネヨ

然レバ點 A ハ點 C ノ上ニ落テ弧 AB ハ弧 CD ノ上ニ重ナル

今 $\angle AOB < \angle COD$ [118]

[$\because \triangle AOB, COD$ ニ於テ $AO=CO,$
 $BO=DO, AB < CD$]

故ニ 弧 $AB <$ 弧 CD [189]

故ニ點 B ハ弧 CD 上ノ一點 B' ト合ス

故ニ C ヲ除クノ外弦 CB' 上ノ總テノ點ハ中心 O トハ CD ノ反對ノ側ニ在リ

因リテ P' ヲ點 P ノ落ツル點トスレバ OP' ハ或點 K ニ於テ CD ヲ截ル

今 $OP' > OK$ ナルコト明カナリ

然ルニ $OK > OQ$ [53]

故ニ無論 $OP' > OQ$

即チ $OP > OQ$

202. 系 同圓又は等圓に於て中心より相等しからざる距離に在る弦の中、中心に近きものは之に遠きものより大なり。

定理 12

203. 周に於ての角は同弧の上に立つ所の中心角の半に等し。

假設 BAC ヲ弧 BC ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角トシ BOC ヲ同弧ノ上ニ立ツ所ノ中心角トス。

終結 $\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$

證明 (i) 中心 O ハ角

BAC ノ一邊上ニ在リトセヨ (i)

$OC=OA$ ナルヲ以テ $\angle OAC = \angle OCA$ [109]

然ルニ $\angle BOC = \angle OAC + \angle OCA$ [103]

故ニ $\angle BOC = 2\angle BAC$

(ii) O ハ角 BAC ノ

内ニ在リトセヨ

A ヲヨリ直徑 AOD ヲ引ケ

然ルトキハ (i)ニ依リテ

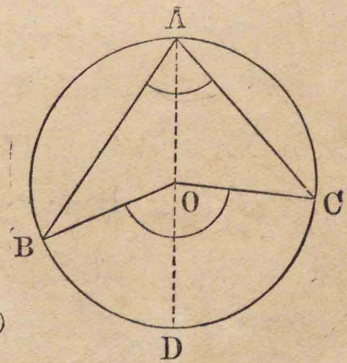
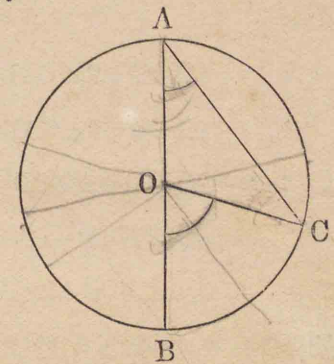
$\angle BOD = 2\angle BAD$

$\angle COD = 2\angle CAD$

之ヲ相加フレバ

$\angle BOD + \angle COD = 2(\angle BAD + \angle CAD)$

故ニ $\angle BOC = 2\angle BAC$



(iii) Oハ角 BACノ
外ニ在リトセヨ
然ルトキハ (ii)ニ於テノ
如ク

$$\angle BOD = 2\angle BAD$$

$$\angle COD = 2\angle CAD$$

$$\begin{aligned} \text{因リテ } \angle COD - \angle BOD \\ = 2(\angle CAD - \angle BAD) \end{aligned} \quad (iii)$$

$$\text{故ニ } \angle BOC = 2\angle BAC$$

故ニ何レノ場合ニ於テモ

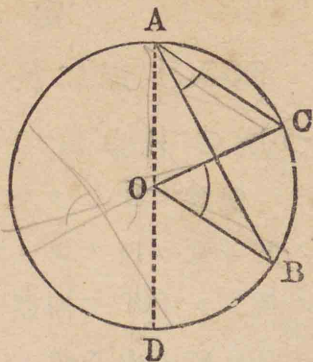
$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$$

*

204. 系 1 半圓周の上に立つ所の周に於ての角は直角なり。[即ち半圓内の角は直角なり]

205. 系 2 半圓周より小なる弧の上に立つ所の周に於ての角は鋭角にして半圓周より大なる弧の上に立つ所の周に於ての角は鈍角なり。

206. 系 3 同弧の上に立つ所の周に於ての角は皆相等し。[即ち同弓形内の角は皆相等し]



問題

100. 互ニ平行ナル二弦ノ間ニ在ル二弧ハ相等シ。

101. 二弦 AB, CDガ圓内ノ一點 Oニ於テ相交ハレバ角 AOCハ二弧 AC, BDノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角ノ和ニ等シ。

102. 二弦 AB, CDノ延長ガ圓外ノ一點 Oニ於テ相交ハレバ角 AOCハ二弧 AC, BDノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角ノ差ニ等シ。

103. $\triangle ABC$ ニ外接スル圓ノ中心 Oヨリ一邊 BCニ垂線 ODヲ引ケバ角 BODハ角 Aニ等シキカ、或ハ其補角ナリ。

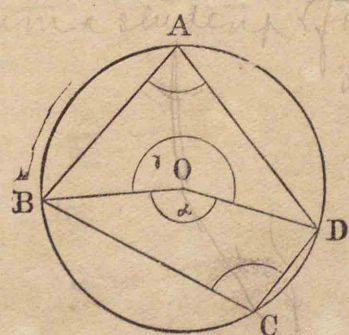
定理 13
AB, CD 延長ハ Oニ相交
ハトキハ

207. 圓に内接する四邊形の對角は互に補角なり。

ABCDヲ圓ニ内接スル四邊形トスレバ

$$A + C = 2R.\angle$$

證明 半徑 OB, ODノナス共軌角ヲ α, γ トスレバ



who he was I think
outlet the rat

$$A = \frac{\alpha}{2} \quad C = \frac{\gamma}{2} \quad [203]$$

$$\text{故に} \quad A + C = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 2R. \angle$$

即ち二角 A, C は互に補角ナリ。

203. 系 1 圓に内接する四邊形の外角は之に隣れる内角の對角に等し。

209 系 2 四邊形の對角の和が二直角なれば之に外接する圓を畫くことを得。

[207] 等ヲ用キ間接法ニ依リテ之ヲ證明セヨ。

問 題

104. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ矩形ナリ。

105. 圓ニ内接スル六邊形ノ角ヲ一ツ置キニ取リタル三角ノ和ハ四直角ニ等シ。

第 三 節

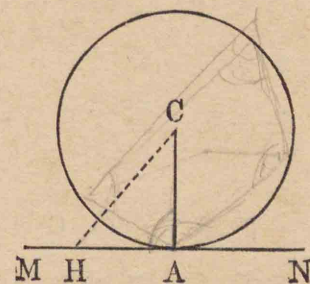
切 線

定 理 14

210. 半徑が圓周に出會ふ點に於て

之に垂直なる直線は此圓の切線ナリ。

MN ヲ半徑 CA ノ一端
A ニ於テ之ニ垂直ナル直
線トスレバ MN ハ此圓ノ
切線ナリ。



證明 線 MN 上ニ點
A ノ他ノ任意ノ一點 H ヲ
取リ CH ヲ結び付ケヨ

$$CA \perp MN \text{ ナルヲ以テ } CA < CH \quad [58]$$

即チ CH ハ圓ノ半徑ヨリ大ナリ

故ニ點 H ハ圓外ニ在リ

[180]

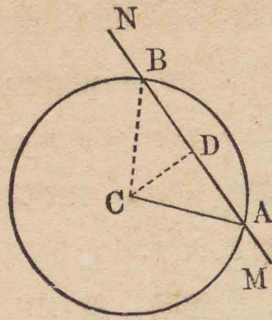
即チ MN ハ圓周ト唯一點 A ニ於テ出會フ

故ニ MN ハ點 A ニ於テ圓ニ切線ナリ。

定 理 15

211. 半徑が圓周に出會ふ點に於て
之に垂直ならざる直線は再び圓周に出
會ふ。

MNヲ半径CAノ一端Aニ於テCAニ垂直ナラザル直線トスレバMNハAノ他ノ點ニ於テ再ビ圓周ニ出會フ。



證明 中心CヨリMNニ垂線CDヲ引キMN上ニ於テDAニ等シクDBヲ取りCBヲ結ビ付ケヨCDハABノ垂直二等分線ナルヲ以テ

$$CA=CB \quad [67]$$

即チCBハ圓ノ半径ニ等シ故ニ點Bハ圓周上ノ一點ナリ
故ニMNハ點Bニ於テ再ビ圓周ニ出會フ。 [180]

212. 系1 切線と其切點へ引ける半径とは互に垂直なり。

213. 系2 切線に其切點に於て垂直なる直線は圓の中心を通過す、又中心より切線へ引ける垂線は切點を通過す。

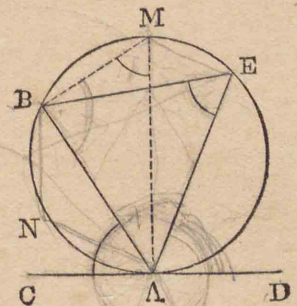
定理 16

214. 切線及び其切點より引ける弦

の夾む角は此角内の弧の上に立つ所の周に於ての角に等し。

假設 CDヲ圓 ANBノ點Aニ於テノ切線トシABヲAヨリ引ケル弦トス。

終結 角BACハ弧ANBノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角AEBニ等シ。



證明 直徑AMヲ引キBMヲ結ビ付ケヨ

然レバMACハ直角ナルヲ以テ

BACハBAMノ餘角ナリ

又MBAハ直角ナルヲ以テ

AMBモ亦BAMノ餘角ナリ

故ニ $\angle BAC = \angle AMB = \angle AEB$

[212]

[204]

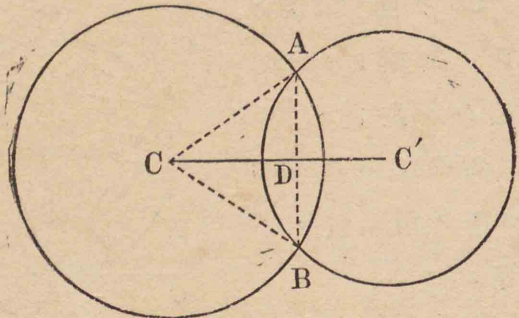
[206]

215. 系 弦の一端を通過して引ける直線と此弦との夾角が此角内の弧の上に立つ所の周に於ての角に等しければ其直線は圓の切線なり。

定理 17

216. 二圓周が其中心を通過する直

線上に在らざる一點に於て出會ふときは他の一點に於て再び出會ふ。



C 及び C' ガ中心ナル二圓周ガ直線 CC' 上ニ在ラザル一點 A ニ於テ出會フトキハ此二圓周ハ A ノ他ノ一點ニ於テ再び出會フ。

證明 A ヨリ CC' へ垂線 AD フ引キ之ヲ延長シ AD ニ等シク DB フ取レ

AC, BC フ結ビ付ケヨ

CD ハ AB ノ垂直二等分線ナルヲ以テ

$$CA=CB$$

[67]

故ニ點 B ハ中心 C ナル圓周上ニ在リ

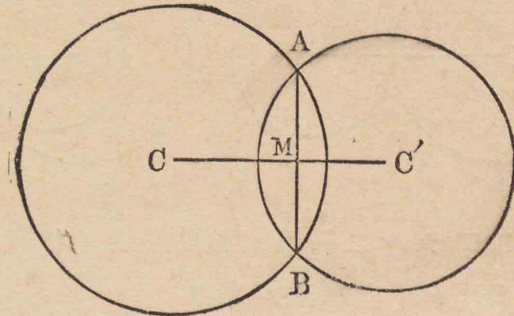
同様ニ點 B ハ中心 C' ナル圓周上ニ在リ

即チ二圓周ハ點 B ニ於テ出會フ

定理 18

217. 相交はる二圓の中心を通過す

る直線は此二圓に共通なる弦の垂直二等分線なり。



C 及び C' フ二點 A, B ニ於テ相交ハル二圓ノ中心トシ AB フ之ニ共通ナル弦トスレバ線 CC' ハ AB ノ垂直二等分線ナリ。

證明 AB ノ垂直二等分線ハ唯一ツ有リ C 及び C' フ通過スル直線モ亦唯一ツ有リ

而シテ AB ノ垂直二等分線ハ C 及び C' フ通過ス

[198]

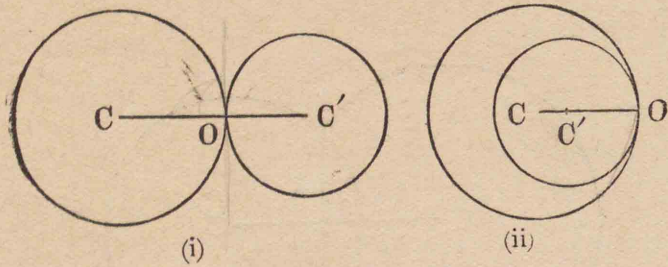
故ニ C 及び C' フ通過スル直線ハ即チ AB ノ垂直二等分線ナラザル可カラズ

注意 上ノ證明法ハ同一法ト稱スルモノナリ。

定理 19

218. 二圓相切するときは切點は中

心を結び付くる直線上に在り.



中心 C, C' ナル二圓周ガ點 O = 於テ相切スルトキハ O ハ CC' ナル直線上ニ在リ.

證明 若シ點 O ガ CC' ナル線上ニ在ラザレバ此二圓周ハ O ノ他ニ尙一點ヲ共有スベシ [215] 是假設ニ合ハズ

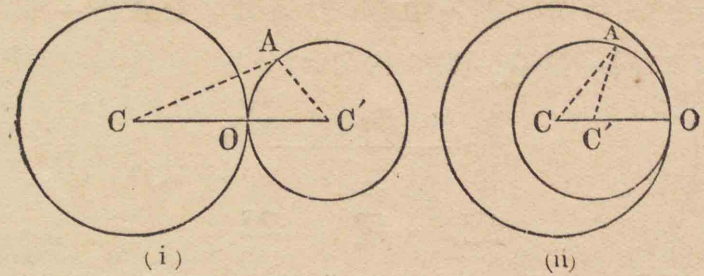
如何トナレバ二圓周ハ相切スルヲ以テ之ニ共通ナル點ハ唯一ツナリ

故ニ點 O ハ CC' ナル線上ニ在リ.

219. 系 相切する二圓は其切點に於て共通の切線を有す.

定理 20

220. 二圓周が其中心を結び付くる直線上の一點に於て出會ふときは此二圓周は外切し或は内切す.



中心ガ C 及ビ C' ナル二圓周ガ直線 CC' 上ノ一點 O = 於テ出會フトキハ此二圓周ハ點 O = 於テ外切シ或ハ内切ス.

證明 中心 C' ナル圓周上ニ O ノ他ノ任意ノ一點 A ヲ取リ AC, AC', ヲ結び付ケヨ

(i) = 於テハ $AC + AC' > CC'$

而シテ $AC' = OC'$

故ニ $AC > OC$

故ニ點 A ハ中心 C ナル圓ノ外ニ在リ

故ニ中心 C' ナル圓ハ中心 C ナル圓ノ全ク外ニ在リ

同様ニ中心 C ナル圓ハ中心 C' ナル圓ノ全ク外ニ在ルコトヲ證明スルヲ得.

即チ二圓ハ點 O = 於テ外切ス

(ii) = 於テハ $AC < CC' + AC'$

而シテ $AC' = OC'$

故ニ $AC < OC$

故ニ點 A ハ中心 C ナル圓ノ内ニ在リ

故ニ中心 C' ナル圓ハ中心 C ナル圓ノ全ク内ニ在リ
即チ二圓ハ點 O ニ於テ内切ス。

定理 21

221. [i] 二圓が出會ふことなく其各が全く他の外に在れば二つの中心の距離は二半徑の和より大なり。

[ii] 二圓が外切すれば二つの中心の距離は二半徑の和に等し。

[iii] 二圓が相交はれば二つの中心の距離は二半徑の和より小にして其差より大なり。

[iv] 二圓が内切すれば二つの中心の距離は二半徑の差に等し。

[v] 二圓が出會ふことなく其一が全く他の内にあれば二つの中心の距離は二半徑の差より小なり。

[此定理ノ證明ハ容易ナルヲ以テ之ヲ略ス]

問題

106. [221] ノ定理ノ逆ヲ述べ且ツ之ヲ證明セヨ。

第二編問題集ノ一

222. 問題 107. 三ツノ角ガ皆銳角ナル三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ハ此等ノ垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形ノ角ヲ夫々二等分ス。

三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形ヲ原三角形ノ **垂足三角形** ト稱ス。

AD, BE, CF ヲ $\triangle ABC$ ノ頂點 A, B, C ヨリ夫々其對邊ニ引ケル垂線トスレバ AD, BE, CF ハ $\triangle DEF$ ノ角 D, E, F ヲ夫々二等分ス。

證明 H ヲ $\triangle ABC$ ノ

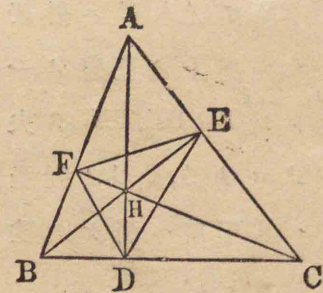
垂心トセヨ

二角 HFB 及ビ HDB ハ

各直角ナルヲ以テ四邊形 $BDHF$ ニ外接スル圓ヲ畫

クコトヲ得

故ニ $\angle HDF = \angle HBF$



[209]

[206]

[∵同ジ弧FHノ上ニ立ツ周ニ於テノ角ナレバナリ]

同様ニ $\angle HDE = \angle HCE$

ナルコトヲ證明スルヲ得

然ルニ $\angle HBF = \angle HCE$

[∵何レモ $\angle BAC$ ノ餘角ナレバナリ]

故ニ $\angle HDF = \angle HDE$

即チ AD ハ角 EDF ヲ二等分ス。

BE 及ビ CF = 就キテモ同様ニ證明スルコトヲ得ベシ。

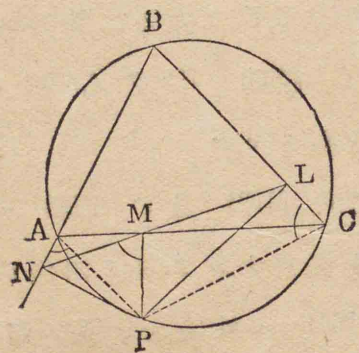
注意 ABC ガ鈍角三角形ナル場合ヲ考フベシ。

223. 問題 108. 三角形ニ外接スル圓周上ノ任意ノ一點ヨリ其邊或ハ邊ノ延長ヘ引ケル三垂線ノ足ハ同一ノ直線上ニ在リ。

P ヲ $\triangle ABC$ = 外接スル圓周上ノ任意ノ一點トシ PL, PM, PN ヲ夫々 P ヲリ A, B, C ノ對邊或ハ其延長ヘ引ケル垂線トスレバ

三點 L, M, N ハ同一ノ直線上ニ在リ。

證明 LM, MN, AP, CP ヲ結ビ付ケヨ



相交ルニハ円ハ同心ナルヲ得ス 106
円ノ三垂線ハ其ノ円内ニ在リ 107

四邊形 PMAN ノ相對スル二角ハ互ニ補角ナルヲ以テ之ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得 [209]

故ニ $\angle PMN = \angle PAN$ [206]

又 $\angle PAN = \angle BCP$ [208]

故ニ $\angle PMN = \angle BCP$

又 PLC, PMC ハ各、直角三角形ナルヲ以テ四邊形

LMPG = 外接スル圓ヲ畫クコトヲ得 [142]

故ニ $\angle BCP + \angle LMP = 2R. \angle$ [207]

故ニ $\angle PMN + \angle LMP = 2R. \angle$

故ニ LM, MN ハ同一ノ直線上ニ在リ。 [54]

即チ三點 L, M, N ハ同一ノ直線上ニ在リ。

109. 圓ノ内或ハ外ニ在ル一點ヨリ其周ヘ引ケル諸直線ノ中、之ヲ延長スレバ中心ヲ通過スルモノハ最モ短シ。 *其ノ長ガ中心ヲ通ルモノハ最モ短シ*

110. 圓ノ内或ハ外ニ在ル一點ヨリ其周ニ引ケル諸直線ノ中、中心ヲ通過シテ後周ニ出會フモノハ最モ長シ。

111. 圓内ノ一定點ヲ通過スル所ノ諸弦ノ中此點ヲ通過スル直徑ニ垂直ナルモノハ最モ短シ。

112. 直徑ノ兩端ヨリ引ケル互ニ平行ナル二弦ハ相等シ。

113. 圓ノ中心ヲ通過セザル一ツノ弦ヲ二等分

円周上の一定点を通り、弦の中点を通る円周上の一定点を通る(112)

スル直径ハ此弦ニ平行ナル他ノ總テノ弦ヲ二等分ス。

114. 一圓ガ其直径ヲ半径トセル他ノ一圓ト内切ス、今其切點ヲ通過シテ大圓ノ任意ノ弦ヲ引ケバ此弦ハ小圓ノ周ニ依リテ二等分セラル。

115. ABCヲ圓ニ内接スル正三角形トシPヲ弧BC上ノ任意ノ點トスレバ $PA=PB+PC$

113. 圓ニ内接スル四邊形ノ一雙ノ對邊相等シケレバ他ノ一雙ノ對邊ハ互ニ平行ナリ。

117. 圓周上ノ一定點ヲ通過シテ引ケル總テノ弦ノ中點ハ一定圓周上ニ在リ。

118. 相切スル二圓ノ二直径ガ互ニ平行ナレバ切點ト一直徑ノ兩端トヲ通過スル二線ハ亦他ノ直径ノ兩端ヲ通過ス。

119. 圓ニ内接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナレバ其交點ヨリ一邊ヘ引ケル垂線ノ延長ハ此邊ノ對邊ヲ二等分ス。

120. 銳角三角形ノ垂心ハ其垂足三角形ノ内心ナリ。

121. 銳角三角形ノ各頂點ハ其垂足三角形ノ傍心ナリ

122. 内切シ或ハ外切スル二圓ノ切點ヲ通過シテ二線AB, CDヲ引ケバ二弦AC及ビBDハ互ニ平行ナリ。

第四節 作圖題

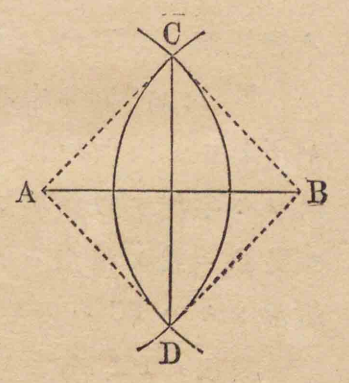
224. コ、ニ再ビ [27] 及ビ [28] ニ掲ゲタル作圖題ノ定義等ヲ一讀スルヲ要ス。

定規ト「コムバス」トヲ以テ解法ヲ得タル後ハ三角定規、分度器等ヲ實地ノ用ニ供スルモ妨ナシ。

作圖題 I

225. 與へられたる有限直線 AB の垂直二等分線を引くこと。

解法 Aヲ中心トシ ABノ半ヨリ大ナル直線ヲ半径トシテ圓ヲ書キ又Bヲ中心トシ同半径ヲ以テ圓ヲ書キ前ノ圓ト二點C, Dニ於テ相交ハラシメCDヲ結び付ケヨ



然ルトキハ CDハ所要ノ直線ナリ。

證明 二點C, Dハ各, A, Bヨリ等距離ナルヲ以テ CDハABノ垂直二等分線ナリ。 [68]

問題

123. 與へラレタル有限直線ヲ四等分セヨ.
 124. 圓ノ與へラレタル弧ヲ二等分セヨ.
 125. 與へラレタル三角形ノ外接圓ヲ畫ケ.

作圖題 2

226. 與へられたる直線 AB 上の定點 C に於て之に垂線を引くこと.

解法 線 AB 上ニ與へラレタル點 C ヨリ任意ノ等距離 CM, CN ラ取レ

M 及 N ヲ中心トシ MC ヨリ大ナル任意ノ同ジキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫

キ點 P ニ於テ相交ハラシメ PC ヲ結び付ケヨ
 然ルトキハ PC ハ所要ノ直線ナリ.

