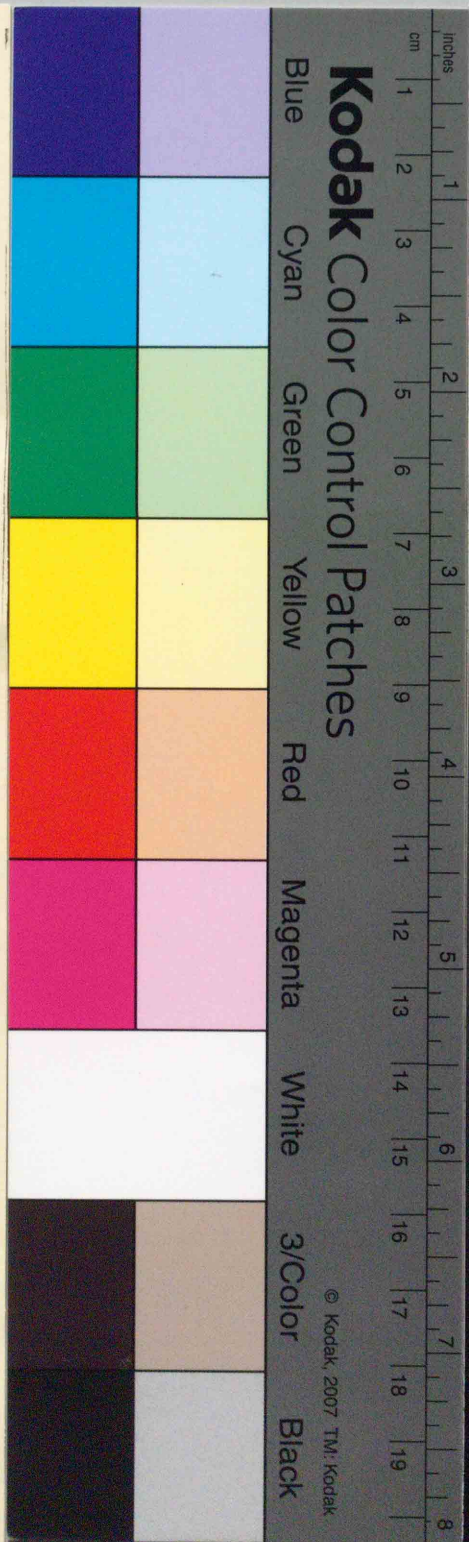


40104

教科書文庫

4
413.
41- <del>1906</del> <sup>1907</sup>
20000 36417

M39.  
1906.

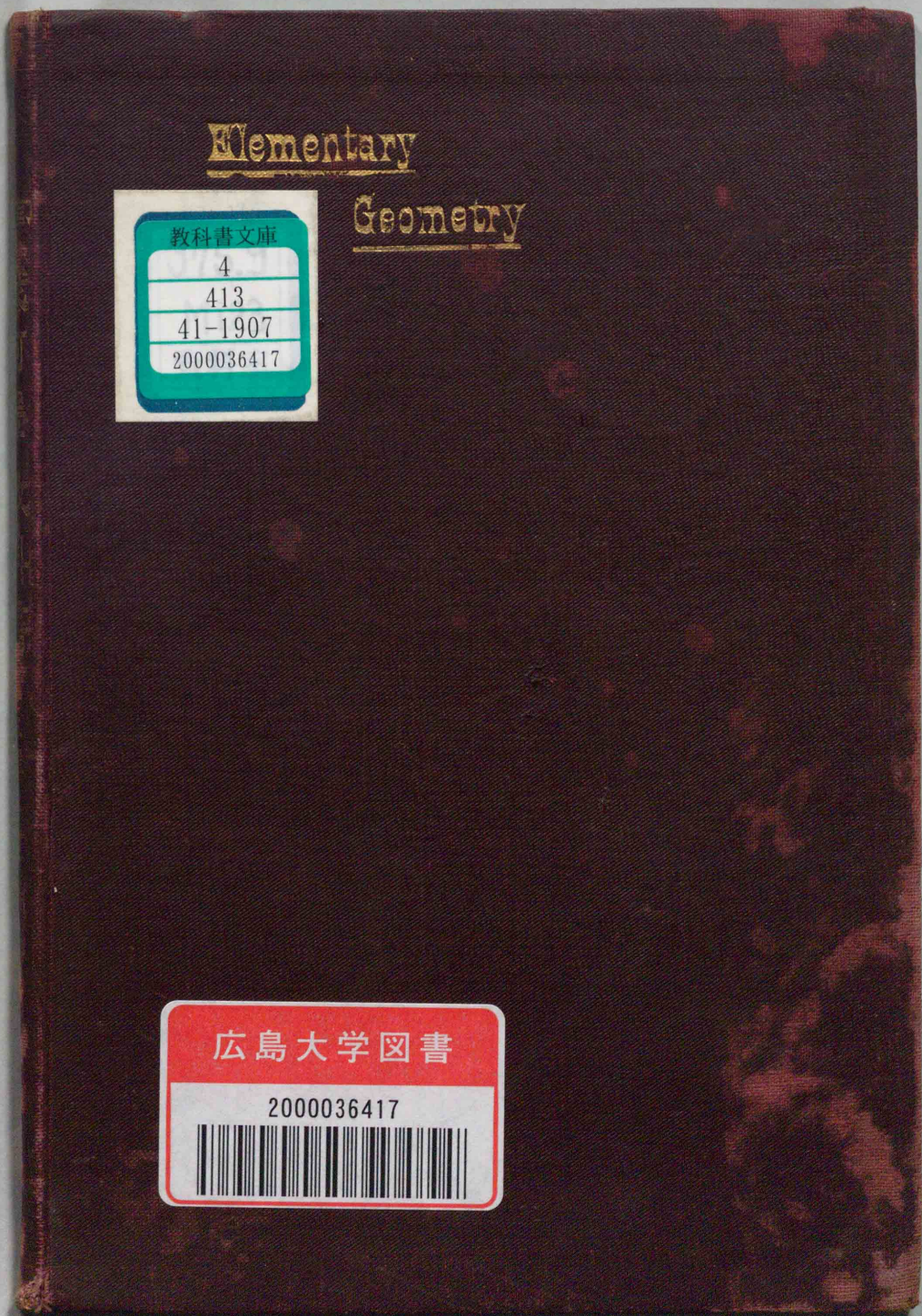
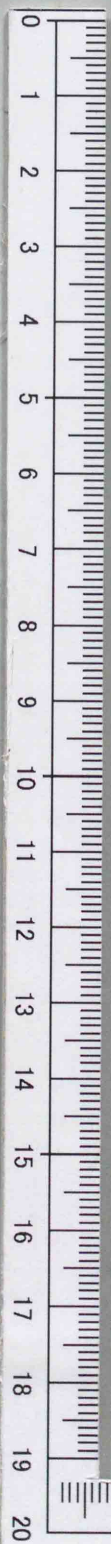


