平面三角法教科書 全

樺正董著

明治三十八年二月二日
文部省檢定濟

樺正董著

平面三角法教科書

東京 三省堂發行

緒言

本書ハ專ラ中學程度ノ學校敎科書ニ充テンガタメニ編輯セシモノニシテ予ガ多年此種ノ學校ニ於テ敎授セシ材料ヲ基トシ初メテ出版セシモノナリ

本書ハ三角函數ノ理解ニ重キヲ措クト同時ニ其應用ニ注意シタリ書中三角形ノ解法ノ條ヲ設ケズシテ到ル處解法ノ例ヲ設クルガ如キ是ナリ

本書ハ同時ニ六ツノ函數ヲ記憶理解シ難キヲ慮リ始メハ專ラ正弦,餘弦,正切ニ於テ説キ他ノ函數ハ其反數ナリトシテ定義シタリ

本書ハ上述ノ如ク全ク予ノ腹案ニ成レリト雖𪜈問題ノ如キハ已ニ世ニ用ヒラレタル書ト同樣ニ英書ホール氏,ナイト氏ノ書,ケージー氏ノ書,ホブソン氏ノ書ヨリ採聚セシモノ多シ

對數用法ヲ學習スル期ハ甚短キヲ以テ態々對數表ヲ購求スルハ困難ナル事情ナキヲ保シ難シ其

タメ本書ハ對數表ヲ卷末ニ附スルヿトセリ十分ナラズト雖ドモ以テ對數用法ヲ知ルニ足ルベシ然レドモ完全ナル對數表ヲ用フルト否トハ學生ハ一ニ敎師ノ指揮ニ因ラザル可ラズ

本書ハ其答ヲ附セザルヲ正式トセリ然レドモ別ニ答式ヲ出版セルヲ以テ之ヲ携帶セントセバ敎師ノ許可ヲ要スベシ

予ノ編輯セル他ノ敎科書ト同樣ニ本書ニ就テ意見ヲ抱持セラルヽ諸氏ノ忠告ヲ希望ス

明治三十七年八月

樺　正　董　識

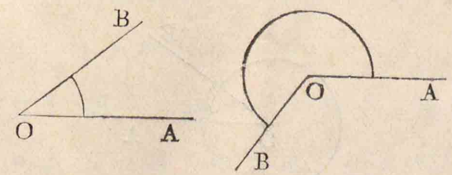
目次

平面三角法教科書

緒　論

1. 角度

幾何學ニ於テ知レル如ク角ノ量ハ其二邊ノ中一邊OBガ他ノ一邊OAノ位置ヨリ廻轉ヲ起シ角頂Oヲ中心トシテ現位置マデ廻轉シタル量ナリトシテ定メラル



種々ノ混亂ヲ避クルタメニ廻轉ハ時針ノ廻轉方向ト反對ニ廻轉セシムルヲ常トス

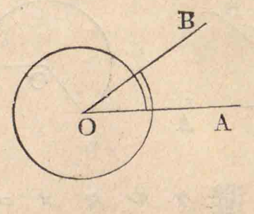
角度ハ直角ヲ基本トシ一直角ノ90分ノ1ヲ度ト云ヒ,一度ノ60分ノ1ヲト云ヒ,一分ノ60分ノ1ヲ秒ト云フ

此命法ヲ六十分法ト云フヿアリ

度,分,秒ハ°,′,″,ナル符號ヲ右肩ニ記シ之ヲ表ス

例ヘバ27度32分54秒ヲ27°32′54″ノ如ク記ス

上ノ如ク角ノ量ハ廻轉量ナリトシテ定ムルトキハ廻轉線ガ次第ニ廻轉シテ終ニOAニ一致スルトキハ其角度ハ360°ニシテ尙廻轉線ガOAヲ越エテ廻轉スルヿ次圖ノ如クナルトキハ360°以上ノ角ヲ生ズルヿ明カナリ



(例一) $1\frac{2}{27}$直角ヲ度分秒ニテ表セ

$$90^\circ\times1\frac{2}{27}=96^\circ\frac{2}{3}$$

$$60'\times\frac{2}{3}=40'$$　答 90°　40′

(例二) 廻轉線ガ2廻轉ト$\frac{3}{4}$直角ダケ廻轉スルトキハ其角度ハ幾度幾分幾秒ナルカ

$$360^\circ\times2=720^\circ$$

$$90^\circ\times\frac{3}{4}=67^\circ30'$$

$720^\circ+67^\circ30'=787^\circ30'$……答

例題

1. 0.6直角,0.24直角,$\frac{7}{8}$直角ヲ度分秒ニテ表セ
2. 直角ヲ單位トシ27°,32°16′,24°52′30′ヲ表セ

(注意第一) 角ト角頂ヲ中心トシテ書キタル圓弧トハ比例スルヲ以テ分度器ト稱スル半圓形ノ弧上ニ度ヲ刻シタルモノニテ角ヲ計ルヿハ何人モ知ルヿナルベシ

(注意第二) 同一ノ理ヲ以テ長サノ單位ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ノ半圓周ノ長3.1415926……(πヲ以テ之ヲ示ス,πハパイト讀ム)ヲ標準トシテ弧ノ長サニテ角ノ大キサヲ表スヿアリ從テ

180°　ハ　π

90°　ハ　$\frac{\pi}{2}$

60° ハ $\frac{\pi}{3}$

ナルガ如シ即$\frac{\pi}{2}$ノ角トハ長サノ單位ニ等シキ半徑ヲ以テ角頂ヲ中心トシテ圓ヲ書クキハ其挾弧ガ$\frac{\pi}{2}$ニ等シキ樣ナル角ヲ云ヒ表スモノニシテ90°ニ相當ス

例題

1. 30°, 45°, 120°, 150° ヲπヲ用ヰテ表セ
2. $\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{27}$ ハ何度ニ當ルカ

---

2. 三角法ノ目的

初等三角法ハ幾何學ノ分枝ニシテ三角形ノ三ツノ邊,三ツノ角ノ内何レカノ三ツ(三ツノ角ヲ除ク)ヲ知リテ他ノ邊,角ヲ求ムルニアリ其豫備トシテ三角函數(三角比,圓函數トモ云フ)ト稱スルモノノ性質ヲ說キ其應用トシテ距離及高サノ容易ナル測量ヲ說ク

第壹編

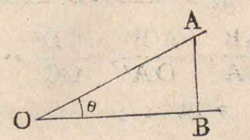
銳角ノ三角函數, 直三角形ノ解法

第壹章

銳角ノ三角函數(正弦,餘弦,正切)

3. 正弦,餘弦.

一角θ(シーター)ノ任意ノ一邊例ヘバOA上ノ一點Aヨリ他ノ邊OBニ垂直線ABヲ下シ直三角形ヲ作ルトセン



θ角ノ對邊ABノ斜邊OAニ於ケル比$\frac{AB}{OA}$ヲθノ正弦(Sine)ト云ヒ之ヲ次ノ如ク略記ス

$$\mathrm{Sin}\,\theta$$

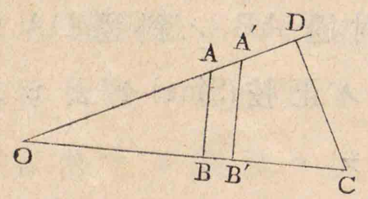
θ角ノ隣邊OBノ斜邊ニ於ケル比$\frac{OB}{OA}$ヲθノ餘弦(Cosine)ト云ヒ之ヲ次ノ如ク略記ス

$$\mathrm{Cos}\,\theta$$

4. 正弦,餘弦ノ變化

角ガ一定シタルキ二邊ノ内何レノ邊上ノ何レノ點ヨリ他ノ邊ニ垂直線ヲ下シテ直三角形ヲ作リテモ正弦,餘弦ヲ定ムルコヲ得ベシ

例ヘバ次ノ圖ニ於テ$\triangle OAB$, $\triangle OA'B'$, $\triangle OCD$ハ相似ナルヲ以テ$\frac{AB}{OA}$, $\frac{A'B'}{OA'}$, $\frac{CD}{OC}$ハ相等シク卽何レモ$\mathrm{Sin}\,\theta$トスルコヲ得ベシ

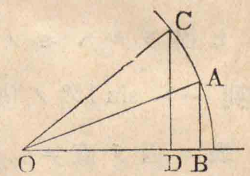


然レモ角度ノ大小ニ因リテ正弦,餘弦,ハ價ヲ異ニスベシ就中角ノ増大ト共ニsineハ増大シcosineハ減少スルコハ卷末ニ記シタル三角函數眞數表ト稱スルモノヲ見レバ分明ナルベシ

(注意第一) 廻轉線ノ長サヲ常ニ同一ナラシムルキハ角ノ増大ト共ニsineノ増大スルコヲ容易ニ幾何學的ニ證明スルコヲ得卽

$$\sin COD=\frac{CD}{OC}$$

$$\sin AOB=\frac{AB}{OA}$$



然ルニ$CD>AB$ナルコハ容易ニ證明シ得ラレ且$OC=OA$ナルヲ以テ

$$\frac{CD}{OC}>\frac{AB}{OA}$$

従テ　$\sin COD>\sin AOB$

同樣ニ$\cos COD<\cos AOB$ナルコヲ證明シ得ベシ

(注意第二) 上ノ注意ニ因リテ角ガ微小ナルキハ其sineハ微小ニシテ90°ニ近ヅクニ従テ其sineハ1ニ近ヅクコヲ知ル之ヲ次ノ如ク記ス

$\sin 0°=0$, $\sin 90°=1$

同様ニ $\cos 0°=1$, $\cos 90°=0$ ナルヿヲ知ル

(注意第三) 表ニ示セル sine 及 cosine ノ價ノ計算ハ初等三角法ノ程度外ナリトス即初等三角法ニ於テハ成表ヲ其儘用フレバ足レリ

(注意第四) 前述ノ如ク $\sin\theta$, $\cos\theta$ ハ比ヲ表スモノニシテθナル角ヲ知ルト同時ニ其價ヲ知ルヿヲ得ベク逆ニ $\sin\theta$ 或ハ $\cos\theta$ ノ價ヲ知ルト同時ニ其角ノ大サヲ知ルヿヲ得即表ハ二様ニ用ヒ得ラルヽモノナリ

(例一) $\sin 15°$ ノ價ヲ問フ

表ニ因テ直ニ

$\sin 15°=0.25882$ ....答

(例二) $\cos\theta=0.500$ ナルトキノθノ大キサ如何

表ノ cosine ノ下 0.50000 ヲ見出シ 60° ノ cosine ナルヿヲ知ル故ニ $\theta=60°$ ヲ得

(例三) $\sin 37°10'$ ノ價ヲ問フ

$\sin 37°=0.60182$, $\sin 38°=0.61566$ ニシテ 1° ニ就テ 1384 (小數第五位ヲ單位ト見テ) ノ差アリ 10′ ニ對シテ

ハ何程ノ差ヲ生スベキヤヲ比例式 $60':10'=1384:x$ ヨリ求ムレバ $x=230.6$ 即 231 ヲ得之ヲ $\sin 37°$ ノ價 0.60182 ニ加ヘ 0.60413 ヲ $\sin 37°10'$ ノ價トス

但シ差ハ元來比例スルモノナラザレドモ上ノ如クナシテモ大ナル誤差ヲ生ズルヿナキモノナリ

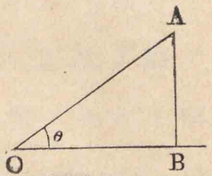
例題

1. $\sin 24°20'$, $\cos 24°20'$ ノ價ヲ求メヨ
2. $\sin\theta=0.52992$, $\cos\theta=0.85717$ ノ θ ヲ求メヨ
3. 如何ナル角ノ sine ガ 0.60645 トナルカ
4. 如何ナル角ノ cosine ガ 0.79688 トナルカ
5. 直三角形 ABC ニ於テ $\angle A=40°$ ナルトキハ $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ ノ價如何 (但 $\angle C$ ハ直角ナリ)
6. 前問ニ於テ $\angle A=30°$ ナルトキハ其 sine, cosine ハ如何, 其餘角即 B ノ sine, cosine ハ如何
7. 前問ニ於テ $\frac{BC}{AB}$ 即 $\sin A$ ガ 0.90631 ナルトキ $\angle A$ ノ大キサ如何

5. 正切(tangent)

sine 及 cosine ヲ說キタル圖ト同樣ノ圖ニ於テ角ノ對邊ABノ角頂ノ隣邊OBニ於ケル比$\frac{AB}{OB}$ヲθノ正切(tangent)ト云ヒ之ヲ次ノ如ク略記ス

$\tan\theta$ 或ハ $tg\,\theta$ 或ハ $tang\,\theta$



然ルニ

$$\frac{AB}{OB}=\frac{\frac{AB}{OA}}{\frac{OB}{OA}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

故ニ

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (1)$$

ヲ得從テ之ヲ$\tan\theta$ノ定義トナスコヲ得

6. 正切ノ價ノ變化

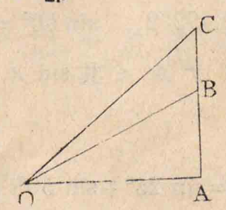
tangent ハ角ノ變化ニ伴ヒテ變化スルコ sine, cosine ノ如シ

卷末ニ於テ三角眞數表ノ tangent ノ欄ハ其價ヲ記シタルモノナリ

表ニ因リテ tangent ハ角ノ增大ト共ニ增大シ90°ニ近ヅクニ從テ無限ニ增大スルコヲ知ル(但表ノ∞ハ無限ニ增大スルコヲ表ス符號ナリ)

(注意第一) 角ノ增大ト共ニ tangent ノ增大スルコ及90°ニ近ヅクニ從テ無限ニ增大スルコヲ幾何學的ニ證明セントセバ次ノ圖ノ如ク直三角形ヲ作ルニ固定線OA上ノ一點Aヨリ之ニ垂直線ヲ立ツベシ卽

五圖



$\angle AOC > \angle AOB$

$$\tan AOC=\frac{AC}{OA},\ \tan AOB=\frac{AB}{OA}$$

然ルニ此二ツノ比ノ分子ヲ比較スレバ

AC>AB, 分母ハ同一ナルヲ以テ

$$\frac{AC}{OA}>\frac{AB}{OA}$$

故ニ $\tan AOC>\tan AOB$

且角度ガ微小ナル𪜈OAハ一定スレ𬼀角ノ對邊ハ微小ナルヲ以テtangentハ微小ナルベク90°ニ近ヅクニ從テOAハ一定シ對邊ハ無限ニ增大スルヲ以テtangentノ無限ニ增大スルヿヲ知ルベシ之ヲ次ノ如ク記ス

$$\tan 0°=0,\ \tan 90°=\infty$$

(注意第二) 其他sine, cosineニ於ケル注意及表ノ使用法ハtangentニモ適用セラルベシ

(注意第三) sine, cosine, tangentハ何レモ角ノ大キサニ比例スルモノニアラズ例ヘバ

$$\sin 25°=0.42262 \qquad \sin 50°=0.76604$$

卽角度ガ二倍トナルモ其sinノ價ハ二倍セザルヿヲ知ル

又 $\sin(25°+50°)=\sin 25°+\sin 50°$ ナラザルヿヲ知ルベシ

例　　題

1. $\tan 27°30'$ ノ價ヲ求メヨ
2. 5ノ圖ニ於テ $\theta=30°$ ナル𪜈ハ $\frac{AB}{OB}$ ナル比如何
3. $\tan\theta=0.50953$, $\tan\theta=0.51688$ ノ θ ヲ求メヨ

應　　用

7. 上ノ諸條ニ述ベタル如ク角ノ大キサヲ知ル𪜈ハ表ヲ使用シテ直ニ其三角函數sine, cosine, tangentヲ知ルヿヲ得卽角ノ任意一邊上ノ一點ヨリ他ノ邊ニ垂直線ヲ下シテ作レル直三角形ノ二邊ノ比ヲ知ルヿヲ得ベシ

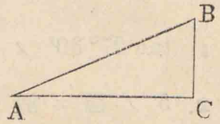
今二三ノ例ヲ以テ其應用ヲ示サントス

(例一) 直三角形ABCノ∠A=25°, 邊AB=45尺ナル𪜈邊BCノ長サ如何又邊ACノ長サ如何

[解] $\angle A=25^\circ$ ナルヲ以テ表ニ因リテ

$$\sin 25^\circ=0.42262,\ \cos 25^\circ=0.90631$$

定義ニ因リテ



$$\frac{BC}{AB}=\sin 25^\circ$$

即 $$\frac{BC}{45}=0.42262$$

$\therefore$ $$BC=45\times 0.42262=19.01790$$

同樣ニ

$$\frac{AC}{AB}=\cos 25^\circ$$

$$\frac{AC}{45}=0.90631$$

$$AC=45\times 0.90631=40.78395$$

故ニ　BCハ19.0179尺, ACハ40.78395尺ナリ

(注意) 上ノ圖ニ於テACヲ水平ナリトセバ高處ニアル點Bヲ觀測シテ得タル$\angle BAC$ヲ仰角ト云フ

(例二) 煙突アリ其高サヲ知ラズ其底ヨリ80尺ノ地ヨリ之ヲ見テ仰角40°ヲ得タリト云フ煙突ノ高サ如何

[解] 上圖ニ於テ所求ノ高サBCト已知ノ邊ACト

ノ比 $\frac{BC}{AC}$ 即tangentハ$\angle A=40^\circ$ナルヲ以テ表ニ因リテ其價0.83910ヲ得故ニ

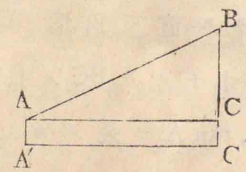
$$\frac{BC}{AC}=\tan 40^\circ$$

$$\frac{BC}{80}=0.83910$$

$$BC=80\times 0.83910=67.128$$

故ニ　BCハ67.128尺ナリ

(注意) 此問題ニハ地平ヨリ仰角ヲ測リタリトシタリ實際ニ於テハ眼ノ高サヲ算入セザル可カラズ今眼ノ高サAA'ガ4.5尺ナル𪜈ハ上ノ如クBCヲ求メタル後$CC'=AA'=4.5$尺ヲ加フルヲ要ス



(例三) 樹木ノ頂上ヨリ繩ヲ引キシニ其一端ハ樹底ヨリ72尺ノ地ニ達シタリ而シテ其地ニ於テ樹ノ頂上ノ仰角30°ヲ得タリト云フ繩ノ長サ如何

[解] 例一ノ圖ニ於テ$AC=72$尺, $\angle A=30^\circ$トス今ACト未知ノABトノ比 $\frac{AC}{AB}$ 即$\cos 30^\circ$ハ表ニ因リ0.86603ナルヿヲ知ル故ニ

$$\frac{AC}{AB}=0.86603$$

$$\frac{72}{AB}=0.86603$$

$$AB=\frac{72}{0.86603}=83.138$$

故ニ　AB ハ 83.138尺ナリ

問題

1. 直三角形ABCノCヲ直角トシAB=5寸, BC=4寸ナル𪜈Aノ角ノ sine, cosine, tangent 如何

2. $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ ナル𪜈 $\tan\theta$ ハ如何

3. ∠C ガ直角ナル直三角形 ABC ニ於テ $\sin A=\frac{3}{5}$, AB=10寸ナル𪜈BCノ長サ如何, ACノ長サ如何 cos A, tan A ヲ求メヨ

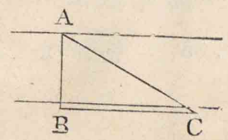
4. $\tan A=\frac{3}{4}$ ナル𪜈Aヲ幾何學的ニテ求ムルヿ如何(幾何學的トハ「コンパス」ト定規トヲ用ヒテ書クヿヲ云フ)

5. Cガ直角ナル直三角形ABCニ於テ $\tan A=\frac{3}{4}$ ナル𪜈AC=4寸トスレバBCノ長サ及ABノ長サ如何

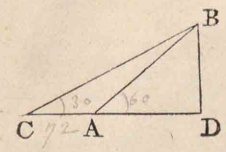
次ニ sin A, cos A 如何

6. 同上ノ直三角形ニ於テ AC=7寸, BC=24寸トシ cos A, sin A ヲ求メ其二乘ノ和 $\sin^2 A+\cos^2 A$ ハ1ニ等シキヿヲ表セ

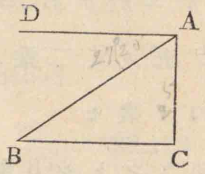
7. 河ノ幅ABヲ知ラントシB點ヨリABニ垂直ナル方向ニ40間歩ミCニ達シ∠ACB=50°ヲ得タリ河幅ABヲ計算セヨ