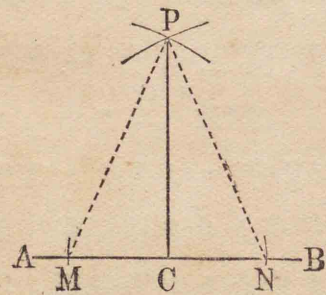
證明 PM, PN ヲ引ケ

然レバ $\triangle PMC \equiv \triangle PNC$ [116]

[∵ 其三邊夫々相等シ]

因リテ $\angle PCM = \angle PCN$

故ニ $PC \perp AB$



注意 作圖題 1 ノ如ク [68] ニ依リテ之ヲ證明スルコトヲ得.

問題

126. 斜邊ト一邊トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ

作圖題 3

227. 與へられたる角 AOB を二等分すること.

解法 頂點 O ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ二邊ヲ二點 A, B ニ於テ截ラシメヨ.

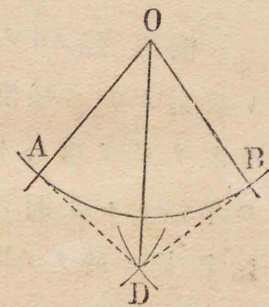
A, B ヲ中心トシ直線 AB ノ半ヨリ大ナル同ジ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ

D ヲ其周ノ二交點中ノ角 AOB 内ニ在ル方トシ OD ヲ結び付ケヨ

然ルトキハ OD ハ所要ノ二等分線ナリ.

證明 AD, BD ヲ引ケ

然レバ $\triangle AOD \equiv \triangle BOD$ [11C]



因リテ $\angle AOD = \angle BOD$

問題

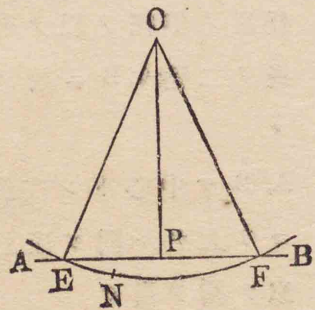
127. DOノ延長ハ $\angle AOB$ ノ共軛角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ.

128. $45^\circ, 135^\circ, 22^\circ 30'$ ノ角ヲ作レ.

作圖題 4

228. 與へられたる直線 AB 外の一
定點 O より之に垂線を引くこと.

解法 線 ABノ定點 O
ト反對ノ側ニ任意ノ點 N
ヲ取リ Oヲ中心トシ ON
ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ二
點 E, F, 於テ ABニ交ハ
ラシメヨ



CE, CFヲ結ビ付ケ角 ECF
ノ二等分線 CPヲ引キ Pニ於テ ABト交ハラシメ
ヨ [227]

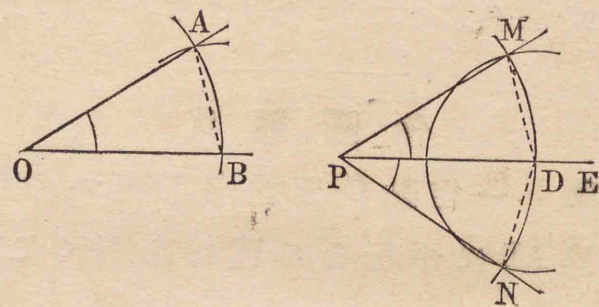
然ルトキハ CPハ所要ノ垂線ナリ.

證明 $\triangle OPE = \triangle OPF$ [106]

因リテ $\angle CPE = \angle CPF$
故ニ $CP \perp AB$

作圖題 5

229. 與へられたる有限直線 PE の
一端 P に於て之と與へられたる角 AOB
に等しき角をなす所の直線を引くこと.



解法 Oヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫
キ A, Bニ於テ二邊ヲ截ラシメ
弦 ABヲ引ケ
Pヲ中心トシ OAニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ PE
ヲ Dニ於テ截ラシメヨ
Dヲ中心トシ BAニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ前
ノ圓ト二點 M, Nニ於テ相交ハラシメ
PM, PNヲ引ケ

然ルトキハ PM, PN ハ 所要ノ直線ナリ.

證明 DM, DN ヲ引ケ

$$\triangle AOB \equiv \triangle MPD \quad [116]$$

因リテ $\angle AOB = \angle MPD$

即チ PM ハ PE ト $\angle AOB$ ニ等シキ角ヲ爲ス.

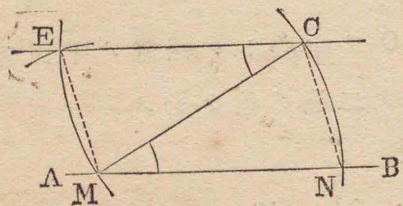
同様ニ PN モ PE ト $\angle AOB$ ニ等シキ角ヲ爲ス.

問題

129. 三角形ノ二角ヲ知リテ他ノ一角ヲ作レ.

作圖題 6

230. 一定點 C を通過し與へられたる直線 AB に平行なる直線を引くこと.



解法 AB 上ニ任意ノ一點 M ヲ取り MC ヲ引ケ

C ヲ中心トシ CM ヲ半径トシテ圓ヲ畫ケ

M ヲ中心トシ同半径ヲ以テ圓ヲ畫キ N ニ於テ AB

ヲ截ラシメヨ

M ヲ中心トシ NC ヲ半径トシテ圓ヲ畫キ之ト前ノ

圓トノ交點ヲ E トシ CE ヲ引ケ

然ルトキハ CE ハ 所要ノ平行線ナリ.

證明 $\triangle CME \equiv \triangle CMN$ [116]

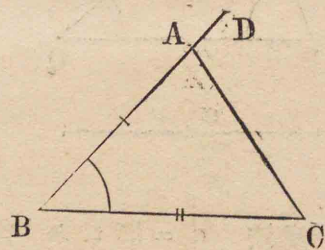
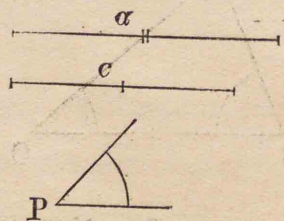
而シテ CN = ME ナルヲ以テ

$$\angle ECM = \angle CMN$$

故ニ EC \parallel AB [79]

作圖題 7

231. 二邊 a, c 及び其夾角 P を知りて三角形を作ること.



解法 a ニ等シク BC ヲ引キ點 B ニ於テ BC ト

P ニ等シキ角ヲナス所ノ直線 BD ヲ引ケ [229]

BD ヲ c ニ等シク BA ヲ截リ

AC ヲ引ケ

然ルトキハ ABC ハ 所要ノ三角形ナリ.

證明 如何トナレバ三角形 ABC = 於テ

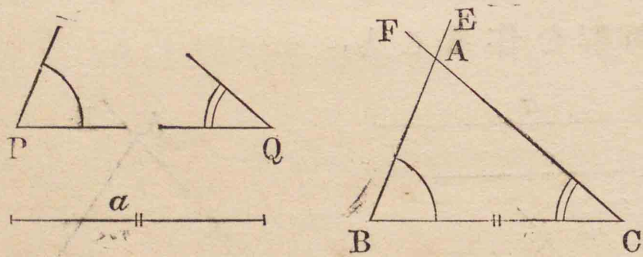
$$BC=a \quad AB=c \quad \angle ABC=\angle P$$

問題

130. 與ヘラレタル直線ヲ等邊ノ一トシテ二等邊ナル直角三角形ヲ作レ.

作圖題 8

232. 二角 P, Q 及び其間の一邊 a を知りて三角形を作ること.



解法 a = 等シク BC ヲ引キ點 B = 於テ BC ト P = 等シキ角ヲナス所ノ直線 BE ヲ引ケ
又點 C = 於テ CB ト Q = 等シキ角ヲナス所ノ直線 CF ヲ引キ二角 EBC, FCB ヲシテ BC ノ同ジキ側ニ在ラシメ
點 A ヲ BE ト CF トノ交點トセヨ

然ルトキハ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

證明 如何トナレバ三角形 ABC = 於テ

$$BC=a \quad B=P \quad C=Q$$

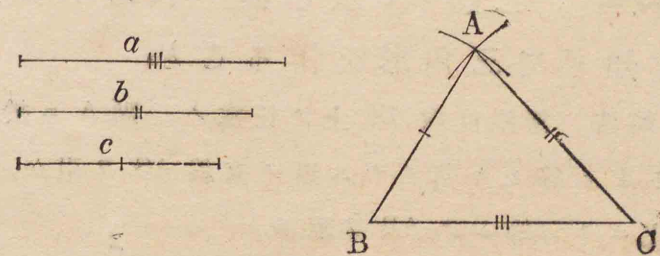
注意 與ヘラレタル二角ノ和ハ二直角ヨリ小ナルヲ要ス. 然ラザレバ本題ハ解ナシ.

問題

131. 斜邊ト一銳角トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ.

作圖題 9

233. 三邊 a, b, c を知りて三角形を作ること.



解法 a = 等シク BC ヲ引ケ
C ヲ中心トシ b = 等シキ半径ヲ以テ圓ヲ畫キ
又 B ヲ中心トシ c = 等シキ半径ヲ以テ圓ヲ畫キ前ノ圓ト點 A = 於テ相交ハラシメ

AB, AC ヲ引ケ

然ルトキハ ABC ハ所要ノ三角形ナリ。

證明 如何トナレバ三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ハ夫々 $a, b, c =$ 等シ。

注意 與ヘラレタル三線ノ中何レノ二ツノ和モ他ノ一ツヨリ大ナルヲ要ス。然ラザレバ本題ハ解ナシ。

問題

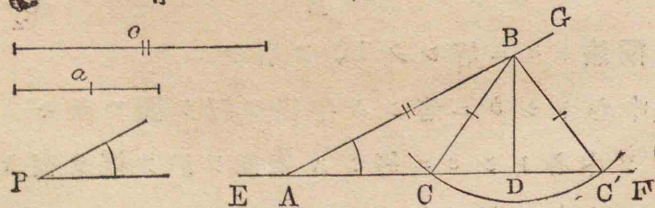
132. 一邊 a ヲ知リテ正三角形ヲ作レ。

133. 直角ヲ三等分セヨ。

作圖題 10

234. 二邊 a, c 及び其一に對する角 P を知りテ三角形を作ること。

解法 無限直線 EF 上ノ任意ノ一點 A = 於テ AF ト P = 等シキ角ヲナス所ノ直線 AG ヲ引ケ AG 上ニ $c =$ 等シク AB ヲ取り



B ヲ中心トシ $a =$ 等シキ半径ヲ以テ圓ヲ畫ケ

$\angle P$ ノ大サ及ビ二邊 a, c ノ長サノ異ナルニ從ヒテ種々ノ場合アリ

BD ヲ B ヲリ EF へ引ケル垂線トシ之ヲ p トセヨ。

第一 P ガ銳角ナル場合

(1) 若シ $a < p$ ナレバ

圓ハ EF = 出會ハザルヲ以テ解ナシ。

(2) 若シ $a = p$ ナレバ

圓ハ點 D = 於テ EF = 切シ題意ニ適スル一ツノ三角形ヲ得。直角三角形 ABD 是ナリ。

(3) 若シ $a > p, a < c$ ナレバ

圓ハ A ノ同ジキ側ニ在ル二點 C, C' = 於テ EF = 交ハル

BC 及ビ BC' ヲ結ビ付ケヨ

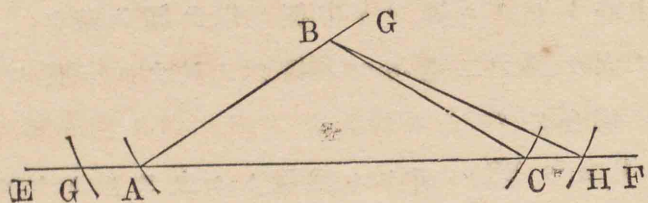
然レバ ABC, ABC' ハ所要ノ三角形ナリ。

(4) 若シ $a = c$ ナレバ

圓ハ A 及ビ C = 於テ EF = 交ハリ ABC ナル所要ノ三角形ヲ得。

(5) 若シ $a > c$ ナレバ

圓ハ A ノ兩側ニ在ル二點 G, H = 於テ EF = 交ハリ題意ニ適スル ABH ナル一三角形ヲ得。



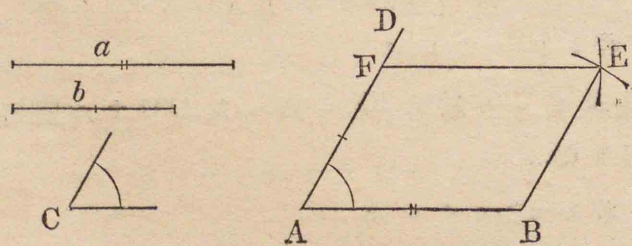
上ノ解法ノ證明及ビ次ニ記スルニツノ場合ノ解法ト證明トハコトニ略ス。學生宜シク自カラ之ヲナスベシ。

第二 Pガ直角ナル場合

第三 Pガ鈍角ナル場合

作圖題 11

235. 二邊 a, b 及び其夾角 C を知りて平行四邊形を作ること。



解法 a ニ等シク直線 AB ヲ引キ
 點 A ニ於テ AB ト C ニ等シキ角ヲナス所ノ直線
 AD ヲ引ケ [229]

AD 上ニ b ニ等シク AF ヲ取リ

F ヲ中心トシ a ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書ケ

又 B ヲ中心トシ b ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ前ノ圓ト點 E ニ於テ相交ハラシメ

EB, EF ヲ引ケ

然ルトキ $ABEF$ ハ所要ノ平行四邊形ナリ。

證明 如何トナレバ四邊形 $ABEF$ ハ平行四邊形ニシテ [137]

而シテ $AB=a, AF=b, \angle FAB=C$ ナレバナリ。

問題

134. 一邊ヲ知リテ正方形ヲ作レ。

135. 相隣レル二邊ヲ知リテ矩形ヲ作レ。

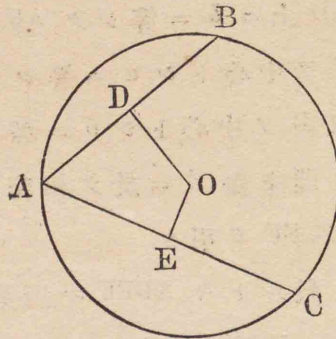
136. (i) 一邊及ビ一對角線 (ii) 一對角線及ビ二對角線ノ夾角ヲ知リテ矩形ヲ作レ。

137. (i) 一邊及ビ一角 (ii) 一邊及ビ一對角線 (iii) 兩對角線 (iv) 一角及ビ其頂點ヨリ出ヅル對角線ヲ知リテ菱形ヲ作レ。

作圖題 12

236. 與へられたる圓 ABC ノ中心を看出すこと。

解法 圓周上ノ任意ノ一點Aヨリ任意ノ二弦AB, ACヲ引ケ
 AB及ビACノ垂直二等分線ヲ引キ點Oニ於テ相交ハラシメヨ



然ルトキハOハ所要ノ中心ナリ。

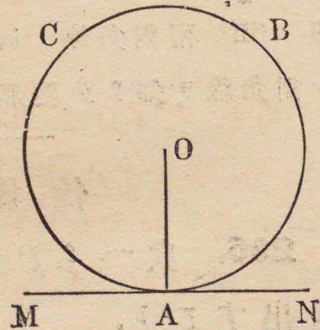
證明 點Oハ三點A, B, Cヨリ等距離ニ在リ [160]

故ニOヨリ此三點中ノ一ニ至ル距離ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ其圓ハ他ノ二點ヲ通過スベシ而シテ此圓ハ與ヘラレタル圓ト相合ス [136]
 故ニOハ與ヘラレタル圓ノ中心ナリ。

注意 此作圖題ニ依リテ與ヘラレタル圓弧ノ中心ヲ看出スコトヲ得。

作圖題 13

237. 與ヘられたる圓周ABC上ノ定點Aニ於テ之ニ切線を引くこと。



解法 中心Oヲ看出シ [236]

半徑OAヲ引キ

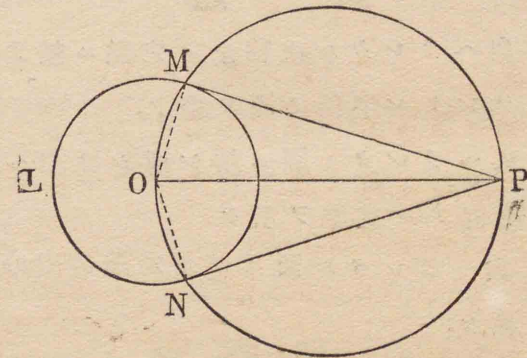
點Aニ於テOAニ垂線MNヲ引ケ [226]

然ルトキハMNハ所要ノ切線ナリ。

證明 如何トナレバMNハ半徑ガ圓周ニ出會フ點ニ於テ之ニ垂直ナレバナリ。 [210]

作圖題 14

238. 與ヘられたる圓LMN外ノ定點Pヨリ之ニ切線を引くこと。



解法 中心Oヲ看出シOPヲ引ケ

OPヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ與ヘラレタル圓ト二點M, Nニ於テ相交ハラシメPM, PNヲ引ケ

然ルトキハPM, PNハ所要ノ切線ナリ。

證明 半徑 OM を引ケ

OMP は半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ナリ [204]

故ニ PM は與ヘラレタル圓ノ切線ナリ [210]

同様ニ PN も亦與ヘラレタル圓ノ切線ナルコトヲ證明スルヲ得.

239. 系 圓外の一ノ點より之に引ける二つの切線 (PM, PN) は相等しく而して此點と中心とを結び付くる直線 (PO) と等角をなす.

問題

138. 與ヘラレタル直線上ノ定點ニ於テ之ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫ケ.

139. 與ヘラレタル圓ニ切シ而シテ與ヘラレタル直線ニ垂直ナル直線ヲ引ケ

140. 與ヘラレタル圓ニ切シ定點ヲ中心トナス所ノ圓ヲ畫ケ.

作圖題 15

240. 與ヘラレたる三角形 ABC に内接する圓を畫くこと.

解法 二角

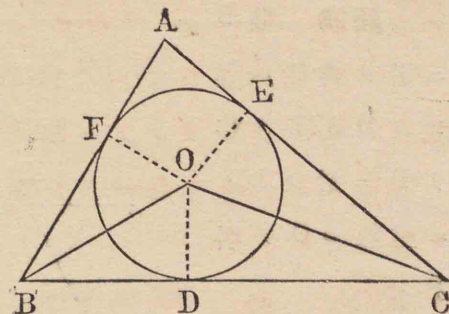
B, C ノ二等分線

ヲ引キ點 O ニ於

テ相交ハラシメ

O ヨリ BC ニ垂

線 OD を引ケ



O を中心トシ OD を半徑トシテ圓ヲ畫ケ

此圓ハ所要ノ圓ナリ.

證明 CA, AB へ夫々垂線 OE, OF を引ケ

然レバ OE, OF は何レモ OD ニ等シク [159]

BC, CA, AB は夫々 OD, OE, OF ニ垂直ナルヲ以テ O ガ中心, OD ガ半徑ナル圓ハ D, E, F ナル三點ヲ通過シ

且此等ノ點ニ於テ三邊ニ切ス [210]

即チ圓 DEF は三角形 ABC ニ内接スル圓ナリ [177]

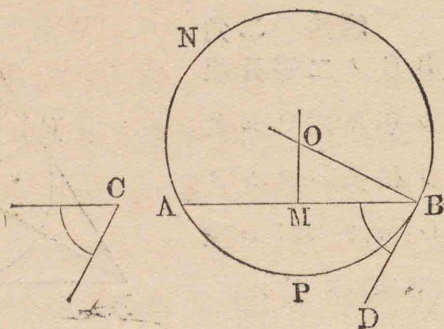
注意 三角形ニ内接スル圓ノ中心ハ其内心ナリ. [159]

作圖題 16

241. 與ヘラレたる直線 AB 上に與ヘラレたる角 C を含む所ノ弓形を畫くこと.

解法 點 B

ニ於テ角 C ニ等
シク角 ABD ヲ作
リ B ニ於テ DB
ニ垂線 BO ヲ引
ケ
AB ノ垂直二等



分線ヲ引キ BO ト O ニ於テ相交ハラシメヨ
O ヲ中心トシ OB ヲ半径トシテ圓ヲ畫ケ

然ルトキハ角 ABD 外ニ在ル弓形 ANB ハ所要ノ
弓形ナリ。

證明 $OA=OB$ ナルヲ以テ [67]

此圓周ハ點 A ヲ通過ス

$BD \perp BO$ ナルヲ以テ BD ハ圓ノ切線ナリ [210]

故ニ ABD ハ弧 APB ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角

即チ弓形 ANB 内ノ角ニ等シ [214]

而シテ $\angle ABD = \angle C$

故ニ ANB ハ所要ノ弓形ナリ。

第二編問題集ノ二

141. 一定點ヨリ一線ヲ引キテニツノ與ヘラレ
タル平行線ヲ截リ其間ニ夾マルル部分ヲシテ所定
ノ長サニ等シカラシメヨ。

142. 一定點ヲ通過シ相交ハル二線ノ各ト等角
ヲ爲ス所ノ一線ヲ引ケ。

143. $\triangle ABC$ ノ底邊 BC ニ一平行線ヲ引キ二邊
AB, AC ヲ夫々二點 D, E ニ於テ截リ $DE = DB + EC$ ノ
如クナラシメヨ。

144. 與ヘラレタル有限直線ヲ任意ノ數ニ等分
セヨ。

145. 與ヘラレタル圓外ノ一定點ヨリ割線ヲ引
キ其圓内ニ在ル部分ガ與ヘラレタル直線ニ等シク
ナル如クセヨ。

146. 底邊頂角及ビ其頂點ヨリ引ケル中線ヲ知
リテ三角形ヲ作レ。

147. 底邊頂角及ビ底邊ノ一端ヨリ其對邊ヘ引
ケル垂線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

148. 底邊其一端ニ於テノ角及ビ他ノ二邊ノ和
又ハ差ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

149. 二角及ビ周ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

150. 二邊及ビ第三邊ヘ引ケル中線ヲ知リテ三

角形ヲ作レ

151. 與ヘラレタル圓ニ内接シ與ヘラレタル三角形ト等角ナル三角形ヲ作レ.

152. 一對角線ト一邊トノ和ヲ知リテ正方形ヲ作レ.

153. 一定點ヲ通過シ與ヘラレタル一直線ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫ケ.

154. 一定點ヲ通過シ與ヘラレタル直線上ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ.

第三編

比及び比例 相似形

第一節

定義 比及び比例の理に關する定理

242. 定義 量Aが量Bを丁度若干度含むときはAをBの倍量と稱す. 又BをAの約量と稱す.

例ヘバー一尺ハ一寸ノ倍量ニシテ一寸ハ一尺ノ約量ナリ.

243. 定義 二つ或は二つより多くの量が各他の一量の倍量なるときは此諸量を通約スベキ量と稱す. 後の一量を前の諸量の公約量と稱す.

公約量を有せざる二つの量を通約スベカラザル量と稱す.

