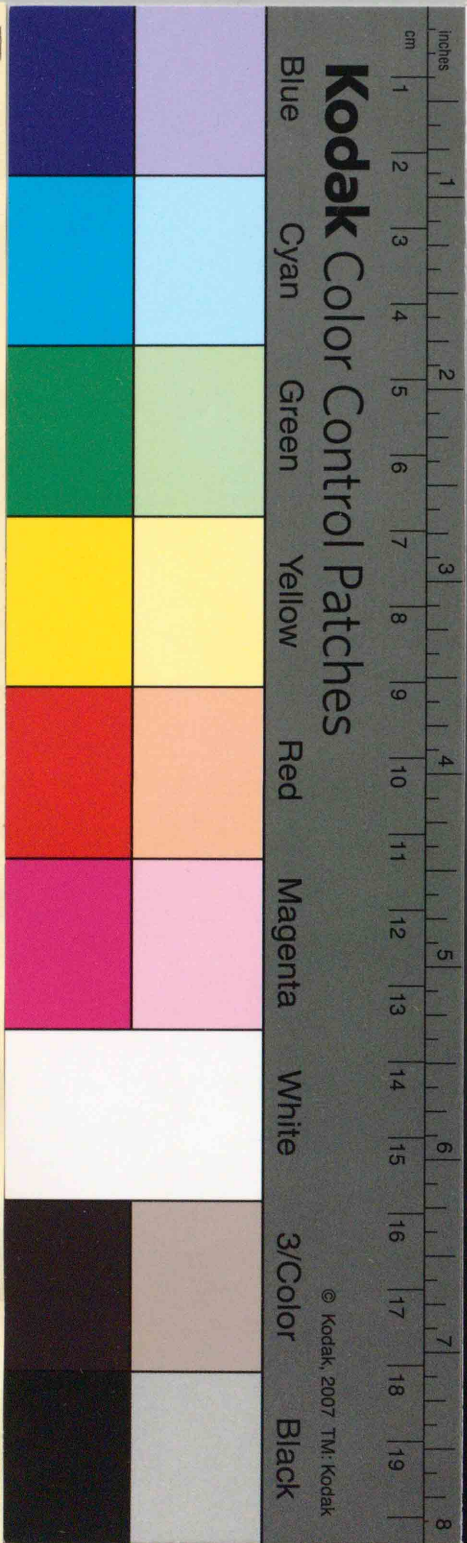


40105

教科書文庫

4
414.
41-1905
26000 65228

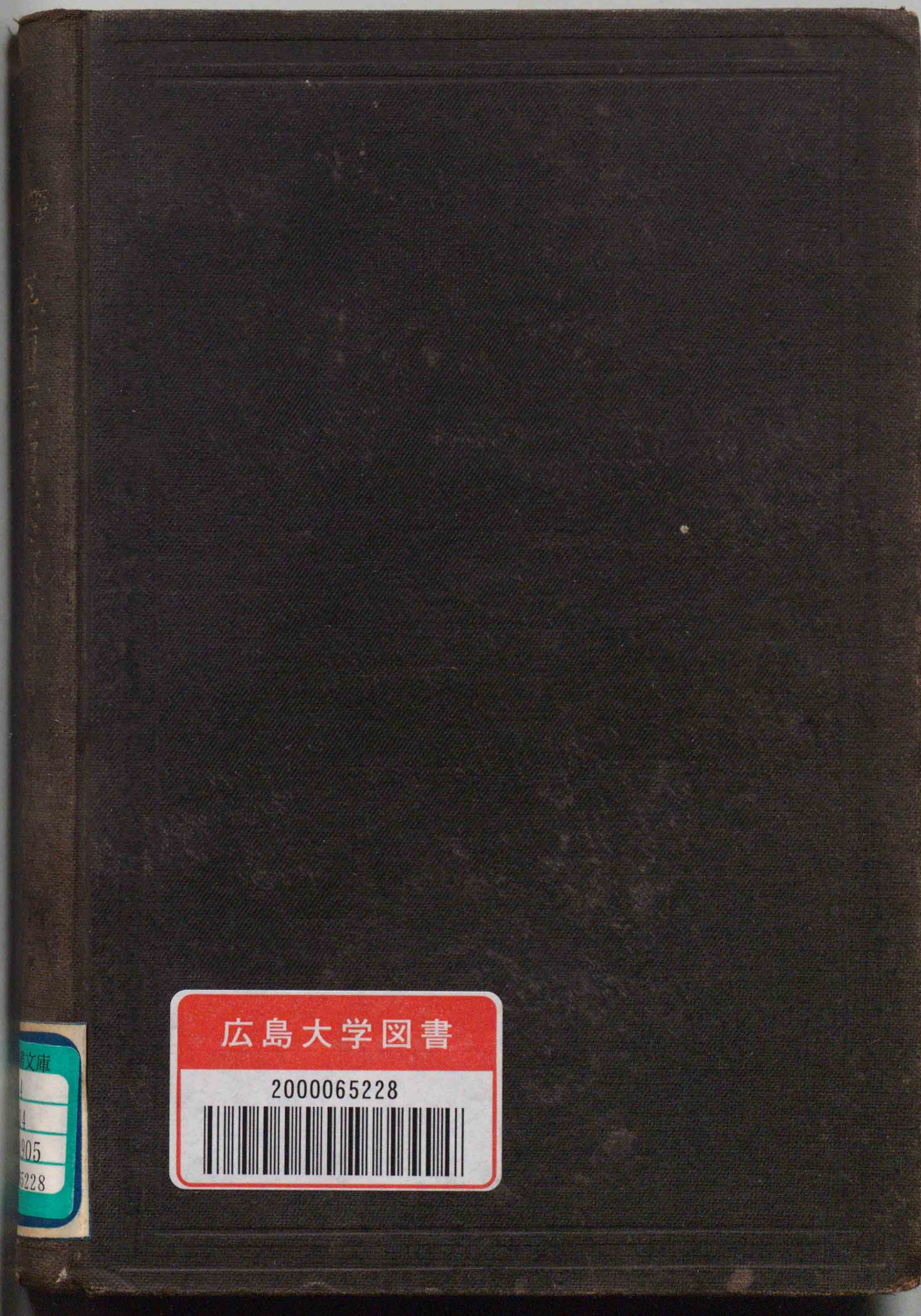
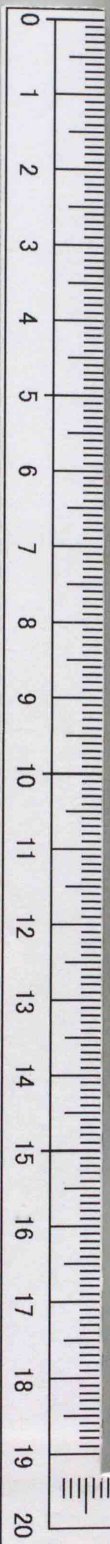


A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak



広島大学図書

2000065228



375.9  
Ki 11

教科書文庫  
4  
414  
41-1905  
2000065228

資 料 室

明治三十八年十一月二十九日

文部省檢定濟

中學校數學科教科書

初等

平面三角法

教科書

全

理學博士

菊池大藏

理學士

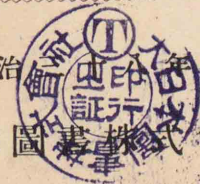
澤田吾一

編纂

第五版

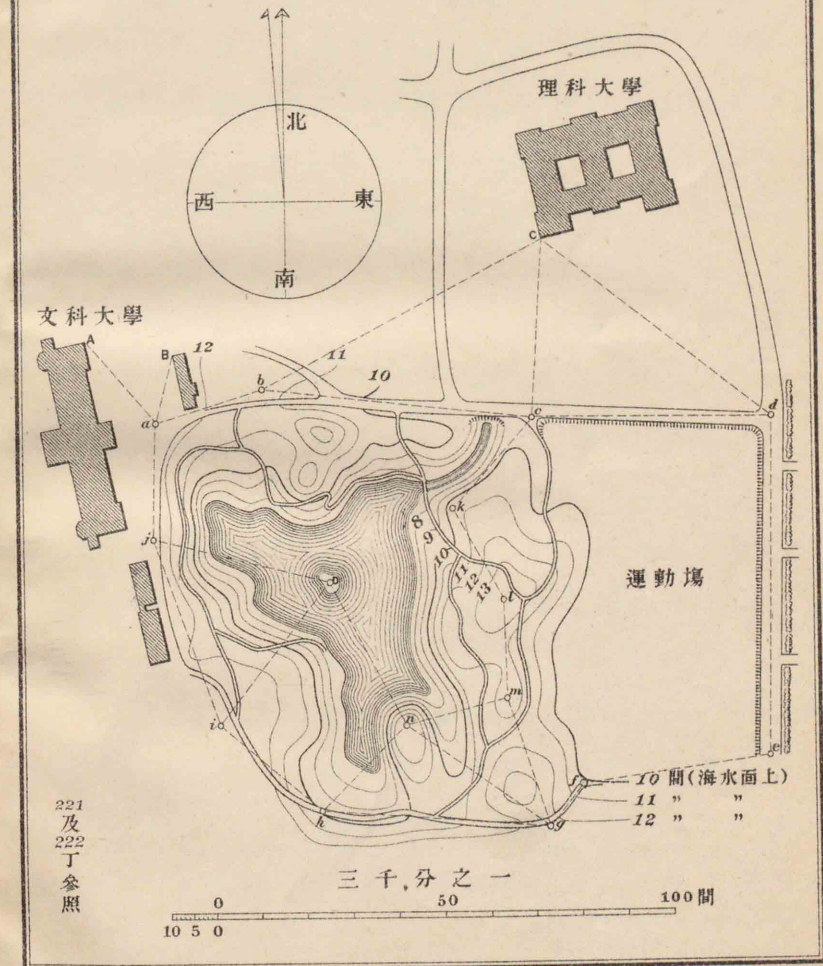
明治

大日本圖書株式會社





帝國大學構内之圖



行印版製榮小田禰市京東

## 緒 言

本書ハ中學校ノ教科書ニ充ツルノ目的ヲ以テ之ヲ編纂シタリ、故ニ高等ノ學理ニ關スル項ハ盡ク省略セリ。然レモ三角法ハ恰モ初等數學ト高等數學ノ間ノ橋梁ノ如クニシテ事已ニ極限ノ理、函數ノ連續、近似計算、等ニ涉ルヲ以テ初學者ノ解シ易カラザル點少カラズ。斯ノ如キ事項ニ至リテハ成ル可ク平易ニ其ノ眞意ヲ示サンコトヲ力メタリト雖モ本書固ヨリ教科書ニシテ約言シタル處多シ、教師ノ説明ヲ待テ而シテ完全ナルノミ；看者之ヲ諒セヨ。

初等三角法ニ於テ講スル所ノ定義、定理、問題、等ハ殆ド一定セルモノニシテ固ヨリ漫ニ改竄ス可キニ非ズト雖モ余輩本邦授業上ニ就テ望ム所有リ故ニ在來ノ三角法ニ比較スレハ稍趣ヲ異ニスル點無キニ非ズ。

三角方程式ハ特ニ一編ト爲シ、圓函數ノ一般ナル説述ヲ終リタル後ニ之ヲ攻究スルコトセリ。是レ一々ハ學者ヲシテ解ノ性質ヲ明瞭ニ悟ラシメンガ爲メナリ、又一々ハ $90^\circ$ 以下ノ角ノミヲ以テ解ト爲スノ

惡習ヲ除カンガ爲メナリ。

三角法ノ應用ヲ論スル條章ニハ特ニ實用多キ事項ヲ撰擇セリ。又問題ハ皆ニ本文諸定理ヲ練磨スル爲メノミナラズ、直接或ハ間接ニ其他ノ智識ヲ養ハンコニ注意シテ採集セリ。

三角法ノ應用ノ最著シク最手近ナルモノハ測量ナリ、而シテ測量ハ中學教育ヲ受クル者ニ在リテハ頗ル實用ニ適シ且ツ學者ニ取リテ大ニ趣味有ルモノナリ、從テ三角法ヲ學フ上ニ於テモ其ノ實用ヲ示スヲ以テ大ニ利益有ル可シ。然レモ測量ハ一大技術ナルヲ以テ僅々數十葉ノ能ク盡クス所ニ非ザルハ論ヲ俟タズ、且ツ充分ニ之ヲ授クルニハ高價ナル器械ヲ要ス。本書ノ附録ハ其ノ一斑ヲ示サンガ爲メニ初學者ノ實施シ易キモノ二三ヲ掲ケタルニ過キズ、器械ノ説明及取り扱ヒ方等ニ至リテハ舉ゲテ教師ノ口授ヲ俟ツモノトス。

卷末ノ表ハ紙數ノ少カラシク圖リタルヲ以テ使用上不便ナル點アリト雖モ學者ノ練習用トシテ寧有益ナル可シ。蓋シ三角計算ニ要スル表ノ世ニ行ハル、モノ少カラズ、從テ其ノ組織モ各異ナレリ：

或ハ比例部分一桁ヲ要スルモノ有リ或ハ二桁以上ヲ要スルモノ有リ、又比例部分ニ用キル小表ヲ附シタルモノ有リ或ハ之ヲ附セザルモノ有リ。本書ノ表ハ前述諸表ノ性質ヲ成ル可ク具備センコトニ心掛ケテ編成シタリ。

圓函數ノ對數表中差ノ變化ノ甚シキ部分ハ五分飛ビト爲シ其ノ緩ナル部分ハ十分飛ビト爲シタリ、故ニ此表ヨリ得タル値ハ一分飛ビノ表ヨリ得タルモノニ比較スレハ小異アルコト有リ、然レモ其ノ差違實地ニ於テハ論スルニ足ラザル小數ナル可シ。

本書、版ヲ改ムルコト茲ニ五回、每次多少ノ修正ヲ加ヘ以テ世ノ進歩ニ伴ハンコトヲ力メタリ、然レモ尙ホ不完全ナル點少カラザル可シ：冀クハ本書ヲ用キラル、教員、其他ノ讀者ニシテ幸ニ之ヲ指示シ以テ編纂者ヲシテ本書ヲ改良スルコトヲ得シメンコトヲ。

明治卅八年八月。

菊池大麓

澤田吾一

## 目 錄

第 壹 編	角ヲ計ルヲ .....	1—6.
第 貳 編	圓函數 .....	7—23.
第 參 編	30°, 45°, 60°, 等ノ圓函數 .....	24—36.
第 四 編	任意ノ角 .....	37—55.
第 五 編	餘角, 補角, 等ノ圓函數ノ關係 ..	56—66.
第 六 編	二ノ角ノ圓函數 .....	67—78.
第 七 編	倍角ノ圓函數, 等 .....	79—84.
第 八 編	三角方程式 .....	85—101.
第 九 編	分角 .....	102—110.
第 十 編	對數 .....	111—120.
第 十 一 編	對數及三角表ノ用キ方 .....	121—139.
第 十 二 編	三角形ノ角及邊ノ關係 .....	140—152.
第 十 三 編	三角形ノ解 .....	153—170.
第 十 四 編	距離及高 .....	171—184.
第 十 五 編	三角形ノ面積, 外接圓, 內接圓, 等 ..	185—189.
附 錄	測量術ノ大意 .....	190—222.
問題ノ答	.....	223—234.
表	.....	i—xvi.

# 平面三角法.

## 第壹編.

### 角ヲ計ルヲ.



1. 平面三角法ハ既ニ三角ヲ以テ其ノ名トスレモ今日我々ガ此學ニ於テ論スル所ハ實ニ三角形ノ性質ニ止マラズシテ一般ニ角ニ關スル計算及代數學的研究ナリ.

2. 或ル量ヲ計ルトハ之ト同シ種類ノ一ノ量ヲ單位ト定メ計ラントスル量ト此單位トノ比ヲ求ムルナリ.

計ラントスル量ト單位トシタル量トガ通約ス可カザル量ナルモ此比ハ數ヲ以テ嚴正ニ表ハス能ハズ. 然レモ實地ニ量ヲ計ルニハ必ズシモ嚴正ノ比ヲ要セズ; 其ノ目的ニ依テ精粗ノ差有ル可シト雖モタゞ眞ノ比ニ近キ數ヲ得ルヲ以テ足レリトス.

(菊池大麓編纂初等幾何學教科書附録ヲ見ヨ.)



比ヲ表ハス所ノ此數ヲ稱シテ量ヲ表ハス數ト云フ。例ヘハ或ル線アリ、其ノ長ト長ノ單位ノ比ガ $a:1$ ナレハ線ノ長ヲ表ハス數ハ $a$ ナリ；通例之ヲ略シテ單ニ線ノ長ハ $a$ ナリト云フ、或ハ單位ノ何ナルカヲ明示スルタメニ $a$ 尺ナリ又ハ $a$ 里ナリ等ト云フ。

3. 初等幾何學ニ於テ直角或ハ直角ノ三分ノ一ナドト云フハ之レ直角ヲ單位トシテ角ヲ計レルナリ。然レ此直角ハ稍大ナル角ナルヲ以テ之ヲ其儘單位ト爲スルハ實地頗不便ナリ。故ニ之ヲ小分シテ單位ヲ設クルコト下ノ如シ。

4. 六十分法。一直角ノ九十分ノ一ヲ度ト稱シ一度ノ六十分ノ一ヲ分ト稱シ一分ノ六十分ノ一ヲ秒ト稱ス。度分秒ノ記號ヲ $^{\circ} ' ''$ トス、例ヘハ $46^{\circ} 25' 37''$ ハ46度25分37秒ナリ。

此計リ方ハ測量、航海、星學、等實地ノ計算ニ於テ一般ニ用キルモノニシテ之ヲ六十分法ト稱ス。

此法ノ起原ハ正三角形ノ一ノ角ヲ基本トシテ之ヲ順次ニ60ニ等分シテ度分秒ト爲シタルナリ。而シテ今日ハ直角ヨリ割リ出ス故ニ初メ一ハ90ニ等分スルコトナルナリ。

例題 1.  $32^{\circ} 3' 15''$ ヲ直角ノ小數トシテ表ハセ。

$$\begin{array}{r} 60 \ ) \ 15 \text{ 秒} \\ 60 \ ) \ 3.25 \text{ 分} \\ 90 \ ) \ 32.05416666 \dots \text{ 度} \\ \hline .35615740740 \dots \text{ 直角} \end{array}$$

答  $.35615740$  直角。

例題 2.  $.35615740$  直角ヲ六十分法ニテ表ハセ。

$$\begin{array}{r} .35615740740 \dots \text{ 直角} \\ \hline 90 \\ 32.05416666600 \text{ 度} \end{array}$$

(此積ノ末ノ部分ハ6ノ循環ナル可キヲ明ナリ。)

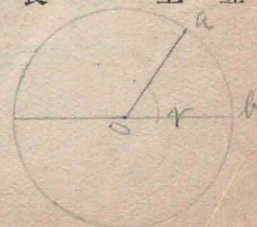
$$\begin{array}{r} 32.054166666 \dots \text{ 度} \\ \hline 60 \\ 3.2499999960 \text{ 分} \end{array}$$

即  $\begin{array}{r} 3.25 \text{ 分} \\ \hline 60 \\ 15.00 \text{ 秒} \end{array}$  答  $32^{\circ} 3' 15''$ 。

例題 3. 半徑1ナル圓アリ、其弧ノ長2.25ノ上ニ立

ツ中心ニ於テノ角ハ何度ナリヤ？

弧長  $\Delta$  圓周  $= r \times 2 \times 3.1416 \dots$   
 $\frac{\Delta}{r} = 2 \times 3.1416 \dots$   
 1 Radian  $\frac{2\pi}{360}$  度



△ = ツバノ  
 圓 = 第一度ナリ  
 △ = 半徑ト上トナリ  
 △ = 弧ノ長トナリ  
 △ = Radian  
 △ = 第一度ナリ

$$\begin{aligned} \text{此角} &= 2.25 \times \frac{2}{\pi} \text{直角}^* \\ &= \frac{2.25 \times 180}{\pi} \text{度} = 128.9 \dots \text{度} \end{aligned}$$

例題 4. 半徑百尺ノ圓ノ中心ニ於テノ角  $0^\circ 35' 30''$ ニ對スル弧ノ長ヲ求ム.

$$\begin{aligned} \text{此弧長} &= 35 \frac{30}{60} \times \frac{100 \times \pi}{180 \times 60} \text{尺} \\ &= \frac{71}{2} \times \frac{\pi}{108} \text{尺} = 1.033 \text{尺 (略)}. \end{aligned}$$

## 問 題 I.

- (1) 下ニ記セル角ヲ六十分法ニテ表ハセ.
- (i) 1.385 直角.                      (ii) 2.6405 直角.
- (iii) .70296 直角.                    (iv) .00001425 直角.
- (2) 下ニ記セル角ヲ直角ノ小數トシテ表ハセ.
- (i)  $31^\circ 27' 18''$ . (ii)  $8^\circ 15' 27''$ . (iii)  $29^\circ 4' 16''$ . (iv)  $58^\circ$ .

\*  $\pi$ ハ圓ノ半周ト半徑トノ比ニシテ即  $3.14159265 \dots$ ナリ, 但シ此値ノ代リニ通常  $\frac{22}{7}$ ヲ用キル,  $\frac{22}{7}$ ハ  $3.1428 \dots$ ナルヲ以テ  $\pi$ ノ値トシテ  $\frac{22}{7}$ ヲ用キレハ之ガ爲メニ生スル差ハ結果ノ千分ノ一ヨリ小ナリ.

(3) 正五邊形, 正八邊形, 正十五邊形ノ各角ヲ六十分法ニテ示セ.

(4) 半徑一尺ノ圓ニ於テ一尺ノ弧ノ上ニ立ツ中心ニ於テノ角ハ何度ナルカ?

(5) 半徑5寸ノ圓ノ中心ニ於テ30度ニ對スル弧ノ長ヲ求ム.

(6) 半徑4000英里ノ圓有リ. 其ノ中心ニ於テ1'ノ角ニ對スル弧ノ長ヲ如何?

(7) 半徑  $\frac{2}{3}$  英里ノ圓弧ヲ爲セル鐵道アリ. 汽車ガ一時間ニ30英里ノ割合ヲ以テ10秒時間此線路ヲ進行セハ其ノ廻轉シタル角如何?

(8) 太陽ノ直徑ハ吾人ノ眼ニ於テ  $32'$ ノ角ニ對ス. 太陽ノ距離ヲ150,000,000キロメートルトスレハ太陽ノ直徑ハ幾キロメートルナルカ?

[微小ナル角ニ對スル弧ノ長ハ其ノ弦ノ長ニ甚ダ近シ. 故ニ近似計算ニ於テハ此兩者ヲ同ジ長ト見做スヲ得.]

(9) 月ノ直徑ハ吾人ノ眼ニ於テ  $30'$ ノ角ニ對シ, 太陽ノ直徑ハ  $32'$ ノ角ニ對ス. 太陽ノ距離ヲ月ノ距離

ノ 375 倍トスルキハ太陽ノ直徑ト月ノ直徑ノ比如何?

(10) 太陽ノ直徑ハ十二月三十一日ニ於テハ  $32' 36''$ ニ對シ、七月一日ニ於テハ  $31' 32''$ ニ對ス。此二日ニ於テ太陽ノ距離ノ比ヲ問フ。

(11) 地球ノ軌道ノ半徑 (150,000,000 キロメートル) ハ「セントール」宿第一星ニ於テ  $0''.75$ ノ角ニ對ス。此星ノ距離ヲ求ム。

## 第 貳 編

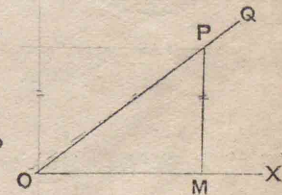
## 圓 函 數

5. 角ト親密ナル關係ヲ有スル數ニシテ圓函數ト稱スルモノ有リ。此函數ノ性質ノ研究及三角形ニ關スル問題ヲ解スル爲メ之ヲ適用スルコトハ實ニ三角法ノ主ナル目的ナリ。

6. 一ノ角  $A$ ノ一邊  $OQ$ 上ノ任意ノ一點  $P$ ヨリ他ノ邊  $OX$  (或ハ其ノ延長) へ垂線  $PM$ ヲ引ケ。然ルキハ三ノ直線  $OP$ ,  $OM$ ,  $MP$ ハ直角三角形ヲ爲ス。

而シテ、

1. 直角ニ對スル邊  $OP$ ヲ斜邊ト稱シ、



2. 考フル所ノ角ト直角ノ間ニ在ル邊 OMヲ底邊ト稱シ,

3. 考フル所ノ角ニ對スル邊 MPヲ垂線ト稱ス.

此三ノ直線ヲ二ツ、取りテ比ヲ作ルキハ六ノ比ヲ得.

之ニ名ヲ命スル下ノ如シ:

- (1)  $\frac{MP}{OP}$  即  $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$ , 之ヲ角 Aノ正弦ト稱ス;
- (2)  $\frac{OM}{OP}$  即  $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}$ , " " " 餘弦 " ;
- (3)  $\frac{MP}{OM}$  即  $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}$ , " " " 正切 " ;
- (4)  $\frac{OM}{MP}$  即  $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}$ , ((3)ノ反比ナリ), 餘切 " ;
- (5)  $\frac{OP}{OM}$  即  $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}$ , ((2)ノ反比ナリ), 正割 " ;
- (6)  $\frac{OP}{MP}$  即  $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$ , ((1)ノ反比ナリ), 餘割 " .

正弦ノ英語ハ sineナリ, 因テ角 Aノ正弦ヲ sinAト記ス;  
餘弦 " " cosine " , " " 餘弦 " cosA " ;

- 正切 " " tangent " , " " 正切 " tanA\* " ;
- 餘切 " " cotangent " , " " 餘切 " cotA " ;
- 正割 " " secant " , " " 正割 " secA " ;
- 餘割 " " cosecant " , " " 餘割 " cosecA " .

此比ヲ總稱シテ圓函數ト云フ, 又三角函數或ハ三角比トモ云フ.

斯様ニ作リタル直角三角形ノ各邊ノ位置ニ從テ之ニ正負ノ別ヲ附クルノ必要有レモ, 0°ヨリ 90°マデノ角ニ於テハ何レモ正ナリトス可キヲ以テ, 正負ノ事ハ第四編ニ譲リ, 先ツ夫マデハ 0°ヨリ 90°マデノ角ニ付テ論スルモノトス.

△7. 各圓函數ハ角毎ニ確定セルモノナリ.

前章ノ定義ニ於テ Pハ角 Aノ一邊 OQ上ニ取リタリ: 今 Pヲ此邊上ノ何レノ點トスルモ或ハ之ヲ他ノ

\*或ハ正切ヲ tangA 又ハ tgAト記シ餘切ヲ cotangA 又ハ cotgAト記スアレモ本書ニ於テハ本文ニ由ル.

邊ノ上ニ取ルモ各圓函數ハ  
角Aノ變セザル間ハ決シテ  
其ノ値ヲ變セズ。例ヘハOQ

ノ上ニ任意ニ他ノ一點P'ヲ  
取リ又OXノ上ニ任意ニ一點P''ヲ取リ之ヨリ他ノ邊  
ヘ夫々垂線P'M', P''M''ヲ引ケ。

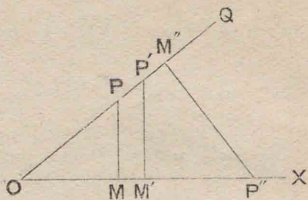
然ルキハ三ノ直角三角形OMP, OM'P', OM''P''ハ互ニ  
相似ナルヲ以テ

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''}; \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OM'}{OP'} = \frac{OM''}{OP''}; \text{等.}$$

故ニ各圓函數ハ角毎ニ確定セリ。

附言。圓函數ハ比ナルヲ以テ單ニ數ナリ。而シテ本文ニ述ヘタル如ク角毎ニ確定セルモノナリト雖モ概シテ不盡數ナルヲ以テ吾人ノ目的ニ適スルダケ精密ニ眞ノ比ニ近キ數ヲ得ルヲ以テ足レリトセザル可カラズ。

圓函數ノ値ハ先輩既ニ精シク計算シテ之ガ表ヲ作レリ。本書ニ於テモ卷末ニ略表ヲ掲ゲ以テ學者ノ便ニ供ス。

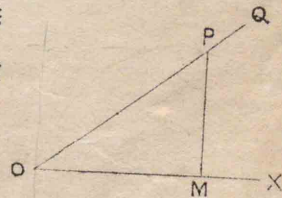


8.  $\sin A$  ノ二乗冪, 三乗冪, 等ハ  $(\sin A)^2$ ,  $(\sin A)^3$ , 等ト記ス至當ナリト雖モ通常之ヲ  $\sin^2 A$ ,  $\sin^3 A$ , 等ト記ス。  $\cos A$ ,  $\tan A$ , 等モ皆之ニ倣フ。

$\sin A$  ハ角Aニ屬スル一ノ比ノ記號ナルヲ以テ  $\sin$  トAトハ離隔ス可カラザルモノナリ; 即  $\sin A + \sin B$  ヲ  $\sin(A+B)$  ニ等シナド、誤解ス可カラズ。又  $\sin^2 A$  モ便宜ノ爲メ  $(\sin A)^2$  ノ代リニ用キタルモノニシテ  $\sin A$  ノ二乗冪ヲ表ハス所ノ一ノ記號ナリト知ル可シ。他ノ圓函數ニ付テモ亦同シ。

9. 互ニ餘角ナル二ノ角ノ圓函數ノ關係

任意ノ角XOQヲAトセヨ。然ルキハ直角三角形OMPノ他ノ銳角MPOハAノ餘角即  $90^\circ - A$  ナリ。定義ニ依リ



$$\sin A = \frac{MP}{OP} = \cos MPO = \cos(90^\circ - A).$$

$$\cos A = \frac{OM}{OP} = \sin MPO = \sin(90^\circ - A),$$

$$\tan A = \frac{MP}{OM} = \cot MPO = \cot(90^\circ - A),$$

同様 =  $\cot A = \tan(90^\circ - A), \sec A = \operatorname{cosec}(90^\circ - A),$

$$\operatorname{cosec} A = \sec(90^\circ - A).$$

言語ヲ以テスレハ,

任意ノ角Aノ正弦ハ其ノ餘角ノ餘弦ニ等シ,

” 餘弦 ” 正弦 ” ”

” 正切 ” 餘切 ” ”

” 餘切 ” 正切 ” ”

” 正割 ” 餘割 ” ”

” 餘割 ” 正割 ” ”

以下, 正弦, 餘弦等ト記ス代リニ便宜ノ爲メ英語ノ略字 sin, cos, 等ト記ス可シ.

問 題 II.

(1) 直角三角形ノ三邊ガ3尺, 4尺, 5尺ナルキハ

最小角ノ正弦及餘弦如何?

△(2) 直角三角形ノ三邊ノ比ガ下ノ如クナレハ大ナル銳角ノ正弦及正切ヲ求ム.

(a) 8:15:17. (b) 40:9:41. (c) 1:2:√5.

(3) Cニ於テ直角ヲ有スル三角形ABCノ二邊ガ下ノ如クナレハ角BACノ圓函數ヲ求ム:

(a) AB=13, AC=12. (b) AC=2, BC=6.

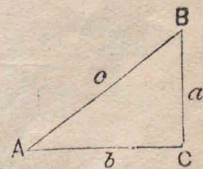
(c) AB:BC::2:1.

△(4) 三角形ABCニ於テC=90°, AB=1, BC=√7ナレハ tanABC=1.02...ナルヲ證明セヨ.

△(5) cos 30°ハ  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ナリ. 30°ノ角ヲ有ツ直角三角形ノ斜邊ガ一尺二寸ナレハ他ノ二ノ邊ハ各何寸ナルカ?

△(6) tan 40°=0.8391. 一ノ銳角ガ40°ナル直角三角形ニ於テ直角ト此銳角ニ接スル邊ノ長ハ21メートルナルトキハ此銳角ニ對スル邊ハ何メートルナルカ?

(7) Cニ於テ直角ヲ有スル三角形ABCニ於テ角ノ頂點ノ文字A, B, Cヲ以テ各其角ノ大ヲ代表セシメヨ; A, B, Cニ對スル邊ノ長ヲ夫々a,



$b, c$  トセヨ. 然ルキハ下ノ方程式ノ眞ナルヲ証明セヨ.

$$\begin{aligned} a &= c \sin A, & a &= c \cos B, & a &= b \tan A, & a &= b \cot B, \\ b &= c \cos A, & b &= c \sin B, & b &= a \cot A, & b &= a \tan B, \\ c &= a \operatorname{cosec} A, & c &= a \sec B, & c &= b \sec A, & c &= b \operatorname{cosec} B. \end{aligned}$$

10. 下ノ關係ハ直ニ定義ヨリ來ル:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

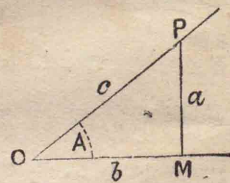
11.  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$  及  $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$ .

垂線底邊斜邊ノ長ヲ  $a, b, c$  トセヨ. 然ルキハ定義ニ由リ

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}.$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a/b}{c/c} = \frac{a}{b} = \tan A,$$

$$\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b/a}{c/c} = \frac{b}{a} = \cot A.$$



12.  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$  *ピタゴラス*  
 $1 + \tan^2 A = \sec^2 A,$   
 $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A.$

直角三角形ニ於テ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二ノ邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ: 即前節ノ圖ニ於テ

$$MP^2 + OM^2 = OP^2;$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$$

之ヲ  $c^2, b^2, a^2$  ニテ割レハ下ノ如シ:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}, \quad \text{即} \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1;$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \text{即} \quad \tan^2 A + 1 = \sec^2 A;$$

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \text{即} \quad 1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A.$$

13. 任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ直角

ニ交ル半徑  $OX, OY$  ヲ引ケ.

弧  $XP$  ヲ中心ニ於テ任意

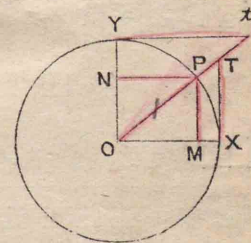
ノ角  $A$  ニ對スル様ニ取リ,

$P$  ヲリ  $OX, OY$  へ夫々垂線

$PM, PN$  ヲ引ケ.  $X$  及  $Y$  ニ於テ夫々切線  $XT$

及  $Yt$  ヲ引キ,  $OP$  ノ延長ト  $T$  及  $t$  ニ於テ交ラ

シメヨ.



然ルキハ、半徑ヲ單位トスルキハ、

MPノ長ヲ表ハス數ハ  $\sin A$ ニ等シ、

XT                   "                    $\tan A$                    "                   、

OT                   "                    $\sec A$                    "                   、

NP (即 OM)       "                    $\cos A$                    "                   、

Yt                   "                    $\cot A$                    "                   、

Ot                   "                    $\operatorname{cosec} A$                    "                   、

何トナレハ、

$$\sin A = \frac{MP}{OP} = \frac{MP \text{ノ長ヲ表ハス數}}{1} = MP \text{ノ長ヲ表ハス數,}$$

$$\tan A = \frac{MP}{OM} = \frac{XT}{OX} = \frac{XT \text{ノ長ヲ表ハス數}}{1} = XT \text{ノ長ヲ表ハス數,}$$

其他皆之ニ倣フ.\*

#### 14. 第10, 11, 12節ノ諸關係ヲ用キテ 圓函數ヲ含メル諸式ヲ變形シ又ハ二式

\*以前ハ正弦、正切、……ヲ以テ弧XPニ屬スル直線MP, XT,……ノ名トセリ;而シテ前ニ記セル六種ノ外ニMX即  $1 - \cos A$ ヲ正矢 (versed sine) ト稱シ, NY即  $1 - \sin A$ ヲ餘矢 (coversed sine) ト稱シ,都合八ノ直線有ルヲ以テ合稱シテ八線ト云ヒタリ。

ノ恒同ナルヲ證明スルヲ得。是レ將來頗必要ノ事ナルヲ以テ下ニ其方法ノ二三ノ例ヲ掲ク。

例題 1.  $\tan A + \cot A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A$ ヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \tan A + \cot A &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \quad \left[ \because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}; \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \right] \\ &= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A \cdot \sin A} \\ &= \frac{1}{\cos A \cdot \sin A} \quad \left[ \because \sin^2 A + \cos^2 A = 1. \right] \\ &= \sec A \cdot \operatorname{cosec} A. \quad \left[ \because \frac{1}{\cos A} = \sec A; \frac{1}{\sin A} = \operatorname{cosec} A. \right] \end{aligned}$$

例題 2.  $\sin^6 B + \cos^6 B = 1 - 3 \cos^2 B \sin^2 B$ ヲ證明セヨ。

$$\begin{aligned} \sin^6 B + \cos^6 B &= (\sin^2 B + \cos^2 B)(\sin^4 B - \sin^2 B \cos^2 B + \cos^4 B) \\ &= 1 \times (\sin^4 B - \sin^2 B \cos^2 B + \cos^4 B) \\ &= (\sin^2 B)^2 - \sin^2 B \cos^2 B + \cos^4 B \\ &= (1 - \cos^2 B)^2 - (1 - \cos^2 B) \cos^2 B + \cos^4 B \\ &= 1 - 2 \cos^2 B + \cos^4 B - \cos^2 B + \cos^4 B + \cos^4 B \\ &= 1 - 3 \cos^2 B + 3 \cos^4 B; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad 1 - 3 \cos^2 B \sin^2 B &= 1 - 3 \cos^2 B (1 - \cos^2 B) \\ &= 1 - 3 \cos^2 B + 3 \cos^4 B. \end{aligned}$$

故ニ本題ノ兩節ハ恒ニ相等シ。



此等ノ事項ヲ證明スルニハ勿論便宜ヲ見計ラヒ臨機ノ處置ヲ爲ス可キヲ以テ其方法ハ一定シ難シ。然レモ正弦、餘弦ヨリ成ル式ハ  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ニ由リテ成ル可ク同種ノ函數(例ヘハ餘弦)ノ冪ノ集リトナスヲ宜シトス。又種々ノ函數ヲ含メル式ハ正弦、餘弦ヲ用キテ其他ノ函數ヲ表ハシ以テ正弦、餘弦ノミヨリ成ル式ニ變形スルヲ便利トスル場合多シ。

### 問 題 III.

下ノ恒等式ヲ證明セヨ。

- (1)  $\cos A \cdot \tan A = \sin A$ . (2)  $\sec A = \tan A \cdot \operatorname{cosec} A$ .  
 (3)  $\cos A = \cot A \cdot \sin A$ . (4)  $(\tan A + \cot A) \sin A \cdot \cos A = 1$ .  
 (5)  $\frac{1}{\tan^2 A + 1} + \frac{1}{\cot^2 A + 1} = 1$ .  
 (6)  $\cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$ .  
 (7)  $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$ .  
 (8)  $(\sin A + \cos A)^2 = 1 + 2 \sin A \cdot \cos A$ .  
 (9)  $\cot^4 A + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^4 A - \operatorname{cosec}^2 A$ .  
 (10)  $\sec^4 B - \sec^2 B = \tan^4 B + \tan^2 B$ .  
 (11)  $(\sec B - \tan B)(\sec B + \tan B) = 1$ .  
 (12)  $\sin^2 C \tan^2 C + \cos^2 C \cot^2 C = \tan^2 C + \cot^2 C - 1$ .

- (13)  $\sin^3 a + \cos^3 a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$ .  
 (14)  $\sin^6 \beta - \cos^6 \beta = (2 \sin^2 \beta - 1)(1 - \sin^2 \beta + \sin^4 \beta)$ .  
 (15)  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ . (16)  $2 \sec^2 \theta = \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta}$ .  
 (17)  $\frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \tan A \cdot \tan B$ .  
 (18)  $\frac{\cot \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha + \cot \beta} = \cot \alpha \cdot \tan \beta$ .  
 (19)  $\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = (\sec A - \tan A)^2$ .  
 (20)  $\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = (\operatorname{cosec} A + \cot A)^2$ .  
 (21)  $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 4 \cot \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta$ .  
 (22)  $(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A)$ .  
 (23)  $(1 - \sin A + \cos A)^2 (1 + \sin A + \cos A)^2 = 4 \sin^2 A \cdot \cos^2 A$ .  
 (24)  $(1 + \sin A - \cos A)^2 + (1 + \cos A - \sin A)^2 = 4(1 - \sin A \cdot \cos A)$ .  
 (25)  $\cos^8 A - \sin^8 A = (\cos^2 A - \sin^2 A)(1 - 2 \sin^2 A \cdot \cos^2 A)$ .

15. 一ノ角ノ總テノ圓函數ハ其ノ一ヲ用キテ表ハスヲ得。

例題 1. 正弦ヲ用キテ其他ノ函數ヲ表ハセ。

任意ノ角 XOQ ヲ A トセヨ。

OP ガ長ノ單位ニ等シキ様ニ P

ヲ OQ 上ニ取り、之ヨリ OX へ垂

線 PM ヲ引ケ。MP ノ長ヲ s ト

スレハ

$$\sin A = \frac{MP}{OP} = \frac{s}{1}, \quad \therefore s = \sin A.$$

OM ノ長ヲ x トスレハ

$$x^2 = 1 - s^2, \quad \therefore x = \sqrt{1 - s^2}.$$

$$\text{故ニ} \quad \cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{1 - s^2}}{1} = \sqrt{1 - \sin^2 A},$$

$$\tan A = \frac{MP}{OM} = \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}.$$

同様ニ

$$\cot A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}, \quad \sec A = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}.$$

或ハ又第12節等ニ由リテ直ニ此結果ヲ見出スヲ

ヲ得: 即

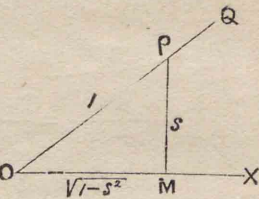
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

$$\therefore \cos^2 A = 1 - \sin^2 A,$$

$$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A};$$

$$\text{又} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}},$$

等。



注意. 方程式  $x^2 = 1 - s^2$  ノ解ハ

$$x = \pm \sqrt{1 - s^2}$$

ナリ; 而シテ任意ノ角ヲ研究スル時ニ於テハ士號ニ注意スルヲ甚緊要ナリ. 然レモ此處ニハ A ハ銳角ニ限レル(第6節)ヲ以テ負數ハ論スルニ及バザルナリ.

例題 2. 正切ヲ用キテ其他ノ函數ヲ表ハセ.

任意ノ角 XOQ ヲ A トセヨ。

OM ガ長ノ單位ニ等シキ様ニ M

ヲ OX 上ニ取り、M ヲリ之ニ垂線

MP ヲ引ケ。MP ノ長ヲ t トスレ

ハ

$$\tan A = \frac{MP}{OM} = \frac{t}{1}, \quad \therefore t = \tan A.$$

而シテ OP ノ長ハ  $\sqrt{1 + t^2}$  ナリ. 故ニ

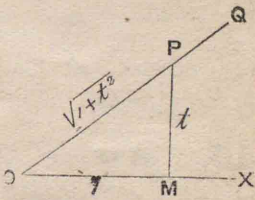
$$\sin A = \frac{MP}{OP} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}},$$

$$\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}},$$

等.

又此結果ハ第12節ノ恒等式  $1 + \tan^2 A = \sec^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$  等ニ由リテ直ニ見出スヲ得.

注意. 平方根ノ前ニ置ク可キ士號ニ付テハ前ノ



例題ニ述ヘタルガ如シ。

問題 IV.

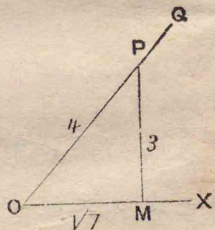
下ノ問題ハ例題ニ於ケル如ク各二様ノ方法ヲ以テ解ス可シ。

- (1)  $\cos A$  ヲ用キテ  $A$  ノ總テノ他ノ函數ヲ表ハセ。
- 大 ~~X~~(2)  $\cot A$                    "                   "
- ~~X~~(3)  $\sec A$                        "                   "
- ~~X~~(4)  $\operatorname{cosec} A$                    "                   "

16. 角ノ一ノ圓函數ヲ用キテ總テ他ノ圓函數ヲ表ハスヲ得ルヲ以テ一ノ圓函數ノ値ヲ知ルキハ總テノ他ノ圓函數ヲ計算スルヲ得ルヲ勿論ナリ。

例題.  $\sin A = \frac{3}{4}$  ナルキハ其他ノ函數ノ値ハ如何?

XOQ ヲ角  $A$  トセヨ. OP ノ長ガ 4 ナル様ニ P ヲ OQ 上ニ取リ P ヨリ OX へ垂線 PM ヲ引ケ.  $\sin A$  即  $\frac{MP}{OP}$  ハ  $\frac{3}{4}$  ニシテ OP ノ長ハ 4 ナルヲ以テ MP ノ長ハ 3 ナリ.



今 OM ノ長ヲ  $x$  トスレハ

$$x^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7.$$

$$\therefore x = \sqrt{7}.$$

故ニ  $\cos A = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{7}}{4},$

$$\tan A = \frac{MP}{OM} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

同様ニ  $\cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}, \sec A = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}, \operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}.$

注意. 平方根ノ前ニ置ク可キ±號ニ付テハ前節ニ述ヘタルガ如シ.

問題 V.

- (1)  $\sin A = \frac{3}{5}$ .  $\tan A$  及  $\operatorname{cosec} A$  ヲ求ム.
- (2)  $\cos A = \frac{1}{3}$ .  $\sin A$  及  $\cot A$  ヲ求ム.
- (3)  $\tan A = \frac{4}{3}$ .  $\sin A$  及  $\sec A$  ヲ求ム.
- 大 ~~X~~(4)  $\cot B = \sqrt{3}$ .  $\sin B$  及  $\cos B$  ヲ求ム.
- (5)  $\sec \theta = 4$ .  $\sin \theta$  及  $\cot \theta$  ヲ求ム.
- 大 ~~X~~(6)  $\sin^4 A + (\cos^2 A + 2\sin^2 A)\cos^2 A$  ノ値ハ恒ニ同一ナルヲ證明セヨ.  
$$= \sin^4 A + 2\sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A = (\sin^2 A + \cos^2 A)^2$$
- 大 ~~X~~(7)  $\sin B$  ヲ用キテ  $(\sec B - \tan B)^2$  ヲ表ハセ.

## 第 參 編.

## 30°, 45°, 60°, 等ノ圓函數.

17. 圓函數ノ値ヲ計算スル一般ノ方法ハ稍高等ノ學理ヲ要スト雖凡或ル特別ノ角ニ於テハ容易ニ之ヲ見出スヲ得, 下ニ其ノ二三ヲ示ス.

## 18. 60° 及 30° ノ圓函數.

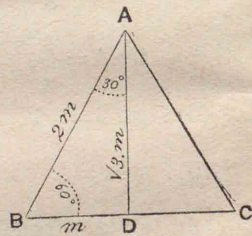
ABCヲ正三角形トセヨ. 然ルニハ垂線ADハ角BAC及之ニ對スル邊BCヲ二等分ス.

故ニ

$$\angle ABC = 60^\circ,$$

$$\angle DAB = 30^\circ.$$

今BDノ長ヲ $m$ トスレハ,



$$BA = 2m, \quad DA = \sqrt{4m^2 - m^2} = \sqrt{3}m.$$

因テ

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3} \cdot m}{m} = \sqrt{3}.$$

$$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{m}{\sqrt{3} \cdot m} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{2m}{m} = 2.$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2m}{\sqrt{3} \cdot m} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

## 19. 45° ノ圓函數.

ABCヲ二等邊直角三角形トセヨ.

然ルニハ二ノ銳角ABC, CABハ何レモ45°ナリ.

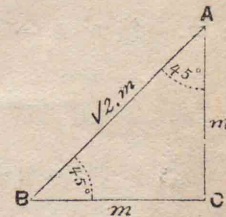
今BC及CAノ長ヲ $m$ トスレハ

$$BA = \sqrt{m^2 + m^2} = \sqrt{2} \cdot m.$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{m}{\sqrt{2} \cdot m} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{m}{m} = 1.$$

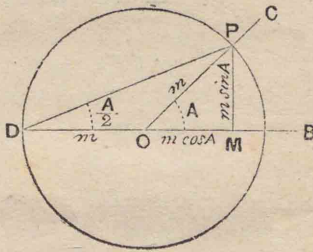
$$\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot m}{m} = \sqrt{2}.$$



20. 一ノ角ノ圓函數ヲ用キテ其ノ半分ナル角ノ圓函數ヲ表ハスヲ.

無用長物

任意ノ角BOCヲAトセヨ. OC上ニ任意ノ一點Pヲ取リOPヲ半徑トシOヲ中心トシテ圓ヲ畫ケ. BOヲ延長シ圓トDニ於テ交ラシメDPヲ結ビ付ケヨ. 然ルキハ角BDPハ $\frac{A}{2}$ ナリ [幾II, 15]. PヨリOBへ垂線PMヲ引ケ. 圓ノ半徑ノ長ヲmトセヨ. 然ルキハ



$$\frac{MP}{OP} = \sin A, \quad \frac{OM}{OP} = \cos A.$$

$$\therefore MP = m \sin A, \quad OM = m \cos A.$$

$$\therefore DM = m + m \cos A,$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{MP}{DM} = \frac{m \sin A}{m + m \cos A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}.$$

即  $\sin A, \cos A$  フ用キテ  $\tan \frac{A}{2}$  フ表ハシタリ; 故ニ又第15節ニ依リ其他ノ圓函數ヲ表ハスヲ得.

例題.  $15^\circ$ ノ圓函數ヲ求ム.

本節ニ依リ

$$\tan 15^\circ = \tan \frac{30^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\operatorname{cosec} 15^\circ = \sqrt{1 + \cot^2 15^\circ} = \sqrt{1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\operatorname{cosec} 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 15^\circ = \cot 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\sec 15^\circ = \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

問題 VI.

X(1)  $75^\circ$ ノ正弦及餘弦ヲ求ム.

(2)  $22^\circ 5'$ ノ正弦及餘弦ヲ求ム.

(3)  $67^\circ 30'$ ノ圓函數ヲ求ム.

(4)  $\tan 11^\circ 15'$ ヲ求ム.