Kodak Gray Scale

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19



© Kodak, 2007 TM: Kodak



375.9

Mi23

$u = \frac{2}{t}$

12	□	□	34
+	+	+	
9	24	34	

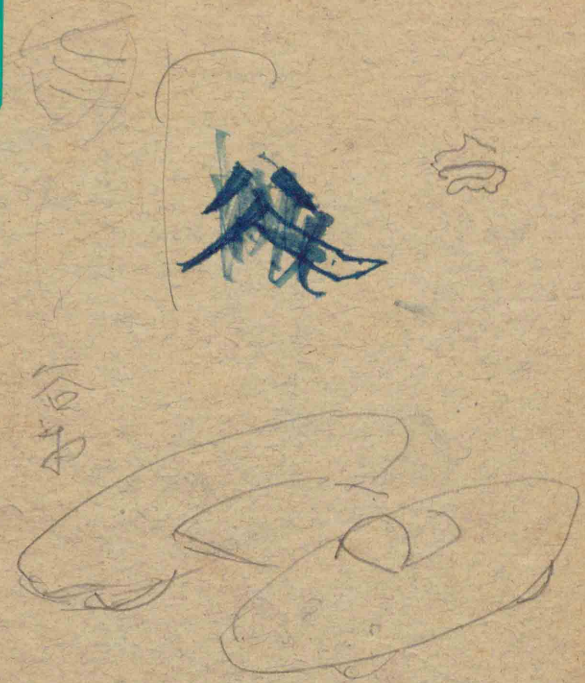
34	456	51
34	6	16
68	6	
48		
14		

$\frac{2456}{456} \frac{456}{456}$



資料室

教科書文庫  
4  
413  
41-1907  
2000036417



$\frac{3}{70}$



文部省檢定済

明治三十九年改版

訂 正


幾何學教科書

立 體

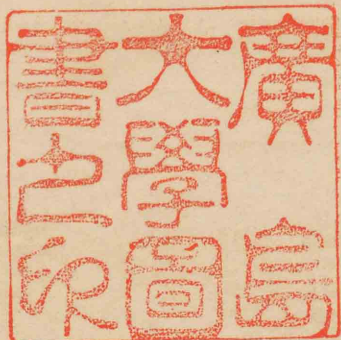
京都帝國大學理工科大學教授

理 學 博 士

三輪 桓 一 郎 著

東 京 

金港堂書籍株式會社



三  
と  
組  
本  
実

## 目 録

第六編. 平面及 $\pi$ 立體角 .....	1
第一節. 直線 $\perp$ 平面 .....	1
第二節. 二面角, 立體角 .....	27
第三節. 多面體 .....	36
第四節. 多面體ノ體積 .....	49
第七編. 圓 $\pi$ , 圓錐, 球 .....	63
第一節. 直圓 $\pi$ 及 $\pi$ 直圓錐 .....	63
第二節. 球 .....	74
第八編. 立體ノ面積及 $\pi$ 體積ノ計算 .....	8
雜問題 .....	100



初等幾何學

立體之部

第六編

平面及び立體角

第一節

直線と平面

平面ノ定義ハ平面幾何學ノ初ニ於テ既ニ掲ゲタ  
リト雖モ立體幾何學ニ於テハ殊ニ平面ノ觀念ヲ確  
ムルヲ必要ナルガ故ニ更ニ茲ニ掲ゲタリ。

**定義1.** 平面トハ一ツノ面ニシテ其ノ上ノ任  
意ノ二點ヲ過ル直線ガ全ク其面上ニ在ルモノナリ。  
故ニ一ツノ直線ハ其ノ二點ガ一ツノ平面上ニ在  
レバ全部其平面上ニ在ルナリ。

一ツノ直線ガ全ク平面上ニ在ルトキハ此平面ハ  
其直線ヲ含ムト云フ。

平面ハ限リナキ擴ガリヲ有スレトモ圖ニ於テ平

面ノ位置ヲ表スニ通常平行四邊形ヲ以テス。

直線ト平面ノ位置ノ關係ハ次ノ如シ。

1. 直線ハ全ク平面上ニ在ルカ(換言スレバ直線上ノ二點ガ平面上ニ在ルカ)。
2. 直線ハ平面ト唯一點ニ於テ出會フカ、
3. 直線ト平面トガ何程延長サル、モ決シテ出會ハザルカ。

以上三ツノ場合ニ限ル。

**定義 2.** 直線ト平面トガ何程延長サル、モ決シテ出會ハザルトキハ互ニ平行ナリト云フ。

**公理.** 平面上ニ引ケル一ツノ直線ヲ軸トシテ此平面ヲ一周廻轉セシムルトキハ平面ハ空間ノ總テノ點ヲ通過ス。

**定義 3.** 一ツ或ハ之ヨリ多クノ線或ハ點ヲ含ム平面ガ一ツアリ、而シテ唯一ツニ限ルトキハ其等ノ線或ハ點ハ平面ヲ定ムト云フ。

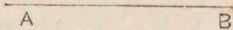
**定理 1.** 一ツノ直線ト其上ニ在ラザル一ツノ點ハ平面ヲ定ム。

ABヲ與ヘラレタル直線、Cヲ與ヘラレタル點ト

セヨ。然ルキハ AB ト C

ヲ含ム平面ハ唯一ツニ限ル

ベシ。



**證** ABヲ含ム任意ノ平面ハ ABヲ軸トシテ之ヲ廻轉シC點ヲ含ム位置マテ來ラシムルヲ得(公理)即 ABトCヲ含ム一ツノ平面アルナリ。

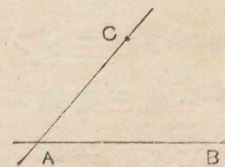
次ニ平面ヲ此位置ヨリ如何程僅ニテモ廻轉セシムレハC點ハ其平面上ニ在ラザルナリ。故ニ唯一ツニ限ル

**系 1.** 一直線上ニ在ラザル三ツノ點ハ平面ヲ定ム。

何トナレハ三ツノ中任意ノ二ツヲ過ル直線ヲ引ケハ即本定理ニ據リテ直ニ證明スルヲ得。

**系 2.** 相交ル二直線ハ平面ヲ定ム。

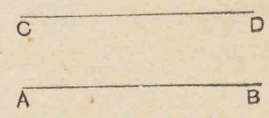
何トナレバ AB, ACヲ相交ル二直線トセヨ。AC上ノ一點Cト ABヲ含ム平面ハ唯一ツアルノミ(本定理)。而シテACハ其



上ノ二點A, Cガ平面上ニ在ルヲ以テ全ク平面上ニ

在リ。故ニ相交ルニ直線 AB, AC ハ平面ヲ定ム。

**系 3.** 平行ナルニ直線ハ平面ヲ定ム。

何トナレバ  $AB \parallel CD$  ナリトセ   
 ヨ。CD 上ノ一點 C ト AB トヲ含  
 ム平面ハ唯一ツアルノミ。而シ  
 テ平行線ノ定義ニ據リ AB, CD ハ同一平面上ニ在リ。  
 故ニ平行ナルニ直線 AB, CD ハ平面ヲ定ム。

二直線ノ相互ノ位置ノ關係ハ次ノ如シ。

1. 同一平面上ニ在リテ相交ルカ、
2. 平行ナルカ(勿論同一平面上ニ在リ)、
3. 同一平面上ニ在ラズ(即相交ラズ、又平行ナラズ)。

以上三ツノ場合ニ限ル。

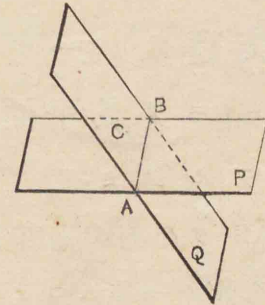
故ニ立體幾何學ニ於テ二直線ノ平行ナルヲ證  
 明スルニハ其同一平面上ニ在ルヲト、決シテ出會  
 ハザルヲト此二件ノ證明ヲ必要トス。

**問題 1.** 三ツノ直線ガ二ツ宛三ツノ點ニ於テ交  
 ルキハ此三直線ハ同一平面上ニ在リ。

**問題 2.** 三ツノ平行線ガ第四ノ直線ト交ルキハ  
 此四直線ハ同一平面上ニ在リ。

**定理 2.** 二ツノ平面ノ交リハ一ツノ  
 直線ナリ。

P, Q ヲ出會フ所ノ二ツノ平  
 面トセヨ、然ルキハ其交リハ  
 直線ナルベシ。



**證.** 二ツノ平面ノ交リノ  
 上ニ二點 A, B ヲ取リ 直線  
 AB ヲ引ケ。然ルキハ直線 AB

ハ双方ノ平面上ニ在リ(六編定義 1) 而シテ此直線  
 外ニ二ツノ平面ニ共通ノ點ナシ。何トナレハ若シ  
 此ノ如キ點(C)アリトセバ直線 AB ト點 C ヲ含ム平  
 面ガ二ツアルヲトナル、是レ定理 1 ニ戻ル。故ニ  
 二ツノ平面 P, Q ノ交リハ直線 AB ナリ。