244. 定義 量Aの之と同種類の量

Bに對する比とはBを單位としてAを計るとき之を表はす數なり。 $\frac{A}{B}$ 又はA:Bにて之を表はす。

AとBとが通約すべき量なるときは其比は整数又は分數なり。

例へば一間ノ一尺ニ對スル比ハ6ニシテ一間ノ一丈ニ對スル比ハ $\frac{3}{5}$ ナリ。

AとBとが通約すべからざる量なるときは其比は不盡數なり。

例へば正方形ノ對角線ノ其一邊ニ對スル比ハ不盡數 $\sqrt{2}$ ナリ。(其證明ハ略ス)然レドモ其近似ノ値ハ何程近似ノ度マデモ分數或ハ小數ヲ以テ之ヲ表ハスコトヲ得ベシ。例へば $\sqrt{2}$ ノ近似數ハ1.4, 1.41, 1.414, 1.4142等ナリ。

注意 同種類ノ量ニアラザレバ比ヲ有セズ。

245. 量Bを單位として量Aを計るときは之を表はす數をAの數價と稱す。

[244]ノ例ニ於テ6, $\frac{3}{5}$, ハ何レモ一間ノ數價ニシテ $\sqrt{2}$ ハ正方形ノ對角線ノ數價ナリ。

是ヨリ以下一量ノ他ノ一量ニ對スル比トイフ

トキハ其二量ハ通約スベキモノト假定ス。因リテ數價ハ恒ニ整数又ハ分數ナリ。

故ニ n ヲ以テ上述ノ如キ數價ヲ表ハセバ

$$A=nB$$

246. 定義 AのBに對する比がMのNに對する比に等しきときは此四量は比例ヲナスといふ。此四量を比例量と稱す。

二量A, Bト二量M, Nトハ同種類ナルモ或ハ然ラザルモ可ナリ。五寸ノ線ノ三寸ノ線ニ對スル比ハ百坪ノ地面ノ六十坪ノ地面ニ對スル比ニ等シ。是其種類ノ相異ナレル例ナリ。

上ノ比例ヲ $A:B::M:N$

或ハ $\frac{A}{B}=\frac{M}{N}$

ト記シ之ヲ「AノBニ對スル比ハMノNニ對スル比ニ等シ」ト讀ム。

AとNとを比例の外項と稱しBとMとを其内項と稱す。NをA, B, Mの第四比例項と稱す。AとMとは相對應スといひ又BとNとは相對應すといふ。

247. 定義 比例 $A:B::B:C$ に於

ては C を A 及び B の **第三比例項** と稱し
B を A 及び C の間の **比例中項** と稱す。

此比例ニ於テハ A, B 及び C ハ皆同種類ノ量ナ
ラザル可カラズ。

248. 定義 二つの比 A:B 及び B:A
の各, を他の **反比** と稱す。

249. 量 A の量 B に對する比は其各
量を同一の單位を以て計れば其數價の
比に等し。即ち若し $A=aL$ $B=bL$ な
るときは $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ なり。

例へば五尺ノ三尺ニ對スル比ハ $\frac{5}{3}$ ナリ。

250. A, B, C, D を比例量とし A, B
を同一單位にて計りたる數價を夫々 a, b
とし又 C, D を同一單位にて計りたる數
價を夫々 c, d とすれば

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

如何トナレバ $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}, \frac{C}{D}=\frac{c}{d}$ [249]

而シテ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$

故ニ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

逆に $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

注意 A, C ト B, D トハ同種類ノ量ニアラザルモ妨
ゲナシ。

251. [249] に陳述する所に由りて之
を見れば量の比は其數價の比に等しき
を以て若し所論の量が皆同種類なると
きは數の比に關する事項を直ちに量の
比に關する事項となすことを得べし。

然れども所論の量が皆同種類のも
のにあらざるときは必ずしも斯の如く
なすことを得ず。

252. 定理 1 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c} \quad \ominus$$

注意 a, b, c, d ハ任意ノ數ヲ表ハス下
ノ四定理ニ於テモ亦然リ。

253. 定理 2 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

254. 定理 3 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{又} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

255. 定理 4 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

256. 定理 5 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ なるときは

$$\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

257. 上ニ掲ゲタル五ツノ定理ノ證明ハ簡單ナルヲ以テ之ヲ略ス。學生宜シク自カラ之ヲナスベシ。

上の定理の中 1, 3, 及び 4 の三定理は a, b, c, d を量と見做すときは直ちに量の比に関する定理となる。[a, b なる前の二量と c, d なる後の二量とが同種類なると異種類なるとに拘はらず]

2 及び 5 の二定理は a, b, c, d 等を皆同種類の量と見做したるときにのみ直ちに量の比に関する定理となる。

第二節

比及比例ノ應用

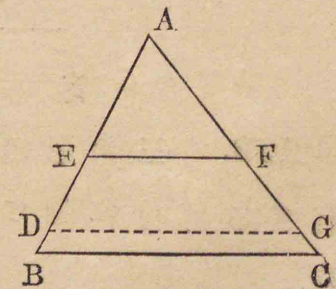
258. 定義 有限直線上に在る一點は之を内分スといふ、或は單に之を分ツといふ。

有限直線の延長上に在る一點は之を外分スといふ。何れの場合に於ても此直線の兩端より分點に至る距離を其分線と稱す。内分の場合に於ては二分線の和が此直線に等し、外分の場合に於ては其差が之に等し。

定理 6

259. 三角形の底邊に平行に引ける直線は二邊を相等しき比を有する部分に分つ。

三角形 ABC = 於テ EF
ガ底邊 BC = 平行ナレバ



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

證明 BDヲ AE, EBノ公約量トシ

$$AE = mBD \quad EB = nBD \quad \text{トスレバ}$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{m}{n} \quad [249]$$

AEヲ m 等分シ EBヲ n 等分セヨ.

各分點ヲ通過シテ BCニ平行線ヲ引ケバ此等ノ線

ハ AFヲ m 等分シ FCヲ n 等分ス. [139]

CGヲ其等部分ノ一トスレバ

$$AF = mCG \quad FC = nCG$$

故ニ $\frac{AF}{FC} = \frac{m}{n}$

因リテ $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

注意 本定理ハ AE, EBガ通約スベカラザル

トキニモ亦真ナリ. 其證明ハ略ス.

260. 系 1 $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

261. 系 2 $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{EB}{FC}$

定 理 7

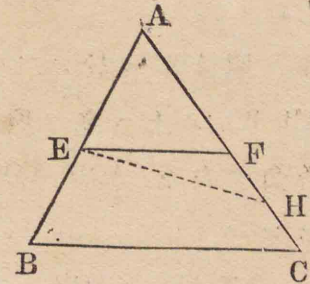
262. 三角形の二邊を相等しき比を有する部分に分つ直線は底邊に平行なり.

三角形 ABCニ於テ線

EFハ二邊 AB, ACニ交ハ

リ $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

ナルトキハ EF || BC



證明 Eヨリ BCニ

平行線ヲ引キ Hヲ ACトノ交點トセヨ

然レバ $\frac{AE}{EB} = \frac{AH}{HC}$ [259]

而シテ $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ [假設]

故ニ $\frac{AH}{HC} = \frac{AF}{FC}$

故ニ $\frac{AH+HC}{HC} = \frac{AF+FC}{FC}$ 即チ $\frac{AC}{HC} = \frac{AC}{FC}$ [254]

故ニ HC = FC

因リテ EHハ EFニ合ス

故ニ EF || BC

263. 系 $\triangle ABC$ ニ於テ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

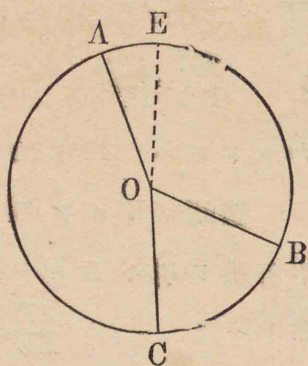
なるときは EF || BC

定 理 8

264. 同圓又は等圓に於て二つの弧の比は其上に立つ所の中心角の比に等

し。

圓 ABC = 於テ二弧
AB, BC, ノ上ニ立ツ所ノ中
心角ヲ夫々 AOB, BOC ト
スレバ



$$\frac{\text{弧 } AB}{\text{弧 } BC} = \frac{\angle AOB}{\angle BOC}$$

證明 AE ヲ二弧 AB,
BC ノ公約量トシ

$$AB = mAE, BC = nAE \text{ トスレバ}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$$

AB ヲ m 等分シ BC ヲ n 等分セヨ

各分點へ半徑ヲ引ケバ此等ノ半徑ハ角 AOB ヲ m 等
分シ角 BOC ヲ n 等分ス [191]

$$\text{故ニ} \quad \frac{\angle AOB}{\angle BOC} = \frac{m}{n}$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{\angle AOB}{\angle BOC}$$

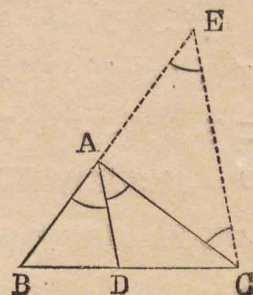
265. 中心ニ於テノ單位角ニ對スル弧ヲ單位
弧トスレバ中心角ノ數價ト之ニ對スル弧ノ數價ト
ハ同一ナリ。角ニ於テノ如ク圓周ノ $\frac{1}{360}$ ヲ度ト稱
シ一度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ分ト稱シ分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ秒ト稱ス。

定 理 9

266. 三角形の頂角の二等分線は底
邊を他の二邊の比に内分す。

三角形 ABC ノ頂角
BAC ノ二等分線 AD ガ點
D = 於テ底邊 BC = 出會
フトキハ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



證明 C ヲリ DA = 平行線ヲ引キ BA ノ延長
ト點 E = 於テ交ハラシムレバ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE} \quad [259]$$

$$\text{然ルニ} \quad \angle DAC = \angle ACE \quad [76]$$

$$\angle BAD = \angle AEC \quad [77]$$

$$\text{而シテ} \quad \angle DAC = \angle BAD \quad [\text{假設}]$$

$$\text{故ニ} \quad \angle ACE = \angle AEC$$

$$\text{故ニ} \quad AE = AC$$

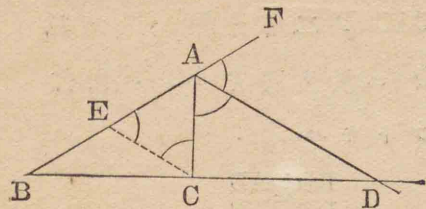
$$\text{因リテ} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

267. 系 三角形の底邊を他の二邊
の比に分つ點を頂點に結び付くる直線
は頂角を二等分す。

定理 10

268. 三角形の頂角の外角の二等分線は底邊を他の二邊の比に外分す。

三角形 ABC ノ
頂角ノ外角 CAF ノ
二等分線 AD ガ點
D = 於テ底邊 BC
ノ延長ニ出會スト
キハ



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

[266] ノ定理ノ如クニシテ之ヲ證明スルコトヲ得
學生自カラ之ヲ爲スベシ。

注意 AB=AC ナルトキハ $\angle CAF$ ノ二等分線
ハ BC = 平行ナリ。

269. 系 三角形の底邊を他の二邊
の比に外分する點より頂點へ引ける直
線は頂角の外角を二等分す。

第三節
相似形

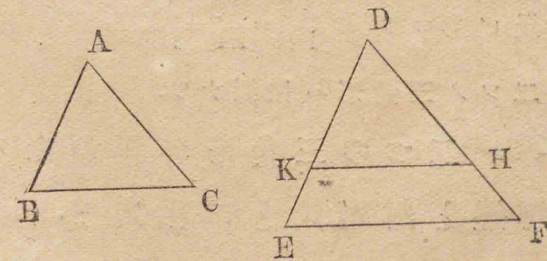
270. 定義 二つの多角形に於て各
形の同じき順に取りたる角が夫々相等
しければ此二つの多角形は互ニ等角ナ
リといふ。其相等しき角を對應角とい
ひ、對應角の間に在る邊を對應邊といふ。

271. 定義 二つの多角形が互に等
角にして其對應邊の比が皆相等しきと
きは之を相似多角形と稱す。

通例之を略して單に相似形と稱す。

定理 11

272. 二つの三角形の三角相等しけ
れば此二つの三角形は相似なり。



△ABC, DEF = 於テ

A=D B=E C=F ナルトキハ

此兩三角形ハ相似ナリ.

證明 △ABC ヲ取り之ヲ △DEF ノ上ニ重テ 角Aヲ角Dノ上ニ重ネ邊ABヲ邊DEノ上ニ重ネ

ヨ 然レバ A=D ナルヲ以テ ACハDFニ重ナル 而シテ點BハDE或ハ其延長上ノ一點Kノ上ニ落テ 點CハDF或ハ其延長上ノ一點Hノ上ニ落ツベシ KHヲ結ビ付ケヨ

∠DKH=∠E ナルヲ以テ KH∥EF

故ニ DK/DH = DE/DF [260]

即チ AB/DE = AC/DF(1)

又 ∠Bヲ ∠Eニ重ナルコトニ依リテ

AB/DE = BC/EF(2)

ナルコトヲ證明スルヲ得

故ニ(1)及ビ(2)ヨリ AB/DE = BC/EF = AC/DF

因リテニツノ三角形ハ相似ナリ.

273. 二つの三角形が相似なるときは 對應邊と對應角とは相對す.

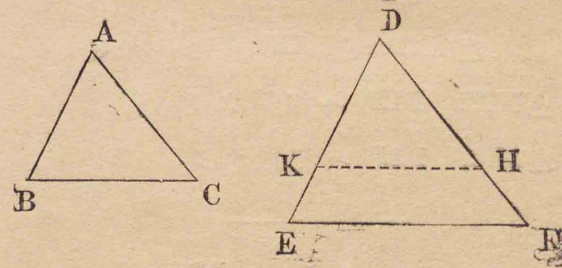
問題

155. ニツノ直角三角形ニ於テ一銳角相等シク レバ此兩形ハ相似ナリ.

156. 三角形ABCニ於テAD, BEガA, Bヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ナレバ三角形CDE, ABCハ相似ナリ.

定理 12

274. 二つの三角形に於て同じき順に 取りたる邊が比例を爲すときは此二つの三角形は相似なり.



△ABC, DEF = 於テ

AB/DE = BC/EF = CA/FD ナルトキハ

此兩三角形ハ相似ナリ.

證明 DE上ニABニ等シクDKヲ取り又DF

上ニ AC = 等シク DH ヲ取リ KH ヲ引ケ

$$\text{然レバ} \quad \frac{DK}{DE} = \frac{DH}{DF}$$

$$\text{故ニ} \quad KH \parallel EF$$

[263]

即チ $\triangle DKH, DEF$ ハ互ニ等角ナル三角形トナルヲ以テ相似ナリ

[272]

$$\text{故ニ} \quad \frac{DK}{DE} = \frac{KH}{EF}$$

[$\because DK$ ト DE, KH ト EF ハ何レモ對應邊ナリ]

$$\text{然ルニ} \quad \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

[假設]

$$\text{而シテ} \quad DK = AB$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{KH}{EF} = \frac{BC}{EF}$$

$$\text{故ニ} \quad KH = BC$$

$$\text{故ニ} \quad \triangle ABC \equiv \triangle DKH$$

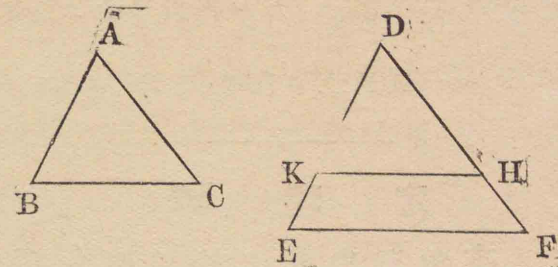
[116]

然ルニ $\triangle DKH, DEF$ ハ相似ナリ

故ニ $\triangle ABC, DEF$ ハ相似ナリ.

定理 13

275. 二つの三角形に於て一角が相等しく此角を夾む二邊が比例を爲すときは此二つの三角形は相似なり



$\triangle ABC, DEF$ = 於テ

$$A = D \quad \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{ナルトキハ}$$

此兩三角形ハ相似ナリ.

證明 (272) = 於テノ如ク $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ重ネ DKH ヲ ABC ノ取リタル位置トセヨ

$$\text{然レバ} \quad \frac{DK}{DE} = \frac{DH}{DF}$$

$$\text{故ニ} \quad KH \parallel EF$$

[263]

即チ $\triangle DKH, DEF$ ハ互ニ等角ナル三角形トナルヲ以テ相似ナリ

[272]

故ニ $\triangle ABC, DEF$ ハ相似ナリ

問題

157. 三角形ノ一頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ガ此形内ニ在リテ底邊ノ二ツノ部分ノ間ノ比例中項ナルトキハ本形ハ直角三角形ナリ.

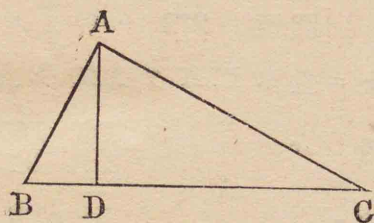
158. 二線 AB, CD 或ハ其各線ノ延長ガ一點 O =

於テ相交ハリ $\frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$ ナル比例ヲナストキハ四
點 A, B, C, D ハ一圓周上ニ在リ。

定理 14

276. 直角三角形に於て直角頂より
斜邊へ引ける垂線は之を全形と相似に
して又互に相似なる二つの三角形に分
つ。

直角三角形 ABC
ニ於テ AD ヲ直角頂
A ヨリ斜邊 BC へ引
ケル垂線トスレバ
 $\triangle ABD, ACD$ ハ何レモ



$\triangle ABC$ ト相似ニシテ又互ニ相似ナリ。

證明 $\triangle ABD, ABC$ ニ於テ二角 BAC, ADB ハ各,
直角ナルヲ以テ相等シク角 B ハ兩形ニ通ズ故ニ他
ノ一角モ亦相等シ。

故ニ此兩形ハ相似ナリ。

[272]

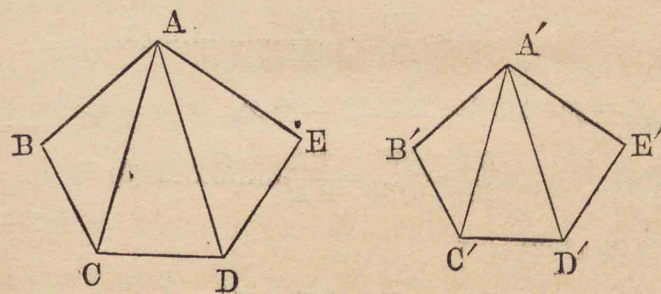
同様ニ $\triangle ACD, ABC$ モ亦相似ナリ。

又 $\triangle ABD, ACD$ ハ各, 同一ノ三角形 ABC ト相似
ナルヲ以テ互ニ相似ナリ。

277. 系 直角三角形の直角頂より
斜邊へ引ける垂線は斜邊の二つの部分
の比例中項なり, 而して其各邊は斜邊
及び斜邊の其邊に隣れる部分の間の比
例中項なり。

定理 15

278. 二つの多角形が夫々相似にし
て相似の位置に在る同数の三角形より
成るときは此二つの多角形は相似なり



多角形 ABCDE ハ ABC, ACD, ADE ナル三ツノ
三角形ヨリ成リ又多角形 A'B'C'D'E' ハ夫々 ABC,
ACD, ADE ト相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニ在ル A'B'C',
A'C'D', A'D'E' ナル三ツノ三角形ヨリ成ルトキハ此
兩多角形ハ相似ナリ。

證明 相似三角形ノ對應角ナルヲ以テ

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

同理ニ依リ $\angle BCA = \angle B'C'A'$ $\angle ACD = \angle A'C'D'$

因リテ $\angle BCD = \angle B'C'D'$

同様ニ三ツノ角 CDE, DEA, EAB ハ夫々三ツノ角 CD'E', D'E'A', E'A'B' ニ等シキコトヲ證明スルヲ得。故ニ ABCDE, A'B'C'D'E' ハ互ニ等角ナル多角形ナリ。

是ヨリ其對應邊ガ比例ヲナスコトヲ證明セン 相似三角形 ABC, A'B'C' ニ於テ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \dots\dots\dots (1)$$

又相似三角 ACD, A'C'D' ニ於テ

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \dots\dots\dots (2)$$

又相似三角形 DEA, D'E'A' ニ於テ

$$\frac{DA}{D'A'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \dots\dots\dots (3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

即チ二ツノ多角形ノ對應邊ハ比例ヲナス 故ニ此二ツノ多角形ハ相似ナリ。

279. 系 二つの多角形が相似なるときは之を相似にして且相似の位置に

在る同数の三角形に分つことを得。

第三編問題集ノ一

159. ニツノ三角形ノ三邊ガ夫々平行ナレバ此兩形ハ相似ナリ。

160. ニツノ三角形ノ三邊ガ夫々垂直ナレバ此兩形ハ相似ナリ。

161. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B ヲ中心トシ BC ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ CA 或ハ其延長ヲ點 D ニ於テ截レバ BC ハ CA 及ビ CD ノ間ノ比例中項ナリ。

162. ニツノ相似多角形ノ周ノ比ハ其任意ノ二ツノ對應邊ノ比ニ等シ。

163. 二圓ガ内切スルトキハ其切點ヲ通過スル所ノ大圓ノ弦ハ小圓ノ周ニ依リテ一定ノ比ヲ有スルニツノ部分ニ分タル。

164. ニツノ相似三角形ノ對應角頂ヨリ夫々其對邊ヘ引ケルニツノ垂線ノ比ハ其任意ノ二ツノ對應邊ノ比ニ等シ。

165. ニツノ四角形ニ於テ其三ツノ角ガ夫々相等シク一雙ノ等角ヲ夾ム邊ガ相等シキ二角ノ間ノ

邊ガ對應ナル如ク比例ヲナストキハ此兩形ハ相似ナリ。

166. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊ヲ Dニ於テ截リ其外接圓ノ周ヲ Eニ於テ截ルトキハ

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

167. 梯形ノ對角線ノ交點ヲ通過シテ底邊ニ平行ナル直線ノ二邊ノ間ニ在ル部分ハ此交點ニ於テ二等分セラレ。

168. 一點ヨリ引ケル三線ガ二平行線ヲ夫々 A, B, C 及ビ A', B', C', ナル點ニ於テ截ルトキハ

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

169. C, C' ガ夫々二平行線 AB, A'B' ヲ相等シカラザル比ニ内分スル點ナルカ或ハ同ジキ比ニ外分スル點ナルトキハ AA', BB', CC' ハ一點ヲ通過ス

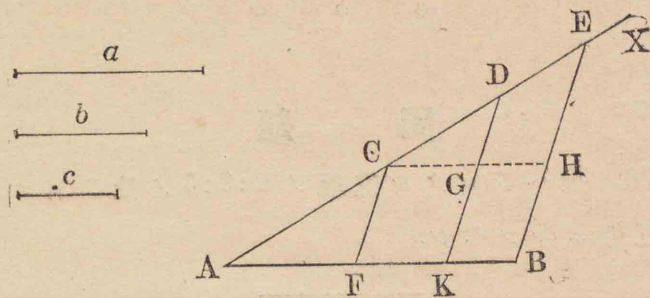
第四節

作圖題

作圖題 1

280. 與へられたる直線 AB を與へ

られたる數直線 a, b, c に比例すべき部分に分つこと。



解法 點 A ヨリ AB ト任意ノ角ヲナストコロノ直線 AX ヲ引ケ
 AX 上ニ a ニ等シク AC ヲ, b ニ等シク CD ヲ, c ニ等シク DE ヲ取り, BE ヲ引ケ
 C 及ビ D ヨリ EB ニ平行線ヲ引キ F 及ビ K ヲ AB トノ交點トセヨ
 然ルトキハ F, K ハ AB ヲ要スル如ク分ツ點ナリ。

證明 CF, DK ハ各, EB ニ平行ナルヲ以テ互ニ平行ナリ [82]

故ニ $\frac{AF}{FK} = \frac{AC}{CD} = \frac{a}{b}$ (1) [259]

C ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ G 及ビ H ヲ夫々 DK 及ビ EB トノ交點トスレバ

$$\frac{CG}{GH} = \frac{CD}{DE} \quad \text{即チ} \quad \frac{FK}{KB} = \frac{b}{c} \dots\dots(2)$$

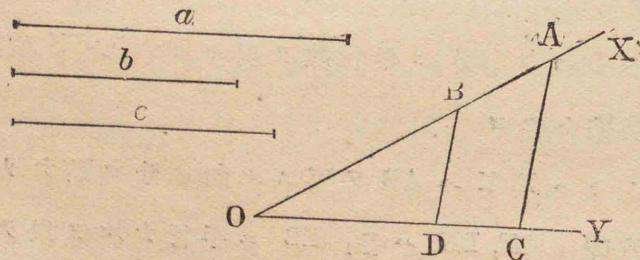
(1) 及ビ (2) ヨリ $\frac{AF}{a} = \frac{FK}{b} = \frac{KB}{c}$

問題

170. 與ヘラレタル直線ヲ 2:3:5ノ比ヲ有スル所ノ三部ニ分ツベシ.