8. 一點Aニ於テ丘ノ頂上ニアル一點Bノ仰角60°ヲ測リ丘ノ逆方向ニ72間退キCニ於テ再ビ丘ヲ見シニ其仰角30°ヲ得タリト云フ丘ノ高サBD如何



(注意) 前ニ仰角ヲ說明セリ若シ次圖ノ如ク觀測スル物體Bガ水平ADノ下ニアル𪜈∠DABヲ俯角ト云フ



9. 25間高キ丘上ヨリ地上ノ一物體ヲ見テ俯角 $27^\circ 20'$ ヲ得ルトキハ眼ト物體トノ距離如何

10. 水平上高サ30間ノ燈臺ヨリ同方向ニアル二船ノ俯角 $84^\circ, 35^\circ$ ニ見ルトキ二船ノ距離如何

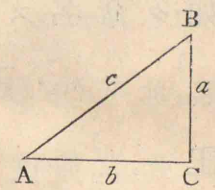
第二章

鋭角ノ三角函數ノ續キ

(正割，餘割，餘切)

8. 三角函數ノ反數(逆數，倒數)ノ必要

例ヘバ次圖ニ於テ $AC=b=72$ 及 $\angle A=30^\circ$ ヲ知リテ $AB=c$ ヲ求メントスルトキハ已ニ述ベタルガ如ク



$$\frac{b}{c}=\cos A$$

ニ於テ b ト $\cos A$ (表ニヨリテ) トヲ知リテ c ヲ求ムレバヨシ卽

$$b=c.\cos A$$

$$c=\frac{b}{\cos A}$$

$$c=\frac{72}{\cos 30^\circ} \text{ 或ハ } 72\times\frac{1}{\cos 30^\circ}$$

此 $\frac{1}{\cos 30^\circ}$ ノ如ク1ヲ $\cos 30^\circ$ ニテ除シタルモノ卽 $\cos 30^\circ$ ノ反數ニ當ルモノヽ表ヲ作リ置クトキハ除法ヲ施ス代リニ乘法ヲ施スコトナリ計算上便宜ナルベシ

(注意) 元數aト其反數$\frac{1}{a}$ノ積ハ常ニ1ニ等シ故ニ例ヘバcos Aノ反數$\frac{1}{\cos A}$トcos Aトノ積ハ1ニ等シキコヲ注意スベシ

9. 正割,餘割,餘切

前ニ定メタル或角θノ正弦,餘弦,正切ノ反數卽$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ノ反數ニ次ノ如ク命名ス

$\frac{1}{\cos\theta}$ヲθノ正割(secant)ト云ヒ$\sec\theta$ト畧記シ,$\frac{1}{\sin\theta}$ヲθノ餘割(cosecant)ト云ヒcosec θト略記シ,$\frac{1}{\tan\theta}$ヲθノ餘切(cotangent)ト云ヒ$\cot\theta$ト略記ス

(注意) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ナルヲ以テ$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ナルコヲ知ルベシ

例題

1. $\sin 25^\circ=0.423$ナル片cosec 25°ノ價如何

2. $\cos 35^\circ=0.819$及$\sin 35^\circ=0.57358$ヲ知リテ$\tan 35^\circ$, $\cot 35^\circ$ヲ計算セヨ

3. 8ノ圖ニ於テ$b=4$, $c=5$ナル片$\sec A$ノ價如何

---

10. 正割,餘割,餘切ノ變化

上ノ如クシテ設ケラレタルsecant, cosecant, cotangentハ夫レ〻cosine, sine, tangentノ反數ナルヲ以テcosine, sine, tangentノ變化ノ如ク角ノ變化ニ伴ヒテ變化ス卷末ニ於ケル三角眞數表ヲ見レバ分明ナルベシ

11. 應用

8ニ於テ述ベタル如ク$\sec\theta$, cosec θ, $\cot\theta$ヲ設クル片例ヘバ8ノ例ノ如ク$c=\frac{b}{\cos\theta}$ノ如ク三角函數ニテ除スルノ必要ヲ生ズル場合ニ於テ

$$c=b\times\frac{1}{\cos A}=b\sec A$$

トナシ得ベク從テ三角函數ニテノ除法ヲ三角函數ノ乘法ニ移シ得ベシ

(例一) 8ノ圖ニ於テ $\angle A=40^\circ$, $b=25$ 間ナルトキハ

cノ長サ如何

[解] $c=25\sec 40^\circ$

$=25\times 1.3054$

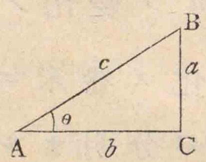
$=32.635$

(例二) 塔アリ其高サ24間ニシテ之ヲ或點ヨリ見シニ其高度30°ナルコヲ知リタリ其點ハ基底ヨリ何程距リタルカ

[解] BCヲ塔トシAヲ測點トス

$\angle A=30^\circ$, $a=24$ 間

トシbヲ求メンニ先



$$\frac{a}{b}=\tan A$$

$\therefore$ $a=b\tan A$

$\therefore$ $b=\dfrac{a}{\tan A}=a.\cot A$

故ニ $b=24^{間}.\cot 30^\circ$

$=24^{間}\times 1.7321$

$=41^{間}.5704$..............答

(注意) 上ノ如ク或三角函數ノ除法ハ其反數ニ當ル三角函數ノ乘法ニ移シ得ラルヽコハ $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\cot\theta$ ノ表ヲ有スルトキニ限ルベク且對數表ヲ用フルトキハ別ニ此等ノ三角函數ヲ要スルコナカルベシ卽此ノ如ク此等ノ三角函數ハ應用上大ナル便宜ヲ有セザレモ夫レ々々特種ナル性質ヲ有スルモノナルコヲ知リ得ラルベシ

例題

1. 水面ヨリ50尺高キ橋上ノ人30°ノ俯角ニテ一船ヲ見タリ其船ハ橋下ヨリ幾尺距リタルカ
2. 塔アリ或處ヨリ見レバ其塔頂ノ仰角ハ30°ニシテ塔身ノ高サハ100尺ナリト云フ今塔頂ニ尖レル桿アリ同處ヨリ其尖頂ノ仰角45°ナリト云フ其桿ノ長サ如何

三角函數相互ノ關係

12. 關係ノ公式

已ニ述ベタル如ク

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (1)$$

次ニ或數ト其反數トノ積ハ1ニ等シキヲ以テ

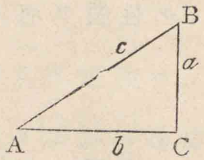
$$\sec\theta\cos\theta\ =1 \qquad (2)$$

$$\operatorname{cosec}\theta\sin\theta=1 \qquad (3)$$

$$\cot\theta\tan\theta\ =1 \qquad (4)$$

又圖ニ於テ

$$\sin\theta=\frac{a}{c},\ \cos\theta=\frac{b}{c}$$



爾後 $(\sin\theta)^2$ ヲ $\sin^2\theta$ ノ如ク示ストキハ

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{c^2}$$

$$=\frac{c^2}{c^2}$$ (幾何學ニ依リ $a^2+b^2=c^2$)

$$\therefore\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta\ =1. \qquad (5)$$

次ニ

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$ ((5)ニ依リテ)

$$\therefore\quad 1+\tan^2\ =\sec^2\theta \qquad (6)$$

同様ニ

$$1+\cot^2\ =\operatorname{cosec}^2\theta \qquad (7)$$

ヲ證明シ得ベシ此證明ハ學生ニ讓ル

13. 一函數ヲ知リテ他ノ函數ヲ求ムル法

上ニ述ベタル七ツノ公式ニ因リテ一角ノ或三角函數ヲ知ルトキハ他ノ三角函數ヲ求ムルコトヲ得

(例一) $\sin 30^\circ=0.5$ ヲ知ルトキ他ノ五ツノ三角函數ノ價如何

[解] 先公式(5)卽

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

ニ於テ $\sin\theta=0.5$ ヲ代用スルトキハ

$$0.5^2+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=1-0.5^2$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-0.5^2}=\sqrt{0.75}$$

公式(2)卽

$$\sec\theta\cos\theta=1$$

ニ因リテ

$$\sec\theta\,.\,\sqrt{0.75}=1$$

$$\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{0.75}}$$

以下學生ニ委ヌ

(例二) $\tan\theta=a$ ナルトキ $\cot\theta,\ \cos\theta$ ノ價如何

公式(4)ニ因リテ先 $\tan\theta$ ト直接ニ關係シタル $\cot\theta$ ヲ求ムレバ

$$\cot\theta . a = 1 \qquad \therefore \ \cot\theta = \frac{1}{a}$$

公式(6)ニ因リテ

$$1 + a^2 = \sec^2\theta \qquad \therefore \ \sec\theta = \sqrt{1+a^2}$$

次ニ(2)ニ因リテ $\cos\theta$ ト $\sec\theta$ ト直接ニ關係スルコヲ知ル故ニ

$$\sqrt{1+a^2} . \cos\theta = 1 . \ \therefore \ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

例　題

1. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ ナル片 $\sin\theta$ 及 $\tan\theta$ ノ價如何
2. $\cot\theta = a$ ナル片 $\sin\theta$ ノ價如何

---

14. 恒等式ノ證明

既ニ公式(5)ヲ用ヒテ(6)ナル公式ヲ得ルコヲ證明シタリ尙一二ノ恒等式ヲ證明スルノ例ヲ示サントス

(例一) $\sin^2A\cot^2A + \cos^2A\tan^2A = 1$ ヲ證セヨ

[解]
$$\sin^2A\cot^2A + \cos^2A\tan^2A = \sin^2A\frac{\cos^2A}{\sin^2A} + \cos^2A . \frac{\sin^2A}{\cos^2A}$$
$$= \cos^2A + \sin^2A$$
$$= 1$$

(注意) 恒等式ヲ證スルニ概ネ左邊ノ式ヲ變ヲテ右邊ノ式ヲ導クニアリ然レ圧或辨解ナキ片ハ次ノ例ノ如ク右邊ノ式ヨリ左邊ノ式ニ化スルモ可ナリ次ノ例ノ如シ

恒等式ノ證明ニ於ケル他ノ注意ハ後ニ於テ述ブベシ

(例二) $\tan^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta\tan^2\theta - 1$ ヲ證セヨ

[解]
$$\mathrm{cosec}^2\theta\tan^2\theta - 1 = \frac{1}{\sin^2\theta} . \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 1$$
$$= \frac{1}{\cos^2\theta} - 1$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta$$

例　題

1. $(1-\cos^2A)\,\mathrm{cosec}^2A = 1$ ヲ證セヨ

2. $(1+\tan^2 A)\cos^2 A=1$ ヲ證セヨ

(注意) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ナル公式ヨリ

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta \text{ 或ハ } \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

又

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta \text{ 或ハ } \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

ヲ得ル如ク一ノ公式ノ項ノ變換等ヨリ個々ノ應用上便宜ナル形ニ導クヿアリ

問題

1. 圓池ノ中央ニ直立スル竿アリ其高サ100尺ナリ今周ノ一點ヨリ仰角60°ヲ測リ得ル𪜈ハ池ノ半徑如何

2. 高サ5.2尺ノ人距離50尺ナル兩電信柱ノ中央ニ立チテ各柱ノ仰角31°ヲ得タリト云フ電信柱ノ高サ如何

3. 二ツノ旗竿アリ其高サ240尺及80尺ナリ今第二竿ノ底ヨリ第一竿ノ仰角ヲ測リテ60°ヲ得タリト云フ第一竿ノ底ヨリ第二竿ヲ測ル𪜈其仰角如何

4. $\sin A=\frac{1}{2}$ ヲ知リテ $\sec A$ 及 $\cot A$ ヲ求メヨ

5. $\sec A=7$ ナル𪜈 $\sin A$ 及 $\cot A$ ハ如何

6. $25\sin A=7$ ナル𪜈 $\tan A$ ヲ求メヨ

7. $\tan A=\frac{4}{3}$ ナル𪜈 $\sin A$ 及 $\cot A$ ノ價ヲ求メヨ

8. $\sin A-\cos A=0$ ナル𪜈 $\operatorname{cosec} A$ ヲ求メヨ

9. $\sin A=\frac{m}{n}$ ナル𪜈 $\sqrt{n^2-m^2}\tan A=m$ ナルヿヲ證セヨ

次ノ恒等式ヲ證セヨ

10. $\cot A\sec A\sin A=1$

11. $\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sin\alpha$

12. $(1+\tan^2\theta)(1-\sin^2\theta)=1$

13. $\frac{1}{\sec^2 A}+\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}=1$

14. $\frac{\cos A}{\sec A}+\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A}=1$

15. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=1-2\cos^2\alpha=2\sin^2\alpha-1$

16. $(\sec\theta\cot\theta)^2-(\cos\theta\operatorname{cosec}\theta)^2=1$

17. $\tan^2\alpha-\cot^2\alpha=\sec^2\alpha-\operatorname{cosec}^2\alpha$

18. $\tan\theta+\cot\theta=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta$

19. $\sqrt{1+\cot^2 A}.\ \sqrt{\sec^2 A-1}.\ \sqrt{1-\sin^2 A}=1$

20. $(\cot\theta+1)^2+(\cot\theta-1)^2=2\operatorname{cosec}^2\theta$

21. $\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\cot^2\alpha}{\cot^2\alpha}=\sin^2\alpha\sec^2\alpha$

22. $\dfrac{1}{1-\sin\alpha}+\dfrac{1}{1+\sin\alpha}=2\sec^2\alpha$

23. $(\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sec\theta\operatorname{cosec}\theta+2$

24. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

25. $\tan^2\alpha+\sec^2\beta=\sec^2\alpha+\tan^2\beta$

26. 塔アリ其高サヲ知ラズ或一點ニ於テ仰角25°ヲ得之ヨリ塔ノ方向ニ125尺進行シテ仰角48°ヲ得ル𪜈塔ノ高サ如何

27. 船アリ或砲臺ヲ正西ニ見タリシヨリ3海里西南ニ航シタル後再ビ前ノ砲臺ヲ見シニ正北ニ當レリト云フ船ノ初メノ位置ヨリ砲臺マデノ距離如何

28. $\sec\theta$, $\mathrm{ccsec}\,\theta$, $\cot\theta$ ニ於テ θ ガ微小ナル𪜈及90°ニ近ヅク𪜈ノ各價ヲ問フ且0°ヨリ90°ニ至ルマデ此三ツノ函　ハ如何ニ變化スルカ

第三章

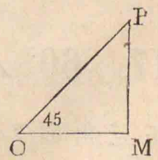
特別ナル角ノ三角函數

（餘角ノ三角函數ノ比較）

15. 一般ニ或ル角ノ三角函數ハ三角眞數表ニ因リテ其價ヲ知リ得ベキコトヲ述ベタリ然レ𪜈特別ニ容易ニ其三角函數ノ價ヲ求メ得ラル丶角アリ今其二三ヲ次ニ示サントス

16. 45ノ三角函數

$\angle POM=45°$ トスレバ $\angle OPM=45°$ ナルヲ以テ



$$PM=OM$$

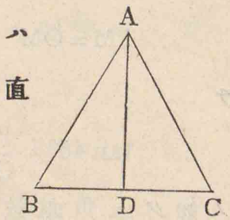
從テ

$$\tan 45°=\frac{PM}{OM}=1 \qquad (8)$$

此ノ如ク三角函數ノ一ヲ知リタル以上ハ他ノ三角函數ヲ求ムルコヲ得即

$$\left.\begin{aligned}
&\sec^2 45 = 1 + \tan^2 45\\
\therefore\quad &\sec 45^\circ = \sqrt{1+\tan^2 45} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\\
&\cos 45^\circ \times \sec 45^\circ = 1\\
\therefore\quad &\cos 45^\circ = \frac{1}{\sec 45} = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\tan 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ}\\
\therefore\quad &1 = \frac{\sin 45}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \therefore\ \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ}\\
\therefore\quad &\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.\\
&\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ}\\
\therefore\quad &\cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}\right\}\ (8)$$

17. 60° ノ三角函數



正三角形ヲ作ルトキハ其一角Bハ60°ニシテ角頂AヨリBCニ垂直線ADヲ下ストキハ

$$BD = CD$$

$$\therefore\quad AB = BC = 2\,BD$$

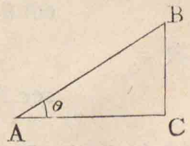
故ニ

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{DB}{2BD} = \frac{1}{2} \qquad (9)$$

斯ク三角函數ノ一ツヲ知リタル以上ハ容易ニ次ノ結果ヲ得ベシ

$$\left.\begin{aligned}
\sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\
\tan 60^\circ &= \sqrt{3}\\
\sec 60^\circ &= 2\\
\operatorname{cosec} 60^\circ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\\
\cot 60^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}\right\}\qquad (9)$$

18. 或角ノ三角函數ト餘角ノ三角函數トノ比較



∠BACヲθニテ表ストキハBハ其餘角ニ當ルヲ以テ90°−θナリ

然ルニ

$$\sin A = \frac{BC}{AB},\ \cos B = \frac{BC}{AB}$$

故ニ

$$\sin A = \cos B$$

卽 $\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$ (10)

同様ニ

$$\cos A = \sin B$$

即

$$\cos\theta = \sin(90^\circ - \theta) \qquad (10)$$

又 $\tan B = \dfrac{AC}{BC}$ ナルヲ以テ

$$\cot B = \frac{BC}{AC}$$

然ルニ

$$\tan A = \frac{BC}{AC},$$

ナルヲ以テ

$$\tan A = \cot B$$

即

$$\tan\theta = \cot(90^\circ - \theta) \qquad (10)$$

從テ又

$$\cot\theta = \tan(90^\circ - \theta) \qquad (10)$$

次ニ

$$\sec A = \operatorname{cosec} B$$

何トナレバ

$$\sec A = \frac{1}{\cos A},\ \operatorname{cosec} B = \frac{1}{\sin B}$$

然ルニ此等ノ分母 $\cos A$, $\sin B$ ハ相等シキヲ以テ

$$\sec A = \operatorname{cosec} B$$

ナレバナリ

從テ $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) \qquad (10)$

同様ニ

$$\operatorname{cosec}\theta = \sec(90^\circ - \theta) \qquad (10)$$

例　題

1. $\sin 25^\circ$ ハ 65° ノ如何ナル三角函數ト等シキカ

2. 次ノ等式ノ右邊ニ如何ナル三角函數ヲ記スベキカ

$\sin 40^\circ =$

$\cos 40^\circ =$

$\tan 40^\circ =$

$\cot 40^\circ =$

$\sec 40^\circ =$

$\operatorname{cosec} 40^\circ =$

---

19. 30°ノ三角函數

上ノ例題2ト同樣ナル問題ニ歸スルコナ得

$$\left.\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\
\cos 30^\circ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\tan 30^\circ &= \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\cot 30^\circ &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\
\sec 30^\circ &= \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \\
\operatorname{cosec} 30^\circ &= \sec 60^\circ = 2
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

例　題

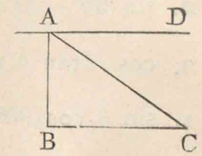
1. $\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x=\frac{1}{2}$ ノxヲ求メヨ
2. $\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x=\frac{1}{2}$ ノxヲ求メヨ
3. $\tan x=1$, $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\tan x=\sqrt{3}$ ノxヲ求メヨ
4. $\operatorname{cosec} x=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sec x=2$, $\cot x=\sqrt{3}$ ノxヲ求メヨ

20. 應用

次ニ二三ノ應用ノ例ヲ示サントス

(例一) 高サ100尺ノ船檣ノ頂上ニ於テ一小艇ノ俯角30°ヲ得ル𪜈ハ船ト小艇トノ距離幾何

[解] AヲABナル船檣ノ頂トス



$\angle DAC=30^\circ$

$\therefore \quad \angle CAB=60^\circ$

$$\frac{BC}{AB}=\tan 60^\circ$$

$$\frac{BC}{100}=\sqrt{3}$$

$BC=100\sqrt{3}=173.2$..........