平面ニ垂線ナル直線。

**定義 4.** 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ出會フ點  
 ヲ其直線ノ足ト云フ。

**定義 5.** 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ出會ヒ、  
 其足ヲ過リテ平面上ニ引ケル總テノ直線ニ垂線ナ

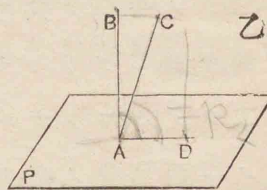
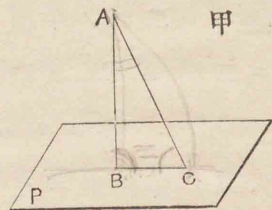


ルキハ其直線ハ平面ニ垂直ナリト云フ。而シテ其直線ト平面ハ互ニ垂直ナリト云フ。

平面ニ出會ヒ垂線ナラザル直線ヲ斜線ト稱ス。

**定理 3.** 一ツノ平面外ノ、或ハ其上ノ一點ヨリ其平面ニ垂直ナル直線ハ唯一ツアルノミ。

ABヲ平面P外(甲圖)或ハ其上(乙圖)ノ一點Aヨリ平面Pニ引ケル垂線トセヨ。然ルキハA點ヨリ平面Pへ其他ノ垂線アル能ハザルベシ。



**證.** 先ツAヲP外ニ在リトセヨ(甲圖)。若シ他ノ垂線

(ACノ如キ)アリトセハBCヲ結ヒ付ク、 $\triangle ABC$ ニ於テ $\angle ABC = \angle ACB = R\angle$ ナラサルベカラズ(六編定義5)是レ不合理ナリ。故ニPニ垂直ナル直線ハAB唯一ツアルノミ。

次ニAハP上ニ在リトセヨ(乙圖)。若シ他ノ垂線(ACノ如キ)アリトセバAB, ACヲ含ム平面Qヲ畫ク。

此平面トPトノ交リヲADトセヨ(六編定.2)。然ルキハ $\angle BAD = \angle CAD = R\angle$ (六編定義5)ナラザルベカラズ。然ルニ平面Qノ上ニ於テ一ツノ直線AD上ノ一點Aニ於テ之ニ二ツノ垂線アル能ハズ故ニPニ垂直ナル直線ハAB唯一ツアルノミ。

**系.** 一ツノ點ヨリ一ツノ平面へ引ケル直線ノ中垂線ハ最短シ。

**定義 6.** 一ツノ點ヨリ一ツノ平面へノ距離

トハ其點ヨリ此平面へ引ケル垂線ノ長サヲ云フ。

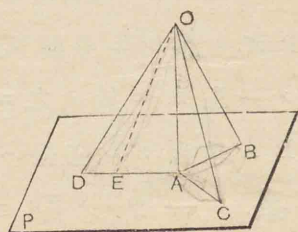
**問題 3.** 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二點ヲ結ヒ付クル直線ノ中點ニ於テ之ニ垂直ナル平面ナリ。

茲ニ謂フ所ノ軌跡ハ平面幾何學ニ於テ陳ベタル軌跡ノ意義ヲ擴張シタルモノナルヲ以テ別ニ定義ヲ掲ケズ。

**定理 4.** 平面外ノ一點ヨリ此平面へ引ケル斜線ノ中、(I) 其足ガ垂線ノ足ヲ距ルヲ相等シキモノハ相等シ。(II) 其足ガ垂線ノ足ヲ距ルヲ大ナルモノハ小

ナルモノヨリ大ナリ。

平面 P 外ノ一點 O ヨリ垂線 OA, 斜線 OB, OC, OD ヲ引キ,  $AB=AC$ ,  $AD>AB$  トセヨ。然ルキハ (I)  $OB=OC$ , (II)  $OD>OB$  ナルベシ。



Iノ證.  $\triangle OAB$ ,  $\triangle OAC$  ニ於テ  $\angle OAB = \angle OAC = R\angle$ ,  $AB=AC$  (假設),  $OA$  ハ共通故ニ兩三角形ハ全ク相等シ, 即  $OB=OC$ .

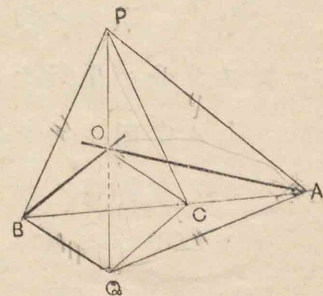
IIノ證.  $AD$  上ニ  $AB=AE$  ト取り,  $OE$  ヲ結ビ付ク。然ルキハ  $OE=OB$  (Iノ證) 而シテ平面  $OAD$  ノ上ニ於テ  $OD>OE$ , 故ニ  $OD>OB$ .

**系** 本定理ノ逆モ亦眞ナリ。

**定理 5.** 一ツノ直線ガ二ツノ直線ノ交點ニ於テ各ニ垂線ナレバ其直線ハ此二直線ノ平面ニ垂線ナリ。

直線  $PO$  ガ二直線  $OA$ ,  $OB$  ノ交點  $O$  ニ於テ各ニ垂線ナリトセヨ。然ルキハ  $PO$  ハ  $OA$ ,  $OB$  ノ定ムル平面ニ垂線ナルベシ。

證.  $OA$ ,  $OB$  ノ平面上ニ  $O$  ヲ過リ任意ニ引ケル直線  $OC = PO$  ガ垂線ナルヲ證スレハ足レリ。直線  $AB$  ヲ引キ  $OC$  ト  $C$  ニ於テ出會ハシメ,  $PO$  ヲ  $Q$  マテ延長シ



$OQ=PO$  トシ,  $P, Q$  ヲ  $A, C, B$  ニ結ビ付ク。然ルキハ  $\triangle PAQ$  ニ於テ  $PA=QA$ , 又  $\triangle PBQ$  ニ於テ  $PB=QB$  ナルヲ明ナリ。故ニ

$\triangle PAB \equiv \triangle QAB$ , 從フテ  $\triangle PBC \equiv \triangle QBC$ , 依リテ  $PC=QC$  即  $\triangle PCQ$  ハ二等邊ナリ。故ニ

$\angle POC = \angle QOC = R\angle$  即  $PO$  ハ  $OA$ ,  $OB$  ノ平面上ノ任意ノ直線ニ垂線ナルヲ以テ其平面ニ垂線ナリ

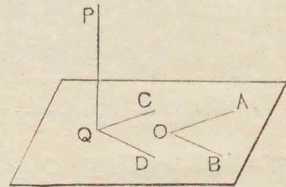
**系 1.** 同一ノ點ヲ過ル三ツノ直線ガ同一ノ直線ト垂線ナレバ三直線ハ同一ノ平面上ニ在リ。

**系 2.** 一ツノ定ムレル直線ニ垂線ナル直線ガ其直線ヲ軸トシテ廻轉スルキハ一ツノ平面ヲナス。

**定義 7.** ニツノ出會ハザル直線ノナス角ト  
ハ一點ヨリ各ニ平行ナル二直線ノナス角ヲ云フ。

故ニ上ノ定理ニ於テ直線 PO ハ OA, OB ノ交點ヲ  
過ラズシテ右ノ圖ノ如ク Q

點ニ於テ AOB ノ平面ニ出會  
フニ PQ ⊥ OA, PQ ⊥ OB ナル假  
設ガ與ヘラルレハ Q ヨリ



OA, OB ニ平行ニ QC, QD ヲ引ケハ ∠PQC, ∠PQD ハ  
何レモ直角ナリ故ニ PQ ハ此場合ニモ AOB ノ平面  
ニ垂線ナリト云フ。

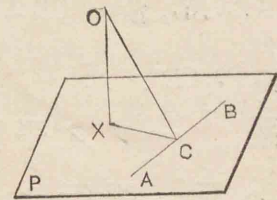
**系 3.** 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ垂  
線ナレハ其平面上ノ如何ナル線ニモ垂  
線ナリ。

**問題 4.** 一ツノ直線外ノ一ツノ點ヲ含ミ其直線  
ニ垂直ナル一ツノ平面ヲ畫クヲ得、而シテ唯一ツ  
ニ限ル。

**定理 6.** 一ツノ平面ノ垂線ノ足ヨリ  
其平面上ノ任意ノ直線ハ垂線ヲ引キ其

交點ト垂直線上ノ任意ノ點トヲ結ヒ付  
クル直線ハ前ノ直線ニ垂線ナリ。

直線  $OX \perp$  平面 P, AB ハ P  
上ノ任意ノ直線ニシテ  
 $XC \perp AB$  ナリトセヨ, 然ルキ  
ハ  $OC \perp AB$  ナルベシ。



**證.**  $OX \perp P$  故ニ  $OX \perp AB$  (六編定義 7)

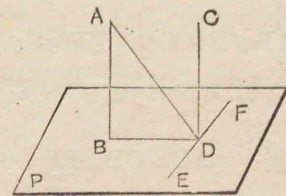
又  $XC \perp AB$ , 依リテ AB ハ OXC ノ平面ニ垂直ナリ  
(六編定. 5, 系 2). 故ニ平面 OXC 上ノ直線  $OC \perp AB$ .