作圖題 2

281. 三つの與ヘラレたる直線 a, b, c の第四比例項を求むること.



解法 任意ノ大サノ角 XOY ヲ作り其一邊 OX 上ニ $a =$ 等シク OA ヲ, $b =$ 等シク OB ヲ取レ 又他ノ一邊 OY 上ニ $c =$ 等シク OC ヲ取レ AC ヲ結ビ付ケ B ヨリ之ニ平行線 BD ヲ引キ, D ヲ OY トノ交點トセヨ

然ルトキハ OD ハ所要ノ直線ナリ.

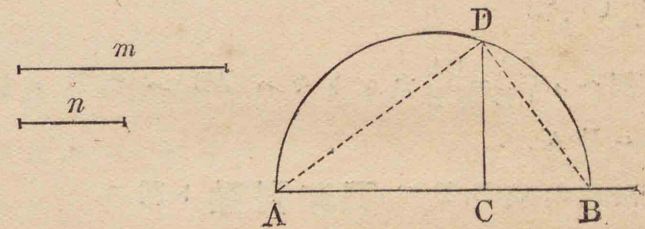
證明 BD \parallel AC ナルヲ以テ

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad \text{即チ} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{OD}$$

282. 系 二つの與ヘラレたる直線の第三比例項を求む.

作圖題 3

283. 二つの與ヘラレたる直線 m, n の間の比例中項を求むること.



解法 無限直線上 $m =$ 等シク AC ヲ, $n =$ 等シク CB ヲ取り, AB ヲ直径トシテ其上ニ半圓ヲ畫ケ C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ引キ, D ヲ之ト圓周トノ交點トセヨ.

然ルトキハ CD ハ所要ノ比例中項ナリ.

證明 AD, BD ヲ引ケ

ADB ハ半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ナリ

而シテ DC ハ AB ニ垂直ナリ

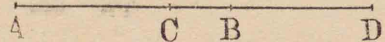
[作圖]

故ニ DC ハ AC, CB ノ比例中項ナリ

[277]

即チ $\frac{m}{DC} = \frac{DC}{n}$

284. 定義 一直線が一點に於て任意の比に内分せられ又他の一點に於て同じき比に外分せらるるときは此直線は此二點に於て調和二分タレタリといふ。



例へバ $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ ナルトキハ AB ハ C, D ニ於テ調和二分タル。

四點 A, C, B, D ヲ調和列點ト稱ス。

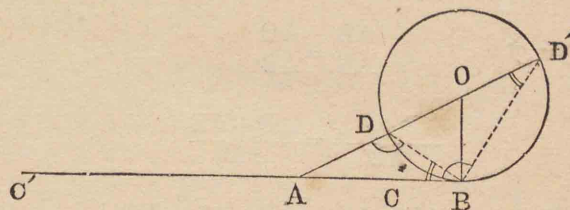
問題

171. △ABC (AB, AC ハ不等トス)ノ角 A ノ二等分線及ビ其外角ノ二等分線ハ邊 BC ヲ調和二分ツ

172. 與ヘラレタル直線ヲ 2:3 ノ如ク調和二分ツベシ

作圖題 4

285. 與ヘられたる直線 AB を内分又外分し一分線をして全線と他の一分線との比例中項に等しからしむること



解法 B ニ於テ AB ニ垂線ヲ引キ之ヨリ AB ノ半ニ等シク BO ヲ取レ O ヲ中心トシ OB ヲ半径トシテ圓ヲ畫ケ A, O ヲ通過シ一直線ヲ引キ D, D' ニ於テ圓周ト相交ハラシメヨ AB 上ニ AD ニ等シク AC ヲ取り, 又 BA ノ延長上ニ AD' ニ等シク AC' ヲ取レ

然ルトキハ C, C' ハ所要ノ點ナリ。

證明 OB ⊥ AB ナルヲ以テ AB ハ圓ノ切線ナリ。因リテ △ABD, AD'B ノ三ツノ角ハ夫々相等シ [214] 故ニ此兩形ハ相似ナリ [272]

故ニ $\frac{AD'}{AB} = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC}$ (1)

$$\text{故} = \frac{AD' - AB}{AB} = \frac{AB - AC}{AC} \quad [254]$$

$$\text{而シテ} \quad AD' - AB = AD' - DD' = AD = AC$$

$$\text{故} = \frac{AC - BC}{AB} = \frac{BC}{AC} \quad \text{即チ} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$$

故 = AB 上の点 C = 於テ要スル如ク内分セラル

$$(1) \text{ヨリ} \quad \frac{AB}{AD'} = \frac{AD}{AB} \quad [252]$$

$$\text{故} = \frac{AB + AD'}{AD'} = \frac{AD + AB}{AB} \quad [254]$$

$$\text{而シテ} \quad AB + AD' = AB + AC' = BC'$$

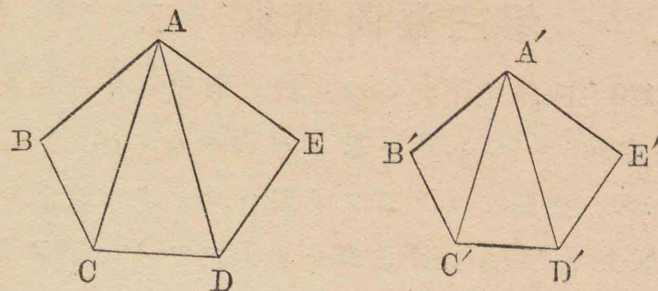
$$AD + AB = AD + DD' = AD' = AC'$$

$$\text{故} = \frac{BC'}{AC'} = \frac{AC'}{AB}$$

故 = AB 上の点 C' = 於テ要スル如ク外分セラル。

作 圖 題 5

286. 直線 A'B' 上に他の直線 AB 上の與へられたる多角形 ABCDE と相似にして此二直線が對應邊となるが如き多角形を作ること。



解法 A ヨリ對角線 AC, AD ヲ引ケ

A' ヨリ $\angle BAC =$ 等シク $\angle B'A'C'$ ヲ作レ

B' ヨリ $\angle ABC =$ 等シキ角ヲ B'A' トナス直線ヲ引キ
A'C' ト C' = 於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ $\triangle ABC, A'B'C'$ ハ相似ナリ。

又 A' ヨリ $\angle CAD =$ 等シク $\angle C'A'D'$ ヲ作レ

C' ヨリ $\angle ACD =$ 等シキ角ヲ C'A' トナス直線ヲ引キ
A'D' ト D' = 於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ $\triangle ACD, A'C'D'$ ハ相似ナリ。

同様ニ $\triangle ADE$ ト相似ニシテ且相似ノ位置ニ在ル
 $\triangle A'D'E'$ ヲ作レ。

斯ノ如クニシテ ABCDE ト相似ナル多角形
A'B'C'D'E' ヲ得

[278]

而シテ AB, A'B' ハ兩形ノ對應邊ナリ。

故ニ A'B'C'D'E' ハ所要ノ多角形ナリ。

第三編問題集ノ二

173. 直線 AB が C, D に於て調和ニ分タルトキハ直線 CD は A, B に於て調和ニ分タル。

174. 定點 A ヨリニツノ與ヘラレタル直線 OX, OY ト夫々 P, Q に於て交ハルトコロノ一線ヲ引キ $OP:OQ$ が與ヘラレタル比ニ等シクナル様ニセヨ。

175. 定點 O ヨリ一直線 OA ヲ引キ他ノ二定點 P, Q ヨリ OA ニ至ル距離ノ比が與ヘラレタル比ニ等シクナル様ニセヨ。

176. 頂角底邊及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ。[266ヲ参照セヨ]

第五節
軌跡

287. 二つの定理の中其一つの假設と終結とが夫々他の一つの終結と假設とを否定したるものなるときは此二つの定理は互に對偶なりといふ。

例ヘバ「有限直線ノ垂直二等分線上ノ點ハ其線ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ」 [6.]

ナル定理ト「有限直線ノ兩端ヨリノ距離不等ナル點ハ此直線ノ垂直二等分線上ニ在ラス」

ナル定理トハ互ニ對偶ナリ。

一定理ガ眞ナルトキハ其對偶モ亦眞ナラザル可カラズ。

288. 定義 或線あり其上に在る點は總て或與ヘられたる要件に適し而して其線外には此要件に適する點なきときは其線を此要件に適する點の軌跡と稱す。

例ヘバコゝニ一ツノ圓アリ其中心ヲ O トシ其半径ヲ a トスレバ其周上ノ點ハ總テ O ヨリ a ナル距離ニ在リ而シテ他ニハ a ナル距離ノ點ナシ故ニ

圓周は一定點より一定の距離に在る點の軌跡なり。

又有限直線 AB ノ垂直二等分線ナル MN 上ノ總テノ點ハ兩端 A, B ヨリ等距離ニ在リ而シテ MN 外ニハ A, B ヨリ等距離ノ點ナシ。故ニ

有限直線の垂直二等分線は其兩端より等距離なる點の軌跡なり。

289. 或線(L)が或與へられたる要件(A)に適する點の軌跡なりといふことを得るには下の二定理を證明するを要す。

(1) 線 L 上に在る總ての點は要件 A に適す。

(2) 線 L 上に在らざる點は要件 A に適せず。

又は(2)の代りに其對偶(3)を取り(1)及び(3)の二定理を證明するも可なり。

(3) 要件 A に適する點は線 L 上に在り。

又は(3)及び(1)の對偶(4)を證明するも可なり。

(4) 要件 A に適せざる點は線 L 上に在らず。

軌 跡 1

290. 與へられたる直線 AB より a

なる一定の距離に在る點の軌跡は線 AB の兩側に於て之より a なる距離に在る一雙の平行直線 MN, PQ なり。

前節ニ述ベタル

(1) 及び (2) ニ依リテ之ヲ證明セントス。

證明 K ヲ MN,

PQ 中ノ一ツナル MN

上ノ任意ノ一點トシ

K ヲリ AB へ垂線 KH ヲ引ケ

然レバ

$$KH = a$$

即チ點 K ハ AB ヲリ a ニ等シキ距離ニ在リ

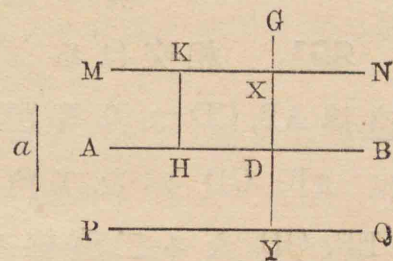
因リテ MN, PQ 上ノ總テノ點ハ AB ヲリ a ニ等シキ距離ニ在リ。[之ヲ(1)ノ證明トス]

次ニ G ヲ MN 及び PQ 外ノ任意ノ一點トセヨ

G ヲリ AB へ垂線 GD ヲ引キ GD 及び其延長ヲシテ MN, PQ ト夫々 X, Y ニ於テ交ハラシメヨ

然レバ $DX = a$, $DY = a$ ナルヲ以テ DG ハ a ニ等シカラズ即チ點 G ヲリ AB ニ至ル距離ハ a ニ等シカラズ

故ニ MN 及び PQ 外ニハ AB ニ至ル距離ガ a ニ等シキ點ナシ。[之ヲ(2)ノ證明トス]



故ニ AB ヨリ a = 等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ MN, PQ ナル一雙ノ平行直線ナリ.

軌 跡 2

291. 相交はる二つの與へられたる直線 AB, CD より等距離に在る點の軌跡は AB, CD がなす角を二等分する所の EF, GH なる二直線なり

[289] = 述べタル(3)及ビ(4)ニ依リテ之ヲ證明セントス.

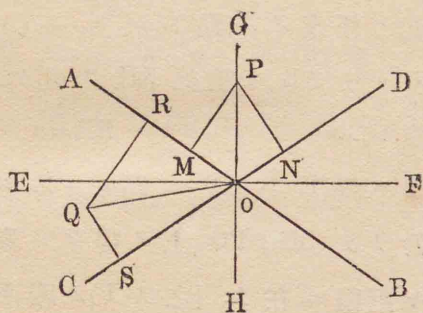
證明 Pヲ AB, CD ヨリ等距離ナル任意ノ一點トシ P

ヨリ AB ニ垂線 PM ヲ引キ CD ニ垂線 PN ヲ引ケ然レバ PM = PN [假設] PO ヲ結ビ付ケヨ

然レバ $\triangle POM \equiv \triangle PON$ [113]

故ニ $\angle POM = \angle PON$

二點 M, N ハ必ズ OP ノ反對ノ側ニ在リ如何トナレバ若シ M, N ガ OP ノ同側ニ在リトスレバ



$\angle POM = \angle PON$ ニアラズシテ $\angle POM \sim \angle PON = \angle MON$ ナルベケレバナリ]

故ニ PO ハ角 AOD ノ二等分線ナル GH ト同一ノ直線上ニ在リ

即チ AB, CD ヨリ等距離ナル任意ノ點 P ハ此二線ノ爲ス角ノ二等分線上ニ在リ

因リテ AB, CD ヨリ等距離ナル總テノ點ハ EF 或ハ GH ノ上ニ在リ. [之ヲ(3)ノ證明トス]

次ニ Qヲ AB, CD ヨリ等距離ナラザル任意ノ點トシ Q ヨリ AB ニ垂線 QR ヲ引キ CD ニ垂線 QS ヲ引キ QO ヲ結ビ付ケヨ

然レバ QO ハ角 AOC ヲ二等分セズ如何トナレバ若シ QO ガ角 AOC ヲ二等分スレバ

$$\triangle QOR \equiv \triangle QOS \quad [112]$$

ニシテ QR = QS

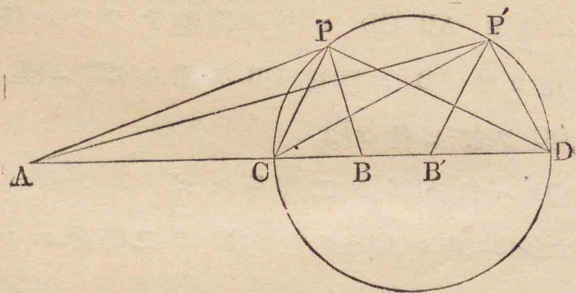
是假設ニ合ハズ

故ニ AB, CD ヨリ等距離ニアラザル任意ノ點 Q ハ此二線ノナス角ノ二等分線上ニ在ラズ. [之ヲ(4)ノ證明トス]

故ニ與ヘラレタル要件ニ適スル點ノ軌跡ハ GH, EF ナル二直線ナリ.

軌 跡 3

292. 二つの與へられたる點よりの距離の比が與へられたる比(等比にあらざる)に等しき點の軌跡は此二點を結び付くる直線を其比に調和に分ちたる二つの分點の間の線を直徑として畫きたる圓周なり。



A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル點トシ $m:n$ ヲ與ヘラレタル比トシ $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$ ナリトセヨ
 然ルトキハ A, B ヨリノ距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ナル點ノ軌跡ハ CD ヲ直徑トセル圓周ナリ
 [289] = 述べタル(3)及ビ(1)ニ依リテ之ヲ證明セントス。

證明 P ヲ A, B ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ ニ等シキ任意ノ一點トシ AP, BP, CP, DP ヲ引ケ

然レバ $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC} \quad \frac{AP}{BP} = \frac{AD}{BD}$

故ニ PC ハ $\triangle APB$ ノ一角 APB ヲ二等分シ, PD ハ其外角ヲ二等分ス [287] [269]

故ニ $\angle CPD$ ハ直角ナリ

故ニ點 P ハ CD ヲ直徑トセル圓周上ニ在リ

[\because 若シ P ガ此圓外ニ在レバ $\angle CPD < R.\angle$

若シ其内ニ在レバ $\angle CPD > R.\angle$ ナレバナリ]

[之ヲ(3)ノ證明トス]

次ニ此圓周上ニ任意ノ一點 P' ヲ取リ AP', CP' DP' ヲ引ケ

$\angle AP'C$ ニ等シク $\angle CP'B'$ ヲ CP' ノ反對ノ側ニ取リ B' ヲ P'B' ト AD トノ交點トセヨ

然レバ CP' ハ $\angle AP'B'$ ヲ二等分シ而シテ $\angle CP'D$ ハ直角ナルヲ以テ P'D ハ $\triangle AP'B'$ ノ一角 AP'B' ノ外角ヲ二等分ス

故ニ $\frac{AC}{B'C} = \frac{AD}{B'D}$ [266] [268]

故ニ $\frac{AC}{AD} = \frac{B'C}{B'D}$ [253]

然ルニ $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ [假設]

故ニ $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD}$

因リテ $\frac{B'C}{B'D} = \frac{BC}{BD}$

$$\text{故} = \frac{B'C+B'D}{B'D} = \frac{BC+BD}{BD} \quad [254]$$

$$\text{即チ} \quad \frac{CD}{B'D} = \frac{CD}{BD}$$

$$\text{故} = \quad B'D=BD$$

故 = B' ハ B = 合ス

故 = P'C ハ 角 AP'B ヲ二等分ス

$$\text{故} = \quad \frac{AP'}{BP'} = \frac{AC}{BC} = \frac{m}{n} \quad [266]$$

[之ヲ(1)ノ證明トス]

故 = A, B ヨリノ距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ナル點ノ軌跡ハ CD ヲ直径トセル圓周ナリ

軌跡問題

177. 下ノ定理ヲ[289]ノ(1)及ビ(3)ニ依リテ證明セヨ. ニツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此二點ヲ結ビ付クル直線ノ垂直二等分線ナリ.

178. [291]ノ定理ヲ(1)ト(3)トニ依リテ證明セヨ.

179. 同上ノ定理ヲ(1)ト(2)トニ依リテ證明セヨ.

180. 一ツノ與ヘラレタル有限直線ヲ底邊トセル二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

181. 定點 O ヨリ引ケル直線 OA ノ一端 A ハ常ニ此點ヲ通過セザル一定直線上ニ在リ. OA ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

182. ニツノ定點ヲ通過スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

183. 相交ハルニツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

184. 與ヘラレタル直線ヲ底邊トシ其同シ側ニ於テ與ヘラレタル角ニ等シキ頂角ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ此直線ヲ弦トセル圓弧ナリ.

185. P ハ與ヘラレタル圓弧 APB 上ノ任意ノ點ナリ AP ヲ Q マデ延長シ PQ ヲ PB ニ等シク取ル. 然レバ點 Q ノ軌跡ハ一ツノ圓弧ナリ.

186. 一點ヨリニツノ與ヘラレタル平行線ノ各ニ至ル距離ノ和ガ一定ノ長サニ等シキトキ其點ノ軌跡ヲ求ム.

187. 與ヘラレタル圓ニ於テ一定ノ長サヲ有スル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム

188. 直角ニ相交ハルニツノ與ヘラレタル直線上ニ常ニ兩端ヲ置ク所ノ與ヘラレタル長サノ直線ノ中點ノ軌跡ハ一圓周ナリ.

189. 一定點 A ヲ通過スル所ノ直線ガ一ツノ與ヘラレタル圓周ヲ二點 B, C ニ於テ截ル. 弦 BC ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

190. 一點ヨリニツノ與ヘラレタル平行線ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル比等比ニアザル)ニ等シキトキ其點ノ軌跡ヲ求ム.

第四編

面積

第一節

面積の比 多角形の面積

293. 定義 平面形の其境界内なる場所の廣さを其面積と稱す。

以下本編ニ於テニツノ平面形ノ比トイヒ又ハニツノ平面形相等シトイフガ如キハ皆其面積ニ付キテイフモノトス。

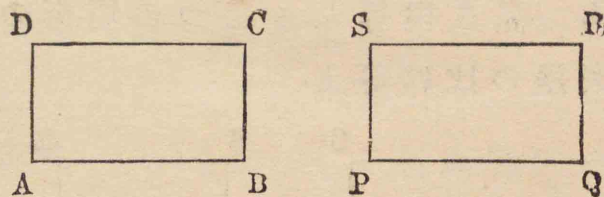
294. 定義 平行四邊形の何れの邊をも其底邊と稱することを得。底邊及び其對邊の間の垂直距離を其高サと稱す。

矩形に於ては其一邊を底邊とすれば其隣邊は高さなり。

295. 定義 梯形の平行邊の間の垂直距離を其高さとして稱す。

定理 I

296. 二つの矩形に於て其底邊と高さが夫々相等しければ此二つの矩形は全く相等し。



ニツノ矩形 ABCD, PQRS ニ於テ

$$AB=PQ \quad AD=PS \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\square ABCD = \square PQRS$$

證明 $\square ABCD$ ヲ取り之ヲ $\square PQRS$ ノ上ニ重ネ邊 AB ヲ之ニ等シキ邊 PQ ノ上ニ置キ角 A ヲ角 P ニ重ヌレバ AD ハ PS ニ重ナリ點 D ハ點 S ノ上ニ落ツ

同様ニ BC ハ QR ニ重ナリ點 C ハ點 R ノ上ニ落ツ故ニ DC ハ SB ニ合ス

即チニツノ矩形ハ相合ス

故ニ兩形全ク相等シク面積モ亦相等シ

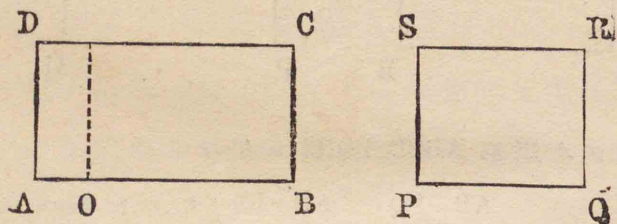
297. 系 一邊が夫々相等しき二つ

の正方形は相等し。

逆に相等しき二つの正方形の邊は相等し。

定理 2

298. 高さ相等しき二つの矩形の比は其底邊の比に等し。



ニツノ矩形 AC, PR = 於テ高サ AD, PS 相等シケレバ

$$\frac{\square AC}{\square PR} = \frac{AB}{PQ}$$

證明 AO ヲ底邊 AB, PQ ノ公約量トシ

$$AB = mAO, PQ = nAO \quad \text{トスレバ}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{m}{n}$$

AB ヲ m 等分シ PQ ヲ n 等分シ而シテ各分點ニ於テ AB, PQ へ垂線ヲ引ケ然レバ $\square AC$ ハ m 箇ノ矩形ニ分タレ

$\square PR$ ハ n 箇ノ矩形ニ分タル

而シテ此等ノ矩形ハ皆相等シ

[298]

$$\text{故ニ} \quad \frac{\square AC}{\square PR} = \frac{m}{n}$$

$$\text{因リテ} \quad \frac{\square AC}{\square PR} = \frac{AB}{PQ}$$

299. 系 底邊相等しき二つの矩形の比は其高さの比に等し。

300. A, B 及び C が皆同種類の量にして

$$\frac{A}{B} = m \quad \frac{B}{C} = n \quad \text{なれば}$$

$$\frac{A}{C} = mn$$

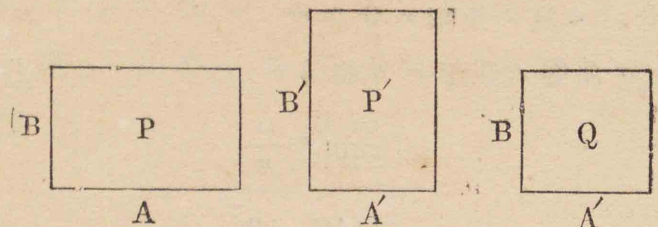
如何トナレバ $A = B \times m \quad B = C \times n$

$$\text{故ニ} \quad A = C \times n \times m = C \times mn$$

$$\text{即チ} \quad \frac{A}{C} = mn$$

定理 3

301. 二つの矩形の比は其底邊の比と高さの比との積に等し。



P, P' ノニツノ矩形トシ A, A' 及ビ B, B' ノ夫々
其底邊及ビ高サトスレバ

$$\frac{P}{P'} = \frac{A}{A'} \times \frac{B}{B'}$$

證明 底邊ハ A' ニ等シク高サハ B ニ等シキ
矩形 Q ノ作レ

然レバ $\frac{P}{Q} = \frac{A}{A'}$ [298]