$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$   
 $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$   
 $67^\circ 30' \times 2 = 135^\circ$   
 $11^\circ 15' \times 2 = 22^\circ 30'$   
 $90 + 45$

21. 遠ク離レタル二ノ點ヲ結ビ付クル直線ノ長ヲ直接ニ測ルハ頗ル困難ナ

ル事業ニシテ精密ヲ要スルキハ殊ニ然  
リトス。然ルニ角ヲ精測スルコトハ適當  
ノ器械ヲ以テスレハ左マデ困難ナラズ。

斯ノ如ク直接ニ測リ難キ距離ヲ知ラ  
ンガ爲メニ或ル便利ナル直線及必要ナ  
ル若干ノ角ヲ計リテ前者ヲ推定スル方  
法有リ、之ヲ講スルコト亦三角法ノ一主目  
ナリ。

然レモ其ノ精細ハ後編ニ譲リ、今此處ニ簡易ナ  
ル例ヲ示サントス。先ヅ之ニ關スル二三ノ定義ヲ  
掲グルヲ要ス。

靜水ノ表面ニ平行ナル平面及直線ヲ夫々水平  
面及水平線ト稱ス、之ニ垂直ナル平面及直線ヲ夫々  
直立面及直立線ト稱ス。

二點ノ水平距離トハ其二點ガ水平面ニ投スル  
正射影ノ距離ナリ、即一ノ點ヲ過ル直立線ト他ノ點  
ヲ過ル直立線ノ距離ナリ。

一點ヨリ引キタル二ノ直線ノ水平角トハ其二  
直線ガ水平面ニ投スル正射影ノ夾ム角ナリ、即一ノ

直線ヲ過ル直立面ト他ノ直線ヲ過ル直立面ノ夾ム  
角ナリ。

目的ノ物體ト觀測者ノ眼ヲ過ル直線ガ水平面  
トナス角ハ、目的ノ物體ガ觀測者ノ眼ヲ過ル水平面  
ヨリ上ニ在レハ仰角(或ハ高度)ト云ヒ、下ニ在レハ俯  
角(或ハ深度)ト云フ;之ヲ總稱シテ直立角トイフコ  
トアリ。

水平角及仰角、俯角ハ經緯儀(セオドライト)ト稱  
スル器械ヲ用キテ頗精密ニ之ヲ測ルコトヲ得。

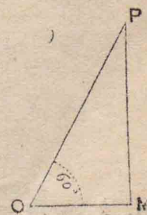
觀測者ノ眼ヨリ引キタル任意ノ二直線ノ夾ム  
角ハ六分儀(セキスタント)ト稱スル器械ヲ用キテ之  
ヲ測ルコトヲ得。

例題 1. 直立セル樹ノ根ヨリ 10 間隔リタル地ニ  
於テ其ノ梢ノ仰角ヲ測リ  $60^\circ$  ヲ得タリ、樹ノ高ヲ求ム。

圖ニ於テ M ハ樹ノ根、P ハ其ノ梢、O ハ  
仰角ヲ測リタル處ナリトセヨ。然ルキハ

$$OM = 10, \quad \angle MOP = 60^\circ,$$

$$\therefore \frac{MP}{OM} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$



故ニ、MPヲ $x$ 間トスレハ、

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 10 \times \sqrt{3} = 10 \times 1.732 \\ &= 17.32, \text{ (略)}. \end{aligned}$$

依テ樹ノ高ハ17.32間ナリ。

附言. 嚴正ニ云ヘハ斯様ニシテ得タル結果ハ點  
Oニ据エタル測器ノ中心ヲ過ル水平面ヨリノ高ナ  
リ。故ニ地面ヨリノ高ヲ得ル爲メニハ測器ノ中心  
ノ高ヲ之ニ加ヘザル可カラズ。

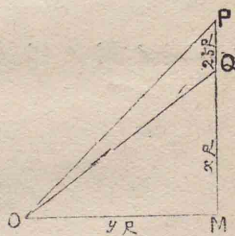
例題 2. 海濱ノ岬上ニ直立シタル25尺ノ旗竿有  
リ。其ノ上端及下端ノ仰角ヲ水際ノ一點ニ於テ測  
リ44°20'及42°10'ヲ得タリ。岬ノ高ヲ求ム。

Oヲ測點トシPQヲ旗竿トセ  
ヨ。Oヲ過ル水平面トPQノ延  
長ノ交點ヲMトセヨ。然ルハ

$$PQ = 25 \text{ 尺},$$

$$\angle MOP = 44^\circ 20',$$

$$\angle MOQ = 42^\circ 10'.$$



OMハ水平線ニシテPQMハ直立線ナルヲ以テM

ニ於テノ角ハ直角ニシテMQハ要スル所ノ高ナリ。  
MQヲ $x$ 尺トシOMヲ $y$ 尺トセヨ。

$$\text{然ルハ} \frac{MP}{OM} = \tan 44^\circ 20', \quad \therefore \frac{x+25}{y} = \tan 44^\circ 20'$$

$$\text{而シテ} \frac{MQ}{OM} = \tan 42^\circ 10', \quad \therefore \frac{x}{y} = \tan 42^\circ 10'.$$

$$\text{故ニ割リ算ニ由リ} \quad \frac{x+25}{x} = \frac{\tan 44^\circ 20'}{\tan 42^\circ 10'}.$$

圓函數ノ表ヨリ

$$\tan 44^\circ 20' = .9770 \quad \text{及} \quad \tan 42^\circ 10' = .9057$$

$$\therefore 1 + \frac{25}{x} = \frac{.9770}{.9057} = 1 + \frac{.0713}{.9057};$$

$$\frac{x}{25} = \frac{.9057}{.0713};$$

$$x = 318, \text{ (略)}.$$

故ニ岬ノ高ハ318尺ナリ。

例題 3. 海上ニ碇泊セル一船C有リ。海岸ノ二  
點A及Bニ於テ角CAB及ABCヲ測リ夫々73°及68°ヲ  
得タリ; 又ABノ距離ヲ測リ120間ヲ得タリ。ACノ  
距離ヲ求ム。

三角形 ABC に於テ

$$\angle CAB = 73^\circ,$$

$$\angle ABC = 68^\circ,$$

$$\begin{aligned} \angle ACB &= 180^\circ - 73^\circ - 68^\circ \\ &= 39^\circ. \end{aligned}$$

而シテ AB = 120 間.

AC を  $x$  間トセヨ. A ヨリ BC へ垂線 AD を引ケ.

$$\text{然ルキハ} \quad \frac{AD}{AB} = \sin ABC,$$

$$\text{又} \quad \frac{AD}{AC} = \sin ACB,$$

$$\text{故ニ割り算ニ由リ} \quad \frac{AC}{AB} = \frac{\sin ABC}{\sin ACB},$$

$$\therefore \frac{x}{120} = \frac{\sin 68^\circ}{\sin 39^\circ}.$$

圓函數ノ表ニ依リ

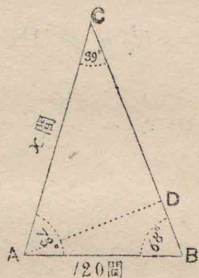
$$\sin 68^\circ = \cdot 9272, \quad \sin 39^\circ = \cdot 6293.$$

$$\therefore x = \frac{120 \times \cdot 9272}{\cdot 6293}$$

$$= 176\cdot 8, \text{ (略).}$$

故ニ AC ハ 176.8 間ナリ.

附言. 三角形ノ二角及一邊ヲ知リテ他ノ邊ヲ求ムルハ甚簡單ニシテ, ツマリーノ比例ヲ解クニ過



キズ. 故ニ本題ノ如ク一ツノ距離ヲ知ランガ爲メニ或ル便利ナル一ツノ距離(之ヲ基線或ハ底邊ト稱ス)及其ノ兩端ニ於ケル角ヲ測リ, 之ニ依リテ要スル所ノ距離ヲ計算スルハ實地測量ニ於テ常ニ用キル所ナリ.

三角形ガ鈍角ヲ有スルモ別ニ困難ナルヲ無シ.

例ヘハ本題ニ於テ  $\angle CAB = 35^\circ 40'$ ,  $\angle ABC = 112^\circ 50'$  ナレハ

$$\frac{AD}{AB} = \sin ABD, \quad \frac{AD}{AC} = \sin ACD;$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{\sin ABD}{\sin ACD}.$$

$$\begin{aligned} \text{然ルニ} \quad \angle ABD &= 180^\circ - 112^\circ 50' \\ &= 67^\circ 10', \end{aligned}$$

$$\angle ACD = 180^\circ - 112^\circ 50' - 35^\circ 40' = 31^\circ 30';$$

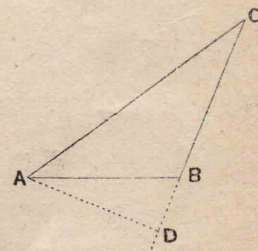
$$\therefore \frac{x}{120} = \frac{\sin 67^\circ 10'}{\sin 31^\circ 30'}.$$

$$\text{表ヨリ} \quad \sin 67^\circ 10' = \cdot 9216, \quad \sin 31^\circ 30' = \cdot 5225;$$

$$\therefore x = \frac{120 \times \cdot 9216}{\cdot 5225} = 211\cdot 7, \text{ (略).}$$

故ニ AC ハ 211.7 間ナリ.

ACB ガ鈍角ナル場合モ之ト同様ニ計算スルヲ得





## 問 題 VII.

- (1) 塔ノ基礎ヲ距ル $\Gamma$  50 間ノ地ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リ  $30^\circ$  ヲ得タリ. 塔ノ高 $\Psi$ ヲ問フ.
- (2) 高 $\Psi$  117 尺ノ塔及高 $\Psi$  37 尺ノ家有リ. 塔ノ頂ヨリ家ノ頂ノ俯角ヲ測リ  $45^\circ$  ヲ得タリ. 塔ト家ノ距離ヲ問フ.
- (3) 塔有リ, 日ノ照ル $\Psi$  地上ニ其ノ投シタル影ハ長 $\Psi$  100 尺ナリ. 之ト同時ニ高 $\Psi$  9 尺ノ燈臺ノ影ハ長 $\Psi$   $3\sqrt{3}$  尺ナリ. 日ノ仰角及塔ノ高 $\Psi$ ヲ求ム.
- (4) 河ノ兩岸ニ二 $\Psi$ ノ點 P, Q 有リテ相對ス. 人有リ, Pヲ發シ PQニ直角ニ進ム $\Gamma$  30 間ニシテ $\Psi$ ノ點 Rニ達シ, 角 PRQヲ測リ  $75^\circ$  ヲ得タリ. 河幅ヲ問フ.
- (5) 長 $\Psi$  400 尺ノ絲ヲ盡ク伸ハシテ紙鳶ヲ揚ゲタリ. 此絲ハ一直線ヲ爲スト假定シ, 其ノ水平面ト爲ス角ガ  $22^\circ 30'$  ナレハ紙鳶ノ高 $\Psi$ ハ何尺ナルカ?
- (6) 山ノ麓ニ高 $\Psi$  100 尺ノ塔有リ. 山頂ニ於テ塔ノ頂上及基礎ノ俯角ヲ測リ  $15^\circ$  及  $30^\circ$  ヲ得タリ. 山ノ高 $\Psi$ ヲ求ム.

(7) 甲乙二地ノ距離ハ 1 英里ニシテ, 甲ハ乙ノ東ニ在リ. 雲際ニ飛揚シタル輕氣球ヲ甲地ニ於テ望メハ方位ハ北ニシテ仰角ハ  $60^\circ$  ナリ. 乙地ニ於テ之ヲ望メハ仰角ハ  $45^\circ$  ナリ. 輕氣球ガ地面ヲ距ル $\Gamma$  何英里ナルカ?

(8) 河岸ニ長 $\Psi$  100 間ノ基線 ABヲ測リ; 次ニ其ノ兩端ニ於テ對岸ノ一樹 Cヲ覘ヒ, 角 CAB =  $60^\circ$ , 角 CBA =  $45^\circ$  ヲ測リタリ. 河幅ヲ求ム.

(以下圓函數ノ表ヲ用キル可シ.)

(9) A, B, Cハ坂路上ノ三點ナリ. Bニ於テ Aノ俯角  $10^\circ$  及 Cノ仰角  $3^\circ$  ヲ測レリ. 而シテ ABハ 50 間, BCハ 30 間ナレハ Aヨリ Cノ高キ $\Gamma$  何尺?

(10) 石柱上ニ銅像有リ. 基礎ヨリ 120 尺ノ地ニ於テ銅像ノ頭及足ノ仰角ヲ測リ  $45^\circ 20'$  及  $43^\circ 10'$  ヲ得タリ. 銅像ノ丈 $\Psi$ ヲ問フ.

(11) 甲乙二山有リ. 乙山ノ頂上ニ於テ甲山ノ頂上ヲ望メハ其ノ仰角  $16^\circ 40'$  ナリ. 今 3 寸 6 分ガ一里ニ當ル地圖上ニ於テ此二山ノ距離ヲ測レハ 1 寸 2 分 5 厘ヲ得. 甲山ハ乙山ヨリ高キ $\Gamma$  何尺?

(12) 船中ヨリ高 $\Psi$  2400 尺ナル山頂ノ仰角ヲ測リ

13° 50' ヲ得タリ。然ルキハ二萬分ノ一ノ地圖上ニ於テ船ノ位置ト山頂ノ距離ハ何寸ナルカ?

(13) 塔有リ、其ノ基礎ト同水平ナル平原ノ一點ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リ72° 10' ヲ得タリ。之ヨリ85尺退キテ再ヒ塔頂ノ仰角ヲ測リ43° 30' ヲ得タリ。塔ノ高ヲ求ム。

(14) 煙突ニ向テ歩行スル人有リ。100尺進行スル間ニ其ノ仰角ハ24° 40' ヲリ46° 10' ニ變化セリ。煙突ノ高ヲ問フ。

(15) Aヲ山頂トセヨ。B及Cヲ山麓ノ二點トセヨ。而シテ

$$BC=80 \text{ 間}, \quad \angle ABC=68^\circ, \quad \angle ACB=79^\circ,$$

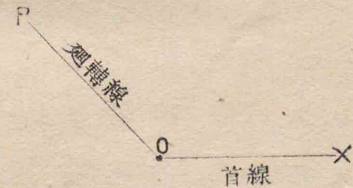
$$C \text{ ニ於テノ } A \text{ ノ仰角}=13^\circ$$

ヲ測リ得タリ。Cヲ過ル水平面上ノ山ノ高ヲ求ム。

## 第 四 編.

## 任 意 ノ 角.

22. 角ハ一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ於テ其ノ一端ヲ中心トシテ爲シタル廻轉ト甚タ親密ナル關係ヲ有スルモノニシテ、ツマリ角ハ此廻轉ノ度ナリト云フモ可ナリ、故ニ角ヲ論スルニハ、一ツノ直線ガ一ツノ定マレル點Oヲ中心トシ、一ツノ定マレル直線OXヨリ發シテ一ツノ平面ニ於テ廻轉シテ或ル位置OPニ至リテ角XOPヲ爲シタルモノトスルヲ便利トス。



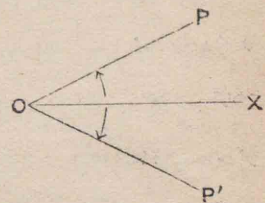
定マレル點Oヲ原點ト稱シ、定マレル直線OXヲ首線ト稱ス。又廻轉スル所ノ直線ト云フ可キヲ略シテ單ニ廻轉線ト云フコアリ。

斯様ニ直線ガ廻轉シテOXヨリOPニ達スレハ此際廻轉線ハ角XOPヲ畫クト云フ。

**23. 負角.** 一ノ平面ニ於テ一ノ直線ガ其ノ一端ヲ心トシテ廻轉スルキ其廻轉ノ向キ即廻リ方ニ二、有リ;之ヲ時計ノ針ノ廻リ方ニ比較スレハ、之ト同シキモノト之ニ反スルモノト二、ナリ。

故ニ便宜ノ爲メ時計ノ針ノ廻リ方ニ反シテ畫ケル角ヲ正トシ、時計ノ針ノ廻リ方ヲ以テ畫ケル角ヲ負トス。而シテ正角ヲ表ハスニハ正數ヲ以テシ、負角ヲ表ハスニハ負數ヲ以テス。

例ヘハ圖ニ於テOP, OP'ハ夫々OXノ兩側ニ在リテOXト $30^\circ$ ヲ爲ス直線トセヨ。今二ノ廻轉線ガ共ニOXヲ發シ夫々矢ヲ以テ示セル如ク廻轉シテOP及OP'ニ



達スレハ前者ハ $30^\circ$ 即 $+30^\circ$ ヲ畫キ、後者ハ $-30^\circ$ ヲ畫ク。

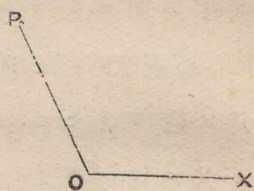
加減ノ記號ナル $+$  $-$ ヲ斯ノ如ク廻リ方ナドノ記號トシテ用キルハ混雜ヲ生スルノ虞有ルガ如シト雖モ實際決シテ斯様ナル憂無ク却テ $+$  $-$ ニ此兩意味有ルガ爲メニ大ニ便利ナルノミナラズ、畢竟此兩意味ハ數學上同一ノ結果ヲ與フルコトハ學者既ニ代數學中之ト同様ノ場合ニ於テ屢、實踐セシ所ナル可シ。

### 24. 角ノ大ニハ限り無シ。

圖ニ於テ廻轉線ハ首線OXヲ發シ $120^\circ$ ダケ廻轉シテOPニ達シタリトセヨ。而シテ尙、廻轉ヲ續ケテ遂ニOXヲモ通り越シ再ヒOPニ達スレハ其畫ケル角ハ $360^\circ + 120^\circ = 480^\circ$ ナリ。斯ノ如ク廻轉ハ何回ニテモ續クルコトヲ得。依テ角ノ大ニハ限り無キヲ明ナリ。

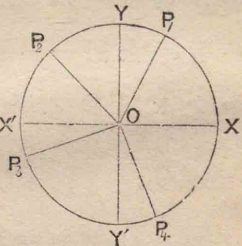
故ニ又廻轉線ノ同シ位置ヲ有スル角ハ無數有リ

テ其ノ差ハ四直角ノ倍量ナルヲ  
ヲ知ル可シ。例ヘハ  $120^\circ, 480^\circ$  (即  
 $360^\circ + 120^\circ$ ),  $840^\circ$  (即  $2 \times 360^\circ + 120^\circ$ )  
又ハ  $-240^\circ$  (即  $-360^\circ + 120^\circ$ ) ノ如キ  
廻轉線ノ位置ハ何レモ同一ナリ。



**25.** 廻轉線ノ長ヲ一定スレハ其ノ端 P ハ O ヲ  
中心トセル一ノ圓周ヲ離ル、ヲ無シ。

廻轉線 OP ガ首線ト合シタルキノ P ノ位置ヲ X ト  
シ、夫ヨリ一直角(正ノ向キニ)ダケ廻轉シタルキノ P  
ノ位置ヲ Y トシ、而シテ X' 及 Y' ハ  
更ニ一直角ヅ、廻轉シタルキノ  
位置トス。然ルキハ此圓ハ X, Y, X', Y' ノ四點ニ於テ四ノ象限ニ  
分タル [幾, II, 定義 4]; 而シテ



XY ヲ第一象限ト稱シ、YX' ヲ第二象限ト稱シ、X'Y'  
ヲ第三象限ト稱シ、Y'X ヲ第四象限ト稱ス。

P ガ第一象限ニ在レハ、角 XOP ハ第一象限ニ在リト云フ、

”	二	”	,	”	二	”	,
”	三	”	,	”	三	”	,
”	四	”	,	”	四	”	,

故ニ圖ニ於テ角 XOP<sub>1</sub>, 角 XOP<sub>2</sub>, 角 XOP<sub>3</sub>, 角 XOP<sub>4</sub> ハ  
夫々第一, 第二, 第三, 第四象限ニ在ル角ナリ。

**26.** A ヲ  $0^\circ$  ト  $90^\circ$  ノ間ノ任意ノ角トシテ n ヲ正或  
ハ負ノ完全數又ハ零トスレハ一般ニ

- (i)  $2n \times 180^\circ + A$  ハ第一象限ニ在ル角ヲ表ハス,
- (ii)  $(2n+1) \times 180^\circ - A$  ハ第二象限 ” ”
- (iii)  $(2n+1) \times 180^\circ + A$  ハ第三象限 ” ”
- (iv)  $2n \times 180^\circ - A$  ハ第四象限 ” ”

[何トナレハ廻轉線 OP ガ  $2n \times 180^\circ$  即  $n \times 360^\circ$  ダケ  
廻轉スレハ丁度 OX ノ位置ニ復シ、 $(2n+1) \times 180^\circ$  即  
 $n \times 360^\circ + 180^\circ$  ダケ廻轉スレハ丁度 OX' ノ位置ニ達ス、  
而シテ此二式ハ斯ノ如キ角ヲ盡ク含有スレハナリ.]

問題 VIII.

下ニ記セル角ハ何レノ象限ニ在リヤ?

- × (1)  $120^\circ$ .    × (2)  $290^\circ$ .    × (3)  $500^\circ$ .    × (4)  $-100^\circ$ .
- × (5)  $-410^\circ$ .    × (6)  $-1000^\circ$ .    (7)  $(2n+1) \times 180^\circ - 40^\circ$ .

**27.** 任意ノ角ヲ論スルニ當リテハ第  
6 節ニ述ヘタル圓函數ノ定義ニ下ノ件

々ヲ追加スルヲ要ス。

(甲) 直角三角形OMPヲ作ル爲メ角ノ一邊上ニ取ル可キ點Pハ與ヘラレタル角ヲ畫キタル廻轉線上ニ取ルコトス。

(乙) 斜邊OP, 底邊OM, 垂線MPハ下ノ如ク定ムル所ノ符號ヲ有スルモノトス:

- (a) OPハ常ニ正ナリ;
- (b) OMハ其ノ向キガ首線OXノ向キニ同シケレハ正ニシテ, 之ニ反スレハ負ナリ;
- (c) MPハ其ノ向キガ首線ト九十度ノ角(正ノ向キニ)ヲ爲ス直線OYノ向キニ同シケレハ正ニシテ, 之ニ反スレハ負ナリ;

此處ニOM, OX, MP, 等ノ向キトハ各其ノ

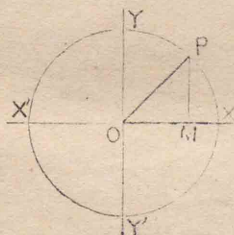
初メノ文字ガ表ハス點ヨリ後ノ文字ガ表ハス點ヘノ向キノコトナリ。

首線ハ通常原點ヨリ横ニ右ノ方ヘ引クヲ以テ(b)(c)ノ代リニ下ノ如ク述フルコトヲ得:

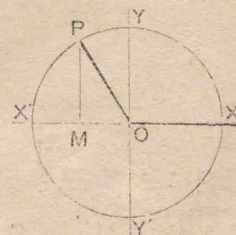
- (b)' OMハMガOヨリ右ニ在レハ正ニシテ, 左ニ在レハ負ナリ;
- (c)' MPハPガMヨリ上ニ在レハ正ニシテ, 下ニ在レハ負ナリ。

**28.** 圓函數ノ符號ハ角ノ在ル象限ニ由リテ定マル。

第一圖



第二圖



1. 角Aガ第一象限ニ在レハ(第一圖), PハMヨリ

上ニ在リ、故ニ MP ハ正ナリ; M ハ O ヨリ右ニ在リ、故ニ CI ハ正ナリ; OP ハ常ニ正ナリ。故ニ

$$\frac{MP}{OP} \text{ 即 } \sin A \text{ ハ正ナリ; } \frac{OM}{OP} \text{ 即 } \cos A \text{ ハ正ナリ;}$$

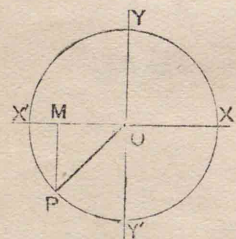
$$\frac{MP}{OM} \text{ 即 } \tan A \text{ ハ正ナリ。}$$

II. 角 A ガ第二象限ニ在レハ (第二圖), P ハ M ヨリ上ニ在リ、故ニ MP ハ正ナリ; M ハ O ヨリ左ニ在リ、故ニ OM ハ負ナリ; OP ハ常ニ正ナリ。故ニ

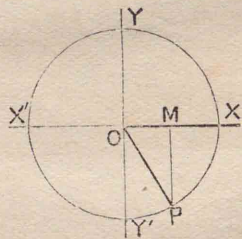
$$\frac{MP}{OP} \text{ 即 } \sin A \text{ ハ正ナリ; } \frac{OM}{OP} \text{ 即 } \cos A \text{ ハ負ナリ;}$$

$$\frac{MP}{OM} \text{ 即 } \tan A \text{ ハ負ナリ。}$$

第三圖



第四圖



III. 角 A ガ第三象限ニ在レハ (第三圖), P ハ M ヨリ下ニ在リ、故ニ MP ハ負ナリ; M ハ O ヨリ左ニ在リ、故ニ OM ハ負ナリ; OP ハ常ニ正ナリ。故ニ

$$\frac{MP}{OP} \text{ 即 } \sin A \text{ ハ負ナリ; } \frac{OM}{OP} \text{ 即 } \cos A \text{ ハ負ナリ;}$$

$$\frac{MP}{OM} \text{ 即 } \tan A \text{ ハ正ナリ。}$$

IV. 角 A ガ第四象限ニ在レハ (第四圖), P ハ M ヨリ下ニ在リ、故ニ MP ハ負ナリ; M ハ O ヨリ右ニ在リ、故ニ OM ハ正ナリ; OP ハ常ニ正ナリ。故ニ

$$\frac{MP}{OP} \text{ 即 } \sin A \text{ ハ負ナリ; } \frac{OM}{OP} \text{ 即 } \cos A \text{ ハ正ナリ;}$$

$$\frac{MP}{OM} \text{ 即 } \tan A \text{ ハ負ナリ。}$$

cotA, secA, cosecA ハ夫々 tanA, cosA, sinA ノ反數ナルヲ以テ前者ノ符號ハ夫々後者ノ符號ニ同シキヲ勿論ナリ。

以上得タル結果ヲ表ニ作レハ下ノ如シ:

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
sin 及 cosec	+	+	-	-
cos 及 sec	+	-	-	+
tan 及 cot	+	-	+	-

29. 任意ノ角ニ四直角ヲ幾回加フル  
 又ハ之ヨリ四直角ヲ幾回減スルニ廻  
 轉線ノ位置ハ變セザルヲ以テ圓函數モ  
 變スルヲ無シ。即チ任意ノ角トシテ  
 正或ハ負ノ完全數トスレバ、

$$\left. \begin{aligned} \sin(2n \times 180^\circ + A) &= \sin A, \\ \cos(2n \times 180^\circ + A) &= \cos A, \\ \tan(2n \times 180^\circ + A) &= \tan A, \\ \cot(2n \times 180^\circ + A) &= \cot A, \\ \sec(2n \times 180^\circ + A) &= \sec A, \\ \operatorname{cosec}(2n \times 180^\circ + A) &= \operatorname{cosec} A. \end{aligned} \right\} (i)$$

30. 任意ノ角ノ圓函數ノ大、即絕對ノ  
 (正負ニ係ラザル) 値ハ  $0^\circ$  乃至  $90^\circ$  ノ角ノ  
 圓函數ヲ以テ表ハスヲ得ルナリ。

此事ニ付テハ後ニ至リテ論述スル所有ル可シト  
 雖モ先ツ茲ニ一二ノ簡單ナル例題ニ就テ之ヲ示ス。

例題 1.  $120^\circ$  ノ圓函數ヲ求ム。

$120^\circ$  ハ第二象限ノ角ナリ。第 43 丁ノ第二圖ニ於テ  
 $XOP$  ヲ  $120^\circ$  ノ角トセヨ。然ルキハ角  $POX' = 180^\circ - 120^\circ$   
 $= 60^\circ$ 。

故ニ大、ニ於テハ  $\sin 120^\circ$  ト  $\sin 60^\circ$  トハ相等シ; 而シテ  
 第二象限ニ於テ正弦ハ正ナリ。故ニ

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又大、ニ於テハ  $\cos 120^\circ$  ト  $\cos 60^\circ$  トハ相等シ; 而シテ  
 第二象限ニ於テ餘弦ハ負ナリ。故ニ

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

同様ニ  $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ .

因テ  $\cot 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\sec 120^\circ = -2$ ,  $\operatorname{cosec} 120^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

例題 2.  $225^\circ$  ノ圓函數ヲ求ム。

$225^\circ$  ハ第三象限ノ角ナリ。第 44 丁ノ第三圖ニ於  
 テ角  $XOP$  ヲ  $225^\circ$  トセヨ。然ルキハ角  $X'OP = 225^\circ - 180^\circ$   
 $= 45^\circ$ 。

故ニ大、ニ於テハ  $225^\circ$  ノ圓函數ハ  $45^\circ$  ノ圓函數ニ  
 等シ; 而シテ第三象限ニ於テ正弦及餘弦ハ負ニシテ

正切ハ正ナリ。故ニ

$$\sin 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 225^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 225^\circ = 1.$$

因テ  $\cot 225^\circ = 1, \quad \sec 225^\circ = -\sqrt{2}, \quad \operatorname{cosec} 225^\circ = -\sqrt{2}.$

### 問 題 IX.

下ノ諸角ノ正弦、餘弦及正切ヲ求ム。

$$\times(1) 150^\circ. \quad \times(2) 240^\circ. \quad \times(3) -45^\circ. \quad (4) 330^\circ.$$

$$(5) -225^\circ. \quad (6) -300^\circ. \quad (7) -135^\circ. \quad (8) 390^\circ.$$

$$\times(9) 750^\circ. \quad (10) 105^\circ. \quad (11) 195^\circ.$$

$$\times(12) (2n-1) \times 180^\circ + 30^\circ.$$

△ 31. 第10, 11, 12節ニ於テ銳角ニ付テ得タル八ノ公式

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}; \quad (ii)$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}; \quad (iii)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1, \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A, \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} \quad (iv)$$

ハ A ガ如何ナル角ニテモ常ニ眞ナリ。

初メノ五、即(ii)(iii)ハ圓函數ノ定義ヨリ直ニ來ルモノニシテ其ノ眞ナルヲ明瞭ナリ。后ノ三、即(iv)ハ OM, MP, OP ガ直角三角形ノ邊ナルニ基ク、而シテ數ノ二乗器ハ其數ガ正ナルモ負ナルモ同シ結果ヲ與フ；故ニ此三モ亦常ニ眞ナリ。

### 32. $0^\circ, 90^\circ$ 等ノ圓函數.

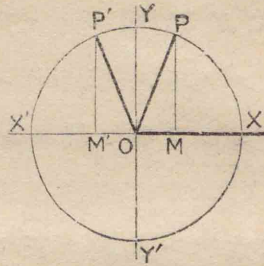
$0^\circ, 90^\circ$  等ノ角ニ於テハ第6節ノ圓函數ノ定義ニ述ヘタル様ニ直角三角形 OMP ナ作ルヲ能ハザルナリ。故ニ此定義ハ此等ノ角ニハ嚴正ニ適用ス可カラズ、然レ此角ガ漸々斯ノ如キ角ニ近ツクトスルキハ其ノ圓函數モ漸々或ル極限[幾、附録IV]ニ近ツクモノナリ。之ヲ其角ノ圓函數トス。

下ニ例トシテ  $90^\circ$  ノ圓函數ヲ論ス。

定義ニ依リ  $\sin XOP = \frac{MP}{OP}$ . 今角 XOP ガ漸々角 XOY



即  $90^\circ$  の角ニ近ツクキハ MP  
ハ漸々増シテ OY 即 OP = 近  
ツキ, XOP ヲ充分ニ XOY = X  
近ツカシムレハ其ノ差ハ何程  
ニテモ小クスルヲ得. 故ニ



$\sin XOP$  ハ漸々増シテ  $\frac{OP}{OP}$  即 1 ニ近ツキ, 角ヲ充分ニ  
 $90^\circ$  ニ近ツカシムルキハ 1 トノ差ヲ何程ニテモ小ク  
スルヲ得; 即角ガ  $90^\circ$  ナルキ正弦ノ極限ハ 1 ナリ.

故ニ  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$   $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \pm 1$   
 $\sin 90^\circ = 1$   $\sin 90^\circ = 1$

又  $\cos XOP = \frac{OM}{OP}$  ニシテ角 XOP ヲ充分ニ  $90^\circ$  ニ近ツカ  
シムレハ OM ハ何程ニテモ小クスルヲ得ルヲ以テ餘  
弦ハ何程ニテモ小クスルヲ得, 即其ノ極限ハ 0 ナリ.  
故ニ

$\cos 90^\circ = 0.$

又  $\tan XOP = \frac{MP}{OM}$  ニシテ角 XOP ガ  $90^\circ$  ニ近ツクニ從  
テ MP ハ漸々極限 OP ニ近ツキ OM ハ極限 0 ニ近ツク.  
故ニ正切ハ漸々大クナリ角ヲ充分ニ  $90^\circ$  ニ近ツカシ  
ムレハ何程ニテモ大クスルヲ得, 即如何ニ大ナル

數ヲ取ルモ尙之ヨリ大クスルヲ得. 之ヲ  $\tan 90^\circ$  ハ  
無究大ナリト云ヒ,  $\tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$  無究大  $= \infty$   
 $\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$   
 $\tan 90^\circ = \infty$

ト記ス.

而シテ第一象限ニ在ル角 XOP ガ漸々増シテ XOY  
ニ近ツクトスルカ或ハ第二象限ニ在ル角 XOP' ガ漸  
々減シテ XOY ニ近ツクトスルカニ依リテ圓函數  
ノ極限ニ差ナキヤ否ヲ檢スルノ必要アリ. 正弦ニ  
付テハ其ノ何レヨリスルモ少シモ差ナキヲ明ナリ.  
餘弦ニ付テハ第一象限ニ在ル角ノ餘弦ハ正ニシテ  
第二象限ニ在ル角ノ餘弦ハ負ナリ, 故ニ角 XOP ガ増  
シテ XOY ニ近ツクトスルキハ餘弦ハ常ニ正ニシ  
テ, XOP' ガ減シテ XOY ニ近ツクトスルキハ餘弦ハ常  
ニ負ナリ; 然レモ正ニモセヨ, 負ニモセヨ, 其ノ減小シ  
テ達スル所ノ極限ハ 0 ニシテ, 既ニ 0 トナル以上ハ正  
ニモアラズ負ニモアラズ, 即 0 ナリ. 正切ニ付テモ亦  
同ク, 角 XOP ガ増シテ XOY ニ近ツクトスルキハ正ニ  
シテ, 角 XOP' ガ減シテ XOY ニ近ツクトスルキハ負ナ  
リ; 然レモ何レヨリスルモ究リ無ク増大シテ無究大

トナル以上ハ正ニモアラズ又負ニモアラザルナリ。

$$\text{同様} = \cot XOP = \frac{OM}{MP}, \quad \therefore \cot 90^\circ = 0;$$

$$\sec XOP = \frac{OP}{OM}, \quad \therefore \sec 90^\circ = \infty;$$

$$\operatorname{cosec} XOP = \frac{OP}{MP}, \quad \therefore \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

同様  $= 0^\circ, 180^\circ$ , 等, 其他直角三角形  $OMP$  ガ一直線トナル角ノ圓函數ヲ得. 下ニ其ノ表ヲ掲ク:

	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$
sin	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	$\infty$	0	$\infty$
cot	$\infty$	0	$\infty$	0
sec	1	$\infty$	-1	$\infty$
cosec	$\infty$	1	$\infty$	-1

表中  $0^\circ$  ノ圓函數ハ一般ニ  $n \times 360^\circ$  ノ圓函數ナリ,

„  $90^\circ$  „  $(n \times 360^\circ + 90^\circ)$  „ „

„  $180^\circ$  „  $(n \times 360^\circ + 180^\circ)$  „ „

„  $270^\circ$  „  $(n \times 360^\circ + 270^\circ)$  „ „

### 33. 圓函數ノ値ノ變化.

先ツ例トシテ角  $A$  ガ  $0^\circ$  ヨリ  $360^\circ$  マデ増ス時ノ  $\sin A$  ノ値ノ變化ヲ論スベシ.

$$\sin A = \frac{MP}{OP} \text{ナリ.}$$

角ガ  $0^\circ$  ナルキハ正弦ハ前節ニ依リテ 0 ナリ; 角ガ  $0^\circ$  ヨリ漸々増シテ  $90^\circ$  ニ近ツクキハ  $MP$  ハ限り無く小ナルヨリ漸々増シテ  $OP$  ニ近ツク, 而シテ正ナリ; 故ニ正弦ハ 0 ヨリ漸々増シテ 1 ニ近ツキ, 角ガ  $90^\circ$  ニ至ルキハ 1 ナリ.

角ガ  $90^\circ$  ヨリ漸々増シテ  $180^\circ$  ニ近ツクキハ,  $MP$  ハ漸々減シテ限り無く小ナル, 而シテ正ナリ; 故ニ正弦ハ 1 ヨリ漸々減シテ, 角ガ  $180^\circ$  ニ至ルキハ 0 ナリ.

角ガ  $180^\circ$  ヨリ漸々増シテ  $270^\circ$  ニ近ツクキハ,  $MP$  ハ漸々増シテ  $OP$  ニ近ツク, 而シテ負ナリ; 故ニ正弦ハ 0 ヨリ漸々減シテ, 角ガ  $270^\circ$  ニ至ルキハ -1 ナリ.

角ガ  $270^\circ$  ヨリ漸々増シテ  $360^\circ$  ニ近ツクキハ,  $MP$  ハ漸々減シテ限り無く小ナル, 而シテ負ナリ; 故ニ正弦ハ -1 ヨリ漸々増シテ角ガ  $360^\circ$  ニ至ルキハ 0 ナリ.

角ガ尙増シテ360°ヲ越スルハ正弦ノ値ノ變化ハ前述ノ變化ヲ繰リ返スノミナルヲ明ナリ。

餘弦、正切、等ノ値ノ變化ハ次ノ表ニ掲ケタリ。其ノ然ル所以ハ學者自ラ研究ス可シ。

	第一象限 ニ於テ	第二象限 ニ於テ	第三象限 ニ於テ	第四象限 ニ於テ	
sinA 漸々	0 ヲ 1	1 ヲ 0	0 ヲ -1	-1 ヲ 0	ニ至ル
cosA ,,	1 ,, 0	0 ,, -1	-1 ,, 0	0 ,, 1	,,
tanA ,,	0 ,, +∞ <sup>*</sup>	-∞ ,, 0	0 ,, +∞	-∞ ,, 0	,,
cotA ,,	+∞ ,, 0	0 ,, -∞	+∞ ,, 0	0 ,, -∞	,,
secA ,,	1 ,, +∞	-∞ ,, -1	-1 ,, -∞	+∞ ,, 1	,,
cosecA ,,	+∞ ,, 1	1 ,, +∞	-∞ ,, -1	-1 ,, -∞	,,

\* +∞ ト記スルハ角Aガ漸々増シテ90°ニ近ツクニ從テ、tanAハ正ニシテ究リ無ク大クナルノ畧ナリ。角Aガ90°ヲ越エテ漸々増スルハtanAハ負ナリ、而シテ角Aガ限リ無ク90°ニ近ケレハtanAハ究リ無ク大ナリ；是レ次ノ行ニ記シタル -∞ ノ意味ナリ、以下之ニ倣ヘ。

故ニ sinA 及 cosA ノ値ハ -1 乃至 +1 ナリ；即Aガ如何ナル角ニテモ決シテ -1 ヲリ小ナルヲ無シ又 +1 ヲリ大ナルヲ無シ。（此處ニ大小トハ勿論代數學的ニ云フナリ。）

tanA 及 cotA ノ値ニハ限リ無シ。

secA 及 cosecA ノ値ハ -1 ナルカ、+1 ナルカ、-1 ヲリ小（代數學的ニ）ナルカ或ハ +1 ヲリ大ナリ；即Aガ如何ナル角ニテモ secA 及 cosecA ノ値ハ決シテ -1 ト +1 トノ間ニ來ルヲ無シ。

問 題 X.

角Aガ0°ヨリ360°マデ増ス際、下ニ記セル式ノ値ノ變化ヲ追跡セヨ。

小 (1)  $1 - \cos A$ . (2)  $1 - \sin A$ .

大 (3)  $\sin^2 A$ . (4)  $\cos^2 A$ .

小 cosecA 7 追跡セヨ

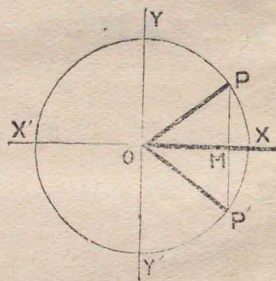
## 第 五 編

## 餘角, 補角, 等ノ圓函數ノ關係

34. 任意ノ角  $A$  ノ圓函數ト角  $(-A)$  ノ圓函數トノ關係ハ下ノ如シ:

$$\left. \begin{aligned} \sin(-A) &= -\sin A, & \cos(-A) &= \cos A, \\ \tan(-A) &= -\tan A, & \cot(-A) &= -\cot A, \\ \sec(-A) &= \sec A, & \operatorname{cosec}(-A) &= -\operatorname{cosec} A. \end{aligned} \right\} (v)$$

同シ長<sup>+</sup>ノ二<sup>ノ</sup>廻轉線  $OP$  及  $OP'$  ガ共ニ首線  $OX$  ヨリ發シ夫々角  $A$  及  $-A$  ヲ畫クトセヨ.\* 然ル<sup>キ</sup>ハ  $P$  及  $P'$  ハ  $X'OX$  ノ反對ノ側ニ在リテ角  $XOP$  ト角  $XOP'$  トハ大<sup>+</sup>相等シ. 因テ  $P$  及  $P'$  ヨリ



\*此處ニ載セタル圖ハ角  $A$  ガ第一象限ニ在ル場合ノモノナリ. 其ノ他ノ場合ノ圖ハ學者自ラ畫クベシ.

$X'OX$  へ引ケル垂線ノ足ハ同一ノ點  $M$  ニ落チ, 垂線  $MP$  及  $MP'$  ハ大<sup>+</sup>相等シクシテ, 其ノ符號ハ相反ス. 故ニ常ニ

$$\frac{MP'}{OP'} = -\frac{MP}{OP},$$

即  $\sin(-A) = -\sin A.$

又底邊  $OM$  ハ双方ニ通ス. 故ニ常ニ

$$\cos(-A) = \cos A.$$

同様ニ  $\tan(-A) = -\tan A$ , 等ヲ證明スルコトヲ得, 或ハ又公式(ii)(iii)ニ由リテ之ヲ爲スコトヲ得.

35. 餘角及補角ノ定義[幾, I, 定義 15, 16] 即「二<sup>ノ</sup>角ノ和ガ一直角ニ等シキ<sup>キ</sup>ハ各ノ角ヲ他ノ餘角ト云フ」, 「二<sup>ノ</sup>角ノ和ガ二直角ニ等シキ<sup>キ</sup>ハ各ノ角ヲ他ノ補角ト云フ」ハ總テノ角ニ適用スルモノトス.

故ニ角  $A$  ノ餘角ハ一般ニ  $90^\circ - A$  ナリ.

又角  $A$  ノ補角ハ一般ニ  $180^\circ - A$  ナリ.

故ニ  $90^\circ$  ヨリ大ナル角ノ餘角及  $180^\circ$  ヨリ大ナル角ノ補角ハ必ず負ナリ.

問題 XI.

下ニ記セル角ノ餘角及補角ヲ問フ

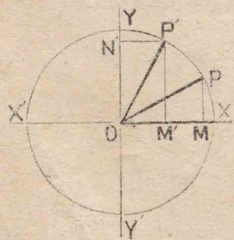
- (1)  $80^\circ$ . (2)  $150^\circ$ . (3)  $-120^\circ$ . (4)  $270^\circ$ .  
 (5)  $90^\circ$ . (6)  $-25^\circ$ . (7)  $38^\circ 26' 47''$ .

36. 第9節ノ公式即互ニ餘角ナル二ノ角ノ圓函數ノ關係.

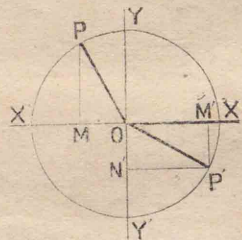
$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \cos(90^\circ - A), & \cos A &= \sin(90^\circ - A), \\ \tan A &= \cot(90^\circ - A), & \cot A &= \tan(90^\circ - A), \\ \sec A &= \operatorname{cosec}(90^\circ - A), & \operatorname{cosec} A &= \sec(90^\circ - A) \end{aligned} \right\} \text{(vi)}$$

ハ總テノ角ニ付テ眞ナリ.

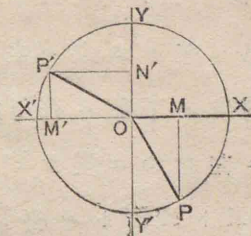
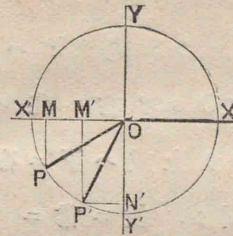
同シ長クノ二ツノ廻轉線 OP 及 OP' ガ共ニ首線 OX ヨリ發シ夫々角 A 及其ノ餘角  $(90^\circ - A)$  ヲ書クトセヨ.



OP が第一象限ニ在ル場合.



OP が第二象限ニ在ル場合.



OP が第三象限ニ在ル場合. OP が第四象限ニ在ル場合.

PM 及 P'M' ヲ X'OX へノ垂線トシ, P'N' ヲ Y'OY へノ垂線トス.

第二ノ廻轉線 OP' ガ直ニ  $(90^\circ - A)$  ヲ書クトスル代リニ先ツ  $90^\circ$  ヲ書キテ OY ニ達シ更ニ OY ヨリ角  $(-A)$  ヲ書ク[即前者ニ反對ノ向キヲ以テ A 即 XOP ニ等シキ角 YOP' ヲ書ク]ト認ムルモ其ノ結果ハ異ナル所無シ.

故ニ N'P' 即 OM' ト MP トハ大々相等シ;而シテ P ガ X'OX ノ上側ニ在ルカ或ハ下側ニ在ルカニ從テ, P' ハ Y'OY ノ右側或ハ左側ニ在リ;即 P ガ M ヨリ上ニ在ルカ或ハ下ニ在ルカニ從テ M' ハ O ヨリ右或ハ左ニ在リ. 故ニ MP ト OM' トハ符號常ニ同シ. 故ニ常ニ

$$\frac{MP}{OP} = \frac{OM'}{OP'}$$

即

$$\sin A = \cos(90^\circ - A).$$

又  $ON'$  即  $M'P'$  ト  $OM$  トハ大<sub>キ</sub> 相等シ; 而シテ  $P$  ガ  $Y'OY$  ノ右側ニ在ルカ或ハ左側ニ在ルカニ從テ  $P'$  ハ  $X'OX$  ノ上側或ハ下側ニ在リ; 即  $M$  ガ  $O$  ヨリ右ニ在ルカ或ハ左ニ在ルカニ從テ  $P'$  ハ  $M'$  ヨリ上或ハ下ニ在リ. 故ニ  $OM$  ト  $M'P'$  トハ符號常ニ同シ. 故ニ常ニ

$$\frac{OM}{OP} = \frac{M'P'}{OP'}$$

即  $\cos A = \sin(90^\circ - A)$ .

同様ニ  $\tan A = \cot(90^\circ - A)$ , 等ヲ證明スルコトヲ得, 或ハ又公式 (ii) (iii) ニ由リテ之ヲ爲スコトヲ得.

## 問 題 XII.

下ノ六題ハ夫々圖ヲ書キテ證明ス可シ.

- (1)  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ . (2)  $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ .  
 (3)  $\sin 195^\circ = \cos(-105^\circ)$ . (4)  $\cos 275^\circ = \sin(-185^\circ)$ .  
 (5)  $\tan(-27^\circ) = \cot 117^\circ$ . (6)  $\cos 310^\circ = \sin 140^\circ$ .

$A, B, C$  ハ一ツノ三角形ノ角ナリ; 下ノ事項ヲ證明セヨ.

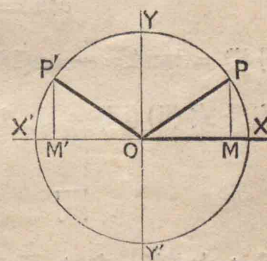
- (7)  $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$ . (8)  $\sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A+C}{2}$ .  
 (9)  $\cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A+B}{2}$ . (10)  $\sec \frac{A}{2} = \operatorname{cosec} \frac{B+C}{2}$ .

37. 互ニ補角ナル二ツノ角ノ圓函數ノ關係ハ下ノ如シ:

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \sin(180^\circ - A), \\ \cos A &= -\cos(180^\circ - A), \\ \tan A &= -\tan(180^\circ - A), \\ \cot A &= -\cot(180^\circ - A), \\ \sec A &= -\sec(180^\circ - A), \\ \operatorname{cosec} A &= \operatorname{cosec}(180^\circ - A). \end{aligned} \right\} \text{(vii)}$$

同シ長<sub>キ</sub>ノ二ツノ廻轉線  $OP$  及  $OP'$  ガ共ニ首線  $OX$  ヨリ發シ夫々角  $A$  及其ノ補角  $(180^\circ - A)$  ヲ書クトセヨ.\*

第二ノ廻轉線  $OP'$  ガ直ニ  $(180^\circ - A)$  ヲ書クトスル代リニ先ツ  $180^\circ$  ヲ書キテ  $OX'$  ニ達シ更ニ  $OX'$  ヨリ角  $(-A)$  ヲ書ク [即前者ニ反對ノ向キヲ以テ  $A$  即  $XOP$  ニ等シキ角  $X'OP'$  ヲ書ク] ト認ムルモ



\*此處ニ載セタル圖ハ角  $A$  ガ第一象限ニ在ル場合ノモノナリ. 其他ノ場合ノ圖ハ學者自ラ書ク可シ.

其ノ結果ハ異ナル所無シ。

故ニ MP ト M'P' トハ大々相等シ;而シテ P ト P' トハ常ニ X'OX ノ同シ側ニ在ル以テ MP ト M'P' トハ符號常ニ同シ。故ニ常ニ

$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'}$$

即  $\sin A = \sin(180^\circ - A)$ 。

又 OM ト OM' トハ大々相等シ;而シテ P ト P' トハ常ニ Y'OY ノ反對ノ側ニ在ルヲ以テ OM ト OM' トハ符號常ニ相反ス。故ニ常ニ

$$\frac{OM}{OP} = -\frac{OM'}{OP'}$$

即  $\cos A = -\cos(180^\circ - A)$ 。

同様ニ  $\tan A = -\tan(180^\circ - A)$ , 等ヲ證明スルヲ得, 或ハ又公式(ii)(iii)ニ由リテ之ヲ爲スヲ得。

### 問 題 XIII.

下ノ六題ハ夫々圖ヲ書キテ證明ス可シ。

- (1)  $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$ .    (2)  $\cos 290^\circ = -\cos(-110^\circ)$ .  
 (3)  $\tan(-40^\circ) = -\tan 220^\circ$ .    (4)  $\sec 320^\circ = -\sec(-140^\circ)$ .  
 (5)  $\sin(-340^\circ) = \sin 160^\circ$ .    (6)  $\cot 190^\circ = -\cot 350^\circ$ .