(例二) $\sin A=\cos 4A$ ノAヲ求メヨ

[解] 此等式ヨリAト4Aトハ互ニ餘角ナルヿヲ知ル故ニ

$A+4A=90^\circ$

$5A=90^\circ$

$A=18^\circ$..................答

問　題

1. 次ノ方程式ノAヲ求メヨ

I. $\cos A=\sin 7A$

II. $\tan A=\cot 3A$

III. $\sec 5A=\operatorname{cosec} A$

次ノ恒等式ヲ證セヨ

2. $\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)=\sin A$

3. $\cos A\tan A\tan(90^\circ-A)\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=1$

4. $\sin A\cos(90^\circ-A)+\cos A\sin(90^\circ-A)=1$

5. $\tan^2 A\sec^2(90^\circ-A)-\sin A\operatorname{cosec}^2(90^\circ-A)=1$

6. $\dfrac{\cot^2 A\sin^2(90^\circ-A)}{\cot A+\cos A}=\tan(90^\circ-A)-\cos A$

7. $x\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)=\cos(90^\circ-A)$ ヨリxヲ求メヨ

次ノ方程式ヲ解ケ(卽θヲ求メヨ)

8. $2\sin\theta=\operatorname{cosec}\theta$

9. $\tan\theta=3\cot\theta$

10. $\operatorname{cosec}^2\theta+\cot^2\theta=3$

11. $6\cos^2\theta=1+\cos\theta$

12. $\tan\theta=4-3\cot\theta$

13. $6\tan\theta-5\sqrt{3}\sec\theta+12\cot\theta=0$

14 $3\tan^2 30^\circ+\dfrac{1}{4}\sec 60^\circ+5\cot^2 45^\circ-\dfrac{2}{3}\sin^2 60^\circ$ ノ價ヲ問フ

(注意) 三角形ヲ解クトハ三角形ノ已知數ヲ用ヒテ未知數ヲ求ムルコヲ云フ

次ノ各題ニ於テ三角形ヲ解ケ

15. $C=90^\circ,\ b=12,\ a=4\sqrt{3}$

16. $2c=b=6\sqrt{3},\ B=90^\circ$

17. $A=60^\circ,\ c=8,\ C=90^\circ$

18. $a=100,\ B=90^\circ,\ C=40^\circ 51'$

19. $B=90^\circ,\ c=37,\ a=100$

20. 三角形ABCニ於テ$A=30^\circ$, $B=135^\circ$, $AB=100$尺ナル時ハCヨリABノ延長ニ下シタル垂直線ノ長サ如何

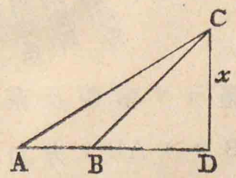
[解] $\angle CB\ =45^\circ$ $\quad\therefore\quad \angle BCD=45^\circ$

$\therefore\qquad x=BD$

然ルニ

$$\frac{CD}{AD}=\tan A$$

卽



$$\frac{x}{x+100}=\tan 30^\circ$$

卽

$$\frac{x}{x+100}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

之ヨリxヲ求ムレバ

$$x=50(\sqrt{3}+1)$$

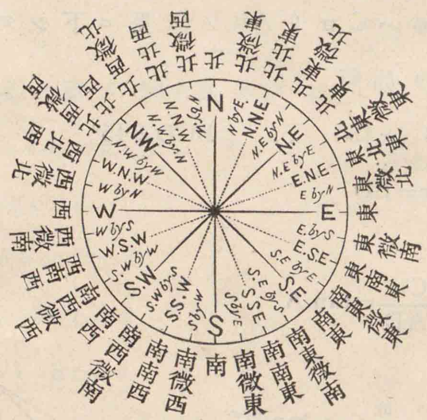
21. 塔アリ其高サヲ知ラズ一點ニ於テ仰角45°ヲ

得而シテ200メートル退行シ再ビ塔ノ仰角30°ヲ得タリト云フ塔ノ高サ如何

22. $\sin\theta, \cos\theta$ ハ1ヨリ大ナラザルコトヲ證セヨ

23. $\sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$ ハ1ヨリ小ナラザルコトヲ證セヨ

(注意) 航海用ノ羅針盤ニ於テ東西南北ノ間ヲ各八等分シテ32ノ方向ヲ次ノ如ク命名ス



24. 燈臺ヨリ南西及南ヨリ15°東ノ方向A,BアリABノ方向ハ南東ニシテAヨリノ距離6里ナルトキ二船ノ距離如何

25. 二船アリ或港ノ北ヨリ一ハ35°西ニ他ハ南ヨリ55°西ノ方向ニ夫レゾレ一時間ニ8哩及$8\sqrt{3}$哩ノ割合ニテ航スルトキ一時間ノ終リニ於ケ

ル二船ノ距離及第一船ヨリ第二船ノ方向如何

26. A,B,C ノ三點アリAヨリCヲ見タル方向ハ北ヨリ10°西ニシテBヲ見タル方向ハ北ヨリ50°東ナリ又BヨリCヲ見タル方向ハ北ヨリ40°西ナリト云フBトCトノ距離10哩ナルトキAヨリCニ至ル距離如何

第二編

一般ノ角ノ三角函數

21. 既ニ廻轉線ノ廻轉ニ因リテ360°以上ノ角ヲ生ズルヿヲ説キ且90°以下ノ各函數ヲ説ケリ今一般ノ角ノ三角函數ヲ説カントス

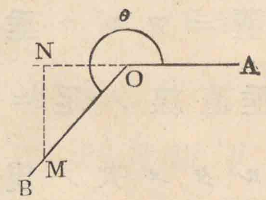
22. 360°ヨリ小ナル角ノ三角函數(正弦,餘弦,正切)

90°ヨリ大ナル角ノ三角函數ハ90°ヨリ小ナル角ノ三角函數ト同様ニ定メラル唯角ノ一邊ノ上ノ一點ヨリ他ノ邊ノ延長ニ垂直線ヲ下スヿアルノ差異アルノミ

例ヘバ次圖ノ如ク180°ト270°トノ間ニアルθ角ノsine, cosine, tangentハ動線OBノ上ノ一點MヨリOAノ延長ニ垂直線MNヲ下シテ

$$\sin\theta=\frac{MN}{OM},\ \cos\theta=\frac{ON}{OM},\ \tan\theta=\frac{MN}{ON}$$

或ハ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

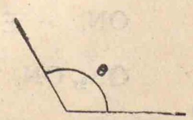


トナスガ如シ

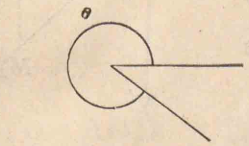
例題

1. 次ノ(一)圖卽90°ト180°トノ間ニアル角ノsine, cosine, tangentトハ如何ナルモノヲ云フカ

(一)



(二)

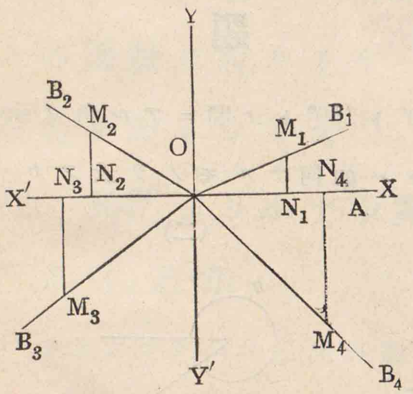


2. 上ノ(二)圖卽270°ト360°トノ間ニアル角ノsine, cosine, tangentトハ如何ナルモノヲ云フカ

23. 三角函數ノ正負

次圖ノ如ク互ニ垂直ナル二直線ヲ引

キ角ノ一邊ガOXニ一致シ動線OBガOB_1, OB_2, OB_3, OB_4ノ位置ニアル𪜈垂直線MN及角頂Oヨリ垂直線ノ足ニ至ルONノ正負ヲ定ムルタメ次ノ規約ヲ設クルヲ例トス



第一　ONハOノ右方ニアルモノヲ正トシ左方ニアルモノヲ負トス

故ニ圖ノ ON_1, ON_4ハ正ニシテON_2, ON_3ハ負ナリ

第二　垂直線MNハXX'ノ上方ニアルモノヲ正トシ下方ニアルモノヲ負トス

故ニ圖ノ M_1N_1, M_2N_2ハ正, M_3N_3, M_4N_4ハ負ナリ

第三　動線ハ常ニ正トス

故ニ OM_1, OM_2, OM_3, OM_4ハ正ナリ

故ニ $\frac{ON_2}{OM_2}$ ハ負量ヲ正量ニテ除シタル分數ナルヲ以テ負, $\frac{M_3N_3}{ON_3}$ ハ負量ヲ負量ニテ除シタル分數ナルヲ以テ正ナリ

第一　90度以下ノ角ニ於テハ

$$\sin AOB=\frac{M_1N_1}{OM_1},\ \cos AOB=\frac{ON_1}{OM_1},\ \tan AOB=\frac{M_1N_1}{ON_1}$$

ナルヲ以テ各函數ノ記號ハ正ナリ

第二　90度以上180度以下ノ角ニ於テハ

$$\sin AOB_2=\frac{M_2N_2}{OM_2},\ \cos AOB_2=\frac{ON_2}{OM_2},\ \tan AOB_2=\frac{M_2N_2}{ON_2}$$

ナルヲ以テ

$\sin AOB_2$ノ記號ハ正, $\cos AOB_2$ノ記號ハ負, $\tan AOB_2$ノ記號ハ負ナリ

此ノ如クセハ他ノ場合ニ於テモ正負ヲ判定スルヿヲ得

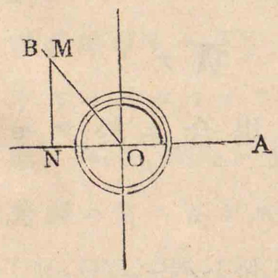
之ヲ一ツノ表ニ示サンニ

	sin	cos	tan
0°－ 90°	正	正	正
90°－180°	正	負	負
180°－270°	負	負	正
270°－360°	負	正	負

24. 360°ヨリ大ナル角ノ三角函數ノ週期

360°ヨリ大ナル角ノ三角函數モ360°ヨリ小ナル角ノ函數ト同樣ニシテ定メラル

例ヘバsin 820°トハ圖ノ如ク動線OBノ上ノ一點Mヨリ他ノ邊ノ延長上ニ垂直線MNヲ下シテ



$$\sin 820° = \frac{MN}{OM}$$

同樣ニ

$$\cos 820° = \frac{ON}{OM}$$

$$\tan 820° = \frac{MN}{ON}$$

此ノ如ク820°卽360°×2＋100°ノ三角函數ハ360°×2ヲ除却セル殘リ卽100°ノ三角函數ト異ルヿナシ

從テ或角ニ360°ノ若干倍ヲ加フルモ減ズルモ其三角函數ハ變ズルヿナシ

360°ヲ週期ト云フ

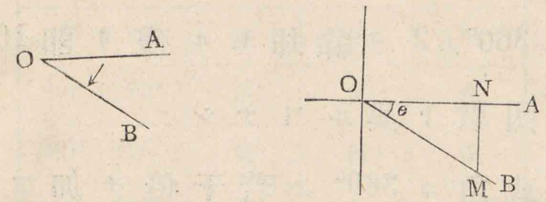
（例題） 次ノ各三角函數ヲ360°以下ノ三角函數ニテ表セ且其正負ヲ定メヨ

I. 560°　II. 740°　III. 1345°

25. 負角，負角ノ三角函數

既ニ廻轉線ハ時針ノ廻轉ト反對ナル方向ニ廻轉セシムルヿトシタリ而シテ次圖ノ如ク矢ノ方向卽時針ノ廻轉ト同一ナル方向ニ廻轉セシメテ生ジタル角ヲ負角ト云ヒ之ニ對シテ前ニ定メタル角ヲ正角ト云フ

(一)　(二)



負角ノ三角函數モ正角ノ三角函數ト同樣ニ定メラル

例ヘバ上圖(二)ニ於テ

$$\sin(-\theta)=\frac{MN}{OM},\ \cos(-\theta)=\frac{ON}{OM},\ \tan(-\theta)=\frac{MN}{ON}$$

從テθノ大キサニ因リテ其正負ヲ定ムルヿヲ得

例題

1. 次ノ各三角函數ノ正負ヲ定メヨ

$\sin(-36°)$, $\cos(-36°)$, $\tan(-126°)$, $\cos(-345°)$

2. $\sin(-486°)$ハ$360°$ヨリ小ナル幾度ノ正角ノ$\sin$ニ等シキカ

3. $\sin 24°$ト$\sin(24°-360°)$ト等シキヤ否ヤ之ヲ圖ニテ説明セヨ

(注意) 或角ニ$360°$ヲ加ヘテモ或ハ減ジテモ其角ノ三角函數ハ變ゼザルヿヲ述ベタリ

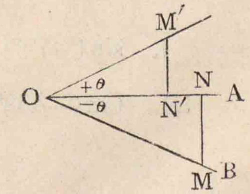
或角ヨリ$360°$ノ若干倍ヲ減ジテ得タルモノガ負トナル場合ニ於テモ三角函數ハ變ゼザルヿヲ此例ニ於テ知ルヿヲ得ベシ

26. 負角ト正角トノ三角函數ノ比較

$(-\theta)$ノ三角函數ト$(+\theta)$ノ三角函數トヲ比較センニ

第一

$$\sin(-\theta)=\frac{MN}{OM},\ \sin(+\theta)=\frac{M'N'}{OM'}$$



此二ツノ比ニ於テ分子,分母ノ絕對値ノミニ就テ云フ𪜈ハ$\triangle OMN$, $\triangle OM'N'$ハ相似ナルヲ以テ二ツノ比ハ相等シ

然レ𪜈正負ヲ區別スル𪜈ハOM, OM'ハ正ナレ𪜈MN, $M'N'$ハ正負ヲ異ニスルヲ以テ二ツノ比ハ正負ヲ異ニス

故ニ $\sin(-\theta)$ ト $\sin(+\theta)$ トハ絶對値等シク正負ヲ異ニス即

$$\frac{\sin(-\theta)}{\sin(+\theta)}=-1 \quad 即 \quad \sin(-\theta)=-\sin(+\theta) \qquad (12)$$

第二

$$\cos(-\theta)=\frac{ON}{OM'}, \quad \cos(+\theta)=\frac{ON'}{OM'}$$

此二ツノ比ハ上ト同様ニ絶對値相等シク且 OM, OM′ ハ正, ON, ON′ ハ同方向ナルヲ以テ記號ヲ同クス

故ニ

$$\cos(-\theta)=\cos(+\theta) \qquad (12)$$

第三　上ト同様ノ觀察ヲ以テ

$$\tan(-\theta)=-\tan(+\theta) \qquad (12)$$

(例題) 次ノ角ヲ 360° ヨリ小ナル正角ノ同數ニテ表セ

I. $\sin(-75^\circ)$　　II. $\cos(-275^\circ)$

III. $\tan(-432^\circ)$　　IV. $\tan(-973^\circ)$

---

27. 一般ノ角ノ正割, 餘割, 餘切

90° ヨリ大ナル角或ハ負角ノ secant, cosecant, cotangent, ハ 90° 以下ノ角ト同様

ニ cosine, sine, tangent ノ反數トシテ定メラル

例ヘバ

$$\sec 432^\circ=\frac{1}{\cos 432^\circ}, \quad \operatorname{cosec} 490^\circ=\frac{1}{\sin 490^\circ},$$

$$\cot(-23^\circ)=\frac{1}{\tan(-23^\circ)}$$

ナルガ如シ

(例題) 次ノ函數ノ正負ヲ定メヨ

$\sec 232^\circ$, $\operatorname{cosec} 490^\circ$, $\cot(-23^\circ)$

---

28. 各三角函數ノ關係

既ニ 90° 以下ニ於テ定メタル三角函數ノ關係ノ公式即 (1) ヨリ (7) マデノ公式例ヘバ

$$\cos\theta\sec\theta=1$$

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

ハ 90° 以上ノ角及負角ノ場合ニ其儘之ヲ用フルコトヲ得ベシ何トナレバ其定義ハ同様ナレバナリ

例題

1. $\cos^2(-\theta)+\sin^2(-\theta)=1$ ナルコヲ證セヨ

又 $1+\tan^2(-\theta)=\sec^2(-\theta)$ ナルコヲ證スベシ

2. $\cos^2 820^\circ+\sin^2 820^\circ=1$ 及 $1+\cot^2 820^\circ=\mathrm{cosec}^2 820^\circ$ ヲ證スベシ

---

29. 90°以上180°以下ノ角ト90°以下ノ角トノ三角函數ノ比較(補角ノ三角函數)

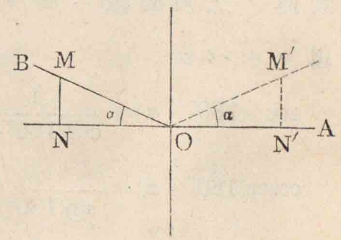
90°以上ノ角ノ三角函數ハ常ニ90°以下ノ角ノ三角函數ニテ表スコヲ得ベシ

第一　90°以上180°以下ノ角AOBニ於テ其角ト180°トノ差MONヲαトスレバAOBハ$(180^\circ-\alpha)$ナリ

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{MN}{OM}$$

$M'ON'=\alpha$ ヲ別ニ作レバ

$$\sin\alpha=\frac{M'N'}{OM'}$$



此二ツノ等式ノ右邊ハ相似三角形ノ理ニ因リテ絕對値相等シク且同記號ノ分母,分子ヲ有スルヲ以テ全ク相等シ即

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha \qquad (13)$$

又

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{ON}{OM}$$

$$\cos\alpha=\frac{ON'}{OM'}$$

此二ツノ等式ノ右邊ハ絕對値相等シクシテ同記號ノ分母,異記號ノ分子ヲ有スルヲ以テ

$$\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha \qquad (13)$$

同様ニ

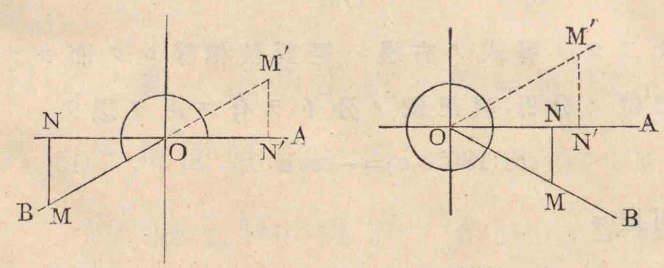
$$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha \qquad (13)$$

上ノ三ツノ公式ハ$180-\alpha$トαトハ互ニ補角ナルヲ以テ補角ノ三角函數ヲ比較シタル公式ト見做スコヲ得

其他ノ三角函數ニ於ケル公式ハ其定義ヨリ直ニ導カルベシ

$$\left.\begin{aligned}
\sec(180^\circ-\alpha)&=\frac{1}{\cos(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{-\cos\alpha}=-\sec\alpha,\\
\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha)&=\frac{1}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha,\\
\cot(180^\circ-\alpha)&=\frac{1}{\tan(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{-\tan\alpha}=-\cot\alpha
\end{aligned}\right\}(1)$$

第二　180°以上ノ角ノ三角函數ニ於テモ上ト同樣ニ90°以下ノ角ノ三角函數ニテ表スコトヲ得



例　　題

1. 次ノ各角ノ三角函數ヲ90°以下ノ角ノ三角函數ニテ表セ

sin 250°,　cos 250°,　tan 250°

sin 300°,　cos 300°,　tan 300°

2. 次ノ各角ノ三角函數ヲ問フ

sin 135°,　cos 135°,　tan 135°,　sec 135°,
sin 120°,　cos 120°,　tan 120°,　sec 120°,
sin 150°,　cos 150°,　tan 150°,　sec 150°,

sin 225°,　cos 225°,　tan 225°,　sec 225°,
sin 210°,　cos 210°,　tan 210°,　sec 210°,
sin 240°,　cos 240°,　tan 240°,　sec 240°,

sin 315°,　cos 315°,　tan 315°,　sec 315°,
sin 300°,　cos 300°,　tan 300°,　sec 300°,
sin 330°,　cos 330°,　tan 330°,　sec 330°,

(注意第一)　360°以上ノ正角或ハ負角ノ三角函數ハ既ニ360°以下ノ正角ノ三角函數ニテ表シ得ラルヽコトヲ知リタルヲ以テ上ニ述ベタルコトニ因リテ凡テノ正角或ハ負角ハ90°以下ノ正角ノ三角函數ニテ表スコトヲ得

又18ニ述ベタルコトニ因リテ凡テノ角ノ三角函數ヲ45°以下ノ正角ノ三角函數ニ化スルコトヲ得

注意第二) 一函數ノ價ヲ知リテ他ノ函數ノ價ヲ求ムル𪜈起ル正負ノ複記號ハ其角ノ大キサヨリ之ヲ定ムルヲ要ス例ヘバ $\sin A=\frac{1}{2}$ ニシテ A ガ $90°$ 以上 $180°$ 以下ナル𪜈 $\cos A$ ノ價ヲ求ムル場合ニハ $\cos A$ ハ負ナルヲ以テ

$$\cos A=-\sqrt{1-\sin^2 A}$$

トナスガ如シ

問題

1. $\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ知リテ $\tan 120°$ ヲ求メヨ

2. $\sec\frac{2\pi}{3}=-2$ ヲ知リテ $\sin\frac{2\pi}{3}$ ヲ求メヨ

3. $\cos 0°\sin^2 270°-2\cos 180°\tan 45°$ ノ値ヲ求メヨ

4. $\tan\pi\cos\frac{3\pi}{2}+\sec 2\pi-\mathrm{cosec}\frac{3\pi}{2}$ ノ値ヲ求メヨ

5. $\sec A=-\frac{25}{7}$ ニシテ A ハ $180°$ ト $270°$ トノ間ニアル𪜈 $\cot A$ ノ價如何

6. A ハ $180°$ ト $270°$ トノ間ニアリテ $3\tan A=4$ ナル𪜈 $2\cot A-5\cos A+\sin A$ ノ價ヲ求メヨ

7. $\tan(180°+A)=\tan A$ ナルヿヲ證明セヨ

8. $\sin(90°+A)=\cos A$ ヲ證明セヨ

9. $\cos(270°+A)$ ヲ A ノ三角函數ニテ表セ

10. $\tan(\theta-\pi)$ ヲ θ ノ三角函數ニテ表セ

11. $\sec(180°+A)\sec(180°-A)$
$+\cot(90°+A)\tan(180°+A)$ ヲ簡單ニセヨ

12. 次ノ函數ノ價ヲ求メヨ

I. $\mathrm{cosec}(-660°)$　II. $\cot 840°$　III. $\sin 3015°$

IV. $\cos 2400°$　V. $\sec(-5895°)$　VI. $\sec\frac{2\pi}{3}$

VII. $\cot\frac{16\pi}{3}$

13. $\cos(A-90°)=\sin A$ ナルヿヲ證セヨ

14. $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ノ θ ヲ求メヨ($0°$ ヨリ $360°$ マデノ角ニテ)