$\frac{Q}{P'} = \frac{B}{B'}$ [299]

故ニ $\frac{P}{P'} = \frac{A}{A'} \times \frac{B}{B'}$ [300]

302. 系 二つの正方形の比は其各
邊の比の平方に等し。

303. A, A', B, B' ノ表ハス數同一ナル長サノ單
位ニテ之ヲ計ルトキ表ハス所ノ數價ヲ夫々 a, a', b,
b' トスレバ

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'} \quad \frac{B}{B'} = \frac{b}{b'} \quad [249]$$

故ニ $\frac{P}{P'} = \frac{ab}{a'b'}$ [301]

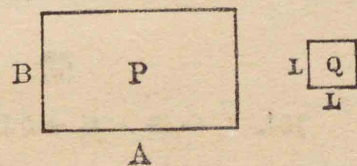
定理 4

304. 長さの單位に等しき一邊を有
する正方形の面積を面積の單位とすれ
ば矩形の面積を表はす數は其底邊の長
さを表はす數と高さを表はす數との積
に等し。

通常上ノ定理ヲ下ノ如ク略述ス

矩形の面積は其底邊と高さとの積
に等し。

P ノ一ツノ矩形ト
シ其底邊 A 及ビ高サ B
ヲ同一ノ長サノ單位 L
ニテ計ルトキ之ヲ表ハ
ス所ノ數ヲ夫々 a, b トセヨ 即チ $A = aL$ $B = bL$ ト
セヨ



又各邊ガ L ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位 Q トシ
此 Q ニテ P ノ計ルトキ之ヲ表ハス數ヲ m トセヨ
即チ $P = mQ$ トセヨ

然ルトキハ

$$m=ab$$

證明

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{L} \times \frac{B}{L} \quad [301]$$

然ルニ

$$\frac{P}{Q} = m \quad \frac{A}{L} = a \quad \frac{B}{L} = b$$

故ニ

$$m=ab$$

305. 系 正方形の面積を表はす數は其一邊の長さを表はす數の平方に等し。

之ヲ略述スレバ

正方形の面積は其一邊の平方に等し。

問題

191. 一邊ノ長サ5.12尺ナル正方形ノ面積ハ幾何平方寸ナルカ. (答 2621.44 平方寸)

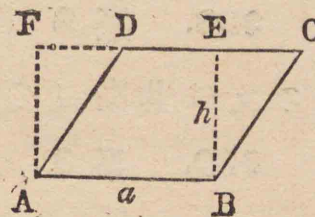
192. 面積 4.6225 平方「メートル」ナル正方形ノ一邊ハ幾尺ナルカ. (答 7.095 尺)

193. 矩形アリ其周圍 25 間ニシテ底邊ハ高サヨリ三間半長シ. 底邊高サ及ビ面積ヲ計算セヨ. (答 8.25 間, 4.75 間, 39.1875 坪)

定理 6

306. 平行四邊形は其底邊と高さとの積に等し。

ABCD ヲ平行四邊形トシ其底邊ノ長サ高サ及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 a, h, m トスレバ



[304]ニ於テノ如ク單

位ヲ定メテ) $m=ah$

證明 底邊 AB ノ兩端ヨリ之ニ垂線ヲ引キ對邊 CD 及ビ其延長ト夫々 E 及ビ F ニ於テ出會ハシメ
 然ルトキハ ABED ハ平行四邊形 ABCD ト AB ナル同ジ底邊及ビ BE ナル同ジ高サヲ有スル矩形ナリ。

ニツノ直角三角形 BCE, ADF ハ $BC=AD, BE=AF$ ナルヲ以テ全等ナリ [113]

今全圖形 ABCF ヨリ三角形 BCE ヲ取り去レバ矩形 ABED 殘リ

又同ジ全圖形ヨリ三角形 ADF ヲ取り去レバ平行四邊形 ABCD 殘ル

故ニ $\square ABCD = \square ABED$

然ルニ $\square ABCE$ ノ面積ハ ah ナリ [304]
 故ニ $\square ABCD$ ノ面積 $=m=ah$

307. 系 1 底邊及び高さ相等しき
 平行四邊形は相等し。

308. 系 2 底邊等しき平行四邊形
 の比は其高さの比に等し。

309. 系 3 高さ相等しき平行四邊
 形の比は其底邊の比に等し。

310. 系 4 二つの平行四邊形の比
 は其底邊と高さとの積の比に等し。

問題

194. 同底邊同面積ニシテ異ナル形ノ若干ノ平
 行四邊形ヲ作レ。

195. 同面積ノ正方形ト菱形トアリ其高サノ比
 ガ4:1ナレバ其周ノ比ハ如何。

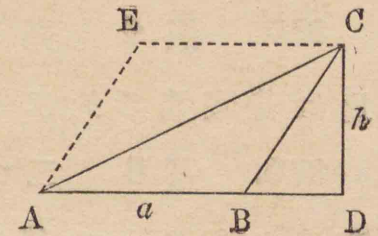
196. 與ヘラレタル平行四邊形ヲ其一邊ニ平行
 ニ引ケル直線ヲ以テ 2:3 ナル比ヲ有スルニツノ部
 分ニ分ツベシ。

定理 6

311. 三角形は其底邊と高さとの積
 の半に等し。

三角形 ABC ノ底邊
 ノ高サ及び面積ヲ夫々
 a, h 及び m トスレバ

$$m = \frac{1}{2}ah$$



證明 A ヨリ BC ニ平行線ヲ引キ

又 C ヨリ BA ニ平行線ヲ引キ AE ト點 E ニ於テ相
 交ハラシメヨ

然レバ $ABCE$ ハ $\triangle ABC$ ト AB ナル同底邊及び CD ナ
 ル同高ヲ有スル平行四邊形ナリ

而シテ AC ハ其對角線ナルヲ以テ

$$\triangle ABC = \triangle AEC = \frac{1}{2} \square ABCE$$

然ルニ $\square ABCE$ ノ面積 $= ah$ [306]

故ニ $\triangle ABC$ ノ面積 $= m = \frac{1}{2}ah$

312. 系 1 三角形は之と等しき底
 邊及び高さの平行四邊形の半に等し。

313. 系 2 底邊及び高さ相等しき

三角形は相等し.

314. 系 3 底邊相等しき三角形の比は其高さの比に等し.

315. 系 4 高さ相等しき三角形の比は其底邊の比に等し.

316. 系 5 二つの三角形の比は其底邊と高さとの積の比に等し.

問題

197. 直角ヲ夾ム二邊ノ和ガ二尺ニシテ其一ハ他ノ一ノ一倍半ナル直角三角形ノ面積ヲ求ム.

(答 48 平方寸)

198. 三角形ノ一中線ハ之ヲ二等分ス.

199. 三角形ヲ其一頂點ヨリ引ケル直線ヲ以テ若干ニ等分セヨ.

200. 平行四邊形ノ二對角線ハ之ヲ相等シキ四ツノ三角形ニ分ツ.

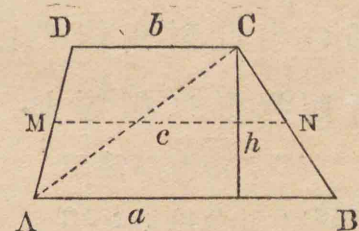
201. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クルトキ生ズル三角形ノ原形ニ對スル比ヲ問フ.

定理 7

317. 梯形は其平行邊の和の半と高さとの積に等し.

a, b 及ビ h ヲ夫々梯形 ABCD ノ平行邊及ビ高さトシ m ヲ其面積トスレバ

$$m = \frac{h}{2}(a+b)$$



證明 對角線 AC ヲ引ケ

$$\text{然ルトキハ } \triangle ABC \text{ ノ面積} = \frac{1}{2}ah \quad [311]$$

$$\triangle ACD \text{ ノ面積} = \frac{1}{2}bh \quad [311]$$

而シテ 梯形 ABCD = $\triangle ABC + \triangle ACD$

$$\text{故ニ } m = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}h(a+b)$$

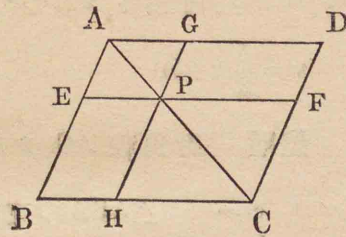
318. 系 梯形の平行ならざる二邊の中點を結び付くる直線 MN の長さを

$$c \text{ とすれば } m = ch$$

定理 8

319. 平行四邊形の對角線上の一點を通過し二隣邊に平行に引ける二直線が原形を分ちて得たる四つの平行四邊形の中此對角線の兩側に在る二つの平行四邊形は相等し.

ACヲ平行四邊形 ABCDノ對角線トシAC上ノ一點Pヲ通過シ二隣邊ニ平行ナル直線 EF, GHヲ引キ之ヲ



四ツノ平行四邊形ニ分チタリトス

然ルトキハ AC ノ兩側ニ在ルニツノ平行四邊形 BP, DP ハ相等シ.

證明 平行四邊形ハ其一對角線ニ依リテ二等分セラレルヲ以テ

$$\triangle ABC = \triangle ADC \dots\dots\dots(1)$$

$$\triangle AEP = \triangle AGP \dots\dots\dots(2)$$

$$\triangle PHC = \triangle PFC \dots\dots\dots(3)$$

(2) ト (3) トノ和ヲ (1) ヨリ減ズレバ

$$\square BP = \square DP$$

320. 或る二直線に等しき二隣邊を有する矩形を此二直線の包ム矩形と稱す.

二直線 AB 及ビ CD ノ包ム矩形ヲ
AB.CD

ナル記號ヲ以テ表ハス.

或る一直線に等しき邊を有する正方形を此直線の上の正方形と稱す.

直線 AB ノ上ノ正方形ヲ
AB²

ナル記號ヲ以テ表ハス.

321. 注意 若シ a, b ヲ矩形ノ底邊ト高サトノ數價トスレバ其乘積 ab ハ其面積ノ數價ヲ表ハシ a ヲ正方形ノ一邊ノ數價トスレバ其平方 a² ハ其面積ノ數價ヲ表ハスコトハ前ニ述ベタルガ如シ

然レドモ AB.CD ハ上述ノ如ク矩形ノ面積ヲ表ハス一ツノ記號ニシテ二因數ノ乘積ニアラズ又 AB² ハ正方形ノ面積ヲ表ハス一ツノ記號ニシテ一數ノ平方ニアラズ. 即チ前者ハ代數學上ノ乘積ニシテ後者ハ幾何學上ノ圖形ノ面積ナリ 學生ハ彼ト此トヲ混同セザル様注意スルヲ要ス

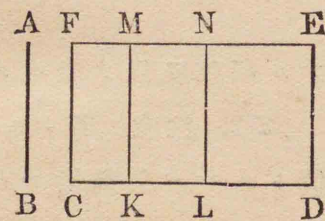
然ルニ今若シ AB ガ a 寸, CD ガ b 寸ナレバ

AB, CD = ab 平方寸 AB² = a² 平方寸
 ナルガ如キ關係アルガ故ニ代數學ト幾何學トノ一
 方ニ於ケル或定理ニ對應スル定理ヲ他ノ一方ニ於
 テ有スルコト尠カラズ。

定理 9

322. 二つの直線の包む矩形は其一
 と他の一を分ちたる諸部分との包む矩
 形の和に等し。

AB, CD ヲ二ツノ與
 ヘラレタル直線トシ
 CD ヲ二點 K, L ニ於テ
 三分シタリトス
 然ルトキハ



AB · CD = AB · CK + AB · KL + AB · LD

證明 直線 CD 上ニ矩形 CE ヲ作り
 CF = AB トセヨ
 二點 K, L ヨリ CD ニ垂線 KM, LN ヲ引ケ
 然レバ CM = AB · CK KN = AB · KL LE = AB · LD
 而シテ CE = CM + KN + LE
 故ニ AB · CD = AB · CK + AB · KL + AB · LD

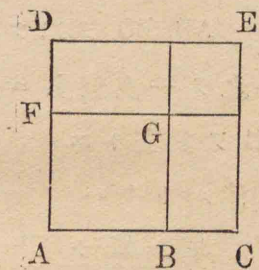
323. 系 一つの直線を二分すれば

其一部分と全線との包む矩形は此部分
 の上の正方形及び二つの部分の包む矩
 形の和に等し。

定理 10

324. 二つの直線の和の上の正方形
 は各線上の正方形の和に二つの直線の
 包む矩形の二倍を加へたるものに等し。

AB, BC ヲ二ツノ直線ト
 シ之ヲ一直線上ニ置キ AC
 ヲ其和トス
 然ルトキハ



AC² = AB² + BC² + 2AB · BC

證明 AC 上ニ正方形

△E ヲ作レ
 一邊 AD 上ニ AB ニ等シク AF ヲ取リ
 B ヨリ AC ニ垂線ヲ引キ又 F ヨリ AD ニ垂線ヲ引
 キ點 G ニ於テ相交ハラシメヨ
 然レバ AG = AB² GE = BC²
 CG = AB · BC = DG
 而シテ AE = AG + GE + CG + DG

即チ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC$

325. 系 一つの直線上の正方形は
其半の上の正方形の四倍なり。

定理 11

325. 二つの直線の差の上の正方形
は各線上の正方形の和より二つの直線
の包む矩形の二倍を減じたるものに等
し。

AB, BC ヲ二ツノ直線ト
シ之ヲ一直線上ニ重ネ置キ
AC ヲ其差トス

然ルトキハ

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC$$

證明 AC 上ニ正方形

AE ヲ作レ

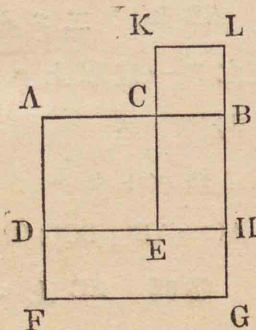
一邊 AD ノ延長上ニ AB ニ等シク AF ヲ取り

B ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ 又 F ヨリ AF ニ垂線ヲ
引キ點 G ニ於テ相交ハラシメヨ

DE ヲ延長シ點 H ニ於テ BG ニ交ハラシメヨ

BC 上ニ正方形 BK ヲ AFGB ノ外ニ作レ

BL, BH ハ同一ノ點 B ニ於テ AB ニ垂直ナルヲ以テ



同一直線上ニ在リ

同様ニ CK, CE ハ同一直線上ニ在リ

然レバ $AG = AB^2$ $DG = AB \cdot BC = HK$

而シテ $AE = AG + BK - DG - HK$

即チ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC$

定理 12

327. 二つの直線上の正方形の差は
此二つの直線の和及び差の包む矩形に
等し。

AB, BC ヲ二ツノ直線トシ
 $AB > BC$ トス

然ルトキハ

$$AB^2 - BC^2 = (AB + BC) \cdot (AB - BC)$$

證明 AB, BC ヲ一直線上

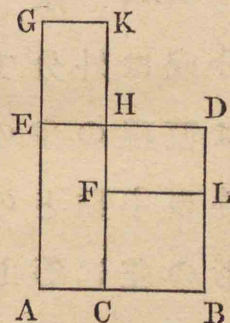
ニ重ネ置キ AC ヲ其差トセヨ

AB 上ニ正方形 AD ヲ作リ

又 BC 上ニ正方形 BE ヲ作リ D ト E トヲ AB ノ同ジ
側ニ在ラシメヨ

AE ノ延長上ニ BC ニ等シク EG ヲ取レ

CF ヲ延長シ H ヲ ED トノ交點トシ HK ヲ BC ニ等
シク取リ



GKヲ結び付ケヨ

BL及ビBDハ同一ノ點Bニ於テABニ垂直ナルヲ

以テ同一直線上ニ在リ

四邊形EK,FDハ何レモ矩形ニシテ且ツ相等シ.

[學生自ラ之ヲ證明セヨ]

故ニ $AH + FD = AH + EK = AK$

$= AG \cdot AC = (AB + BC) \cdot (AB - BC)$

然ルニ $AD - CL = AH + FD$

故ニ $AB^2 - BC^2 = (AB + BC) \cdot (AB - BC)$

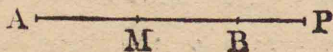
328. 系 直線を任意の點に於て内分或は外分すれば其二分線の包む矩形は直線の半の上の正方形及び分點と直線の中點との間に在る部分の上の正方形の差に等し.

Pヲ直線ABヲ内

分或ハ外分シタル點ト

シMヲABノ中點トス

レバ



$AP = AM + MP$ $BP = AM - MP$

故ニ $AP \cdot BP = AM^2 - MP^2$

問題

202. 定理10,11及ビ12ハ代數學ノ如何ナル定理ニ對應スルカラ示セ.

203. 一定ノ長サノ周ヲ有スル總テノ矩形ノ中正方形ハ最大ナリ.

[上ノ系ニ依リテ及ビ之ニ依ラズシテ

特ニ圖形ヲ畫キテ之ヲ證明セヨ]

定理 13

329. 直角三角形の斜邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和に等し.

ABCヲ角

BACガ直角ナル

直角三角形トス

レバ

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

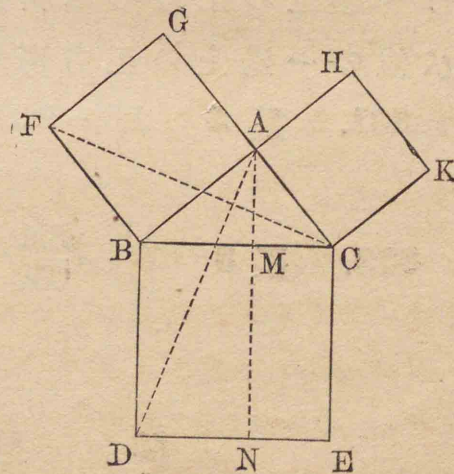
證明 AB,

BC, CA上ニ夫々

正方形AF, BE,

CHヲ作レ

AヨリBDニ平行線



AMNヲ引キAD,CFヲ結ビ付ケヨ
 BAC, BAGハ各,直角ナルヲ以テAC, AGハ同一直線
 上ニ在リ

故ニ 正方形 AF = 2△CFB [312]

又 矩形 BN = 2△ABD [307]

然ルニ △CFB = △ABD [106]

[∵ BC = BD BF = AB ∠CBF = ∠ABD]

故ニ 正方形 AF = 矩形 BN

同様ニ 正方形 CH = 矩形 CN

故ニ 正方形 BE = BN + CN = AF + CH

即チ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

330. 系1 直角三角形の直角を含む一辺上の正方形は斜邊上の正方形及び他の一辺上の正方形の差に等し.

331. 系2 $AB^2 = BC \cdot BM$

[329]ノ圖ヲ見ヨ

332. 系3 $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BM}{CM}$ [全上]

問題

204. 正方形ノ對角線上ノ正方形ハ原形ノ二倍

ナリ.

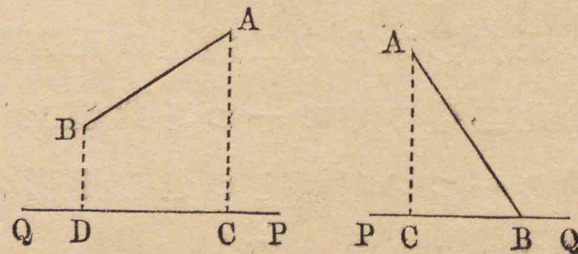
205. 正方形ノ一邊ノ數價ガ a ナレバ其對角線ノ數價ハ $a\sqrt{2}$ ナリ

206. 四邊形 ABCD ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$

207. 菱形ノ對角線ガ16米突及ビ30米突ナレバ其一邊ハ何米突ナルカ.

208. 正三角形ノ一邊ノ長サガ a 尺ナレバ其高サハ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 尺, 面積ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方尺ナリ.

333. 定義 有限直線が他の直線上に投ずる射影とは其有限直線の兩端より後の直線へ引ける垂線の足の間に在る後の直線の部分なり.