A, B, C ハ一々ノ三角形ノ角ナリ;下ノ事項ヲ證明セヨ。

- (7)  $\sin A = \sin(B+C)$ .    (8)  $\cos C = -\cos(A+B)$ .  
 (9)  $\tan B = -\tan(C+A)$ .    (10)  $\operatorname{cosec} A = \operatorname{cosec}(B+C)$ .

38. 下ノ關係ハ前ノ者ト同様ノ方法ヲ以テ證明スルヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+90^\circ) &= \cos A, \\ \cos(A+90^\circ) &= -\sin A, \\ \tan(A+90^\circ) &= -\cot A. \end{aligned} \right\} \text{(viii)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(A-90^\circ) &= -\cos A, \\ \cos(A-90^\circ) &= \sin A, \\ \tan(A-90^\circ) &= -\cot A. \end{aligned} \right\} \text{(ix)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(A\pm 180^\circ) &= -\sin A, \\ \cos(A\pm 180^\circ) &= -\cos A, \\ \tan(A\pm 180^\circ) &= \tan A. \end{aligned} \right\} \text{(x)}$$

其他之ニ類スル關係多シ。

例題 1. 公式 (vii) ヲ (v) (vi) ニ由リテ推定セヨ.

$$\sin A = \cos(90^\circ - A) \quad [(vi) \text{ニ由リ}]$$

$$= \cos(-90^\circ + A) \quad [(v) \text{ニ由リ}]$$

$$= \sin[90^\circ - (-90^\circ + A)] \quad [(vi) \text{ニ由リ}]$$

$$= \sin(180^\circ - A).$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A) \quad [(vi) \text{ニ由リ}]$$

$$= -\sin(-90^\circ + A) \quad [(v) \text{ニ由リ}]$$

$$= -\cos[90^\circ - (-90^\circ + A)] \quad [(vi) \text{ニ由リ}]$$

$$= -\cos(180^\circ - A).$$

其他皆之ニ倣ヘ.

例題 2. 公式 (ix) ヲ (viii) ニ由リテ推定セヨ.

公式 (viii) ノ第一式  $\sin(A+90^\circ) = \cos A$  ニ於テ A ノ代  
リニ  $A-90^\circ$  ヲ入ルレハ (ix) ノ第二式ヲ得ル下ノ如  
シ:

$$\sin[(A-90^\circ)+90^\circ] = \cos(A-90^\circ),$$

即

$$\sin A = \cos(A-90^\circ).$$

其他皆之ニ倣ヘ.

39. 如何ナル角ニテモ其ノ圓函數ハ  
一直角ヲ越エザル正角ノ同シ函數ヲ用

キテ表ハスヲ得.

第 26 節ニ於テ第一, 第二, 第三, 第四象限ニ在ル角ヲ  
表ハス一般ノ公式ハ夫々下ノ如クナルヲ述ヘタリ:

$$(i) \quad 2n \times 180^\circ + A, \quad (ii) \quad (2n+1) \times 180^\circ - A,$$

$$(iii) \quad (2n+1) \times 180^\circ + A, \quad (iv) \quad 2n \times 180^\circ - A;$$

此處ニ A ハ一直角ヲ越エザル正角ニシテ n ハ正或ハ  
負ノ完全數又ハ零ナリ.

故ニ與ヘラレタル角 B ガ如何ナル角ニテモ必ズ  
此四式ノ何レカニ適ス.

若シ B ガ第一式ニ適スレハ

$$\sin B = \sin(2n \times 180^\circ + A)$$

$$= \sin A. \quad [(i) \text{ニ由リ}]$$

同様ニ  $\cos B = \cos A.$

若シ B ガ第二式ニ適スレハ

$$\sin B = \sin(2n+1 \times 180^\circ - A)$$

$$= \sin(180^\circ - A) \quad [(i) \text{ニ由リ}]$$

$$= \sin A. \quad [(vii) \text{ニ由リ}]$$

同様ニ  $\cos B = -\cos A.$

若シ B ガ第三式ニ適スレハ



$$\begin{aligned} \sin B &= \sin(2n+1 \times 180^\circ + A) \\ &= \sin(180^\circ + A) && [(i) \text{ 由 } \forall.] \\ &= -\sin A. && [(x) \text{ 由 } \forall.] \end{aligned}$$

同様 =  $\cos B = -\cos A.$

若シ B ガ 第 四 式 = 適 ス レ ハ

$$\begin{aligned} \sin B &= \sin(2n \times 180^\circ - A) \\ &= \sin(-A) && [(i) \text{ 由 } \forall.] \\ &= -\sin A. && [(v) \text{ 由 } \forall.] \end{aligned}$$

同様 =  $\cos B = \cos A.$

其 他 ノ 函 數 モ 亦 同 様 ナ リ.

問 題 XIV.

下ニ記セル圓函數ヲ銳角ノ同シ函數ニテ表ハセ.

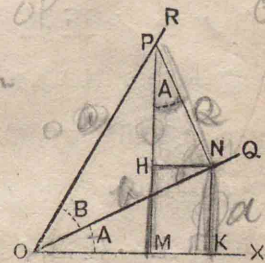
- ×(1)  $\sin 150^\circ.$     ×(2)  $\cos 220^\circ.$     ×(3)  $\tan(-80^\circ).$
- ×(4)  $\cot(-500^\circ).$     (5)  $\sec 300^\circ.$     (6)  $\operatorname{cosec}(-36^\circ).$
- ×(7)  $\sin(270^\circ - A) = -\cos A$  ヲ證明セヨ.
- ×(8)  $\cos(270^\circ + A) = \sin A$  ヲ證明セヨ.
- ×(9)  $\sin 25^\circ, \cot 16^\circ$  ヲ鈍角ノ同シ函數ヲ用キテ表ハセ.
- ×(10)  $\sin 112^\circ, \cos(-350^\circ)$  ヲ銳角ノ正弦ヲ用キテ表ハセ.

第 六 編.

二ノ角ノ圓函數.

40. 二ノ角ノ正弦及餘弦ヲ用キテ  
其ノ和ノ正弦及餘弦ヲ表ハス.

圖ニ於テ XOQ ヲ角 A トシ QOR ヲ角 B トセヨ. 然ル  
キハ XOR ハ角 (A+B) ナリ.  $\frac{12}{2} = \frac{6}{1} = \frac{OP}{OR} = \sin B$   
角 (A+B) ヲ書キタル廻轉線  
OR ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取リ  $OP = \frac{OP}{OR} = \sin B$   
P ヲリ OX 及 OQ へ夫々垂線  
PM 及 PN ヲ引ケ; N ヲリ MP  
及 OX へ夫々垂線 NH 及 NK  
ヲ引ケ. 然ルキハ  $\frac{12}{2} = \frac{6}{1} = \frac{OP}{OR} = \sin B$



$$HPN = 90^\circ - HNP = HNO = XOQ = A.$$

$$\text{故ニ} \quad \sin(A+B) = \frac{MP}{OP} = \frac{MH+HP}{OP} = \frac{KN}{OP} + \frac{HP}{OP}$$

$$= \frac{KN \cdot ON}{ON \cdot OP} + \frac{HP \cdot NP}{NP \cdot OP} = \frac{KN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{HP}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{KN}{ON} \quad \text{NK} = ON \sin A$$

$$= \sin XOQ \cdot \cos QOR + \cos HPN \cdot \sin QOR$$

$$= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B.$$

又  $\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{OK-MK}{OP} = \frac{OK}{OP} - \frac{HN}{OP}$

$\cos(A-B)$

$$= \frac{OK \cdot ON}{ON \cdot OP} - \frac{HN \cdot NP}{NP \cdot OP} = \frac{OK}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{HN}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

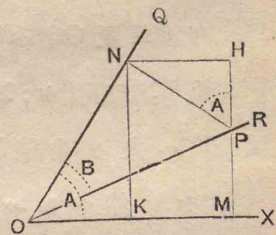
$$= \cos XOQ \cdot \cos QOR - \sin HPN \cdot \sin QOR$$

$$= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B.$$

41. 二ノ角ノ正弦及餘弦ヲ用キテ  
其ノ差ノ正弦及餘弦ヲ表ハス。

圖ニ於テ XOQ ヲ角 A トシ ROQ ヲ角 B トセヨ。然  
ルキハ XOR ハ角 (A-B) ナリ。

角 (A-B) ヲ畫キタル廻轉線  
OR ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取  
リ、P ヲリ OX 及 OQ へ夫々  
垂線 PM 及 PN ヲ引ケ；N ヲ



リ MP 及 OX へ夫々垂線 NH 及 NK ヲ引ケ。然ルキ  
ハ

$$HPN = 90^\circ - HNP = HNQ = XOQ = A.$$

故ニ  $\sin(A-B) = \frac{MP}{OP} = \frac{MH-PH}{OP} = \frac{KN}{OP} - \frac{PH}{OP}$

$$= \frac{KN \cdot ON}{ON \cdot OP} - \frac{PH \cdot NP}{NP \cdot OP} = \frac{KN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{PH}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \sin XOQ \cdot \cos ROQ - \cos HPN \cdot \sin ROQ$$

$$= \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B.$$

又  $\cos(A-B) = \frac{OM}{OP} = \frac{OK+KM}{OP} = \frac{OK}{OP} + \frac{NH}{OP}$

$$= \frac{OK \cdot ON}{ON \cdot OP} + \frac{NH \cdot NP}{NP \cdot OP} = \frac{OK}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \frac{NH}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}$$

$$= \cos XOQ \cdot \cos ROQ + \sin HPN \cdot \sin ROQ$$

$$= \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B.$$

42. 前二節ニ於テ得タル結果

$$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B, \quad (xi)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B, \quad (xii)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B, \quad (xiii)$$

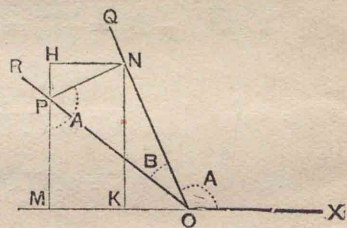
$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \quad (xiv)$$

ハ基本ノ公式ニシテ甚ダ重要ナリ。而  
シテ之ヲ得ルヤ A, B 及其ノ和或ハ差ガ  
直角ヲ越エザル場合ノ圖ヲ畫キタリ；然

レ此 A 及 B が如何ナル値ヲ有スル場合ニ於テモ同様ノ作圖ヲ爲シ同様ノ證明ニ由リテ同シ結果ニ到着ス可シ。

例へハ  $90^\circ < A < 180^\circ$ ,  $0^\circ < B < 90^\circ$ ,  $A+B < 180^\circ$  ナル場合ニ於テハ下ノ如シ。

次式ニ於テ直線ノ長ヲ示ス記號ハ總テ其ノ絶對ノ大ヲ指スモノト知ル可シ; 而シテ正負ハ論スル所ノ角ガ何レノ象限ニ在ルカラ檢シテ定ムルヲトス。作圖ハ全ク第40節ニ同シ。



$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{MH-PH}{OP} = \frac{KN}{OP} - \frac{PH}{OP} \\ &= \frac{KN \cdot ON}{ON \cdot OP} - \frac{PH \cdot NP}{NP \cdot OP} = \frac{KN}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} + \left(-\frac{PH}{NP}\right) \cdot \frac{NP}{OP} \\ &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B.\end{aligned}$$

$$\left[ \because -\frac{PH}{NP} = -\cos \angle HPN = -\cos(180^\circ - A) = \cos A. \right]$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= -\frac{MO}{OP} = -\frac{KO+MK}{OP} = -\frac{KO}{OP} - \frac{HN}{OP} \\ &= -\frac{KO}{ON} \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{HN \cdot NP}{NP \cdot OP} = \left(-\frac{KO}{ON}\right) \cdot \frac{ON}{OP} - \frac{HN}{NP} \cdot \frac{NP}{OP}\end{aligned}$$

$$= \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B. \quad \left[ \because -\frac{KO}{ON} = \cos A. \right]$$

斯ノ如クシテ此公式ノ一般ニ眞ナルヲ確ムルヲ得。

又(v)乃至(ix)ノ公式ヲ適用シテ第40節ノ結果ヲ一般ノ場合ニ推シ擴ムルヲ得、而シテ其方法ハ頗有益ナルヲ以テ下ニ之ヲ詳論ス。

便利ノ爲メ公式(xi)及(xii)ヲ‘A+B’式ト稱シ、公式(xiii)及(xiv)ヲ‘A-B’式ト稱ス可シ。

(甲) ‘A+B’式ヲ一般ニA及Bガ $0^\circ$ 乃至 $90^\circ$ ノ角ナル場合ニ擴張スルヲ。

前ニ述ヘタル如ク第40節ニ於テハA, B及A+Bヲ $0^\circ$ 乃至 $90^\circ$ ノ角ナリトシテ論シタリ。故ニ此處ニハA+Bガ $90^\circ$ 乃至 $180^\circ$ ノ角ナル場合ニ於テ‘A+B’式ノ眞ナルヲ證明スレハ足レリ。

A及Bガ $0^\circ$ 乃至 $90^\circ$ ノ角ニシテA+Bガ $90^\circ$ 乃至 $180^\circ$ ノ角ナレハ $90^\circ - A$ ,  $90^\circ - B$ 及 $90^\circ - A + 90^\circ - B$ 即 $180^\circ - (A+B)$ ハ $0^\circ$ 乃至 $90^\circ$ ノ角ナリ。故ニ第40節ノ證明ニ由リ  $\sin[(90^\circ - A) + (90^\circ - B)]$

$$= \sin(90^\circ - A) \cdot \cos(90^\circ - B) + \cos(90^\circ - A) \cdot \sin(90^\circ - B).$$

而シテ其ノ左節  $\sin[(90^\circ - A) + (90^\circ - B)]$  即  $\sin[180^\circ - (A+B)]$

ハ公式 (vii) = 依リ  $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$  等シ。又其ノ右節ハ  
公式 (vi) = 依リ  $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$  等シ。故ニ

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

同様ニ  $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$  フ得。

(乙) 'A+B' 式ヲ A 及 B ガ任意ノ正角ナル場合ニ擴張スルヲ。

先ツ 'A+B' 式ハ A 及 B ガ或ル角ナルモ眞ナレハ A 或ハ B ヲ 90° ダケ増シタルモ眞ナルヲ證明スルヲ下ノ如シ:

$$A+90^\circ = A' \text{ トスレハ}$$

$$\sin(A'+B) = \sin(A+B+90^\circ)$$

$$= \cos(A+B) \quad \text{[(viii) = 由リ]}]$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \text{[假設]}$$

$$= \cos(A'-90^\circ) \cos B - \sin(A'-90^\circ) \sin B$$

$$= \sin A' \cos B + \cos A' \sin B. \quad \text{[(ix) = 由リ]}]$$

同様ニ  $\cos(A'+B) = \cos A' \cos B - \sin A' \sin B$  フ得。

B ヲ 90° ダケ増シタル場合モ之ニ同シ。

而シテ 'A+B' 式ハ A 及 B ガ 0° 乃至 90° ノ角ナルモ眞ナルヲハ已ニ (甲) = 於テ證明セリ; 故ニ上ニ述ヘタル所

ニ依リ A 及 B ガ 0° 乃至 180° ノ角ナルモ此式ハ眞ナリ; 逐テ斯ノ如シ。故ニ 'A+B' 式ハ A 及 B ガ任意ノ正角ナルモ眞ナルヲ知ル。

(丙) 'A+B' 式ヲ總テノ角ニ擴張スルヲ。

'A+B' 式ハ A 及 B ガ或ル角ナルモ眞ナレハ A 或ハ B ヲ 90° ダケ減シタルモ眞ナルヲ證明スルヲ下ノ如シ:

$$A-90^\circ = A' \text{ トスレハ,}$$

$$\sin(A'+B) = \sin(A+B-90^\circ)$$

$$= -\cos(A+B) \quad \text{[(ix) = 由リ]}]$$

$$= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \text{[假設]}$$

$$= -\cos(A'+90^\circ) \cos B + \sin(A'+90^\circ) \sin B$$

$$= \sin A' \cos B + \cos A' \sin B. \quad \text{[(viii) = 由リ]}]$$

同様ニ  $\cos(A'+B) = \cos A' \cos B - \sin A' \sin B$  フ得。

B ヲ 90° ダケ減シタル場合モ之ニ同シ。

然ルニ 'A+B' 式ハ A 及 B ガ任意ノ正角ナルモ眞ナリ、而シテ之ヨリ順次 90° ヲ減スレハ任意ノ負角ヲ得。

故ニ 'A+B' 式ハ A 及 B ノ正負大小ヲ問ハズ一般ニ眞ナリ。

(丁) 'A+B' 式ガ一般ニ眞ナレハ 'A-B'  
式モ亦一般ニ眞ナリ。何トナレハ、

$$\begin{aligned}\sin(A-B) &= \sin[A+(-B)] \\ &= \sin A \cdot \cos(-B) + \cos A \cdot \sin(-B) \quad [(\text{丙}) = \text{由リ}] \\ &= \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B; \quad [(\text{v}) = \text{由リ}]\end{aligned}$$

同様ニ  $\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$ .

注意. 第41節ノ結果ヲ用キズシテ 'A-B' 式ヲ證明シタルコトニ注意ス可シ; 即 'A-B' 式ハ 'A+B' 式中ニ含まル、モノナリ。

### 問 題 XV.

下ニ記セル事項ヲ證明セヨ。

木村 (1)  $\sin(A+45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A + \cos A)$ .

佐藤 (2)  $\cos(A-30^\circ) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \cdot \cos A + \sin A)$ .

前田 (3)  $\sin(A-60^\circ) = \frac{1}{2}(\sin A - \sqrt{3} \cdot \cos A)$ .

柳 (4)  $\cos(A+45^\circ) + \sin(A-45^\circ) = 0$ .

打井 (5)  $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B}$ .

(6)  $\tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B}$ .

(7)  $\cot \alpha + \tan \beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$ .

大津 (8)  $\cot \alpha - \tan \beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$ .

至因 (9)  $\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$ .

都立 (10)  $\sin(A+B) \cdot \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$ .  
(xv)

(11)  $\cos(A+B) \cdot \cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A$ .  
(xvi)

### 43. 第42節ノ公式ニ由リ

$$\triangle \tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$$

此分數ノ分母及分子ヲ  $\cos A \cdot \cos B$  ニテ割レハ

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\frac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}$$

$$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} \quad \text{(xvii)}$$

同様ニ  $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$ .

### 問 題 XVI.

下ニ記セル事項ヲ證明セヨ。

(1)  $\tan(A+45^\circ) = \frac{\tan A + 1}{1 - \tan A}$  (2)  $\tan(A-45^\circ) = \frac{\tan A - 1}{1 + \tan A}$

(3)  $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cdot \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$

(4)  $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cdot \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

(5)  $\tan(A-45^\circ) + \cot(A+45^\circ) = 0$

44. 第42節ノ四式ヨリ寄セ算及引キ算ニ依リ

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) + \sin(A-B) &= 2 \sin A \cdot \cos B, \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) &= 2 \cos A \cdot \sin B, \\ \cos(A-B) + \cos(A+B) &= 2 \cos A \cdot \cos B, \\ \cos(A-B) - \cos(A+B) &= 2 \sin A \cdot \sin B. \end{aligned} \right\} \text{(xviii)}$$

A+BヲSトシ, A-BヲTトセヨ. 然ルルハ

$$\frac{S+T}{2} = A, \quad \frac{S-T}{2} = B$$

ナルヲ以テ, (xviii)ハ下ノ如ク爲ル:

$$\left. \begin{aligned} \sin S + \sin T &= 2 \sin \frac{S+T}{2} \cdot \cos \frac{S-T}{2}, \\ \sin S - \sin T &= 2 \cos \frac{S+T}{2} \cdot \sin \frac{S-T}{2}, \\ \cos T + \cos S &= 2 \cos \frac{S+T}{2} \cdot \cos \frac{S-T}{2}, \\ \cos T - \cos S &= 2 \sin \frac{S+T}{2} \cdot \sin \frac{S-T}{2}. \end{aligned} \right\} \text{(xix)}$$

$\sin S + \cos D = \sin S + \sin(90-D)$

此公式(xix)モ任意ノ角ニ適用スルヲ得ルヲ勿論ナリ, 何トナレハS及Tノ大小及正負ヲ問ハズ  $A+B=S$  及  $A-B=T$ ニ適スル所ノA及Bハ必ズ有リ, 即  $A = \frac{S+T}{2}$ ,  $B = \frac{S-T}{2}$ ; 而シテA, Bノ大小及正負ヲ問ハズ(xviii)ハ常ニ眞ナレハナリ.

二ノ角ノ正弦或ハ餘弦ノ和或ハ差ヲ積ノ形ニ變セント欲スレハ(xix)ニ由リテ之ヲ爲スコヲ得. 逆ニ積ヲ和或ハ差ノ形ニ變スルニハ(xviii)ヲ用キル.

本編ノ公式ハ何レモ甚ダ重要ナルヲ以テ學者之ヲ充分ニ諳記スルヲ要ス. 殊ニ第42節ノ四式ハ以後引用スルヲ甚ダ多シ; 故ニ便宜ノ爲メ之ヲ'A, B'式ト呼フ可シ. 又公式(xix)ヲ'S, T'式ト呼フ可シ.

問題 XVII.

下ニ記セル事項ヲ證明セヨ.

(1)  $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ$

(2)  $\sin 40^\circ - \sin 10^\circ = 2 \cos 25^\circ \cdot \sin 15^\circ$

(3)  $\cos 3A - \cos 5A = 2 \sin 4A \cdot \sin A$

(4)  $\frac{\sin 3\theta + \sin 2\theta}{\cos 3\theta - \cos 2\theta} = -\cot \frac{\theta}{2}$

$\frac{2 \sin \frac{5}{2} \cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}} = -\cot \frac{1}{2} = -\cot \frac{\theta}{2}$

10  
4  
E  
9  
三  
4  
2  
10  
12

$$(5) \sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A.$$

$$(6) \cos(45^\circ + A) + \cos(45^\circ - A) = \sqrt{2} \cdot \cos A.$$

$$(7) \frac{\sin A - \sin B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{A+B}{2} \quad 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

下ノ六題ノ各式ヲ二ノ圓函數ノ和或差ニ變形

セヨ.

$$(8) \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) \quad (9) \sin 3A \cdot \sin 2B.$$

$$(10) 2 \cos \frac{3A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \quad (11) \cos \frac{5A}{2} \cdot \sin \frac{3A}{2}.$$

$$(12) \cos 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \quad (13) \cos 45^\circ \cdot \sin 15^\circ.$$

$$(14) 2 \cos 2\theta \cdot \cos \theta - 2 \sin 4\theta \cdot \sin \theta \text{ヲ簡單ニセヨ.}$$

$$(15) \frac{\cos a - \cos 5a}{\sin a + \sin 5a} \text{ヲ簡單ニセヨ.}$$

$$(16) \sin 3\theta + \sin 2\theta + 2 \sin \frac{3\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \text{ヲ簡單ニセヨ.}$$

## 第 七 編.

### 倍角ノ圓函數, 等.

45. 角  $A$  ノ圓函數ヲ用キテ  $2A$  ノ圓函數ヲ表ハス.

'A, B' 式ノ  $\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$  = 於テ  $A=B$  トスレハ

$$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A. \quad (xx)$$

又  $\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$  = 於テ  $A=B$  トスレハ

$$\begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A, \\ &= 2 \cos^2 A - 1, \\ &= 1 - 2 \sin^2 A. \end{aligned} \quad (xxi)$$

又公式 (xvii) ノ  $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$  = 於テ  $A=B$  トスレハ

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}. \quad (xxii)$$

46. 前節ノ式ニ於テAハ任意ノ角ナルヲ以テ  
Aノ代リニ $\frac{A}{2}$ ヲ入ル、モ差支ナシ; 因テ下ノ諸式ヲ  
得、是レ前節ト同一ノ事ナリ。

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}. \quad (\text{xxiii})$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}, \\ &= 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1, \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (\text{xxiv})$$

$$\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}. \quad (\text{xxv})$$

### 問 題 XVIII.

下記ノ事項ヲ證明セヨ。

(1)  $2 \operatorname{cosec} 2A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A.$

(2)  $\cos^2 A (1 - \tan^2 A) = \cos 2A.$

(3)  $\left( \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 + \sin A.$

(4)  $\left( \sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} \right)^2 = 1 - \sin A.$

大島 (5)  $\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \left( \frac{1 + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan \frac{\theta}{2}} \right)^2$  大島 (6)  $\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \tan^2 \frac{\theta}{2}.$

大島 (7)  $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}.$

大島 (8)  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}}$  大島 (9)  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cot \frac{x}{2} - 1}{\cot \frac{x}{2} + 1}.$

47. 前節ト同様ニ'A, B'式等ニ由リテ3A, 4A,  
等ノ圓函數ヲ得ルヲ容易ナリ。今  $\sin 3A$  ト  $\cos 3A$  ヲ  
下ニ掲ク:

$\sin 3A = \sin (2A + A)$

$= \sin 2A \cdot \cos A + \cos 2A \cdot \sin A$

$= (2 \sin A \cdot \cos A) \cos A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$

$= 2 \sin A \cdot \cos^2 A + \sin A - 2 \sin^3 A$

$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + \sin A - 2 \sin^3 A$

$= 2 \sin A - 2 \sin^3 A + \sin A - 2 \sin^3 A,$

即  $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A. \quad (\text{xxvi})$

同様ニ  $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A. \quad (\text{xxvii})$

48. 下ニ種々ノ例題ヲ掲グ。



例題 1. 角 A が漸々ニ變化スル際之ニ伴ナフ  $\sin A \cdot \cos A$  ノ値ノ變化ヲ追跡セヨ.

公式 (xx) ニ由リ

$$\sin A \cdot \cos A = \frac{\sin 2A}{2}.$$

A が  $0^\circ$  ヨリ  $45^\circ$  ニ至レハ  $2A$  ハ  $0^\circ$  ヨリ  $90^\circ$  ニ至ル故ニ  $\frac{\sin 2A}{2}$  即  $\sin A \cdot \cos A$  ハ  $0$  ヨリ  $\frac{1}{2}$  ニ至ル.

同様ニ A が  $45^\circ$  ヨリ  $90^\circ$  ニ至レハ  $\sin A \cdot \cos A$  ハ  $\frac{1}{2}$  ヨリ  $0$  ニ至ル; A が  $90^\circ$  ヨリ  $135^\circ$  ニ至レハ  $\sin A \cdot \cos A$  ハ  $0$  ヨリ  $-\frac{1}{2}$  ニ至ル; A が  $135^\circ$  ヨリ  $180^\circ$  ニ至レハ  $\sin A \cdot \cos A$  ハ  $-\frac{1}{2}$  ヨリ  $0$  ニ至ル.

$180^\circ$  以上ハ此變化ヲ繰リ返ス. 又 A が負角トナルキモ同様ナリ.

$\triangle$  例題 2.  $\sin(A+B+C) = \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos A$   
 $+ \sin C \cdot \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

ヲ證明セヨ.

之ヲ證明スル下ノ如シ:

$$\begin{aligned} \sin(A+B+C) &= \sin(A+B) \cdot \cos C + \cos(A+B) \cdot \sin C \\ &= \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C \\ &\quad + \cos A \cdot \cos B \cdot \sin C - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \cos C \cdot \cos A \\ &\quad + \sin C \cdot \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C. \quad (\text{xxviii}) \end{aligned}$$

例題 3.  $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$

$$= 4 \cdot \sin \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{C+A}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}$$

ヲ證明セヨ.

之ヲ證明スル下ノ如シ:

$$\sin A - \sin(A+B+C) = -2 \cos \frac{2A+B+C}{2} \cdot \sin \frac{B+C}{2},$$

$$\text{又} \quad \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}.$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$$

$$= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} - 2 \cos \frac{2A+B+C}{2} \cdot \sin \frac{B+C}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{B+C}{2} \left\{ \cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{2A+B+C}{2} \right\}$$

$$= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A+C}{2}$$

$$= 4 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{C+A}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2}.$$

問題 XIX.

$\triangle$  (1)  $\frac{\cos 2A + \cos 12A}{\cos 6A + \cos 8A} + \frac{\cos 7A - \cos 3A}{\cos A - \cos 3A} + 2 \frac{\sin 4A}{\sin 2A} = 0$  ヲ

證明セヨ.

$\triangle$  (2)  $A = 18^\circ$  ナレハ  $\sin 2A = \cos 3A$  ナルヲ證明シ,

而シテ之ニ依テ  $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$  ヲ證明セヨ。

$$(3) \cos(A+B+C) = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C \\ - \cos B \cdot \sin C \cdot \sin A - \cos C \cdot \sin A \cdot \sin B. \quad (\text{xxix})$$

$$(4) \tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}. \quad (\text{xxx})$$

$$(5) \sin(B-C) + \sin(C-A) + \sin(A-B) \\ + 4 \sin \frac{(B-C)}{2} \cdot \sin \frac{(C-A)}{2} \cdot \sin \frac{(A-B)}{2} = 0.$$

下ニ記セル式ノ値ノ變化ヲ追跡セヨ。

$$(6) \sin A + \cos A. \quad (7) \sin A - \cos A. \quad (8) \tan A + \cot A.$$

$$(9) \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (10) \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}.$$

$$(6) \sin A + \cos A = \sin A + \sin \left( \frac{\pi}{2} + A \right) \\ = 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + A \right) \cos \frac{\pi}{4}$$

## 第 八 編

## 三 角 方 程 式

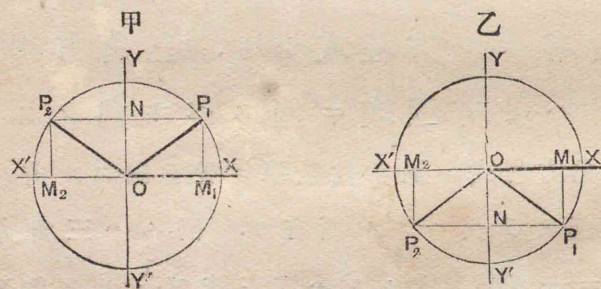
49. 三角方程式トハ未知角ノ圓函數ヲ含有スル方程式ナリ。三角方程式ノ解トハ其方程式ニ適スベキ角ノヲナリ。

三角方程式ハ通常代數學ニ於テ論スル方程式トハ稍趣キヲ異ニスル所有リ。例ヘハ三角方程式  $\sin x = \frac{1}{2}$  ノ解ヲ求ムルハ即正弦ガ  $\frac{1}{2}$  ナル角ヲ求ムルナリ。而シテ  $30^\circ$  ノ正弦ハ  $\frac{1}{2}$  ナルヲ以テ此方程式ノ一ノ解ハ  $30^\circ$  ナリ。然レモ其外  $180^\circ - 30^\circ$  即  $150^\circ$ ,  $360^\circ + 30^\circ$  即  $390^\circ$ ,  $-360^\circ + 30^\circ$  即  $-330^\circ$ ,  $\pm 360^\circ + 180^\circ - 30^\circ$ , 等ノ如キモ亦其ノ正弦ハ  $\frac{1}{2}$  ナリ。因テ此等無數ノ角ハ皆此方程式ノ解ナリ。故ニ  $30^\circ$  ハ  $\sin x = \frac{1}{2}$  ノ一ノ解ナレモ之ヲ以テ此方程式ノ完全ナル解ナリト

云フ能ハズ。以下節ヲ逐ヒ三角方程式ノ完全ナル解ヲ求ムルヲ講ス。

### 50. 正弦ガ $a$ ニ等シキ角ヲ作ル。

長 $r$ ノ單位ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ直角ニ交ルニツノ直徑 $X'OX, Y'OY$ ヲ引ケ。ONノ長 $r$ ガ $a$ ナル様ニNヲOY上ニ取レ[ $a$ ガ正ナルカ負ナルカニ從ヒNハOヨリ上ニ(甲圖)或ハ下ニ(乙圖)取ルヲ勿論ナリ。] N



ヲ過リ $X'OX$ ニ平行ニ一ツノ直線ヲ引キ、圓ト $P_1$ 及 $P_2$ ニ於テ交ラシメヨ[ $a$ ガ1ヨリ大ナルカ或ハ-1ヨリ代數學的ニ小ナレハ此直線ハ圓ト交ラズ故ニ斯ノ如キ角ハ作ル能ハズ(第33節ヲ參考セヨ)].  $OP_1, OP_2$ ヲ結ビ付ケヨ 然ルキハ半徑ノ長 $r$ ガ1ナルヲ以テ

$$\frac{M_1P_1}{OP_1} = \frac{a}{1} = \frac{M_2P_2}{OP_2}$$

故ニOXヨリ發シ $OP_1$ 或ハ $OP_2$ ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ正弦ガ $a$ ニ等シキ角ナリ。

而シテ其他ニハ正弦ガ $a$ ニ等シキ角無シ; 何トナレハ $OP_1, OP_2$ ノ他ニハ本題ニ適スル廻轉線ノ位置無ケレハナリ。

### 51. 方程式 $\sin x = a$ ノ完全ナル解。

前節ノ如ク圖ヲ書ケ、正弦ガ $a$ ニ等シキ角ノ一ツヲAトセヨ。圖ニ於テ $XOP_1 = A$ 。

然ルキハOXヨリ發シ $OP_1$ ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$2p \times 180^\circ + A,$$

此處ニ $p$ ハ正或ハ負ナル任意ノ完全數又ハ零ナリ。又OXヨリ發シ $OP_2$ ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$(2q+1) \times 180^\circ - A,$$

此處ニ $q$ ハ正或ハ負ナル任意ノ完全數又ハ零ナリ。

此兩式ノ表ハス角ハ總テ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$n \times 180^\circ + (-1)^n A,$$

此處ニ $n$ ハ正或ハ負ナル任意ノ完全數又ハ零ナリ。

何トナレハ  $n$  ガ偶數 ( $2p$ ) 又ハ零ナレハ  $(-1)^n$  ハ  $+1$  トナル故ニ此式ハ  $2p \times 180^\circ + A$  ニ同シ;  $n$  ガ奇數 ( $2q+1$ ) ナレハ  $(-1)^n$  ハ  $-1$  トナル故ニ此式ハ  $(2q+1) \times 180^\circ - A$  ニ同シ.

故ニ  $\sin x = a$  ノ完全ナル解ハ  $A$  ナ此方程式ニ適スル一ツノ角トスレハ,

$$x = n \times 180^\circ + (-1)^n A \quad (\text{xxxii})$$

ナリ.

或ハ此事ヲ次ノ如ク述フ:  $\sin x = \sin A$  ノ完全ナル解ハ  $n \times 180^\circ + (-1)^n A$  ナリ.

注意. 本題ノ  $A$  ハ通例與ヘラレタル式ニ適スル所ノ最小ナル角トス. 實地ノ計算ニ於テ  $A$  ヲ見出スニハ圓函數ノ表ニ頼ル可シ. 表ニ記載スル所ハ  $0^\circ$  乃至  $90^\circ$  ノ圓函數ナルヲ以テ  $a$  ガ正ナレハ表ニ照シテ得タル角ハ即最小ナル角ナリ, 若シ  $a$  ガ負ナレハ之ヲ正ナリト見做シ表ニ照シテ得タル角ニ負號ヲ附スレハ大ノ最小ナル負角トナル. ( $a$  ノ負ナル場合ニ於テ最小正角ヲ得ント欲セハ表ヨリ得タル角ニ直ニ  $180^\circ$  ヲ加フ可シ.)

例題.  $\sin A = \sin 18^\circ$  ニ適スル角ニシテ  $-4$  直角ト  $+8$  直角ノ間ニ在ル總テノ角ヲ求ム.

本節ノ公式ヨリ  $A = n \times 180^\circ + (-1)^n 18^\circ$ .

今  $n$  ノ代リニ  $0, 1, 2, 3$  ヲ入ルレハ

$$18^\circ, 180^\circ - 18^\circ, 360^\circ + 18^\circ, 540^\circ - 18^\circ,$$

即  $18^\circ, 162^\circ, 378^\circ, 522^\circ$

ヲ得; 又  $n$  ノ代リニ  $-1, -2$  ヲ入ルレハ

$$-180^\circ - 18^\circ, -360^\circ + 18^\circ,$$

即  $-198^\circ, -342^\circ$

ヲ得; 而シテ  $n$  ニ其他ノ値ヲ與フルキハ要件ニ適セザル角ヲ得ルヲ明ナリ. 故ニ上ニ得タル六ツノ角ヲ以テ答トス.

## 問 題 XX.

(1) 下ノ方程式ニ適スル所ノ最小正角ヲ求ム:

$$(イ) \sin x = \frac{1}{2}. \quad (ロ) \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(ハ) \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (ニ) \sin B = -\frac{1}{2}.$$

(2) 下ノ方程式ニ適スル角ニシテ  $0$  ト  $8$  直角ノ間ニ在ル總テノ角ヲ求ム.

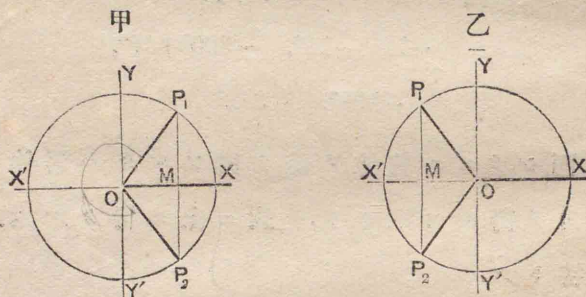
(1)  $\sin x = \sin 20^\circ$  (甲)  $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  (乙)  $\sin \theta = -\sin 25^\circ$

(3) 下ノ方程式ノ完全ナル解ヲ問フ:

(1)  $\sin x = -\frac{1}{2}$  (2)  $\sin x = 0$  (3)  $\sin A = 1$

52. 餘弦ガ  $a =$  等シキ角ヲ作ル.

長ノ單位ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ直角ニ交ルニ直徑  $X'OX, Y'OY$  ヲ引ケ.  $OM$  ノ長ガ  $a$  ナル様



ニ  $M$  ヲ  $OX$  上ニ取レ.  $M$  ヲ過リ  $Y'OY$  ニ平行ニ直線ヲ引キ圓ト  $P_1$  及  $P_2$  ニ於テ交ラシメヨ [ $a$  ガ  $1$  ヨリ大ナルカ或ハ  $-1$  ヨリ代數學的ニ小ナレハ此直線ハ圓ト交ラズ故ニ斯ノ如キ角ハ作ル能ハズ (第33節ヲ参考セヨ)].  $OP_1, OP_2$  ヲ結ヒ付ケヨ. 然ルキハ半徑ノ長ガ  $1$  ナルヲ以テ

$$\frac{OM}{OP_1} = \frac{a}{1} = \frac{OM}{OP_2}$$

故ニ  $OX$  ヨリ發シ  $OP_1$  或ハ  $OP_2$  ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ餘弦ガ  $a =$  等シキ角ナリ.

而シテ其他ニハ餘弦ガ  $a =$  等シキ角ナシ; 何トナレハ  $OP_1, OP_2$  ノ他ニハ本題ニ適スル廻轉線ノ位置無ケレハナリ.

53. 方程式  $\cos x = a$  ノ完全ナル解.

前節ノ如ク圖ヲ書ケ; 餘弦ガ  $a =$  等シキ角ノ一ヲ  $A$  トセヨ. 圖ニ於テ  $XOP_1 = A$ .

然ルキハ  $OX$  ヨリ發シ  $OP_1$  ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$2p \times 180^\circ + A.$$

又  $OX$  ヨリ發シ  $OP_2$  ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$2q \times 180^\circ - A.$$

此兩式ノ表ハス角ハ總テ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$2n \times 180^\circ \pm A.$$

故ニ  $\cos x = a$  ノ完全ナル解ハ,  $A$  ナ此方程式ニ適スル一ノ角トスレハ,

$$2\pi n \pm \frac{\pi}{4} \text{ 一般解法}$$

$$x = 2n \times 180^\circ \pm A \quad (\text{xxxii})$$

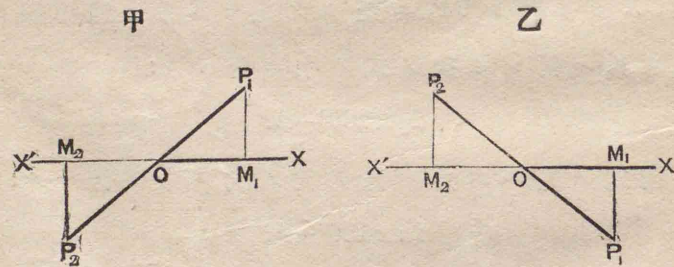
ナリ。

或ハ此事ヲ次ノ如ク述フ:  $\cos x = \cos A$  ノ完全ナル解ハ  $2n \times 180^\circ \pm A$  ナリ。

注意. 正弦ノ場合ノ如シ; 只異ナル所ハ  $a$  ガ負ナレハ之ヲ正ナリト見做シテ表ニ照シ得タル角ヲ  $180^\circ$  ヨリ減スレハ最小ナル正角トナルニ在リ。(此場合ニ於テハ最小ナル正角及負角ハ常ニ同シ大ナルヲ以テ特ニ最小負角ヲ用キルノ利益アルヲ無シ)

54. 正切ガ  $a$  ニ等シキ角ヲ作ルヲ。

圖ノ如ク一ノ直線  $X'OX$  上ニ  $O$  ノ右及左ニ於テ長ノ單位ニ等シク  $OM_1$  及  $OM_2$  ヲ取レ.  $M_1$  及  $M_2$  ヨリ  $M_1P_1$



及  $M_2P_2$  ヲ  $X'OX$  ニ直角ニ引キ  $M_1P_1$  及  $M_2P_2$  ノ長ガ夫々  $a$  及  $-a$  ナル様ニ  $P_1$  及  $P_2$  ヲ取レ.  $OP_1, OP_2$  ヲ結ビ

付ケヨ. 然ルニ  $OM_1=1, OM_2=-1$  ナルヲ以テ

$$\frac{M_1P_1}{OM_1} = \frac{a}{1} = a.$$

$$\frac{M_2P_2}{OM_2} = \frac{-a}{-1} = a.$$

故ニ  $OX$  ヨリ發シ  $OP_1$  或ハ  $OP_2$  ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ正切ガ  $a$  ニ等シキ角ナリ.

而シテ其他ニハ正切ガ  $a$  ニ等シキ角無シ; 何トナレハ  $OP_1, OP_2$  ノ他ニハ本題ニ適スル廻轉線ノ位置無ケレハナリ.

55. 方程式  $\tan x = a$  ノ完全ナル解.

前節ノ如ク圖ヲ畫ケ; 正切ガ  $a$  ニ等シキ角ノ一ヲ  $A$  トセヨ. 圖ニ於テ  $XOP_1 = A$ .

然ルニ  $OX$  ヨリ發シ  $OP_1$  ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$2p \times 180^\circ + A.$$

又  $OX$  ヨリ發シ  $OP_2$  ニ至リテ止マル所ノ廻轉線ガ書ケル角ハ何レモ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$(2q+1) \times 180^\circ + A.$$

此兩式ノ表ハス角ハ總テ次ノ式ノ中ニ含マル:

$$n \times 180^\circ + A.$$

故  $\tan x = a$  ノ完全ナル解ハ、 $A$  ナ此方程式ニ適スル一ノ角トスレハ、

$$x = n \times 180^\circ + A \quad (\text{xxxiii})$$

ナリ。

或ハ此事ヲ次ノ如ク述フ:  $\tan x = \tan A$  ノ完全ナル解ハ  $n \times 180^\circ + A$  ナリ。

注意. 正弦ノ場合ノ如シ. (但シ  $a$  ガ負ナル時ノ最小正角ハ餘弦ノ場合ノ如シ.)

**56.**  $\cot x = a, \sec x = a, \operatorname{cosec} x = a$  ノ解ハ前節ニ倣フテ見出スヲ得. 或ハ餘切, 正割, 餘割ノ反數ハ夫々正切, 餘弦, 正弦ノ値ナルヲ以テ反數ヲ直ニ前節ニ適用シテ其ノ解ヲ見出スヲ得.

問 題 XXI.

(1) 下ノ方程式ノ完全ナル解ヲ問フ:

(イ)  $\cos x = \frac{1}{2}$ . (ロ)  $\tan x = 1$ . (ハ)  $\tan x = -1$ .

(ニ)  $\cos A = -1$ . (ホ)  $\tan A = -\sqrt{3}$ . (ヘ)  $\cos \theta = \cos 20^\circ$ .

(ト)  $\tan \theta = \tan 135^\circ$ .

(イ)  $x = 2n \times 180^\circ \pm 60$

$\tan x = \pm 1$   
 $\cos \theta = \cos 20^\circ$

*Handwritten notes:*  
大島  
 $\sin(180^\circ + 20^\circ) = 0$   
Es.

(2) 角  $60^\circ$  ト  $-120^\circ$  ノ同シ函數ノ中, 相等シキ者有リ; 之ヲ問フ.

(3)  $-23^\circ, -157^\circ, 157^\circ$  ノ三ツノ角ノ何レモ相等シキ値ヲ有スル同シ函數有リヤ?

(4) 問題(1)ノ各方程式ニ適スル四ツノ角ヲ問フ.

*Handwritten note:* Second term 7th, Sept.

**57.** 互ニ反數ナラザル圓函數ノ一, ナ用キテ他ノ函數ヲ表ハサント欲スレハ公式(iv)即

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1,$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A,$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$

ニ依頼セザル可カラズ. 例ヘハ  $\sin A$  ナ用キテ  $\cos A$  ナ表ハスニハ上ノ方程式ヨリ代數學ノ普通ノ演算ニ從ヒ

$$\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

ヲ得. 今此士號ヲ説明セン.

$\sin A$  ノ値ガ與ヘラレタル時,  $A$  ニ相當スル廻轉線

ノ位置ハ第50節ニ述ヘタル如ク  $OP_1$  ト  $OP_2$  トノ二有リ。此二ノ位置ニ於テ餘弦ノ値ハ等シカラズ: 詳ニ云ヘハ  $OP_1$  ニ相當スル餘弦ハ  $+\sqrt{1-\sin^2 A}$  ニシテ  $OP_2$  ニ相當スル餘弦ハ  $-\sqrt{1-\sin^2 A}$  ナリ。故ニ斯ノ如ク ±有ルハ至當ノ事ナリ, 即  $\cos A$  ハ  $+\sqrt{1-\sin^2 A}$  カ或ハ  $-\sqrt{1-\sin^2 A}$  ナレモ其ノ何レナルカハ ( $\sin A$  ノ値ノ他何事モ知レザルモ) 定マラス。

其他ノ場合モ同様ナリ。

故ニ任意ノ角ヲ論スルモハ第15節ノ例題ノ如キ場合ニ於テハ必ズ  $\sqrt{\quad}$  ノ前ニ ±ヲ附シ其ノ何レヲ取ル可キカハ他ノ事項ニ由リ定ムルコト知ルベシ。

**58. 三角方程式ノ解ヲ得ル一般ノ方法:** 先ツ未知角ノ圓函數ノ値ヲ見出シ, 而シテ夫ヨリ前數節ニ依リテ未知角ヲ見出ス可シ。

例題 1.  $\sin x - \operatorname{cosec} x + \frac{3}{2} = 0$  ノ解ヲ求ム。

方程式中ニ未知角ノ種々ナル函數ガ入り雜リタルモ都合宜キ一ノ函數ヲ撰ミ之ヲ用キテ其他ノ函數ヲ表ハシ, 以テ未知角ノ函數ヲ唯一種ト爲ス可シ。

本題ニ於テハ  $\operatorname{cosec} x$  ノ代リニ  $\frac{1}{\sin x}$  ヲ用非ヨ。然ルモハ

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{2} = 0,$$

$$\therefore 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0.$$

$$\therefore \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4},$$

即 
$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ 或ハ } -2.$$

然レモ  $-2$  ハ不適當ナリ。何トナレハ如何ナル角ニテモ其ノ正弦ハ大ニ於テ1ヨリ大ナルヲ能ハザレハナリ。故ニ  $\sin x$  トシテ採用ス可キ値ハ唯  $\frac{1}{2}$  ナリ。因テ  $x$  ノ一ノ値ハ  $30^\circ$  ナリ, 而シテ完全ナル解ハ第51節ニ由リ下ノ如シ:

$$x = n \times 180^\circ + (-1)^n \times 30^\circ.$$

例題 2.  $6 \cot^2 A - 4 \cos^2 A = 1$  ノ解ヲ求ム。

$\cot^2 A$  ノ代リニ  $\frac{\cos^2 A}{1-\cos^2 A}$  ヲ入ルレハ,

$$6 \frac{\cos^2 A}{1-\cos^2 A} - 4 \cos^2 A = 1.$$

$$\therefore 6 \cos^2 A - 4 \cos^2 A (1-\cos^2 A) = 1 - \cos^2 A,$$

即 
$$4 \cos^4 A + 3 \cos^2 A = 1.$$

$$\therefore \cos^2 A = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8},$$

即 
$$\cos^2 A = \frac{1}{4} \text{ 或ハ } -1.$$



然  $\cos^2 A = -1$  ハ  $\cos A =$  虚数ヲ與フルヲ以テ之ヲ棄テテ、唯  $\cos^2 A = \frac{1}{4}$  ヲ採用ス。因テ

$$\cos A = \pm \frac{1}{2}.$$

故ニ

$$A = 2n \times 180^\circ \pm 60^\circ \text{ 或ハ } 2n \times 180^\circ \pm 120^\circ$$

此二ノ式ハ下ノ一ノ式ノ中ニ含マレル:

$$A = n \times 180^\circ \pm 60^\circ.$$

### 問題 XXII.

*Sakamoto*  
X (1)  $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$  = 適スル一ノ角ヲ求ム.

(2)  $2 \cos x = \sqrt{3} \cot x$  ”

(3)  $\tan A + 3 \cot A = 4$  ”

(4)  $2 \sin^2 A + \sqrt{2} \cos A = 2$  = 適スル一ノ角ヲ求ム.

*Okamoto*  
X (5)  $4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta = 1$  ” [問題 XIX, (2) ナ見ヨ.]