**問題 5.** 平面 P 外ノ一點 O ヨリ之ニ垂線 OX ヲ引キ  
P 上ノ直線 AB ニ垂線 OC ヲ引ケバ CX ハ AB ニ垂線ナリ。

**定理 7.** 二ツノ平行線ノ一ツガ一ツ  
ノ平面ニ垂直ナレハ他モ亦垂直ナリ。

$AB \parallel CD$ ,  $AB \perp$  平面 P ナリトセヨ, 然ルキハ  
 $CD \perp P$  ナルベシ。

**證.** 平行線 AB, CD ヲ含  
ム平面ト P トノ交リヲ BD  
トシ, D ヲ過リ BD ニ垂線  
EF ヲ P ノ上ニ引キ AD ヲ結

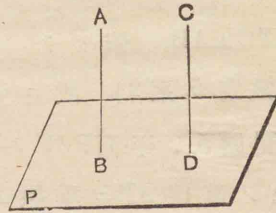


ヒ付クヨ、然ルキハ EF ハ AB, BD ト直角ヲナスヲ以テ平面  $ABD \perp EF$ , 故ニ平面  $ABD$  上ノ直線  $CD \perp EF$ .

又  $AB \perp BD$ , 故ニ  $CD \perp DB$ , 故ニ  $BD, EF$  ノ含マル、平面  $P \perp CD$  ナリ.

系. 一ツノ平面ニ垂直ナル二ツノ直線ハ互ニ平行ナリ.

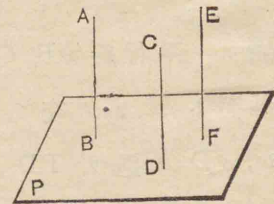
何トナレハ  $AB, CD$  ヲ平面  $P$  ニ垂直ナリトセヨ、 $CD$  上ノ一點  $C$  ヨリ  $AB$  ニ平行ナル直線ハ  $P$  ニ垂直ナリ(本定理) 然ルニ  $C$  ヨリ  $P$  ニ垂直ナル直線ハ唯一ツニ限ル(六編定.3) 故ニ  $CD \parallel AB$  ナリ.



定理 8. 同一ノ直線ニ平行ナル直線ハ互ニ平行ナリ.

$AB \parallel EF, CD \parallel EF$  ナリトセヨ、然ルキハ  $AB \parallel CD$  ナルベシ.

證.  $AB, CD, EF$  ガ同一平

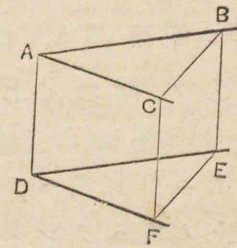


面上ニ在ル場合ハ平面幾何學ニ於テ已ニ證明シタリ. 依リテ次ニ同一平面上ニ在ラザル場合ヲ證明スベシ.

$EF$  ニ垂直ナル平面  $P$  ヲ書ク. 然ルキハ  $AB \parallel EF$  故ニ  $AB \perp P$  (六編定.7). 同様ニ  $CD \perp P$ , 故ニ  $AB \parallel CD$  (六編定.7, 系).

定理 9. 同一平面上ニ在ラザル二ツノ角ノ二邊ガ夫々平行ニシテ且同シ向キニ在ルキハ二ツノ角ハ相等シ.

$\angle BAC$  ト  $\angle EDF$  ハ同一平面上ニ在ラズシテ  $AB \parallel DE, AC \parallel DF$  且夫々同シ向キヲナスキハ  $\angle BAC = \angle EDF$  ナルベシ.



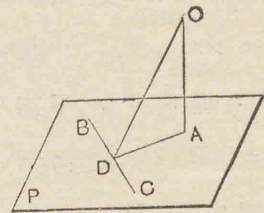
證.  $AB = DE, AC = DF$  ト取り、 $AD, BE, CF, BC, EF$  ヲ結ヒ付ク.

然ルキハ  $AB \parallel DE$ , 故ニ  $AD \parallel BE$ . 同様ニ  $AD \parallel CF$  故ニ  $BE \parallel CF$  (六編定.8) 故ニ  $BC = EF$  故ニ  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  故ニ  $\angle BAC = \angle EDF$ .

作圖題 1. 與ヘラレタル點ヨリ與ヘ

ラレタル平面へ垂線ヲ引クヲ.

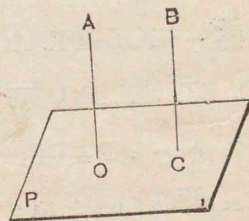
先ツ O ヲ與ヘラレタル平面 P 外ノ與ヘラレタル點トス. O ヨリ P へ垂線ヲ引クヲ.



解. 平面 P 上ニ任意ノ直線 BC ヲ引キ, O ヨリ BC へ垂線 OD ヲ引キ, P 上ニ於テ BC へ垂線 DA ヲ引キ, O ヨリ DA へ垂線 OA ヲ引ク, OA ハ求ムル所ノ垂線ナリ.

證. BC ハ OD, DA へ垂線ナリ(作圖), 故ニ BC ⊥ 平面 ODA, 故ニ平面 ODA 上ノ直線 OA ⊥ BC 依リテ OA ハ P 上ノ二直線 BC, DA へ垂線ナリ, 即 OA ⊥ 平面 P.

次ニ O ヲ與ヘラレタル平面 P 上ノ與ヘラレタル點トス. O ヨリ P へ垂線ヲ引クヲ.



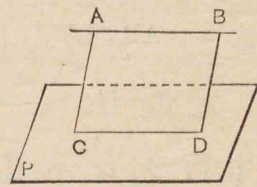
解. 平面 P 外ノ任意ノ一點 B ヨリ P へ垂線 BC ヲ引キ(始メノ作圖) O ヨリ BC ト O ヲ含ム平面上ニ於テ BC へ平行ニ OA ヲ引ク. OA ハ求ムル所ノ垂線ナリ.

證明ハ明瞭ナルヲ以テ畧ス.

### 平面ニ平行ナル直線及ビ平面

定理 10. 一ツノ直線ガ之ヲ含マザル平面上ノ直線ニ平行ナレハ其平面ニ平行ナリ.

AB // CD, P ヲ CD ヲ含ミ AB ヲ含マザル一ツノ平面トセヨ然ルキハ AB // P ナルベシ.



證. AB // CD, 故ニ此二直線ヲ含ミ平面 AD ヲ書ク, 平面 AD ト P トノ交リハ CD ナリ.

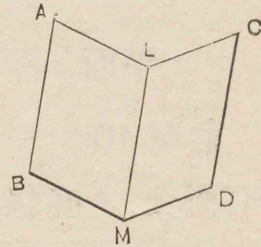
故ニ AD 上ノ直線ガ P へ出會フ點ハ CD ノ上ヨリ他ナラズ.

故ニ AB ガ若シ P へ出會ヘハ其點ハ CD ノ上ナラザルベカラズ, 而シテ AB ハ CD へ出會フ能ハズ, 從フテ P へ出會フ能ハズ. 即 AB // P ナリ.