15. $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ ノ θ ヲ求メヨ($0°$ ヨリ $360°$ マデノ角ニテ)

16. $\tan\theta=-\sqrt{3}$ ノ θ ヲ求メヨ($0°$ ヨリ $360°$ マデノ角ニテ)

17. $\sin A=\sin B$ ナル𪜈 A ト B トノ關係ヲ求ムベシ

第三編

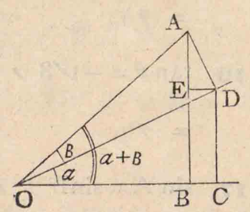
第一章

二角ノ和,差ニ關スル公式

30. $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ ノ公式

既ニ $\sin(s+\beta)$ ハ一般ニ $\sin\alpha+\sin\beta$ ト等シカラズ $\cos(\alpha+\beta)$ ハ $\cos\alpha+\cos\beta$ ト等シカラザルコヲ注意セリ

今 $\sin(\alpha+\beta)$ 及 $\cos(\alpha+\beta)$ ヲ α, β ノ三角函數ニテ表ス所ノ公式ヲ作ラントス



今 $\angle DOC=\alpha$, $\angle AOD=\beta$ トスレバ $\angle AOB=\alpha+\beta$ ナリ

此 $\alpha+\beta$ ノ一邊 OA 上ノ一點ヨリ他ノ一邊 OB 上ニ垂直線ヲ引クトキハ

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{AB}{OA}$$

今 A ヨリ β 角ノ一邊 OD ニ垂直線 AD ヲ下シ其足 D ヨリ α ノ一邊 OC ニ垂直線 DC ヲ下シ D ヨリ OC ニ平行ニ DE ヲ引クトキハ $AB=DC+AE$ ナルヲ以テ

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC}{OA}+\frac{AE}{OA}$$

$\frac{DC}{OA}$ ヲ二ツノ分數ノ積ニ化スルニ各分數ノ分子,分母ガ丁度一ツノ三角形ノ二邊トナル樣ニスレバ $\frac{DC}{OD}\times\frac{OD}{OA}$ トナル

同樣ニ $\frac{AE}{OA}$ ハ $\frac{AE}{AD}\times\frac{AD}{OA}$ トナル

故ニ

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC}{OD}\times\frac{OD}{OA}+\frac{AE}{AD}\times\frac{AD}{OA}$$

然ルニ $\frac{DC}{OD}=\sin\alpha$, $\frac{OD}{OA}=\cos\beta$, $\frac{AE}{AD}=\cos\angle EAD=\cos\alpha$ (α ト $\angle EAD$ トハ其二邊夫レ々々垂直ナルヲ以テ相等シ), $\frac{AD}{OA}=\sin\beta$ ナリ故ニ

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (14)$$

又同樣ニ

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OB}{OA}$$

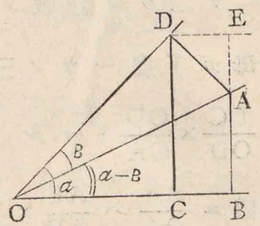
$$=\frac{OC-DE}{OA}$$

$$=\frac{OC}{OA}-\frac{DE}{OA}$$

$$=\frac{OC}{OD}\times\frac{OD}{OA}-\frac{DE}{AD}\times\frac{AD}{OA}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (14)$$

31. $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ公式



前ト同一ノ記號ヲ用ヒ卽

$\angle DOC=\alpha$　$\angle AOD=\beta$ トスレバ

$\angle AOB=\alpha-\beta$ ナリ

前ト同樣ニ $\alpha-\beta$ ノ一邊 OA 上ノ一點ヨリ他ノ一邊 OB ニ垂直線ヲ引ク片ハ

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{AB}{OA}$$

前ト同樣ニ A 點ヨリ β 角ノ一邊 OD ニ垂直線 AD ヲ下シ,其足 D ヨリ α 角ノ一邊 OB ニ垂直線 DC ヲ下シ, D ヨリ OC ニ平行ナル直線 DE ヲ引ク片ハ

$AB=DC-AE$ ナルヲ以テ

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{DC}{OA}-\frac{AE}{OA}$$

前ト同樣ニ $\frac{DC}{OA}$, $\frac{AE}{OA}$ ヲ夫レ〻〻二ツノ分數ノ積ニ化スレバ

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{DC}{OD}\times\frac{OD}{OA}-\frac{AE}{AD}\times\frac{AD}{OA}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (14)$$

同樣ニ

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (14)$$

(注意第一) 上ノ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ ノ公式ノ求メ方ハ同樣ニシテ其第二項ノ正負ヲ異ニスルコノミト $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ ノ公式ノ求メ方ハ同樣ニシテ第二項ノ正負ヲ異ニスルノミナルコヲ注意スベシ

(注意第二) 上ニ求メ得タル四ツノ公式ハ α, β ガ $90°$ 下ニシテ其和モ亦 $90°$ 以下ナリトシテ證明シタレ𪜈 α, β ガ如何ナル價ヲ有スル片ニテモ從テ $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ ガ如何ナル價ヲ有スル片ニテモ常ニ成立スルコヲ證明スルコヲ得然レ𪜈現今ノ程度ニ於テハ單ニ一般ニ成立スルコヲ認ムレバ足レリ

32. 應用

今四ツノ公式ヲ應用スルノ例ヲ示サントス

(例一) $\sin 75°$ ノ價ヲ求メヨ

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(例二)　$\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ ナルヿヲ證セヨ

$\alpha+\beta=\theta$ トスレバ

$$\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$$
$$=\cos\theta\cos\gamma-\sin\theta\sin\gamma$$
$$=\cos(\theta+\gamma)$$

θ ノ代リニ $\alpha+\beta$ トスレバ右邊ハ

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

トナルベシ

例　　題

1. $\cos 15^\circ$ 卽 $\cos(45^\circ-30^\circ)$ ノ價ヲ求メヨ
2. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B\;\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナル時 $\sin(A+B)$ ノ價如何　但 A, B ハ何レモ鋭角ナリトス
3. $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$ 及 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\cos^2 B-\cos^2 A=\sin^2 A-\sin^2 B$ ヲ證セヨ

33. $\tan(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$ ノ公式

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

此分母, 分子ヲ $\cos\alpha\cos\beta$ ニテ除スレバ

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad(14)$$

同様ニ
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\qquad(14)$$

例　　題

1. $\tan 75^\circ$, $\tan 15^\circ$ ノ價ヲ求メヨ
2. $\tan A=\frac{1}{2}$, $\tan B=\frac{1}{3}$ ニシテ A, B 何レモ鋭角ナル時 A+B ハ如何
3. $\tan(45^\circ\pm A)=\frac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$ ヲ證明セヨ
4. $\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\tan\alpha$ ヲ證明セヨ

34. sin 2A, cos 2A, tan 2A ノ公式

和角ノ公式ニ於テ B＝A トスレバ容易ニ

$$\left.\begin{aligned} \sin 2A&=2\sin A\cos A\\ \cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1\\ \tan 2A&=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

ヲ證明シ得ベシ

例　　題

1. 上ノ三ツノ公式ニ於テ 2A ガ α トナル時ハ公式ハ如何ニ變ズルカ
2. $\sin A=\frac{3}{5}$ ナル時ハ $\sin 2A$ ハ何トナルカ
3. $\tan A=\frac{1}{2}$ ナル時ハ $\tan 2A$ ノ價如何

---

35. $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$, $\tan\frac{A}{2}$ ノ公式

$$\cos 2A=1-2\sin^2 A$$

ニ於テ 2A ヲ α トスレバ A ハ $\frac{\alpha}{2}$ トナルヲ以テ

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

故ニ　$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\qquad(16)$$

同樣ニ

$$\cos 2A=2\cos^2 A-1$$

ヨリ公式

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\qquad(16)$$

ヲ得ベシ (16) ノ前者ヲ後者ニテ除スレバ

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\qquad(16)$$

(注意第一) 上ノ公式ヲ用ヒテ半角ノ三角函數ヲ求ムル時ニハ $\frac{\alpha}{2}$ ノ如何ニ因リテ其正負ノ何レナルカヲ定ムルモノト知ルベシ

又上ノ公式ヨリ次第ニ角ノ半ノ三角函數ヲ求メ得ルヿヲ注意スベシ

(例一) $\sin 15^\circ$ ノ價ヲ求メヨ

$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ト $\sin 15^\circ$ ノ正ナルヿトヲ注意シテ

$$\sin\frac{30^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

$$\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

此價ハ32ノ例一ノ如クシテ得ラルヽモノトハ外見上異レ𪜈全ク相等シキヿヲ證明シ得ベシ

(例二) $\cos 405°=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ナルヿヲ知リ $\cos\dfrac{405°}{2}$ ヲ求メヨ

$\cos\dfrac{405°}{2}$ 即チ $\cos 202.5°$ ハ負ナルヲ以テ

$$\cos^2\frac{405°}{2}=\frac{1+\cos 405°}{2}$$

$$\cos 202.5°=-\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

例　題

1. $\cos 15°$, $\tan 15°$ ノ價ヲ求メヨ
2. $\cos 22.5°$, $\sin 22.5°$, $\tan 22.5°$ ヲ求メヨ
3. $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ ヲ證明セヨ
4. $\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ ヲ證明セヨ

36. 三倍角ノ公式

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$$

$$=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$=(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$

$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha--2\sin^3\alpha$$

故ニ
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \qquad (17)$$

上ノ如クセバ容易ニ次ノ公式ヲ證明シ得ベシ

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \qquad (17)$$

次ニ $\tan 3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)$ トスレバ容易ニ次ノ公式ヲ證明シ得ベシ

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \qquad (17)$$

例　題

1. $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ ナル片 $\mathrm{con}\,3\theta$ ノ價如何
2. $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$ ヲ證セヨ

(注意) 此後屢 $\sin^2\alpha$, $\mathrm{con}^2\alpha$, $\sin^3\alpha$, $\cos^3\alpha$ ヲ指數2或ハ3ヲ有セザルモノニテ表ハス必要アルヿアリ其時ニハ

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\ \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

ヨリ導キタル公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad (18)$$

及

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

ヨリ導キタル公式

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4},\quad \cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4} \qquad (19)$$

ヲ用フベシ

(例題) $\sin^2 15^\circ-\cos^2 15^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルコトヲ證セヨ

問題

次ノ恒等式ヲ證セヨ

1. $\sin(A+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A+\cos A)$

2. $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\tan\alpha+\tan\beta$

3. $\cos(A-B)-\sin(A+B)=(\cos A-\sin A)(\cos B-\sin B)$

4. $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=0$

5. $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$

6. $\sec A=\frac{17}{8},\ \mathrm{cosec}\, B=\frac{5}{4}$ ヲ知リテ $\sec(A+B)$ ヲ求メヨ

7. $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ ヲ證セヨ

8. $\cot A=\frac{11}{2},\ \tan B=\frac{7}{24}$ ヲ知リテ $\tan(A+B)$ ヲ求メヨ

次ノ恒等式ヲ證セヨ

9. $\cos 4\theta\cos\theta+\sin 4\theta\sin\theta=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

10. $\sin 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha=\sin 2\alpha$

11. $\cot\theta-\cot 2\theta=\mathrm{cosec}\, 2\theta$

12. $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

13. $\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$

14. $\cot\alpha-\tan\alpha=2\cot 2\alpha$

15. $\sin 8A=8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A$

16. $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$

17. $\sec A-\tan A=\tan\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)$

18. $\sin 18^\circ$ ノ價ヲ求メヨ

[解] $18^\circ=\alpha$ トスレバ $2\alpha+3\alpha$ ハ 90° トナルヲ以テ 2α ト 3α トハ互ニ餘角ナリ故ニ

$$\sin 2\alpha=\cos 3\alpha$$

即 $2\sin\alpha\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

cos α ハ 0 ナラザルガ故ニ之ヲ以テ兩邊ヲ除スレバ

$$2\sin\alpha=4\cos^2\alpha-3$$

卽 $$2\sin\alpha=4(1-\sin^2\alpha)-3$$

$$4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

$\sin\alpha$ 卽 $\sin 18^\circ$ ハ正ナルヲ以テ $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ナルコト能ハズ故ニ

$$\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

19. $\cos 18^\circ=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ ヲ證セヨ

20. $\cos 36^\circ$ ノ價ヲ求メヨ

21. $\sin 54^\circ$ ノ價ヲ求メヨ

22. $\cos^2 36^\circ+\sin^2 18^\circ=\dfrac{3}{4}$ ヲ證セヨ

23. $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\cot\alpha$ ヲ證セヨ

24. $4(\cos^6\theta+\sin^6\theta)=1+3\cos^2 2\theta$ ヲ證セヨ

25. $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\tan 2\alpha+\sec 2\alpha$ ヲ證セヨ

26. $\dfrac{\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=1+2\sin 2\alpha$ ヲ證セヨ

27. $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A}\cdot\dfrac{1-\cos A}{\cos A}=\tan\dfrac{A}{2}$ ヲ證セヨ

28. $4\sin^3\alpha\cos 3\alpha+4\cos^3\alpha\sin 3\alpha=3\sin 4\alpha$ ヲ證セヨ

29. $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan\dfrac{\theta}{2}}$ ヲ證セヨ

第二章

正弦餘弦ノ積ト和或ハ差トノ變換

37. 正弦或ハ餘弦ノ和或ハ差ヲ積ニ化スル公式

和角及差角ノ sine ノ公式卽

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

ヲ邊々相加フレバ

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \qquad \text{(a)}$$

邊々相減ズレバ

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \qquad \text{(b)}$$

又和角及差角ノ cosine ノ公式卽

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

ヲ邊々相加フレバ

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \qquad \text{(c)}$$

邊々相減ズレバ

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B \qquad \text{(d)}$$

上ノ四ツノ式ニ

$$A=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad B=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ト置ケバ

$$A+B=\alpha,\qquad A-B=\beta$$

トナルヲ以テ上ノ四ツノ等式ハ

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (20)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (20)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (20)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (20)$$

38. 上ノ公式ノ應用

今上ノ四ツノ公式ヲ應用スル二三ノ例ヲ示サントス

(例一) $\sin 14\theta+\sin 6\theta=2\sin 10\theta\cos 4\theta$ ナルコトヲ證セヨ

$$\sin 14\theta+\sin 6\theta=2\sin\frac{14\theta+6\theta}{2}\cos\frac{14\theta-6\theta}{2}$$

$$=2\sin 10 \quad \cos 4\theta$$

(例二) $\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=\sin A$ ヲ證セヨ

$$\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=2\cos\frac{(60^\circ+A)+(60^\circ-A)}{2}$$

$$\times\sin\frac{(60^\circ+A)-(60^\circ-A)}{2}$$

$$=2\cos 60^\circ \sin A$$

$$=2\times\frac{1}{2}\sin A$$

$$=\sin A$$

例　題

1. $\cos 70^\circ-\cos 10^\circ=-\sin 40^\circ$ ナルコヲ證セヨ

2. $\sin 3\theta-\sin 11\theta$ ヲ積ノ形ニ化セ

3. $\dfrac{\cos a-\cos 3a}{\sin 3a-\sin a}=\tan 2a$ ヲ證セヨ

---

39. 正弦餘弦ノ積ヲ和ノ形ニ化スル法

37ニ得タル等式(a), (b), (c), (d)ノ左右兩邊ヲ變換シ2ニテ除スレバ

$$\left.\begin{aligned}\sin A\cos B&=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\}\\ \cos A\sin B&=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\}\\ \cos A\cos B&=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\}\\ \sin A\sin B&=-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}\end{aligned}\right\}(21)$$

40. 上ノ公式ノ應用

上ノ四ツノ公式ハ前ノ(20)ト共ニ重要ナルモノナリ今之ヲ應用スル例ヲ示サントス

(例) $\sin 75^\circ\sin 15^\circ$ ノ價ヲ求メヨ

$$\sin 75^\circ\sin 15^\circ=-\frac{1}{2}\{\cos(75^\circ+15^\circ)-\cos(75^\circ-15^\circ)\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{\cos 90^\circ-\cos 60^\circ\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\text{…………答}$$

例　題

1. $2\cos 5\theta\sin 4\theta$ ヲ和或ハ差ノ形ニ化セ

2. $2\sin(2\theta+\phi)\cos(\theta-2\phi)$ ヲ和或ハ差ノ形ニ化セ

但　ϕ ハ「ファイ」ト讀ム

問　題

次ノ恒等式ヲ證セヨ

1. $\cos(30^\circ-A)+\cos(30^\circ+A)=\sqrt{3}\cos A$

2. $\sin 5A+\sin 2A-\sin A=\sin 2A(2\cos 3A+1)$

3. $\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ=0$

4. $\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)$

$-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=4\sin\alpha\ \sin\beta\sin\gamma$

5. $\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 8x\sin 2x$

6. $\sin\alpha-\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\dfrac{3\alpha}{2}$

7. $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 5\alpha-\cos\alpha}=\tan 2\alpha$

8. $\cos 3A\sin 2A-\cos 4A\sin A=\cos 2A\sin A$

9. $\sin 4\theta\cos\theta-\sin 3\theta\cos 2\theta=\sin\theta\cos 2\theta$

10. $\cos 5^\circ-\sin 25^\circ=\sin 35^\circ$

11. $\cos 2A\cos 5A=\cos^2\dfrac{7A}{2}-\sin^2\dfrac{3A}{2}$

12. $\cos^2 A+\cos^2(60^\circ+A)+\cos^2(60^\circ-A)=\dfrac{3}{2}$

13. $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cos 40^\circ=\dfrac{3}{4}$

14. $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{8}$

15. $A+B+C=180^\circ$ ナル片ハ $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=4\sin A\sin B\sin C$

16. $A+B+C=180^\circ$ ナル片ハ $\sin A+\sin B+\sin C$

$=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

17. $A+B=45^\circ$ ナル片ハ $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

18. $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=\dfrac{3}{4}\cos 3A$

(36 ノ注意ヲ見ヨ)

19. $\cos 47^\circ-\cos 61^\circ-\cos 11^\circ+\cos 25^\circ=\sin 7^\circ$

第四編

應用

第一章

三角形ノ解法

41. 今前諸編ニ述ベタルコチ三角形ノ解法ニ應用セントス

直三角形ノ解法ハ既ニ第一編ニ述ベタルヲ以テ任意三角形ニ就テ論ゼントス

以下三角形ABCニ於テ各邊チa, b, c, ニテ表シA角ハa邊ニ, B角ハb邊ニ, C角ハc邊ニ對スルモノト定ム

42. 正弦比例

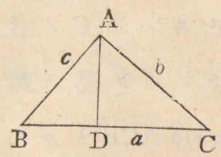
三角形ノ一邊ト二角(卽チ三ツノ角チ

知ルコトナル)トチ知リテ他ノ邊チ求ムルキニ用フル公式チ作ラントス

角頂Aヨリ對邊BCニ垂直線ADヲ引ケ

直三角形ABDニ於テ

$$\frac{AD}{c}=\sin B \qquad (a)$$



直三角形ACDニ於テ

$$\frac{AD}{b}=\sin C \qquad (b)$$

(b)ヲ(a)ニテ除スレバ

$$\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$$

相等シキ二ツノ分數ニ於テ分子ト分子トノ比ハ分母ト分母トノ比ニ等シキヲ以テ

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$$

同樣ニ

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

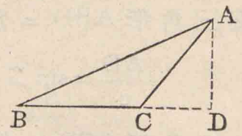
今之ヲ一ツニ記スレバ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad (22)$$

此比例式ヲ正弦比例ト云フ

(例題) 上ニ說明セザリシ $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ ヲ證明セヨ

(注意) 上ノ證明中各角ハ銳角ナリトセリ若シ一角例ヘバ∠ACBガ鈍角ナル𪜀ハ sin C ノ代リニ sin ACD トナスヲ要ス然レ𪜈 sin ACD =sin ACB ナルヿヲ注意スレバ此場合ニ於テモ sin C ヲ用フルヿヲ得