(6)  $\cos(2A+B) = \frac{1}{2}, \sin(3A-B) = \frac{1}{2}$  = 適スル角ヲ求ム.

(7)  $\tan(4A+7B) = 2 + \sqrt{3}, \tan(2A-4B) = 2 - \sqrt{3}$  ”

(8)  $\cos^2 A + \sqrt{3} \cos A + \frac{3}{4} = 0$  = 適スル角ニシテ  $0^\circ$  ト

$360^\circ$  トノ間ニ在ルモノヲ問フ.

*Handwritten notes:*  
 $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-30)$   
 $\cos(30)$   
 $2n\pi = 4\pi$   
 $360^\circ$   
 $210^\circ$

*Mateno*  
X (9)  $4 \sin^2 A + 2\sqrt{2} \sin A - 1 = 0$  = 適スル角ニシテ  $0^\circ$  ト

$360^\circ$  トノ間ニ在ルモノヲ問フ.

*Tomita*  
X (10)  $\sin^2 x = \cos^2 x$  ノ解ヲ求ム.  $\pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $2n\pi/180 \pm A$

(11)  $4 \sin x = \operatorname{cosec} x$  ”

(12)  $2 \cos x = \sec x$  ”

*Yoshimizu*  
X (13)  $\tan A = 3 \cot A$  ”  $\tan A = \frac{3}{\tan A}$   $A = n\pi/180 \pm 60^\circ$

(14)  $\cos^2 A + 2 \sin^2 A - \frac{5}{2} \sin A = 0$  ノ解ヲ求ム.

(15)  $3 \tan^2 \theta - 4 \sin^2 \theta = 1$  ”

X (16)  $\sin A + \sin 2A = 0$  ”

X (17)  $\cos A + \cos 3A + \cos 5A = 0$  ”

### 59. 方程式ヲ解スルニハ成ル可ク其

ノ兩節ヲ二乗スルヲ避ク可シ。若シ已ムヲ得ズシテ二乗シタルキハ得タル結果ガ原方程式ニ適スルヤ否ヲ精細ニ檢スルヲ要ス; 而シテ之ニ適セザルモノヲ棄ツルハ勿論ナリ。

例題.  $\cos x = k \sin x$  ノ解ヲ求ム.

若シ兩節ヲ二乗スレハ

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= k^2 \sin^2 x \\ &= k^2(1 - \cos^2 x), \end{aligned}$$

$$\therefore \cos^2 x = \frac{k^2}{1+k^2},$$

$$\cos x = \pm \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

今方程式  $\cos x = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$  = 適スル最小正角ヲ A トスレハ方程式  $\cos x = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$  = 適スル最小正角ハ  $180^\circ - A$  ナリ. 故ニ  $\cos x = \pm \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$  ノ解ハ下ノ如シ

$$x = n \times 180^\circ \pm A. \quad (イ)$$

然レ由原方程式ハ  $\cot x = k$  ト記スヲ得. 然ル由ハ

$$x = n \times 180^\circ + A. \quad (ロ)$$

(ロ)ハ與ヘラレタル方程式ノ完全ナル解ナリ. 然ルニ(イ)ハ其實  $\cos x = k \sin x$  ト  $\cos x = -k \sin x$  ノ解ナリ. 因テ兩節ヲ二乗シテ得タル解ハ與ヘラレタル方程式ニ屬セザル解ヲ含ムヲ見ル.

60. 方程式ノ兩節ヲ二乗スルヲ避ケンガ爲メニ補助角ヲ用井ルヲ有リ.

例題.  $a \cos x + b \sin x = 1$  ノ解ヲ求ム.

此方程式ハ  $a \left( \cos x + \frac{b}{a} \sin x \right) = 1$

ニ均シ. 圓函數ノ表ニ依リ, 正切ガ  $\frac{b}{a}$  = 等シキ角ノ

$\left. \begin{aligned} a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{put}$

一, ヲ見出セ; 之ヲ A トスレハ, 原方程式ハ下ノ如ク書クヲ得:

$$a (\cos x + \tan A \cdot \sin x) = 1,$$

即  $a \frac{\cos x \cdot \cos A + \sin x \cdot \sin A}{\cos A} = 1,$

..  $\cos(x-A) = \frac{\cos A}{a}$  [‘A, B’ 式ニ由リ]

表ヨリ  $\cos A$  ノ値ヲ見出セ. 次ニ又表ヨリ餘弦ガ  $\frac{\cos A}{a}$  = 等シキ角ノ一ツヲ見出セ. 之ヲ B トスレハ

$$\cos(x-A) = \cos B,$$

$$\therefore x-A = 2n \times 180^\circ \pm B,$$

即  $x = A + 2n \times 180^\circ \pm B.$

本題ノ A ノ如ク凡テ計算上便宜ノ爲メニ用井ル角ヲ補助角ト稱ス.

問 題 XXIII.

下ノ方程式ノ解ヲ求ム.  $(60+x) = 2n\pi + 30$  and what

(1)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1.$  (2)  $\sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3}.$

(3)  $\sin x - \cos x = 1.$  (4)  $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta - \sqrt{2} = 0.$

(5)  $2 \sin x + 5 \cos x = 2.$  [2.5 = tan 68° 12'.]

(6)  $3 \cos x - 8 \sin x = 3.$  [2.6 = tan 69° 26' 38''.]

(7)  $3 \cos x + 4 \sin x = 2.$  [ $\frac{4}{3} = \tan 53^\circ 8'$ ;  $\frac{2}{5} = \cos 66^\circ 25'$ .]

第 九 編

分 角

61.  $\cos A$  が與ヘラレタル時,  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  を得ルヲ.

範式 (xxiv) 即 
$$\begin{aligned} \cos A &= 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} \\ &= 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 \end{aligned}$$

ヨリ 
$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \text{ 及 } \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2},$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \text{ 及 } \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

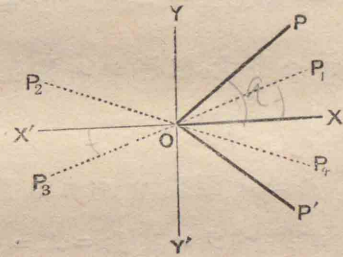
(xxxiv)

斯様ニ  $\cos A$  が與ヘラレタル時ハ  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  ニノ値有ル可キヲハ次節ニ説明ス.

62.  $\cos A$  ノミ與ヘラレタル時ハ  $\sin \frac{A}{2}$  及

$\cos \frac{A}{2}$  ハ何レモ二ツノ値有ル可キノ説明.

$\cos A$  ノ値ヲ  $\alpha$  トセヨ. 又第52節ノ作圖ニ依リ此角  $A$  ニ相當スル廻轉線ノ位置ヲ得之ヲ  $OP$  及  $OP'$  トセヨ.



$XOP$  ノ表ハス角ノ中, 最小ナル正角ヲ  $\alpha$  トセヨ. 又圖ニ於テ  $XOP_1 = P_2OX' = X'OP_3 = P_4OX = \frac{\alpha}{2}$  トセヨ. 然ル時ハ  $XOP$  ノ表ハス角ハ  $2n \times 180^\circ + \alpha$  (即  $\alpha, \pm 2 \times 180^\circ + \alpha, \pm 4 \times 180^\circ + \alpha, \dots$ ) ニシテ [第53節],

- $\alpha$  ノ半分ニ相當スル廻轉線ノ位置ハ  $OP_1$  ナリ;
- $\pm 2 \times 180^\circ + \alpha$  ノ半分ニ "  $OP_3$  "
- $\pm 4 \times 180^\circ + \alpha$  ノ半分ニ "  $OP_1$  "
- $\pm 6 \times 180^\circ + \alpha$  ノ半分ニ "  $OP_3$  "

.....  
故ニ  $XOP$  ノ表ハス角  $2n \times 180^\circ + \alpha$  ノ半分ニ相當スル廻轉線ノ位置ハ  $OP_1$  或ハ  $OP_3$  ナリ.

同様 =  $XOP'$  ノ表ハス角  $2n \times 180^\circ - \alpha$  ノ半分 = 相當スル廻轉線ノ位置ハ  $OP_2$  或ハ  $OP_4$  ナリ。而シテ

$$\sin XOP_1 = \sin XOP_2 = -\sin XOP_3 = -\sin XOP_4;$$

$$\cos XOP_1 = -\cos XOP_2 = -\cos XOP_3 = \cos XOP_4.$$

故 =  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  ハ各大、相等シク符號相反スルニ、ノ値有リ。

是 = 依テ前節ノ至ノ至當ナルヲ知ル可シ。

故 =  $\cos A$  ノミガ與ヘラレ其他 =  $A$  = 付テ何モ知レザルキハ  $\frac{A}{2}$  ノ正弦及餘弦ハ大、相等シク符號相反スルニ、ノ値ノ何レナルカハ決定スル能ハズ。

$\cos A$  ガ與ヘラレタルト  $A$  ガ與ヘラレタルトヲ混同ス可ラズ;  $A$  ガ與ヘラレタルキハ  $\frac{A}{2}$  ハ唯一、有リ、從テ  $\frac{A}{2}$  ノ正弦、餘弦、等ハ何レモ唯一、有ルノミ。

例題.  $A$  ガ  $-180^\circ$  乃至  $180^\circ$  ノ角ナレハ

$$\cos \frac{A}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \text{ ナリ; 然レモ, } \sin \frac{A}{2} \text{ ハ } +\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

ナルヲ有リ或ハ  $-\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$  ナルヲ有リ。

何トナレハ  $A$  ガ  $-180^\circ$  乃至  $180^\circ$  ナルヲ以テ  $\frac{A}{2}$  ハ

$-90^\circ$  乃至  $90^\circ$  ナリ、即  $\frac{A}{2}$  ハ第一象限或ハ第四象限 = 在リ; 故 = 餘弦ハ必ズ正 = シテ正弦ハ正或ハ負ナレハナリ。

## 問題 XXIV.

(1)  $A$  ガ  $180^\circ$  ト  $540^\circ$  ノ間 = 在ル角ナレハ、

$$\cos \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \text{ ナルヲ證明セヨ。}$$

(2)  $A$  ガ  $180^\circ$  ト  $360^\circ$  ノ間 = 在ルキ  $\cos A$  ナ用非テ  $\sin \frac{A}{2}$  ナ表ハス式ヲ問フ。

(3)  $\theta$  ガ  $4n \times 180^\circ$  ト  $(4n+2) \times 180^\circ$  ノ間 = 在リテ、 $n$  ガ正ノ完全數ナレハ、 $\sin \frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$  ナルヲ證明セヨ。

(4)  $A$  ガ  $(4n+1) \times 180^\circ$  ト  $(4n+3) \times 180^\circ$  ノ間 = 在リテ、 $n$  ガ正ノ完全數ナレハ、 $\cos A$  ナ用非テ  $\cos \frac{A}{2}$  ナ表ハセ。

63.  $\sin A$  ガ與ヘラレタルキ、 $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$

ヲ得ルヲ。

$$\text{公式 (xxiii) 即 } 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin A, \quad 2xy = a$$

$$\text{及公式 (iv) 即 } \sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

ヨリ寄セ算及引き算 = 依テ

$$\begin{aligned} 2xy &= a \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} &= 1 + \sin A, \\ \sin^2 \frac{A}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} &= 1 - \sin A. \end{aligned}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin A}, \\ \sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 - \sin A}, \end{aligned} \right\} \text{(xxxv)}$$

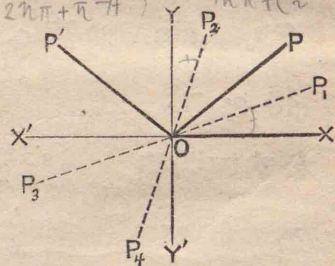
$$\therefore \left. \begin{aligned} 2 \sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin A} \pm \sqrt{1 - \sin A}, \\ 2 \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{1 + \sin A} \mp \sqrt{1 - \sin A}. \end{aligned} \right\} \text{(xxxvi)}$$

而シテ+ノ組合ハセニ依リ  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  ノ各四ノ値ヲ得; 次節ニ之ヲ説明ス。

**64.**  $\sin A$  ノミ與ヘラレタル  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  ハ何レモ四ノ値有ル可キノ説明。

$\sin A$  ノ値ヲ  $\alpha$  トセヨ。第50節ノ作圖ニ依リ此角  $A = n\pi + (-1)^m A$  相當スル廻轉線ノ位置ヲ得、 $(2n+1)\pi - A$  之ヲ  $OP$  及  $OP'$  トセヨ。

$XOP$  ノ表ハス角ノ中、最小ナル正角ヲ  $\alpha$  トセヨ。又圖ニ於テ  $XOP_1 = P_2 OY = X' O P_3 = P_4 OY' = \frac{\alpha}{2}$  トセヨ。然ル



作ハ、 $XOP$  ノ表ハス角  $2n \times 180^\circ + \alpha$  ノ半分ニ相當スル廻轉線ノ位置ハ  $OP_1$  或ハ  $OP_2$  ニシテ、 $XOP'$  ノ表ハス角  $(2n+1) \times 180^\circ - \alpha$  ノ半分ニ相當スル廻轉線ノ位置ハ  $OP_3$  或ハ  $OP_4$  ナリ。而シテ此四ノ位置ハ同シ正弦ヲ與ヘズ、又同シ餘弦ヲ與ヘズ。

故ニ前節ニ於テ  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  ニ各四ノ値ヲ得タルハ至當ノコトナリ。

例題.  $\frac{A}{2}$  ガ  $-45^\circ$  乃至  $45^\circ$  ナレハ下ノ如シ:

$$\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} = + \sqrt{1 + \sin A},$$

$$\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} = - \sqrt{1 - \sin A}.$$

何トナレハ  $\frac{A}{2}$  ガ  $-45^\circ$  乃至  $45^\circ$  ナレハ  $\cos \frac{A}{2}$  ハ  $\sin \frac{A}{2}$  ヨリ大ニシテ常ニ正ナリ、故ニ  $\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}$  ハ正ニシテ  $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}$  ハ負ナレハナリ

又  $\frac{A}{2}$  ガ  $45^\circ$  乃至  $135^\circ$  ナレハ下ノ如シ:

$$\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} = + \sqrt{1 + \sin A},$$

$$\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2} = + \sqrt{1 - \sin A}.$$

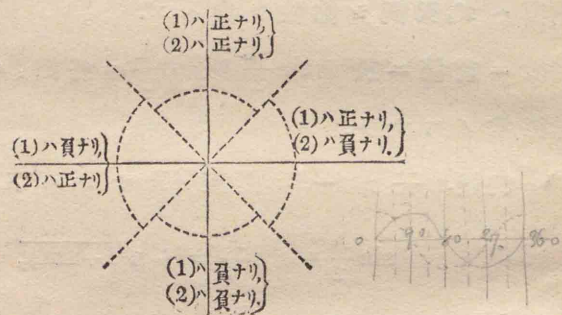
何トナレハ  $\frac{A}{2}$  ガ  $45^\circ$  乃至  $135^\circ$  ナレハ  $\sin \frac{A}{2}$  ハ  $\cos \frac{A}{2}$

已上ノ如ク、 $\sin A$  ノ値ヲ  $\alpha$  トセヨ。第50節ノ作圖ニ依リ此角  $A = n\pi + (-1)^m A$  相當スル廻轉線ノ位置ヲ得、 $(2n+1)\pi - A$  之ヲ  $OP$  及  $OP'$  トセヨ。而シテ此四ノ位置ハ同シ正弦ヲ與ヘズ、又同シ餘弦ヲ與ヘズ。故ニ前節ニ於テ  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  ニ各四ノ値ヲ得タルハ至當ノコトナリ。

ヨリ大ニシテ常ニ正ナリ, 故ニ  $\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}$  及  $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}$  ハ何レモ正ナレハナリ.

其他之ニ倣フ. (問題 XIX, (6) (7) ヲ参照セヨ.)

下ノ圖ハ前述ノ結果ヲ一目ノ下ニ明カナラシム.



此處ニ (1) ハ  $\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}$  ヲ指シ, (2) ハ  $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}$  ヲ指ス.

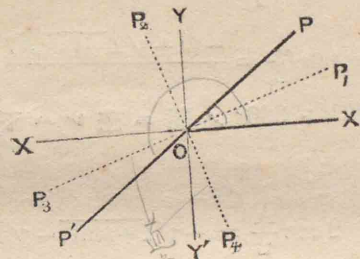
65. 公式 (xxv) 即  $\tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}}$  ヨリ  $\alpha = \frac{2x}{1-x^2}$

$$\tan^2 \frac{A}{2} + \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{\tan A} - 1 = 0.$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}. \quad (\text{xxxvii})$$

因テ  $\tan A$  ノミ與ヘラレタルルルハ  $\tan \frac{A}{2} = 2$  ノ値有リ, 一ハ正ニシテ一ハ負ナルヲ見ル: 學者宜シク

下ノ圖ニ就テ自ヲ之ヲ確ムヘシ



例題.  $A = 190^\circ$  ナレハ  $\tan \frac{A}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$  ヲ

證明セヨ

今  $A = 190^\circ$  ナルヲ以テ  $\frac{A}{2} = 95^\circ$  ナリ, 故ニ  $\tan A$  ハ正ニシテ  $\tan \frac{A}{2}$  ハ負ナリ. 因テ  $\tan \frac{A}{2}$  ヲ表ハス一般ノ式  $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 A}}{\tan A}$  ヲ負ナラシムルニハ其ノ複號ヲ負ト爲サザル可カラズ.

問 題 XXV.

(1)  $\frac{A}{2}$  ガ下ノ値ヲ取ルルル  $\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2}$  及  $\sin \frac{A}{2} - \cos \frac{A}{2}$

ノ符號ヲ問フ:

(イ)  $22^\circ$ , (ロ)  $191^\circ$ , (ハ)  $290^\circ$ , (ニ)  $345^\circ$ ,

(ホ)  $-22^\circ$ , (ヘ)  $-275^\circ$ , (ト)  $-470^\circ$ , (チ)  $1000^\circ$ .

(2)  $A = 160^\circ$  ナレバ下ニ記セル事項ヲ證明セヨ.

加計見  
 (1)  $2 \sin \frac{A}{2} = +\sqrt{1+\sin A} + \sqrt{1-\sin A}$

t34  
 (2)  $\tan \frac{A}{2} = \frac{-(1+\sqrt{1+\tan^2 A})}{\tan A}$

(3) A が 270° と 360° の間ニ在レハ下ニ記セル事項

ヲ證明セヨ:

言田  
 (1)  $2 \cos \frac{A}{2} = -\sqrt{1+\sin A} - \sqrt{1-\sin A}$

木  
 (2)  $\tan \frac{A}{2} = -\cot A + \operatorname{cosec} A$

(4)  $\tan A$  ノ値ガ與ヘラレタル時ハ  $\sin \frac{A}{2}$  及  $\cos \frac{A}{2}$  =

各四ノ値有ルヲ證明セヨ.

cos 18° 25'  $a^n$  logarithm

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

logarithm  

$$= \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$= \operatorname{cosec} A - \cot A$$

$a^x = n$   $x = \log_a n$

第十編

對數

66. 三角形ニ關スル問題ヲ解クニ要スル計算ヲ輕便ニセンニハ對數ヲ用弁ニル若クハナシ.

對數ノ事ハ學者既ニ代數學ニ於テ知了シタルナラント雖モ便宜ノ爲メ今其ノ大略ヲ述ヘン.

$a^x = n$  ナル時ハ  $x$  ハ  $a$  ヲ基トセル  $n$  ノ對數ナリ; 此事ヲ  $x = \log_a n$  ト記ス.

例ヘハ  $4^3 = 64$  ナリ, 故ニ 3 ハ 4 ヲ基トセル 64 ノ對數ナリ

對數ヲ通常「ロカリ」ト呼フ是レ原語 logarithm ノ略ナリ; 之ヲ其ノ訓讀ト見做シテ可ナラン.

問題 XXVI.

(1) 3 ヲ基トセル 81 ノ對數ヲ求ム.

3 81

$\frac{x}{3} = 81$

3<sup>4</sup> = 81

(2)  $\log_2 32, \log_5 125, \log_9 243, \log_{10} 8$  を求め

(3) 基ノ何タルニ係ラズ1ノ對數ハ0ナリ、又基ノ對數ハ1ナリ之ヲ證明セヨ。

67. 對數ヲ用弁ルノ利益ハ下ノ三條ニ基ツク。

I. 積ノ對數ハ其因數ノ對數ノ和ニ等シ。

$$\log_a m = x, \quad \log_a n = y$$

トスレハ  $a^x = m, \quad a^y = n;$

故ニ  $mn = a^x \times a^y = a^{x+y};$

$$\log_a mn = x + y$$

$$= \log_a m + \log_a n.$$

因數ガ幾ツアルモ同シ理ニ依テ

$$\log_a mnp \dots = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \dots$$

ナルヲ明ナリ。

因テ對數ヲ用キテ計算スルキハ掛ケ算ニ代フルニ寄セ算ヲ以テスルヲ得。

II. 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減シタル差ニ等シ。

Handwritten notes:  $\log_2 32 = 5$ ,  $\log_5 125 = 3$ ,  $\log_9 243 = 5/2$ ,  $\log_{10} 8 = 3 \times \log_{10} 2$

$$\log_a m = x, \quad \log_a n = y$$

トスレハ  $a^x = m, \quad a^y = n;$

故ニ  $\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$

$$\therefore \log_a \frac{m}{n} = x - y$$

$$= \log_a m - \log_a n.$$

因テ割リ算ニ代フルニ引キ算ヲ以テスルヲ得。

III. 一ノ數ノ冪ノ對數ハ其數ノ對數ト指數トノ積ニ等シ。

$$\log_a m = x$$

トスレハ  $a^x = m;$

故ニ  $m^k = (a^x)^k = a^{kx}$

$$\therefore \log_a m^k = kx$$

$$= k \cdot \log_a m.$$

因テ自乘及開方ニ代フルニ掛ケ算及割リ算ヲ以テスルヲ得。

例題.  $\log_{10} 2 = .30103, \log_{10} 3 = .47712, \log_{10} 7 = .84510$  を

與ヘテ  $\log_{10} 6, \log_{10} \frac{7}{3}, \log_{10} 243, \log_{10} \sqrt[3]{\frac{12}{7}}, \log_{10} 5$  を求め。

Handwritten notes:  $\log_{10} 2 + \log_{10} 3, \log_{10} 7 - \log_{10} 3$



$$\log_{10}6 = \log_{10}(2 \times 3) = \log_{10}2 + \log_{10}3 = \cdot30103 + \cdot47712 \\ = \cdot77815.$$

$$\log_{10}\frac{7}{3} = \log_{10}7 - \log_{10}3 = \cdot84510 - \cdot47712 = \cdot36798.$$

$$\log_{10}243 = \log_{10}3^5 = 5 \cdot \log_{10}3 = 5 \times \cdot47712 = 2\cdot38560.$$

$$\log_{10}\sqrt[3]{\frac{12}{7}} = \log_{10}\left(\frac{3 \times 4}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_{10}\frac{3 \times 2^2}{7} \\ = \frac{1}{3}(\log_{10}3 + 2\log_{10}2 - \log_{10}7) \\ = \frac{1}{3}\{\cdot47712 + (2 \times \cdot30103) - \cdot84510\} = \frac{1}{3} \times \cdot23408 \\ = \cdot07803.$$

$$\log_{10}5 = \log_{10}\frac{10}{2} = \log_{10}10 - \log_{10}2 = 1 - \cdot30103 = \cdot69897.$$

## 問 題 XXVII.

- (1)  $a$  を基とセル  $a^3, a^{\frac{10}{3}}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[3]{a^2}, \frac{1}{a^{\frac{5}{3}}}$  の對數ヲ求ム。
- (2) 4 を基とセル  $64, 8, \frac{1}{2}, \cdot0625, \sqrt[3]{16}$  の對數ヲ求ム。
- (3)  $\log_3\sqrt{27}, \log_5\cdot04, \log_{10}1000, \log_{100}\cdot001$  ヲ求ム。
- (4)  $\log_a a^{\frac{4}{3}}, \log_{10}^5/b^2, \log_{16}2, \log_{27}9$  ヲ求ム。
- (5)  $\log_{10}2 = \cdot30103, \log_{10}3 = \cdot47712, \log_{10}7 = \cdot84510$  ヲ與ヘテ下ニ記セル對數ヲ求ム。
- (イ)  $\log_{10}42.$  (ロ)  $\log_{10}140.$  (ハ)  $\log_{10}3600.$
- (ニ)  $\log_{10}5000.$  (ホ)  $\log_{10}7\cdot29.$  (ヘ)  $\log_{10}(6\cdot4 \div \sqrt[3]{21}).$

68. 數學ニ於テ用非ル對數ハ下ノ二種ナリ。

(甲) 無究級數  $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \dots$  ノ和即  $2\cdot7182818\dots$  ナ基トセル對數。之ヲ自然對數或ハ「ネピール對數」ト稱ス; 專ラ理論的ノ數學ニ於テ用非ルモノナリ。  
 $e$  字ヲ以テ此不盡數ヲ表ハスヲ常トス。\*

(乙) 10 ナ基トセル對數。之ヲ常用對數ト稱ス; 實地ノ計算ニ用非ルモノナリ; 以下本編ニ於テハ主トシテ之ヲ論ス。

## 常 用 對 數

69. 以後本書ニ於テ單ニ對數ト稱スルハ常用對數ノコト知ル可シ。故ニ之ヲ表ハス記號ニハ基ノ

\*此無窮級數ハ  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  ノ  $n = \infty$  ナルキノ極限ノ値ナリ。對數ノ發明者ハ蘇國ノ貴族「ネピール」氏ナリ。故ニ「ネピール對數」ノ名有リ。

10 ナルヲ特ニ記セズシテ單ニ  $\log$  ト記ス。

**70.**  $10^0 = 1$  ナルヲ以テ,  $\log 1 = 0$ .

$10^1 = 10$ ,  $10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1000$ , 等ナルヲ以テ,  $\log 10 = 1$ ,  $\log 100 = 2$ ,  $\log 1000 = 3$ , 等ナリ.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$10^{-1} = \cdot 1$ ,  $10^{-2} = \cdot 01$ ,  $10^{-3} = \cdot 001$ , 等ナルヲ以テ,  $\log \cdot 1 = -1$ ,  $\log \cdot 01 = -2$ ,  $\log \cdot 001 = -3$ , 等ナリ。

斯ノ如ク  $10^0 = 1$  ニシテ 10 ノ 整數冪ハ十, 百, 千, 萬, 等, 及  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{100}$ , 等ニ限レルヲ以テ, 其他ノ數ノ對數ハ皆不盡數ナリ。

對數ノ値ハ先聲已ニ精密ニ之ヲ計算シテ其ノ表ヲ作レリ (之ヲ作ル方法ノ如キハ本書ノ要旨ニ非ザルヲ以テ之ヲ略ス). 其表ノ用ヒ方ヲ學ブニハ先ツ以下述フル所ノ事項ヲ知ルヲ要ス。

**71.** 二ノ數ノ一, ガ他ノ數ニ 10 ノ 整數冪ヲ掛ケタル積ニ等シケレハ (即此二,

ノ數ハ互ニ同シ數字ヲ同シ順序ニ列シ唯小數點ノ位置ノミ異ナルモノナルキハ) 此二ノ數ノ對數ノ小數部分ハ同一ナリ。

何トナレハ此二ノ數ノ一ツヲ  $N$  トスレハ他ノ數ハ  $N \times 10^k$  ナリ ( $k$  ハ正或ハ負ノ完全數ナリ). 故ニ

$$\begin{aligned} \log(N \times 10^k) &= \log N + \log 10^k \\ &= \log N + k. \end{aligned}$$

例ヘハ  $\log 1.7692 = \cdot 24778$  ナレハ

$$\begin{aligned} \log 17.692 &= \log(1.7692 \times 10) = \log 1.7692 + 1 \\ &= \cdot 24778 + 1 = 1.24778. \end{aligned}$$

$$\log 17692 = \log(1.7692 \times 10^4) = 4.24778.$$

$$\log \cdot 0017692 = \log(1.7692 \times 10^{-3}) = -3 + \cdot 24778.$$

對數ノ小數部分ハ斯ノ如キ性質ノモノナルヲ以テ便利ノ爲メ對數ガ負ナル場合ニ於テモ其ノ小數部分ダケハ常ニ正數ナル様ニ記ス。

例ヘハ最後ノ例ニ於テ  $\log \cdot 0017692$  ヲ  $-2.75222$  トセザルナリ, 又之ヲ  $-3 + \cdot 24778$  ト記スルハ繁雜ナルヲ以テ通例略シテ  $\bar{3}.24778$  ト記ス。

對數ノ小數部分ヲ假數ト稱シ、整數部分ヲ指標ト稱ス。

**72.** 第70節ニ述ヘタル如ク  $\log 1 = 0$ ,  $\log 10 = 1$  ナルヲ以テ、1ト10トノ間ノ數ノ對數ハ0ト1ノ間ノ數(勿論不盡)即小數ナリ;

$\log 10 = 1$ ,  $\log 100 = 2$  ナルヲ以テ、10ト100ノ間ノ數ノ對數ハ1ト2ノ間ノ數即1+小數ナリ;

同様ニ100ト1000ノ間ノ數ノ對數ハ2+小數ナリ; 其他之ニ倣フ。

又  $\log 1 = 0$ ,  $\log \cdot 1 = -1$  ナルヲ以テ、1ト $\cdot 1$ ノ間ノ數ノ對數ハ0ト-1ノ間ノ數即-1+小數ナリ、  
 $\log \cdot 1 = -1$ ,  $\log \cdot 01 = -2$  ナルヲ以テ、 $\cdot 1$ ト $\cdot 01$ ノ間ノ數ノ對數ハ-1ト-2ノ間ノ數即-2+小數ナリ; 其他之ニ倣フ。

故ニ如何ナル數ニテモ其ノ對數ノ指標ハ其數ヲ一見シテ直ニ知ルヲ得: 即、

1ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ其數ノ整數部分ノ桁ノ數ヨリ1ダケ小ナリ。  
1ヨリ小ナル數ノ對數ノ指標ハ負數ニ

シテ其數ノ小數點下最初ノ有効數字(即零ニ非ル數字)マデノ0ノ數ヨリ1ダケ大ナリ。

### 問 題 XXVIII.

(1) 7963,  $\cdot 1$ ,  $2\cdot 61$ ,  $79\cdot 6341$ ,  $106000\cdot 00000079$ ノ對數ノ指標ヲ問フ。

(2) 對數ガ  $3\cdot 461$ ,  $\cdot 0213$ ,  $5\cdot 4712301$ ,  $2$ ,  $10$ ナル數ノ整數部分ノ桁數ヲ問フ。

(3) 對數ガ  $4\cdot 299$ ,  $\cdot 30406$ ,  $1\cdot 5860244$ ,  $3\cdot 17609$ ,  $1\cdot 3180633$ ,  $2\cdot 4980347$ ナル數ノ最初ノ有効數字ノ位置ヲ問フ。

(4)  $\log 2 = \cdot 30103$ . 依テ  $2^{18}$ ,  $8^{10}$ ,  $16^{50}$ ,  $2^{1\frac{1}{2}}$ ノ整數部分ノ桁數ヲ問フ。

**73.** 計算ノ際常ニ假數ノ正ナルニ注意ス可シ。

例題.  $\log 87142 = 4\cdot 94023$ .  $\cdot 087142$ ノ五乘冪及五乘根ノ對數ヲ求ム。

$$\begin{aligned} \log (\cdot 087142)^5 &= 5 \log (\cdot 087142) = 5 (2\cdot 94023) \\ &= 5 (-2 + \cdot 94023) = -10 + 4\cdot 70115 \end{aligned}$$

$$= \bar{6}.70115.$$

$$\log \sqrt[5]{.087142} = \frac{1}{5}(\bar{2}.94023) = \frac{1}{5}(-2 + .94023)$$

$$= \frac{1}{5}(-5 + 3.94023) = -1 + .78805$$

$$= \bar{1}.78805.$$

[本題ノ如ク負ノ指標ヲ有スル對數ヲ或ル數ニテ割ルニ當リテハ其指標ノ割リ切レル様ニ爲ス可シ]

## 問 題 XXIX.

3759 ノ對數ノ假數ハ 57507 ナリ,

4962           "           69566   "   ,

6726           "           82776   "   ;

下ニ記セル數ノ對數ヲ求ム.

(1)  $375.9 \times 49.62.$

(2)  $67.26 \div 3.759.$

(3)  $(4.962)^2 \div .06726.$

(4)  $37.59 \times (.004962)^3.$

(5)  $\sqrt[5]{.00006726}.$

(6)  $\sqrt[3]{.003759}.$

## 第 十 一 編.

## 對數及三角表ノ用并方.

74. 數ノ對數表, 圓函數ノ表及其ノ對數ノ表, 等ヲ編輯シタル書ノ世ニ行ハル、モノ少カラズ, 精ナルモノ有リ, 粗ナルモノアリ, 又其ノ小數部分ハ或ハ四桁ナル有リ或ハ五桁ナル有リ; 其他六桁, 七桁, 等ナル有リ.

計算ノ精密ナルニ從テ多キ桁數ノ表ヲ撰ハザル可ラズト雖モ通常ノ計算ニハ五桁ヲ以テ足レリトス.

卷末ニ數ノ對數表(五桁), 圓函數ノ對數表(五桁), 及圓函數ノ表(四桁)ヲ掲ク.\*

\* 卷末ノ表ハ學者ノ練習ノ爲メニ掲ゲタルモノニシテ紙數ノ少カラシキヲ圖リタルヲ以テ實地ノ使用上ニハ不便ナル點少カラズ. 對數計算ノ眞ノ利益ヲ悟リ之ニ熟達セント欲スル者ハ宜シクガウス氏ノ表或ハ之ニ類スル完全ナル表ヲ用ルヘシ.

75. 前編ニ於テ論シタル如ク如何ナル數ニテモ其ノ對數ノ指標ハ其數ヲ一見シテ知り得可キヲ以テ數ノ對數表ニハ指標ヲ省キ唯假數ノミヲ記セリ。故ニ與ラレタル數ノ對數ヲ得ント欲セハ先ツ第72節ニ依リ指標ヲ知り而シテ表中ヨリ假數ヲ見出ス可シ。

例題1. 176200ノ對數ヲ求ム。

此數ノ整數部分ハ6桁ナルヲ以テ指標ハ5ナリ。而シテ表ニ依リ1762ニ對スル假數ハ24601ナリ。故ニ

$$\log 176200 = 5.24601.$$

例題2. .00007ノ對數ヲ求ム。

此數ハ小數ニシテ小數點下初メノ有効數字マデノ0ノ數ハ4ナルヲ以テ指標ハ-5ナリ。而シテ表ニ依リ7或ハ700ニ對スル假數ハ84510ナリ。故ニ

$$\log .00007 = \bar{5}.84510.$$

76. 表中ニ載セザル數ノ對數ヲ得ルヲ。

例ヘハ83.524ノ對數ヲ求ム。

表ニ於テ最近ク之ヲ夾ム所ノ二ノ數ノ對數ハ下ノ如シ:

$$\begin{array}{rcl} \log 83.5 & = & 1.92169 \\ \log 83.6 & = & 1.92221 \\ \hline & & .00052 \\ & \cdot 1 & \end{array}$$

今此二ノ數ノ差ハ.1ニシテ對數ノ差ハ.00052ナリ。即數ニ於テ.1ダケ増スルハ其ノ對數ニ於テ.00052ダケ増スヲ見ル。然ルニ與ヘラレタル數ハ83.524ナルヲ以テ83.5ヨリ大ナルヲ.024ナリ。對數ノ増シハ數ノ増シニ正シク比例スルモノニ非ザレバ増シガ甚ダ少ナルヲハ之ヲ比例スルモノト見做シ、比例

$$.1 : .024 :: .00052 : x$$

ニ依リ

$$x = \frac{.024 \times .00052}{.1} = .0001248$$

ヲ得、以テ數ノ増シ.024ニ對スル對數ノ増シトス。

故ニ

1.9217  
1.92182

$$\begin{aligned}\log 83.524 &= 1.92169 + .00012^* \\ &= 1.92181.\end{aligned}$$

此算法ノ要點ヲ短ク述フレハ下ノ如シ:

三ノ數有リ;其ノ差ガ其數ニ比較シテ甚ダ小ナルキハ數ノ差ト其ノ對數ノ差ハ比例スルモノトス。

之ヲ比例部分ノ定則ト稱ス。

此定則ハ嚴正ニ眞ナルモノニアラズト雖モ表ハ何レモ之ヲ作ル際ニ數ノ桁數ト對數ノ桁數トヲ適當ニ整理セルヲ以テ實地ノ計算ニハ此定則ニ從ヒ前述ノ如クスルモ誤リ無キナリ。

**77.** 與ヘラレタル數ノ對數ヲ求ムル例題及與ヘラレタル對數ニ對スル數ヲ求ムル例題ヲ次ニ掲ク。

\*1.92169ガ小數點下五桁ノ近似數ナルヲ以テ之ニ加フ可キ數.0001248モ小數點下五桁ノ近似數ト爲ス可シ。

然ルニ初學者ハ往々 1.92169 = .0001248ヲ加ヘテ

$$\log 83.524 = 1.9218148$$

ナドハ書クコアリ。是レ近似計算ノ何タルヲ知ラザルノ所爲ニシテ甚ダ不都合ナリ。

例題 1. 112.47ノ對數ヲ求ム。

表中最近ク之ヲ夾ムニッノ數ノ對數ヲ探シ出シ以テ之ヲ比較スルコト下ノ如シ:

$$\log 112.4 = 2.05077,$$

$$\log 112.47 = 2.05077 + x,$$

$$\log 112.5 = 2.05115.$$

(比例部分ノ計算ニ於テ零ヲ澤山書クコトヲ避ケンガ爲メニ、比例ヲ作ルニ際シ、對數ノ末位ヲ一ノ位ト見做シテ計算スルヲ常トス。)

$$\therefore 1 : .07 :: 38 : x.$$

$$\therefore x = \frac{.07 \times 38}{1} = 26.6.$$

$$\begin{aligned}\therefore \log 112.47 &= \left( \begin{array}{l} 2.05077 \\ +27 \end{array} \right) \\ &= 2.05104.\end{aligned}$$

附言。表中ニ比例部分又ハ P.P. (proportional parts)ノ略ト記セル欄有リテ比例部分ノ計算ニ便利ヲ與フルモノ有リ。(卷末ノ表ニ於テ第 iii 及 iv 丁ニハ之ヲ掲ケ其他ハ皆之ヲ略シタリ: 是レ學者ニ種々ノ摸範ヲ示サンガ爲メナリ。) 此欄ハ差ニ .1, .2, .3, . . . .9ヲ掛ケタル積ナリ。故ニ例ヘハ .7×38ヲ得ント欲セ

ハ上ニ38ト記セル行ニ於テ左傍ニ7ト記セル處ヲ探ス可シ; 即26.6ヲ得、是レ7ト38トノ積ナリ。

例題2. 對數ガ1.08166ナル數ヲ求ム

假數08166ハ表中ニ在ラザルヲ以テ先ツ表中最近ク之ヲ夾ムニ、ノ對數ニ對スル數ヲ探シ出シ以テ之ヲ比較スルヲ下ノ如シ

$$1.08135 = \log 12.06,$$

$$1.08166 = \log (12.06 + x),$$

$$1.08171 = \log 12.07.$$

$$\therefore 36 : 31 :: .01 : x.$$

$$\therefore x = \frac{31 \times .01}{36} = .0086.$$

$$\therefore 1.08166 = \log 12.069.*$$

附言. 此場合ニ於テ亦比例部分欄ヲ利用スルヲ得. 上ニ36ト記セル行ニ於テ差31ニ最モ近キ數32.4ノ左傍ノ數字9ヲ取レ; 但シ其ノ位ハ表ノ數ノ終リノ桁ヲ十ノ位ト見做シタル者ナリ. 故ニ之ヲ前ノ數

\*五桁ノ對數表ヲ用井ルルハ對數ニ對スル數モ有効部分ヲ五桁ニ切り縮ムヘシ. 是レ有効部分六桁以上ヲ見出ストモ其ノ末ノ桁ハ信ヲ置クニ足ラザレハナリ.

12.06ニ附記シテ12.069ヲ得テ答トス.

例題3. 對數ガ1.78708ナル數ヲ求ム.

前ノ例題ノ如ク表ヨリ,

$$1.78675 = \log .612,$$

$$1.78708 = \log (.612 + x),$$

$$1.78746 = \log .613.$$

$$\therefore 71 : 33 :: .001 : x.$$

$$\therefore x = \frac{33 \times .001}{71} = .00046.$$

$$\therefore 1.78708 = \log .61246.$$

### 問 題 XXX.

- (1)  $\log 2.907 = .46345$   
 $\log 2.908 = .46359$  } ヲ與ヘテ  $\log 290.73$  及  $\log .0029073$  ヲ求ム.
- (2)  $\log 4012 = 3.60336$   
 $\log 4013 = 3.60347$  } ヲ與ヘテ對數ガ1.60338及4.60343ナル數ヲ求ム.
- (3)  $\log 63095 = 4.7999949$   
 $\log 63096 = 4.8000018$  } ヲ與ヘテ  $\log 630.9532$  及  $\log 6309581$  ヲ求ム.
- (4)  $\log 2.4183 = .3835102$   
 $\log 2.4184 = .3835281$  } ヲ與ヘテ對數ガ4.3835270

及  $\sqrt{3335196}$  ナル數ヲ求ム.

(以下卷末ノ表ヲ用非ヨ.)

(5) 12038, 350940, 82316 ノ對數ヲ求ム.

(6) 對數ガ .07280, 4.27052, 3.99453 ナル數ヲ求ム.

**78.** 對數ニハ前編ニ述ヘタル種々ノ性質有ルヲ以テ對數表ニ依頼シテ計算ノ手數ヲ省クヲ得.

例題 1.  $6294 = 3762$  ノ二乗根ヲ掛ク、其積ヲ 9236 ニテ割リタル商ヲ求ム

$$\begin{aligned} \text{表ヨリ} \quad \log 6294 &= 3.79893, \\ \log 3762 &= 3.57542, \\ \log 9236 &= 3.96548. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \frac{6294 \times \sqrt{3762}}{9236} &= \log 6294 + \frac{1}{2} \log 3762 - \log 9236 \\ &= 3.79893 + 1.78771 - 3.96548 \\ &= 1.62116. \end{aligned}$$

又表ヨリ對數ガ 1.62116 ナル數ハ 41.798 ナルヲ知ル

$$\text{故ニ} \quad \frac{6294 \times \sqrt{3762}}{9236} = 41.798. \quad (\text{但シ近似數ナリ})$$

例題 2.  $\left(\frac{\sqrt[3]{.02537} \times .07684}{.32945}\right)^2$  ノ値ヲ求ム.

$$\begin{aligned} \text{表ヨリ} \quad \log .02537 &= \bar{2}.40432, \\ \log .07684 &= \bar{2}.88559, \\ \log .32945 &= \bar{1}.51779. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad \log \sqrt[3]{.02537} &= \frac{1}{3}(\bar{2}.40432) = \frac{1}{3}(-3 + 1.40432) \\ &= \bar{1}.46811. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \text{之ニ} \quad \bar{2}.88559 \quad \text{ヲ加フレハ} \\ \hline \bar{2}.35370 \quad \text{ヲ得.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{之ヨリ} \quad \bar{1}.51779 \quad \text{ヲ引ケハ} \\ \hline \bar{2}.83591 \quad \text{ヲ得.} \end{array}$$

之ニ 2 ヲ掛クレハ  $\bar{3}.67182$  ヲ得.

而シテ表ヨリ對數ガ  $\bar{3}.67182$  ナル數ハ .0046970 ナルヲ知ル. 是レ要スル所ノ數ナリ.

例題 3. 金 150 圓ヲ年 5 分ノ複利法ニテ 8 年間貸スルハ元利合計幾何?

1 年間ノ元利合計ハ 150 圓  $= \frac{105}{100}$  即  $\frac{21}{20}$  ヲ掛クタル積ナリ. 同様ニ 2 年間ノ元利合計ハ  $\left(150 \times \frac{21}{20}\right) \times \frac{21}{20}$  圓ナリ. 故ニ 8 年間ノ元利合計ヲ  $x$  圓トスレハ

$$x = 150 \times \left(\frac{21}{20}\right)^8;$$

$$\therefore \log x = \log 150 + 8(\log 21 - \log 20)$$



$$= 2.17609 + 8(1.32222 - 1.30103)$$

$$= 2.34561$$

$$= \log 221.62.$$

故ニ要スル所ノ元利合計ハ 221.62 圓ナリ。

例題 4. 年 5 分ノ複利法ニテ貸シタル金ハ幾年ニシテ元金ノ二倍トナルカ?

要スル所ノ年數ヲ  $x$  トセヨ。然ルルハ

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x = 2;$$

$$\therefore x(\log 21 - \log 20) = \log 2,$$

$$\therefore x = \frac{.30103}{.02119} = 14.2.$$

答 14 年餘。

### 問 題 XXXI.

(1)  $\sqrt[3]{2713}$  ノ値ヲ求ム。

(2)  $25^x = 421$  ノ解ヲ求ム。

(3) 圓筒ノ容積ハ  $\pi \times (\text{底ノ半徑})^2 \times (\text{高})$  ナリ。底ノ半徑 1.875 寸, 高 15.27 寸ノ圓筒中ニ 1 立方センチメートルノ重ガ 13.596 グラムナル水銀ヲ滿セリ。此水銀ノ重ヲ求ム。

大々  
 (4) 金二千五百圓ヲ年四分ノ複利法ニテ十年間貸スルハ利息幾何?

(5) 年六分ノ複利法ニテ貸シタル金ハ幾年ニシテ元金ノ三倍トナルカ?

79. 比例部分ノ規則ハ角ト其ノ圓函數ノ場合ニモ適用ス可ク, 故ニ又角ト其ノ圓函數ノ對數ノ場合ニモ適用ス可キモノトス。

$90^\circ$ ノ正弦及  $0^\circ$ ノ餘弦ハ 1 ナレド其他ノ正弦及餘弦ハ 1 ヨリ小ナリ, 又正切及餘切ニ於テモ 1 ヨリ小ナル者アリ, 故ニ此等ノ對數ノ指標ハ負ナリ。

表中ニ負數ノ混スルハ不便ナリ。之ヲ避ケンガ爲メニ圓函數ノ對數ニ盡ク 10 ヲ加ヘテ記セリ。\* 例ヘバ  $37^\circ 50'$ ノ正弦ノ對數ハ  $\bar{1}.78772$  即  $9.78772 - 10$  ナレド表ニハ唯  $9.78772$  ト記ス。故ニ之ヲ用キルニ當リテ必ず先ツ 10 ヲ減ス可シ。(但シ之ヲ爲スニハ

\* 但シ正數ナル對數ニハ 10 ヲ加ヘザル表アリ; 卷末ノ表即然リ。

唯  $-10$  ヲ其ノ後ニ附記スルニテ足レリ; 例題 2, 3 ノ如シ。若シ  $-10$  ヲ附記セザルキハ區別ノ爲メ  $\log \sin$  ト記ス代リニ  $L \sin$  ト記ス; 例題 4 ヲ見ヨ。

例題 1.  $\sin 34^\circ 43'$  ヲ求ム。

先ツ表中最近ク此角ヲ夾ム二ツノ角ノ正弦ヲ探シ出シ以テ之ヲ比較スル下ノ如シ

$$\sin 34^\circ 40' = 0.5688,$$

$$\sin 34^\circ 43' = 0.5688 + x,$$

$$\sin 34^\circ 50' = 0.5712.$$

$$\therefore 10' : 3' :: 24 : x; \quad x = \frac{3 \times 24}{10} = 7.2.$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 34^\circ 43' &= \left( \begin{array}{c} 0.5688 \\ +7 \end{array} \right) \\ &= 0.5695. \end{aligned}$$

例題 2.  $\log \cos 48^\circ 16' 52''$  ヲ求ム。

$$\log \cos 48^\circ 10' = 9.82410 - 10, \quad [\text{表 } \text{ヨ.}]$$

$$\log \cos 48^\circ 16' 52'' = 9.82410 - 10 - x,$$

$$\log \cos 48^\circ 20' = 9.82269 - 10. \quad [\text{表 } \text{ヨ.}]$$

$$\therefore 10' : 6' 52'' :: 141 : x; \quad x = \frac{412 \times 141}{600} = 96.82.$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \cos 48^\circ 16' 52'' &= \left( \begin{array}{c} 9.82410 - 10 \\ -97 \end{array} \right) \\ &= 9.82313 - 10. \end{aligned}$$

例題 3. 正弦ノ對數ガ  $9.50102 - 10$  ナル角ヲ求ム。

$$9.49958 - 10 = \log \sin 18^\circ 25',$$

$$9.50102 - 10 = \log \sin (18^\circ 25' + x),$$

$$9.50148 - 10 = \log \sin 18^\circ 30'$$

$$\therefore 190 : 144 :: 5' : x; \quad x = \frac{144 \times 5'}{190} = 3' 47''.$$

$$\therefore 9.50102 - 10 = \log \sin 18^\circ 28' 47''.$$

例題 4.  $L \cot 52^\circ 44' = 9.8813144$   
 $L \cot 52^\circ 45' = 9.8810522$  } ヲ與ヘ餘切ノ對

數ガ  $1.8812339$  ナル角ヲ求ム。

$$9.8813144 = L \cot 52^\circ 44',$$

$$9.8812339 = L \cot (52^\circ 44' + x),$$

$$9.8810522 = L \cot 52^\circ 45'.$$

$$\therefore 2622 : 805 :: 60'' : x; \quad x = \frac{805 \times 60''}{2622} = 18''.4.$$

$$\therefore 1.8812339 = \log \cot 52^\circ 44' 18''.4.$$

附言. 以上ノ例題ニ於テ殊ニ注意ス可キ要目ヲ摘出スレハ次ノ如シ。

角ヲ與ヘ正弦, 正切或ハ其ノ對數ヲ求ムル場合ニハ表中之ヲ夾ム二ツノ角ノ中, 小サキ角ノ正弦, 正切或ハ其ノ對數ニ比例部分ヲ加フ可シ; 餘弦, 餘切或ハ其ノ

對數ヲ求ムル場合ニハ小サキ角ノ餘弦、餘切或ハ其ノ對數ヨリ比例部分ヲ引ク可シ。

圓函數或ハ其ノ對數ヲ與ヘテ之ニ適スル角ヲ求ムル場合ニハ先ツ表中之ヲ夾ム二ツノ角ノ中、小サキ角ノ函數或ハ其ノ對數ト與ヘラレタル數トノ差ヲ見出セ、而シテ此差ニ據テ比例部分ヲ計算シ、之ヲ小サキ角ニ加フ可シ。

前ノ例題ニハ一々三數ヲ列記シテ差ヲ求ムルヲトセリ。然レハ表中ノ二數ノ差ハ表中ニ記セリ；故ニ學者退々表ニ慣レテ表ノ組織、差ノ増減等ヲ充分ニ理解スルニ至リタルハ前ニ述ヘタル所ニ從ヒ必要ナル一數及差ノミヲ表ヨリ寫シ取リテ計算スルヲニ慣ル、ルヲ宜シトス。

例ヘハ 39° 24' 30'' ノ餘弦ノ對數ヲ得ント欲セハ：

log cos 39° 20' = 9.88844 - 10; 10'ノ差 103. [表ヨリ]

4' 30''ノ爲メニ	-46	10.3
		4.5
∴ log cos 39° 24' 30''	= 9.88798 - 10	515
		412
		46.35

又正弦ノ對數ガ 9.63747 - 10 ナル角ヲ得ント欲セハ：

log sin X = 7.0998  
 7° 10'

433.7	2.6372	7
433.7	6.365	
	3.5374	(+)

7

9.63662 - 10 = log sin 25° 40'; 10'ノ差 262. [表ヨリ]

9.63747 - 10	262) 850 (3' 14"
85	786
	5
	64
	× 60
9.63747 - 10 = log sin (25° 40' + 3' 15")	3840
	262
	1220
= log sin 25° 43' 15"	1048
	172

問 題 XXXII.