系. 平行ナル二ツノ直線ノ各ヲ含ミ他ヲ含マザル二ツノ平面ノ交リハ其二

直線ニ平行ナリ。

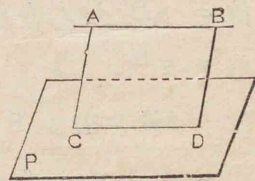
何トナレバ平行ナル二直線 AB, CD ノ各ヲ含ム 平面 AM, CM ノ交リヲ LM トセヨ, AB ハ平面 CM ニ出會フ能ハズ(本定理) 故ニ其上ノ直線 LM ニ



出會フ能ハズ。而シテ AB, LM ハ同一平面上ニ在リ 故ニ  $AB \parallel LM$ , 同様ニ  $CD \parallel LM$  ナリ。

**定理 II.** 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行ナレハ其直線ハ之ヲ含ム平面ト前ノ平面トノ交リニ平行ナリ

直線 AB ヲ平面 P ニ平行ナリトセヨ, 然ルルハ AB ハ之ヲ含ム平面 AD ト P トノ交リ CD ニモ平行ナルベシ。



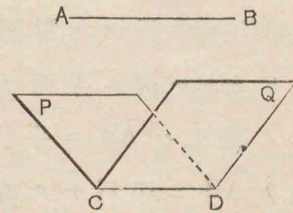
**證.** AB ハ P ニ出會フ能ハズ(假設) 故ニ其上ノ直線 CD ニモ出會フ能ハズ, 而シテ AB, CD ハ同一平面上ニ在リ, 故ニ  $AB \parallel CD$ .

**系 I.** 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行

ナレハ此平面上ノ任意ノ點ヲ過リ其直線ニ平行ナル直線ハ此平面上ニ在リ。

**系 2.** 一ツノ直線ガ二ツノ平面ニ平行ナレハ其ノ交リニモ亦平行ナリ。

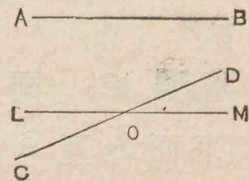
何トナレハ AB ガ二ツノ平面 P, Q ニ平行ナリトシ其ノ交リヲ CD トセヨ, CD 上ノ任意ノ一點ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ハ P ノ上ニモ同時ニ Q ノ上ニモ在リ(系 1.) 即 P, Q ノ交リ CD ト重ナラザルヲ得ズ, 故ニ  $AB \parallel CD$  ナリ。



**作圖題 2.** 同一平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行ナル平面ヲ引クヲ。

AB, CD ヲ同一平面上ニ在ラザル二直線トシ, CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面ヲ引クヲ求ム。

**解.** CD 上ノ任意ノ一點 O ト AB ノ定ムル平面上ニ於テ O ヲ



過リ AB = 平行線 LM を引ク。 CD, LM の定ムル平面ハ求ムル所ノモノナリ。

證. CD, LM を含ム平面ハ AB = 平行ナルトハ定理 10 = 據リテ明ナリ。而シテ此平面ノ他ニハ解ナシ。何トナレバ若シ CD, LM ノ平面ノ他ニ CD を含ミ AB = 平行ナル平面(P)アリトセヨ。 CD 上ノ一點 O ト AB を含ム平面ヲ書ク。然ルキハ此平面ト P トノ交リハ AB = 平行ナリ(六編定.11)。而シテ O を過リ AB = 平行ナル直線ハ即 LM ナリ。故ニ P ハ CD, LM ノ平面ト相合ス。故ニ求ムル所ノモノハ CD, LM ノ平面ヨリ他ニナシ。

問題 6. 一ツノ點ヲ過リ二ツノ平行ナラザル直線 = 平行ナル平面ヲ引ク。

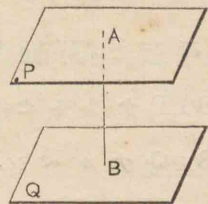
定義 8. 二ツノ平面ガ平行ナリトハ之ヲ何レノ方向ニ何程延長スルモ決シテ出會ハザルキヲ云フ。

定理 12. 同一ノ直線 = 垂直ナル二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ。

平面  $P \perp$  直線 AB, 平面  $Q \perp$  直線 AB ナリトセヨ,

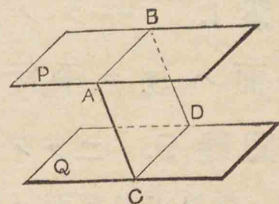
然ルキハ  $P \parallel Q$  ナルベシ。

證. 若シ P, Q ガ平行ナラズシテ相交レハ其交リノ上ノ任意ノ一點(X)ヲ A, B = 結ヒ付クレハ AB ハ P, Q = 垂線ナルカ故ニ XA, XB ハ AB = 垂線ナルベシ。是レ不合理ナリ。故ニ P, Q ハ出會フ能ハズ、即互ニ平行ナリ(六編定義 8)。



定理 13. 一ツノ平面ガ二ツノ平行ナル平面ト交レハ其交リハ互ニ平行ナリ。

平面  $P \parallel$  平面 Q, 又平面 AD ト P, Q トノ交リヲ夫々 AB, CD トセヨ。然ルキハ  $AB \parallel CD$  ナルベシ。



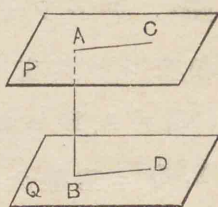
證. P, Q ハ決シテ出會フヲナシ。故ニ AB, CD ハ出會フヲ能ハズ、而シテ AB, CD ハ同一平面上ニ在リ。故ニ  $AB \parallel CD$  ナリ。

問題 7. 二ツノ平行線ノ二ツノ平行ナル平面ノ間ニ夾マル、部分ハ相等シ。

定理 14. 二ツノ平面ガ平行ナレハ其

一ツニ垂直ナル直線ハ他ニモ垂直ナリ

平面  $P \parallel$  平面  $Q$ , 而シテ直線  
 $AB \perp P$  ナリトセヨ, 然ルキハ  
 $AB \perp Q$  ナルベシ.



證.  $AB$ ヲ含ミ任意ノ平面  
 $AD$ ヲ書キ,  $P, Q$ ト夫々  $AC, BD$   
ニ於テ交ルトセヨ. 然ルキハ  $AC \parallel BD$  (六編定.13)  
而シテ  $AB \perp AC$  (假設) 故ニ  $AB \perp BD$ , 而シテ  $AD$ ハ  
任意ノ平面ナルカ故ニ  $AB$ ハ  $Q$ ノ上ニ於テ  $B$ 點ヲ  
過ル總テノ直線ニ垂線ナリ. 即  $AB \perp Q$  ナリ

系 1. 一ツノ平面ニ平行ナル二ツノ  
平面ハ互ニ平行ナリ.

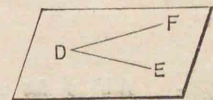
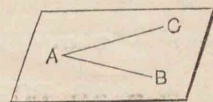
定義 9. 二ツノ平行ナル平面ノ距離トハ共  
通ノ垂線ガ其平面ノ間ニ夾マル、部分ノ長サナリ.

系 2. 二ツノ平行ナル平面ノ距離ハ  
常ニ相等シ.

問題 8. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ與ヘラレ  
タル平面ニ平行ナル一ツノ平面ヲ書クヲ得, 而  
シテ唯一ツニ限ル.

定理 15. 一ツノ平面上ノ相交ル二直  
線ガ他ノ平面上ノ相交ル二直線ニ夫々  
平行ナレハ二ツノ平面ハ平行ナリ.

$AB \parallel DE, AC \parallel DF$  ナリトセヨ,  
然ルキハ 平面  $BAC \parallel$  平面  $EDF$   
ナルベシ.



證. 若シ二ツノ平面ガ平行ナ  
ラザレバ其交リハ互ニ平行ナル  
二直線  $AB, DE$ ノ各ヲ含ム平面ノ交リナルガ故ニ  
 $AB, DE$ ニ平行ナラザルヲ得ズ (六編定.10, 系). 同様  
ニ又其交リハ  $AC, DF$ ニモ平行ナラザルヲ得ズ.  
然ルニ一ツノ直線ガ相交ル二直線ニ平行ナル能ハ  
ズ, 故ニ二ツノ平面ハ出會フ能ハズ,  
即平面  $BAC \parallel$  平面  $EDF$  ナリ.