例へば有限直線 AB ノ 兩端 A, B ヨリ他ノ一直線 PQ へ垂線ヲ引キ C, D ニ於テ之ニ出會ハシムレバ CD ハ AB ガ PQ 上ニ投ズル射影ナリ。

若シ AB ノ一端 B ガ PQ 上ニ在ルトキハ其射影ハ BC ナリ。

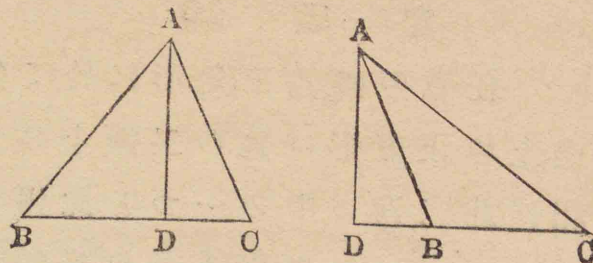
問題

209. $AB \parallel PQ$ ナルトキハ其射影如何又 $AB \perp PQ$ ナルトキハ如何。

210. 平行ニシテ且相等シキ二直線ガ同一直線上ニ投ズル射影ハ相等シ。

定理 14

334. 任意の三角形に於て鋭角の對邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和より此二邊の中の一つと此邊上に投ずる他の一つの射影との包む矩形の二倍を減じたるものに等し。



三角形 ABC ニ於テ角 ACB ヲ鋭角トシ OD ヲ邊 AC ガ邊 BC 上ニ投ズル射影トスレバ

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CD \dots \dots (1)$$

證明 若シ ABC ガ直角ナレバ AC ガ BC 上ニ投ズル射影ハ BC トナルヲ以テ $BC \cdot CD$ ハ BC^2 トナリ (1) ハ $AB^2 = CA^2 - BC^2$ トナル

是 [330] ニ依リテ既ニ知ル所ナリ。

若シ ABC ガ直角ナラザレバ

$BD = BC - DC$ ナルヲ以テ

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot DC \quad [326]$$

方ニ AD^2 ヲ加フレバ

$$BD^2 + AD^2 = BC^2 + DC^2 + AD^2 - 2BC \cdot DC$$

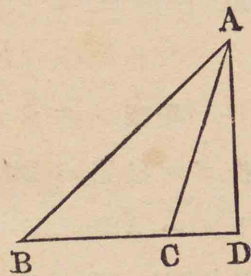
$$\text{然ルニ } \left. \begin{aligned} BD^2 + AD^2 &= AB^2 \\ DC^2 + AD^2 &= AC^2 \end{aligned} \right\} \quad [329]$$

$$\text{故ニ } AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot DC$$

定理 15

335. 任意の鈍角三角形に於て鈍角の對邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和に此二邊の中の一つと此邊上に投ずる他の一つの射影との包む矩形の二倍を加へたるものに等し。

三角形 ABC = 於テ角 ACB
ヲ鈍角トシ CD ヲ邊 AC ガ邊
BC 上ニ投ズル射影トスレバ
 $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC \cdot CD$
證明 BD = BC + CD ナル



ヲ以テ

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD \quad [324]$$

雙方ニ AD² ヲ加フレバ

$$BD^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2 + AD^2 + 2BC \cdot CD$$

$$\text{然ルニ } \left. \begin{array}{l} BD^2 + AD^2 = AB^2 \\ CD^2 + AD^2 = AC^2 \end{array} \right\} \quad [329]$$

故ニ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \cdot CD$

336. 系 三角形 ABC に於て

① $BC^2 > AB^2 + AC^2$ ならば角 A は鈍角なり

② $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ならば角 A は直角なり

③ $BC^2 < AB^2 + AC^2$ ならば角 A は鋭角なり。

問題

211. 三角形アリ其三邊ガ 8, 11, 15 ナルトキハ其一角ハ鈍角ナルベシ

212. 三邊ノ長サガ $x^2 - 1, 2x, x^2 + 1$ ナル式ヲ以テ表ハサルベキ三角形ハ直角三角形ナリ。

213. 前問ニ於ケル $x =$ 逐次 $\frac{3}{2}, 2, 3$ ナル値ヲ與ヘテ三ツノ直角三角形ノ邊ノ長サヲ求メヨ

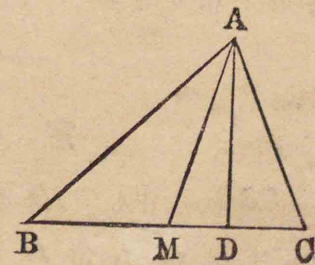
定理 16

337. 三角形の二邊の上の正方形の和は底邊の半の上の正方形及び頂點より引ける中線上の正方形の和の二倍なり。

三角形 ABC = 於テ AM
ヲ頂點 A ヨリ引ケル中線ト
スレバ

$$AB^2 + AC^2 = 2BM^2 + 2AM^2$$

證明 若シ $AM \perp BC$



ナレバ本定理ハ[329]=依リテ明カナリ。

若シ $AM \perp BC$ ナラザレバ角 AMB ヲ鈍角トシ, AD ヲ A ヨリ BC へ引ケル垂線トセヨ

然レバ MD ハ中線 AM ガ BC 上ニ投ズル射影ナリ

因リテ $AB^2 = BM^2 + AM^2 + 2BM \cdot MD \dots\dots(1)$ [335]

$AC^2 = CM^2 + AM^2 - 2CM \cdot MD \dots\dots(2)$ [334]

$BM = CM$ ナルヲ以テ

$BM^2 = CM^2 \quad BM \cdot MD = CM \cdot MD$

故ニ(1)及ビ(2)ヲ加フレバ

$AB^2 + AC^2 = 2BM^2 + 2AM^2$

問題

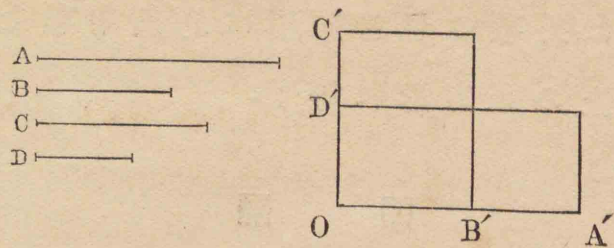
214. 平行四邊形ノ各邊上ノ正方形ノ和ハ其對角線上ノ正方形ノ和ニ等シ

215. 四邊形ノ二雙ノ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ和ノ二倍ハ二ツノ對角線上ノ正方形ノ和ニ等シ。

定理 17

338. 四つの直線が比例をなすときは其外項の包む矩形は内項の包む矩形

に等し。



A, B, C, D ナル四ツノ直線アリ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

ナルトキハ $A \cdot D = B \cdot C$

證明 直角 O ヲ作り其一邊上ニ A ニ等シク OA' ヲ取り B ニ等シク OB' ヲ取レ
又他ノ一邊上ニ C ニ等シク OC' ヲ取り D ニ等シク OD' ヲ取レ

A', B', C', D' ヨリ直線ヲ引キ矩形 $A'D', B'C'$ ヲ作レ

然レバ $\left. \begin{aligned} \frac{A'D'}{B'D'} &= \frac{OA'}{OB'} = \frac{A}{B} \\ \frac{B'C'}{B'D'} &= \frac{OC'}{OD'} = \frac{C}{D} \end{aligned} \right\} [298]$

然ルニ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ [假設]

故ニ $\frac{A'D'}{B'D'} = \frac{B'C'}{B'D'}$

故ニ $A'D' = B'C'$

即チ A, D ナル外項ノ包ム矩形ハ B, C ナル内項ノ包ム矩形ニ等シ。

339. 系 三つの直線が比例をなすときは外項の包む矩形は比例中項なる直線上の正方形に等し.

問題

216. 直角三角形 ABC = 於テ AD ヲ直角頂 A ヨリ斜邊 BC へ引ケル垂線トスレバ

$$AD^2 = BD \cdot CD$$

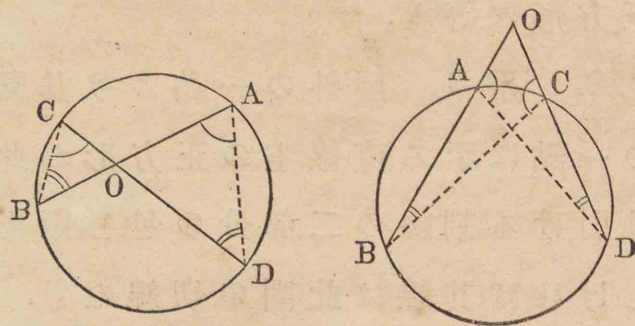
217. 直角三角形 ABC ノ直角 A ノ二等分線ガ斜邊 BC ト點 E = 於テ交ハリ其外接圓ノ周ト D = 於テ交ハレバ $AE \cdot AD = 2\Delta ABC$

定理 18

340. 圓の二つの弦或は其延長が圓内或は圓外に於て相交はるときは其一弦の二部分の包む矩形は他の一弦の二部分の包む矩形に等し.

二弦 AB, CD 或ハ其延長ガ點 O = 於テ相交ルトキハ

$$AO \cdot BO = CO \cdot DO$$



證明 OB, AD ヲ結び付ケヨ

三角形 AOD, COB ハ互ニ等角ナルヲ以テ相似ナリ

[272]

故ニ其對應邊ハ比例ヲナス

$$\text{即チ} \quad \frac{AO}{CO} = \frac{DO}{BO}$$

$$\text{故ニ} \quad AO \cdot BO = CO \cdot DO$$

[338]

341. 系 1 圓内の一定點を通過する弦の二部分の包む矩形は此點に於て二等分せらるる弦の半の上の正方形に等し.

342. 系 2 圓外の一定點より引ける割線の二部分(其點より割線と圓周との交點に至る二線)の包む矩形は此點より引ける切線(其點より切點に至る線)上

の正方形に等し.

343. 系 3 圓外の一 點より其圓周上の一 點に至る直線上の正方形が此點より引ける割線の二部分の包む矩形に等しければ其線は此圓の切線なり.

定 理 19

344. 一角相等しき二つの三角形の比は其角を夾む所の二邊の包む矩形の比に等し.

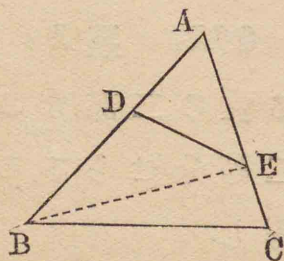
三角形 ABC, ADE ヲ相等シキ角 A ガ相合スル様ニ置カレタルモノトスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$$

證明 BE ヲ結び付ケヨ

然レバ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE}$ $\frac{\triangle ABE}{\triangle ADE} = \frac{AB}{AD}$ [315]

故ニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AC}{AE} \times \frac{AB}{AD}$ [300]



而シテ $\frac{AC}{AE} \times \frac{AB}{AD} = \frac{AC \cdot AB}{AE \cdot AD}$ [301]

故ニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AC \cdot AB}{AE \cdot AD}$

345. 系 一角相等しき二つの平行四邊形の比は其角を夾む所の二邊の包む矩形の比に等し.

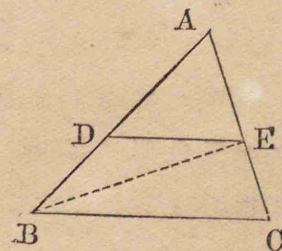
問 題

218. 三角形 ABC = 於テ AB, AC 上ニ AD = $\frac{2}{3}$ AB, AE = $\frac{3}{4}$ AC ナル二點 D, E ヲ取レバ $\triangle ABC$ ハ $\triangle ADE$ ノ何倍ナルカ

定 理 20

346. 相似三角形の比は其對應邊上の正方形の比に等し.

$\triangle ABC, ADE$ ヲ相等シキ角 A ガ相合スル様ニ置カレタル相似三角形トシ AB, AD ヲ其對應邊トスレバ



$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

證明 前定理ニ於テノ如ク

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AC}{AE} \times \frac{AB}{AD}$$

然ルニ

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

故ニ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB}{AD} \times \frac{AB}{AD}$$

故ニ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB^2}{AD^2}$$

347. 系1 相似三角形の比は其對應邊の長さを表はす數の平方の比に等し.

348. 系2 二つの相似多角形の比は其對應邊上の正方形の比に等し因て又對應邊の長さを表はす數の平方の比に等し.

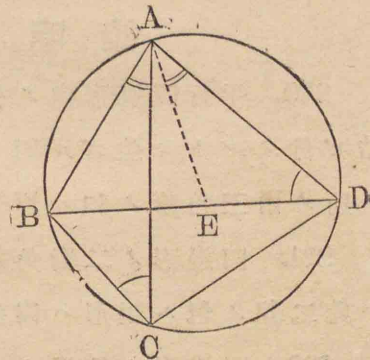
問題

219. 與ヘラレタル三角形ト相似ニシテ其四倍ナル三角形ヲ作レ, 又其九分ノ一ナル相似三角形ヲ作レ.

定理 21

349. 圓に内接する四邊形に於て其兩對角線の包む矩形は二雙の相對する邊の包む矩形の和に等し.

ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トシ AC, BD ヲ其對角線トスレバ AC · BD = AB · CD + BC · AD



證明 ∠BAC = 等シク ∠DAE ヲ作レ然レバ △ABC, ADE ハ

其三角夫々相等シキヲ以テ相似ナリ

因リテ $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DE}$

故ニ AC · DE = BC · AD.....(1) [338]

又 △ACD, ABE ハ其三角夫々相等シキヲ以テ相似ナリ

因リテ $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BE}$

故ニ AC · BE = AB · CD.....(2) [338]

(1) 及ビ (2) ヲ加フレバ

$$\begin{aligned} & AC \cdot DE + AC \cdot BE = BC \cdot AD + AB \cdot CD \\ \text{故} = & AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD \quad [322] \end{aligned}$$

第四編問題集ノ二

證明問題

220. 平行四邊形内ノ任意ノ一點ヲ其各頂點ニ結ビ付クルトキ生ズル四ツノ三角形ノ中相向ヒ合フ所ノ兩三角形ノ和ハ原形ノ半ニ等シ。

221. 四邊形ノ二對角線ガ直角ニ相交ハルトキハ此二線ノ包ム矩形ハ四邊形ノ二倍ナリ

222. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クル直線ノナス四邊形ハ原形ノ半ニ等シ。

223. ADガ正三角形ABCノ高サナレバ

$$AD^2 = 3BD^2$$

224. 一ツノ直線ノ二部分ノ上ノ正方形ノ和ハ此二部分ガ相等シキトキ最小ナリ。

225. Oヲ二等邊三角形ABCノ底邊BC或ハ其延長上ノ一點トスレバ

$$AB^2 \sim AO^2 = OB \cdot OC$$

226. 三角形ノ三邊上ノ正方形ノ和ノ三倍ハ其三中線上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シ。

227. 四邊形ノ各邊上ノ正方形ノ和ハ其二對角線上ノ正方形ノ和ヨリ對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ四倍ダケ大ナリ。

228. 二直線AB, CD或ハ其延長ガ一點Oニ於テ相交ハリOA, OB=OC, ODナルトキハ四點A, B, C, Dハ同一ノ圓周上ニ在リ

229. 三角形ニ外接スル圓ノ直徑ト其頂角ヨリ底邊ヘ引ケル垂線トノ包ム矩形ハ此角ヲ夾メル二邊ノ包ム矩形ニ等シ。

230. $\triangle ABC$ ノ三邊上ニ同ジキ順ニAA', BB', CC'ヲ夫々AB, BC, CAノ三分ノ二ツツニ取ルトキハ

$$\triangle A'B'C' = \frac{1}{3} \triangle ABC$$

231. 三角形ノ三ツノ中線ヲ三邊ト爲ス所ノ三角形ハ原形ノ四分ノ三ニ等シ。

計算問題

232. 對角線ノ長サ八尺ナル正方形ノ面積ヲ計算セヨ。 (答三十二平方尺)

233. 矩形アリ其面積108.60平方米突ニシテ周ハ48.20米突ナリ二邊各幾許 (答18.10, 6.00米突)

234. 直角ヲ夾ム二邊ノ長サガa, bナル直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ノ長サヲ計算

セヨ

(答 $ab \div \sqrt{a^2 + b^2}$)

235. 二圓アリ其中心間ノ距離ハ一尺ニシテ其半徑ハ六寸ト八寸トナリ 其共通弦ノ長ヲ求ム

(答 九寸六分)

236. 三角形アリ二邊ノ長サ六寸七寸ニシテ其夾角 30° ナリ 其面積ヲ求ム (答 $10\frac{1}{2}$ 平方寸)

237. 三角形ノ二邊ノ長サヲ a, b トスレバ ① 其夾角 30° 又ハ 150° ナルトキハ面積ハ $\frac{ab}{4}$ ② 夾角 45° 又ハ 135° ナルトキハ面積 $ab\sqrt{2} \div 4$ ③ 夾角 60° 又ハ 120° ナルトキハ面積 $ab\sqrt{3} \div 4$ ナリ

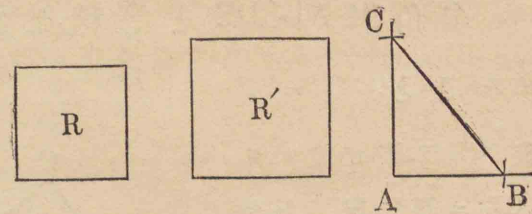
238. 甲乙二ツノ相似形アリ其對應邊ハ夫々 12 米突, 36 米突ニシテ甲ノ面積ハ 180 平方米突ナリ乙ノ面積ヲ求ム (答 1620 平方米突)

第二節
作圖題

作圖題 1

350. 二つの與へられたる正方形 R, R' の和に等しき一つの正方形を作るこ

と。



解法 直角 BAC ヲ作レ

此角ノ一邊上ニ正方形 R ノ一邊ニ等シク AB ヲ取り他ノ一邊上ニ正方形 R' ノ一邊ニ等シク AC ヲ取り BC ヲ結び付ケヨ

然ルトキハ BC ハ所要ノ正方形ノ一邊ニ等シ

證明 BC ハ直角三角形 ABC ノ斜邊ナルヲ以テ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ [329]

即チ BC 上ノ正方形ハ R, R' ノ和ニ等シ。

問題

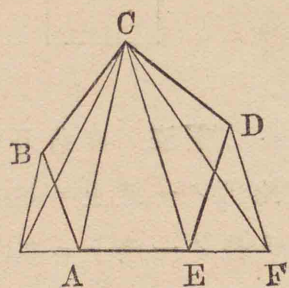
239. 三ツノ與へラレタル正方形ノ和ニ等シキ一ツノ正方形ヲ作レ。

240. 二ツノ與へラレタル正方形ノ差ニ等シキ一ツノ正方形ヲ作レ。

作圖題 2

351. 多角形 ABCDE と等積なる三角形を作ること。

解法 CEヲ結び付ケヨ
Dヨリ CEニ平行線ヲ引キ
AEノ延長ト Fニ於テ出會
ハシメ CFヲ結び付ケヨ
多角形 ABCFノ邊數ハ原形
ノ邊數ヨリ一ツ少シ而シテ
其面積ハ相等シ。



證明 $\triangle CFE, CDE$ ハ CEナル同一底邊ヲ有シ
高サ相等シキヲ以テ等積ナリ [313]
故ニ雙方ニ多角形 ABCEヲ加フレバ其和相等シ
即チ $ABCF = ABCDE$

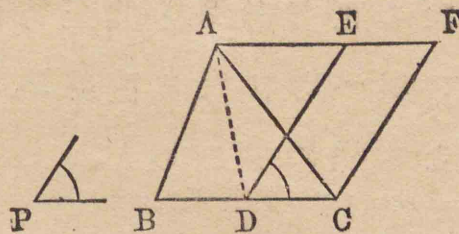
同様ニ多角形 ABCFノ邊數ヨリ一ツ少キ邊數ヲ
有シ而シテ之ト等積ナル多角形ヲ作ルコトヲ得
斯ノ如クニシテ遂ニ與ヘラレタル多角形ト等積
ナル三角形ヲ作ルコトヲ得ベシ。

作圖題 3

352. 與ヘラレタル三角形 ABC に等

しく而して一角が與ヘラレたる角 P に
等シキ平行四邊形を作ること。

解法 一邊
BCヲDニ於テ二
等分シ DCトP
ニ等シキ角 EDC
ヲナス所ノ直線



DEヲ引ケ Aヨリ BCニ平行線 AEFヲ引キ
又 Cヨリ DEニ平行線 CFヲ引キ AEFト Fニ於テ
交ハラシメヨ

然ルトキハ EDCEハ所要ノ平行四邊形ナリ。

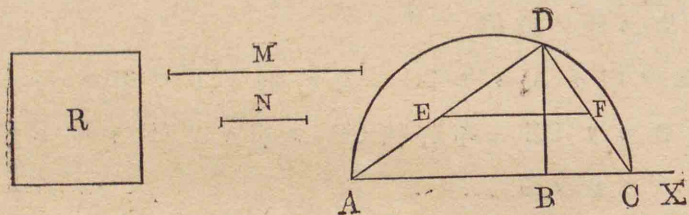
證明 ADヲ引ケ
然レバ $\triangle ADB = \triangle ADC$ [313]
故ニ $\triangle ABC = 2\triangle ADC$
又 $\square DCFE = 2\triangle ADC$ [312]
故ニ $\square DCFE = \triangle ABC$
而シテ $\angle EDC = \angle P$

問題

241. 與ヘラレタル三角形ニ等シキ矩形ヲ作レ

作圖題 4

353. 一つの正方形を作り與へられたる正方形 R と其正方形との比が二つの與へられたる直線 M, N の比に等しくなる様にする事。



解法 AX ナル一直線上ニ M = 等シク AB ヲ取リ N = 等シク BC ヲ取レ
 AC ヲ直径トシテ其上ニ半圓ヲ畫ケ
 B = 於テ AC = 垂線 BD ヲ引キ圓周ト點 D = 於テ交ハラシメヨ
 DA, DC ヲ引ケ
 DA 或ハ其延長上ニ與ヘラレタル正方形 R ノ一邊ニ等シク DE ヲ取リ E ヨリ AC = 平行ニ EF ヲ引キ DC 或ハ其延長ト點 F = 於テ交ハラシメヨ
 然ルトキハ DF ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ。
 證明 DAC ハ D ガ直角ニ等シキ直角三角形ナ

ルヲ以テ $\frac{DA^2}{DC^2} = \frac{AB}{BC}$ (1) [332]

今 $\frac{DA}{DC} = \frac{DE}{DF}$ [201]

故ニ $(\frac{DA}{DC})^2 = (\frac{DE}{DF})^2$ (2)

然ルニ $(\frac{DA}{DC})^2 = \frac{DA^2}{DC^2} = \frac{DE^2}{DF^2} = \frac{DE^2}{DF^2}$ [302]

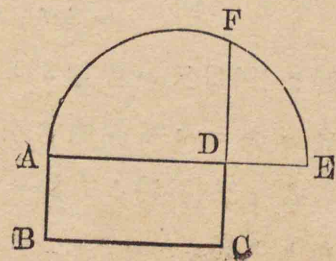
故ニ(1)及ビ(2)ヨリ $\frac{DE^2}{DF^2} = \frac{AB}{BC}$

即チ $\frac{R}{DF^2} = \frac{M}{N}$

作圖題 5

354. 一つの與へられたる矩形 ABCD に等しき正方形を作る事。

解法 ABCD ノ相隣レル二邊 AD, DC ノ間ノ比例中項ナル直線 DE ヲ作レ [283]



然ルトキハ DE ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ。

證明 $\frac{AD}{DE} = \frac{DE}{DC}$ [作圖]

故ニ $DE^2 = AD \cdot DC$ [339]

問題

242. 一ツノ與ヘラレタル正方形ノ三倍ニ等シキ正方形ヲ作レ

此問題ハ事實ニ於テ次ニ記スルモノト同一ナリ。直線 a ヲ與ヘテ $a\sqrt{3}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ畫ケ。

解 [353] = 於テ $3M=N$ トスレバ

$$\frac{R}{DF^2} = \frac{M}{3M} = \frac{1}{3} \quad \therefore DF^2 = 3R$$

即チ DF ハ與ヘラレタル正方形 R ノ三倍ニ等シキ正方形ノ一邊ナリ。

又ハ a, x ヲ夫々與ヘラレタル正方形及ビ所要ノ正方形ノ邊トスレバ

$$\begin{aligned} x^2 &= 3a^2 = 3a \times a \\ &= (2a)^2 - a^2 \end{aligned}$$

因テ [354] 又ハ問題 239 = 依リテ x 即チ $a\sqrt{3}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ引クコトヲ得

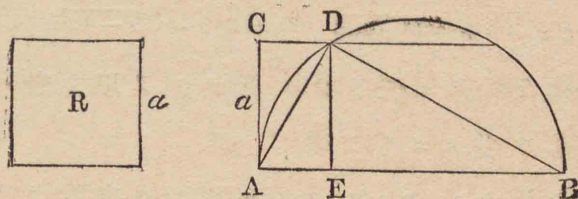
或ハ又 [350] ノ方法ニ依リテ所要ノ正方形ヲ作ルコトヲ得

243. 與ヘラレタル正方形ノ三倍半ニ等シキ正方形ヲ作レ

244. 直線 a ヲ與ヘテ $a(\sqrt{5}-1)$ ニテ表ハサルベキ直線ヲ引ケ

作圖題 6

355. 與ヘられたる正方形 R に等しく而して相隣れる二邊の和が與ヘられたる直線 AB に等しき矩形を作ること。



解法 AB ヲ直徑トシ其上ニ半圓ヲ畫ケ

A = 於テ AB = 垂線ヲ引キ R ノ一邊 a = 等シク AC ヲ取レ

C ヨリ AB = 平行線ヲ引キ圓周ト點 D = 於テ交ハラシメ D ヨリ AB = 垂線ヲ引キ AB ト點 E = 於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ AE, BE ハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ。

證明 DE ハ DAB ナル直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ナルヲ以テ

$$DE^2 = AE \cdot BE \quad [277], [339]$$

而シテ $AE + BE = AB \quad DE = CA = a$

故ニ AE, BE ハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ。

356. 注意 1 本題ハ $2a \equiv AB$ ナルトキニノミ解

有リ

注意 2 ABノ長サヲ b トシ所要ノ二邊ノ長サヲ x, y トスレバ

$$x+y=b \quad xy=a^2$$

此聯立方程式ヲ解ケバ

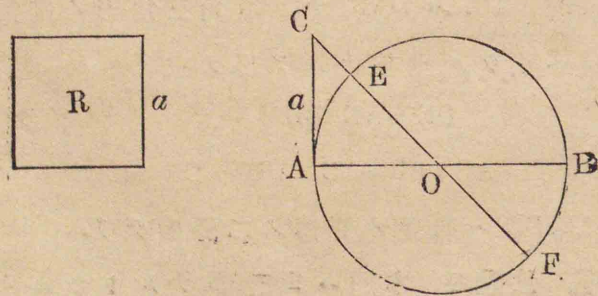
$$x = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 4a^2}) \quad y = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - 4a^2})$$

故ニ問題 240 等ニ依リテ x 及ビ y ヲ以テ表ハスベキ二直線ヲ引クコトヲ得

若シ $2a > b$ ナレバ x ト y トハ何レモ虚數ナリ故ニ此場合ニハ所要ノ矩形ヲ作ルコトヲ得ズ。[注意 1 ヲ参照セヨ]