同樣ニ此後三角形ハ銳角ノ場合ノミヲ說キタリ𪜈鈍角ヲ有スル場合ニモ適合スルモノト知ルベシ

43. 應用

上ノ比例式ハ重要ナルモノニシテ多クノ場合ニ應用セラル今二三ノ例ヲ示サントス

(例一) $\angle A=75°$, $\angle B=30°$, $b=\sqrt{8}$ ナル𪜀他ノ二邊ノ中 a ヲ求メヨ

[解] $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}$ ナルヲ以テ

$$\frac{\sin 30°}{\sqrt{8}}=\frac{\sin 75°}{a}$$

$$\therefore\quad a=\frac{\sqrt{8}.\sin 75°}{\sin 30°}$$

$$=\frac{\sqrt{8}.\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$$ (32ノ例一ニヨル

$$=\sqrt{8}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=2(\sqrt{3}+1)$$

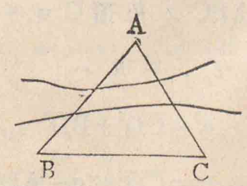
(例二) 圖ノ如クBヨリAニ至ル距離ヲ知ラントスルニ障害物アルヲ以テ他ニC點ヲ採リ BC=500間, $\angle B=36°$, $\angle C=87°$ ヲ測リ得タリ BA ヲ求メヨ

[解] $\angle A=180°-(36°+87°)=57°$

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin 57°}{500}=\frac{\sin 87°}{c}$$

$$\therefore\quad c=\frac{500\times\sin 87°}{\sin 57°}$$



三角函數ノ眞數表ニヨリテ $\sin 87° = 0.99863$,

$\sin 57° = 0.83867$ ヲ得ルヲ以テ

$$\therefore \qquad c = \frac{500 \times 0.99863}{0.83867} = 595.4$$

卽　AB ハ 595間.4 ナルヿヲ知ル

例　題

1. $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$ ナルキ $c : a = \sqrt{3} + 1 : 2$ ナルヿヲ證セヨ

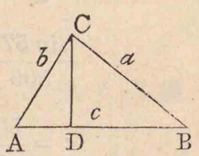
2. B, C ナル二ヶ所ニ於テ其中間ヨリ垂直ニ飛揚セル輕氣球ノ仰角 57°, 49° ヲ測リ得且 BC ハ距離 700 間ナルヿヲ知ルキハ一點 B ヨリ輕氣球ニ至ル距離如何

又問フ輕氣球ノ高サ如何

---

44. 三邊ト一角ノ餘弦トノ關係式

三角形 ABC ノ角頂 C ヨリ AB ニ垂直線 CD ヲ下スキハ



$$a^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$= \overline{CD}^2 + (c - AD)^2$$

$$= \overline{CD}^2 + c^2 - 2\ c.AD + \overline{AD}^2$$

$\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = b^2$ ニシテ $AD = b \cos A$ ナルヲ以テ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A \qquad (23)$$

是所求ノ三邊ト一角ノ餘弦トノ間ノ關係式ナリ

45. 三邊ヲ知リテ cos A ヲ求ムル公式

上ニ得タル公式

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$$

ニ於テ a, b, c ハ已知ニシテ A 從テ cos A ハ未知ナリ故ニ

$$2\,bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\therefore \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a}{2\,bc} \qquad (24)$$

從テ

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab} \quad (24)$$

ナルヿ明ナリ

46. 上ノ公式ノ應用

上ノ公式ヲ應用スル一二ノ例ヲ示サントス

(例一) $a = 15$, $b = 7$, $c = 13$ ナルキ C ヲ求メヨ

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{15^2+7^2-13^2}{2\times15\times7}$$

$$=\frac{1}{2}$$

從テCハ60°ナルヿヲ知ル

(例二) $a=7, b=3, c=5$ナルドAヲ求メヨ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\cos A$ガ負數ニシテ且180°以下ナルヲ要スルヲ以テAハ鈍角ナルヿヲ知リ且ツ絶對值ガ$\frac{1}{2}$ナルヲ以テ120°ナルヿヲ知ル

例題

1. $a=5, b=5\sqrt{3}, c=5$ナルドBヲ求メヨ

2. $a=24, b=37, c=30$ナルドAヲ求メヨ

(何レモ三角眞數表ヲ用フベシ)

3. $2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)=a^2+b^2+c^2$ヲ證明セヨ

---

47. 三邊ヲ知リテ$\cos\frac{A}{2}, \sin\frac{A}{2}, \tan\frac{A}{2}$, $\sin A$ヲ求ムル公式

$\cos A$ヲ知リテ$\cos\frac{A}{2}$ヲ求ムル公式ニ於テ$\frac{A}{2}$ハ90°ヨリ小ナルヲ以テ

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

トスルヿヲ得今$\cos A$ノ代リニ已ニ得タル式ヲ用フレバ

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right\}}$$

$$=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

今式ヲ簡單ニセンガ爲メニ$\frac{a+b+c}{2}=s$卽チ$a+b+c=2s$トセバ(卽sハ三角形ノ周圍ノ半ニ當ル)$b+c-a=2s-2a$ナルヲ以テ

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2s(2s-2a)}{4bc}}$$

卽 $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \qquad (25)$$

同樣ニ

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

ヲ用フレバ

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \qquad (25)$$

ヲ得ベシ

又(25)ノ後者ヲ(25)ノ前者ニテ除スレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \qquad (25)$$

又 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ ナルヲ以テ

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (26)$$

ヲ得

(注意) 上ノ四ツノ式ニハA角ノミ用ヒタリ他ノ角ニ於テ如何ニ之ヲ變スベキカハ明ナルベケレバ之ヲ略ス

48. 上ノ公式ノ應用

(例) $b\cos^2\frac{A}{2}+a\cos^2\frac{B}{2}=s$ ヲ證セヨ

$$b\cos^2\frac{A}{2}+a\cos^2\frac{B}{2}=b\left(\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}\right)^2$$

$$=\frac{s(s-a)}{c}+\frac{s(s-b)}{c}$$

$$=\frac{s(2s-a-b)}{c}$$

$$=\frac{s(a+b+c-a-b)}{c}$$

$$=s$$

例　題

1. $b\sin^2\frac{A}{2}+a\sin^2\frac{B}{2}=s-c$ ヲ證セヨ

2. $a=7, b=3, c=5$ ナルトキAヲ求メヨ
$\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}, \tan\frac{A}{2}$ ノ三式ヲ用ヒヨ

3. $(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}=(s-c)\tan\frac{C}{2}$ ヲ證セヨ

49. 二邊ト挾角トヲ知リタル場合

今 b, c, A ヲ知リタリトシ B, C ヲ求ムル公式ヲ作ラントス

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

ニ於テ 1 ヲ兩邊ヨリ減シ或ハ兩邊ニ加フレバ

$$\frac{b-c}{c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin C}$$

$$\frac{b+c}{c}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin C}$$

邊々相除スレバ

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}$$

此式ニ於テ A ヲ知リタルヲ以テ $\frac{B+C}{2}=\frac{180^\circ-A}{2}$

ハ已知ナリ故ニ未知ノモノハ $\tan\frac{B-C}{2}$ ノミナリ

故ニ上式ヲ次ノ如ク變ズ

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\cot\frac{B+C}{2}}$$

故ニ $$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}.\tan\frac{B+C}{2} \qquad (27)$$

斯クシテ $\frac{B-C}{2}$, $\frac{B+C}{2}$ ヲ知リタルヲ以テ

B, C ヲ求ムルヿヲ得次ニ正弦比例ヲ用ヒテ他ノ

邊ヲ求ムルヿヲ得

50. 應用

(例) $a=3, c=5, B=120^\circ$ ナル片 b ヲ求メヨ

$B=120^\circ$ ナルヲ以テ $\frac{A+C}{2}=\frac{180^\circ-120^\circ}{2}=30^\circ$ ナリ

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}.\tan\frac{C+A}{2}$$

$$=\frac{5-3}{5+3}\tan 30^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$=0.14434$$

三角眞數表ヲ用ヒテ

$$\frac{C-A}{2}=8^\circ 13'$$

ヲ得從テ $C=38^\circ 13'$, $A=21^\circ 47'$ ヲ得

次ニ

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin 21^\circ 47'}{3}=\frac{\sin 120^\circ}{b}$$

$$\therefore \quad b=\frac{3\sin 120^\circ}{\sin 21^\circ 47'}=\frac{3\sin 60^\circ}{\sin 21^\circ 47'}$$

$$=\frac{3\times 0.86603}{0.37109}=7.001\ldots\ldots$$ 答

51. 二邊ト挾角トヲ知リテ他ノ邊ヲ求ムル別法

今b, c, Aガ已知ナル𪜈ハ上ノ如クBCヲ求ムルヿナクシテ直ニaヲ求メ得ルヿヲ說カントス

三邊ト一角トノ關係公式

$$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$$

ニ於テb, c, cos Aハ已知ナルヲ以テ此式ヨリ直ニaヲ求ムルヿヲ得

(例) 前ノ例ヲ此式ニテ解ケ

$b^2=a^2+c^2-2\,ac\cos B$ ニ於テ $a=3,\ c=5,\ B=120°$ トスレバ

$$b^2\ \ 3^2+5^2-2\times3\times5\cos 120°$$

$\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$ ナルヲ以テ

$$b^2=9+25+15$$

$$b^2=49$$

$$b=7\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\text{答}$$

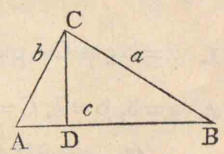
(注意) 前ニ得タル結果ト正合セザル所以ハ三角眞數表ハ小數五位ニ止メタルヲ以テナリ

(例題) $a=2,\ b=\sqrt{3}+1,\ C=60°$ トシ他ノ角及邊ヲ求メヨ

52. 面積ノ公式

今二邊b, c及其挾角Aヲ知リテ面積ヲ求ムルタメノ公式ヲ作ラントス

ABヲ底トシ角頂Cヨリ垂直線CDヲ引ク𪜈ハ



$$S=\frac{AB.CD}{2}$$

直三角形ACDニ於テCD=b sin Aナルヲ以テ

$$S=\frac{cb\sin A}{2} \qquad (28)$$

若シ三邊a, b, cヲ知リタリトセバ

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ナルヲ以テ之ヲ(28)ノsin Aニ代用スレバ

$$S=\frac{bc}{2}\times\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

卽 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (28)

例題

1. 三角形ノ各邊17寸, 25寸, 28寸ナル𪜈ハ面積如何

2. 平行四邊形ノ二邊42尺, 32尺ニシテ其挾角30°ナルキ面積如何

3. $s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=S$ ナルコヲ證セヨ

問　題

1. $a=b\cos C+c\cos B$ ヲ證セヨ

2. $a=3,\ b=7,\ C=98°13'$ ナルキ三角形ヲ解ケ
 但 $\cos 81°47'=\frac{1}{7}$ ヲ知リタリトセヨ

3. $A=45°,\ B=105°,\ c=\sqrt{2}$ トシテ三角形ヲ解ケ

4. $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ ナルキAヲ求メヨ

5. $C=60°,\ b=2\sqrt{3},\ c=3\sqrt{2}$ ナルキAヲ求メヨ

6. $(b-c)\cos\frac{A}{2}=a\sin\frac{B-C}{2}$ ヲ證セヨ

7. $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$ ヲ證セヨ

8. $\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$ ヲ證セヨ

9. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$ ヲ證セヨ

10. $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$ ヲ證セヨ

11. $a\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=(b+c)\sin\frac{A}{2}$ ヲ證セヨ

12. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$ ヲ證セヨ

13. 或人或處ニ於テ北方ニ塔ノ仰角30°ヲ得更ニ西方ニ向テ100尺進ミタル後再ビ其頂ノ仰角18°ヲ得タリト云フ塔ノ高サ如何

14. 甲乙二人ノ自轉車ニ乘ルアリ二人ハ同時ニ同處ヨリ異方向ニ進ミ其進路30°ノ傾キヲナセリ毎分甲ハ9町乙ハ12町ヲ行ク然ラハ30分ノ後ニ其距離何程トナルカ

15. 或人正北ニA又正北ヨリ30°西ノ方向ニBナル二物體ヲ望ミ夫ヨリ北西ノ方向ニ10町ヲ行キタル後再ビA, Bヲ望ミタルニ其方向北東及東トナレリト云フA, Bノ距離如何

16. 坂路アリ或人此山麓ノ一點ニ於テ山上ニアル塔ノ仰角45°ヲ測リ坂ヲ登ルコ5町ノ後再ビ塔ノ仰角75°ヲ測リ得タリト云フ坂ノ傾キ30°ナルキハ麓ノ地平面ヨリ起算シタルキノ塔ノ高サ如何

第二章

對數用法

53. 對數ノ定義

代數學ニ於テ知レル如ク

$$a^p=m$$

ニ於テpヲ底aニ於ケルmノ對數ト云ヒ$\log_a m$ト記ス故ニ

$$p=\log_a m$$

常ニ用フル對數ハ底ヲ10ト定メ即

$$10^p=m$$

ニ於ケルpヲmノ對數ト云ヒ$\log m$ノ如ク記ス故ニ

$$p=\log m$$

(注意) 從テ次ノ結果ヲ生ズルコヲ注意スベシ

$\log 1=0$	$\log 0.1=-1$
$\log 10=1$	$\log 0.01=-2$
$\log 100=2$	$\log 0.001=-3$
$\log 1000=3$	$\log 0.0001=-4$
....	....
....	....
....	....
	....

54. 對數ノ定理

代數學ニ於テ次ノ定理ヲ證明セリ

第一　積ノ對數ハ因數ノ對數ノ和ニ等シ即

$$\log_a(mnp)=\log_a m+\log_a n+\log_a \qquad (29)$$

第二　商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ即

$$\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n \qquad (29)$$

第三　或數ノ若干冪ノ對數ハ其數

ノ對數ニ指數ヲ乘ジタルモノニ等シ即

$$\log_a m^p = p.\log_a m \qquad (29)$$

第四　或數ノ若干冪根ノ對數ハ其數ノ對數ヲ指數ニテ除シタルモノニ等シ即

$$\log_a \sqrt[p]{m} = \frac{1}{p}\log_a m \qquad (29)$$

55. 對數表用法ノ注意

對數表ヲ用フルニ際シ次ノ注意ヲ要スルヿハ代數學ニ說ケリ

第一　小數點ノ位置ノ如何ニ關セズ數字ヲ同ジ順序ニ並ベテ得タル二數ノ對數ハ整數部即指標ヲ異ニシテ小數部即假數ヲ等シクス

第二　對數ノ小數部ハ常ニ正數ニシテ指標ハ正或ハ負ナリ

第三　眞數ノ首位ノ數ガ一ノ位ノ數ナルトキハ指標ハ0ニシテ十ノ位,百ノ位,千ノ位……

……ナルニ從テ指標ハ1, 2, 3,……ナルベク又分ノ位,厘ノ位,毛ノ位……ナルニ從テ$-1, -2, -3$……(即$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$……)ナリ

第四　眞數ノ小サキ變化ト其對數ノ之ニ應ズル變化トハ殆ンド比例ス

(例一) log 143.64ヲ求メヨ

[解] 指標ハ首位ガ百ノ位ナルヲ以テ2ナリ斯ク指標ヲ定メタル以上ハ1436.4ノ假數ヲ求ムレバヨシ

1436ノ假數ハ15715
1437ノ假數ハ15746　) 此差ハ31

即眞數1個ノ變化ニ對シテ假數31ノ變化アリ0.4ニ對シテハ何程變化スルカヲ比例法ニテ求ムレバ

$31 \times 0.4 = 12.4$　即12

之ヲ1436ノ假數15715ニ加フレバ15727ヲ得故ニ

$\log 143.64 = 2.15727$

(注意) 對數差ハ通例對數表ノ比例部分ト記セル欄ニ記セラレタリ(三角函數ニ於テモ同樣ナリ)

(例二) 0.0007ノ立方根ヲ求メヨ

[解] $x=\sqrt[3]{0.0007}$

之ヲ對數式ニ化スレバ

$$\log x=\frac{1}{3}\log 0.0007$$

$$\log x=\frac{1}{3}\times\bar{4}.84510$$

$$\log x=\frac{-4+0.84510}{3}$$

−4ハ3ニテ除シ得ザルヲ以テ次ノ如クシ指標ヲ除シ得ラルヽ樣ニナス

$$\log x=\frac{-6+2.84510}{3}$$
$$=-2+0.94837$$
$$=\bar{2}.94837$$

例一ノ法ヲ逆ニシテ94837ハ如何ナル眞數ノ假數ナルカヲ求メテ88791ナルヿヲ知ルベク且指標ガ$\bar{2}$ナルヲ以テ首位ハ厘位ナルヿヲ知ル故ニ

$$x=0.088791$$

例　　題

1. $\sqrt[14]{242447}$ヲ計算セヨ

2. $\dfrac{25.4\times 32.49}{0.26}$ヲ計算セヨ

3. $\dfrac{1.0012^2\times\sqrt[3]{0.5984}}{0.49}$ヲ計算セヨ

---

56. 三角函數ノ對數

三角函數例ヘバ sin 30° ノ對數ハ sin 30° ノ價卽$\frac{1}{2}$ナル數ノ對數ニ他ナラズ而シテ數ノ對數ニ於ケル定理及注意ヲ其儘用フルヿヲ得

(例一) $\log\sin 30°4'$ノ對數ヲ求メヨ

[解] 卷末ニ示シタル對數表ハ10′每ノモノナリ

先前ノ例一ニ準シテ

$$\left.\begin{array}{l}\sin 30°\text{ノ對數ハ}\ \bar{1}.69897\\ \sin 30°10'\text{ノ對數ハ}\ \bar{1}.70115\end{array}\right)\text{此差}218$$

10′ニ對シテ對數差218アルヲ以テ4′ニ對シテハ何程ノ差アルカヲ比例法ニ因リテ求ムレバ

$$218\times 0.4=87$$

之ヲ sin 30° ノ對數ニ加フレバ

log sin 30　　69984

(例題) $\sin 37°24'30''$ ノ對數ヲ求メヨ

(注意第一) 通例五桁對數表ハ1′每ノ對數ヲ記セルヲ以テ此問題ニ對シテハ直チニ對數ヲ求メ得ベシ然レド $\log 30°4'27''$ ノ對數ヲ求ムル場合ニ於テハ上ノ如クナサヾルベカラズ唯其場合ニハ上ニ示セル10′ニ對シテハト云フ代リニ60″ニ對シテハトスルヲ要スルノミ

(注意第二) 數ノ對數ニ於テハ上ノ如クシテ得タル對數差ヲ加フルノミナレドモ三角函數ノ場合ニアリテハ cosine ノ對數ノ如キハ對數差ヲ減セザルベカラズ何トナレバ角度ガ增大スルホド cosine ノ價ハ減少スレバナリ

(注意第三) 對數表ニテハ $\bar{1}.$ ナル指標ヲ附スル代リニ9トシ $\bar{2}.$ ヲ8トシ0.ヲ10トナシタルモノアリ此場合ニハ log ノ代リニLナル符號ヲ冠セリ例ヘバ $L\sin 30°10'=9.70115$ ナルガ如シ

(例二) $\log\cos x=\bar{1}.93693$ ノ x ヲ求メヨ

[解] $\bar{1}.93753$ ハ $\log\cos 30°$ ナリ

$\bar{1}.93680$ ハ $\log\cos 30°10'$ ナリ

73ダケノ對數變化ハ角度ニ10′每ノ變化ヲ生ズルヲ以テ $\bar{1}.93753-\bar{1}.93693=60$ ニ對シテ角度ニ何程ノ變化ヲ生ズベキカヲ比例法ニテ求ムレバ

$$10'\times\frac{60}{73}=8'13''$$

故ニ

$$x=30°8'13''$$

例　題

1. $\log\sin x=\bar{1}.48743$ ノ x ヲ求メヨ

2. $\log\tan x=0.49537$ ノ x ヲ求メヨ

(例三) 三角形ニ於テ $a=283,\ b=317,\ c=428$ トシAヲ求メヨ

[解]
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$=\sqrt{\frac{197\times 86}{514\times 231}}$$
$$\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\log 197+\log 86-\log 514-\log 231)$$

表ヨリ

$$\begin{array}{rl} \log 197=2.29447 & \log 514=2.71096 \\ \log\ \ 86=1.93450 & \log 231=2.36361 \\ \hline 4.22897 & 5.07457 \\ 5.07457 & \\ \hline 2\,\underline{)\,\bar{1}.15440} & \\ \bar{1}.57720 & \end{array}$$

$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.57720$$

$$\log\tan 20°40'=\underline{\bar{1}.57658}$$

$$62$$

10′每ノ對數差381ヨリ比例法ニテ1′38″ヲ得

故ニ

$$\frac{A}{2}=20°\,40'+1'\,38''=20°\,41'\,38''$$

從テ　A ハ 41°23′16″ナリ

問　題

1. 三角形ニ於テ $b=1000$, $A=45°$, $C=68°17'$ ヲ知リテ最モ小ナル邊ヲ求メヨ

2. $a=681$, $c=243$, $B=50°\,40'$ ヲ知リテ他ノ二角ヲ求メヨ

3. 上問ニ於テ他ノ一邊ヲ求メヨ

4. $a=1652$, $B=26°30'$, $C=47°\,15'$ ヲ知リテ b 及 c ヲ求メヨ

但シ次ノ對數ヲ已知ナリトス

Lsin $73°45'=9.9822938$　log $1.652=0.2180100$

Lsin $26°30'=9.6495274$　log $7.6780=0.8852481$, $D=57$

Lsin $47°15'=9.8658868$　log $1.2636=0.1016096$, $D=344$

但シDハ log 7.6780 ト log 7.6781 トノ假數ノ差ヲ示ス

5. sin 37°, cos 37,° tan 37° ノ價ヲ對數表ヲ用ヒテ求メヨ

6. $\log\sin 225°$, $\log\cos 30°$, $\log\frac{1}{2}\tan^2 30$ ヲ $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ知リテ求メヨ