問題 9. 同一ノ平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ  
各ヲ含ミ他ニ平行ナル平面ヲ引ケバ二ツノ平面ハ  
互ニ平行ナリ.

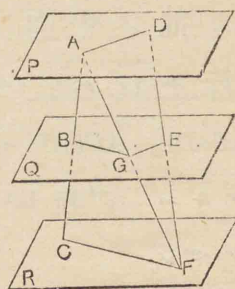
定理 16. 二ツノ直線ガ數多ノ平行ナ  
ル平面ト交ルキハ之ガ爲ニ分タレタル



部分ハ比例ヲ成ス。

ニツノ直線 AC, DF が平行ナル平面(假リニ三ツトス) P, Q, R ト夫々 A, B, C, 及ビ D, E, F ニ於テ交ルトセヨ。

然ルキハ  $AB:BC=DE:EF$  ナルベシ。



證. AF ヲ結ヒ付ク, AF カ Q ト交ル點ヲ G トシ BG, CF, GE, AD ヲ結ヒ付クヨ。

然ルキハ平面 ACF ニ於テ  $BG \parallel CF$  (六編定. 13),

故ニ  $AB:BC=AG:GF$ ,

又平面 FAD ニ於テ  $GE \parallel AD$

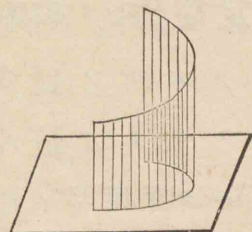
故ニ  $AG:GF=DE:EF$ ,

依リテ  $AB:BC=DE:EF$ .

### 正 射 影

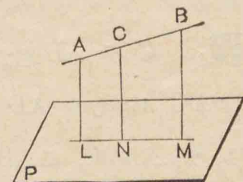
定義 10. 一ツノ平面上ニ一ツノ點ノ正射影(或ハ畧シテ射影)トハ此點ヨリ其平面上ニ引タル垂線ノ足ナリ。

定義 11. 一ツノ平面上ニ一ツノ線ノ正射影トハ其線上ノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ。



定理 17. 一ツノ平面上ニ一ツノ直線ノ射影ハ其ノ上ノ任意ノ二點ノ射影ヲ結ヒ付クル直線ナリ。

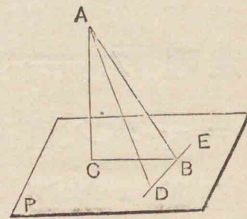
AB ヲ一ツノ直線, L, M ヲ平面上ニ AB 上ノ任意ノ二點 A, B ノ射影トセヨ。然ルキハ P 上ニ直線 AB ノ射影ハ直線 LM ナルベシ。



證. AB 上ノ任意ノ一點 C ノ射影ガ常ニ LM 上ニ在ルヲ證セントス。AL, BM ハ P ニ垂直ナリ(假設) 故ニ  $AL \parallel BM$ , 依リテ AL, BM ノ平面ハ AB, LM ヲ含ム。今此平面上ニ於テ C 點ヨリ AL ニ平行ニ CN ヲ引キ LM ト出會フ點ヲ N トセヨ。然ルキハ CN ハ P ニ垂直ナリ(六編定. 7) 即 C ノ射影ハ常ニ LM 上ニ在リ。故ニ AB ノ射影ハ LM ナリ。

**定理 18.** 斜線ガ平面上ノ任意ノ直線トナス所ノ鋭角ノ中,其ノ正射影トナス所ノモノガ最小ナリ.

ABヲ平面Pノ斜線, BCヲ其ノ射影, DBEヲBヲ過リP上ニ引ケル任意ノ直線トシ,  $\angle ABD$ ヲ鋭角トセヨ. 然ルルハ  $\angle ABC < \angle ABD$ ナルベシ.



**證.** CヲAB上任意ノ點Aノ射影トセヨ,  $BD=BC$ ト取リADヲ結ヒ付ク. 然ルルハ  $AD > AC$ , 而シテ  $\triangle ABC, \triangle ABD$ ニ於テABハ共通,  $BC=BD, AC < AD$ . 故ニ  $\angle ABC < \angle ABD$  (平面一編定. 17). 即定理ハ證明セラレタリ.

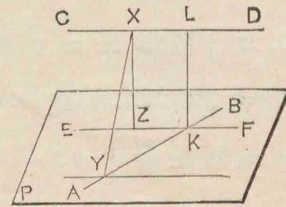
**定義 12.** 一ツノ直線ガ一ツノ平面トナス角トハ平面上其ノ正射影トナス角ヲ云フ.

**問題 10.** 斜線ハ平面上射影ニ垂線ナル直線ト直角ヲナス.

**定理 19.** 同一平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ各ニ垂線ナル直線ハ一ツアリ,

而シテ唯一ツニ限ル. 又此直線ハ二直線間ノ最短距離ナリ.

AB, CDヲ同一平面上ニ在ラザル二ツノ直線トセヨ. 然ルルハAB, CDノ何レニモ垂線ナル直線ハ一ツアルベク. 而シテ唯一ツニ限ルベシ.



**證.** ABヲ含ミCDニ平行ナル平面Pヲ畫キ(作圖2) EFヲP上ニCDノ射影トセヨ. CDハABニ平行ナラズ, 故ニEFハABニ交ル, 此交點ヲKトシ, EF, CDノ平面ニ於テKヨリEFニ垂線KLヲ引ク,  $EF \parallel CD$ , 故ニ  $KL \perp CD$ , 又EFハCD上總テノ點ノ射影ノ軌跡ナルヲ以テ  $LK \perp$  平面P, 故ニ  $LK \perp AB$  即KLハAB, CDニ同時ニ垂線ナリ.

次ニ他ニAB, CDニ垂線ナル直線XYガアリトセヨ. 然ルルハXYハYヲ過リCDニ平行ナル直線ニ垂線ナルベシ. 從フテ平面Pニ垂直ナリ. 然ルニCD上ノ點XヨリPニ垂直ナル直線ノ足ハEFノ上ニ限ル. 故ニXYハ同時ニAB, CDニ垂線ナラズ.

即 KL 唯一ツニ限ル。

最後ニ KL ハ AB, CD 間ニ引ケル直線ノ中, 最小ナルベシ。何トナレバ KL ノ他ノ直線 XY ハ P ニ垂直ナラズ 故ニ X ヨリ P へノ垂直線 XZ ヨリ大ナリ。然ルニ  $XZ = KL$ , 従フテ  $KL < XY$  即 KL ハ AB, CD 間ノ最短距離ナリ。

### 第一節之問題

問題 11. 三ツノ平面ハ一般ニ一ツノ點ニ於テ交ル。特別ナル場合ヲ示セ。

定義 13. 各頂點ガ同シ平面上ニアラザル多角形ヲ「ゴージュ」多角形ト稱ス。

問題 12. 「ゴージュ」四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ビ付ケル直線ハ平行四邊形ヲナス。

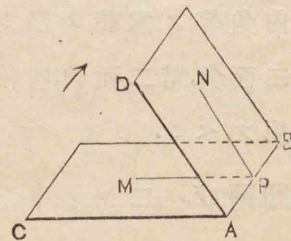
問題 13. 同一平面上ニ在リテ一ツニ交ラザル三直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ム。

問題 14. 一直線上ニアラザル三點ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求ム。

## 第二節 二面角, 立體角

定義 14. 相交ルニツノ平面ハ二面角ヲナスト云フ。其ニツノ平面ノ各ヲ二面角ノ面ト云ヒ, 其ノ交リヲ二面角ノ稜ト云フ。

圖ノ如キ二面角ヲ表スニ通常稜ヲ表ス文字ヲ中間ニ置キ二面角 CABD, 或ハ稜ヲ表ス文字ノミニテ二面角 AB ト記ス。



二面角 CABD ノ稜 AB 上ノ任意ノ一ツ點 P ヨリ面 CB, DB 上ニ夫々 AB ニ垂線 PM, PN ヲ引キ, AB ヲ軸トシテ面 CB ヲ矢ノ方向ニ面 DB ト重ナルマテ廻轉セシムレバ直線 PM ハ平面角 MPN ヲ畫キテ PN ト重ナル(六編定.5, 系1). 而シテ面 CB ノ廻轉ノ度ト直線 PM ノ廻轉ノ度ハ相等シ。且 P ヲ稜ノ上ノ何レノ點ニ取ルモ平面角 MPN ハ常ニ相等シ(六編定.9) 故ニ