- (1) sin 32° 53'ヲ求ム。 (2) cos 45° 26' 7"ヲ求ム。
- (3) tan 62° 31' 15"ヲ求ム。 (4) sin A = .3156. Aヲ求ム。
- (5) cot A = 1.0130. Aヲ求ム。 *log sin 3° = 2.7188*
- (6) log sin 40° 6'ヲ求ム。 *log 180° = 2.2553*
- (7) log cot 27° 13' 24"ヲ求ム。 *4.4635*
- (8) log tan A = .12051. Aヲ求ム。 *2.7188*
- (9) L cos A = 9.31687. Aヲ求ム。 *log tan 5° = 8.00*
- (10) log sec 72° 36' 25"ヲ求ム。 *log 300 = 2.4771*
- (11) L sin 1° 26' = 8.39818 } *4.4648*  
 L sin 1° 26' 30" = 8.40070 } *2.9419*  
 }ヲ與ヘテ log sin 1° 26' 17"ヲ求ム

ヲ求ム

*sin 7° 13.7 = 433.7*

log 433.7 = 2.6365	7
2.6372	
4.4626 (+)	
7.0998	

log sin 7° 13.7

$$\left. \begin{aligned} (12) \log \tan 35^\circ 4' &= \bar{1}.8463018 \\ \log \tan 35^\circ 5' &= \bar{1}.8465705 \end{aligned} \right\} \text{ヲ與へ } \log \tan 35^\circ 4' 32'' \cdot 2$$

ヲ求ム。

80. 對數表ニヨリテ直角三角形ヲ解クヲ。

例題 1. 直角三角形ニ於テ二ノ邊ハ 864.1 尺及 1579.2 尺ナリ。二ノ銳角及斜邊ヲ求ム。

$a, b, c$  ヲ夫々角  $A, B, C$  ノ對邊ノ

長トセヨ。然ルルハ

$$a = 864.1 \text{ 尺,}$$

$$b = 1579.2 \text{ 尺.}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned} \log \tan A &= \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \\ &= \log 864.1 - \log 1579.2. \end{aligned}$$

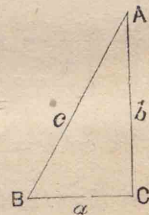
表ヨリ  $\log 864.1 = 2.93656$

又  $\log 1579.2 = 3.19844$

$$\therefore \log \tan A = 9.73812 - 10.$$

故ニ表ヨリ  $A = 28^\circ 41' 10''$ ;

$$\therefore B = 90^\circ - A = 61^\circ 18' 50''.$$



$a^2 + b^2$  ノ平方根ヲ取レハ是レ即  $c$  ナリ。然レモ次ノ如ク對數ヲ利用シテ  $c$  ヲ見出スヲ得:

$$\frac{a}{c} = \sin A.$$

$$\log c = \log a - \log \sin A,$$

$$= \log 864.1 - \log \sin 28^\circ 41' 10''.$$

表ヨリ  $\log 864.1 = 2.93656$

表ヨリ  $\log \sin 28^\circ 41' 10'' = 9.68125 - 10$

$$\therefore \log c = 3.25531.$$

故ニ表ヨリ  $c = 1800.2.$

即斜邊ハ 1800.2 尺ナリ。

注意. 唯  $c$  ノミヲ要スル場合ニテモ  $a, b$  ノ桁數が多キルハ  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  ニ依ルヨリモ此例題ニ於ケル如ク對數ヲ利用シテ先ツ  $A$  ヲ見出シ而シテ更ニ  $A$  ニ依テ  $c$  ヲ見出スヲ便利ナリトス。

然レモ斜邊及一ノ邊ヲ與ヘテ、他ノ邊ヲ求ムル場合ニ於テハ直ニ對數ヲ利用スルヲ得: 次ノ例題ニ詳ナリ。

例題 2.  $c = 310.67$  間,  $a = 231.81$  間,  $C = 90^\circ$  ナリ。  $b$  ヲ求ム。

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a)(c-a)}$$

$$\therefore \log b = \frac{1}{2} \{ \log(c+a) + \log(c-a) \}$$

今  $c+a = 542.48$ ,  $c-a = 78.86$ .

$$\log(c+a) = 2.73438$$

$$\log(c-a) = 1.89686$$

$$\hline 2) 4.63124$$

$$\log b = 2.31562.$$

$$b = 206.83 \text{ 間.}$$

例題 3.  $A = 42^\circ 15'$ ,  $b = 314.3$  尺,  $C = 90^\circ$ .  $c$  を求む.

$$c = \frac{b}{\cos A}, \therefore \log c = \log b - \log \cos A.$$

$$\log b = 2.49734$$

$$\log \cos A = 9.86936 - 10$$

$$\hline \log c = 2.62798.$$

$$\therefore c = 424.6 \text{ 尺.}$$

問 題 XXXIII.

(1)  $C = 90^\circ$ ,  $c = 934$  尺,  $a = 257$  尺.  $b$  を求む.

(2)  $C = 90^\circ$ ,  $A = 34^\circ 15'$ ,  $a = 843.2$  尺.  $c$  を求む.

(3)  $C = 90^\circ$ ,  $a = 132.7$  間,  $b = 261.9$  間.  $A, B$  を求む.

(4)  $C = 90^\circ$ ,  $A = 18^\circ 47'$ ,  $b = 169.4$  間.  $a$  を求む.

(5)  $C = 90^\circ$ ,  $B = 32^\circ 41' 54''$ ,  $c = 314.08$  メートル.  $b$  を求む.

(6) 高さ 162 尺ノ塔ノ影ガ 129 尺ナルキ太陽ノ仰角ヲ求む.

(7) 高さ 125 英尺ノ橋ヲ有スル二ノ船ガ相伴ヒテ航海スルニ當リ半英里ノ距離ヲ保チテ走ランヲ欲セハ各他ノ橋頂ヲ何度ノ仰角ニ見ル可キカ?

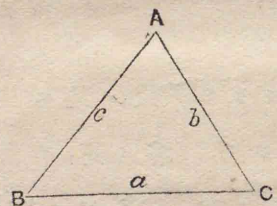
(8)  $A, B, C$  ハ直道上ニ列ヘル三ノ一里塚ナリ.  $P$  ハ  $APB$  及  $BPC$  ガ何レモ  $35^\circ$  ナル點ナリ.  $AP$  ノ距離ヲ求む.

(9) 塔ノ基礎ヨリ 247 尺ノ地ニ於テ塔頂ノ仰角ヲ測リ  $23^\circ 45'$  ヲ得タリ. 塔ノ高ヲ問フ. 又角ヲ測ル際,  $1'$  ノ誤リガ塔ノ高ニ及ボス影響ヲ問フ.

## 第 十 二 編.

## 三 角 形 ノ 角 及 邊 ノ 關 係 .

81. 三 角 形 ノ 角 及 邊 ナ 其 ノ 原 素 ト 稱 ス  
三 角 形 ノ 角 ナ 表 ハ ス  $= A, B, C$  ナ 以 テ  
シ、之  $=$  對 ス ル 邊 ナ 夫 々  $a, b, c$  ト ス.



82. 三 角 形 ノ 三 ノ 角 ノ 和 ハ 二 直 角  
 $=$  等 シ [幾 I, 13]

即  $A+B+C = 180^\circ$ . (xxxviii)

因 テ 三 角 形 ノ 一 ノ 角 ハ  $0^\circ$  ト  $180^\circ$  ノ 間 ノ  
角 ナ リ、故  $=$

- (イ) 其 ノ 正 弦 ハ 常  $=$  正 ナ リ;  
 (ロ) 其 ノ 餘 弦 ハ 正 或 ハ 負 ナ リ;  
 (ハ) 其 ノ 正 切 ハ 正 或 ハ 負 ナ リ;  
 (ニ) 其 ノ 正 弦 ガ 與 ヘ ラ レ タ ル キ ハ 之  
 $=$  適 ス ル 角 ハ 二、ア リ テ 互  $=$  補 角  
 ナ リ、故  $=$  其 ノ 一 ハ  $0^\circ$  ト  $90^\circ$  ノ 間  
 ノ 角  $=$  シ テ 他 ノ 一 ハ  $90^\circ$  ト  $180^\circ$  ノ  
 間 ノ 角 ナ リ;  
 (ホ) 其 ノ 餘 弦 或 ハ 正 切 ガ 與 ヘ ラ レ タ ル  
 キ ハ 之  $=$  適 ス ル 角 ハ 唯 一、ア リ.

又 三 角 形 ノ 一 ノ 角 ノ 半 分 ハ  $90^\circ$  ヨ リ 小  
 ナ リ、故  $=$

- (ヘ) 其 ノ 圓 函 數 ハ 常  $=$  正 ナ リ;  
 (ト) 其 ノ 圓 函 數 ガ 與 ヘ ラ レ タ ル キ ハ  
 角 ノ 値 ハ 唯 一、ア リ.

例 題.  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$  ナ 證

明 セ 日.

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \quad [S, T \text{ 式 = 由 } \vee.]$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}. \quad [(xxxviii) = \text{由 } \vee.]$$

$$\text{而シテ} \quad \sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \quad [(xxiii) = \text{由 } \vee.]$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}. \quad [(xxxviii) = \text{由 } \vee.]$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \left( 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \right) \quad [S, T \text{ 式 = 由 } \vee.]$$

$$= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

## 問 題 XXXIV.

A, B, C ハ一ノ三角形ノ角ナリ; 下式ヲ證明セヨ.

$$(1) \sin(A+B) = \sin C. \quad (2) \cos(A+B-C) = -\cos 2C.$$

$$(3) \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A-B}{2}. \quad \cos(A+B-C) = -\cos(\pi - (A+B-C))$$

$$(4) \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

$$(5) \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\ = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}.$$

$$(6) \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$(7) \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} - \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

$$(8) \sin \frac{B+C-A}{2} + \sin \frac{C+A-B}{2} + \sin \frac{A+B-C}{2} - 1 \\ = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

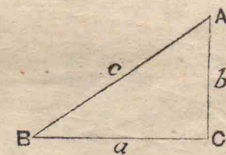
$$(9) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

$$(10) \sin(B+C-A) - \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) \\ = 4 \cos A \cdot \sin B \cdot \cos C.$$

$$(11) \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2 \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

83. ABC ガ  $C=90^\circ$  ナル直角三角形ナ

レハ  $A+B=90^\circ$  ナリ.



因テ  $\sin A = \sin(90^\circ - B) = \cos B.$

又  $\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$ ; 等. [問題 II (7) ヲ見ヨ]

(xxxix)

問 題 XXXV.

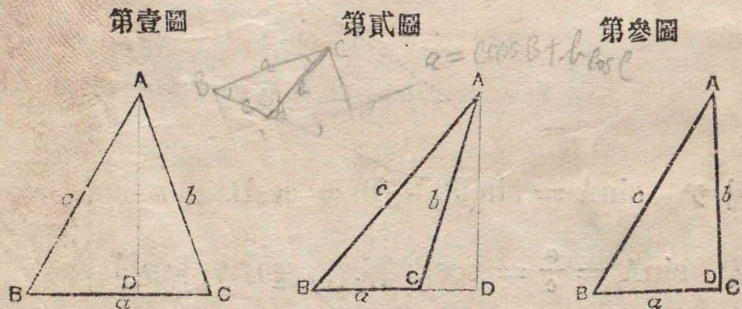
C = 90° ナル 直角三角形 ABC = 於テ下ニ記セル事  
項ヲ證明セヨ.

- (1)  $\sin 2A = \sin 2B$ . (2)  $\sin(A-B) + \cos 2A = 0$ .  
 (3)  $\sin 2A = \frac{2ab}{c^2}$ . (4)  $\cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$ .  
 (5)  $\cos \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2c}$ . (6)  $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c-a}{2c}$ .  
 (7)  $\frac{a-b}{a+b} = \tan \frac{A-B}{2}$ . (8)  $\frac{c-a}{b} = \tan \frac{B}{2}$ .

84.  $a = b \cos C + c \cos B$ . (x1)

三角形ノ一ノ角ノ頂點Aヨリ之ニ對スル邊BC(或ハ其ノ延長)ニ垂線ADヲ引ク.

是ニハ三ノ場合アリ: 第壹圖ハB及Cガ銳角ナル  
場合, 第貳圖ハ其ノ一(C)ガ鈍角ナル場合, 第參圖ハ其  
ノ一(C)ガ直角ナル場合ヲ示ス.



第壹圖:  $BD = c \cos B$  及  $DC = b \cos C$ ,

$\therefore a = BD + DC = c \cos B + b \cos C$ .

第貳圖:  $BD = c \cos B$

及  $CD = b \cos ACD = b \cos(180^\circ - C)$ ,

$\therefore a = BD - CD = c \cos B - b \cos(180^\circ - C)$   
 $= c \cos B + b \cos C$ .

第參圖:  $a = c \cos B$ ,

$= c \cos B + b \cos C$ . [ $\because \cos C = \cos 90^\circ = 0$ .]

同様ニ  $b = c \cos A + a \cos C$  及  $c = a \cos B + b \cos A$  ヲ  
證明スルヲ得.

85. 三角形ノ邊ハ之ニ對スル角ノ正  
弦ニ比例ス.

即  $a : b : c :: \sin A : \sin B : \sin C$ ,

即  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ . (xli)

Aヨリ之ニ對スル邊BC(或ハ其ノ延長)ニ垂線AD  
ヲ引ク(前節ノ圖ヲ用ル).

第壹圖:  $AD = c \sin B$ , 又  $AD = b \sin C$ ,

$\therefore b \sin C = c \sin B$ ,  $\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .



第貳圖:  $AD = c \sin B,$

又  $AD = b \sin ACD = b \sin (180^\circ - C) = b \sin C,$

$\therefore b \sin C = c \sin B, \quad \therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

第參圖:  $b = c \sin B,$

$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad [\because \sin C = \sin 90^\circ = 1.]$

同様 =  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$  ヲ得.

故 =  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

[此分數ハ何レモ三角形ノ外接圓ノ直径ノ長ニ等シ;

第108節ヲ見ヨ.]

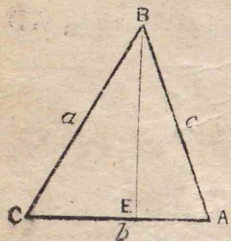
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$   
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

**86.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad (xlii)$

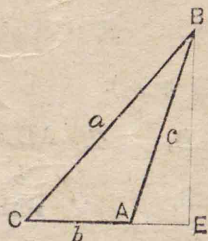
Aガ鋭角、鈍角或ハ直角ナルカニ從テ圖ノ如ク三ノ場合有リ.

$a = c \cos B + b \cos C$   
 $a^2 = a^2 \cos^2 B + a^2 \cos^2 C + 2bc \cos B \cos C$

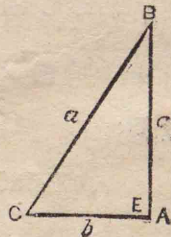
第壹圖



第貳圖



第參圖



第壹圖:  $BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2CA \cdot EA; \quad [幾, III, 11.]$

即  $a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot EA$   
 $= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad [\because EA = c \cos A.]$

第貳圖:  $BC^2 = CA^2 + AB^2 + 2CA \cdot AE; \quad [幾, III, 10.]$

即  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos EAB$   
 $= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad [\because EAB = 180^\circ - A.]$

第參圖:  $BC^2 = CA^2 + AB^2; \quad [幾, III, 9.]$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad [\because \cos A = \cos 90^\circ = 0.]$

同様ニ  $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$

此式ハ二邊及夾角ヲ用テ他ノ邊ヲ表ハス公式ナリ.

**87.** 前節ノ結果ニ由リテ三ノ邊ヲ用テ角ノ餘弦ヲ表ハスヲ得、即下ノ如シ;

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$

角Cヲ180°ニシテ

$\sin^2 A = 1 - \left( \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 = \left( 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \left( 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$

**88.** 三ノ邊ヲ用テ半角ノ正弦、餘弦及正切ヲ表ハス。

$\sin \frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc}$   
 $\sin \frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bac}$   
 Bp 85 (xlii)  
 87 (xlix)

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A \quad [(xxiv) = \text{由 } \psi.]$$

$$= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad [(xliii) = \text{由 } \psi.]$$

$$= \frac{2bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}.$$

$$\therefore \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4bc} \quad (xliv)$$

今  $\frac{a+b+c}{2}$  ヲ  $s$  トスレハ

$$a+c-b = 2(s-b), \quad (a+b-c) = 2(s-c).$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \quad (xlv)$$

$$\text{前ト同様} = 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\therefore \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc} \quad (xlvi)$$

$$\therefore \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad (xlvii)$$

$$\text{而シテ} \quad \tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad (xlviii)$$

\* 此式ハ二乗根ナルヲ以テ  $\sqrt{\quad}$  ノ前ニ  $\pm$  ヲ記ス可キ等ナレモ第 82 節ニ述レタル如ク  $\frac{A}{2}$  ハ  $0^\circ$  乃至  $90^\circ$  ノ角ナルヲ以テ  $\sin \frac{A}{2}$  ハ必ズ正ナリ. 故ニ  $\pm$  ヲ記サズ. 其他皆之ニ倣フ.

同様 =

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}};$$

$$\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}};$$

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}};$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}};$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};$$

$$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

### 89. 三ノ邊ヲ用井テ角ノ正弦ヲ表

ハスレ.

$$\text{公式 (xxiii) 即} \quad \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

= 前章ノ結果ヲ入ルレハ

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\therefore \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (xlix)$$

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  ヲ  $S$  トスレハ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2S}{abc}. \quad (l)$$

90. 二ノ邊ノ差ト和トノ比ハ之ニ對スル角ノ差ノ半分ノ正切ト和ノ半分ノ正切トノ比ニ等シ.

$$\text{公式 (xli) } \Rightarrow \gamma \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\text{即} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

$$\therefore \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\therefore \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}}. \quad (\text{li})$$

同様 =

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan \frac{C-A}{2}}{\tan \frac{C+A}{2}} \quad \text{及} \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}.$$

91. 尙、三角形ノ邊及角ニ關スル公式ハ數多ク、例題及問題トシテ下ニ掲ク。

三角形ノ三ノ原素(一ハ必ズ邊ナルヲ要ス)ガ與ヘラレタルハ一般ニ他ノ原素ハ是ニ依リ推定スルヲ得(次ノ編ニ詳ナリ)。故ニ本編ニ記セル公式ノ中、獨立ナル三ヲ取レハ他ハ盡ク是ニ依リテ推定スルヲ得可シ。然レモ其推定ノ方法ニ至リテハ稍六ク數

モノ有リ。下ノ例題(1)(2)ノ如キハ其ノ最簡易ナルモノナリ。

$$\begin{aligned} \text{例題 1. } & \left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= c \cos A + a \cos C \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

ヲ推定セヨ。

第一式 =  $a$  ヲ掛ク, 第二式 =  $-b$  ヲ掛ク, 第三式 =  $-c$  ヲ掛クテ相加フレハ

$$a^2 - b^2 - c^2 = (ab \cos C + ac \cos B) - (bc \cos A + ba \cos C)$$

$$- (ca \cos B + cb \cos A) = -2bc \cos A.$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

例題 2.  $A+B+C = 180^\circ$  及  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \gamma$   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  ヲ推定セヨ。

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  ナルヲ以テ各分數ヲ  $d$  トスレハ

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{d^2 \sin^2 B + d^2 \sin^2 C - d^2 \sin^2 A}{2d^2 \sin B \sin C}$$

$$= \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2 \sin B \sin C} = \frac{2 \cos A \sin B \sin C}{2 \sin B \sin C}$$

[ $A+B+C = 180^\circ$  ヲ以テナリ; 問題 XXXIV (11) ヲ見ヨ.]

$$= \cos A.$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

例題 3.  $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$  を證明

セヨ.

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{ナルヲ以テ} \\ \frac{a}{\sin A} &= \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C} \\ &= \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{\frac{1}{2} \{ \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \}} \\ &= \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{2 \sin A \sin B \sin C}. \quad \text{[問題 XXXIV (9) 参照]} \\ \therefore a \cos A + b \cos B + c \cos C &= 2a \sin B \sin C. \end{aligned}$$

### 問題 XXXVI.

三角形 ABC に於テ下ノ諸式ヲ證明セヨ:

- (1)  $a \cos A + b \cos B - c \cos C = 2c \cos A \cdot \cos B.$
- (2)  $(a+b) \sin \frac{C}{2} = c \cos \frac{A-B}{2}.$
- (3)  $(b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}.$
- (4)  $a \sin (B-C) + b \sin (C-A) + c \sin (A-B) = 0.$
- (5)  $\frac{a-b}{c} = \frac{\cos B - \cos A}{1 + \cos C}.$
- (6)  $a+b+c = (b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C.$

## 第十三編.

### 三角形ノ解.

92. 三角形ノ六ノ原素ノ中、三(其ノ一、ハ必ズ邊ナルヲ要ス)ガ與ヘラレタルニハ前編ニ説述シタル邊及角ノ關係ニ依リ一般ニ他ノ原素ヲ決定スルヲ得。斯ノ如ク或ル原素ニ依テ他ノ原素ヲ定ムルヲ三角形ノ解ト稱ス。

與ヘラレタル三ノ原素ノ種類ニ從テ四ノ場合有リ:

- I 一邊及二角ガ與ヘラレタル場合;
- II 二邊及夾角ガ與ヘラレタル場合;
- III 二邊及其ノ一ニ對スル角ガ與ヘラレタル場合;
- IV 三邊ガ與ヘラレタル場合.

第一ノ場合. [幾, II, 作9及作10参照.]

93. 一邊及二角(例へハ  $a, B, C$ )ガ與ヘ  
ラレタルキ.

$$A = 180^\circ - (B + C), \quad (1)$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{即} \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad (2)$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{即} \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}. \quad (3)$$

例題 1.  $b = 31$  尺,  $A = 41^\circ 20'$ ,  $C = 74^\circ 5'$ .  $a$ ヲ求ム.

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (41^\circ 20' + 74^\circ 5') = 64^\circ 35'.$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{31 \times .6604}{.9032} = 22.7 \text{ 尺 (略).}$$

對數ヲ用井テ(2)及(3)ヲ計算スルニハ

下ノ如シ:

$$\begin{aligned} \log b &= \log \frac{a \sin B}{\sin A} \\ &= \log a + \log \sin B - \log \sin A. \quad (\text{lii}) \end{aligned}$$

$$\text{同様} = \log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A. \quad (\text{liii})$$

例題 2.  $b = 1824.5$  尺,  $B = 38^\circ 26'$ ,  $C = 72^\circ 15'$ ヲ與  
ヘテ  $c$ ヲ求ム.

$$\text{今} \quad c = \frac{b \sin C}{\sin B}; \quad \therefore \log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B.$$

$$\text{表ヨリ} \quad \log 1824.5 = 3.26114$$

$$\text{表ヨリ} \quad \log \sin 72^\circ 15' = 9.97882 - 10$$

$$\hline 3.23996$$

$$\text{表ヨリ} \quad \log \sin 38^\circ 26' = 9.79351 - 10$$

$$\hline \log c = 3.44645.$$

$$\text{故ニ表ヨリ} \quad c = 2795.4.$$

### 問 題 XXXVII.

(1)  $A = 67^\circ 40'$ ,  $C = 60^\circ 10'$ ,  $a = 20$  間.  $B$ 及 $b$ ヲ求ム.

X(2)  $A = 58^\circ 30'$ ,  $B = 73^\circ 24'$ ,  $c = 132.6$  間.  $C$ 及 $a$ ヲ求ム.

(3)  $A = 109^\circ$ ,  $B = 48^\circ$ ,  $c = 273$  尺.  $a$ 及 $b$ ヲ求ム.

X(4)  $A = 69^\circ 35'$ ,  $C = 28^\circ 34'$ ,  $c = 145.3$  間.  $B$ 及 $b$ ヲ求ム.

(5)  $B = 79^\circ 56' 42''$ ,  $C = 53^\circ 15' 26''$ ,  $a = 427.2$  尺.  $A$ 及  
 $c$ ヲ求ム.

(6)  $A = 33^\circ 34' 1''$ ,  $C = 53^\circ 30' 35''$ ,  $b = 538.28$  間.  $B, a, c$   
ヲ求ム.

第二ノ場合. [幾, II, 作8参照.]

94. 二邊及夾角(例へハ  $b, c, A$ )ガ與ヘ  
ラレタルキ.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

先ツ他ノ二ノ角ノ和  $B + C$ ヲ

$$B+C = 180^\circ - A \quad (1)$$

ニ由リテ見出セ。然ル後、公式(ii)即

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \tan \frac{B+C}{2} \quad (2)$$

ニ由リテB-Cヲ得、斯様ニ得タルB+C及B-Cニ依テB及Cヲ得。

然ル後

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{即} \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B} \quad (3)$$

ニ由リテ第三邊aヲ得。

對數ニ頼テ計算スルニハ(2)及(3)ハ下ノ如クス：

$$\log \tan \frac{B-C}{2} = \log(b-c) + \log \tan \frac{B+C}{2} - \log(b+c), \quad (\text{liv})$$

$$\log a = \log b + \log \sin A - \log \sin B. \quad (\text{lv})$$

例題1.  $a = 21.7$  尺,  $c = 19.4$  尺,  $B = 35^\circ 20'$ . 他ノ角ヲ求ム。

$$\begin{aligned} a-c &= 2.3, & a+c &= 41.1, \\ \frac{A+C}{2} &= \frac{180^\circ - B}{2} = 72^\circ 20'; \\ \tan \frac{A-C}{2} &= \frac{2.3}{41.1} \tan 72^\circ 20' \end{aligned}$$

$$= \frac{2.3}{41.1} \times 3.1397 = .1757;$$

$$\text{表ニ由リ} \quad \frac{A-C}{2} = 9^\circ 58'.$$

$$\therefore A = 82^\circ 18', \quad C = 62^\circ 22'.$$

例題2.  $a = 192.3$  間,  $b = 328.5$  間,  $C = 67^\circ 40'$ ; 他ノ角ヲ求ム。

$$\text{今} \quad b-a = 136.2, \quad b+a = 520.8,$$

$$\frac{B+A}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 56^\circ 10'.$$

而シテ  $\log \tan \frac{B-A}{2} = \log(b-a) + \log \tan \frac{B+A}{2} - \log(b+a)$  ヲ計算スル下ノ如シ：

$$\text{表ヨリ} \quad \log 136.2 = 2.13418$$

$$\text{表ヨリ} \quad \log \tan 56^\circ 10' = 0.17374$$

$$\underline{\quad\quad\quad} \\ 2.30792$$

$$\text{表ヨリ} \quad \log 520.8 = 2.71667$$

$$\log \tan \frac{B-A}{2} = 9.59125 - 10.$$

$$\text{故ニ表ヨリ} \quad \frac{B-A}{2} = 21^\circ 18' 51''.$$

$$\therefore B = \frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2} = 77^\circ 28' 51''.$$

$$\therefore A = \frac{B+A}{2} - \frac{B-A}{2} = 34^\circ 51' 9''.$$

95. 公式(xlii)即  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  ハ簡  
單ナル場合ニハ用井ルヲ得; 又補助  
角ヲ以テセハ對數計算ニモ用井ルヲ  
得 [問題XL, (7)].

例題.  $b = 35$  尺,  $c = 21$  尺,  $A = 50^\circ$  及  $\cos 50^\circ = .643$   
ヲ與ヘテ  $a$  ヲ求ム.

$$a^2 = 35^2 + 21^2 - 2 \times 35 \times 21 \times \cos 50^\circ$$

$$\therefore \frac{a^2}{7^2} = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 50^\circ$$

$$= 25 + 9 - 30 \times .643 = 14.71.$$

$$\therefore a = 7 \times \sqrt{14.71} = 26.8 \text{ 尺 (略).}$$

### 問 題 XXXVIII.

- (1)  $B = 65^\circ$ ,  $a = 200$  尺,  $c = 300$  尺.  $A$  及  $C$  ヲ求ム.  
 (2)  $A = 73^\circ$ .  $b = 53.4$  間,  $c = 91.8$  間.  $B$  及  $C$  ヲ求ム.  
 (3)  $B = 26^\circ 30'$ ,  $a = 167.4$  尺,  $c = 341.5$  尺.  $A$  及  $C$  ヲ求  
 ム  
 (4)  $A = 48^\circ 27' 39''$ ,  $b = 654.40$  尺,  $c = 319.63$  尺.  $B, C, a$   
 ヲ求ム.

(5)  $A = 105^\circ 37' 32''$ ,  $b = 125.38$  尺,  $c = 442.25$  尺.  $B, C, a$   
ヲ求ム.

(6)  $a = 20$  里,  $b = 12$  里,  $C = 60^\circ$ .  $c$  ヲ求ム.

(7) 三角形ノ二邊ノ比ハ5:3ナリ. 其ノ夾角ハ $40^\circ$   
ナリ. 他ノ角ヲ求ム.

### 第三ノ場合. [幾, II, 作11 参照]

96. 二邊及其ノ一, = 對スル角(例ハハ  
 $a, b, B$ )ガ與ヘラレタルキ.

下ノ三式ヲ用井テ順次  $A, C, c$  ヲ得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } \sin A = \frac{a \sin B}{b}; \quad (1)$$

$$C = 180^\circ - (A + B); \quad (2)$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 即 } c = \frac{b \sin C}{\sin B}. \quad (3)$$

對數式ハ下ノ如シ.

$$\log \sin A = \log a + \log \sin B - \log b; \quad (lvi)$$

$$\log c = \log b + \log \sin C - \log \sin B. \quad (lvii)$$

此計算ノ第一歩ハ正弦ガ  $\frac{a \sin B}{b}$  = 等シキ角ヲ見出  
スニ在リ [(1) 或ハ (lvi)]. 然ルニ正弦ヲ知リテ角ヲ見  
出ス場合ニ於テハ  $0^\circ$  ト  $180^\circ$  トノ間ニ在リテ此要件

ニ適スル角ハ通例二、有リテ互ニ補角ナルヲ第82節ニ述ヘタルガ如シ。然レ此二、ノ角ガ何レモ果シテ此三角形ノ性質ニ適スルヤ否ハ更ニ研究ヲ要スルヲナリ。加之、方程式ニ全ク解無キヲモ有リ。下ニ之ヲ詳論ス。

(甲)  $a < b$ . 此場合ニ於テハ  $A < B$ . 故ニ  $A$  ハ最大角ニ非ザルヲ以テ鈍角ナル能ハズ、因テ  $A$  ハ方程式(1)\* ヨリ得タル鋭角ヲ取ラザル可カラズ、故ニ三角形ノ解ハ唯一、有ルノミ。

(乙)  $a = b$ . 此場合ニ於テハ  $A = B$ . 而シテ一、ノ三角形ニ於テ直角或ハ鈍角ハ唯一、ニ限ルヲ以テ若シ與ヘラレタル角  $B$  ガ鋭角ナラザレハ是レ不合理ノヲニシテ斯ノ如キ三角形ハ有ル能ハズ、即解無シ。角  $B$  ガ鋭角ナレハ角  $A$  モ亦鋭角ナラザル可カラズ、故ニ唯一、ノ解有リ。

(丙)  $a > b$ . 此場合ニ於テハ  $A > B$ . 故ニ與ヘラレタル角  $B$  ガ鋭角ナラザレハ解無シ。而シテ  $B$  ガ鋭角ナレハ  $a \sin B > < b$  (即  $\log a + \log \sin B - \log b > < 0$ ) ナ

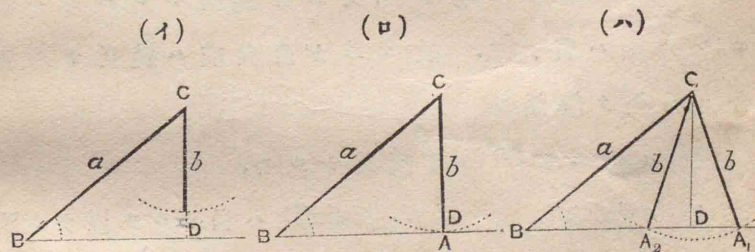
\* 對數的ノ計算ニ於テハ (1vi) ナルヲ勿論ナリ。

ルニ從テ下ノ如ク三、ノ場合有リ。

(イ) 若シ  $a \sin B > b$  ナレハ  $\frac{a \sin B}{b} > 1$  ナルヲ以テ方程式(1)ニ適スル角無シ。故ニ解無シ。幾何學的ニ述フレハ  $a \sin B$  ハ  $C$  ヨリ對邊ヘ引クル垂線ナリ; 而シテ邊  $b$  ガ此垂線ヨリ小ナル能ハザルヲ明ナリ。

(ロ) 若シ  $a \sin B = b$  ナレハ  $\frac{a \sin B}{b} = 1$  ナルヲ以テ方程式(1)ニ適スル角ハ  $A = 90^\circ$  有ルノミ、故ニ解ハ唯一、有ルノミ。

(ハ) 若シ  $a \sin B < b$  ナレハ  $\frac{a \sin B}{b} < 1$  ナルヲ以テ方程式(1)ニ適スル角ハ二、有リテ互ニ補角ナリ。而シテ何レヲ取ルモ與ヘラレタル要件ニ適ス。故ニ二、ノ解有リ。



97. 代數學的ニ

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 - 2ca \cos B + (a^2 - b^2) = 0$$

$$c = \frac{2a \cos B \pm \sqrt{4a^2 \cos^2 B - 4(a^2 - b^2)}}{2}$$

$$c = a \cos B \pm \sqrt{a^2 \cos^2 B - (a^2 - b^2)}$$

$$c = a \cos B \pm \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}$$



ニ依ルモ亦前ト同シ結果ヲ得可シ。

此方程式ハ $c$ ニ付テ二次方程式ナリ 故ニ之ヲ解セハ二ノ根

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a \cos B + \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B}, \\ c_2 &= a \cos B - \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B} \end{aligned} \right\} \text{(lviii)}$$

ヲ得。今此二ノ値ノ何レヲ採用ス可キカヲ論究セン：

(甲)  $a < b$  ナル時ハ  $b^2 - a^2 \sin^2 B > a^2 - a^2 \sin^2 B$ ; 即  
 $+\sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 B} > a \cos B$ . 故ニ  $c_1$  ハ正ニシテ  $c_2$  ハ負ナリ。  
 故ニ解ハ唯一ナリ。 *Cが最大なる三角形 solution が+*

(乙)  $a = b$  ニシテ  $B$  が鋭角ナル時ハ  $c_1 = 2a \cos B$  ニシテ  $c_2 = 0$ ; 故ニ唯一ノ解有リ。然レモ  $B$  が直角ナレハ  $c_1, c_2$  ハ何レモ零ナリ; 又  $B$  が鈍角ナレハ  $c_1$  ハ零ニシテ  $c_2$  ハ負ナリ。故ニ  $B$  が直角或ハ鈍角ナル場合ニハ全ク解無シ

(丙)  $a > b$  ニシテ  $B$  が鋭角ナル時、

(イ)  $a \sin B > b$  ナレハ  $b^2 - a^2 \sin^2 B$  ハ負ナルヲ以テ  $c_1$  及  $c_2$  ハ虚數ナリ。故ニ解無シ。

(ロ)  $a \sin B = b$  ナレハ  $b^2 - a^2 \sin^2 B$  ハ零ナルヲ以テ  $c_1 = c_2 = a \cos B$ . 故ニ解ハ唯一ナリ。

(ハ)  $a \sin B < b$  ナレハ  $b^2 - a^2 \sin^2 B$  ハ正ニシテ其ノ二乗根ハ  $a \cos B$  ヨリ小ナルヲ以テ  $c_1$  及  $c_2$  ハ何レモ正ナリ。故ニ二ノ解有リ。

此場合ニ於テ  $B$  が直角或ハ鈍角ナレハ  $c_1$  及  $c_2$  ハ何レモ正ナラズ; 故ニ全ク解無シ

例題 1.  $b = 3$  間,  $c = 4$  間,  $C = 115^\circ$ .  $B$  及  $A$  ヲ求ム。

$$\sin B = \frac{3 \sin 115^\circ}{4} = \frac{3 \sin 65^\circ}{4} = \frac{3 \times .9063}{4} = .6797.$$

正弦ガ .6797 ナル角ハ表ニ由リ  $42^\circ 49'$  或ハ  $180^\circ - 42^\circ 49'$  ナルヲ知ル; 然レモ  $C$  が鈍角ナルヲ以テ  $B$  ハ鈍角ナル能ハズ。故ニ  $B = 42^\circ 49'$ .

仍テ  $A = 180^\circ - (115^\circ + 42^\circ 49') = 22^\circ 11'$ .

例題 2.  $a = 5$  間,  $b = 7$  間,  $A = 41^\circ 20'$ .  $B$  及  $C$  ヲ求ム。

$$\sin B = \frac{7 \sin 41^\circ 20'}{5} = \frac{7 \times .6604}{5} = .9246.$$

表ニ由リ  $B = 67^\circ 36'$  或ハ  $180^\circ - 67^\circ 36'$  (即  $112^\circ 24'$ );  $b$  ハ  $a$  ヨリ大ナリ, 故ニ丙(ハ)ニ依リ  $B$  ノ二値トモニ正當ナリ。

仍テ  $B = 67^\circ 36'$ ,  $C = 71^\circ 4'$ ;

或ハ  $B = 112^\circ 24'$ ,  $C = 26^\circ 16'$ .

例題 3.  $a = 263.7$  間,  $b = 192.5$  間,  $B = 37^\circ 18'$ .  $A$   
及  $C$  を求む.

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}; \log \sin A = \log a + \log \sin B - \log b.$$

$$\log a = 2.42111$$

$$\log \sin B = 9.78247 - 10$$

$$\hline 2.20358$$

$$\log b = 2.28443$$

$$\log \sin A = 9.91915 - 10.$$

$$\therefore A = 56^\circ 7' \text{ 或ハ } 123^\circ 53';$$

$a > b$ , 故ニ丙(ハ)ニ依リ双方トモ採用スルヲ得. 故ニ

$$A = 56^\circ 7', \quad C = 86^\circ 35';$$

$$\text{或ハ } A = 123^\circ 53', \quad C = 18^\circ 49'.$$

例題 4.  $a = 192.5$  間,  $b = 263.7$  間,  $B = 37^\circ 18'$ .  $A$   
及  $C$  を求む.

$$\log a = 2.28443$$

$$\log \sin B = 9.78247 - 10$$

$$\hline 2.06690$$

$$\log b = 2.42111$$

$$\log \sin A = 9.64579 - 10.$$

故ニ

$$A = 26^\circ 15' \text{ 或ハ } 153^\circ 45';$$

而シテ  $a$  ハ  $b$  ヨリ小ナルヲ以テ  $A$  ハ  $B$  即  $37^\circ 18'$  ヨリ小  
ナラザル可ラズ. 故ニ  $A$  ノ値ノ大ナル方ハ採用スル  
能ハズ (又  $153^\circ 45' + 37^\circ 18' > 180^\circ$  ナルニ由リテモ亦明  
ナリ.)

$$\therefore A = 26^\circ 15', \quad C = 116^\circ 27'.$$

## 問 題 XXXIX.

- (1)  $B = 43^\circ$ ,  $b = 40$  間,  $c = 28$  間.  $C$  を求む.
- X (2)  $A = 33^\circ 40'$ ,  $a = 1000$  尺,  $b = 1276$  尺.  $B$  を求む.
- X (3)  $A = 114^\circ 13' 5$ ,  $a = 4513$  尺,  $c = 2500$  尺.  $C$  を求む.
- (4)  $B = 35^\circ 51' 3$ ,  $a = 583.1$  間,  $b = 367.2$  間.  $A, C, c$  を  
求む
- (5)  $C = 49^\circ 38' 40''$ ,  $a = 167.39$  間,  $c = 402.79$  間.  $A, B, b$   
を求む.
- (6) 下ニ記セル各題ニ於テ解ノ有無, 及若シ有レ  
ハ一ツナルカ 或ハ二ツナルカヲ考究セヨ. 又二ツノ  
解有ルトキハ鈍角ヲ有スル三角形ノ第三邊ヲ求  
ム.

- Matsuo*
- ×(i)  $A = 30^\circ, a = 100 \text{ 尺}, c = 250 \text{ 尺};$
  - (ii)  $A = 30^\circ, a = 200 \text{ 尺}, c = 250 \text{ 尺};$
  - (iii)  $A = 30^\circ, a = 200 \text{ 尺}, c = 125 \text{ 尺};$
  - (iv)  $A = 30^\circ, a = 125 \text{ 尺}, c = 250 \text{ 尺};$
  - (v)  $A = 120^\circ, a = 250 \text{ 尺}, c = 125 \text{ 尺};$
  - ×(vi)  $A = 120^\circ, a = 125 \text{ 尺}, c = 250 \text{ 尺};$

第四ノ場合. [幾, II, 作7 参照]

98. 三邊  $(a, b, c)$  が與ヘラレタルルル.

\*  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s-a} \sqrt{(s-a)(s-b)} \quad (1) \text{C}$

$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \frac{1}{s-b} \sqrt{(s-a)(s-b)} \quad (2) \text{C}$

第三ノ角  $C = 180^\circ - (A+B)$ . (3)

對數式ハ下ノ如シ:

$\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \},$  (lix)

$\log \tan \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-c) + \log(s-a) - \log s - \log(s-b) \}.$  (lx)

又  $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$  或ハ  $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$  ヲ用キ

ルヲ得.

[唯一ノ角ヲ見出サント欲スル場合ニハ何レノ範式ヲ用キルモ其手數ハ同様ナリ. 然レモ總テノ角ヲ要スルルルハ  $\tan \frac{A}{2}$  ノ公式ヲ用キルヲ利有リトス; 何トナレハ  $\tan \frac{A}{2}$  式ニ賴ルルルハ唯四ノ對數即  $\log s, \log(s-a), \log(s-b), \log(s-c)$  ヲ要スルノミ; 然ルニ  $\sin \frac{A}{2}$  式ヲ用キルハ六ノ對數即  $\log(s-a), \log(s-b), \log(s-c), \log a, \log b, \log c$  ヲ要ス,  $\cos \frac{A}{2}$  式ヲ用キルモ亦六ノ對數ヲ要ス.]

附言. 正弦ノ變化ハ角ガ  $90^\circ$  ニ近ツクニ從テ緩ナリ. 故ニ  $\sin \frac{A}{2}$  式ヲ用キテ  $\frac{A}{2}$  ノ値ヲ計算スルルルハ  $\frac{A}{2}$  ガ  $90^\circ$  ニ近キ場合ニ於テハ精密ナラズ; 同様ニ  $\cos \frac{A}{2}$  式ヲ用キテ  $\frac{A}{2}$  ノ値ヲ計算スルルルハ  $\frac{A}{2}$  ガ小サクレハ精密ナラズ, 然ルニ  $\tan \frac{A}{2}$  式ハ何レノ場合ニ於テモ精密ナル結果ヲ與フ. 是レ亦  $\tan \frac{A}{2}$  式ヲ採用ス可キ理由ノ一ナリ.

對數ヲ用キザル計算ニハ次節(第99節)ノ式ヲ用キルヲ便利ナリトス.

例題  $a = 164.37$  間,  $b = 201.75$  間,  $c = 93.58$  間ヲ與

へテ A 及 B を求ム

今  $s = 229.85$ ,  $s-a = 65.48$ ,  $s-b = 28.10$ ,  $s-c = 136.27$ ;  
本節ノ公式ニ從テ先ツ A を計算セシ.

$$\begin{array}{r} \log s = 2.36145 \\ \log(s-a) = 1.81611 \\ \hline 4.17756 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log(s-b) = 1.44871 \\ \log(s-c) = 2.13440 \\ \hline 3.58311 \\ \hline 4.17756 \\ \hline 9.40555-10. \end{array}$$

之ヲ 2ニテ割ルニ當リ、引ク可キ數ガ割ラレタル後  
10トナル様ニ豫メ双方へ 10ヲ加ヘ置ク下ノ如シ.

$$2) \underline{19.40555-20}$$

$$\log \tan \frac{A}{2} = 9.70278-10$$

$$\therefore \frac{A}{2} = 26^\circ 46' 0'', \quad \therefore A = 53^\circ 32' 0''.$$

次ニ B を計算セシ.

$$\begin{array}{r} \log s = 2.36145 \\ \log(s-b) = 1.44871 \\ \hline 3.81016 \end{array} \quad \begin{array}{r} \log(s-c) = 2.13440 \\ \log(s-a) = 1.81611 \\ \hline 3.95051 \\ \hline 3.81016 \end{array}$$

$$2) \underline{0.14035}$$

$$\log \tan \frac{B}{2} = 0.07018.$$

$$\therefore \frac{B}{2} = 49^\circ 36' 34'', \quad \therefore B = 99^\circ 13' 8''.$$

99. 公式 (xliii) 即  $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$  ハ對數  
ヲ利用スルヲ能ハザレドモ  $a, b, c$  ノ桁數ガ  
少キキハ之ヲ用非テ益アル場合多シ.

例題. 三角形ノ三ノ邊ノ長ヲ表ハス數ガ 12,  
23, 34 ナレハ其ノ最大角ヲ求ム.

今  $34 = a$ ,  $23 = b$ ,  $12 = c$  トスレハ角 A が最大ナリ.

$$\cos A = \frac{23^2+12^2-34^2}{2 \times 23 \times 12} = \frac{-483}{2 \times 23 \times 12} = \frac{-7}{8} = -.875.$$

而シテ餘弦ガ .875 ナル角ハ  $28^\circ 57'$  ナリ. 故ニ  $0^\circ$  ト  $180^\circ$   
ノ間ニ於テ餘弦ガ -.875 ナル角ハ  $180^\circ - 28^\circ 57'$  ナリ; 即,

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - 28^\circ 57' \\ &= 151^\circ 3'. \end{aligned}$$

## 問 題 XL.

- (1)  $a = 10$  寸,  $b = 12$  寸,  $c = 14$  寸. 最小角ヲ求ム  
 (2)  $a = 222$  尺,  $b = 318$  尺,  $c = 406$  尺. A を求ム.  
 (3)  $a = 261.5$  間,  $b = 252.7$  間,  $c = 137.1$  間. C を求ム.  
 (4)  $a = 422.74$  間,  $b = 514.26$  間,  $c = 338.76$  間. A, B, C  
 を求ム.

(5)  $a:b:c::4:5:6$ ,  $\log 2 = \cdot 3010300$ ,  $\log 3 = \cdot 4771213$ ,  
 $\log \cos 41^\circ 25' = 9\cdot 8750142 - 10$ ,  $60'' =$  對スル差  $\cdot 0001115$  ヲ  
 知レリ.  $C$  ヲ求ム.

X(6) <sup>Bute</sup> 三角形ノ三邊ガ  $2, \sqrt{6}, 1+\sqrt{3}$  ナリ; 角ヲ求ム

X(7) 下ニ記セル事項ヲ證明セヨ:

(甲) <sup>Sinekawa</sup>  $\tan \phi = \frac{b+c}{b-c} \tan \frac{A}{2}$  ナレハ

$$\log a = \log(b-c) + \log \cos \frac{A}{2} - \log \cos \phi.$$

(乙)  $\tan \phi = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c} \sin \frac{A}{2}$  ナレハ

$$\log a = \log(b-c) - \log \cos \phi.$$

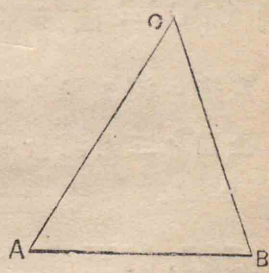
(丙) <sup>Sekantoku</sup>  $\sin \phi = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cos \frac{A}{2}$  ナレハ

$$\log a = \log(b+c) + \log \cos \phi$$

(lxi)

## 第 十 四 編.

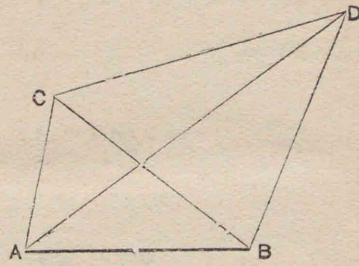
## 距 離 及 高サ.

100. 地上ニ於テ二點  $A, B$  ノ距離ヲ  
 測リ, 而シテ  $A$  及  $B$  ニ於テ  
 他ノ一點  $C$  ノ方向ガ  $AB$   
 ト爲ス角ヲ測ルキハ三  
 角形  $ABC$  ニ於テ一邊及  
 二角ヲ知ルヲ以テ  $AC, BC$    
 ナ算出スルヲ得. 此場合ニ於テ  $AB$  ナ  
 基線或ハ底邊ト稱ス.