7. 高サ150尺ノ塔ヨリ其立ツ所ノ水平面上ニ長75尺ノ影ヲ生ズルヰ太陽ノ高度如何

8. 船ノ甲板ヨリ或山頂ノ仰角ヲ測リテ41°ヲ得又其檣頭ヨリ40°ヲ得ルヰ檣ノ高サヲ100尺トスレバ山ノ高サ如何

9. 一丘ヨリ圓池ヲ望ムニ其水邊ノ最近點ノ俯角ハ48°ニシテ其最遠點ノ俯角ハ45°又丘ハ池ノ面ヨリ高サ300尺ナルヰ池ノ半徑如何

但次ノ對數ヲ用ヒヨ

Lsin $45°=9.8494850$　log $14939=4.1743215$

Lsin $48°=9.8710735$　log $14940=4.1743506$

Lsin $3°=8.7188002$　log $3=0.477121$

10. 岩頭ヨリ同方位ニアル二個ノ浮標ノ俯角38°及15°ヲ得此兩浮標ノ相互ノ距離半町ナルトキ岩ノ高サ如何

但シ次ノ對數ヲ用ヒヨ

Lsin 38°=9.78934　　Lsin 23°=9.59187

Lsin 15°=9.41299　　log 2039 =3.30942

11. 海岸ニ於テ相距ルコト5000尺ノ二點A, Bニ於テ一船Cヲ望ミシニ∠CAB, ∠CBAハ55°, 47°ナリト云フ船ヨリ海岸ニ至ル最近距離如何

12. 相距ルコト400間ナルABナル二點ノ間ヨリ垂直ニ輕氣球ヲ揚ゲシニA, Bニ於テ仰角64° 15′, 48° 20′ヲ測リ得ト云フ球ノ高サ如何

13. 山ノ高サヲ測ラントシ一點ニ於テ仰角αヲ得之ヨリaナル距離ヲ有シ山ノ方向トα′ナル角ヲナセル一地ニ於テ山ノ方向ハ前ノ位置ニβナル傾キヲナセルコトヲ見タリ山ノ高サハ

$$\frac{a \tan \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha' + \beta)}$$

ナルコトヲ證スベシ

14. 塔DEノ上ニ一桿DCアリ今塔底ノ地平面上ニ於テ塔ト一直線上ニアル二點A, Bニ於テ桿頭ノ仰角α, βヲ測リ得Aニ於テ塔頂ノ仰角α′ヲ得ルトキハ桿頂ノ高サハ

$$EC = \frac{AB \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}$$

ニシテ桿ノ長サハ

$$CD = \frac{AB \sin (\alpha - \alpha') \sin \beta}{\cos \alpha' \sin (\alpha - \beta)}$$

ナルコトヲ證セヨ

15. 空中ニ飛揚セル輕氣球ガα角ヲ張リ其中心ノ仰角ガβ角ナルトキハ輕氣球ノ半徑ヲrトセバ

球ノ中心ノ高サ $= r \sin \beta \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \alpha$

ナルコトヲ證セヨ

附　錄

第一章

三角方程式

1. 三角方程式

三角方程式ヲ解クトハ未知角ノ三角函數ヲ有スル等式ヲ滿足セシムル未知角ノ價ヲ求ムルニアリ例ヘバ

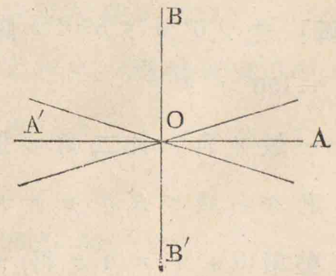
$\sin^2 x - \sin x + 6 = 0$ ノ x ヲ求ムルガ如シ

今先 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ガ次ノ如ク或與ヘラレタル價ヲ有スルトキ x ノ一般ナル價ヲ求メントス

$$\sin x = a,\quad \cos x = b,\quad \tan x = c$$

(注意) 0°ヨリ90°ニ至ル間ノ各三角函數ノ價ヲ知リタリトセバ各象限ノ間ニ於ケル三角函數

ハ廻轉線ガAA′ニ傾ク角ガ等シキトキ三角函數ノ絶對値相等シキヲ以テ容易ニ三角函數ヲ知リ得ベシ例ヘバ tan 225° ハ廻轉線ガ OA′ニ傾クヿ45°ナルヲ以テ絶對値1ナルヿヲ知リ且180°ト270°トノ間ニ於テハ tangent ハ常ニ正ナルヲ以テ＋1ナルコトヲ知ルガ如シ



2. sin x=a ノ x ノ一般ノ價

$\sin x = a$ ヲ解クニ當リテ注意スベキコトハ次ノ如シ

第一　絶對値ニ於テハ上ノ注意ヲ要ス

第二　a ガ正ナルトキハ x ハ 0° ヨリ 90° ニ至ル間及 90° ヨリ 180° ニ至ル間ニアリ

第三　a ガ負ナルトキハ x ハ 180° ヨリ 270° ニ至ル間及 270° ヨリ 360° ニ至ル間ニアリ

例ヲ以テ解法ヲ示サントス

(例一)　$\sin x=\frac{1}{2}$ ノ x ノ一般ノ價ヲ求メヨ

[解]　先ツ$0°$ヨリ$360°$ノ間ニ於テハ$30°$ト$180°-30°$$=150°$ナリ

一般ノ角ハ此二角ニ週期$360°$ノ若干倍ヲ加ヘ若クハ減ジタルモノナリnヲ以テ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)ヲ表スキハ次ノ如ク記スルコヲ得

$$30°+360°\times n \qquad 180°-30°+360°\times n$$

之ヲ次ノ如ク記スルヲ例トス

$$\frac{\pi}{6}+2n\pi, \qquad \pi-\frac{\pi}{6}+2n\pi$$

或ハ　偶數$\times\pi+\frac{\pi}{6}$,　　奇數$\times\pi-\frac{\pi}{6}$

mヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トスレバ之ヲ次ノ如クニマトメニ記スルコヲ得

$$m\pi+(-1)^m\frac{\pi}{6}$$

即mガ偶數ノキハ$(-1)^m$ハ正トナルヲ以テ前者ヲ表シmガ奇數ナルキハ$(-1)^m$ハ負トナルヲ以テ後者ヲ表ス

(例二)　$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ヲ解ケ

[解]　$\sin x$ガ負價ヲ有スルヲ以テ$180°$ヨリ$270°$ニ至ル間ト$270°$ヨリ$360°$ニ至ル間ニアリ

$\sin x$ノ絕對値ガ$\frac{\sqrt{3}}{2}$トナルニハ廻轉線ガAA'ニ$60°$ダケ傾クキナリ($\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ナルヲ以テ)

故ニ

$$180°+60° \qquad 360°-60$$

一般ノ解ハ

$$180°+60°+360°\times n,\ 360°-60°+360°\times n$$

之ヲ次ノ如ク記ス

$$\pi+\frac{\pi}{3}+2n\pi \qquad 2\pi-\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

即　　奇數$\times\pi+\frac{\pi}{3}$,　　偶數$\times\pi-\frac{\pi}{3}$

之ヲ一マトメニ記スレバ

$$m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{3}$$

(注意)　一ツノ公式トシテ記臆セント欲セバ

$$\sin x=a$$

ノxノ一價ヲαナリトスレバ

$$m\pi+(-1)^m\alpha$$

ニテ表ハスコヲ得但mハ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)ナリトス而シテ此式ハαガ如何ナルキ

ニモ適スルコトハ上ノ例一,例二ヲ對照スレバ分明ナルベシ

但例二ニ於テαヲ$\pi+\frac{\pi}{3}$トナスヲ要ス

例　　題

1. $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ

2. $\sin x=\frac{-1}{2}$ ヲ解ケ

---

3. cos x=a ノ解法

(例一) $\cos x=\frac{1}{2}$ ヲ解ケ

[解] 先$0°$ヨリ$360°$ニ至ル間ニ於テ$\cos x$ガ正價ヲ有スルモノハ$0°$ト$90°$トノ間,$270°$ト$360°$トノ間ニシテ$\frac{1}{2}$トナルハ1ノ圖ニ於テ廻轉線ガAA'ニ$60°$傾ク場合ナリトス故ニ$60°$及$360°-60°$ナリ

一般ノ角ハ之ニ$360°$ノ若干倍ヲ加ヘ若クハ減ジタルモノナリ即nヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコトヲ得)トスレバ

$$60°+360°\times n \qquad 360°-60°+360°\times n$$

之ヲ次ノ如ク記スルヲ例トス

$$\frac{\pi}{3}+2n\pi, \qquad 2\pi-\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

之ヲ一マトメニ記スレバ

$$偶數\times\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

即mヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコトヲ得)トスレバ

$$2m\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

(例二) $\cos x=-\frac{1}{2}$ ヲ解ケ

先$0°$ヨリ$360°$ニ至ル間ニ於テ$\cos x$ガ負價ヲ有スルハ$90°$ヨリ$180°$マデノ間,$180°$ヨリ$270°$ニ至ル間ニシテ絶對値ガ$\frac{1}{2}$ヲ有スルニハ1ノ圖ニ於テAA'ニ$60°$傾クトキナリ故ニ$180°-60°$,$180°+60°$ナリ

一般ノ解ハ

$$180°-60°+360°\times n, \quad 180°+60°+360°\times n$$

之ヲ次ノ如ク記スルコトヲ得

$$\pi-\frac{\pi}{3}+2n\pi, \qquad \pi+\frac{\pi}{3}+2n\pi$$

之ヲ一マトメニ記スレバ

$$(2n+1)\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

(注意) $\cos x = a$ ニ適スル x ノ一値ヲ α トスレバ一般ノ解ハ

$$2n\pi \pm \alpha$$

ニテ示スコヲ得但 n ハ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トス

例　題

1. $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ解ケ

2. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ解ケ

---

4. $\tan x = a$ ノ解法

(例一) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ解ケ

[解] 先 0° ヨリ 360° ニ至ル間ニ於テ $\tan x$ ガ正價ヲ有スルモノハ 0° ヨリ 90° ニ至ル間, 180° ヨリ 270° ニ至ル間ニシテ絶對値ガ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ナル價ヲ有スルハ1ノ圖ニ於テ廻轉線ガ AA′ ニ 30° 傾クトキナリ故ニ

$$30°, \qquad 180° + 30°$$

一般ノ價ハ n ヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)ヲ示スモノトスレバ

$$30 + 360° \times n, \qquad 180° + 30° + 360° \times n$$

之ヲ次ノ如ク記スルコヲ得

$$\frac{\pi}{6} + 2n\pi, \qquad \pi + \frac{\pi}{6} + 2n\pi$$

卽

$$偶數 \times \pi + \frac{\pi}{6}, \qquad 奇數 \times \pi + \frac{\pi}{6}$$

m ヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トスレバ之ヲ次ノ如クーマトメニ記スルコヲ得

$$m\pi + \frac{\pi}{6}$$

(例二) $\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ解ケ

[解] 先 0° ヨリ 360° ニ至ル間ニ於テ $\tan x$ ガ負價ヲ有スルハ 90° ヨリ 180° ニ至ル間ト 270° ヨリ 360° ニ至ル間トニシテ絶對値ガ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ナル價ヲ有スルハ1ノ圖ニ於テ廻轉線ガ AA′ ニ 30° 傾クトキナリ故ニ

$$180° - 30°, \qquad 360° - 30°$$

一般ノ解ハ n ヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トスレバ

$180°-30°+360°\times n,\qquad 360°-30°+360°\times n$

之ヲ次ノ如ク記スルヲ例トス

$\pi-\frac{\pi}{6}+2n\pi,\qquad 2\pi-\frac{\pi}{6}+2n\pi$

即

奇數$\times\pi-\frac{\pi}{6}$,　偶數$\times\pi-\frac{\pi}{6}$

mヲ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トスレバ次ノ如ク一マトメニ記スルコヲ得

$m\pi-\frac{\pi}{6}$

(注意) $\mathrm{ton}\,x=a$ ニ適スルxノ一價ヲαトスレバ一般ノ解ハ次ノ如ク記スルコヲ得

$m\pi+\alpha$

但シmハ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トス

例　題

1. $\tan\theta=1$ ヲ解ケ
2. $\tan\theta=-\sqrt{3}$ ヲ解ケ

---

5. 一般三角方程式ノ解法ノ例

三角方程式ヲ解クニハ先ツ$\sin x$, $\cos x$,

$\tan x$ノ價ヲ求メ然ル後上ノ三法ニ準ジテxノ一般ノ價ヲ求ムルニアリ今二三ノ例ヲ示サントス

(例一) $1+\cos\theta=2\sin^2\theta$ ヲ解ケ

[解] $1+\cos\theta=2(1-\cos^2\theta)$

$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$

$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1}{2},\quad \cos\theta=-1$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ ヨリ $\theta=2m\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$\cos\theta=-1$ ヨリ $\theta=(2n+1)\pi$

但m, nハ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)トス

(例二) $\sin5\theta+\sin\theta=\sin3\theta$ ヲ解ケ

[解] $\sin5\theta+\sin\theta=\sin3\theta$

$\sin5\theta+\sin\theta=2\sin3\theta\cos2\theta$ ナルヲ以テ

$2\sin3\theta\cos2\theta=\sin3\theta$

$\sin3\theta(2\cos2\theta-1)=0$

$\therefore\quad \sin3\theta=0,\quad \cos2\theta=\frac{1}{2}$

$\sin3\theta=0$ ヨリ 3θノ一般ノ價ヲ得即

$$3\theta=m\pi$$

從テθノ一般ノ價ハ

$$\theta=\frac{m\pi}{3}$$

但シmハ正或ハ負ノ整數0トナスコヲ得)ナリ

$\cos 2\theta=\frac{1}{2}$ヨリ2θノ一般ノ價ヲ得卽

$$2\theta=2m\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

從テθノ一般ノ價ヲ得但シmハ正或ハ負ノ整數(0トナスコヲ得)ヲ示ス

$$\theta=m\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

(注意) 學生ハ往々$\cos 2\theta=\frac{1}{2}$ヨリθノ一價$\frac{\pi}{6}$ヲ求メ一般ノ價トシテ

$$2m\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

トナスコアリ注意スベキコナリ

問　題

次ノ三角方程式ヲ解クベシ

1. $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$ 及 $\operatorname{cosec}^2\theta=2$

2. $\tan^2\theta=\frac{1}{3}$

3. $\tan 2\theta=\tan\theta$

4. $\cos\theta-\cos 7\theta=\sin 4\theta$

5. $\sin 4\theta-\sin 3\theta+\sin 2\theta-\sin\theta=0$

6. $\cot^2\theta-1=\operatorname{cosec}\theta$

7. $\cot\theta-\tan\theta=2$

8. $2\cos\theta=-1$ 及 $2\sin\theta=\sqrt{3}$ ナル片θハ如何

9. $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$

[解] 2ニテ兩邊ヲ除シ $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$

卽 $\cos 30^\circ\cos\theta+\sin 30^\circ\sin\theta=\frac{1}{2}$

卽 $\cos(\theta-30^\circ)=\frac{1}{2}$ トスベシ

10. $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=1$

11. $\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{3}$

12. $2\sin\theta\sin 3\theta=1$

13. $\sin 3\theta=8\sin^3\theta$

14. $1+\sqrt{3}\tan^2\theta=(1+\sqrt{3})\tan\theta$

15. $\tan^3\theta+\cot^3\theta=8\operatorname{cosec}^3 2\theta+12$

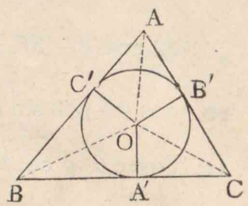
第二章

三角形ニ關スル公式ノ續キ

6. 三角形ノ內接圓ノ半徑

三角形ABCノ內接圓ノ半徑rヲ求メントス

中心Oト各角頂トヲ結ビ付クレバ



$$\triangle OAC \text{ノ面積} = \frac{r}{2}.b \qquad \text{(a)}$$

$$\triangle OAB \text{ノ面積} = \frac{r}{2}.c \qquad \text{(b)}$$

$$\triangle OBC \text{ノ面積} = \frac{r}{2}.a \qquad \text{(c)}$$

(a)ト(b)ト(c)トヲ邊々相加フレバ

$$\triangle ABC \text{ノ面積} S = \frac{r}{2}(a+b+c)$$

$$= r.\frac{a+b+c}{2}$$

$$= rs$$

故ニ

$$r = \frac{S}{s} \qquad (30)$$

(例題) a=171, b=204, c=195 ナルトキ內接圓ノ半徑rヲ求ムベシ

---

7. 三角形ノ傍接圓ノ半徑

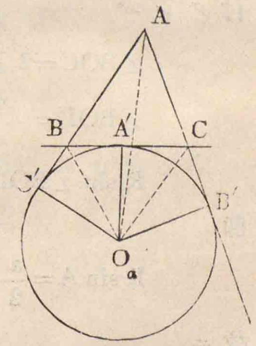
次圖ノ如クa邊ニ接シ他ノ二邊ノ延長ニ接スル圓ノ半徑r_aヲ求メントス

前章ト同樣ナル方法ヲ用フルコヲ得卽中心O_aト各角頂トヲ結ビ付クレバ

$$\triangle O_aAC \text{ノ面積} = \frac{r_a}{2}b \qquad \text{(a)}$$

$$\triangle O_aAB \text{ノ面積} = \frac{r_a}{2}c \qquad \text{(b)}$$

$$\triangle O_aBC \text{ノ面積} = \frac{r_a}{2}a \qquad \text{(c)}$$



(a)ト(b)トノ和ヨリ(c)ヲ減ズレバ

$$\triangle ABC \text{ノ兩積} S = \frac{r_a}{2}(b+c-a)$$

$$= \frac{r_a}{2}(2s-2a)$$

$$= r_a(s-a)$$

故ニ

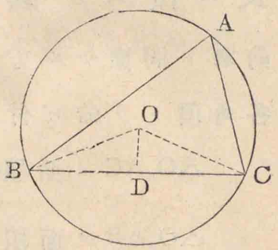
$$r_a = \frac{S}{s-a} \qquad (31)$$

同樣ニ他ノ傍接圓ノ半徑ヲ求ムルコヲ得

(例題) 前章ノ設問ニ於ケル三角形ノ三ツノ傍接圓ノ各半徑ヲ求ムベシ

8. 三角形ノ外接圓ノ半徑

三角形ABCノ外接圓ノ半徑Rヲ求メントス



中心OヨリBCニ垂直線ODヲ下シOト角頂B, Cトヲ結ビ付クレバ

$$\angle BOC = 2\angle A$$

$$\angle BOD = \frac{\angle BOC}{2} = \angle A$$

$$R \sin \angle BOD = BD$$

即

$$R \sin A = \frac{a}{2}$$

故ニ

$$R = \frac{a}{2 \sin A} \qquad (32)$$

若シ三邊ガ已知ナリトセバ

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ヲ上ノ式ニ代用スレバヨシ即

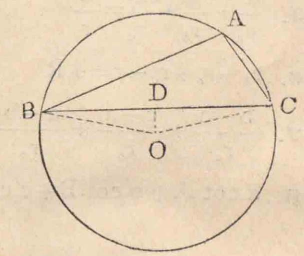
$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

或ハ

$$= \frac{abc}{4S} \qquad (33)$$

(例題) 前章ノ設問ニ用ヒタル三角形ノ外接圓ノ半徑ヲ求ムベシ

(注意) 上ノ圖ニ於テ外接圓ノ中心ガ三角形ノ內ニアルモノトセリ外ニアルコト次圖ノ如クナルモ公式ニ變化ヲ生ズルヿナシ何トナレバ此場合ニ於テハ



$$R \sin BOD = \frac{a}{2}$$

ニ於テ BOD ハ ∠Aニ等シカラズシテ∠Aノ補角ニ等シ即

$$R \sin (180^\circ - A) = \frac{a}{2}$$

即 $R \sin A = \frac{a}{2}$

トナレバナリ

問題

次ノ恒等式ヲ證スベシ

1. $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2. $\sqrt{r\,r_ar_br_c}=S$

3. $r\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}=r_a$

4. $Rr(\sin A+\sin B+\sin C)=S$

5. $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

6. $r_a+r_b+r_c-r=4R$

7. $\frac{b-c}{r_a}+\frac{c-a}{r_b}+\frac{a-b}{r_c}=0$

8. $a\cot A+b\cot B+c\cot C=2(R+r)$

數ノ對數表

[注意]