二面角ノ大サヲ度ルニハ其ノ稜ノ上ノ任意ノ一

點ヨリ各ノ面上ニ於テ稜ニ垂線ニ引クル二直線ノ夾ム角ノ大サヲ以テス。

此角ヲ其二面角ヲ度ル平面角ト稱ス。

二ツノ二面角ハ其ヲ度ル平面角相等シクレハ重ヲ合スヲ得。

附言. 平面幾何學ニ於ケル對頂角, 錯角, 同位角, 同傍内角等ノ意義ヲ推シ擴メ立體幾何學ニ於テモ對頂二面角, 錯二面角, 同位二面角, 同傍内二面角等ノ語ヲ用フベシ。

問題 15. 二ツノ平面ガ相交レハ對頂二面角ハ相等シ。

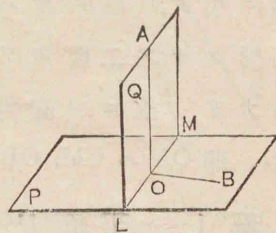
問題 16. 二ツノ平行ナル平面ニ一ツノ平面ガ交レハ錯二面角, 同位二面角ハ相等シク, 同傍内二面角ハ互ニ補角ヲナス。

問題 17. 二ツノ二面角ノ面ガ二ツ宛夫々平行ナルルルハ二ツノ二面角ハ相等シキカ或ハ補角ヲナス。

定義 15. 二ツノ平面ノナス二面角ヲ度ル平面角ガ直角ナルルルハ其二平面ハ互ニ垂直ナリト云フ。

定理 20. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ其平面ニ垂直ナリ。

直線  $OA \perp$  平面  $P$ ,  $Q$  ヲ  $OA$  ヲ含ム任意ノ平面トセヨ。然ルルハ  $P \perp Q$  ナルベシ。



證.  $P, Q$  ノ交リヲ  $LM$  トシ  $O$  ヨリ  $P$  上ニ  $LM$  ニ垂線  $OB$  ヲ引ク, 然ルルハ  $OA, OB$  ハ  $LM$  ニ垂線ナルヲ以テ  $\angle AOB$  ハ  $P, Q$  ノナス二面角ヲ度ル平面角ナリ。而シテ  $AO \perp P$  ナルカ故ニ  $\angle AOB = R \angle$  故ニ  $P \perp Q$  ナリ (六編定義 15.)

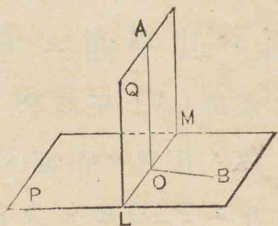
問題 18. 一ツノ點ニ於テ相交ル三ツノ直線ガ互ニ垂線ナレハ其二ツ宛ヲ含ム三ツノ平面ハ互ニ垂直ナリ。

定理 21. 二ツノ平面ガ互ニ垂直ナレハ其一ツノ平面上ニ其交リニ垂線ナル直線ハ他ノ平面ニ垂直ナリ。

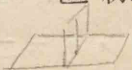
平面  $P \perp$  平面  $Q$  トシ, 其ノ交リ  $LM$  上ノ一ノ點  $O$  ヨリ之ニ垂線  $OA$  ヲ  $Q$  上ニ引ク 然ルルハ  $OA \perp P$

ナルベシ

證. P 上ニ OB ヲ LM = 垂線ニ引ク, 然ルキハ  $\angle AOB$  ハ P, Q ノナス二面角ヲ度ル平面角ナリ 故ニ一直角ニ等シ(假設) 即 OA ハ OM, OB = 垂線ナリ, 故ニ  $OA \perp P$  ナリ.



系 1. 平面  $P \perp$  平面 Q ナルキハ Q 上ノ一點ヨリ P = 垂直ナル直線ハ Q ノ上ニ在リ.



系 2. 相交ル二ツノ平面ガ何レモ第三ノ平面ニ垂直ナレハ其交リモ亦此平面ニ垂直ナリ.



問題 19. 三ツノ平面ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナレハ其ノ交リナル三ツノ直線ノ各ハ他ノ二ツニ垂直ナリ.

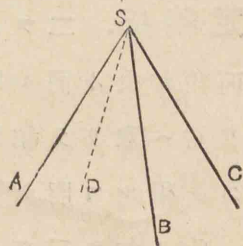
問題 20. 三ツノ直線ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナレバ之レヲ二ツ宛含ム三ツノ平面ノ各ハ他ノ二ツニ垂直ナリ.

定義 16. 一點ニ於テ出會フ三ツ或ハ三ツヨリ

多クノ平面ハ多面角或ハ立體角ヲナスト云フ.

平面 ASB, BSC, CSD, ..... ガ共通ノ點 S ニ於テ出會フキハ一ツノ立體角ヲナスナリ.

S ヲ立體角ノ頂點, SA, SB, SC, ..... ヲ其ノ稜ト稱ス.



稜ニテ限ラレタル平面ノ部分 ASB, BSC, ..... ヲ立體角ノ面ト稱シ,  $\angle ASB, \angle BSC, \dots$  ヲ立體角ノ平面角ト稱ス.

立體角ヲ表スニハ頂點ノ文字ヲ初ニ置キテ S-ABCD ノ如ク記スベシ.

立體角ノ面ノ數ガ三ツナルモノヲ三面角ト稱ス.

定義 17. 一ツノ立體角ノ任意ノ面ヲ延長シタルキ立體角ガ其面ノ同ジ側ニ在ルキハ之ヲ凸多面角ト稱ス. 然ラサルモノヲ凹多面角ト稱ス.

凸多面角ヲ其ノ各稜ニ交ルベキ一ツノ平面ニテ截ルキハ其截リ口ハ凸多角形ナルヲ明ナリ.

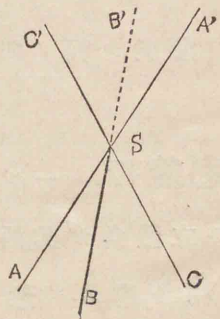
本書ニ於テ單ニ多面角ト云フキハ凸多面角ノヲ

ナリ。

**定義 18.** ニツノ立體角ニ於テ其ノ平面角及ヒ二面角ガ夫々同シ順ニ(双方共ニ右ヨリ左ヘ、或ハ左ヨリ右ヘ)取リテ相等シキ者ハニツノ立體角ハ重テ合スヲ得ルヲ明ナリ(勿論稜ノ長サニハ關セザルナリ) 此ノ如キニツノ立體角ハ相等シト云フ。

**定義 19.** ニツノ立體角ニ於テ其ノ平面角及ヒ二面角ガ反對ノ順ニ(一ツハ右ヨリ左ヘ、一ツハ左ヨリ右ヘ)取リテ相等シキ者ハニツノ立體角ハ重テ合スヲ得ズ(然レモ一ツヲ裏返ス者ハ他ニ重テ合スヲ得) 此ノ如キニツノ立體角ハ對稱ナリト云フ。

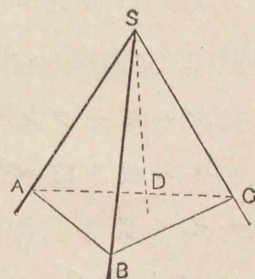
一ツノ立體角ノ總テノ稜ヲ其頂點ノ方ヘ延長スレハ即對稱ナル立體角ヲ得ベシ。何トナレハ此ニツノ立體角ハ其ノ平面角及ヒ二面角ガ反對ノ順ニ取リテ相等シケレハナリ。