又基線ノ兩端ニ於テ適當ノ角ヲ測レ  
 ハ他ノ二點  $CD$  ノ距離ヲ算出スルヲ得:  
 即三角形  $ABC$  ニ於テ一邊  $AB$  及二角  $CAB,$

ABC = 由リ CB ナ算  
出シ;

次 = 三角形 ABD =  
於テ一邊 AB 及二角  
DAB, ABD = 由リ BD

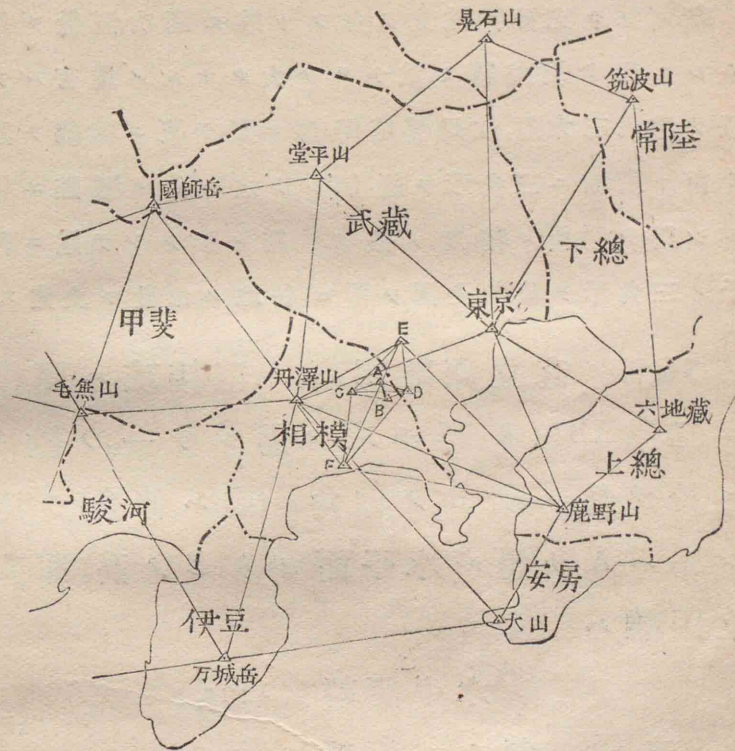


ヲ算出シ;

次 = 三角形 CBD = 於テ二邊 CB, BD 及夾  
角 CBD = 由リ CD ナ算出ス。

直接ニ測リ難キ距離ヲ得ルニハ通常此法ニ頼ル。  
全國ノ三角測量ハ全ク此理ニ基ク。

**101.** 三角測量. 次ノ圖ハ相州近傍  
ノ三角測量ノ略圖ニシテ基線ハ相模野  
ニ於テ 5210 メートルヲ測レリ (圖中 AB  
ナリ), 而シテ各測點ニ於テ必要ナル諸角  
ヲ觀測シ之ヲ以テ順次 AC, AD, CD, DE, 等  
ヲ計算ス。



三角測量ハ極メテ精密ヲ要ス. 故ニ基線ハ特別  
ナル金屬製ノ直鋸ヲ以テ數回之ヲ計ル, 而シテ實際  
一々溫度ヲ檢シテ其鋸ノ伸縮ヲ計ル. 角ハ各三角  
形ノ各頂點ニ於テ之ヲ測リ三ノ角ノ和ガ理論ニ  
適フカ否ヲ檢ス(其ノ差小ナレハ最適當ナル様ニ各  
角ニ配附ス).

斯ノ如ク充分ニ注意ヲ加フト雖漸次測量ヲ進  
ムルニ從テ誤差積ミ重ナリテ大クナルノ虞有ルヲ  
以テ遠州三方原, 江州饗庭野, 等ニ於テ更ニ基線ヲ設  
ク前ト同様ニ三角形ヲ編制シテ之ヲ前ノ測點ニ接  
續シ以テ測量ノ精度ヲ檢ス. 斯ノ如クシテ遂ニ數  
千ノ三角形ヲ以テ全國ヲ覆ヒ, 各地ノ位置ヲ決定ス.

**102.** 直立距離即高. 直接或ハ間接  
ニ二點 AB ノ距離ヲ求メ而シテ一ノ點 A  
ニ於テ他ノ點 B ノ仰角 (或ハ俯角) ナ測  
ルキハ A ナ過ル水平面ヨリ B ノ高, 即直  
立距離ハ

$$\left. \begin{array}{l} \text{水平距離} \times \tan \theta, \\ \text{或ハ 斜ナル距離} \times \sin \theta \end{array} \right\} \text{(lxii)}$$

ニ由リ計算スルヲ得

既ニ第三編及第十一編ニ於テ例題又ハ問題トシ  
テ屢, 此ノ實例ヲ掲ケタリ, 尙下ニ一例ヲ示ス.

例題. A ナ山頂トシ, B 及 C ナ山麓ノ二點トセヨ.

BC ノ水平距離 143.5 間,

BC ト BA ノ爲セル水平角  $69^{\circ} 40'$ ,

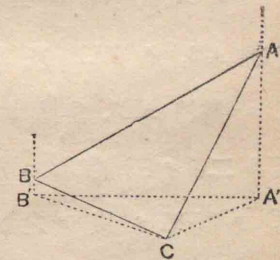
CB ト CA ノ爲セル水平角  $80^{\circ} 15'$ ,

C ニ於テノ A ノ仰角  $13^{\circ} 36'$

ヲ測リ得タリ. C ナ過ル水平面ヨリノ山ノ高, ナ求ム.

C ナ過ル水平面へ A 及 B ノ投スル正射影ヲ  $\Delta'$  及  
 $B'$  トセヨ. 然ルキハ

$$\begin{aligned} B'C &= 143.5 \text{ 間,} \\ \angle CB'A' &= 69^{\circ} 40', \\ \angle B'CA' &= 80^{\circ} 15'. \end{aligned}$$



故ニ第 93 節ニ由リ,

$$\log 143.5 = 2.15685$$

$$\log \sin 69^{\circ} 40' = 9.97206 - 10$$


---


$$2.12891$$

$$\log \sin 30^{\circ} 5' = 9.70006 - 10 \left( \begin{array}{l} CA'B' \\ = 180^{\circ} - CB'A' - B'CA' \\ = 30^{\circ} 5'. \end{array} \right)$$

$$\therefore \log CA' = 2.42885.$$

次ニ 高,  $A'A = CA' \times \tan A'CA$

ナルヲ以テ  $\log A'A = \log CA' + \log \tan 13^{\circ} 36'$

$$= \left( \begin{array}{l} 2.42885 \\ + 9.38368 - 10 \end{array} \right)$$

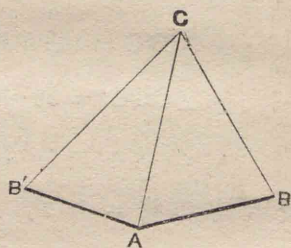

---


$$= 1.81253.$$

$$\therefore \text{高, } A'A = 64.94 \text{ 間.}$$

**103.** 凡テ實地ノ測定ニハ要スル所ノ距離(或ハ角或ハ面積等)ヲ少クトモ二様ニ計算スル様ニシ以テ誤差ノ有無ヲ檢スルヲ一般ノ法トス。

例ヘハ第100節ニ於テACノ距離ヲ得ント欲セハ基線AB, 角CAB及ABCノ他ニ更ニ基線AB', 角B'AC及CB'Aヲ測リ二ツノ三角形ニ於テ別々ニACヲ計算シ以テ之ヲ比較ス。此二ツハ理論上全ク相合ス可キ



管ナレモ實地ニ於テ其ノ相合スルコトハ殆ント絶無ナリ(次ノ節ヲ見ヨ)。而シテ其差ガ論スルニ足ラザル小數ナレハ二ツノ値ノ中數ヲ以テACノ長トス;若シ其差が大ナレハ再測スルコト勿論ナリ。

**104.** 觀測ノ誤差. 量ヲ觀測スル方法ハ量ノ種類ニ從テ異ナレモ, 其ノ要ハ直接或ハ間接ニ其量ヲ單位ト比較スルニ在ルヲ以テ, 其比較ノ際, 之ニ用ル器械ノ不精密ナルコト, 取り扱ヒ方ノ不完全ナルコト, 等ヨリ生スル微小ナル誤差ハ到底免カル、能ハズ;語ヲ換ヘテ云

ヘハ量ノ絶對的ニ正シキ値ハ得可カラザルモノナリ。

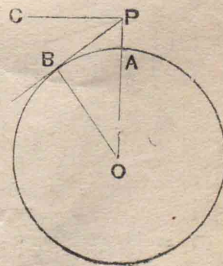
故ニ精密ナル測定ヲ要スルハ數回又種々ノ方法ヲ以テ同一ノ量ヲ測ル; 而シテ誤差ノ最少キ様ニ之ヲ折衷シ且終リノ結果ハ何程ノ度マテ精密ナルカヲ知ル法有リ。是レ應用數學ノ一分科ヲ爲ス。

前節ニ於テ二ツノ結果ノ中數ヲ取ルコト爲シタルハ是レ通常用ル所ナレモ固ヨリ算算法ニシテ嚴正ナル平均法ニ非ズ。

### 105. 視水平ノ下リ。

海水面ハ半徑 3960 英里ノ球面ニ甚ダ近シ。而シテ最高キ山ト雖モ6英里ニ上ラズ。故ニ通常吾人が達シ得ル處ノ高ハ地球ノ直徑ニ比スレハ甚ダ小ナリ。

Oヲ地球ノ中心トシPヲ測點トシ, Pヨリ球面ヘ切線PBヲ引ク。OPBヲ含ム平面ニ於テOPニ直角ニPCヲ引ク。然ルモハ角CPBヲ“視水平ノ下リ”ト稱ス。之レPヨリ視ルコトヲ得可キ最遠キ點(海水面ノ)ノ俯角ナリ。





船中ニ於テ天躰ヲドノ仰角ヲ得ルニハ先ツ視水平ヨリノ角ヲ測リ而シテ此角ヨリ視水平ノ下リヲ減シテ真ノ仰角ヲ得。

視水平ノ下リヲ  $\theta$  トスレハ

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{OP - OB}{PB}, \quad [CPB = BOP; \text{問題XXXV (8)}]$$

$$\text{即} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \frac{AP}{PB}. \quad (\text{lxiii})$$

而シテ AP ハ海水面ヨリ觀測者ノ眼ノ高ナルヲ以テ直ニ之ヲ測ルヲ得。又 PB ハ

$$PB^2 = 2 AP \cdot OA \quad (\text{lxiv})$$

ヨリ計算スルヲ得; 此公式ハ

$$PB^2 = AP (2 OA + AP) \quad [\text{幾, III, 14, 系 3}]$$

ニ基ツク; 而シテ AP ハ地球ノ直徑 2 OA ニ比スレハ甚微小ナルヲ以テ之ヲ略シテ (lxiv) ノ如クスルトモ是ガ爲メニ生スル差ハ通常論スルニ足ラザル小數ナリ。

今視水平ノ距離 PB ガ  $m$  英里 (即  $m \times 5280$  英尺) ニシテ海面上眼ノ高ガ  $f$  英尺ナルキハ、

$$f = \frac{(m \times 5280)^2}{2 \times 3960 \times 5280} = \frac{2}{3} m^2.$$

故ニ地球表面ハ 1 英里ノ距離ニ於テ下ルヲ 8 英寸 (殆ト正シク) ナリ, 2 英里ニ於テ 32 英寸ナリ。

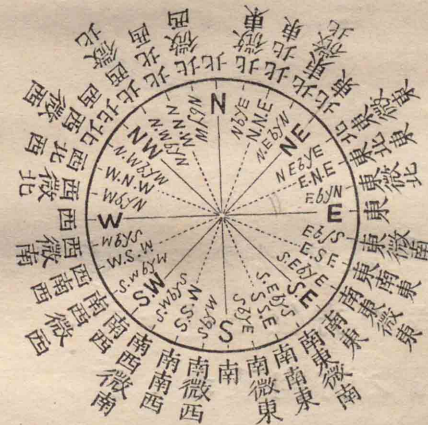
例題. 海面ヲ眺望スルヲ得可キ山ノ頂上ニ於テ視水平ノ下リヲ實測シテ  $0^\circ 55'$  ヲ得タリ。山ノ高ヲ求ム

$$PB = 3960 \times \tan 55',$$

$$AP = \frac{PB^2}{2 OA} = \frac{3960^2 \times \tan^2 55'}{2 \times 3960} = 1980 \times (\tan 55')^2 = .507 \text{ 英里}.$$

105. 方位ノ呼ヒ方ニ三種アリ。

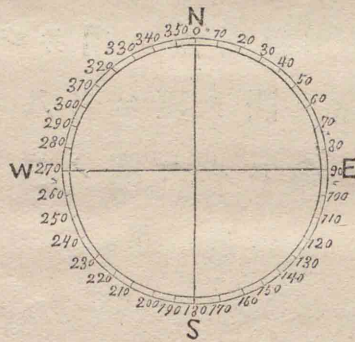
I. 航海用羅針盤ニ用ルモノハ北東南西ノ四點ノ間ヲ更ニ各八ニ等分シ此 32 點ニ名ヲ命スルヲ圖ノ如シ。



故ニ相接スル二點間ノ角ハ  $\frac{360^\circ}{32}$  即  $11^\circ 15'$  ナリ。

**II.** 北ヲ $0^\circ$ ノ方位ト定メ之ヨリ東,南,西ヲ經テ北ニ復スル廻リ方ニテ畫ケル角ヲ以テ方位ヲ呼フ. 此角ヲ方位角ト稱ス(星學及高等ノ測量ニハ之ヲ用非ル).

例ヘハ $90^\circ$ ハ東ヲ指シ $180^\circ$ ハ南ヲ指シ $270^\circ$ ハ西ヲ

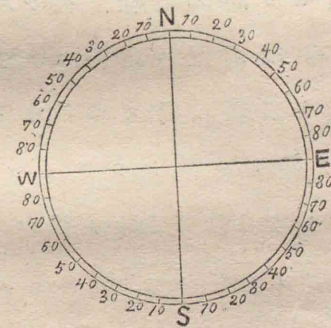


指ス. 又 $135^\circ$ ハ南東ヲ指ス

**III.** 羅針盤ヲ以テスル陸地測量ニ於テ通常用非ル方位ノ呼ヒ方ハ下ノ如シ. 北ト東ノ間ノ方向及北ト西ノ間ノ方向ハ何レモ北ヨリ其方向マデノ角ヲ以テ示シ,此角ヲ表ハス數ノ前ニN字ヲ置キ

其ノ後ニE或ハWヲ置ク.

南ト東ノ間ノ方向及南ト西ノ間ノ方向ハ何レモ南ヨリ其方向マデノ角ヲ以テ示シ,此角ヲ表ハス數ノ前ニS字ヲ置キ其ノ後ニE或ハWヲ置ク.



例ヘハ航海用羅針盤ノ北北東ハ此法ノ $N 22^\circ 30' E$ ニ當リ,西微南ハ $S 78^\circ 45' W$ ニ當ル.

問題 **XLI.**

(1) 一市Aヨリ $60^\circ$ ノ角ヲ爲シテ二直道ヲ發ス. 一ハB村ニ入り, 一ハC村ニ通ス. 而シテ $AB = 3$ 里, $AC = 4$ 里. BCノ距離ヲ問フ.

(2) 二船一港ヲ發ス。甲ハ毎時3里ノ速ヲ以テ北東ニ向ヒ、乙ハ毎時4里ノ速ヲ以テ正北ニ向フ。一時間半ヲ經ハ二船ノ距離及甲ヨリ乙ノ方位如何?

(3) 甲乙二船ノ針路ハ夫々N及Eニシテ其ノ速ハ相等シ。或ル時乙ヨリ甲ノ方位ヲ測リENEヲ得タリ;夫ヨリ一里進行シテ再ヒ之ヲ測リNNWヲ得タリ。二船南北ニ相對セシ時ノ距離ヲ問フ。

(4) 海岸ニ人有り、海上ニ碇泊スル二ツノ軍艦ノ距離ヲ知ラント欲シ二艦ニ對スル角ヲ測リ $48^{\circ}42'$ ヲ得タリ、又各艦ヨリ發スル砲火ヲ見シヨリ砲聲ヲ聞クマデノ時間ヲ檢シテ4秒及6秒ヲ得タリ。響ノ速ハ毎秒330メートルナリトスレハ二艦ノ距離ハ何メートルナリヤ?

(5) 角ノ二邊ニ於テ頂點ヲ距ル $7$ 間ノ所ニ各一點ヲ設ク其ノ距離ヲ測リ $7$ 間 $2$ 尺 $8$ 寸ヲ得タリ。角ヲ求ム。

(6) 河岸ノ堤上ニ於テ $200$ 尺ノ基線ヲ測リ、其ノ兩端點ニ於テ對岸ノ一點ノ方向ガ基線ト爲セル角ヲ測リ $79^{\circ}15'$ 及 $67^{\circ}12'$ ヲ得タリ。河幅ヲ問フ。

(7) 山麓ノ一點ニ於テ山頂ノ仰角ヲ測リ $\alpha$ ヲ得タリ。之ヨリ山頂ニ向ヒ傾斜角 $\gamma$ ナル斜面ヲ登ル $\Gamma$ 尺ニ

シテ再ヒ山頂ノ仰角ヲ測リ $\beta$ ヲ得タリ。山ノ高ヲ求ム。  
 $\alpha = 120$ 尺,  $\alpha = 24^{\circ}$ ,  $\beta = 46^{\circ}$ ,  $\gamma = 4^{\circ}$  ナレハ高、何尺?

(8) 一軍艦進行中、南微東ニ方リ $5$ 海里ヲ距テ、敵艦ヲ見ル。敵艦ノ針路ハ東北東ニシテ速ハ $9$ 「ノット」ナリ。40分時間ノ後敵艦ニ會セント欲セハ我艦ノ針路及速ハ如何ニシテ可ナリヤ?

[速 $9$ 「ノット」トハ一時間ニ $9$ 海里ノ速度ヲ云フ。]

(9) A, B, Cハ地上ノ三點ニシテABノ距離ハ $150.7$ 間ナリ。Aニ於テBノ方位ハ $N 65^{\circ}45' W$ , Cノ方位ハ $N 0^{\circ}15' E$ ナリ。Bニ於テCノ方位ハ $N 37^{\circ}55' E$ ナリ。ACノ距離ヲ求ム。

(10) A, Bハ山ノ前後ニ在ル二點ナリ。此二點ヲ覘ヒ得可キ一點Cニ於テ角 $ACB = 60^{\circ}$ ヲ測レリ;又 $AC = 40$ 町,  $BC = 32$ 町ヲ測レリ。ABノ距離ヲ求ム。

(11) 前題ニ於テCノ仰角ヲAヨリ測レハ $9^{\circ}58'4$ ヲ得、Bヨリ測レハ $5^{\circ}15'$ ヲ得。BハAヨリ高キ $\Gamma$ 何町?

又Aヨリ山腹ヲ穿テテBニ通スル隧道ガ水平面ト爲ス角及ACト爲ス角ヲ求ム。

(12) A, B, Cハ三ツノ測點ナリ。AB =  $9.62$ , BC =  $10.36$ , CA =  $15.04$ キロメートルナリ。角ABCヲ求ム。

(13) 海上ニ碇泊セル二船 P, Q ノ距離ヲ知ランガ爲メニ海岸ノ平地ニ於テ長サ 85 間ノ基線 AB ヲ測レリ, 又  $\angle PAB = 109^\circ 32'$ ,  $\angle PBA = 41^\circ 7'$ ,  $\angle QAB = 32^\circ 10'$ ,  $\angle QBA = 116^\circ 40'$  ヲ測レリ. 二船ノ距離ヲ求ム

(14) 正南北ニ水平基線 1000 尺ヲ測リ, 其ノ一端ニ於テ山頂ノ仰角  $13^\circ 14'$  及方位  $N 80^\circ E$  ヲ測レリ. 又他ノ端ニ於テ山頂ノ方位  $S 71^\circ 30' E$  ヲ測レリ. 山ノ高ヲ求ム.

(15) 塔ノ基礎ト同水平ニシテ之ヲ距ル 40 尺及 100 尺ノ兩所ニ於テ塔頂ノ旗竿ニ對スル角ヲ測リシニ何レモ  $8^\circ$  ヲ得タリ. 塔ノ高ヲ求ム.

(16) 水平ナル地面ニ直立セル二柱有リテ東西相對ス. 其ノ高ハ  $a$  及  $b$  ニシテ距離ハ  $c$  ナリ. 正午時ニ太陽ノ高度  $\alpha$  ナレハ柱頂ノ影ヲ結ビ付クル直線ノ方向ヲ問フ. [正午時ニ太陽ハ南中スト假定ス.]

$a = 35$  尺,  $b = 24$  尺,  $c = 30$  尺,  $\alpha = 50^\circ$  ナレハ, 方向如何?

(17) 水平ナル地面ニ東西ニ擴カリタル高  $n$  尺ノ板牆有リ. 太陽ノ方位角  $\theta$  ニシテ高度  $\alpha$  ナレハ其ノ影ノ幅ハ何尺ナリヤ?

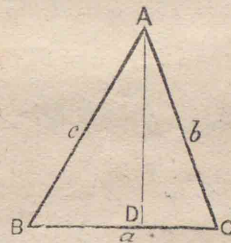
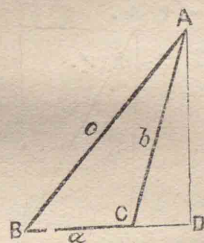
$n = 20$ ,  $\theta = 203^\circ 20'$ ,  $\alpha = 41^\circ 25'$  ナレハ如何?

*Handwritten notes:*  $ad$   $ef$

### 第十五編

### 三角形ノ面積, 外接圓, 內接圓, 等.

#### 107. 三角形ノ面積.



三角形 ABC ニ於テ BC ヲ底邊トシ AD ヲ高トセ

バ. 然ルルハ

$$\begin{aligned} \text{三角形ノ面積} &= \frac{BC \cdot AD}{2} && \text{[幾附, III.]} \\ &= \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2} \quad \text{(lxv)} = S \end{aligned}$$

語ヲ以テセハ: 三角形ノ面積ハ二ノ邊及夾角ノ正弦ノ積ノ半分ニ等シ.

而シテ  $\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\therefore \text{三角形ノ面積} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = S. \quad \text{(lxvi)}$$

[第89節參照]

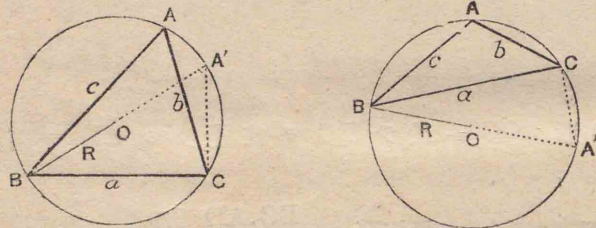
*Handwritten notes:*  
 $\frac{\sin C}{c} = \frac{2S}{abc}$   
 $\frac{\sin A}{a} = \frac{2S}{abc}$   
 $\frac{\sin B}{b} = \frac{2S}{abc}$

問題 XLII.

下ニ記セル三角形ノ面積ヲ求ム.

- (1)  $a = 4$  尺,  $b = 10$  尺,  $C = 30^\circ$ .
- (2)  $b = 1.5$  寸,  $c = 2.4$  寸,  $A = 60^\circ$ .
- (3)  $a = 67.20$  間,  $b = 156.15$  間,  $C = 36^\circ 25' 41''$ .
- (4)  $a = 13$ ,  $b = 14$ ,  $c = 15$  メートル.
- (5)  $a = 72.3$ ,  $b = 51.6$ ,  $c = 61.3$  チェイヴ.

108. 外接圓ノ半徑.



圓AA'CBヲ三角形ABCノ外接圓トシRヲ其ノ半徑トセヨ. Bヲ圓ノ中心Oニ結ビ付ケ之ヲ圓周ト交ル迄延長シ其交點ヲA'トセヨ. A'Cヲ結ビ付ケヨ. 然ルキハ

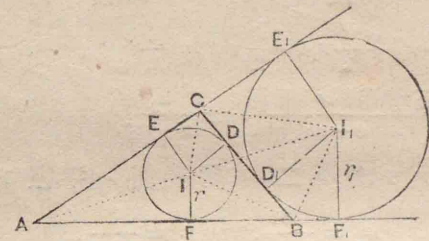
$$\frac{CB}{A'B} = \sin CA'B = \sin CAB = \sin A, \text{ 即 } \frac{a}{2R} = \sin A.$$

$$\therefore R = \frac{a}{2\sin A} \quad (\text{lxvii})$$

$$\text{故} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{abc}{2S} \quad (\text{lxviii})$$

$4SR = abc$

109. 内接圓ノ半徑.



三角形ABCノ内接圓ガ邊ニ切スル點ヲD, E, Fトセヨ. 圓ノ中心ヲIトシ, 半徑ヲrトセヨ. 然ルキハ  $ID = IE = IF = r$ .

三角形ABCノ面積

$$= IBC \text{ノ面積} + ICA \text{ノ面積} + IAB \text{ノ面積}$$

$$= \frac{1}{2}ID \cdot BC + \frac{1}{2}IE \cdot CA + \frac{1}{2}IF \cdot AB \quad S = rs$$

$$= \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc = \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs.$$

$$\therefore r = \frac{\text{三角形ノ面積}}{s} = \frac{S}{s}. \quad (\text{lxix})$$

110. 傍接圓ノ半徑.

邊BC, 及二邊AC, ABノ延長ニ切スル傍接圓ノ切點ヲ夫々D<sub>1</sub>, E<sub>1</sub>, F<sub>1</sub>トセヨ (前節ノ圖). 圓ノ中心ヲI<sub>1</sub>トシ, 半徑ヲr<sub>1</sub>トセヨ. 然ルキハ  $I_1D_1 = I_1E_1 = I_1F_1 = r_1$ .

三角形 ABC の面積

$$= I_1 CA \text{ の面積} + I_1 AB \text{ の面積} - I_1 BC \text{ の面積}$$

$$= \frac{1}{2} r_1 b + \frac{1}{2} r_1 c - \frac{1}{2} r_1 a = \frac{1}{2} r_1 (b+c-a) = r_1 (s-a).$$

$$\therefore r_1 = \frac{\text{三角形ノ面積}}{s-a} = \frac{S}{s-a}. \quad (1xx)$$

同様 =  $r_2$  及  $r_3$  を他ノ二ツノ傍接圓ノ半徑トスレハ

$$r_2 = \frac{S}{s-b}, \quad r_3 = \frac{S}{s-c}.$$

**111.** 三角形及之ニ關係アル直線, 圓, 等ニ關スル定理ハ甚ダ多シ. 今内接圓及傍接圓ニ關スルモノ一班ヲ示ス.

(1) 圓外ノ一點ヨリ引ケル切線ハ相等シキヲ以テ,  
 $AE=AF; BD=BF; CE=CD; AE_1=AF_1; BD_1=BF_1; CE_1=CD_1.$

$$(p) \quad 2AE_1 = 2AF_1 = AE_1 + AF_1 = (AC + CD_1) + (AB + BD_1)$$

$$= AC + CB + BA = a + b + c = 2s.$$

$$(r) \quad 2AE = 2AF = AE + AF = (AC - CD) + (AB - BD)$$

$$= AC + AB - BC = b + c - a = 2(s-a).$$

同様 =  $BF = BD = (s-b); CD = CE = (s-c).$

$$(s) \quad FF_1 = AF_1 - AF = s - (s-a) = a.$$

同様 =  $EE_1 = a.$

$$(*) \quad II_1 = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}. \quad (\wedge) \quad r = (s-a) \tan \frac{A}{2}. \quad (\uparrow) \quad r_1 = s \tan \frac{A}{2}.$$

問 題 XLIII.

(1)  $a = 13, b = 14, c = 15$  尺. 内接圓及傍接圓ノ半徑ヲ求ム.

(2)  $R = \frac{abc}{4S}$  ヲ證セヨ. 又問題(1)ノ三角形ノ  $R$  ヲ求ム.

(3)  $r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$ , 及  $r_1 = \frac{a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$  ヲ證セヨ.

(4) 下ニ記セル式ハ何レモ三角形 ABC ノ面積ヲ表ハスヲ證明セヨ.

(1)  $\frac{abc}{4R}$ . (p)  $2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ . (r)  $(r_1 r_2 r_3)^{\frac{1}{2}}$ .

(s)  $Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$ . (t)  $\frac{1}{2} a^2 \sin B \cdot \sin C \cdot \operatorname{cosec} A$ .

(u)  $ra \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ . (v)  $s^2 \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$ .

(5) 二ツノ邊ガ 50 尺及 60 尺ナル最大三角形ノ面積ハ 1500 平方尺ナリ.

(6)  $R(\sin A + \sin B + \sin C) = s$ . (7)  $r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = s^2$ .

(8)  $bc = 4R^2(\cos A + \cos B \cdot \cos C)$ .

(9) 三角形ノ周  $2s$  及三ツノ角  $A, B, C$  ヲ與ヘテ其ノ解ヲ求ム.

## 附 録.

## 測 量 術 ノ 大 意.

## 第 壹 章. 測 鎖 測 量.

實地ニ距離、角、等ヲ測ルヲ及之ニ依リテ面積ヲ計算シ或ハ地圖ヲ畫キ其他凡テ地上ノ點、線、面、等ノ位置ニ關スル事項ヲ測定スルヲハ皆測量術ニ屬ス

距離ヲ直接ニ測ルニハ測鎖或ハ卷尺ヲ以テスルヲ通常トス.

測鎖ハ鐵製ニシテ其ノ長ハ度法ニ從テ異ナレリ. 本邦ノ度法ニテハ全長10間ニシテ長ハ6寸(一間ノ十分ノ一ニシテ之ヲ一合ト稱ス)ノ鎖子百個ヨリ成ルヲ通常トス. 一間毎ニ眞鍮ノ小片有リテ間數ヲ讀ムニ便ナラシム.

メートル法ニテハ全長20メートルナリ.

英國ノ度法ニテハ全長66英尺即1「チェイン」ナリ.\*

距離測量ニハ此外六尺バカリノ棒(標竿ト稱ス)及一尺バカリノ鐵針(測針ト稱ス)ヲ要ス

測鎖ヲ以テ距離ヲ測ルニハ二人(先手ト後手)ヲ要ス. 先ツ其ノ兩端點A, Bニ標竿ヲ立テ, 後手ハ左ノ手ニ測鎖ノ一端ヲ握リ右ノ手ニ測鎖ノ全部ヲ持テ之ヲ前方ヘ投ケ, 而シテ測鎖ノ端ヲAニ當ツ可シ. 先手ハ後手ノ投ケ出シタル測鎖ノ端ヲ右ノ手ニ握リ左ノ手ニ測針及標竿ヲ持チBニ向ヒテ進ミ測鎖ガ充分伸ビタルト地上ニ標竿ヲ立ツ. 後手ハAノ上ニ眼ヲ置キ先手が立テタル標竿ガBノ標竿ト重ナリテ見ユルカ否ヲ檢ス可シ. 而シテ此兩標竿ガ重ナラザルトハ先手ヲシテ標竿ヲ右或ハ左ヘ移サシメ此標竿ガ丁度Bノ標竿ニ重ナルニ至リテ止ム. 是ニ於テ先手ハ測鎖ガ標竿ノ根ヲ過ル様ニ之ヲ引キ張リ其ノ端ニ測針ヲ

\* 之ヲガンター氏ノ測鎖ト稱ス. 英國ノ度法ニテハ此長ハ至極便利ナルモノナリ. (即, 1英里 = 80「チェイン」, 1「ロッド」 =  $\frac{1}{4}$ 「チェイン」, 1「エーカー」 = 10平方「チェイン」) 1「チェイン」ノ百分ノ一ヲ1「リンク」ト稱ス.

立ツ(測鎖ヲ一直線ニ伸ハスニハ之ヲ數回波打タセテ引キ張ルナリ)。次ニ兩人トモ Bニ向ヒテ進ミ後手ハ先手ノ立テタル測針ノ有ル所ニ來レハ留マルト先手ニ命シ自分ハ測鎖ノ端ヲ其測針ニ當ツ可シ。先手ハ直チニ其地ニ留マリテ前ノ如ク標竿ヲ立ツ。其後ノ手續キハ前法ヲ繰リ返スノミ;但シ後手ハ再ヒ前方ヘ進マントスル際先手ノ立テタル測針ヲ拾ヒ取ルヲ忘ル可ラズ。斯クテ遂ニ Bニ達スレハ途中ニテ拾ヒ集メタル測針ノ數ヲ讀ム可シ、是レ測鎖ダクノ長ヲ幾回測リタルカノ數ナリ。而シテ其餘ノ端數ハ Bニ於テ測鎖ノ眞鍮片及鎖子ヲ檢シテ之ヲ知ルナリ。

測針ノ數ハ五本或ハ十本トス。故ニ途中ニ於テ先手ノ持テル測針全ク盡クルハ其由ヲ後手ニ告ケ後手ノ拾ヒタル測針ヲ悉ク一度ニ受取ル可シ。後手ハ此事ヲ充分ニ記憶シ目的ノ點ニ達シテ測針ノ數ヲ數フルト之ヲ通算ス。

通常要スル所ノ距離ハ水平距離ナリ。故ニ地面若シ斜ナレハ測鎖ノ下端ヲ上ケ之ヲ水平ニ引キ張ルトニ注意ス可シ。若シ測鎖ガ重クシテ之ヲ水平ニ支ヘ

難キカ或ハ高低ノ差が大ニシテ之ヲ水平ナラシムル能ハザルハ測鎖ノ半分ヅ、或ハ尙ホ小部分ヅ、測ル可シ。斯様ニ上ケタル端ノ直下ノ點ヲ得ルニハ垂球ヲ以テスルヲ宜シトス。然レモ通常ハ標竿ヲ直立セシムルカ或ハ測針、小石ノ類ヲ落シテ之レニ代フ。

測鎖ヲ以テ距離ヲ測ルニ當リ屢、起ル過失ハ一測鎖或ハ十測鎖ヲ讀ミ落スヲナリ。此過失ノ有無ヲ檢センニハ測ラントスル二點間ヲ眞直ニ歩行シ步數ヲ數フ可シ。步數ヲ數フルニハ二、足ヲ一、トシテ讀ムヲ便利トス、之ヲ一復歩ト稱ス。測量者ハ豫メ熟練シテ復歩ノ長ヲ一定ス可シ(勿論計算ニ便利ナル長ヲ撰ム;本邦人ノ丈ニハ通例五尺又ハ $\frac{3}{2}$ メートルヲ適當トス)。距離ト共ニ角ヲ測ル測量ニ於テ測角手ハ一、ノ測點ヨリ他ノ測點ニ移ル際、常ニ自分ノ步數ヲ讀ミ之ヲ測鎖手ノ實測シタル長ニ比較シ以テ測鎖手ノ過失ヲ點檢スルヲ可トス。

步數ヲ以テ距離ヲ計ルトハ少シク熟練スレハ隨分精密ナルヲ得。彼ノ有名ナル伊能氏ノ全國測量ノ一部ハ步數ヲ以テ距離ヲ測レリト云フ。

地面ノ廣狹ハ其ノ水平面積ヲ以テ論ス。地面ノ水



平面積トハ其ノ周ガ水平面ヘ投スル正射影ノ面積ナリ。以下主トシテ之ヲ求ムル方法及地圖ヲ作ルヲ講ス。

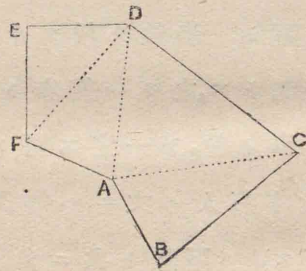
[以下本章及第二章ニ於テ距離(或ハ長), 角, 面積ト稱スルハ總テ水平ナルモノヲ指ス。]

第壹. 對角線ニ依ル法.

測ラントスル地面ヲ對角線ニ依テ三角形ニ分テ其ノ各邊ノ長ヲ測ル可シ。

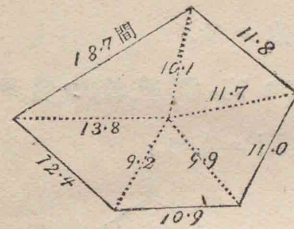
例ヘハ圖ノ如ク

ABCDEFニ於テ AB, BC, CD, DE, EF, FA, AC, AD, DFノ長ヲ測レ。然ルレハ第107節ノ方法ニ從テ其ノ面積ヲ算スルヲ得。



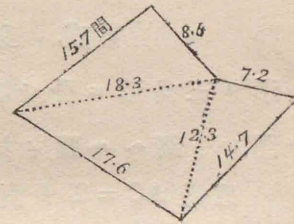
實地ニ於テハ其他 BD 及 AE ノ長ヲ測リ三角形 BCD, ADB, ADE, AEF ノ面積ヲ算シ之ヲ前者ニ比較シ以テ誤測ノ有無ヲ檢ス。

問題 1.



答 270.6 坪.

問題 2.



答 215.1 坪.

地圖ヲ作ル方法. 宅地或ハ狭キ田畑ノ圖ハ地上ノ一間ガ圖上ノ一分ニ當ルモノ即  $\frac{1}{600}$  ノ圖ヲ便利トス。又  $\frac{1}{1000}$ ,  $\frac{1}{1200}$ ,  $\frac{1}{2000}$ , 等ヲ用キルヲ有リ。此分數ヲ圖ノ縮尺ト稱ス。一市街又ハ一郡一國ノ圖ハ尙ホ一層小サキ縮尺ヲ以テス。

地圖ヲ作ルニハ先ツ紙上ニ一點ヲ記シ之ヲ A トス。之ヨリ AB ノ長ヲ隔テ一點ヲ記ス。之レ即 B ナリ。次ニ A ヲ中心トシ AC ノ長ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 又 B ヲ中心トシ EC ノ長ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ

\* 實測シタル AB ノ長ヲ縮尺ニ應シ適當ニ縮ムルヲ勿論ナリ。例ヘハ圖ノ縮尺ガ  $\frac{1}{600}$  ニシテ地上ノ距離ガ 25 間ナレハ圖上ニハ 2 寸 5 分ヲ取ル。

此二ノ弧ノ交點ハ即Cナリ。同様ニD, E,等ヲ決定シテ全圖ヲ完成ス可シ。

第貳. 垂線ニ依ル法.

全形ヲ三角形ニ分チ其ノ底ト高ヲ(即垂線)ヲ實地ニ於テ測レ。例ヘハ圖ノ如キ地面ニ於テ、

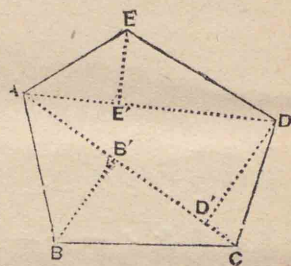
底邊 AC = 23.4 間,

高, BB' = 9.2 間,

高, DD' = 10.9 間,

底邊 AD = 22.9 間,

高, EE' = 6.6 間,



ナレハ面積ヲ算スル下ノ如シ:

$$ABCD \text{ノ二倍面積} = 23.4 \times (9.2 + 10.9) = 470.34,$$

$$ADE \text{ノ二倍面積} = 22.9 \times 6.6 = 151.14,$$

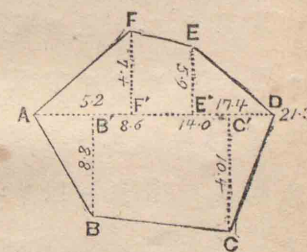
$$\therefore \text{全面積} = \frac{1}{2}(470.34 + 151.14) = 310.74 \text{坪}.$$

實地ニ垂線例ヘハ BB'ヲ測ル手續キハ底邊 ACヲ測ルニ際シ、頂點 Bノ最寄りニ測鎖ヲ張リタル尺卷尺ヲ以テ頂點 Bト測鎖ノ間ノ最短距離(即垂線)ヲ測ルナリ。

此法ハ甚ダ簡便ナルヲ以テ通例田畑ノ地積ヲ計ルニ用ル。然レモ地面ノ圖ヲ作ルヲ能ズ。何トナレハ底邊ト高トノミヲ以テ三角形ノ形狀ヲ決定スルヲ

能ハザレハナリ 若シ地面ノ圖ヲモ作ラント欲セハ垂線ノ足ガ底邊ノ端ヨリ何間ノ處ニ在ルカヲ測ル可シ。此場合ニ於テハ全形ヲ必ズシモ三角形ニ分ツヲ要セズ、便宜ニ依リ梯形ヲモ雜フルヲ得。

例ヘハ圖ノ如ク多角形 ABCDEFニ於テ垂線 BB', FF',... 及其ノ足ノ距離 AB', AF',...ヲ測レハ面積ヲ計算スルヲ得ル下ノ如シ。



(圖ニ於テ垂線ノ傍ニ記シタル數ハ垂線ノ長ヲ表ス又其ノ足ノ處ニ記シタル數ハ對角線ノ起點 Aヨリ其處マデノ距離ヲ表ス。何レモ1間ヲ單位トシテ計リタル數ナリ。)

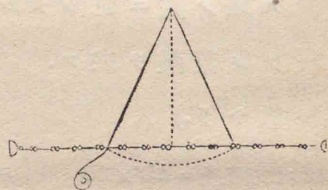
ABB'ノ二倍面積 = AB' × BB'	= 5.2 × 8.8	= 45.76
B'BCC' .. = B'C × (BB' + CC')	= (17.4 - 5.2) × (8.8 + 10.4)	= 234.24
CDC' .. = C'D × CC'	= (21.3 - 17.4) × 10.4	= 40.56
E'DE .. = E'D × EE'	= (21.3 - 14.0) × 5.9	= 43.07
E'EFF' .. = F'E' × (EE' + FF')	= (14.0 - 8.6) × (5.9 + 7.4)	= 71.82
F'TA .. = AF' × FF'	= 8.6 × 7.4	= 63.64
		499.09

$$\therefore \text{全面積} = \frac{499.09}{2} = 249.545$$

$$= 249.5 \text{ 坪 (略)}$$

此測量ニ於テハ底邊ノ端點ヨリ垂線ノ足マデノ距離ヲ要スルヲ以テ垂線ノ足ガ何處ニ在ルカヲ見定メザル可ラス。之ヲ見定ムルニハ角點ヨリ測鎖ノ方ヘ引キ張リタル卷尺ト測鎖ノ交リ方(即直角ニ交ルヤ否ヤ)ヲ目測シテ垂線ノ足ヲ決定スルヲ得。然レモ長キ垂線ニ於テハ目測ニ依リ難シ; 此場合ニ於テハ圖ノ如ク角點ヲ中心トシ任意ノ半徑(垂線ヨリ長キ)ヲ以テ圓弧ヲ畫クハ之ト測鎖ノ交ル二ツノ點ノ中點ハ即垂線ノ足ナリ。

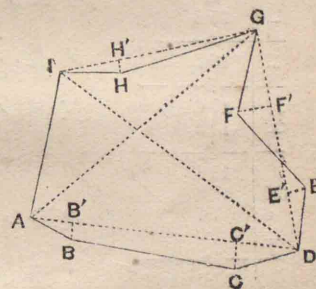
又器械ヲ用キテ垂線ノ足ヲ決定スルヲ得(然レモ斯ノ如キ場合ニ於テハ通常次ニ示ス法ヲ施シ長キ垂線ヲ避ク。)



地圖ヲ作ル方法。紙上ニ一ツノ直線ヲ畫キ之ヲADトス。實測シタル通り其ノ上ニB', F', E'等ヲ記シ, 又之ヨリ垂線ヲ立テ、B, F, E, 等ヲ記セ。

第三. 對角線及枝距ニ依ル法.

地面ノ周ニ小サキ曲リ多キキハ前ノ兩法ヲ併用ス: 即其ノ大勢ヲ見計ヒ全形ヲ四邊形(或ハ三角形或ハ其他ノ多角形)ト見做シAD, DG, GI, IA, AG, IDヲ測リ此四邊形ノ面積ヲ計算シ, 此四邊形ト測ラントスル地面トノ差ハ他ノ角點ヨリ四邊形ノ邊ヘ引ケル垂線BB', CC', 等及其ノ足ノ距離ヲ測リ其ノ面積ヲ計算シ前者ニ加減ス



斯ノ如キ垂線ヲ枝距ト稱ス。之ニ對シテAD, DG等ヲ主線或ハ鎖線ト稱スルヲ有リ。

距離等ヲ野帳ニ記スニハ土地ノ形ニ似セテ圖ヲ畫キ, 之ニ一々距離ヲ記入スルヲ第197丁ノ圖ノ如クスルモ可ナリ。此記法ハ簡單ナル測量ニハ便利ナレモ複雑ナル場合ニハ適當ナラズ。一般ニ用ルヲ得ル方法ハ次ノ如シ:

縱ニ二條ノ平行線ヲ引キ其ノ間ヘ鎖線ノ長ヲ記入

ス、但シ紙ノ下部ヨリ書キ始メ順次ニ上ノ方ヘ書キ  
 添フ可シ。而シテ其ノ右傍或ハ左傍ニ枝距ヲ記ス(夫  
 々實地鎖線ノ右傍ナルカ左傍ナルカニ從テ)。

	D	
	26.2	
	↓	
	G	
	25.8	
┌	A	
	13.0	
┌	I	
	17.6	
┌	12.3	
1.0	G	
	19.6	
┌	12.8	
3.0	7.7	0
0	5.0	1.6
┌	D	
	24.0	2.0
	18.4	
	3.8	1.2
	A	

是ハ前ノ圖ニ對應スルモノニシ  
 テAノ上ノ3.8ハAB'ノ長ヲリ(一間  
 ヲ長ノ單位トス),其ノ上ノ18.4ハAC'  
 又其ノ上ノ24.0ハADノ長ヲリ,右傍  
 ノ1.2,2.0ハ夫々BB',CC'ノ長ヲリ。  
 又Dノ上ノ5.0ハDE'ノ長,7.7ハDヨ  
 リ邊ト鎖線トノ交リマデノ距離ナリ。  
 其他之ニ倣フ。

D,G,I等ノ傍ニ記セル記號┌ハ其點ニ於テノ曲リ  
 方ヲ示ス;即右ヘ曲レハ右傍ニ┌ヲ記シ,左ヘ曲レハ  
 左傍ニ┌ヲ記ス。又—ハ鎖線ノ接續セザル┌ヲ示ス。  
 上ニ記セル地面ノ面積ヲ計算スル┌下ノ如シ。

先ツ四邊形ヲ二ツノ三角形ADG及AGIニ分チ第107  
 節ニ依リ其ノ面積ヲ算ス:

三角形ADG = 223.38

三角形AGI = 104.42

327.80.

又之ヲ二ツノ三角形ADI及DGIニ分テハ、

三角形ADI = 155.31

三角形DGI = 172.47

327.78.

此二ツノ中數ヲ取レハ、四邊形ADGI = 327.79.

次ニ枝距面積ヲ計算ス(+號ハ附ク加フ可キ面積  
 ヲ示シ,-號ハ引キ去ル可キ面積ヲ示ス):

ABB'	ノ二倍面積	= + 4.56,
B'BCC'	ノ二倍面積	= + 46.72,
CC'D	ノ二倍面積	= + 11.20,
DEP*	ノ二倍面積	= + 12.32,
PGF	ノ二倍面積	= - 35.70,
GHI	ノ二倍面積	= - 17.60,

+74.80 - 53.30.

53.30

枝距面積ノ二倍 = +21.50. +

全形ノ面積 = 327.79 +  $\frac{21.50}{2}$  = 338.54 坪.

\*PハEFト鎖線トノ交點ナリ。

†枝距面積ノ計算ハ下ノ如クスルモ可ナリ

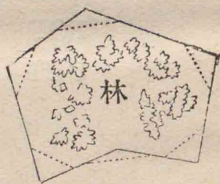
枝距面積 =  $\frac{1}{2} \{ AC'.BB' + B'D.CC' + DF'.EE' - E'G.FF' - GI.HH' \}$ .

(地圖ヲ作ルコトハ前ノ二法中ニ詳ナリ)

附言. 地面ニ家屋樹木ノ如キ障碍物有リテ對角線ヲ測ル能ハザル場合ニハ次章ニ述フル所ノ方法ニ依ルコト固ヨリ當然ナリト雖モ若シ器械無キトハ下ノ如クシテ周圍ノ各角ヲ算出スルコトアリ:

角ヲ夾ム二邊ニ於テ角點ヨリ同シ長キノ所ニ各一點ヲ設ク其二點ノ距離ヲ測リ問題 XLI (5) ノ如クシテ角ヲ算出ス. [圖中ノ點線ノ如シ之ヲ繫線ト稱ス.]

但シ圖ヲ畫ク爲メニハ必ズシモ角ヲ算出スルヲ要セズ地上ノ測法ヲ直ニ紙上ニ於テ繰リ返スコトヲ得. 卽各角點ニ於テ二等邊及繫線ヲ以テ三角形ヲ作ル可シ.



## 第貳章. 羅針盤測量等.

羅針ハ常ニ殆ト一定ノ方向ヲ指スヲ以テ此方向ヲ基本トシテ方位ヲ測ルコトハ甚容易ナリ. 故ニ羅針盤或ハ之ニ類スル器械ヲ以テ各邊ノ方位ヲ測リ之ト各邊ノ長キトヲ以テ面積ヲ計算シ或ハ地圖ヲ作ルコトハ普ク用キル所ナリ.

此種ノ器械ハ目盛り有ル輪郭, 羅針及視器ヲ具ス; 且ツ水準器ヲ附シ輪郭ヲ水平ナラシムル用ニ供ス. 而シテ視器ノミ廻轉スルモノ有リ, 又視器ガ輪郭ト共ニ廻轉スルモノアリ.

器械ノ構造ハ種々有リ\*, 從テ其ノ取扱ヒ方モ異ナレリ. 故ニ簡單ニ述ヘ難シト雖モ下ニ其ノ要點ヲ略説セン.

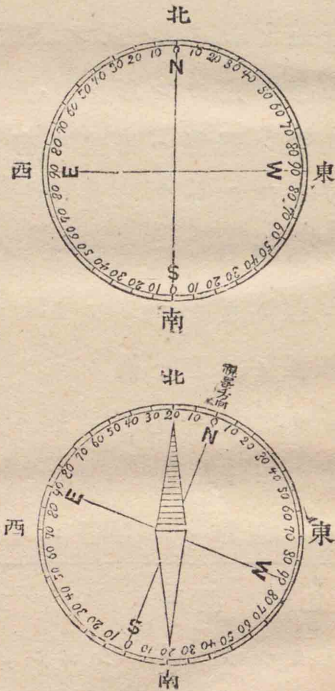
(甲) 視器ノミ廻轉スル器械ニ於テ輪郭ノ目盛り

\* 此種ノ測量ニ用キルコトヲ得ル器械ハ測量用羅針盤ノミナラズ「トランシット」, 「ゴニアスモメートル」, 「ブーソールニフラン」等數多アリ 而シテ多クハ二重ノ輪郭アリテ甲乙兩様ヲ兼ヌ.