此表ハ2000マデノ數對數ヲ記スレドモ此數ヨリ大ナルモノト雖ドモ求メ得ベシ

例ヘバ56748ノ對數ヲ求ムルニハ567ノ對數及之ト568トノ差ヨリ求メ得ラルヽガ如シ而シテ此方法ハ本書中ニ説ケリ

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	212
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	203
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	193
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	185
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	178
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	171
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	165
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	158
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	152
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	147
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	143
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	138
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	133
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	129
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	126
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	123
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	119
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	116
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	113
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	110
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	108
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	105
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	102
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	100
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	98
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	95
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	93
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	91
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	89
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	88
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70585	70672	86
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	85
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	83
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	81
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	80
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	78

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	78
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	77
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	76
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	75
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	73
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	72
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	71
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	70
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	68
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	67
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	66
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	65
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	64
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	63
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	62
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	62
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	61
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	60
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	59
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	59
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	58
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	57
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	56
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	55
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	55
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	54
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	54
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	52
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	52
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	52
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	51
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	51
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	50
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	59
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	48
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	48
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	47
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	47
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	46
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	46
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	45
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	45
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	44
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	44
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	43
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389	

數		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102		860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104		703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107		938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109		743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111		532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112		922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114		690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117		819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151
118	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120		918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123		991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125		691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128		721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131		727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134		710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138		988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141		922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144		836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16	137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149		319	348	377	406	435	464	493	522	551	580
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869

比例部分

	44	43	42
1	4.4	4.3	4.2
2	8.8	8.6	8.4
3	13.2	12.9	12.6
4	17.6	17.2	16.8
5	22.0	21.5	21.0
6	26.4	25.8	25.2
7	30.8	30.1	29.4
8	35.2	34.4	33.6
9	39.6	38.7	37.8
	41	**40**	**39**
1	4.1	4.0	3.9
2	8.2	8.0	7.8
3	12.3	12.0	11.7
4	16.4	16.0	15.6
5	20.5	20.0	19.5
6	24.6	24.0	23.4
7	28.7	28.0	27.3
8	32.8	32.0	31.2
9	36.9	36.0	35.1
	38	**37**	**36**
1	3.8	3.7	3.6
2	7.6	7.4	7.2
3	11.4	11.1	10.8
4	15.2	14.8	14.4
5	19.0	18.5	18.0
6	22.8	22.2	21.6
7	26.6	25.9	25.2
8	30.4	29.6	28.8
9	34.2	33.3	32.4
	35	**34**	**33**
1	3.5	3.4	3.3
2	7.0	6.8	6.6
3	10.5	10.2	9.9
4	14.0	13.6	13.2
5	17.5	17.0	16.5
6	21.0	20.4	19.8
7	24.5	23.8	23.1
8	28.0	27.2	26.4
9	31.5	30.6	29.7
	32	**31**	**30**
1	3.2	3.1	3.0
2	6.4	6.2	6.0
3	9.6	9.3	9.0
4	12.8	12.4	12.0
5	16.0	15.5	15.0
6	19.2	18.6	18.0
7	22.4	21.7	21.0
8	25.6	24.8	24.0
9	28.8	27.9	27.0

數		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	558	385
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22	011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169		789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173		805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186		951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
187	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28	103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192		330	353	375	498	421	443	466	488	511	533
193		556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194		780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29	003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196		226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197		447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198		667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199		885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30	103	125	146	168	190	211	233	255	276	298

比例部分

	29	28
1	2.9	2.8
2	5.8	5.6
3	8.7	8.4
4	11.6	11.2
5	14.5	14.0
6	17.4	16.8
7	20.3	19.6
8	23.2	22.4
9	26.1	25.2
	27	**26**
1	2.7	2.6
2	5.4	5.2
3	8.1	7.8
4	10.8	10.4
5	13.5	13.0
6	16.2	15.6
7	18.9	18.2
8	21.6	20.8
9	24.3	23.4
	25	
1	2.5	
2	5.0	
3	7.5	
4	10.0	
5	12.5	
6	15.0	
7	17.5	
8	20.0	
9	22.5	
	24	**23**
1	2.4	2.3
2	4.8	4.6
3	7.2	6.9
4	9.6	9.2
5	12.0	11.5
6	14.4	13.8
7	16.8	16.1
8	19.2	18.4
9	21.6	20.7
	22	**21**
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

三角函數ノ對數表

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	′	°
0	0	—		—		—	10.00000		0	90
	5	7.16270		7.16270		2.83730	10.00000	0	55	
	10	7.46373	30103	7.46373	30103	2.53627	10.00000	0	50	
	15	7.63982	17609	7.63982	17609	2.36018	10.00000	0	45	
	20	7.76475	12493	7.76476	12494	2.23524	9.99999	1	40	
	25	7.86166	9691	7.86167	9691	2.13833	9.99999	0	35	
	30	7.94084	7918	7.94086	7919	2.05914	9.99998	1	30	
	35	8.00779	6695	8.00781	6695	1.99219	9.99998	0	25	
	40	8.06578	5799	8.06581	5800	1.93419	9.99997	1	20	
	45	8.11693	5115	8.11696	5115	1.88304	9.99996	1	15	
	50	8.16268	4575	8.16273	4577	1.83727	9.99995	1	10	
	55	8.20407	4139	8.20413	4140	1.79587	9.99994	1	5	
1	0	8.24186	3779	8.24192	3779	1.75808	9.99993	1	0	89
	5	8.27661	3475	8.27669	3477	1.72331	9.99992	1	55	
	10	8.30879	3218	8.30888	3219	1.69112	9.99991	1	50	
	15	8.33875	2996	8.33886	2998	1.66114	9.99990	1	45	
	20	8.36678	2803	8.36689	2803	1.63311	9.99988	2	40	
	25	8.39310	2632	8.39323	2634	1.60677	9.99987	1	35	
	30	8.41792	2482	8.41807	2484	1.58193	9.99985	2	30	
	35	8.44139	2347	8.44156	2349	1.55844	9.99983	2	25	
	40	8.46366	2227	8.46385	2229	1.53615	9.99982	1	20	
	45	8.48485	2119	8.48505	2120	1.51495	9.99980	2	15	
	50	8.50504	2019	8.50527	2022	1.49473	9.99978	2	10	
	55	8.52434	1930	8.52459	1932	1.47541	9.99976	2	5	
2	0	8.54282	1848	8.54308	1849	1.45692	9.99974	2	0	88
	5	8.56054	1772	8.56083	1775	1.43917	9.99971	3	55	
	10	8.57757	1703	8.57788	1705	1.42212	9.99969	2	50	
	15	8.59395	1638	8.59428	1640	1.40572	9.99967	2	45	
	20	8.60973	1578	8.61009	1581	1.38991	9.99964	3	40	
	25	8.62497	1524	8.62535	1526	1.37465	9.99961	3	35	
	30	8.63968	1471	8.64009	1474	1.35991	9.99959	2	30	
	35	8.65391	1423	8.65435	1426	1.34565	9.99956	3	25	
	40	8.66769	1378	8.66816	1381	1.33184	9.99953	3	20	
	45	8.68104	1335	8.68154	1338	1.31846	9.99950	3	15	
	50	8.69400	1296	8.69453	1299	1.30547	9.99947	3	10	
	55	8.70658	1258	8.70714	1261	1.29286	9.99944	3	5	
3	0	8.71880	1222	8.71940	1226	1.28060	9.99940	4	0	87
	5	8.73069	1189	8.73132	1192	1.26868	9.99937	3	55	
	10	8.74226	1157	8.74292	1160	1.25708	9.99934	3	50	
	15	8.75353	1127	8.75423	1131	1.24577	9.99930	4	45	
	20	8.76451	1098	8.76525	1102	1.23475	9.99926	4	40	
	25	8.77522	1071	8.77600	1075	1.22400	9.99923	3	35	
	30	8.78568	1046	8.78649	1049	1.21351	9.99919	4	30	
	35	8.79588	1020	8.79673	1024	1.20327	9.99915	4	25	
	40	8.80585	997	8.80674	1001	1.19326	9.99911	4	20	
	45	8.81560	975	8.81653	979	1.18347	9.99907	4	15	
	50	8.82513	953	8.82610	957	1.17390	9.99903	4	10	
	55	8.83446	933	8.83547	937	1.16453	9.99898	5	5	
4	0	8.84358	912	8.84464	917	1.15536	9.99894	4	0	86
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	′	°

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	′	°
4	0	8.84358		8.84464		1.15536	9.99894		0	86
	5	8.85252	894	8.85363	899	1.14637	9.99890	4	55	
	10	8.86128	876	8.86243	880	1.13757	9.99885	5	50	
	15	8.86987	859	8.87106	863	1.12894	9.99880	5	45	
	20	8.87829	842	8.87953	847	1.12047	9.99876	4	40	
	25	8.88654	825	8.88783	830	1.11217	9.99871	5	35	
	30	8.89464	810	8.89598	815	1.10402	9.99866	5	30	
	35	8.90260	796	8.90399	801	1.09601	9.99861	5	25	
	40	8.91040	780	8.91185	786	1.08815	9.99856	5	20	
	45	8.91807	767	8.91957	772	1.08043	9.99851	5	15	
	50	8.92561	754	8.92716	759	1.07284	9.99845	6	10	
	55	8.93301	740	8.93462	746	1.06538	9.99840	5	5	
5	0	8.94030	729	8.94195	733	1.05805	9.99834	6	0	85
	5	8.94746	716	8.94917	722	1.05083	9.99829	5	55	
	10	8.95450	704	8.95627	710	1.04373	9.99823	6	50	
	15	8.96143	693	8.96325	698	1.03675	9.99817	6	45	
	20	8.96825	682	8.97013	688	1.02987	9.99812	5	40	
	25	8.97496	671	8.97691	678	1.02309	9.99806	6	35	
	30	8.98157	661	8.98358	667	1.01642	9.99800	6	30	
	35	8.98808	651	8.99015	657	1.00985	9.99793	7	25	
	40	8.99450	642	8.99662	647	1.00338	9.99787	6	20	
	45	9.00082	632	9.00301	639	0.99699	9.99781	6	15	
	50	9.00704	622	9.00930	629	0.99070	9.99775	6	10	
	55	9.01318	614	9.01550	620	0.98450	9.99768	7	5	
6	0	9.01923	605	9.02162	612	0.97838	9.99761	7	0	84
	5	9.02520	597	9.02766	604	0.97234	9.99755	6	55	
	10	9.03109	589	9.03361	595	0.96639	9.99748	7	50	
	15	9.03690	581	9.03948	587	0.96052	9.99741	7	45	
	20	9.04262	572	9.04528	580	0.95472	9.99734	7	40	
	25	9.04828	566	9.05101	573	0.94899	9.99727	7	35	
	30	9.05386	558	9.05666	565	0.94334	9.99720	7	30	
	35	9.05937	551	9.06224	558	0.93776	9.99713	7	25	
	40	9.06481	544	9.06775	551	0.93225	9.99705	8	20	
	45	9.07018	537	9.07320	545	0.92680	9.99698	7	15	
	50	9.07548	530	9.07858	538	0.92142	9.99690	8	10	
	55	9.08072	524	9.08389	531	0.91611	9.99683	7	5	
7	0	9.08589	517	9.08914	525	0.91086	9.99675	8	0	83
	5	9.09101	512	9.09434	520	0.90566	9.99667	8	55	
	10	9.09606	505	9.09947	513	0.90953	9.99659	8	50	
	15	9.10106	500	9.10454	507	0.89546	9.99651	8	45	
	20	9.10599	493	9.10956	502	0.89044	9.99643	8	40	
	25	9.11087	488	9.11452	496	0.88548	9.99635	8	35	
	30	9.11570	483	9.11943	491	0.88057	9.99627	8	30	
	35	9.12047	477	9.12428	485	0.87572	9.99618	9	25	
	40	9.12519	472	9.12909	481	0.87091	9.99610	8	20	
	45	9.12985	466	9.13384	475	0.86616	9.99601	9	15	
	50	9.13447	462	9.13854	470	0.86146	9.99593	8	10	
	55	9.13904	457	9.14320	466	0.85680	9.99584	9	5	
8	0	9.14356	452	9.14780	460	0.85220	9.99575	9	0	82
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	′	°

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	′	°
8	0	9.14356		9.14780		0.85220	9.99575		0	82
	5	9.14803	447	9.15236	456	0.84764	9.99566	9	55	
	10	9.15245	442	9.15688	452	0.84312	9.99557	9	50	
	15	9.15683	438	9.16135	447	0.83865	9.99548	9	45	
	20	9.16116	433	9.16577	442	0.83423	9.99539	9	40	
	25	9.16545	429	9.17016	439	0.82984	9.99530	9	35	
	30	9.16970	425	9.17450	434	0.82550	9.99520	10	30	
	35	9.17391	421	9.17880	430	0.82120	9.99511	9	25	
	40	9.17807	416	9.18306	426	0.81694	9.99501	10	20	
	45	9.18220	413	9.18728	422	0.81272	9.99492	9	15	
	50	9.18628	408	9.19146	418	0.80854	9.99482	10	10	
	55	9.19033	405	9.19561	415	0.80439	9.99472	10	5	
9	0	9.19433	400	9.19971	410	0.80029	9.99462	10	0	81
	5	9.19830	397	9.20378	407	0.79622	9.99452	10	55	
	10	9.20223	393	9.20782	404	0.79218	9.99442	10	50	
	15	9.20613	390	9.21182	400	0.78818	9.99432	10	45	
	20	9.20999	386	9.21578	396	0.78422	9.99421	11	40	
	25	9.21382	383	9.21971	393	0.78029	9.99411	10	35	
	30	9.21761	379	9.22361	390	0.77639	9.99400	11	30	
	35	9.22137	376	9.22747	386	0.77253	9.99390	10	25	
	40	9.22509	372	9.23130	383	0.76870	9.99379	11	20	
	45	9.22878	369	9.23510	380	0.76490	9.99368	11	15	
	50	9.23244	366	9.23887	377	0.76113	9.99357	11	10	
	55	9.23607	363	9.24261	374	0.75739	9.99346	11	5	
10	0	9.23967	360	9.24632	371	0.75368	9.99335	11	0	80
	5	9.24324	357	9.25000	368	0.75000	9.99324	11	55	
	10	9.24677	353	9.25365	365	0.74635	9.99313	11	50	
	15	9.25028	351	9.25727	362	0.74273	9.99301	12	45	
	20	9.25376	348	9.26086	359	0.73914	9.99290	11	40	
	25	9.25721	345	9.26443	357	0.73557	9.99278	12	35	
	30	9.26063	342	9.26797	354	0.73203	9.99267	11	30	
	35	9.26403	340	9.27148	351	0.72852	9.99255	12	25	
	40	9.26739	336	9.27496	348	0.72504	9.99243	12	20	
	45	9.27073	334	9.27842	346	0.72158	9.99231	12	15	
	50	9.27405	332	9.28186	344	0.71814	9.99219	12	10	
	55	9.27734	329	9.28527	341	0.71473	9.99207	12	5	
11	0	9.28060	326	9.28865	338	0.71135	9.99195	12	0	79
	5	9.28384	324	9.29201	336	0.70799	9.99182	13	55	
	10	9.28705	321	9.29535	334	0.70465	9.99170	12	50	
	15	9.29024	319	9.29866	331	0.70134	9.99157	13	45	
	20	9.29340	316	9.30195	329	0.69805	9.99145	12	40	
	25	9.29654	314	9.30522	327	0.69478	9.99132	13	35	
	30	9.29966	312	9.30846	324	0.69154	9.99119	13	30	
	35	9.30275	309	9.31168	322	0.68832	9.99106	13	25	
	40	9.30582	307	9.31489	321	0.68511	9.99093	13	20	
	45	9.30887	305	9.31806	317	0.68194	9.99080	13	15	
	50	9.31189	302	9.32122	316	0.67878	9.99067	13	10	
	55	9.31490	301	9.32436	314	0.67564	9.99054	13	5	
12	0	9.31788	298	9.32747	311	0.67253	9.99040	14	0	78
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	′	°

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	′	°
12	0	9.31788		9.32747		0.67253	9.99040		0	78
	5	9.32084	296	9.33057	310	0.66943	9.99027	13	55	
	10	9.32378	294	9.33365	308	0.66635	9.99013	14	50	
	15	9.32670	292	9.33670	305	0.66330	9.99000	13	45	
	20	9.32960	290	9.33974	304	0.66026	9.98986	14	40	
	25	9.33248	288	9.34276	302	0.65724	9.98972	14	35	
	30	9.33534	286	9.34576	300	0.65424	9.98958	14	30	
	35	9.33818	284	9.34874	298	0.65126	9.98944	14	25	
	40	9.34100	282	9.35170	296	0.64830	9.98930	14	20	
	45	9.34380	280	9.35464	294	0.64536	9.98916	14	15	
	50	9.34658	278	9.35757	293	0.64243	9.98901	15	10	
	55	9.34934	276	9.36047	290	0.63953	9.98887	14	5	
13	0	9.35209	275	9.36336	289	0.63664	9.98872	15	0	77
	5	9.35481	272	9.36624	288	0.63376	9.98858	14	55	
	10	9.35752	271	9.36909	285	0.63091	9.98843	15	50	
	15	9.36022	270	9.37193	284	0.62807	9.98828	15	45	
	20	9.36289	267	9.37476	283	0.62524	9.98813	15	40	
	25	9.36555	266	9.37756	280	0.62244	9.98798	15	35	
	30	9.36819	264	9.38035	279	0.61965	9.98783	15	30	
	35	9.37081	262	9.38313	278	0.61687	9.98768	15	25	
	40	9.37341	260	9.38589	276	0.61411	9.98753	15	20	
	45	9.37600	259	9.38863	274	0.61137	9.98737	16	15	
	50	9.37858	258	9.39136	273	0.60864	9.98722	15	10	
	55	9.38113	255	9.39407	271	0.60593	9.98706	16	5	
14	0	9.38368	255	9.39677	270	0.60323	9.98690	16	0	76
	5	9.38620	252	9.39945	268	0.60055	9.98675	15	55	
	10	9.38871	251	9.40212	267	0.59788	9.98659	16	50	
	15	9.39121	250	9.40478	266	0.59522	9.98643	16	45	
	20	9.39369	248	9.40742	264	0.59258	9.98627	16	40	
	25	9.39615	246	9.41005	263	0.58995	9.98610	17	35	
	30	9.39860	245	9.41266	261	0.58734	9.98594	16	30	
	35	9.40103	243	9.41526	260	0.58474	9.98578	16	25	
	40	9.40346	243	9.41784	258	0.58216	9.98561	17	20	
	45	9.40586	240	9.42041	257	0.57959	9.98545	16	15	
	50	9.40825	239	9.42297	256	0.57703	9.98528	17	10	
	55	9.41063	238	9.42552	255	0.57448	9.98511	17	5	
15	0	9.41300	237	9.42805	253	0.57195	9.98494	17	0	75
	5	9.41535	235	9.43057	252	0.56943	9.98477	17	55	
	10	9.41768	233	9.43308	251	0.56692	9.98460	17	50	
	15	9.42001	233	9.43558	250	0.56442	9.98443	17	45	
	20	9.42232	231	9.43806	248	0.56194	9.98426	17	40	
	25	9.42461	229	9.44053	247	0.55947	9.98409	17	35	
	30	9.42690	229	9.44299	246	0.55701	9.98391	18	30	
	35	9.42917	227	9.44544	245	0.55456	9.98373	18	25	
	40	9.43143	226	9.44787	243	0.55213	9.98356	17	20	
	45	9.43367	224	9.45029	242	0.54971	9.98338	18	15	
	50	9.43591	224	9.45271	242	0.54729	9.98320	18	10	
	55	9.43813	222	9.45511	240	0.54489	9.98302	18	5	
16	0	9.44034	221	9.45750	239	0.54250	9.98284	18	0	74
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	′	°