作圖題 7

357. 與へられたる正方形 R に等しく而して相隣れる二邊の差が與へられたる直線 AB に等しき矩形を作ること。



解法 ABヲ直徑トシテ圓ヲ書ケ

點 Aニ於テ圓ニ切線 ACヲ引キ Rノ一邊 a ニ等シク ACヲ取レ

Cト中心 Oトヲ通過シ一直線ヲ引キ二點 E, Fニ於テ圓周ト交ハラシメヨ。

然ルトキハ CE, CFハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ

證明 CAハ切線, CEFハ割線ナルヲ以テ

$$CA^2 = CE \cdot CF \quad [342]$$

而シテ $CF - CE = EF = AB$ $CA = a$

故ニ CE, CFハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ。

358. 注意 1 本題ハ常ニ解有リ。

注意 2 ABノ長サヲ b トシ所要ノ二邊ノ長サヲ x, y トスレバ

$$x-y=b \quad xy=a^2$$

此聯立方程式ヲ解ケバ

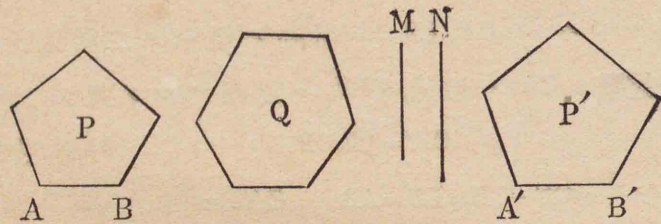
$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4a^2} + b) \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4a^2} - b)$$

故ニ [350] 等ニ依リ x 及ビ y ヲ以テ表ハスベキ直線ヲ引クコトヲ得

上ノ x ト y トノ値ハ常ニ實數ナルヲ以テ本題ハ常ニ成立ス

作圖題 8

359. 一つの多角形 P と相似にして他の一つの多角形 Q に等しき多角形を作ること。



解法 先ツ P = 等シキ三角形ヲ作レ [351]
 次ニ此三角形ニ等シキ矩形ヲ作レ [352]
 次ニ此矩形ニ等シキ正方形ヲ作レ [354]
 M ヲ其一邊トセヨ
 又上ト同ジキ手續キニ依リテ Q ニ等シキ正方形ヲ作レ
 N ヲ其一邊トセヨ
 P ノ一邊 AB ヲ取リ M, N 及ビ AB ノ第四比例項ヲ求メ [281]
 之ヲ A'B' トセヨ
 A'B' ノ上ニ P ト相似ニシテ且 A'B' ト AB トガ對應邊トナル如キ多角形 P' ヲ作レ [236]
 然ルトキハ P' ハ所要ノ多角形ナリ。

證明

$$\frac{M}{N} = \frac{AB}{A'B'}$$

(作圖)

$$\text{故ニ} \left(\frac{M}{N}\right)^2 = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

$$\text{故ニ} \frac{M^2}{N^2} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \quad [302]$$

$$\text{然ルニ} M^2 = P \quad N^2 = Q \quad (\text{作圖})$$

$$\text{又} \frac{P}{P'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} \quad [346]$$

$$\text{故ニ} \frac{P}{P'} = \frac{M^2}{N^2} = \frac{P}{Q}$$

$$\text{故ニ} P' = Q$$

而シテ P' ハ P ト相似ナリ

故ニ P' ハ所要ノ多角形ナリ。

第四編問題集ノ二

作圖題

245. 與ヘラレタル直線ヲ底邊トシ與ヘラレタル三角形ト等積ナル三角形ヲ作レ
246. 平行四邊形ヲ其内或ハ外ニ在ル一定點ヨリ引ケル直線ヲ以テ二等分セヨ。
247. 平行四邊形ヲ其一ツノ頂點ヨリ引ケル直線ヲ以テ三等分セヨ。
248. 三角形ヲ其一邊上ノ一定點ヨリ引ケル直

線ヲ以テ二等分セヨ。

249. 一直線ヲ二分シ其一分線ノ上ノ正方形ガ全線ノ上ノ正方形ノ半ニ等シクナル様ニセヨ。

250. 底邊及ビ頂角ヲ知リ與ヘラレタル面積ヲ有スル (與ヘラレタル正方形ニ等シキ) 三角形ヲ作レ。

251. 底邊及ビ之ニ隣レル一角ヲ知リ與ヘラレタル面積ヲ有スル三角形ヲ作レ。

252. $\triangle ABC$ ノ内或ハ外ニ於テ三ツノ三角形 OBC, OCA, OAB ガ相等シカルベキ一點 O ヲ求メヨ。

253. 任意ノ與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作レ。

第五編

正多角形及ビ圓

第一節

正多角形ニ關スル定理

圓周ノ長サ及ビ圓ノ面積

定理 1

360. 圓に内接する等邊多角形は正多角形なり。

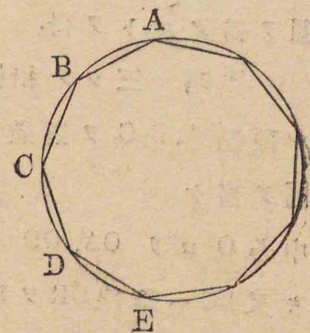
ABCD.....ヲ圓ニ内接スル等邊多角形トスレバ ABCD.....ハ正多角形ナリ。

證明 弧 AB, BC, CD 等ハ等弦ニ對スルヲ以テ相等シ

[195]

故ニ弧 ABC, BCD 等ハ相等シ

故ニ全周ヨリ弧 ABC, BCD 等ヲ減ズレバ其殘リノ弧モ亦相等シ



故ニ此殘リノ相等シキ弧ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テ
ノ角 ABC, BCD 等ハ相等シ [206]

故ニ ABCDハ等角多角形ナリ而シテ假設ニ依リ
テ等邊多角形ナリ

故ニ ABCDハ正多角形ナリ

定 理 2

361. [1] 正多角形には圓を外接する
ことを得.

[2] 正多角形には圓を内接すること
を得.

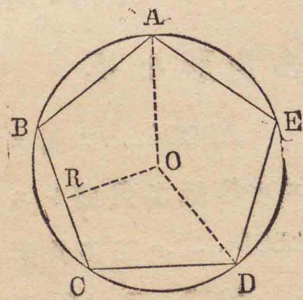
[1] ABCDE ヲ正多角
形トスレバ之ニ外接スル
圓ヲ畫クコトヲ得.

證明 三ツノ相隣レ
ル頂點 A, B, C ヲ通過スル
圓ヲ畫ケ

中心 O ヲリ OA, OD ヲ引
キ又 BC へ垂線 OR ヲ引ケ

OR ヲ折リ目トシテ四邊形 OABR ノ平面ヲ折リ返シ
四邊形 ODCR ノ平面ニ重ネヨ

然ルトキハ RB ハ RC ニ重ナリ點 B ハ點 C ノ上ニ



落ツ

[∵ ORB, ORC ハ各直角ナルヲ以テ
相等シク又 RB=RC ナレバナリ]

又 BA ハ CD ニ重ナリ點 A ハ D ノ上ニ落ツ

[∵ ∠B=∠C, BA=CD]

故ニ OA ハ OD ニ合ス

因リテ OA=OD

故ニ三點 A, B, C ヲ通過スル圓ハ點 D ヲ通過ス

同様ニ B, C, D ヲ通過スル圓ハ點 E ヲ通過スルコト
ヲ證明スルヲ得.

順次斯ノ如クニシテ最初ニ畫キタル圓ハ正多角形
ノ總テノ頂點ヲ通過スルコトヲ證明スルヲ得.

[2] ABCDE ニ内接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

證明 ABCDE ノ各邊ハ一ツノ圓ノ等弦ナルヲ
以テ中心ヨリ等距離ニ在リ [199]

故ニ O ヲ中心トシ OR ヲ半径トシテ圓ヲ畫ケバ
ABCDE ノ各邊ハ何レモ其切線トナル

故ニ此圓ハ正多角形 ABCDE ニ内接ス.

定 理 3

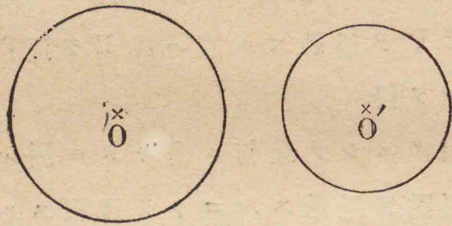
362. 同じ邊數の正多角形は相似な
り而して其周の比は其外接圓の半径の

比に等しく又其内接圓の半徑の比に等し。

[本定理ノ證ハ略ス學生自ラ之ヲナセ]

定理 4

363. 二つの圓周の比は其半徑の比に等し。



O 及ビ O' ヲ二ツノ圓トシ、C 及ビ C' ヲ夫々其周トシ、R 及ビ R' ヲ夫々其半徑トスレバ

$$C:C'::R:R'$$

證明 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大ナルヲ以テ圓ニ内接スル正多角形ノ周ハ圓周ヨリ小ナリ。今圓ニ任意邊數ノ正多角形ヲ内接シ而シテ其邊數ニ倍ナル正多角形ヲ作レバ其周ハ前ノ多角形ノ周ヨリ大ナリ。

是ニ由リテ圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ヲ二倍スルコトヲ繰リ返シテ止マザレバ其周ハ漸々大キ

クナリ終ニ其邊數ヲ極リナク多クスルトキハ其外接圓ノ周ニ極リナク接近スベシ、換言スレバ圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ヲ極リナク多クスルトキハ其周ト圓周トノ差ハ極リナク小サクナリ遂ニ相等シクナルモノト見做スコトヲ得。斯ノ如キ場合ニ於テハ圓周ヲ多角形ノ周ノ極根ト稱ス。

又同ジ場合ニ於テ圓ノ面積ヲ多角形ノ面積ノ極限ト稱ス。

今各圓ニ内接スル任意ノ同ジ邊數ノ正多角形ヲ作レ

同ジ邊數ノ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ其邊數ノ多少ニ關セズ常ニ其外接圓ノ半徑ノ比ニ等シ [362] 故ニ邊數ヲ極リナク多クシタルトキノ極限ナル二

ツノ圓周ノ比モ亦其半徑ノ比ニ等シ。

[是大ナヲ變ズル或二量ノ比ガ常ニ或同ジ比ニ等シキトキハ各量ノ極限ノ比モ亦此比ニ等シトイフ定理ヨリ出デ來ル其證ハコゝニ略ス]

即チ

$$\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$$

364. 注意 上ノ比例ニ於テ第二ノ比ノ各項ヲ

二倍スレバ
$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$$

故ニ $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$ [253] [257]

即チ 圓周ト其直徑トノ比ハ常數ナリ
此比ヲ表ハスニ「ギリシヤ」文字ノ π ヲ以テス
 π ハ通約スベカラザル二量ノ比ナルヲ以テ其近似
ノ値ノ外ハ數字ヲ以テ之ヲ表ハスコト能ハズ。

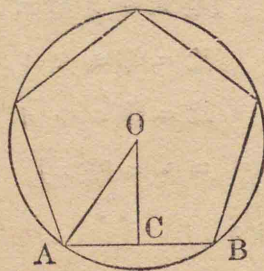
365. 系 圓周 C , 半徑 R の長さを表
はす數を夫々 c, r とすれば

$$c = 2\pi r$$

定理 5

366. 圓に内接する正多角形の邊數
が極りなく多くなるときは圓心より各
邊へ引ける垂線の極限は半徑なり。

OCヲ中心 O ヨリ之ニ内
接スル正多角形ノ一邊 AB へ
引ケル垂線トスレバ
此正多角形ノ邊數ガ極リナク
多クナルトキハ OC ノ極限ハ
OA ナリ



證明

$$OC < OA$$

又

$$OA - OC < AC$$

邊數ガ極リナク多クナルトキハ AB ハ極リナク小
タクナル

故ニ AC モ亦極リナク小タクナル

故ニ OA - OC ハ無論極リナク小タクナル

故ニ OC ノ極限ハ OA ナリ。

367. 定義 正多角形の内接圓及び
外接圓の共通なる中心を正多角形の中心
と稱す。

368. 定義 正多角形の一邊が中心
に於て對する角を正多角形の中心ニ於
テノ角と稱す。

定理 6

369. 正多角形は其周と其中心より
一邊に至る距離との積の半に等し。

p 及ビ a ヲ夫々正多角形ノ周ノ長サ及ビ中心
ヨリ一邊ニ至ル距離トスレバ其面積ハ $\frac{pa}{2}$ ナリ

[此證明ハ略ス學生自ラ之ヲナセ]

定理 7

370. 圓は其周と半徑との積の半に

等し。

Sヲ圓ノ面積トシr及ビcヲ夫々其半径及ビ周ノ長サトスレバ

$$S = \frac{1}{2}cr$$

證明 此圓ニ内接スル任意ノ正多角形ヲ作り其周ノ長サ及ビ中心ヨリ一邊ニ至ル距離ヲ夫々 p 、 a トスレバ此多角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}pa$ ナリ [369]

今此正多角形ノ邊數ヲ極リナク多クシタリトセヨ然ルトキハ p ノ極限ハ c [363]

a ノ極限ハ r [366]

而シテ正多角形ノ極限ハ圓ナリ [363]

故ニ $S = \frac{1}{2}cr$

371. 系 1 $c = 2\pi r$ なるを以て

$S = \frac{1}{2}cr$ に於て c の代りに $2\pi r$ を置け

ば $S = \pi r^2$

372. 系 2 二つの圓の面積の比は其半径の平方の比に等し。

373. 系 3 扇形の面積は半径と其弧との積の半に等し。

第二節

正多角形の作圖及び

其邊長の計算等

374. 圓に内接する正多角形の一邊及び圓の半径の長さを知りて同圓に内接する二倍邊數の正多角形の邊を計算すること並に其逆の計算をなすこと。

ABヲ圓Oニ内接スル

正多角形ノ一邊トシDヲ弧ABノ中點トシ弦ADヲ引ケバADハ二倍邊數ノ正多角形ノ一邊ナリ。

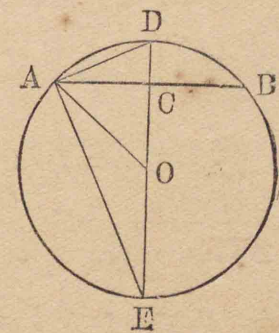
Ⅰ $AB = a$, 半径 $OA = r$ ヲ知リテADノ長サヲ計算

スルコト

ABニ垂直ナル直径EOヲ引ケバ此線ハDヲ通過シ又弦ABヲ二等分ス [197]

EAヲ引ケ

$$\angle EAD = R. \angle \quad AC \perp DE$$



ナルヲ以テ $AD^2 = DE \cdot DC$ [331]

AD, OC ノ長サヲ夫々 b, c トスレバ

$$b^2 = 2r(r - c)$$

ACO ハ直角三角形ナルヲ以テ

$$c^2 = r^2 - \frac{a^2}{4} \quad \therefore c = \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2}$$

$$\therefore b^2 = 2r \left(r - \frac{\sqrt{4r^2 - a^2}}{2} \right)$$

$$\therefore b = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - a^2}} \dots\dots\dots(1)$$

[2] 逆ニ b 及ビ r ヲ知リテ a ヲ計算スルコト

$$AD \cdot EA = AC \cdot DE$$

[各, $\triangle ADE$ ノ二倍ニ等シキヲ以テ]

即チ $b \sqrt{4r^2 - b^2} = \frac{a}{2} 2r$

$$\therefore a = \frac{b}{r} \sqrt{4r^2 - b^2} \dots\dots\dots(2)$$

375. 系 半径 r が長さの單位に等

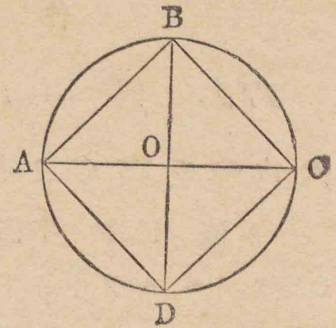
しきときは $b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$

$$a = b \sqrt{4 - b^2}$$

作圖題 1

376. 與へられたる圓に内接する正方形を畫くこと。

解法 互ニ垂直ナル
ニツノ直径 AC, BD ヲ引キ
AB, BC, CD, DA ヲ結ビ付ク
レバ ABCD ナル所要ノ正
方形ヲ得



證明 中心 O ニ於テ
ノ角ハ各, 直角ナルヲ以テ
相等シ

故ニ弧 AB, BC, CD, DA ハ相等シ

故ニ弦 AB, BC, CD, DA ハ相等シ

即チ ABCD ハ圓ニ内接スル等邊四角形ナルヲ以テ
正方形ナリ。 [360]

377. 系 1 弧 AB, BC 等ヲ各, 二等分シ各弧
ノ弦ヲ引ケバ内接正八邊形ヲ得。

378. 系 2 圓ノ半径ヲ r トシ其内接正方
形ノ一邊ヲ a_4 トスレバ $2r^2 = a_4^2$

$$\therefore a_4 = r\sqrt{2}$$

[以下邊數 n ノ正多角形ノ一邊ヲ a_n ニテ表ハス]

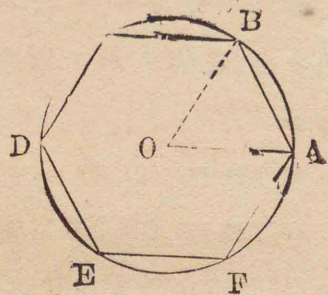
又 $a_n = \sqrt{2r^2 - r \sqrt{4r^2 - 2r^2}}$ [374]

$$\therefore a_n = r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

作圖題 2

379. 與へられたる圓に内接する正六角形を畫くこと。

解法 任意ノ半徑 OAヲ引キ Aヲ中心トシ AOヲ半徑トシテ圓弧ヲ畫キ點Bニ於テ周ト相交ハラシメ ABヲ引ケ



然ルトキハ AB内接正六角形ノ一邊ナリ

證明 OBヲ引ケ 然レバ $\triangle OAB$ ハ等邊ナルヲ以テ亦等角ナリ 故ニ $\angle AOB$ ハ二直角ノ三分ノ一即チ四直角ノ六分ノ一ナリ

故ニ弧 ABハ全周ノ六分ノ一ナリ 故ニ弦 ABハ内接正六角形ノ一邊ナリ 因リテ各周ヲ各ガ弧 ABニ等シキ六ツノ部分ニ分チ各弧ノ弦ヲ引ケバ所要ノ正六角形ヲ得

380. 系 1 正六角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付クル直線ヲ引ケバ内接正三角形ヲ得

六ツノ弧 AB, BC, CD等ヲ各,二等分シ各弧ノ弦ヲ引ケバ正十二角形ヲ得.

381. 系 2 $a_6 = r$

$$a_3 = r\sqrt{3} \quad a_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad [274]$$

作圖題 3

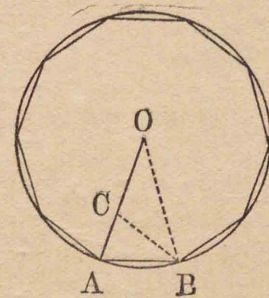
382. 與へられたる圓に内接する正十角形を畫くこと。

解法 任意ノ半徑 OAヲ引キ之ヲ點 Cニ於テ

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{CA}$$

ナル比例ヲナス如ク分ツベシ [285]

Aヲ中心トシ OCニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ圓周ト點 Bニ於テ交ハラシメ ABヲ引ケ



然ルトキハ ABハ所要ノ正十角形ノ一邊ナリ.

證明 BC, BOヲ引ケ

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OC}{CA} \quad AB = OC \quad [作圖]$$

$$\text{故ニ} \quad \frac{OA}{AB} = \frac{AB}{CA}$$

而シテ $\angle OAB$ ハ $\triangle OAB, BAC$ ニ共通ナリ

故ニ $\triangle OAB, BAC$ ハ相似ナリ [275]

[\because 一角相等シク之ヲ夾ム邊ガ比例ヲナス]

然ルニ $\triangle OAB$ ハ二等邊ナリ

故ニ之ト相似ナル $\triangle BAC$ モ亦二等邊ナリ

而シテ $BC=BA$

然ルニ $OC=BA$

故ニ $BC=OC$

故ニ $\angle AOB = \angle OBC$

然ルニ $\angle ACB = \angle AOB + \angle OBC$

故ニ $\angle ACB = 2\angle AOB$

故ニ $\angle OAB = 2\angle AOB = \angle OBA$

故ニ $\triangle OAB$ ノ内角ノ和即チ二直角ハ $\angle AOB$ ノ五倍ニ等シ、即チ $\angle AOB$ ハ二直角ノ五分ノ一即チ四直角ノ十分ノ一ナリ

故ニ弧 AB ハ全周ノ十分ノ一ナリ

是ニ由リテ全周ヲ各ガ AB ニ等シキ十個ノ部分ニ分チ各弧ノ弦ヲ引ケバ所要ノ正十角形ヲ得。

383. 系1 正十角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付クル直線ヲ引ケバ正五角形ヲ得。

内接正十角形ノ各邊ニ對スル弧ヲ二等分シ各

弧ノ弦ヲ引ケバ内接正二十角形ヲ得。

384. 系2 $OA \cdot CA = OC^2$ ナルヲ以テ

$$r(r - a_{10}) = a_{10}^2$$

因リテ

$$a_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

又

$$a_5 = \frac{a_{10}}{r} \sqrt{4r^2 - a_{10}^2} \quad [374]$$

上記ノ a_{10} ノ値ヲ換置シテ計算スレバ

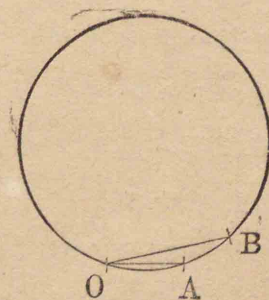
$$a_5 = \frac{\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}r}{2}$$

作圖題4

385. 與へられたる圓に正十五角形を内接すること。

解法 内接正六角形ノ一邊ニ等シク OB ヲ引キ又内接正十角形ノ一邊ニ等シク OA ヲ引キ AB ヲ結ビ付ケヨ

然ルトキハ AB ハ所要ノ正十五角形ノ一邊ナリ。



證明 弧 OB ハ圓周ノ $\frac{1}{6}$ ニシテ又弧 OA ハ圓周ノ $\frac{1}{10}$ ナリ

故ニ弧 AB ハ圓周ノ $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ ナリ

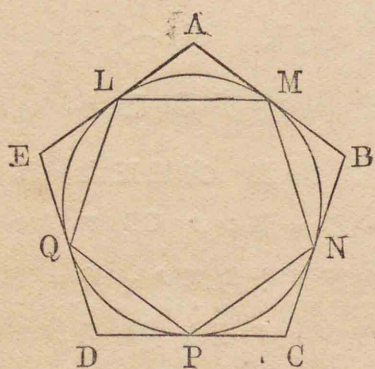
故ニ弦 AB ハ内接正十五角形ノ一邊ナリ

故ニ圓周ヲ各₁ガ AB = 等シキ十五ノ部分ニ分チ各弧ノ弦ヲ引ケバ所要ノ正十五角形ヲ得.

作圖題 5

386. 圓に内接する與へられたる正多角形 LMNPQ と同じ邊數の圓に外接する正多角形を畫くこと.

解法 LMNPQノ各頂點ニ於テ圓ニ切線ヲ引キ A, B, C, D, Eニ於テ相交ハラシメヨ
然ルトキハ多角形 ABCDEハ所要ノ外接正多角形ナリ



證明 $\triangle ALM, BMN$ ニ於テ $LM=MN$
角 ALM, AML, BMN, BNM ハ相等シ
故ニ $\triangle ALM = \triangle BMN$

故ニ $\angle LAM = \angle MBN$

同様ニ多角形 ABCDEノ角ハ皆相等シキコトヲ證明スルヲ得

全等ナル三角形 ALM, BMN 等ニ於テ角 ALM, AML, BMN 等皆相等シキヲ以テ AL, AM, BM, BN 等ハ皆相等シ

因リテ多角形 ABCDEノ邊ハ皆相等シ

故ニ ABCDEハ正多角形ナリ

而シテ ABCDEノ邊數ハ LMNPQノ邊數ニ同シ

故ニ ABCDEハ所要ノ正多角形ナリ.