ハ第106節ノ如シ。方位ヲ測ラント欲スハ先ツ輪郭ヲ水平ナラシメ且ツ輪郭ノ0°即N點ヲ羅針ノ北端ニ合セシム。而シテ視器ヲ以テ目的ノ物體ヲ覘ヒタル時指標ノ示セル角ハ即要スル所ノ方位ヲ表ス。

(乙) 視器ガ輪郭ト共ニ廻轉スル器械ニ於テ輪郭

ノ目盛ハ第106節ノモノニ反對ナリ、即EトWガ其ノ位置ヲ交換スルヲ圖ノ如シ。視器ハ輪郭ノSNノ方向ニ在リ：目的ノ物體ヲ覘フニハ常ニ視器ノS點ノ方ヲ眼ニ接ス可シ；斯様ニシテ覘ヒタル時羅針ノ北端ニ當ル方位(輪郭面ニ於テ)ハ即要スル所ノ方位ナリ。何トナレハ正北ニ在ル物體ヲ覘フ時ハ羅針ノ北端ハ輪郭ノNヲ



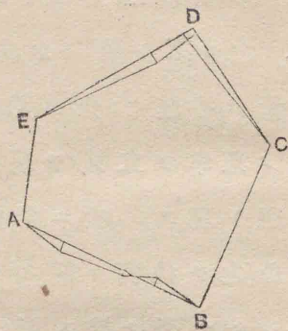
指ス；又例ヘバ北ヨリ東ノ方ヘ20°廻セハ羅針ノ北端

ハ圖ノ如ク輪郭ノNトEトノ間ニ在リテ20°ヲ指ス可シ。之レEトWトガ其ノ位置ヲ交換スル所以ナリ。

測量ノ手續キ：先ツ第一點Aニ器械ヲ据ニ第二點B(豫メ標竿ヲ立ツ)ヲ覘ヒABノ方位ヲ測ル可シ(之ヲ前視ト稱ス)。次ニ器械ヲBニ移シAヲ視返シ其ノ方位(之ヲ後視ト稱ス)ヲ測リ其ノ度数ガ前視ノ度数ニ等シキヤ否ヲ檢ス可シ\*、而シテ其ノ差ガ大ナラ

\* 元來前視ト後視ハ同シ直線ヲ兩方ヨリ視タル方位ナルヲ以テNSEWノ文字ハ相反シ角ハ相等シカル可キ筈ナリ。然レモ實地ニ於テ羅針ノ方向ハ常ニ正シク同一ナルニアラズ、土地毎ニ小異有リ、又同シ地ニテモ時ト共ニ少シク、變化ス(第三章ヲ見ヨ)。故ニ前後兩視ノ差ハ必ズシモ測角手ノ過失ノミナリト断定ス可カラズ。因テ其差ガ小ナレハ其儘野帳ニ記載シ計算ノ際ニ前後兩視ノ中數ヲ求メ之ヲ其ノ方位ト定ム。然レモ兩視ノ差ガ大ナレハ再測ス可シ。若シ再測スルモ尙モ略同一ノ差有レハ其ノ原因ハ土地ノ磁力ニ歸セザル可カラズ。然レモ鐵製ノ建築例ヘハ鐵橋或ハ大廈ノ近傍ニ測點ヲ置クヲ避クレハ土地ノ磁力ノ感應ハ通常微小ナリ。又鐵製ノ物品(測鏡、測針、洋傘ノ類)ヲ近ヅケザル様ニ注意スヘキハ勿論ナリ。

ザルトハ其儘野帳ニ記シ、直ニ第三點Cヲ視ヒ方位ヲ測ルヲ前ノ如シ。測角手が方位ヲ測ル間ニ測鎖手ハ枝距及距離ヲ測ル可シ。斯クノ如クシテC, D, 等ヲ經テ遂ニAニ歸ル

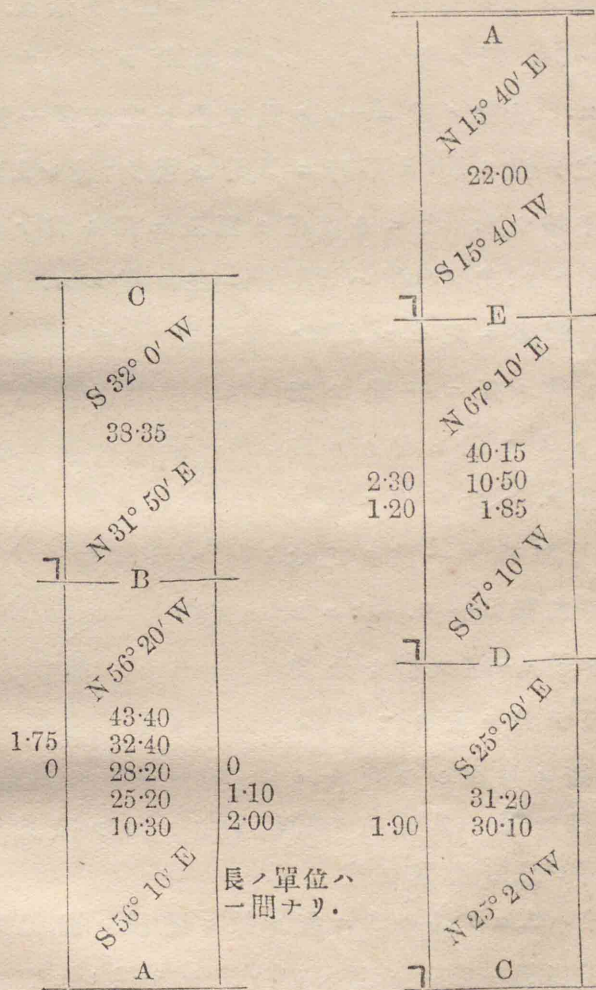


測ラントスル土地ノ周圍ニ木柵土塀ノ類有リテ其ノ角點ニ器械ヲ据ウルヲ能ハザルトハ其ノ近傍ニ適宜ノ地ヲ撰テ之ヲ測點トスルヲ得。但シ其角點ノ枝距ヲ測ルヲ勿論ナリ圖ニ於テDノ如シ。

第一ノ測點ハ必ズ杭ヲ打ツカ或ハ其他ノ方法ヲ以テ地上ニ跡ヲ留ム可シ：是レ後ニ其處へ歸レハナリ。其他ノ測點モ地上ニ跡ヲ留ムルヲ宜シトス。

野帳ノ記シ方ハ第200丁ノモノト同様ナリ。但シ方位ハ常ニ斜ニ記スヲ次ノ如シ：

(測點ノ名A, B, C, 等ノ上ニ記セル方位ハ前視ニシテ其ノ下ニ記セル方位ハ後視ナリ。)

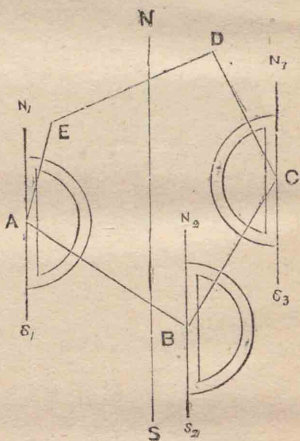


地圖ヲ作ル方法 種々有リ;下ニ二ツヲ示ス。

第一法. 紙ノ中央ニ一ツノ直線NSヲ引キ之ヲ子午線トス. 任意ノ處ニ一ツノ點ヲ置キ之ヲ第一點Aトス. 之ヲ過リNSニ平行ニ $N_1S_1$ ヲ引ク;是レA點ヲ過ル子午線ナリ. 次ニ分度儀ヲ圖上ニ置キ其ノ中心ハAニ重ナリ,其ノ'0°'ハ $N_1S_1$ 上ニ在ル様ニス.

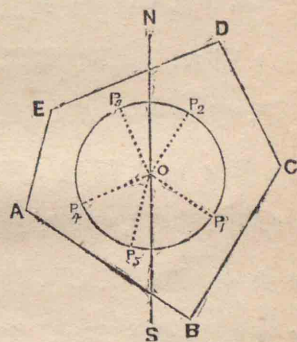
而シテ野帳ニ記セルABノ方位ニ當ル所ニ一 點ヲ記シ,之トAヲ結ヒ付クル直線ヲ引ク. 此直線ニ於テABノ長ヲ取り一 點ヲ記ス;是レ第二點Bナリ. 次ニBヲ過ル子午線ヲ引キ分度儀ヲ以テ角ヲ置ク前ノ如シ;斯ノ如クシテ順次ニC, D, 等ヲ得. 其他總テ實測シタルヲ紙上ニ於テ線リ返シ以テ全圖ヲ完成ス.

鎖線ハAヨリ發シAニ復ル故ニ作圖ノ際,最終邊ノ端ハ丁度第一點Aト合ス可キ筈ナリ然レモ野業并ニ作圖中ニ於テ多少ノ誤リハ免ル、ト能ハザルヲ以テ



嚴正ニ多角形ノ閉ヅルコトハ甚ダ稀ナリ;其ノ閉ヂ方ノ差大ナルモハ再測セザル可ラザレモ其差ガ論スルニ足ラザル程小ナルモハ各點ノ位置ヲ少シク、變化シテ此差ヲ全形ニ配附ス.

第二法. 紙ノ中央ニ分度儀ヲ置キ其ノ周圍ニ第一邊ノ方位ニ當ル點 $P_1$ ,第二邊ノ方位ニ當ル點 $P_2$ 等ヲ記ス, 次ニ適宜ノ處ニ一 點ヲ取リ之ヲAトス. Aヲ過リ $OP_1$ ニ平行ニ一ツノ直線ヲ書キ此線上ニ於テABノ長ヲ取りBヲ得. 次ニBヲ過リ $OP_2$ ニ平行ニ一ツノ直線ヲ書キ此線上ニ於テBCノ長ヲ取りCヲ得. 其他之ニ倣フ. 此法ハ邊數ノ少キモ殊ニ便利ナリ.



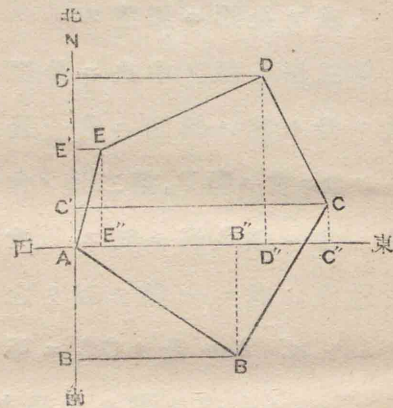
面積ヲ計算スルコト. 前述ノ方法ニ依テ得タル地圖上ニ於テ第壹章ノ方法ヲ行フコトヲ得:即之ヲ三角形或ハ梯形ニ分テ物指シテ以テ對角線,垂線,等ヲ計リ之ニ依テ面積ヲ計算スルナリ. 然レモ此法ニ依リテハ精密ナル値ヲ得ルコト難シ. 之ヲ得ント欲セハ下ニ記セル直角法ニ依ル可シ.



面積計算ノ直角法

圖ニ於テANハAヲ過ル子午線ナリ; BB', CC', 等ハANニ垂線ニシテBB'', CC'', 等ハANニ平行ナリ。

AB, BC, CD, 等ヲ測路ト稱ス。 AB', B'C', C'D', 等ヲ夫々AB, BC, CD, 等ノ南北距離ト稱シ; AB'', B''C'', C''D'', 等ヲ夫々AB, BC, CD, 等ノ東西距離ト稱ス。 之ヲ算スル式ハ下ノ如シ:



南北距離 = (距離) × (方位ノ餘弦),

東西距離 = (距離) × (方位ノ正弦);

斯ク得タル AB', B'C', C'D', ..... 及 AB'', B''C'', C''D'', ...ニ由リテ三角形 ABB', AEE', 梯形 B'BCC', C'CDD', D'DEE' ノ面積ヲ算シ而シテ下式ノ如ク之ヲ加減スレハ全形ABCDEノ面積トナル:

$$B'BCC' + C'CDD' - (D'DEE' + ABB' + AEE')$$

枝距ニ關スル面積ハ第201丁ノ如ク計算シテ之ニ加

減スベシ。

問題 1.

	方位	距離
1	N 34½° E	27.3
2	N 85° E	12.8
3	S 56½° E	22.0
4	S 34½° W	35.3
5	N 56½° W	32.0
1		

問題 2.

	方位	距離
1	N 35° E	64.9
2	S 56½° E	141.5
3	S 34° W	51.0
4	N 56° W	58.4
5	S 29½° W	25.2
6	N 48½° W	87.3
1		

前ニモ述ヘタル如ク一測路ノ前視後視ノ角ノ差ハ通常ノ場合ニ於テ大ナルヲ無カル可シ。 故ニ精密ヲ要セザル測量ニ於テハ前視ノミ或ハ後視ノミニテ足レリ。 斯ノ如キ場合ニ於テハ隔點ニ器械ヲ据ウルヲ

一層便利トス;即チ先ツ第二點Bニ器械ヲ据エ第一點Aヲ規ヒ(ABナル測路ノ後視)而シテ第三點Cヲ規フ可シ(BCナル測路ノ前視).次ニ器械ヲ第四點Dニ移シC及Eヲ規フ;其他之ニ倣フ.(第222丁ニ記セル野帳ノ離形ノcklm<sub>g</sub>線ヲ見ヨ.)

廣キ土地ノ測量ニ於テハ多角形ヲ爲セル鎖線ガ全ク閉ヅトモ過失無シト信シ難シ.何トナレハ數回ノ過失互ニ平均シテ過失無キガ如キ觀ヲ呈スルコト有レハナリ.故ニ之ヲ檢センガ爲メニ多角形ノ一ノ角點ヲ發シ全形ヲ横斷スル測路ヲ取リテ他ノ角點ニ達ス可シ.卷首ニ載セタル帝國大學構内之圖ノcklm<sub>g</sub>ノ如キ之レナリ.而シテ作圖或ハ計算ニ於テ此線ノ端ガ周ノ適當ノ點ニ落ツレハ測量ノ確實ナルヲ知ル.

### 第三章. 羅針子午線及眞子午線.

羅針ノ子午線ハ眞子午線ニ合セズシテ之ト或ル角ヲ爲ス.之ヲ羅針ノ方位角ト云フ.此角ハ各地異ナレリ;下ニ明治20年ノ夏,田中館氏及ノット氏ノ磁力測量ノ結果ノ一部分ヲ示ス.

羅針子午線ノ方位角(西)

根 室	4° 21'3	東 京	4° 21'0
札 幌	6 0'0	名 古 屋	4 31'9
青 森	5 22'2	松 江	4 51'6
鹽 竈	5 5'5	高 知	4 20'8
新 潟	5 9'4	長 崎	3 33'7

又年々少シヅ、變化ス;伊能氏ノ全國測量ノ際ニハ方位角零ニシテ羅針ノ北ハ眞ノ北ト合セシコト同氏ノ記録中ニ見ユタリ,然ルニ現今ハ前表ノ如シ.

又毎日殆ド一定ノ變化ヲ繰リ返スコト次表ノ如シ而シテ此變化モ亦土地毎ニ小異有リ.

午 前				午 後			
0 時	4° 29'6	6 時	4° 28'8	0 時	4° 32'0	6 時	4° 29'8
1	4 29'4	7	4 28'4	1	4 32'2	7	4 30'0
2	4 29'3	8	4 28'1	2	4 32'0	8	4 30'0
3	4 29'2	9	4 28'4	3	4 31'2	9	4 29'9
4	4 29'2	10	4 29'6	4	4 30'4	10	4 29'8
5	4 29'1	11	4 31'0	5	4 29'9	11	4 29'7

此表ハ中央氣象臺ニ於テ明治三十年中毎日爲シタル觀測ヲ平均シタルモノナリ.

精密ニ真子午線ヲ決定スルニハ夜間北極星ヲ觀測スルヲ要ス。然レモ晝間行ヒ得可キ一便法アリ；直立セル棒ガ太陽ニ照サレタルト水平面ニ投スル影ハ午前ト午後ニ於テ同シ長ナル時有り、此影ノ夾ム角ヲ二等分スル直線ハ即真子午線ナルヲ明ナリ。

#### 第四章. 經緯儀.

凡テ精密ニ角ヲ測ル場合例ヘハ三角測量ノ如キニ於テハ經緯儀ヲ用キテ角ヲ觀測ス。

其ノ裝置ニ至リテハ甚複雑ナルモノ有リト雖モ通常ノ經緯儀ニ付テ主ナル部分ノ名稱ヲ掲クレハ：水平輪郭、直立輪郭、望遠鏡、水平軸、直立軸、指標、水準器、脚、等ナリ。

望遠鏡ハ水平軸ニ依テ上下ニ廻轉シ、直立軸ニ依テ左右ニ廻轉スルヲ得；即任意ノ方向ニ之ヲ向ハシムルヲ得。水平輪郭ハ水平角ヲ計ルニ用キ、直立輪郭ハ仰角、俯角ヲ計ルニ用キル。

角ヲ測ラント欲セハ先ツ脚ヲ適當ニ移動シ、以テ

經緯儀ノ中心ガ測點ノ真上ニ在ル様ニス：之ヲ檢スルニハ垂球ヲ以テス。

次ニ水平輪郭ノ下ニ在ルヲテテ適當ニ廻轉シテ以テ直立軸ヲ直立ナラシム：水準器ハ之ヲ檢スルノ用ヲ爲ス。

是ニ於テ望遠鏡ヲ以テ目的ノ物體ヲ視望ス。仰角或ハ俯角ヲ求ムル場合ニ於テハ直立輪郭ノ指標ノ示セル角ハ即チ要スル所ノ角ナリ。二直線ノ爲セル水平角ヲ求ムル場合ニ於テハ各點ヲ視望シタルキ水平輪郭ノ指標ノ示セル角ヲ讀ミ而シテ其ノ差ヲ取ル、是レ即チ要スル所ノ角ナリ。故ニ水平輪郭ノ $0^\circ$ ハ何處ニ在ルモ差支無シ。

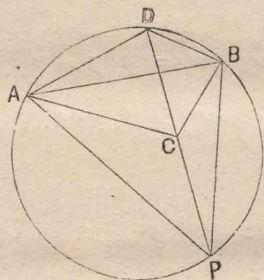
正シキ器械ニ於テハ直立軸ガ直立ナルトハ水平輪郭ハ水平ノ位置ヲ取ル其他ノ諸部モ亦各其ノ當ヲ得ルモノナリ [器械ノ正シキヤ否ヲ檢スル方法等ハ略ス。]

#### 第五章 三線測量.

水平距離ノ知レタル三點 A, B, C 有リ。他ノ一點 P ニ於テ之ニ A, B, C ヲ結ヒ付クル三線ノ間ノ水平

角 ( $APC = \alpha$ ,  $CPB = \beta$ ) を知ルルハ  $A, B, C$  ヨリ  $P$  ニ達スル水平距離ヲ知ルヲ得.\* (故ニ又  $P$  ニ於テ直立角ヲ測レハ與ヘラレタル點ヨリノ直立距離ヲモ知ルヲ得ルヲ勿論ナリ.)

圖ニ依テ此問題ヲ解ク。圖ノ縮尺ニ應シ適當ニ



三點  $ABC$  ヲ畫ク。角  $ABD$  ヲ  $\alpha$  ニ等シク取り、角  $BAD$  ヲ  $\beta$  ニ等シク取り、 $AD, BD$  ノ交點  $D$  ヲ得、次ニ三點  $ABD$  ヲ過ル圓周ヲ畫ク。之ト  $DC$  (或ハ其ノ延長) ノ交點ハ要スル所ノ點  $P$  ナリ

\* 之ヲ三點問題ト云フ又「ポテノ」問題或ハ「スチリス」問題ト云フ。灣港或ハ河底ノ深淺ヲ測量スル際船ノ位置ヲ決定スル爲メ常ニ用ヰル所ナリ。

何トナレハ  $APC$  及  $BPC$  ハ夫々之ト同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ角  $ABD$  及  $BAD$  ニ等シ即  $\alpha$  及  $\beta$  ニ等シクレハナリ。

計算ニ依リテ此問題ヲ解ク。角  $CAP$  及  $CBP$  ヲ夫々  $x$  及  $y$  トセヨ。四邊形ノ内角ノ和ハ四直角ナリ而シテ四邊形  $ACBP$  ニ於テ二ノ角  $APB$  (即  $\alpha + \beta$ ) 及  $ACB^*$  ヲ知ルヲ以テ他二角ノ和  $x + y$  ヲ算スルヲ得而シテ

$$CP = \frac{b \sin x}{\sin \alpha} = \frac{a \sin y}{\sin \beta}, \dots \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}.$$

次ニ  $\tan \phi = \frac{a \sin \alpha}{b \sin \beta}$  ニ依リテ補助角  $\phi$  ヲ見出セ。

然ルルハ  $\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\tan \phi - 1}{\tan \phi + 1} = \tan(\phi - 45^\circ),$

$$\therefore \tan \frac{x-y}{2} = \tan \frac{x+y}{2} \cdot \tan(\phi - 45^\circ).$$

斯様ニ  $x - y$  ノ値ヲ得タリ; 之ト  $x + y$  ノ値ニ依リテ  $x$  及  $y$  ヲ求ムルヲ得。因テ又  $AP, BP, CP$  ヲ求ムルヲ得。

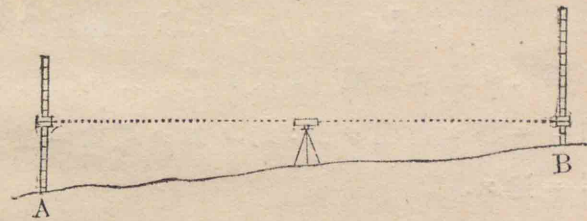
\* 角  $ACB$  ハ豫メ三角形  $ABC$  ノ三邊ニ依リ計算スルヲ要ス。

## 第六章. 水準測量.

高低ヲ測ルヲ水準測量ト稱ス. 之ニ對シテ, 前ノ諸章ニ述ヘタル如ク水平面上ノ正射影ヲ測ルヲ水平測量ト稱ス.

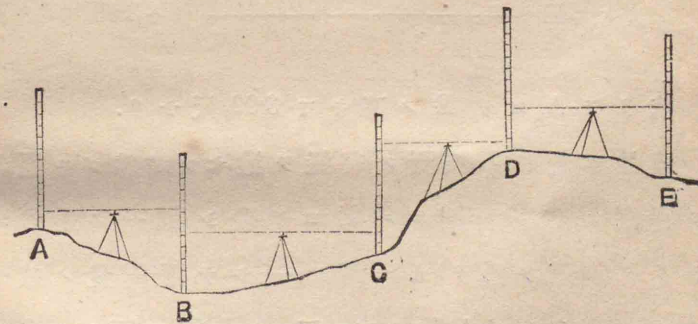
高低ヲ直接ニ測ルニハ水準儀ヲ以テス. 測ラントスル二點ヲ A, B トセヨ. 先ツ助手ヲシテ A ニ自現標尺ヲ立テシム (自現標尺ハ太ク且ツ鮮明ナル目盛り有ル棒ナリ). 觀測者ハ A, B ノ中間ニ水準儀ヲ置キ其ノ望遠鏡ヲ水平ナラシメ, 之ヲ以テ A ノ標尺ヲ規ヒ標尺面ニ於テ下ヨリ何尺何寸何分ノ處カ望遠鏡内ノ十字字ニ一致スルカヲ見定メ之ヲ野帳ニ記ス (之ヲ後視ト稱ス). 次ニ助手ヲシテ標尺ヲ B ニ移サシメ而シテ前ノ如ク標尺ヲ規フ可シ (之ヲ前視ト稱ス).

望遠鏡ノ力弱キカ或ハ望遠鏡ヲ有セザル水準儀ヲ用ルルキハ自現標尺ヲ使用スルヲ能ハズ; 因テ規板ヲ附シタル標尺ヲ代用ス. 觀測者ハ助手ヲシテ規板ヲ上或ハ下ヘ移サシメ其ノ中央ヲ望遠鏡内ノ十字字ニ一致セシム. 而シテ標尺ノ下端ヨリ規板ノ中央マデノ距離ヲ讀ム



例ヘハ後視 6 尺ニシテ前視 2 尺ナリトセヨ. 之レ望遠鏡ノ中心ヲ過ル水平面ハ A ヨリ上 6 尺ノ處及 B ヨリ上 2 尺ノ處ヲ過ルト云フヲナリ. 故ニ A ヨリ B ノ高キヲハ  $6 - 2 = 4$  尺ナリ.

測ラントスル兩地ガ遠隔スルキハ中間ニ數點ヲ置キ順次ニ諸點ノ高低ヲ測リ之ヲ合算ス.



例ヘハ測ラントスル二點ヲ A, E トセヨ. 先ツ A ニ標尺ヲ立テ適宜ノ位置ニ水準儀ヲ置キ之ヲ規ヒ

後視 1.5 尺ヲ得。次ニ標尺ヲ前方ノ一點 B ニ移シ之ヲ規ヒ前視 7.2 尺ヲ得。次ニ水準儀ヲ前方ヘ移シテ B ノ標尺ヲ規ヒ後視 5.1 尺ヲ得。次ニ標尺ヲ前方ノ一點 C ニ移シ前視ヲ得：斯ノ如ク順次ニ前進シテ遂ニ E ニ達ス。

	後視	前視	高低	標高
A	$\overset{R}{1.50}$	$\overset{R}{7.20}$	$-\overset{R}{5.70}$	$\overset{R}{0.00}$
B	5.10	2.00	+3.10	-5.70
C	9.62	0.70	+8.92	-2.60
D	3.61	5.94	-2.33	+6.32
E				+3.99

依リテ A ヨリ E ノ高キヲ 3.99 尺ナリ。

實地ニ於テハ誤測ノ有無ヲ檢センガ爲メニ通常之ヲ再測ス、但シ再測ニハ E ヨリ發シ(同一ノ道或ハ異ナリタル道ヲ通り)Aニ歸ル、而シテ兩測量ノ差ガ論スルニ足ラザル小數ナレハ二ツノ中數ヲ取ル。〔第 103 及 104 節ヲ參照セヨ。〕

經緯儀ニ依リテ仰角或ハ俯角ヲ測リ以テ高低ヲ

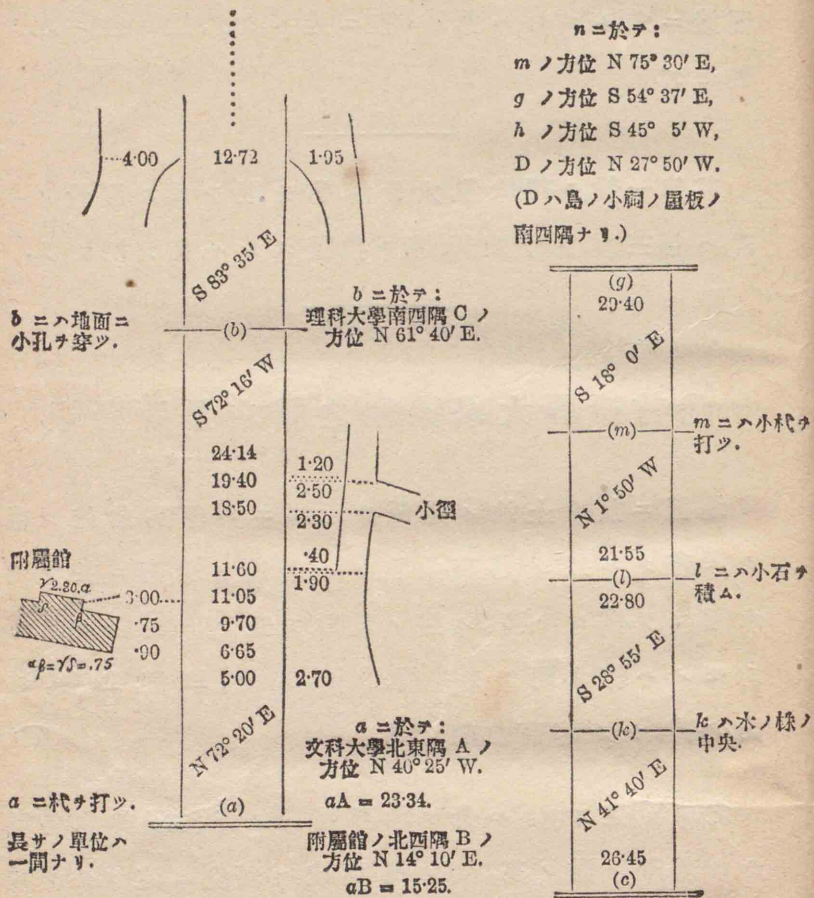
間接ニ求ムルヲハ第 102 節ニ述ヘタリ、故ニ茲ニ之ヲ贅セズ。

其他一般ニ經緯儀、六分儀、等ヲ以テスル測量ノ要旨ハ第三編、第十四編、等ヲ熟讀スレハ自ラ明ナリ。

### 卷首帝國大學構内之圖之解及野帳。

地圖ニ於テ土地ノ高低ヲ示スニハ等高曲線ヲ畫クニ若クハ無シ(等高曲線トハ土地ノ表面ニ於テ海水面ヨリ等シキ高<sub>h</sub>ノ點ノ軌跡ヲ云フ)。此圖ニ記セルモノハ海水面ヨリ 8 間、9 間、10 間、11 間、12 間、13 間ノ高<sub>h</sub>ナル等高曲線ナリ。

之ヲ測定スルニハ先ツ水平測量ノ各測點其他必要ナル若干ノ點ノ高<sub>h</sub>(即海水面或ハ便宜ニ定メタル基本水平面ヨリノ高<sub>h</sub>)ヲ水準測量ニ依テ實測ス可シ。而シテ其地圖ヲ現場ニ携帶シ地勢ヲ目撃シテ等高曲線ヲ描寫スルナリ。



nニ於テ:  
 mノ方位 N 75° 30' E,  
 gノ方位 S 54° 37' E,  
 hノ方位 S 45° 5' W,  
 Dノ方位 N 27° 50' W.  
 (Dハ島ノ小祠ノ屋根ノ南西隅ナリ.)

(g)	29-40	
	S 18° 0' E	
(m)		mニハ小杖ヲ打ツ.
	N 1° 50' W	
	21-55	
(l)	22-80	lニハ小石ヲ積ム.
	S 23° 53' E	
(c)		cニハ水ノ柱ノ中央.
	N 41° 40' E	
	28-45	
(e)		

點 A, B ヲ決定スル爲メニ aニ於テ aA, aBノ距離及方位ヲ測リタリ. 之ヲ光線法ト稱ス.  
 點 Oハ b, c, dヨリノ方位ニ依テ決定セリ. 之ヲ交會法ト稱ス.  
 點 nハ nニ於テ測リタル m, g, hノ方位ニ依テ決定セリ. 之ヲ立線法ト稱ス.  
 磁針磁測量ノ通常ノ測リ方 (即 a b c d ... a k (m gノ如キ)ヲ道線法ト稱ス.

問 題 ノ 答.

I. (4, 5, 6 丁.)

πノ値ヲ  $\frac{22}{7}$  トシテ計算スルニ凡ソ結果ノ千分ノ一ヨリ下ハ信ヲ置ク能ハザルヲ以テ答ハ最初ノ有効數字ヨリ三桁ノ近似數ニ切り上グ可シ.

近似數ヲ求ムル際, 削ル可キ部分ガ5ヨリ小ナレハ其儘之ヲ捨テ, 5ヨリ大ナレハ其前ノ桁ニ1ヲ入レテ之ヲ削ル可シ 例ハ 265.482ノ二桁, 三桁, 四桁ノ近似數ハ夫々 270, 265, 265.5ナリ.

削ル可キ桁ガ丁度5ナルニ捨入何レニテモ可ナリ; 然レ而斯ノ如キ場合ニ於テハ下ノ如クスルヲ便利トス:

其ノ前ノ數字ガ奇數ナレハ之ヲ刈リ上クルナリ,  
 其ノ前ノ數字ガ偶數ナレハ之ヲ切り捨ツルナリ.

例ハ 2.235, 2.245ノ三桁ノ近似數ハ何レモ 2.24ナリ.

- (1) (i) 124° 39'. (ii) 237° 38' 42". (iii) 63° 15' 59" 04.
- (iv) 0° 0' 4" 617.
- (2) (i) 3495 直角. (ii) 09175 直角.

(iii) 323012345679 直角 (iv) 64 直角.

(3) 正五邊形ノ一角ハ  $108^\circ$ , 正八邊形ノ一角ハ  $135^\circ$ ,  
正十五邊形ノ一角ハ  $156^\circ$ .

(4) 57.3 度. (5) 2 寸 6 分 2 厘. (6) 1.16 英里.

(7) 7.16 度. (8) 1,400,000 キロメートル. (9) 400:1.

(10) 473.489. (11) 41,200,000,000,000 キロメートル.

## II. (12, 13, 14 丁.)

(1)  $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ . (2) (a)  $\frac{15}{17}, \frac{15}{8}$ . (b)  $\frac{40}{41}, \frac{40}{9}$ , (c)  $\frac{2}{\sqrt{5}}, 2$ .

(3) (a)  $\sin BAC = \frac{5}{13}$ ,  $\cos BAC = \frac{12}{13}$ ,  $\tan BAC = \frac{5}{12}$ ,  
 $\cot BAC = \frac{12}{5}$ ,  $\sec BAC = \frac{13}{12}$ ,  $\operatorname{cosec} BAC = \frac{13}{5}$ .

(b)  $\sin BAC = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ,  $\cos BAC = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $\tan BAC = 3$ ,  
 $\cot BAC = \frac{1}{3}$ ,  $\sec BAC = \sqrt{10}$ ,  $\operatorname{cosec} BAC = \frac{\sqrt{10}}{3}$ .

(c)  $\sin BAC = \frac{1}{2}$ ,  $\cos BAC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan BAC = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  
 $\cot BAC = \sqrt{3}$ ,  $\sec BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $\operatorname{cosec} BAC = 2$ .

(5) 6 寸,  $6\sqrt{3}$  寸. (6) 17.62 メートル.

## IV. (22 丁.)

(1)  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ ,  $\tan A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A}$ ,  $\cot A = \frac{\cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}}$

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}, \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 A}}$$

$$(2) \sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}, \cos A = \frac{\cot A}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}, \tan A = \frac{1}{\cot A},$$

$$\sec A = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A}, \operatorname{cosec} A = \sqrt{1 + \cot^2 A}.$$

$$(3) \sin A = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A}, \cos A = \frac{1}{\sec A}, \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1},$$

$$\cot A = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}, \operatorname{cosec} A = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}}.$$

$$(4) \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}, \cos A = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}{\operatorname{cosec} A}, \tan A = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}},$$

$$\cot A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}, \sec A = \frac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}.$$

## V. (23 丁.)

$$(1) \tan A = \frac{3}{4}, \operatorname{cosec} A = \frac{5}{3}. (2) \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \cot A = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$(3) \sin A = \frac{4}{5}, \sec A = \frac{5}{3}. (4) \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(5) \sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{15}}. (7) \frac{1 - \sin B}{1 + \sin B}.$$

## VI. (27 丁.)

$$(1) \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$(2) \sin 22^\circ 5' = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \cos 22^\circ 5' = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$



$$(3) \sin 67^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cos 67^\circ 30' = \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\tan 67^\circ 30' = \sqrt{2+1}, \cot 67^\circ 30' = \sqrt{2-1}, \sec 67^\circ 30'$$

$$= \sqrt{4+2\sqrt{2}}, \operatorname{cosec} 67^\circ 30' = \sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

$$(4) \tan 11^\circ 15' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

**VII.** (34, 35, 36 丁.)

- (1)  $\frac{50}{\sqrt{3}}$  間. (2) 80 尺. (3)  $60^\circ; 100\sqrt{3}$  尺.  
 (4)  $30(2+\sqrt{3})$  間. (5)  $200\sqrt{2-\sqrt{2}}$ . (6)  $50(2+\sqrt{3})$  尺.  
 (7)  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  英里. (8)  $50(3-\sqrt{3})$  間. (9) 61.5 尺.  
 (10) 8.84 尺. (11) 1347 尺. (12) 4.87 寸. (13) 116 尺.  
 (14) 82.1 尺. (15) 30.6 間. [先ッ AC ノ距離ヲ算出シ  
 然ル後高ヲ算ス.]

**VIII.** (41 丁.)

- (1) 第二象限. (2) 第四. (3) 第二. (4) 第三.  
 (5) 第四. (6) 第一. (7) 第二.

**IX.** (48 丁.)

$$(1) \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2) -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}.$$

$$(3) -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1. \quad (4) -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$(5) \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1. \quad (6) \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}.$$

$$(7) -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1. \quad (8) \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$(9) \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (10) \frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}, -\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}, -(2+\sqrt{3}).$$

$$(11) -\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}, -\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}, 2-\sqrt{3}.$$

$$(12) -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

**XI.** (58 丁.)

- (1)  $10^\circ, 100^\circ.$  (2)  $-60^\circ, 30^\circ.$  (3)  $210^\circ, 300^\circ.$   
 (4)  $-180^\circ, -90^\circ.$  (5)  $0^\circ, 90^\circ.$  (6)  $115^\circ, 205^\circ.$   
 (7)  $51^\circ 33' 13'', 141^\circ 33' 13''.$

**XIV.** (66 丁.)

- (1)  $\sin 30^\circ.$  (2)  $-\cos 40^\circ.$  (3)  $-\tan 80^\circ.$  (4)  $\cot 40^\circ.$   
 (5)  $\sec 60^\circ.$  (6)  $-\operatorname{cosec} 36^\circ.$   
 (9)  $\sin 155^\circ, -\cot 164^\circ.$  (10)  $\sin 68^\circ, \sin 80^\circ.$

**XVII.** (77, 78 丁.)

$$(8) \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B). \quad (9) \frac{1}{2}\{\cos(3A-2B) - \cos(3A+2B)\}$$

- (10)  $\cos 2A + \cos A$ . (11)  $\frac{1}{2}(\sin 4A - \sin A)$ .  
 (12)  $\frac{1}{2}(\sin 60^\circ + \sin 40^\circ)$ . (13)  $\frac{1}{2}(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ)$ .  
 (14)  $2\cos 3\theta \cdot \cos 2\theta$ . (15)  $\tan 2\alpha$ . (16)  $4\cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin 2\theta$ .

**XX.** (89, 90 丁.)

- (1) (イ)  $30^\circ$ , (ロ)  $45^\circ$ , (ハ)  $60^\circ$ , (ニ)  $210$ .  
 (2) (イ)  $20^\circ, 160^\circ, 380^\circ, 520^\circ$ . (ロ)  $225^\circ, 315^\circ, 585^\circ, 675^\circ$ .  
 (ハ)  $205^\circ, 335^\circ, 565^\circ, 695^\circ$ .  
 (3) (イ)  $x = n \times 180^\circ - (-1)^n \times 30^\circ$ .  
 (ロ)  $x = n \times 180^\circ$ . (ハ)  $A = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \times 180^\circ$ .

**XXI.** (94, 95 丁.)

- (1) (イ)  $x = 2n \times 180^\circ \pm 60^\circ$ . (ロ)  $x = n \times 180^\circ + 45^\circ$ .  
 (ハ)  $x = n \times 180^\circ - 45^\circ$ . (ニ)  $A = (2n + 1) \times 180^\circ$ .  
 (ホ)  $A = n \times 180^\circ - 60^\circ$ . (ヘ)  $\theta = 2n \times 180^\circ \pm 20^\circ$ .  
 (ト)  $\theta = n \times 180^\circ + 135^\circ$ .  
 (2) 正切及餘切. (3) 無シ.  
 (4) (イ)  $60^\circ, -60^\circ, 300^\circ, -300^\circ$ .  
 (ロ)  $45^\circ, 225^\circ, 405^\circ, -135^\circ$ .

- (ハ)  $-45^\circ, -225^\circ, 135^\circ, 315^\circ$ . (ニ)  $180^\circ, -180^\circ, 540^\circ, -540^\circ$ .  
 (ホ)  $-60^\circ, -240^\circ, 120^\circ, 300^\circ$ . (ヘ)  $20^\circ, -20^\circ, 340^\circ, -340^\circ$ .  
 (ト)  $135^\circ, -45^\circ, -225^\circ, 315^\circ$ .

**XXII.** (98, 99 丁.)

- (1)  $30^\circ$ . (2)  $60^\circ$  或ハ  $90^\circ$ . (3)  $45^\circ$ . (4)  $45^\circ$  或ハ  $90^\circ$ .  
 (5)  $18^\circ$ . (6)  $A = 18^\circ, B = 24^\circ$ . (7)  $A = \frac{27^\circ}{2}, B = 3^\circ$ .  
 (8)  $150^\circ, 210^\circ$ . (9)  $15^\circ, 165^\circ, 255^\circ, 285^\circ$ .  
 (10)  $x = n \times 180^\circ \pm 45^\circ$ . (11)  $x = n \times 180^\circ \pm 30^\circ$ .  
 (12)  $x = n \times 180^\circ \pm 45^\circ$ . (13)  $A = n \times 180^\circ \pm 60^\circ$ .  
 (14)  $A = n \times 180^\circ + (-1)^n \times 30^\circ$ . (15)  $\theta = n \times 180^\circ \pm 45^\circ$ .  
 (16)  $n \times 180^\circ$ ; 或ハ  $2n \times 180^\circ \pm 120^\circ$ .  
 (17)  $(2n + 1) \times 30^\circ$ ; 或ハ  $(3n + 1) \times 60$ .

**XXIII.** (101 丁.)

- (1)  $x = 2n \times 180^\circ + 30^\circ \pm 60^\circ$ .  
 (2)  $x = 2n \times 180^\circ + 45^\circ \pm 30^\circ$ .  
 (3)  $x = 2n \times 180^\circ - 45^\circ \pm 135^\circ$ .  
 (4)  $\theta = n \times 180^\circ + 30^\circ + (-1)^n 45^\circ$ .

- (5)  $x = n \times 180^\circ - 68^\circ 12' + (-1)^n (21^\circ 48')$ .  
 (6)  $x = 2n \times 180^\circ - 69^\circ 26' 38'' \pm 69^\circ 26' 38''$ .  
 (7)  $x = 2n \times 180^\circ + 53^\circ 8' \pm 66^\circ 25'$ .

**XXIV.** (105 丁.)

(2)  $+\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ .      (4)  $-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ .

**XXV.** (109, 110 丁.)

- (1) (イ) +, -.      (ロ) -, +.      (ハ) -, -.  
 (ニ) +, -.      (ホ) +, -.      (ヘ) +, +.  
 (ト) -, -.      (チ) -, -

**XXVI.** (111, 112 丁.)

- (1) 4.      (2) 5, 3,  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ .

**XXVII.** (114 丁.)

- (1) 3,  $\frac{10}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $-\frac{5}{2}$ .      (2) 3,  $\frac{3}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-2$ ,  $\frac{2}{3}$ .  
 (3)  $\frac{3}{2}$ ,  $-2$ , 3,  $-\frac{3}{2}$ .      (4)  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ .  
 (5) (イ) 1.62325.      (ロ) 2.14613.      (ハ) 3.55630.  
 (ニ) 3.69897.      (ホ) .86272.      (ヘ) .36544.

**XXVIII.** (119 丁.)

- (1) 3, -1, 0, 1, 5, -7.      (2) 4, 1, 6, 3, 11.  
 (3) 萬ノ位, 一ノ位, 十ノ位, 小數點下第三位, 小數點下第一位, 小數點下第二位.      (4) 6, 10, 61, 5.

**XXIX.** (120 丁.)

- (1) 4.27073.      (2) 1.25269.      (3) 2.56356.  
 (4)  $\bar{6}$ .66205.      (5)  $\bar{3}$ .91388.      (6)  $\bar{1}$ .19169.

**XXX.** (127, 128 丁.)

(注意. 卷末ノ表ニ付テ注意ス可キ事項ヲ表ノ表紙ニ記セリ.)

- (1) 2.46349,  $\bar{3}$ .46356.      (2) 40.122, .00040126.  
 (3) 2.7999971, 6.8000005.      (4) 24183.94, .02418353.  
 (5) 2.08056, 5.54524,  $\bar{1}$ .91548.      (6) 1.1825, 18643, .0098748.

**XXXI.** (130, 131 丁.)

- (1) 3.7346.      (2) 1.88.      (3) 63807 グラム.  
 (4) 1200 圓.      (5) 19 年(弱).

**XXXII.** (135, 136 丁.)

- (1) 5429. (2) 7016. (3) 1.9227. (4)  $18^{\circ} 24'$  (5)  $44^{\circ} 38'$ .  
 (6) 9.80897-10. (7) 28866. (8)  $52^{\circ} 50' 57''$ . (9)  $78^{\circ} 1' 42''$ .  
 (10) 52444.  $\left[ \log \sec A = \log \frac{1}{\cos A} = -\log \cos A. \right]$   
 (11) 8.39961-10. (12) 1.8464460.

**XXXIII.** (138, 139 丁.)

- (1) 897.9 尺. (2) 1498.2 尺.  
 (3)  $A = 26^{\circ} 52' 14''$ ,  $B = 63^{\circ} 7' 46''$ ,  $c = 293.59$  間.  
 (4) 57.61 間. (5) 169.67  $\times$  -  $\nu$ . (6)  $51^{\circ} 28'$ .  
 (7)  $2^{\circ} 43'$ . (8) 1.743 里. (9)  $108.7$  尺;  $08$  尺.

**XXXVII.** (155 丁.)

- (1)  $52^{\circ} 10'$ , 17.08 間. (2)  $48^{\circ} 6'$ , 151.9 間.  
 (3)  $a = 660.6$  尺,  $b = 519.2$  尺. (4)  $81^{\circ} 51'$ , 300.8 間.  
 (5)  $A = 46^{\circ} 47' 52''$ ,  $c = 469.61$  尺.  
 (6)  $B = 92^{\circ} 55' 24''$ ,  $a = 298.00$ ,  $c = 433.31$  間.

**XXXVIII.** (158, 159 丁.)

- (1)  $A = 40^{\circ} 4'$ ,  $C = 74^{\circ} 56'$ . (2)  $B = 33^{\circ} 50'$ ,  $C = 73^{\circ} 10'$ .

- (3)  $A = 21^{\circ} 17'$ ,  $C = 132^{\circ} 13'$   
 (4)  $B = 103^{\circ} 8' 16''$ ,  $C = 28^{\circ} 24' 5''$ ,  $a = 503$  尺.  
 (5)  $B = 14^{\circ} 14' 1''$ ,  $C = 60^{\circ} 8' 27''$ ,  $a = 491$  尺.  
 (6) 17.4 里. (7)  $104^{\circ} 29'$ ,  $35^{\circ} 31'$ .

**XXXIX.** (165, 166 丁.)

- (1)  $23^{\circ} 31'$ , (2)  $52^{\circ} 52'$  或  $\wedge 127^{\circ} 8$ . (3)  $30^{\circ} 20' 6$ .  
 (4)  $A = 68^{\circ} 27' 0$ ,  $C = 75^{\circ} 41' 7$ ,  $c = 607.5$  間; 或  $\wedge$   
 $A = 111^{\circ} 33' 0$ ,  $C = 32^{\circ} 35' 7$ ,  $c = 337.7$  間.  
 (5)  $A = 18^{\circ} 27' 46''$ ,  $B = 111^{\circ} 53' 34''$ ,  $b = 490.44$  間.  
 (6) (i) 解無シ. (ii) 二ツノ解有リ; 60.38 尺. (iii) (iv) (v) 各  
 唯一ツノ解有リ. (vi) 解無シ.

**XL.** (169, 170 丁.)

- (1)  $44^{\circ} 25'$  (2)  $32^{\circ} 57'$ . (3)  $30^{\circ} 52'$ .  
 (4)  $54^{\circ} 51' 58''$ ,  $84^{\circ} 11' 11''$ ,  $40^{\circ} 56' 48''$ .  
 [三角何レモ正切式ニ由テ算出ス. 其ノ和  $180^{\circ}$  ト爲  
 ラザルハ近似計算ナルガ故ナリ.]  
 (5)  $82^{\circ} 49' 9''$ . (6)  $75^{\circ} 60' 45''$ .

**XLII.** (181, 182, 183, 184 丁.)

- (1)  $\sqrt{13}$ 里. (2) 4.25里; 北西ト北西微西ノ間. (3)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 里.
- (4) 1488 ヲ ト ル. (5)  $96^{\circ}36'$ . (6) 328 尺.
- (7)  $\frac{a \sin(\beta - \gamma) \sin a}{\sin(\beta - a)}$ ; 87.2 尺. (8) 東南東(略);  $10.5^{\circ}$ ノト
- (9) 239.6間. (10) 36.66町. (11) 4町; 隧道ノ傾斜 $6^{\circ}16'$ ;  
BAC =  $49^{\circ}6'4$ . (12)  $97^{\circ}35'$ . (13) 165間. (14) 467 尺.
- (15) 54 尺. (16) 柱頭ノ影ヲ結ビ付クル直線ガ東西線  
ト爲ス角ノ正切ハ  $\frac{(a-b)\cot a}{c}$  ナリ 其角 =  $17^{\circ}6'$ .
- (17)  $-\cot a \cos \theta$ , 但シ北方ヘ計ル影ノ幅ヲ正號トス. 20.8尺

**XLIII.** (186 丁.)

- (1) 10 平方尺. (2) 1.559 平方寸. (3) 3115.5坪
- (4) 84 平方メートル即 84 アール.
- (5) 1553.2 平方チェイン即 155.32 エーカー.

**XLIII.** (189 丁.)

- (1)  $4, 10\frac{1}{2}, 12, 14$ 尺. (2)  $8\frac{1}{8}$ 尺. (9)  $a = \frac{s \cdot \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}$ ,

b及cニモ同様ノ式有リ.