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	′	°
16	0	9.44 034		9.45 750		0.54 250	9.98 284		0	74
	5	9.44 253	219	9.45 987	237	0.54 013	9.98 266	18	55	
	10	9.44 472	219	9.46 224	237	0.53 776	9.98 248	18	50	
	15	9.44 689	217	9.46 460	236	0.53 540	9.98 229	19	45	
	20	9.44 905	216	9.46 694	234	0.53 306	9.98 211	18	40	
	25	9.45 120	215	9.46 928	234	0.53 072	9.98 192	19	35	
	30	9.45 334	214	9 47 160	232	0.52 840	9.98 174	18	30	
	35	9 45 547	213	9.47 392	232	0.52 608	9.98 155	19	25	
	40	9.45 758	211	9.47 622	230	0.52 378	9.98 136	19	20	
	45	9.45 969	211	9.47 852	230	0.52 148	9.98 117	19	15	
	50	9.46 178	209	9.48 080	228	0.51 920	9.98 098	19	10	
	55	9.46 386	208	9.48 307	227	0.51 693	9.98 079	19	5	
17	0	9.46 594	208	9.48 534	227	0.51 466	9.98 060	19	0	73
	5	9.46 800	206	9.48 759	225	0.51 241	9.98 040	20	55	
	10	9.47 005	205	9.48 984	225	0.51 016	9.98 021	19	50	
	15	9.47 209	204	9.49 207	223	0.50 793	9.98 001	20	45	
	20	9.47 411	202	9.49 430	223	0.50 570	9.97 982	19	40	
	25	9.47 613	202	9.49 652	222	0.50 348	9.97 962	20	35	
	30	9.47 814	201	9 49 872	220	0.50 128	9.97 942	20	30	
	35	9.48 014	200	9.50 092	220	0.49 908	9.97 922	20	25	
	40	9.48 213	199	9.50 311	219	0.49 689	9.97 902	20	20	
	45	9 48 411	198	9.50 529	218	0.49 471	9.97 882	20	15	
	50	9.48 607	196	9.50 746	217	0.49 254	9.97 861	21	10	
	55	9.48 803	196	9.50 962	216	0.49 038	9.97 841	20	5	
18	0	9.48 998	195	9.51 178	216	0.48 822	9.97 821	20	0	72
	5	9.49 192	194	9.51 392	214	0.48 608	9.97 800	21	55	
	10	9.49 385	193	9.51 606	214	0.48 394	9.97 779	21	50	
	15	9.49 577	192	9.51 819	213	0.48 181	9.97 759	20	45	
	20	9.49 768	191	9.52 031	212	0.47 969	9.97 738	21	40	
	25	9.49 958	190	9.52 242	211	0.47 758	9.97 717	21	35	
	30	9.50 148	190	9.52 452	210	0.47 548	9.97 696	21	30	
	35	9.50 336	188	9.52 661	209	0.47 339	9.97 674	22	25	
	40	9.50 523	187	9.52 870	209	0.47 130	9.97 653	21	20	
	45	9.50 710	187	9.53 078	208	0.46 922	9.97 632	21	15	
	50	9.50 896	186	9.53 285	207	0.46 715	9.97 610	22	10	
	55	9.51 080	184	9.53 492	207	0.46 508	9.97 589	21	5	
19	0	9.51 264	184	9.53 697	205	0.46 303	9.97 567	22	0	71
	5	9.51 447	183	9.53 902	205	0.46 098	9.97 545	22	55	
	10	9.51 629	182	9.54 106	204	0.45 894	9.97 523	22	50	
	15	9.51 811	182	9 54 309	203	0.45 691	9.97 501	22	45	
	20	9.51 991	180	9.54 512	203	0.45 488	9.97 479	22	40	
	25	9.52 171	180	9.54 714	202	0.45 286	9.97 457	22	35	
	30	9.52 350	179	9.54 915	201	0.45 085	9.97 435	22	30	
	35	9.52 527	177	9.55 115	200	0 44 885	9.97 412	23	25	
	40	9.52 705	178	9.55 315	200	0.44 685	9.97 390	22	20	
	45	9.52 881	176	9.55 514	199	0.44 486	9.97 367	23	15	
	50	9.53 056	175	9.55 712	198	0.44 288	9.97 344	23	10	
	55	9.53 231	175	9.55 910	198	0.44 090	9.97 322	22	5	
20	0	9.53 405	174	9.56 107	197	0.43 893	9.97 299	23	0	70
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	′	°

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	′	°
20	0	9.53 405		9.56 107		0.43 893	9.97 299		0	70
	10	9.53 751	346	9.56 498	391	0 43 502	9.97 252	47	50	
	20	9.54 093	342	9.56 887	389	0.43 113	9.97 206	46	40	
	30	9.54 433	340	9.57 274	387	0.42 726	9.97 159	47	30	
	40	9.54 769	336	9.57 658	384	0.42 342	9.97 111	48	20	
	50	9.55 102	333	9.58 039	381	0.41 961	9.97 063	48	10	
21	0	9.55 433	331	9.58 418	379	0.41 582	9.97 015	48	0	69
	10	9 55 761	328	9.58 794	376	0.41 206	9.96 966	49	50	
	20	9.56 085	324	9.59 168	374	0.40 832	9.96 917	49	40	
	30	9.56 408	323	9.59 540	372	0.40 460	9.96 868	49	30	
	40	9.56 727	319	9.59 909	369	0.40 091	9.96 818	50	20	
	50	9.57 044	317	9.60 276	367	0.39 724	9.96 767	51	10	
22	0	9.57 358	314	9.60 641	365	0.39 359	9 96 717	50	0	68
	10	9.57 669	311	9.61 004	363	0.38 996	9.96 665	52	50	
	20	9.57 978	309	9.61 364	360	0.38 636	9.96 614	51	40	
	30	9.58 284	306	9.61 722	358	0.38 278	9 96 562	52	30	
	40	9.58 588	304	9.62 079	357	0.37 921	9.96 509	53	20	
	50	9.58 889	301	9.62 433	354	0.37 567	9.96 456	53	10	
23	0	9.59 188	299	9.62 785	352	0.37 215	9.96 403	53	0	67
	10	9.59 484	296	9.63 135	350	0.36 865	9.96 349	54	50	
	20	9.59 778	294	9.63 484	349	0.36 516	9.96 294	55	40	
	30	9.60 070	292	9.63 830	346	0.36 170	9 96 240	54	30	
	40	9.60 359	289	9.64 175	345	0.35 825	9.96 185	55	20	
	50	9.60 646	287	9.64 517	342	0 35 483	9.96 129	56	10	
24	0	9.60 931	285	9.64 858	341	0.35 142	9.96 073	56	0	66
	10	9.61 214	283	9.65 197	339	0.34 803	9.96 017	56	50	
	20	9.61 494	280	9.65 535	338	0.34 465	9.95 960	57	40	
	30	9.61 773	279	9.65 870	335	0.34 130	9.95 902	58	30	
	40	9.62 049	276	9.66 204	334	0.33 796	9.95 844	58	20	
	50	9.62 323	274	9.66 537	333	0.33 463	9.95 786	58	10	
25	0	9.62 595	272	9.66 867	330	0.33 133	9.95 728	58	0	65
	10	9.62 865	270	9.67 196	329	0.32 804	9.95 668	60	30	
	20	9.63 133	268	9.67 524	828	0.32 476	9.95 609	59	40	
	30	9.63 398	265	9.67 850	326	0.32 150	9.95 549	60	30	
	40	9.63 662	264	9.68 174	324	0.31 826	9.95 488	61	20	
	50	9.63 924	262	9.68 497	323	0.31 503	9.95 427	61	10	
26	0	9.64 184	260	9.68 818	321	0.31 182	9.95 366	61	0	64
	10	9.64 442	258	9.69 138	320	0.30 862	9.95 304	62	50	
	20	9.64 698	256	9.69 457	319	0.30 543	9.95 242	62	40	
	30	9.64 953	255	9.69 774	317	0.30 226	9.95 179	63	30	
	40	9.65 205	252	9.70 089	315	0.29 911	9.95 116	63	20	
	50	9.65 456	251	9.70 404	315	0.29 596	9.95 052	64	10	
27	0	9.65 705	249	9.70 717	313	0.29 283	9.94 988	64	0	63
	10	9.65 952	247	9.71 028	311	0.28 972	9.94 923	65	50	
	20	9.66 197	245	9.71 339	311	0.28 661	9.94 858	65	40	
	30	9.66 441	244	9.71 648	309	0.28 352	9.94 793	65	30	
	40	9.66 682	241	9.71 955	307	0.28 045	9.94 727	66	20	
	50	9.66 922	240	9.72 262	307	0.27 738	9.94 660	67	10	
28	0	9.67 161	239	9.72 567	305	0.27 433	9.94 593	67	0	62
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	°	′

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差		
28	0	9.67 161		9.72 567		0.27 433	9.94 593		0	62
	10	9.67 398	237	9.72 872	305	0.27 128	9.94 526	67	50	
	20	9.67 633	235	9.73 175	303	0.26 825	9.94 458	68	40	
	30	9.67 866	233	9.73 476	301	0.26 524	9.94 390	68	30	
	40	9.68 098	232	9.73 777	301	0.26 223	9.94 321	69	20	
	50	9.68 328	230	9.74 077	300	0.25 923	9.94 252	69	10	
29	0	9.68 557	229	9.74 375	298	0.25 625	9.94 182	70	0	61
	10	9.68 784	227	9.74 673	298	0.25 327	9.94 112	70	50	
	20	9.69 010	226	9.74 969	296	0.25 031	9.94 041	71	40	
	30	9.69 234	224	9.75 264	295	0.24 736	9.93 970	71	30	
	40	9.69 456	222	9.75 558	294	0.24 442	9.93 898	72	20	
	50	9.69 677	221	9.75 852	294	0.24 148	9.93 826	72	10	
30	0	9.69 897	220	9.76 144	292	0.23 856	9.93 753	73	0	60
	10	9.70 115	218	9.76 435	291	0.23 565	9.93 680	73	50	
	20	9.70 332	217	9.76 725	290	0.23 275	9.93 606	74	40	
	30	9.70 547	215	9.77 015	290	0.22 985	9.93 532	74	30	
	40	9.70 761	214	9.77 303	288	0.22 697	9.93 457	75	20	
	50	9.70 973	212	9.77 591	288	0.22 409	9.93 382	75	10	
31	0	9.71 184	211	9.77 877	286	0.22 123	9.93 307	75	0	59
	10	9.71 393	209	9.78 163	286	0.21 837	9.93 230	77	50	
	20	9.71 602	209	9.78 448	285	0.21 552	9.93 154	76	40	
	30	9.71 809	207	9.78 732	284	0.21 268	9.93 077	77	30	
	40	9.72 014	205	9.79 015	283	0.20 985	9.92 999	78	20	
	50	9.72 218	204	9.79 297	282	0.20 703	9.92 921	78	10	
32	0	9.72 421	203	9.79 579	282	0.20 421	9.92 842	79	0	58
	10	9.72 622	201	9.79 860	281	0.20 140	9.92 763	79	50	
	20	9.72 823	201	9.80 140	280	0.19 860	9.92 683	80	40	
	30	9.73 022	199	9.80 419	279	0.19 581	9.92 603	80	30	
	40	9.73 219	197	9.80 697	278	0.19 303	9.92 522	81	20	
	50	9.73 416	197	9.80 975	278	0.19 025	9.92 441	81	10	
33	0	9.73 611	195	9.81 252	277	0.18 748	9.92 359	82	0	57
	10	9.73 805	194	9.81 528	276	0.18 472	9.92 277	82	50	
	20	9.73 997	192	9.81 803	275	0.18 197	9.92 194	83	40	
	30	9.74 189	192	9.82 078	275	0.17 922	9.92 111	83	30	
	40	9.74 379	190	9.82 352	274	0.17 648	9.92 027	84	20	
	50	9.74 568	189	9.82 626	274	0.17 374	9.91 942	85	10	
34	0	9.74 756	188	9.82 899	273	0.17 101	9.91 857	85	0	56
	10	9.74 943	187	9.83 171	272	0.16 829	9.91 772	85	50	
	20	9.75 128	185	9.83 442	271	0.16 558	9.91 686	86	40	
	30	9.75 313	185	9.83 713	271	0.16 287	9.91 599	87	30	
	40	9.75 496	183	9.83 984	271	0.16 016	9.91 512	87	20	
	50	9.75 678	182	9.84 254	270	0.15 746	9.91 425	87	10	
35	0	9.75 859	181	9.84 523	269	0.15 477	9.91 336	89	0	55
	10	9.76 039	180	9.84 791	268	0.15 209	9.91 248	88	50	
	20	9.76 218	179	9.85 059	268	0.14 941	9.91 158	90	40	
	30	9.76 395	177	9.85 327	268	0.14 673	9.91 069	89	30	
	40	9.76 572	177	9.85 594	267	0.14 406	9.90 978	91	20	
	50	9.76 747	175	9.85 860	266	0.14 140	9.90 887	91	10	
36	0	9.76 922	175	9.86 126	266	0.13 874	9.90 796	91	0	54
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	°	′

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差		
36	0	9.76 922		9.86 126		0.13 874	9.90 796		0	54
	10	9.77 095	173	9.86 392	266	0.13 608	9.90 704	92	50	
	20	9.77 268	173	9.86 656	264	0.13 344	9.90 611	93	40	
	30	9.77 439	171	9.86 921	265	0.13 079	9.90 518	93	30	
	40	9.77 609	170	9.87 185	264	0.12 815	9.90 424	94	20	
	50	9.77 778	169	9.87 448	263	0.12 552	9.90 330	94	10	
37	0	9.77 946	168	9.87 711	263	0.12 289	9.90 235	95	0	53
	10	9.78 113	167	9.87 974	263	0.12 026	9.90 139	96	50	
	20	9.78 280	167	9.88 236	262	0.11 764	9.90 043	96	40	
	30	9.78 445	165	9.88 498	262	0.11 502	9.89 947	96	30	
	40	9.78 609	164	9.88 759	261	0.11 241	9.89 849	98	20	
	50	9.78 772	163	9.89 020	261	0.10 980	9.89 752	97	10	
38	0	9.78 934	162	9.89 281	261	0.10 719	9.89 653	99	0	52
	10	9.79 095	161	9.89 541	260	0.10 459	9.89 554	99	50	
	20	9.79 256	161	9.89 801	260	0.10 199	9.89 455	99	40	
	30	9.79 415	159	9.90 061	260	0.09 939	9.89 354	101	30	
	40	9.79 573	158	9.90 320	259	0.09 680	9.89 254	100	20	
	50	9.79 731	158	9.90 578	258	0.09 422	9.89 152	102	10	
39	0	9.79 887	156	9.90 837	259	0.09 163	9.89 050	102	0	51
	10	9.80 043	156	9.91 095	258	0.08 905	9.88 948	102	50	
	20	9.80 197	154	9.91 353	258	0.08 647	9.88 844	104	40	
	30	9.80 351	154	9.91 610	257	0.08 390	9.88 741	103	30	
	40	9.80 504	153	9.91 868	258	0.08 132	9.88 636	105	20	
	50	9.80 656	152	9.92 125	257	0.07 875	9.88 531	105	10	
40	0	9.80 807	151	9.92 381	256	0.07 619	9.88 425	106	0	50
	10	9.80 957	150	9.92 638	257	0.07 362	9.88 319	106	50	
	20	9.81 106	149	9.92 894	256	0.07 106	9.88 212	107	40	
	30	9.81 254	148	9.93 150	256	0.06 850	9.88 105	107	30	
	40	9.81 402	148	9.93 406	256	0.06 594	9.87 996	109	20	
	50	9.81 549	147	9.93 661	255	0.06 339	9.87 887	109	10	
41	0	9.81 694	145	9.93 916	255	0.06 084	9.87 778	109	0	49
	10	9.81 839	145	9.94 171	255	0.05 829	9.87 668	110	50	
	20	9.81 983	144	9.94 426	255	0.05 574	9.87 557	111	40	
	30	9.82 126	143	9.94 681	255	0.05 319	9.87 446	111	30	
	40	9.82 269	143	9.94 935	254	0.05 065	9.87 334	112	20	
	50	9.82 410	141	9.95 190	255	0.04 810	9.87 221	113	10	
42	0	9.82 551	141	9.95 444	254	0.04 556	9.87 107	114	0	48
	10	9.82 691	140	9.95 698	254	0.04 302	9.86 993	114	50	
	20	9.82 830	139	9.95 952	254	0.04 048	9.86 879	114	40	
	30	9.82 968	138	9.96 205	253	0.03 795	9.86 763	116	30	
	40	9.83 106	138	9.96 459	254	0.03 541	9.86 647	116	20	
	50	9.83 242	136	9.96 712	253	0.03 288	9.86 530	117	10	
43	0	9.83 378	136	9.96 966	254	0.03 034	9.86 413	117	0	47
	10	9.83 513	135	9.97 219	253	0.02 781	9.86 295	118	50	
	20	9.83 648	135	9.97 472	253	0.02 528	9.86 176	119	40	
	30	9.83 781	133	9.97 725	253	0.02 275	9.86 056	120	30	
	40	9.83 914	133	9.97 978	253	0.02 022	9.85 936	120	20	
	50	9.84 046	132	9.98 231	253	0.01 769	9.85 815	121	10	
44	0	9.84 177	131	9.98 484	253	0.01 510	9.85 693	122	0	46
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	°	′

°	′	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差		
44	0	9.84177	131	9.98484	253	0.01516	9.85693	122	0	46
	10	9.84308	129	9.98737	252	0.01263	9.85571	123	50	
	20	9.84437	129	9.98989	253	0.01011	9.85448	124	40	
	30	9.84566	128	9.99242	253	0.00758	9.85324	124	30	
	40	9.84694	128	9.99495	252	0.00505	9.85200	126	20	
	50	9.84822	127	9.99747	253	0.00253	9.85074	125	10	
45	0	9.84949		10.00000		0.00000	9.84949		0	45
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	′	°

三角函數ノ眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0°	·00000	·00000	1·0000	∞	∞	1·00000	90°
1°	·01745	·01746	1·0002	57·299	57·290	·99985	89°
2°	·03490	·03492	1·0006	28·654	28·636	·99939	88°
3°	·05234	·05241	1·0014	19·107	19·081	·99863	87°
4°	·06976	·06993	1·0024	14·336	14·301	·99756	86°
5°	·08716	·08749	1·0038	11·474	11·430	·99619	85°
6°	·10453	·10510	1·0055	9·5668	9·5144	·99452	84°
7°	·12187	·12278	1.0075	8·2055	8·1443	·99255	83°
8°	·13917	·14054	1·0098	7·1853	7·1154	·99027	82°
9°	·15643	·15838	1·0125	6·3925	6·3138	·98769	81°
10°	·17365	·17633	1·0154	5·7588	5·6713	·98481	80°
11°	·19081	·19438	1·0187	5·2408	5·1446	·98163	79°
12°	·20791	·21256	1·0223	4·8097	4·7046	·97815	78°
13°	·22495	·23087	1·0263	4·4454	4·3315	·97437	77°
14°	·24192	·24933	1·0306	4.1336	4·0108	·97030	76°
15°	·25882	·26795	1·0353	3·8637	3·7321	·96593	75°
16°	·27564	·28675	1·0403	3·6280	3·4874	·96126	74°
17°	·29237	·30573	1·0457	3·4203	3·2709	·95630	73°
18°	·30902	·32492	1·0515	3·2361	3·0777	·95106	72°
19°	·32557	·34433	1·0576	3·0716	2·9042	·94552	71°
20°	·34202	·36397	1·0642	2·9238	2·7475	·93969	70°
21°	·35837	·38386	1·0711	2·7904	2·6051	·93358	69°
22°	·37461	·40403	1·0785	2·6695	2·4751	·92718	68°
23°	·39073	·42447	1·0864	2·5593	2·3559	·92050	67°
24°	·40674	·44523	1·0946	2·4586	2·2460	·91355	66°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
24°	·40674	·44523	1.0946	2·4586	2·2460	·91355	66°
25°	·42262	·46631	1·1034	2·3662	2·1445	·90631	65°
26°	·43837	·48773	1·1126	2·2812	2·0503	·89879	64°
27°	·45399	·50953	1·1223	2·2027	1·9626	·89101	63°
28°	·46947	·53171	1·1326	2·1301	1·8807	·88295	62°
29°	·48481	·55431	1·1434	2·0627	1·8040	·87462	61°
30°	·50000	·57735	1·1547	2·0000	1·7321	·86603	60°
31°	·51504	·60086	1·1666	1·9416	1·6643	·85717	59°
32°	·52992	·62487	1·1792	1·8871	1·6003	·84805	58°
33°	·54464	·64941	1·1924	1·8361	1·5399	·83867	57°
34°	·55919	·67451	1·2062	1·7883	1·4826	·82904	56°
35°	·57358	·70021	1·2208	1·7434	1·4281	·81915	55°
36°	·58779	·72654	1·2361	1·7013	1·3764	·80902	54°
37°	·60182	·75355	1·2521	1·6616	1·3270	·79864	53°
38°	·61566	·78129	1·2690	1·6243	1·2799	·78801	52°
39°	·62932	·80978	1·2868	1·5890	1·2349	·77715	51°
40°	·64279	·83910	1·3054	1·5557	1·1918	·76604	50°
41°	·65606	·86929	1·3250	1·5243	1·1504	·75471	49°
42°	·66913	·90040	1·3456	1·4945	1·1106	·74314	48°
43°	·68200	·93252	1·3673	1·4663	1·0724	·73135	47°
44°	·69466	·96569	1·3902	1·4396	1·0355	·71934	46°
45°	·70711	1·0000	1·4142	1·4142	1·0000	·70711	45°
	cos	cot	cosce	sec	tan	sin	角

明治三十七年十月四日印刷
明治三十七年十月八日發行
明治三十八年一月廿四日訂正再版印刷
明治三十八年一月廿八日訂正再版發行
明治三十九年二月二日三版發行
明治四十一年二月十一日四版發行
明治四十三年二月廿五日五版發行
明治四十五年三月十三日六版發行

平面三角法奥附

定價金六拾錢

著作者　樺正董

印刷者兼發行者　東京市神田區裏神保町一番地　龜井忠一

發行所　東京市神田區裏神保町一番地　三省堂書店

印刷所　東京市神田區三崎河岸第十二號　三省堂印刷部