387. 圓周の直徑に對する比即ち π の近似の値を計算すること.

圓周及ビ半徑ノ長サヲ夫々 c 及ビ r トスレバ

$$\pi = \frac{c}{2r} \quad [365]$$

故ニ $r=1$ ナルトキハ $\pi = \frac{c}{2}$

公式 $b = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}$ ニ於テ a ハ圓ノ内接正六角形ノ一邊ノ長サヲ表ハスモノトシ逐次此公式ニ依リテ邊數ガ 12, 24 等ノ内接正多角形ノ一邊ノ長サヲ計算シ之ニ夫々其邊數ヲ掛ケテ此等ノ多角形ノ周ノ長サヲ求メ以テ π ノ近似ノ値ヲ得ルコト次ノ如シ.

邊數	周ノ長サ	邊數	周ノ長サ
12	6.211657	192	6.282905
24	6.265257	384	6.283115
48	6.278700	768	6.283169
96	6.282064		

是ニ由リテ半徑1ナル圓周ハ大略6.28317ナリ

故ニ此數ノ半ナル π ノ値ハ大略3.14159ナリ

多クノ精密ヲ要セザル實地計算上ニハ $\pi=3.142$ 或
ハ $\pi=\frac{22}{7}$ ニテ十分ナリ.

第五編問題集

254. 圓ニ外接スル等邊多角形ハ若シ其邊數ガ
奇數ナレバ正多角形ナリ.

255. 圓ニ内接スル等角多角形ハ若シ其邊數ガ
奇數ナレバ正多角形ナリ

256. 圓ニ外接スル等角多角形ハ正多角形ナリ

257. 正三角形ニ外接スル圓ノ直徑ハ之ニ内接
スル圓ノ直徑ノ二倍ナリ.

258. 圓ノ内接正三角形ノ面積ハ同圓ノ内接正
六角形ノ面積ノ半ニ等シ.

259. 圓ノ内接正六角形ノ面積ハ同圓ノ外接正
六角形ノ面積ノ四分ノ三ナリ

260. 直徑ノ長サ12.56尺ナル圓ノ半徑ヲ求ム.
($\pi=3.14$) (答2尺)

261. 直徑ノ長サ1.4米突ナル車輪ガ132基米
突ノ距離ヲ行クニハ幾回回轉スルカ. ($\pi=\frac{22}{7}$)
(答30000回)

262. 地球ノ半徑ハ凡ソ1640里ナリ其周圍ハ大
略何里ナリヤ $\pi=3.1416$ ヲ用キルト $\pi=\frac{22}{7}$ ヲ用キ
ルト其差凡ソ何里ナルカ (答 差凡5里)

263. 地球ハ一日ニ一回其軸ノ周リヲ回轉ス今
其直徑ヲ8000哩トスレバ赤道直下ノ或場所ハ每秒
何哩ヲ回轉スルカ. (答 凡0.3哩)

264. 半徑ノ長サ5寸ナル圓ノ面積ヲ求ム.
($\pi=3.14$) (答 78.5平方寸)

265. ニツノ圓周ノ和又ハ差ニ等シキ圓周ヲ畫
ケ.

266. 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トセル圓ノ面積
ハ他ノ二邊ヲ直徑トセル二圓ノ面積ノ和ニ等シ.

267. ニツノ圓ノ和又ハ差ニ等シキニツノ圓ヲ
畫ケ.

268. 與ヘラレタル圓ヲ之ト同心ナル圓ノ周ヲ

以テ二等分セヨ.

269. 直角ヲ五等分セヨ.

270. 半徑 r ナル圓ノ中心ヨリ之ニ内接スル正三角形正方形及ビ正六角形ノ一邊ニ至ル距離ヲ求ム

$$\left(\text{答 } \frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2} \right)$$

271. 半徑 12 寸ナル圓ニ内接スル正八角形ノ面積ヲ求ム
(答 $288\sqrt{2}$ 平方寸)

補習雜問題

第一編 直線

証明問題

1. ニツノ三角形ニ於テ二邊ト一中線トガ夫々相等シケレバ此ニツノ三角形ハ全等ナリ. [ニツノ場合アリ]

2. 四角形ノ三邊ト二夾角トガ夫々同順序ニ取リタル他ノ四角形ノ三邊ト二夾角トニ等シケレバ此ニツノ四角形ハ全等ナリ.

3. 三角形 ABC ニ於テ $AB < AC$ ニシテ點 D ハ角 BAC ノ二等分線ガ邊 BC ニ出會フ點ナレバ

$$BD < CD$$

4. 三角形 ABC ノ三邊上ニ其外方ニ向テ正三角形 BCA' , CAB' , ABC' ヲ畫ケバ

$$AA' = BB' = CC'$$

5. 三角形 ABC ノ角 B ノ二等分線ト角 C ノ外角ノ二等分線トノ夾角ハ角 A ノ半ニ等シ.

6. 三角形 ABC ノ角 B ノ外角ノ二等分線ト角 C ノ外角ノ二等分線トノ夾角ハ角 A ノ外角ノ半ニ等シ.

7. 凸五角形ノ各邊ヲ延長シテ星形ヲ作ルコトヲ得ルトキハ五ツノ交點ニ於テノ角ハ合セテ平角ニ等シ.

8. 三角形 ABC ニ於テ AD ヲ A ヨリ BC へ引ケル垂線トシ AE ヲ角 A ノ二等分線トスレバ角 DAE ハ二角 B, C ノ差ノ半ニ等シ.

9. 三角形ノ一角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ガ此角ヲ夾ム邊ノ各トナス角ハ他ノ二角ノ和ノ半ニ等シ.

10. 三角形ノ一角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ガ此角ノ對邊トナス角ハ他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ.

11. A, B ハ直線 MN ノ同ジキ側ニ在ル二點ナリ P ハ MN 上ノ一點ニシテ APM, BPN ナル相等シキ角ヲナス. 而シテ Q ハ MN 上ノ他ノ任意ノ點ナリ. 然ルトキハ

$$AP + BP < AQ + BQ$$

12. A, B ハ直線 MN ノ兩側ニ在ル二點ナリ P ハ MN 上ノ一點ニシテ APN, BPN ナル相等シキ角ヲ爲ス而シテ Q ハ MN 上ノ他ノ任意ノ點ナリ然ルトキハ $AP \sim BP > AQ \sim BQ$

13. 梯形ノ互ニ平行ナラザル二邊ガ相等シケレバ其二對角線ハ相等シ.

14. 四邊形ノ二雙ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ

付クル直線ノ交點ハ其二對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ノ中點ト相合ス.

15. 有限直線 AB ノ兩端 A, B 及ビ其中點 M ヨリ任意ノ直線ニ到ルベキ三平行線ヲ引キ夫々 A', B', M' ニ於テ之ニ會セシムレバ $2MM' \sim AA' + BB'$ 又ハ $AA' \sim BB'$ ニ等シ.

16. 三角形 ABC ノ三頂點及ビ其重心 G ヨリ之ニ交ハラザル任意ノ直線ニ垂線 AA', BB', CC', GG' ヲ引ケバ

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

第二編 圓

證明問題

17. 圓ノ中心ヲ通過セザル二弦ハ互ニ二等分スルヲ得ズ.

18. 正方形ノ對角線上ノ一點ヨリ二隣邊ニ平行ニ引キタル直線ト四邊トノ交點ハ同一圓周上ニ在リ.

19. 圓ノ内接四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ此點ト二頂點トヲ通過スル圓ニ切スル直線ハ本形ノ

一邊ニ平行ナリ。

20. 三角形ノ一頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ノ足ハ其延長ガ外接圓ノ周ニ出會フ點及ビ垂心ノ間ノ中點ナリ。

21. 三角形ノ一頂點ヨリ其垂心ニ至ル距離ハ其外心ヨリ此頂點ノ對邊ニ至ル距離ノ二倍ナリ。

22. 圓ノ二弦 AB, CD ガ直角ニ相交ハルトキハ弧 AC, BD ノ和ハ弧 AD, BC ノ和ニ等シ。

弦ノ延長ガ圓外ニ於テ直角ニ相交ハル場合ヲ吟味セヨ。

23. 三角形ノ傍心ハ其傍接圓ノ中心ナリ。

三角形ノ傍接圓トハ其一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ナリ。

24. 三角形ノ各邊上ニ外方ニ向ケテ作リタル三ツノ正三角形ノ外接圓ノ周ハ一點ヲ通過ス、又此三圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ハ一ツノ正三角形ヲナス。

25. 三角形ノ各邊ノ中點ト各頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ノ足ト各頂點ヨリ垂心ニ至ル直線ノ中點トハ同一ノ圓周上ニ在リ。

此圓ヲ三角形ノ九點圓ト稱ス。

26. 三角形ノ外心、垂心、重心及ビ九點圓ノ中心ハ同一ノ直線上ニアリ。又九點圓ノ中心ハ外心ヨ

リ垂心ニ至ル直線ノ中點ナリ。

27. 九點圓ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半ニ等シ

作 圖 題

28. 一角、其角ノ二等分線及ビ其頂點ヨリ出ヅル高サヲ知リテ三角形ヲ作レ。

29. 底邊、頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線及ビ外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

30. 三ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ニ在ル直線ヲ引ケ。

31. 三角形 ABC 内ニ於テ

$$\angle BOC = \angle COA = \angle AOB$$

トナル如キ一點 O ヲ看出セ。

32. 與ヘラレタル菱形内ニ正方形ヲ容ルルコトヲ求ム。

33. 一邊及ビ他ノ二邊ヘ引ケル中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

34. 三中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

35. 底邊、頂角及ビ他ノ二邊ノ和又ハ差ヲ知リテ三角形ヲ作レ。

36. 三角形ノ各頂點ヲ中心トシテ三圓ヲ作リ其各圓ガ他ノ二圓ニ切スル様ニセヨ。

37. 互ニ外切スル二圓ノ切點ヲ通過シ一定ノ

長サノ直線ヲ其兩端ガ各一圓周上ニ在ル様ニセヨ。

38. 相交ハル二圓ノ一交點ヲ通過シテ一線ヲ引キ各圓ノ之ヨリ截リ取ル弦ガ相等シクナル様ニセヨ。

39. 與ヘラレタル直線上ノ一定點ニ於テ本直線ニ切シ且與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫ケ。

40. ニツノ與ヘラレタル圓ニ共通ナル切線ヲ引ケ。

[1] 各圓ガ全ク他ノ外ニ在リテ出會ハザルトキハ共通切線四ツ有リ [2] 外接スルトキハ三ツ有リ [3] 相交ハルトキハ二ツ有リ [4] 内接スルトキハ一ツ有リ]

第三編 比及ビ比例

証明問題

41. 梯形ノ平行邊ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ヲ有スルニツノ部分ニ分ツ。

42. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點 D ヨリ二角 ADC, ADB ノ二等分線ヲ引キ邊 AC, AB ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシメ EF ヲ引ケバ $EF \parallel BC$

43. 二圓ガ外切スルトキハ其切點ヲ通過セザル其共通切線ノ二切點ノ間ニ在ル部分ハ二圓ノ直徑ノ間ノ比例中項ナリ。

44. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ其角頂ヨリ底邊ヘ引ケル垂線及ビ此角ヲ夾ム二邊ノ第四比例項ナリ。

45. D ガ二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ BC ノ延長上ノ一點ナレバ三角形 ABD 及ビ ACD ニ外接スル二圓相等シ。

46. 一點ヨリ多角形ノ總テノ頂點ヘ引ケル直線ヲ與ヘラレタル比ヲ有スルニツノ部分ニ分チ而シテ其分點ヲ順次ニ結ビ付クルトキハ原形ト相似ナル多角形ヲ得。

47. ニツノ相似多角形ヲ其對應邊ガ平行ナル様ニ置クトキハ各形ノ對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ハ平行ナルカ或ハ同一点ヲ通過ス

此點ヲニツノ相似形ノ **相似ノ中心** ト稱ス

48. 有限直線ヲ任意ノ與ヘラレタル比ヲ有スルニツノ部分ニ分ツコトヲ得。又等比ニアラザル任意ノ與ヘラレタル比ヲ有スルニツノ部分ニ外分スルコトヲ得而シテ斯ノ如キ分點ハ各一ツニ限ル。

[266, (269) ヲ見ヨ]

49. [262] ノ定理ヲ同一法ニ依リテ證明セヨ。

50. A, C, B, D ガ調和列點ニシテ M ガ AB ノ中點ナレバ AM ハ CM ト DM トノ間ノ比例中項ナリ。

51. 直線 AB ヲ點 C ニ於テ $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ ナル如ク内分シ A, C, B ヨリ平行線 AA', BB', CC' ヲ引キ AB ヲ截ラザル任意ノ直線ト A', B', C' ニ於テ交ハラシムレバ $(m+n)CC' = nAA' + mBB'$

52. 二圓ノ共通切線ハ其二中心ヲ通過スル直線上ニ於テ相交ハル而シテ二中心間ノ部分ヲ半徑ノ比ニ内分シ或ハ外分ス。

此交點ヲ二圓ノ相似ノ中心ト稱ス。

作圖題

53. 一ツノ直線ヲ A, B, C ナル三ツノ部分ニ分チ $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}, \frac{B}{C} = \frac{p}{q}$ ナル様ニセヨ。

54. 一點 O ヲ通過シテ二ツノ與ヘラレタル直線ト二點 A, B ニ於テ交ハル所ノ一直線ヲ引キ $\frac{OA}{OB}$ ガ與ヘラレタル比ニ等シクナル様ニセヨ。

55. 與ヘラレタル圓弧ヲ二分シ其二弦ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シクナル様ニセヨ

[直線ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二部分ニ分ツ法ヲ應用スベシ]

56. 三角形ノ外接圓ノ半徑及ビ其三邊ノ比ヲ知リテ其三角形ヲ作レ。

57. 圓周上ノ二定點ヲ通過シテ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ平行弦ヲ引ケ

軌跡問題

58. 一點 O ヨリ引ケル直線 OA ノ一端 A ハ常ニ此點ヲ通過セザル一定直線上ニ在リ、 P ガ OA ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ部分ニ分ツ點ナレバ P ノ軌跡如何。

59. 一點 O ヨリ引ケル直線 OA ノ一端 A ハ常ニ一定圓周上ニ在リ、 P ガ OA ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二部分ニ分ツ點ナレバ P ノ軌跡如何。

60. 一直線上相隣レル二ツノ部分ヲ AB, BC トス $\angle APB = \angle BPC$ ナル如キ P 點ノ軌跡ヲ求ム。

61. 一點ヨリ相交ハル二直線ノ各ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキトキ其點ノ軌跡ハ一雙ノ直線ナリ。

62. 問題 186 ニ於テ與ヘラレタル二ツノ直線ガ相交ハル場合ヲ論ゼヨ。

第四編 面積

証明問題

63. 梯形ノ互ニ平行ナラザル邊ノ一ツヲ底邊トシ其對邊ノ中點ヲ頂點トセル三角形ハ梯形ノ半ニ等シ.

64. 同一直線上ニ於テ相等シキ底邊ヲ有シ其同ジ側ニ在ル同ジ高サノ二ツノ三角形ニ於テ底邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ各形ノ二邊或ハ其延長ノ間ニ在ル其直線ノ部分ハ相等シ.

65. 同底等積ナル三角形ノ中ニテ二等邊三角形ノ周ハ最小ナリ.

66. 三角形 ABC ニ於テ $\angle C = 60^\circ$ ナルトキハ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC \cdot BC$$

67. 三角形 ABC ニ於テ $\angle C = 120^\circ$ ナルトキハ

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + AC \cdot BC$$

68. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トスレバ

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

69. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシ O ヲ任意ノ一點トスレバ

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3GO^2$$

70. A, B, C, D ヲ同一直線上ニ此順ニ取リタル四點トスレバ

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

71. ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トシ F ヲ二對角線 AC, BD ノ交點トスレバ

$$\frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD} = \frac{AF}{CF}$$

72. 三角形 ABC ノ三頂點ヨリ對邊ニ至ル三線 AA', BB', CC' ガ形内ノ一點 O ヲ通過スルトキハ

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = 1$$

計算問題

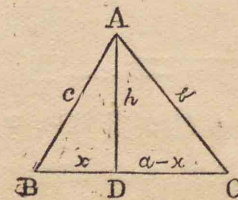
73. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

$\triangle ABC$ ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊

ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハセ

A ヲリ引ケル垂線 AD ヲ h トシ

BD ヲ x トス



$\triangle ABD$ ヲリ $h^2 = c^2 - x^2 \dots\dots\dots (1)$

$\triangle ACD$ ヲリ $h^2 = b^2 - (a-x)^2 \dots\dots (2)$

$$\therefore c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 \quad \text{因テ } x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$x \text{ ノ此値ヲ(1)ニ換置シテ } h = \sqrt{c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}}$$

根號内ノ式ヲ因數ニ分解シ

且ツ $a+b+c=2s$ ト置ケバ

$$h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots\dots\dots [1]$$

74. 三邊ノ長サ 6, 8, 12 寸ナル三角形ニ於テ最大邊ヘ引ケル垂線ヲ計算セヨ (答 3.55 寸餘)

75. 三角形ノ面積ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

所要ノ面積ヲ S トスレバ

$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \times \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

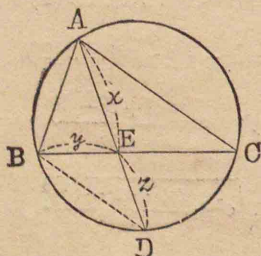
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots\dots\dots [2]$$

76. 三邊ノ長サ 13, 14, 15 尺ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ (答 84 平方尺)

77. 三角形ノ中線ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

$$\text{角 } A \text{ ヨリ出ヅル中線} = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \dots\dots\dots [3]$$

78. 問題 74ニ於ケル三角形ノ中線ヲ計算セヨ (答約 9.75, 8.60, 3.74)



79. 三角形ノ各角ノ二等分線ノ長サヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

三角形 ABCニ外接スル圓ヲ畫キ角 Aノ二等分線 AEヲ延長

シ其周ヲ Dニテ截ラシメ BDヲ引ケ $\triangle ABD, AEC$ ハ相似ナルヲ以テ

$$\frac{x+z}{c} = \frac{b}{x} \dots\dots\dots (1)$$

又[266]=依リテ

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{a-y} \dots\dots\dots (2)$$

又[340]=依リテ $ax=y(a-y) \dots\dots\dots (3)$

(1)(2)及ビ(3)ヨリ y 及ビ z ヲ逐出ストキハ

$$x = \sqrt{bc \left\{ 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right\}}$$

根號内ノ式ヲ因數ニ分解シ且ツ $a+b+c=2s$ ト置ケバ

$$\text{角 } A \text{ ノ二等分線} = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcs(s-a)} \dots\dots\dots [4]$$

80. 三角形ヲ外接スル圓ノ半徑ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

R ヲ外接圓ノ半徑トスレバ問題 229ニ依リテ

$$2Rh = bc$$

$$R = \frac{bc}{2h}$$

$$= \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

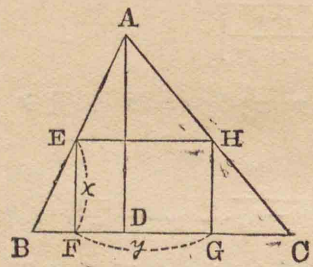
$$R = \frac{abc}{4S} \dots\dots\dots [5]$$

81. 正三角形ノ面積 164.51 平方寸ナルアリ其一邊ノ長サヲ求ム (答 19.49)

82. ニツノ相似形アリ其面積合セテ 579 坪ニシテ其對應邊ノ比ハ 7 ト 12 トノ如シ各形ノ面積ヲ求ム
(答 147, 432 坪)

作圖題

83. 與ヘラレタル三角形ニ二邊ノ比ガ與ヘラレタル數ニ等シキ矩形ヲ内接セヨ



EFGH ヲ所要ノ矩形トシ
AD=h, BC=a, y=mx トセヨ

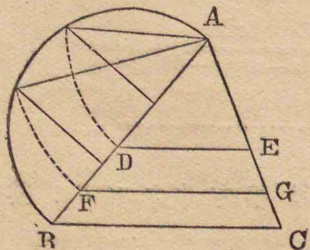
然レバ $\frac{h-x}{y} = \frac{h}{a}$

$$x = \frac{ah}{a+mh}$$

即チ x ハ a+mh, a 及ビ h ノ第四比例項ヲ以テ表ハスベキ直線ノ數價ナリ

84. 與ヘラレタル三角形ニ正方形ヲ内接セヨ

85. 與ヘラレタル三角形 ABC ヲ其一邊ニ平行



スル直線ニ依リテ三等分スベシ

DE, DF ヲ要スル如ク引カレタル線トシ

AB=a, AD=x, AF=y

トスレハ

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{\triangle AFG}{\triangle ABC} = \frac{2}{3}$$

因テ $x = \pm \sqrt{\frac{a^2}{3}}$ $y = \pm \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$

即チ x ハ a ト $\frac{a}{3}$ トノ比例中項ニシテ y ハ a ト $\frac{2a}{3}$ トノ比例中項ナリ。

負ノ値ハ x 及ビ y ヲ BA ノ延長上ニ取ルベキコトヲ示ス。

86. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ平行スル直線ニ依リテ二等分セヨ。

87. 與ヘラレタル三角形ニ等シク與ヘラレタル高サノ三角形ヲ作レ。

88. 三角形ノ角及ビ面積ヲ與ヘテ其三角形ヲ作レ。

89. 與ヘラレタル直線 AB ヲ點 P ニ於テ内分シ或ハ外分シ $AP^2 \sim BA^2$ ガ與ヘラレタル正方形ニ等シクナル様ニセヨ。

90. 直線 a ヲ知テ $a\sqrt{2}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ引ケ。

91. 直線 a, b, c, d, e ヲ知テ $\sqrt{\frac{abc}{d} - e^2}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ引ケ。

92. 平行四邊形ヲ其一頂點ヨリ引ク所ノ直線ニ依リテ五等分セヨ

93. 三角形ヲ其一邊上ノ與ヘラレタル一點ヨリ引ク所ノ直線ヲ以テ三等分セヨ.

第五編 正多角形及ビ圓

雜 問 題

94. 次ノ正多角形ヲ以テ一點ノ周圍ノ表面ヲ充塞シ得ルコトヲ證明セヨ.

- ① 正三角形六箇 ② 正方形四箇
 ③ 正六角形三箇
 ④ 正八角形二箇及ビ正方形一箇
 ⑤ 正十二角形二箇及ビ正三角形一箇
 ⑥ 正方形正六角形及ビ正十二角形各一箇

95. OCヲ圓ノ直徑 AOBニ垂直ナル半徑トシ Mヲ OBノ中點トシ MA上ニ MCニ等シク MDヲ取レバ CDハ此圓ニ内接スル正五角形ノ一邊ニ等シク ODハ同シク正十角形ノ一邊ナリ.

96. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正五角形ノ對角線ヲ d トスレバ

$$p = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

97. 半徑 r ナル圓ニ内接スル正多角形ノ一邊ヲ a トシ同圓ニ外接スル同邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ a_1 トスレバ

$$a_1 = \frac{2ar}{\sqrt{(4r^2 - a^2)}} \quad a = \frac{2a_1 r}{\sqrt{(4r^2 + a_1^2)}}$$

98. 一ツノ圓及ビ其中心ヲ與ヘ「コムバス」ノミヲ以テ圓周上ニツノ對點(或直徑ノ兩端)ヲ求ム

99. 與ヘラレタル任意ノ多角形ヲ之ト等積ナル正十角形ニ變形スベシ

100. 正方形ノ四隅ヨリ夫々三角形ヲ截リ去リ正八角形ヲ作ルベシ.

——{(終リ)}——