數ノ對數表 ..... i-iv

圓函數ノ對數表 ..... v-xii

圓函數ノ表 ..... xiii-xvi

(表ニ付テノ注意)

表ノi及ii頁ノ差欄ハ中央二列ノ差ヲ記セルノミ、然レモ其他ノ差ヲ求メント欲スル際ニモ參考ト爲ル可シ、何トナレハ表中ニツノ假數ヲ見較ヘテ差ノ終リノ桁ヲ得レハ其ノ全部ヲ察知スルヲ得可ケレハナリ。例ヘハ差ノ終リノ桁ガ1ニシテ差欄ニ129ト有レハ要スル所ノ差ハ131ナリ。

iii及iv頁ノ星號ハ其ノ前ノ桁ノ數字ニ1ヲ加フルノ符號ナリ。

初メノ桁ガ1ナル數ノ對數ハiii, iv頁ニ於テ求ムベシ、是レi頁ノ初メノ部分ハ差大ナルヲ以テ通常ノ比例部分算法ニ由テ得タル結果ハ精密ナラザレハナリ(但シ其數ガ三桁ナレハi頁ニ於テスルモ異ナルヲ無シ)。對數ガ與ヘラレタルキモ亦之ニ准ス。

v頁乃至xii頁ニ於テ中央ナル差欄ノ數ハ其ノ兩側即正切及餘切ノ對數ニ共通スル差ナリ。

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03341	03743	
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	212
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	203
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	193
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	185
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	178
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	171
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	165
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	158
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	152
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	147
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	143
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	138
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	133
33	51901	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	129
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	125
35	54497	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	123
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	119
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	116
38	57973	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	113
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	110
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	108
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	105
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	102
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	100
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	98
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	95
46	66270	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	93
47	67210	67302	67394	67480	67578	67669	67761	67852	67943	68034	91
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	89
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	88
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	86
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	85
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	83
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	81
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	80
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	78

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	差
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	78
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	77
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	76
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	75
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	73
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	72
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	71
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	70
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	68
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	67
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	66
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	65
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	64
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	63
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	62
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	62
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	61
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	60
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	59
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	59
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	58
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	57
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	56
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	55
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	55
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	54
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	54
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	52
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	52
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	52
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	51
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	51
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	50
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	49
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	48
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	48
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	47
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	47
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	46
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	46
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	45
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	45
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	44
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	44
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	43
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389	

iii

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分			
100	00000	043	087	130	173	217	260	303	346	389		44	43	42
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	1	4.4	4.3	4.2
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	2	8.8	8.6	8.4
103	01284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	3	13.2	12.9	12.6
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	4	17.6	17.2	16.8
105	02119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	5	22.0	21.5	21.0
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	6	26.4	25.8	25.2
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	7	30.8	30.1	29.4
108	03342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	8	35.2	34.4	33.6
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	9	39.6	38.7	37.8
110	04139	179	218	258	297	336	376	415	454	493		41	40	39
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	1	4.1	4.0	3.9
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	2	8.2	8.0	7.8
113	05308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	3	12.3	12.0	11.7
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	4	16.4	16.0	15.4
115	06070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	5	20.5	20.0	19.5
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	6	24.6	24.0	23.4
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	7	28.7	28.0	27.3
118	07188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	8	32.8	32.0	31.2
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	9	36.9	36.0	35.1
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243		38	37	36
121	08279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	1	3.8	3.7	3.6
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	2	7.6	7.4	7.2
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	3	11.4	11.1	10.8
124	09342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	4	15.2	14.8	14.4
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	1003	5	19.0	18.5	18.0
126	10037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	6	22.8	22.2	21.6
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	7	26.6	25.9	25.2
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	8	30.4	29.6	28.8
129	11059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	9	34.2	33.3	32.4
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694		35	34	33
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	1	3.5	3.4	3.3
132	12057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	2	7.0	6.8	6.6
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	3	10.5	10.2	9.9
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	4	14.0	13.6	13.2
135	13033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	5	17.5	17.0	16.5
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	6	21.0	20.4	19.8
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	7	24.5	23.8	23.1
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	8	28.0	27.2	26.4
139	14301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	9	31.5	30.6	29.7
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891		32	31	30
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	1	3.2	3.1	3.0
142	25229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	2	6.4	6.2	6.0
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	3	9.6	9.3	9.0
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	4	12.8	12.4	12.0
145	16137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	5	16.0	15.5	15.0
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	6	19.2	18.6	18.0
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	7	22.4	21.7	21.0
148	17026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	8	25.6	24.8	24.0
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	9	28.8	27.9	27.0
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869				

iv

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分			
150	17609	638	667	696	725	754	782	811	840	869		29	28	
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	1	2.9	2.8	
152	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2	5.8	5.6	
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3	8.7	8.4	
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	4	11.6	11.2	
155	19033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5	14.5	14.0	
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6	17.4	16.8	
157	500	528	556	584	612	640	668	696	724	752	7	20.3	19.6	
158	806	833	861	889	917	*003	*030	*058	*085	112	8	23.2	22.4	
159	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9	26.1	25.2	
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656		27	26	
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1	2.7	2.6	
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	2	5.4	5.2	
163	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3	8.1	7.8	
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	4	10.8	10.4	
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5	13.5	13.0	
166	22011	037	063	089	115	141	167	194	220	246	6	16.2	15.6	
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7	18.9	18.2	
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8	21.6	20.8	
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	9	24.3	23.4	
170	23045	070	096	121	147	172	198	223	249	274		25		
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1	2.5		
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2	5.0		
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	3	7.5		
174	24055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4	10.0		
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5	12.5		
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6	15.0		
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	7	17.5		
178	25042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8	20.0		
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9	22.5		
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744		24	23	
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1	2.4	2.3	
182	26007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2	4.8	4.6	
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3	7.2	6.9	
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4	9.6	9.2	
185	717	741	764	788	811	834	858	8						

°	'	L. sin	差	L. tan	差	log cot	L. cos	差	°
0	0	—	—	—	—	—	10.00000	0	90
5		7.16270		7.16270		2.83730	10.00000	55	
10		7.46373	30103	7.46373	30103	2.53627	10.00000	50	
15		7.63982	17609	7.63982	17609	2.36018	10.00000	45	
20		7.76475	12493	7.76476	12494	2.23524	9.99999	40	
25		7.86166	9601	7.86167	9601	2.13833	9.99999	35	
30		7.94084	7918	7.94086	7919	2.05914	9.99998	30	
35		8.00779	6605	8.00781	6605	1.99219	9.99998	25	
40		8.06578	5799	8.06581	5800	1.93419	9.99997	20	
45		8.11693	5115	8.11696	5115	1.88324	9.99996	15	
50		8.16268	4575	8.16273	4577	1.83727	9.99995	10	
55		8.20407	4139	8.20413	4140	1.79587	9.99994	5	
1	0	8.24186	3779	8.24192	3779	1.758.8	9.99993	0	89
5		8.27661	3475	8.27669	3477	1.72331	9.99992	55	
10		8.30879	3218	8.30888	3219	1.69112	9.99991	50	
15		8.33875	2996	8.33886	2998	1.66114	9.99990	45	
20		8.36678	2803	8.36689	2803	1.63311	9.99988	40	
25		8.39310	2632	8.39323	2634	1.60677	9.99987	35	
30		8.41792	2482	8.41807	2484	1.58193	9.99985	30	
35		8.44139	2347	8.44156	2349	1.55844	9.99983	25	
40		8.46366	2227	8.46385	2229	1.53615	9.99982	20	
45		8.48485	2119	8.48505	2120	1.51495	9.99980	15	
50		8.50504	2019	8.50527	2022	1.49473	9.99978	10	
55		8.52434	1930	8.52459	1932	1.47541	9.99976	5	
2	0	8.54282	1848	8.54308	1849	1.45692	9.99974	2	88
5		8.56054	1772	8.56083	1775	1.43917	9.99971	55	
10		8.57757	1703	8.57788	1705	1.42212	9.99969	50	
15		8.59395	1638	8.59428	1640	1.40572	9.99967	45	
20		8.60973	1578	8.61009	1581	1.38991	9.99964	40	
25		8.62497	1524	8.62535	1526	1.37465	9.99961	35	
30		8.63968	1471	8.64009	1474	1.35991	9.99959	30	
35		8.65391	1423	8.65435	1426	1.34565	9.99956	25	
40		8.66769	1378	8.66816	1381	1.33184	9.99953	20	
45		8.68104	1335	8.68154	1338	1.31846	9.99950	15	
50		8.69400	1296	8.69453	1299	1.30547	9.99947	10	
55		8.70658	1258	8.70714	1261	1.29286	9.99944	5	
3	0	8.71880	1222	8.71940	1226	1.28060	9.99940	0	87
5		8.73069	1189	8.73132	1192	1.26868	9.99937	55	
10		8.74226	1157	8.74292	1160	1.25708	9.99934	50	
15		8.75353	1127	8.75423	1131	1.24577	9.99930	45	
20		8.76451	1098	8.76525	1102	1.23475	9.99926	40	
25		8.77522	1071	8.77600	1075	1.22400	9.99923	35	
30		8.78568	1046	8.78649	1049	1.21351	9.99919	30	
35		8.79588	1020	8.79673	1024	1.20327	9.99915	25	
40		8.80585	997	8.80674	1001	1.19326	9.99911	20	
45		8.81560	975	8.81653	979	1.18347	9.99907	15	
50		8.82513	953	8.82610	957	1.17390	9.99903	10	
55		8.83446	933	8.83547	937	1.16453	9.99898	5	
4	0	8.84358	912	8.84464	917	1.15536	9.99894	4	86
		L. cos	差	L. cot	差	log tan	L. sin	差	

°	'	L. sin	差	L. tan	差	log cot	L. cos	差	°
4	0	8.84358		8.84464		1.15536	9.99894	4	86
5		8.85252	894	8.85363	899	1.14637	9.99890	55	
10		8.86123	876	8.86243	880	1.13757	9.99885	50	
15		8.86987	859	8.87106	863	1.12894	9.99880	45	
20		8.87829	842	8.87953	847	1.12047	9.99876	40	
25		8.88654	825	8.88783	830	1.11217	9.99871	35	
30		8.89464	810	8.89598	815	1.10402	9.99866	30	
35		8.90260	796	8.90399	801	1.09601	9.99861	25	
40		8.91040	780	8.91185	786	1.08815	9.99856	20	
45		8.91807	767	8.91957	772	1.08043	9.99851	15	
50		8.92561	754	8.92716	759	1.07284	9.99845	10	
55		8.93301	740	8.93462	746	1.06538	9.99840	5	
5	0	8.94030	729	8.94195	733	1.05805	9.99834	0	85
5		8.94746	716	8.94917	722	1.05083	9.99829	55	
10		8.95450	704	8.95627	710	1.04373	9.99823	50	
15		8.96143	693	8.96325	698	1.03675	9.99817	45	
20		8.96825	682	8.97013	688	1.02987	9.99812	40	
25		8.97496	671	8.97691	678	1.02309	9.99806	35	
30		8.98157	661	8.98358	667	1.01642	9.99800	30	
35		8.98808	651	8.99015	657	1.01085	9.99793	25	
40		8.99450	642	8.99662	647	1.00538	9.99787	20	
45		9.00082	632	9.00301	639	0.99999	9.99781	15	
50		9.00704	622	9.00930	629	0.99470	9.99775	10	
55		9.01318	614	9.01550	620	0.98945	9.99768	5	
6	0	9.01923	605	9.02162	612	0.98425	9.99761	7	84
5		9.02520	597	9.02766	604	0.97910	9.99755	6	55
10		9.03109	589	9.03361	595	0.97400	9.99748	5	50
15		9.03690	581	9.03948	587	0.96895	9.99741	7	45
20		9.04262	572	9.04528	580	0.96395	9.99734	7	40
25		9.04828	566	9.05101	573	0.95899	9.99727	7	35
30		9.05386	558	9.05666	565	0.95407	9.99720	7	30
35		9.05937	551	9.06224	558	0.94919	9.99713	7	25
40		9.06481	544	9.06775	551	0.94435	9.99705	8	20
45		9.07018	537	9.07320	545	0.93955	9.99698	8	15
50		9.07548	530	9.07858	538	0.93479	9.99690	8	10
55		9.08072	524	9.08389	531	0.92997	9.99683	7	5
7	0	9.08589	517	9.08914	525	0.92519	9.99675	8	0
5		9.09101	512	9.09434	520	0.92045	9.99667	8	55
10		9.09606	505	9.09947	513	0.91575	9.99659	8	50
15		9.10106	500	9.10454	507	0.91109	9.99651	8	45
20		9.10599	493	9.10956	502	0.90647	9.99643	8	40
25		9.11087	488	9.11452	496	0.90189	9.99635	8	35
30		9.11570	483	9.11943	491	0.90735	9.99627	8	30
35		9.12047	477	9.12428	485	0.90284	9.99618	8	25
40		9.12519	472	9.12909	481	0.89836	9.99610	8	20
45		9.12985	466	9.13384	475	0.89391	9.99601	9	15
50		9.13447	462	9.13854	470	0.88948	9.99593	9	10
55		9.13904	457	9.14320	466	0.88507	9.99584	9	5
8	0	9.14356	452	9.14780	460	0.88068	9.99575	9	0
		L. cos	差	L. cot	差	log tan	L. sin	差	



°	'	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	°
8	0	9.14 356		9.14 780		0.85 220	9.99 575		82
	5	9.14 803	447	9.15 236	456	0.84 764	9.99 566	9	
	10	9.15 245	442	9.15 688	452	0.84 312	9.99 557	9	
	15	9.15 683	438	9.16 135	447	0.83 865	9.99 548	9	
	20	9.16 116	433	9.16 577	442	0.83 423	9.99 539	9	
	25	9.16 545	429	9.17 016	439	0.82 984	9.99 530	9	
	30	9.16 970	425	9.17 450	434	0.82 550	9.99 520	10	
	35	9.17 391	421	9.17 880	430	0.82 120	9.99 511	10	
	40	9.17 807	416	9.18 306	426	0.81 694	9.99 501	9	
	45	9.18 220	413	9.18 728	422	0.81 272	9.99 492	9	
	50	9.18 628	408	9.19 146	418	0.80 854	9.99 482	10	
	55	9.19 033	405	9.19 561	415	0.80 439	9.99 472	10	
9	0	9.19 433	400	9.19 971	410	0.80 029	9.99 462	10	81
	5	9.19 830	397	9.20 378	407	0.79 622	9.99 452	10	
	10	9.20 223	393	9.20 782	404	0.79 218	9.99 442	10	
	15	9.20 613	390	9.21 182	400	0.78 818	9.99 432	10	
	20	9.20 999	386	9.21 578	396	0.78 422	9.99 421	11	
	25	9.21 382	383	9.21 971	393	0.78 029	9.99 411	11	
	30	9.21 761	379	9.22 361	390	0.77 639	9.99 400	11	
	35	9.22 137	376	9.22 747	386	0.77 253	9.99 390	10	
	40	9.22 509	372	9.23 130	383	0.76 870	9.99 379	11	
	45	9.22 878	369	9.23 510	380	0.76 490	9.99 368	11	
	50	9.23 244	366	9.23 887	377	0.76 113	9.99 357	11	
	55	9.23 607	363	9.24 261	374	0.75 739	9.99 346	11	
10	0	9.23 967	360	9.24 632	371	0.75 368	9.99 335	11	80
	5	9.24 324	357	9.25 000	368	0.75 000	9.99 324	11	
	10	9.24 677	353	9.25 365	365	0.74 635	9.99 313	12	
	15	9.25 028	351	9.25 727	362	0.74 273	9.99 301	12	
	20	9.25 376	348	9.26 086	359	0.73 914	9.99 290	11	
	25	9.25 721	345	9.26 443	357	0.73 557	9.99 278	12	
	30	9.26 063	342	9.26 797	354	0.73 203	9.99 267	11	
	35	9.26 403	340	9.27 148	351	0.72 852	9.99 255	12	
	40	9.26 739	336	9.27 496	348	0.72 504	9.99 243	12	
	45	9.27 073	334	9.27 842	346	0.72 158	9.99 231	12	
	50	9.27 405	332	9.28 186	344	0.71 814	9.99 219	12	
	55	9.27 734	329	9.28 527	341	0.71 473	9.99 207	12	
11	0	9.28 060	326	9.28 865	338	0.71 135	9.99 195	12	79
	5	9.28 384	324	9.29 201	336	0.70 799	9.99 182	13	
	10	9.28 705	321	9.29 535	334	0.70 465	9.99 170	13	
	15	9.29 024	319	9.29 866	331	0.70 134	9.99 157	13	
	20	9.29 340	316	9.30 195	329	0.69 805	9.99 145	12	
	25	9.29 654	314	9.30 522	327	0.69 478	9.99 132	13	
	30	9.29 966	312	9.30 846	324	0.69 154	9.99 119	13	
	35	9.30 275	309	9.31 168	322	0.68 832	9.99 106	13	
	40	9.30 582	307	9.31 489	321	0.68 511	9.99 093	13	
	45	9.30 887	305	9.31 806	317	0.68 194	9.99 080	13	
	50	9.31 189	302	9.32 122	316	0.67 878	9.99 067	13	
	55	9.31 490	301	9.32 436	314	0.67 564	9.99 054	13	
12	0	9.31 788	298	9.32 747	311	0.67 253	9.99 040	14	78
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	

°	'	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差	°
12	0	9.31 788	296	9.32 747	310	0.67 253	9.99 040	13	78
	5	9.32 084	294	9.33 057	308	0.66 943	9.99 027	14	55
	10	9.32 378	292	9.33 365	305	0.66 635	9.99 013	13	50
	15	9.32 670	290	9.33 670	304	0.66 330	9.99 000	14	45
	20	9.32 960	288	9.33 974	302	0.66 026	9.98 986	14	40
	25	9.33 248	286	9.34 276	300	0.65 724	9.98 972	14	35
	30	9.33 534	284	9.34 576	298	0.65 424	9.98 958	14	30
	35	9.33 818	282	9.34 874	296	0.65 126	9.98 944	14	25
	40	9.34 100	280	9.35 170	294	0.64 830	9.98 930	14	20
	45	9.34 380	278	9.35 464	293	0.64 536	9.98 916	15	15
	50	9.34 658	276	9.35 757	290	0.64 243	9.98 901	15	10
	55	9.34 934	275	9.36 047	289	0.63 953	9.98 887	15	5
13	0	9.35 209	272	9.36 336	288	0.63 664	9.98 872	15	0
	5	9.35 481	271	9.36 624	285	0.63 376	9.98 858	14	55
	10	9.35 752	270	9.36 909	284	0.63 091	9.98 843	15	50
	15	9.36 022	267	9.37 193	283	0.62 807	9.98 828	15	45
	20	9.36 289	266	9.37 476	280	0.62 524	9.98 813	15	40
	25	9.36 555	264	9.37 756	279	0.62 244	9.98 798	15	35
	30	9.36 819	262	9.38 035	278	0.61 965	9.98 783	15	30
	35	9.37 081	260	9.38 313	276	0.61 687	9.98 768	15	25
	40	9.37 341	259	9.38 589	274	0.61 411	9.98 753	16	20
	45	9.37 600	258	9.38 863	273	0.61 137	9.98 737	15	15
	50	9.37 858	255	9.39 136	271	0.60 864	9.98 722	16	10
	55	9.38 113	255	9.39 407	270	0.60 593	9.98 706	16	5
14	0	9.38 368	252	9.39 677	268	0.60 323	9.98 690	16	0
	5	9.38 620	251	9.39 945	267	0.60 055	9.98 675	16	55
	10	9.38 871	250	9.40 212	266	0.59 788	9.98 659	16	50
	15	9.39 121	248	9.40 478	264	0.59 522	9.98 643	16	45
	20	9.39 369	246	9.40 742	263	0.59 258	9.98 627	17	40
	25	9.39 615	245	9.41 005	261	0.58 995	9.98 610	16	35
	30	9.39 860	243	9.41 266	260	0.58 734	9.98 594	16	30
	35	9.40 103	243	9.41 526	258	0.58 474	9.98 578	17	25
	40	9.40 346	240	9.41 784	257	0.58 216	9.98 561	17	20
	45	9.40 586	239	9.42 041	256	0.57 959	9.98 545	17	15
	50	9.40 825	238	9.42 297	255	0.57 703	9.98 528	17	10
	55	9.41 063	237	9.42 552	253	0.57 448	9.98 511	17	5
15	0	9.41 300	237	9.42 805	253	0.57 195	9.98 494	17	0
	5	9.41 535	235	9.43 057	252	0.56 943	9.98 477	17	55
	10	9.41 768	233	9.43 308	251	0.56 692	9.98 460	17	50
	15	9.42 001	233	9.43 558	250	0.56 442	9.98 443	17	45
	20	9.42 232	231	9.43 806	248	0.56 194	9.98 426	17	40
	25	9.42 461	229	9.44 053	247	0.55 947	9.98 409	17	35
	30	9.42 690	229	9.44 299	246	0.55 701	9.98 391	18	30
	35	9.42 917	227	9.44 544	245	0.55 456	9.98 373	17	25
	40	9.43 143	226	9.44 787	243	0.55 213	9.98 356	18	20
	45	9.43 367	224	9.45 029	242	0.54 971	9.98 338	18	15
	50	9.43 591	224	9.45 271	240	0.54 729	9.98 320	18	10
	55	9.43 813	222	9.45 511	240	0.54 489	9.98 302	18	5
16	0	9.44 034	221	9.45 750	239	0.54 250	9.98 284	18	0
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差	

IX		L. sin	差	L. tan	差	log cot	L. cos	差	
16	0	9.44 034	219	9.45 750	237	0.54 250	9.98 284	18	0 74
	5	9.44 253	219	9.45 987	237	0.54 013	9.98 266	18	55
	10	9.44 472	217	9.46 224	236	0.53 776	9.98 248	19	50
	15	9.44 689	216	9.46 460	234	0.53 540	9.98 229	18	45
	20	9.44 905	215	9.46 694	234	0.53 306	9.98 211	19	40
	25	9.45 120	214	9.46 928	232	0.53 072	9.98 192	18	35
	30	9.45 334	213	9.47 160	232	0.52 840	9.98 174	19	30
	35	9.45 547	211	9.47 392	230	0.52 608	9.98 155	19	25
	40	9.45 758	211	9.47 622	230	0.52 378	9.98 136	19	20
	45	9.45 969	209	9.47 852	228	0.52 148	9.98 117	19	15
	50	9.46 178	208	9.48 080	227	0.51 920	9.98 098	19	10
	55	9.46 386	208	9.48 307	227	0.51 693	9.98 079	19	5
17	0	9.46 594	206	9.48 534	225	0.51 466	9.98 060	20	0 73
	5	9.46 800	205	9.48 759	225	0.51 241	9.98 040	19	55
	10	9.47 005	204	9.48 984	223	0.51 016	9.98 021	20	50
	15	9.47 209	202	9.49 207	223	0.50 793	9.98 001	19	45
	20	9.47 411	202	9.49 430	222	0.50 570	9.97 982	20	40
	25	9.47 613	201	9.49 652	220	0.50 348	9.97 962	20	35
	30	9.47 814	200	9.49 872	220	0.50 128	9.97 942	20	30
	35	9.48 014	199	9.50 092	219	0.49 908	9.97 922	20	25
	40	9.48 213	198	9.50 311	218	0.49 689	9.97 902	20	20
	45	9.48 411	196	9.50 529	217	0.49 471	9.97 882	21	15
	50	9.48 607	196	9.50 746	216	0.49 254	9.97 861	20	10
	55	9.48 803	195	9.50 962	216	0.49 038	9.97 841	20	5
18	0	9.48 998	194	9.51 178	214	0.48 822	9.97 821	21	0 72
	5	9.49 192	193	9.51 392	214	0.48 608	9.97 800	21	55
	10	9.49 385	192	9.51 606	213	0.48 394	9.97 779	20	50
	15	9.49 577	191	9.51 819	212	0.48 181	9.97 759	21	45
	20	9.49 768	190	9.52 031	211	0.47 969	9.97 738	21	40
	25	9.49 958	190	9.52 242	210	0.47 758	9.97 717	21	35
	30	9.50 148	188	9.52 452	209	0.47 548	9.97 696	22	30
	35	9.50 336	187	9.52 661	209	0.47 339	9.97 674	21	25
	40	9.50 523	187	9.52 870	208	0.47 130	9.97 653	21	20
	45	9.50 710	186	9.53 078	207	0.46 922	9.97 632	22	15
	50	9.50 896	184	9.53 285	207	0.46 715	9.97 610	21	10
	55	9.51 080	184	9.53 492	205	0.46 508	9.97 589	22	5
19	0	9.51 264	183	9.53 697	205	0.46 303	9.97 567	22	0 71
	5	9.51 447	182	9.53 902	204	0.46 098	9.97 545	22	55
	10	9.51 629	182	9.54 106	203	0.45 894	9.97 523	22	50
	15	9.51 811	180	9.54 309	203	0.45 691	9.97 501	22	45
	20	9.51 991	180	9.54 512	202	0.45 483	9.97 479	22	40
	25	9.52 171	179	9.54 714	201	0.45 286	9.97 457	22	35
	30	9.52 350	177	9.54 915	200	0.45 085	9.97 435	23	30
	35	9.52 527	178	9.55 115	200	0.44 885	9.97 412	23	25
	40	9.52 705	176	9.55 315	199	0.44 685	9.97 390	23	20
	45	9.52 881	175	9.55 514	198	0.44 486	9.97 367	23	15
	50	9.53 056	175	9.55 712	198	0.44 288	9.97 344	23	10
	55	9.53 231	174	9.55 910	197	0.44 090	9.97 322	23	5
20	0	9.53 405	174	9.56 107	197	0.43 893	9.97 299	23	0 70
		L. cos	差	L. cot	差	log tan	L. sin	差	'

X		L. sin	差	L. tan	差	log cot	L. cos	差	
20	0	9.53 405	346	9.56 107	391	0.43 893	9.97 299	47	0 70
	10	9.53 751	342	9.56 478	389	0.43 502	9.97 252	46	50
	20	9.54 093	340	9.56 887	387	0.43 113	9.97 206	47	40
	30	9.54 433	336	9.57 274	384	0.42 726	9.97 159	47	30
	40	9.54 769	333	9.57 658	381	0.42 342	9.97 111	48	20
	50	9.55 102	331	9.58 039	379	0.41 961	9.97 063	48	10
21	0	9.55 433	328	9.58 418	376	0.41 582	9.97 015	48	0 69
	10	9.55 761	324	9.58 794	374	0.41 206	9.96 966	49	50
	20	9.56 085	323	9.59 168	372	0.40 832	9.96 917	49	40
	30	9.56 408	319	9.59 540	369	0.40 460	9.96 868	49	30
	40	9.56 727	317	9.59 909	367	0.40 091	9.96 818	50	20
	50	9.57 044	314	9.60 276	365	0.39 724	9.96 767	51	10
22	0	9.57 358	311	9.60 641	363	0.39 359	9.96 717	51	0 68
	10	9.57 669	309	9.61 004	360	0.38 996	9.96 665	51	50
	20	9.57 978	306	9.61 364	358	0.38 636	9.96 614	51	40
	30	9.58 284	304	9.61 722	357	0.38 278	9.96 562	52	30
	40	9.58 588	301	9.62 079	354	0.37 921	9.96 509	53	20
	50	9.58 889	299	9.62 433	352	0.37 567	9.96 456	53	10
23	0	9.59 188	296	9.62 785	350	0.37 215	9.96 403	53	0 67
	10	9.59 484	294	9.63 135	349	0.36 865	9.96 349	54	50
	20	9.59 778	292	9.63 484	346	0.36 516	9.96 294	54	40
	30	9.60 070	289	9.63 830	345	0.36 170	9.96 240	54	30
	40	9.60 359	287	9.64 175	342	0.35 825	9.96 185	55	20
	50	9.60 646	285	9.64 517	341	0.35 483	9.96 129	55	10
24	0	9.60 931	283	9.64 858	339	0.35 142	9.96 073	56	0 66
	10	9.61 214	280	9.65 197	339	0.34 803	9.96 017	56	50
	20	9.61 494	279	9.65 535	338	0.34 465	9.95 960	57	40
	30	9.61 773	279	9.65 870	335	0.34 130	9.95 902	58	30
	40	9.62 049	276	9.66 204	334	0.33 796	9.95 844	58	20
	50	9.62 323	272	9.66 537	333	0.33 463	9.95 786	58	10
25	0	9.62 595	270	9.66 867	330	0.33 133	9.95 728	58	0 65
	10	9.62 865	268	9.67 196	329	0.32 804	9.95 668	60	50
	20	9.63 133	268	9.67 524	328	0.32 476	9.95 609	59	40
	30	9.63 398	265	9.67 850	326	0.32 150	9.95 549	60	30
	40	9.63 662	264	9.68 174	324	0.31 826	9.95 488	61	20
	50	9.63 924	260	9.68 497	323	0.31 503	9.95 427	61	10
26	0	9.64 184	258	9.68 818	321	0.31 182	9.95 366	62	0 64
	10	9.64 442	256	9.69 138	320	0.30 862	9.95 304	62	50
	20	9.64 698	256	9.69 457	319	0.30 543	9.95 242	62	40
	30	9.64 953	255	9.69 774	317	0.30 226	9.95 179	63	30
	40	9.65 205	252	9.70 089	315	0.29 911	9.95 116	63	20
	50	9.65 456	251	9.70 404	315	0.29 596	9.95 052	64	10
27	0	9.65 705	249	9.70 717	313	0.29 283	9.94 988	64	0 63
	10	9.65 952	247	9.71 028	311	0.28 972	9.94 923	65	50
	20	9.66 197	245	9.71 339	311	0.28 661	9.94 858	65	40
	30	9.66 441	244	9.71 648	309	0.28 352	9.94 793	65	30
	40	9.66 682	241	9.71 955	307	0.28 045	9.94 727	66	20
	50	9.66 922	240	9.72 262	307	0.27 738	9.94 660	67	10
28	0	9.67 161	239	9.72 567	305	0.27 433	9.94 593	67	0 62
		L. cos	差	L. cot	差	log tan	L. sin	差	'

xi								
°	'	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差
28	0	9.67 161	237	9.72 507	305	0.27 433	9.94 593	67
	10	9.67 398	235	9.72 872	303	0.27 128	9.94 526	50
	20	9.67 633	233	9.73 175	301	0.26 825	9.94 458	68
	30	9.67 866	232	9.73 476	301	0.26 524	9.94 390	30
	40	9.68 098	230	9.73 777	300	0.26 223	9.94 321	20
	50	9.68 328	229	9.74 077	298	0.25 923	9.94 252	10
29	0	9.68 557	227	9.74 375	298	0.25 625	9.94 182	70
	10	9.68 784	226	9.74 673	296	0.25 327	9.94 112	50
	20	9.69 010	224	9.74 969	295	0.25 031	9.94 041	40
	30	9.69 234	222	9.75 264	294	0.24 736	9.93 970	30
	40	9.69 456	221	9.75 558	294	0.24 442	9.93 898	20
	50	9.69 677	220	9.75 852	292	0.24 148	9.93 826	10
30	0	9.69 897	218	9.76 144	291	0.23 856	9.93 753	73
	10	9.70 115	217	9.76 435	290	0.23 565	9.93 680	50
	20	9.70 332	215	9.76 725	289	0.23 275	9.93 606	40
	30	9.70 547	214	9.77 015	288	0.22 985	9.93 532	30
	40	9.70 761	212	9.77 303	288	0.22 697	9.93 457	20
	50	9.70 973	211	9.77 591	286	0.22 409	9.93 382	10
31	0	9.71 184	209	9.77 877	286	0.22 123	9.93 307	75
	10	9.71 393	209	9.78 163	286	0.21 837	9.93 230	50
	20	9.71 602	207	9.78 448	285	0.21 552	9.93 154	40
	30	9.71 809	205	9.78 732	284	0.21 268	9.93 077	30
	40	9.72 014	204	9.79 015	283	0.20 985	9.92 999	20
	50	9.72 218	203	9.79 297	282	0.20 703	9.92 921	10
32	0	9.72 421	201	9.79 579	281	0.20 421	9.92 842	79
	10	9.72 622	201	9.79 860	280	0.20 140	9.92 763	50
	20	9.72 823	199	9.80 140	279	0.19 860	9.92 683	40
	30	9.73 022	197	9.80 419	278	0.19 581	9.92 603	30
	40	9.73 219	197	9.80 697	278	0.19 303	9.92 522	20
	50	9.73 416	195	9.80 975	277	0.19 025	9.92 441	10
33	0	9.73 611	194	9.81 252	277	0.18 748	9.92 359	82
	10	9.73 805	192	9.81 528	276	0.18 472	9.92 277	50
	20	9.73 997	192	9.81 803	275	0.18 197	9.92 194	40
	30	9.74 189	190	9.82 078	275	0.17 922	9.92 111	30
	40	9.74 379	189	9.82 352	274	0.17 648	9.92 027	20
	50	9.74 568	188	9.82 626	274	0.17 374	9.91 942	10
34	0	9.74 756	187	9.82 899	273	0.17 101	9.91 857	85
	10	9.74 943	185	9.83 171	272	0.16 829	9.91 772	50
	20	9.75 128	185	9.83 442	271	0.16 558	9.91 686	40
	30	9.75 313	183	9.83 713	271	0.16 287	9.91 599	30
	40	9.75 496	182	9.83 984	270	0.16 016	9.91 512	20
	50	9.75 678	181	9.84 254	269	0.15 746	9.91 425	10
35	0	9.75 859	180	9.84 523	269	0.15 477	9.91 336	89
	10	9.76 039	179	9.84 791	268	0.15 209	9.91 248	50
	20	9.76 218	177	9.85 059	268	0.14 941	9.91 158	40
	30	9.76 395	177	9.85 327	267	0.14 673	9.91 069	30
	40	9.76 572	175	9.85 594	267	0.14 406	9.90 978	20
	50	9.76 747	175	9.85 860	266	0.14 140	9.90 887	10
36	0	9.76 922	173	9.86 126	266	0.13 874	9.90 796	91
	10	9.77 095	173	9.86 392	266	0.13 608	9.90 704	50
	20	9.77 268	171	9.86 656	264	0.13 344	9.90 611	40
	30	9.77 439	170	9.86 921	264	0.13 079	9.90 518	30
	40	9.77 609	169	9.87 185	263	0.12 815	9.90 424	20
	50	9.77 778	168	9.87 448	263	0.12 552	9.90 330	10
37	0	9.77 946	168	9.87 711	263	0.12 289	9.90 235	95
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差

xii								
°	'	L sin	差	L tan	差	log cot	L cos	差
37	0	9.77 946	167	9.87 711	263	0.12 289	9.90 235	96
	10	9.78 113	167	9.87 974	262	0.12 026	9.90 139	50
	20	9.78 280	165	9.88 236	262	0.11 764	9.90 043	40
	30	9.78 445	164	9.88 498	261	0.11 502	9.89 947	30
	40	9.78 609	163	9.88 759	261	0.11 241	9.89 849	20
	50	9.78 772	162	9.89 020	261	0.10 980	9.89 752	10
38	0	9.78 934	161	9.89 281	260	0.10 719	9.89 653	99
	10	9.79 095	161	9.89 541	260	0.10 459	9.89 554	50
	20	9.79 256	159	9.89 801	260	0.10 199	9.89 455	40
	30	9.79 415	158	9.90 061	259	0.09 939	9.89 354	30
	40	9.79 573	158	9.90 320	258	0.09 680	9.89 254	20
	50	9.79 731	156	9.90 578	259	0.09 422	9.89 152	10
39	0	9.79 887	156	9.90 837	258	0.09 163	9.89 050	102
	10	9.80 043	154	9.91 095	258	0.08 905	9.88 948	50
	20	9.80 197	154	9.91 353	257	0.08 647	9.88 844	40
	30	9.80 351	153	9.91 610	257	0.08 390	9.88 741	30
	40	9.80 504	152	9.91 868	257	0.08 132	9.88 636	20
	50	9.80 656	251	9.92 125	256	0.07 875	9.88 531	10
40	0	9.80 807	150	9.92 381	256	0.07 619	9.88 425	106
	10	9.80 957	149	9.92 638	256	0.07 362	9.88 319	50
	20	9.81 106	148	9.92 894	256	0.07 106	9.88 212	40
	30	9.81 254	148	9.93 150	256	0.06 850	9.88 105	30
	40	9.81 402	147	9.93 406	255	0.06 594	9.87 996	20
	50	9.81 549	145	9.93 661	255	0.06 339	9.87 887	10
41	0	9.81 694	145	9.93 916	255	0.06 084	9.87 778	109
	10	9.81 839	144	9.94 171	255	0.05 829	9.87 668	110
	20	9.81 983	143	9.94 426	255	0.05 574	9.87 557	50
	30	9.82 126	143	9.94 681	255	0.05 319	9.87 446	40
	40	9.82 269	141	9.94 935	254	0.05 065	9.87 334	30
	50	9.82 410	141	9.95 190	255	0.04 810	9.87 221	20
42	0	9.82 551	140	9.95 444	254	0.04 556	9.87 107	113
	10	9.82 691	139	9.95 698	254	0.04 302	9.86 993	114
	20	9.82 830	138	9.95 952	253	0.04 048	9.86 879	50
	30	9.82 968	138	9.96 205	253	0.03 795	9.86 763	40
	40	9.83 106	136	9.96 459	253	0.03 541	9.86 647	30
	50	9.83 242	136	9.96 712	253	0.03 288	9.86 530	20
43	0	9.83 378	135	9.96 966	254	0.03 034	9.86 413	117
	10	9.83 513	135	9.97 219	253	0.02 781	9.86 295	118
	20	9.83 648	133	9.97 472	253	0.02 528	9.86 176	50
	30	9.83 781	133	9.97 725	253	0.02 275	9.86 056	40
	40	9.83 914	132	9.97 978	253	0.02 022	9.85 936	30
	50	9.84 046	131	9.98 231	253	0.01 769	9.85 815	20
44	0	9.84 177	131	9.98 484	253	0.01 516	9.85 693	121
	10	9.84 308	129	9.98 737	253	0.01 263	9.85 571	122
	20	9.84 437	129	9.98 989	252	0.01 011	9.85 448	50
	30	9.84 566	128	9.99 242	253	0.00 758	9.85 324	40
	40	9.84 694	128	9.99 495	253	0.00 505	9.85 200	30
	50	9.84 822	127	9.99 747	252	0.00 253	9.85 074	20
45	0	9.84 949	127	10.00 000	253	0.00 000	9.84 949	126
		L cos	差	L cot	差	log tan	L sin	差

° / sin 差 差 cos				° / sin 差 差 cos				° / sin 差 差 cos							
0	0.0000	1.0000	090	8	0.1392	.9903	082	16	0.2756	.9613	074				
10	.0029	.9998	50	10	.1421	.9899	50	10	.2784	.9605	50				
20	.0058	.9997	40	20	.1449	.9890	40	20	.2812	.9596	40				
30	.0087	.9996	30	30	.1478	.9880	30	30	.2840	.9588	30				
40	.0116	.9995	20	40	.1507	.9886	20	40	.2868	.9580	20				
50	.0145	.9994	10	50	.1536	.9881	10	50	.2896	.9572	10				
1	0.0175	.9998	089	9	0.1564	.9877	081	17	0.2924	.9563	073				
10	.0204	.9998	50	10	.1593	.9872	50	10	.2952	.9555	50				
20	.0233	.9997	40	20	.1622	.9868	40	20	.2979	.9546	40				
30	.0262	.9997	30	30	.1650	.9863	30	30	.3007	.9537	30				
40	.0291	.9996	20	40	.1679	.9858	20	40	.3035	.9528	20				
50	.0320	.9995	10	50	.1708	.9853	10	50	.3062	.9520	10				
2	0.0349	.9994	088	10	0.1736	.9848	080	18	0.3090	.9511	072				
10	.0378	.9993	50	10	.1765	.9843	50	10	.3118	.9502	50				
20	.0407	.9992	40	20	.1794	.9838	40	20	.3145	.9492	40				
30	.0436	.9990	30	30	.1822	.9833	30	30	.3173	.9483	30				
40	.0465	.9989	20	40	.1851	.9827	20	40	.3201	.9474	20				
50	.0494	.9988	10	50	.1880	.9822	10	50	.3228	.9465	10				
3	0.0523	.9986	087	11	0.1908	.9816	079	19	0.3256	.9455	071				
10	.0552	.9985	50	10	.1937	.9811	50	10	.3283	.9446	50				
20	.0581	.9983	40	20	.1965	.9805	40	20	.3311	.9436	40				
30	.0610	.9981	30	30	.1994	.9799	30	30	.3338	.9426	30				
40	.0640	.9980	20	40	.2022	.9793	20	40	.3365	.9417	20				
50	.0669	.9978	10	50	.2051	.9787	10	50	.3393	.9407	10				
4	0.0698	.9976	086	12	0.2079	.9781	078	20	0.3420	.9397	070				
10	.0727	.9974	50	10	.2108	.9775	50	10	.3448	.9387	50				
20	.0756	.9971	40	20	.2136	.9769	40	20	.3475	.9377	40				
30	.0785	.9969	30	30	.2164	.9763	30	30	.3502	.9367	30				
40	.0814	.9967	20	40	.2193	.9757	20	40	.3529	.9356	20				
50	.0843	.9964	10	50	.2221	.9750	10	50	.3557	.9346	10				
5	0.0872	.9962	085	13	0.2250	.9744	077	21	0.3584	.9336	069				
10	.0901	.9959	50	10	.2278	.9737	50	10	.3611	.9325	50				
20	.0929	.9957	40	20	.2306	.9730	40	20	.3638	.9315	40				
30	.0958	.9954	30	30	.2334	.9724	30	30	.3665	.9304	30				
40	.0987	.9951	20	40	.2362	.9717	20	40	.3692	.9293	20				
50	.1016	.9948	10	50	.2391	.9710	10	50	.3719	.9283	10				
6	0.1045	.9945	084	14	0.2419	.9703	076	22	0.3746	.9272	068				
10	.1074	.9942	50	10	.2447	.9696	50	10	.3773	.9261	50				
20	.1103	.9939	40	20	.2476	.9689	40	20	.3800	.9250	40				
30	.1132	.9936	30	30	.2504	.9681	30	30	.3827	.9239	30				
40	.1161	.9932	20	40	.2532	.9674	20	40	.3854	.9228	20				
50	.1190	.9929	10	50	.2560	.9667	10	50	.3881	.9216	10				
7	0.1219	.9925	083	15	0.2588	.9659	075	23	0.3907	.9205	067				
10	.1248	.9922	50	10	.2616	.9652	50	10	.3934	.9194	50				
20	.1276	.9918	40	20	.2644	.9644	40	20	.3961	.9182	40				
30	.1305	.9914	30	30	.2672	.9636	30	30	.3987	.9171	30				
40	.1334	.9911	20	40	.2700	.9628	20	40	.4014	.9159	20				
50	.1363	.9907	10	50	.2728	.9621	10	50	.4041	.9147	10				
8	0.1392	.9903	082	16	0.2756	.9613	074	24	0.4067	.9135	066				
	cos 差 差 sin ' °														

° / sin 差 差 cos				° / sin 差 差 cos				° / sin 差 差 cos							
24	0.4067	.9135	066	31	0.5150	.8572	059	38	0.6157	.7880	052				
10	.4094	.9124	50	10	.5175	.8557	50	10	.6180	.7862	50				
20	.4120	.9112	40	20	.5200	.8542	40	20	.6202	.7844	40				
30	.4147	.9100	30	30	.5225	.8526	30	30	.6225	.7826	30				
40	.4173	.9088	20	40	.5250	.8511	20	40	.6248	.7808	20				
50	.4200	.9075	10	50	.5275	.8496	10	50	.6271	.7790	10				
25	0.4226	.9063	065	32	0.5299	.8480	058	39	0.6293	.7771	051				
10	.4253	.9051	50	10	.5324	.8465	50	10	.6316	.7753	50				
20	.4279	.9038	40	20	.5348	.8450	40	20	.6338	.7735	40				
30	.4305	.9026	30	30	.5373	.8434	30	30	.6361	.7716	30				
40	.4331	.9013	20	40	.5398	.8418	20	40	.6383	.7698	20				
50	.4358	.9001	10	50	.5422	.8403	10	50	.6406	.7679	10				
25	0.4384	.8988	064	33	0.5446	.8387	057	40	0.6428	.7660	050				
10	.4410	.8975	50	10	.5471	.8371	50	10	.6450	.7642	50				
20	.4436	.8962	40	20	.5495	.8355	40	20	.6472	.7623	40				
30	.4462	.8949	30	30	.5519	.8339	30	30	.6494	.7604	30				
40	.4488	.8936	20	40	.5544	.8323	20	40	.6517	.7585	20				
50	.4514	.8923	10	50	.5568	.8307	10	50	.6539	.7566	10				
27	0.4540	.8910	063	34	0.5592	.8290	056	41	0.6561	.7547	049				
10	.4566	.8897	50	10	.5616	.8274	50	10	.6583	.7528	50				
20	.4592	.8884	40	20	.5640	.8258	40	20	.6606	.7509	40				
30	.4617	.8870	30	30	.5664	.8241	30	30	.6628	.7490	30				
40	.4643	.8857	20	40	.5688	.8225	20	40	.6648	.7470	20				
50	.4669	.8843	10	50	.5712	.8208	10	50	.6669	.7451	10				
28	0.4695	.8829	062	35	0.5736	.8192	055	42	0.6691	.7431	048				
10	.4720	.8816	50	10	.5760	.8175	50	10	.6713	.7412	50				
20	.4746	.8802	40	20	.5783	.8158	40	20	.6734	.7392	40				
30	.4772	.8788	30	30	.5807	.8141	30	30	.6756	.7373	30				
40	.4797	.8774	20	40	.5831	.8124	20	40	.6777	.7353	20				
50	.4823	.8760	10	50	.5854	.8107	10	50	.6799	.7333	10				
29	0.4848	.8746	061	36	0.5878	.8090	054	43	0.6820	.7314	047				
10	.4874	.8732	50	10	.5901	.8073	50	10	.6841	.7294	50				
20	.4899	.8718	40	20	.5925	.8056	40	20	.6862	.7274	40				
30	.4924	.8704	30	30	.5948	.8039	30	30	.6884	.7254	30				
40	.4950	.8689	20	40	.5972	.8021	20	40	.6905	.7234	20				
50	.4975	.8675	10	50	.5995	.8004	10	50	.6926	.7214	10				
30	0.5000	.8660	060	37	0.6018	.7986	053	44	0.6947	.7193	046				
10	.5025	.8646	50	10	.6041	.7969	50	10	.6967	.7173	50				
20	.5050	.8631	40	20	.6065	.7951	40	20	.6988	.7153	40				
30	.5075	.8616	30	30	.6088	.7934	30	30	.7009	.7133	30				
40	.5100	.8601	20	40	.6111	.7916	20	40	.7030	.7112	20				
50	.5125	.8587	10	50	.6134	.7898	10	50	.7050	.7092	10				
31	0.5150	.8572	059	38	0.6157	.7880	052	45	0.7071	.7071	045				
	cos 差 差 sin ' °														



不許複製

初等平面三角法教科書

(定價金七拾五錢)

明治二十六年八月十六日印刷  
明治三十二年四月五日訂正印刷  
明治三十二年五月十八日訂正印刷  
明治三十八年九月八日訂正印刷  
明治卅八年十一月十四日訂正印刷  
明治二十六年八月十九日發行  
明治三十二年四月八日再版發行  
明治三十二年五月廿一日三版發行  
明治三十八年九月十一日四版發行  
明治卅八年十一月十七日五版發行

著 者

東京市本郷區弓町壹丁目十四番地

菊池大麓

東京市小石川區大門町二十八番地

澤田吾一

發行兼印刷者

東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地

大日本圖書株式會社

代表者 專務取締役 宮川保全

發 賣 所

東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地

大日本圖書株式會社

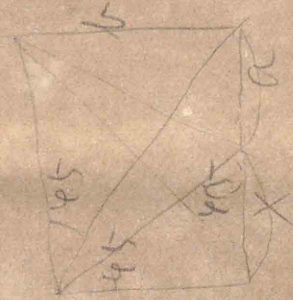
大阪市東區北久太郎町四丁目十七番屋敷

大日本圖書株式會社支社

各府縣下特約販賣所

大日本圖書株式會社特約販賣所

**北海道** 村上商店。川南。魁文會。一二堂。富貴堂。**東京府** 丸善。林平。大倉。水野。青野。三友。內田。杉本。文林堂。北隆館。泰東同文局。文星堂。中西屋。東京堂。文會堂。勉強堂。修學堂。二松堂。松邑。東海堂。有隣堂。十字屋。池田。**茨城縣** 弘集堂。丸屋。勉強堂。**新潟縣** 高桑。高橋。覺張。野島。萬松堂。目黒。柿村。**埼玉縣** 水野。高野。**群馬縣** 煥乎堂。**千葉縣** 多田屋。**茨城縣** 明文堂。川又。寺田。**栃木縣** 青木。**三重縣** 岩田。安屋。**滋賀縣** 川瀬。永東。**靜岡縣** 吉見。谷嶋屋。三原屋。大石。**山梨縣** 柳正堂。**岐阜縣** 郁文堂。郁文堂支店。**長野縣** 日新堂。水琴堂。朝陽館。西澤。盛文堂。**富山縣** 藤崎。松榮堂。英華堂。**石川縣** 佐藤。文明堂。**福井縣** 青霞堂。今泉。今泉支店。**山形縣** 盛文堂。牧野。八文字屋。**秋田縣** 曙堂。東海林。**富山縣** 中田。學海堂。清明堂。**京都府** 若林。文港堂。松田。南波。大坂府 金川。柳原。小谷。松村。開成館。寶文館。三宅。北村。今井。植田。**兵庫縣** 熊谷。石田。福浦。竹內。藥師寺。西村。中井。**長崎縣** 松崎。**奈良縣** 文進堂。歛傍館。**和歌山縣** 廣田。**德島縣** 品川。**石川縣** 宇都宮。**鳥取縣** 徳岡。今井。久松堂。**島根縣** 安達。川岡。**岡山縣** 奥田。武內。**廣島縣** 積善館。芸香堂。原田。**山口縣** 含英堂。梅龍堂。日新堂。超世館。**香川縣** 平安堂。**德島縣** 靜壽堂。**香川縣** 開益堂。開文會。**愛媛縣** 向井。土肥。足立。阿部。**高知縣** 富士越。**福岡縣** 佐野。積善館。博文社。金文堂。**大分縣** 甲斐。**佐賀縣** 牧川。梅津。**熊本縣** 長崎。**宮崎縣** 修進堂。谷。**鹿兒島縣** 吉田。金光堂。**沖繩縣** 小澤。**臺灣** 新高堂。



207  
 960  
 180

五  
 二  
 四  
 級  
 大  
 晉  
 培

P. 189 EX 8

$$\frac{1}{2}e = \psi R^2 (\sin e \sin \theta)$$

$$\cos(\beta + e) = \cos \beta \cos e - \sin \beta \sin e$$

$$\begin{aligned} \sin \beta \sin e &= \cos \beta \cos e - \cos(\beta + e) \\ &= \cos \beta \cos e + \cos A \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}e = \psi R^2 (\cos A + \cos \beta \sin e) \quad \checkmark$$