**定理 22.** 三面角ノ任意ノ二ツノ平面

角ノ和ハ他ノ一ツノ平面角ヨリ大ナリ。

三面角<sup>Ⓢ</sup>S-ABCノ三ツノ平面角ASB, BSC, CSAノ中何レノ二ツヲ取ルモ其ノ和ハ他ノ一ツヨリ大ナルベシ。



**證.** 假リニ平面角ASCヲ最大ナリトシ、 $\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$ ナルヲ證スベシ。

面ASCノ上ニ於テ $\angle ASD = \angle ASB$ ナル様ニ直線SDヲ引キ、 $\angle$ ヨリ直線ADCヲ引キSDトDニ於テ交ラシメ SBヲSDト等シク取り、AB, BCヲ結ヒ付ク然ル者ハ $\triangle ASB \cong \triangle ASD$ , 故ニ $AB = AD$ , 然ルニ $AB + BC > AC$  故ニ $BC > DC$ , 依リテ $\triangle BSC, \triangle DSC$ ニ於テ其ノ二邊ガ相等シク第三邊ガ異ナルヲ以テ

$$\angle BSC > \angle DSC,$$

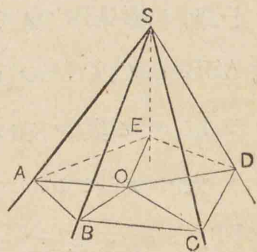
依リテ  $\angle ASB + \angle BSC > \angle ASD + \angle DSC,$

即  $\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC.$

**定理 23.** 一ツノ立體角ノ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

一ツノ立體角S-ABC...ノ總テノ平面角ASB BSC  
等ノ和ハ四直角ヨリ小ナルベシ

證. 立體角ヲ其ノ總テノ稜  
ニ交ルヘキ一ツノ平面ニテ截レ,  
然ルキハ截リ口ハ多角形ABC...  
ヲナス. 此多角形内ノ任意ノ一



點OヲA, B, C,...ニ結ヒ付ケ. 然ルキハSヲ頂點  
トスル三角形ノ數ハOヲ頂點トスル三角形ノ數ニ  
等シ. 扱Aハ一ツノ三面角ノ頂點ナルヲ以テ

$$\angle SAE + \angle SAB > \angle EAB,$$

即  $\angle SAE + \angle SAB > \angle EAO + \angle OAB.$

其他B, C, D,...ニ於テモ同様ノ不等式ヲ得.

故ニ

$$\angle SAE + \angle SAB + \angle SBA + \dots > \angle EAO + \angle OAB + \angle OBA + \dots (1)$$

故ニSヲ頂點トスル三角形ノ底角ノ總和ハOヲ頂  
點トスル三角形ノ底角ノ總和ヨリ大ナリ.

而シテ又二組ノ三角形ノ數ハ同數ナルヲ以テ其ノ  
内角ノ和ハ相等シ.

即  $\angle SAE + \angle SAB + \dots + (Sニ於テノ平面角ノ和)$

$$= \angle EAO + \angle OAE + \dots + \text{點ノ周圍ノ角ノ和} (2)$$

故ニ(1)及(2)ニ依リテ

Sニ於ケル平面角ノ和 < O點ノ周圍ノ角ノ和

即 Sニ於ケル平面角ノ和 < 4R∠.

### 第二節之問題

問題21. 一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ヲ作ル  
コト. 而シテ其平面ハ二ツノ面ヨリ等距離ナル點  
ノ軌跡ナルコトヲ證セヨ.

問題22. 三面角ノ三ツノ稜ト相等シキ角ヲナス  
直線ヲ引ク.

問題23. 三面角ノ各二面角ヲ二等分スル平面ハ  
一ツノ直線ニテ出會フ. 又此直線上ノ點ハ皆三ツ  
ノ面ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

問題24. 三面角ノ各稜ヲ含ミ之ニ對スル面ニ垂  
直ナル平面ハ一ツノ直線ニテ出會フ.

問題25. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面ノ平面角  
ノ二等分線トヲ含ム平面ハ一ツノ直線ニテ出會フ.

### 第三節 多面體

**定義 20.** 多面體 トハ數多ノ平面ヲ以テ界シタル立體ナリ。

多面體ヲ界スル平面ノ其ノ限界タル部分ヲ多面體ノ面ト稱シ、面ト面ノ交リヲ其ノ稜ト稱ス。多面體ノ面ノナス立體角ノ頂點ヲ其ノ頂點ト稱ス。

四ツヨリ少ナキ平面ニテハーツノ場所ヲ圍ミ込ムヲ得ス。故ニ四ツノ面ヨリ成ル多面體ガ其最簡單ナルモノナリ。

多面體ハ其ノ面ノ數ニ依リテ四面體、五面體、六面體等ト稱ス。

**定義 21.** 多面體ノ同一ノ面上ニ在ラザル任意ノ二ツノ頂點ヲ結ヒ付クル直線ヲ其ノ對角線ト稱ス。

**定義 22.** 角嚮トハーツノ直線ニ平行ナル任意ノ數(三ツ以上)ノ平面ト其直線ニ出會ヒテ互ニ平行ナル二ツノ平面トニテ界スル多面體ナリ。

圖ニ於テ面 AG, BH, CK, DL,

EF ハ直線 XY ニ平行ニシテ

面 ABCDE, FGHKL ハ XY ニ出會

フベク、且互ニ平行ナリトス。

XY ニ平行ナル面ノ交リ AF,

BG 等ハ皆互ニ平行ナリ(六編

定.11系2), 又 AB ト FG, BC ト GH

等ハ互ニ平行ニシテ(六編定.13) 且相等シ。故ニ

XY ニ平行ナル面 AG, BH 等ハ皆平行四邊形ナリ。

之ヲ角嚮ノ側面ト稱ス。二ツノ側面ノ交リヲ側

稜ト稱ス。兩端ニ在ル二ツノ平行ナル面 ABCDE,

FGHKL ハ全ク相等シキ多角形ナリ、之ヲ角嚮ノ

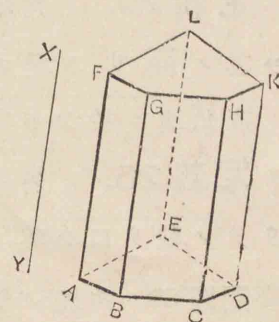
底面(或ハ端面)ト稱ス。

圖ノ如キ角嚮ヲ表スニ角嚮  $\Delta BCDE$ - $FGHKL$ , 或

ハ角嚮  $ABCDE$ - $F$  ヲ以テス。

**定義 23.** 角嚮ハ底面ノ邊ノ數ニ由リテ三角嚮、四角嚮、五角嚮等ト稱ス。

**定義 24.** 角嚮ノ側稜ガ底面ニ垂直ナルキハ之ヲ直角嚮ト稱シ、斜ナルキハ之ヲ斜角嚮ト稱ス。





**定義 25.** 角嚮ノ二ツノ底面ノ間ノ垂線距離ヲ其ノ高サト稱ス。

直角嚮ニ於テハ其ノ側稜ハ即高サナリ。

**定義 26.** 斜角嚮ノ側稜ニ垂直ナル平面ニ由リテノ截リ口ヲ其ノ直截面ト稱ス。

**問題 26.** 角嚮ノ側面ノ面積ハ直截面ノ周ニ等シキ直線ト一ツノ側稜ノ包ム矩形ニ等シ。

**定義 27.** 平行六面體トハ底面ガ平行四邊形ナル四角嚮ナリ。

故ニ平行六面體ハ總テノ面ガ平行四邊形ナリ。

**定理 24.** 平行六面體ノ相對スル面ハ平行ニシテ全ク相等シキ平行四邊形ナリ。其ノ四ツノ對角線ハ同一点ヲ過リ互ニ二等分セラル。

ABCD-EFGH ヲ平行六面體トセヨ、然ルキハ面 AC ト EG, 面 AF ト DG, 面 AH ト BG ハ平行ニシテ全ク相等シキ平行四邊形ナルベシ。

**證.** 平行六面體ハ總テノ面ガ平行四邊形ナルヲ以テ四ツ宛ノ稜 AB, DC, EF, HG; AD, BC, FG, EH

及ヒ AE, BF, CG, DH ハ夫々平行ニシテ且相等シ。故ニ相對スル面 AC, EG ニ於テ AB ト EF, BC ト FG ハ夫々平行ニシテ且相等シキヲ以テ  $\square AC$ ,

$\square EG$  ハ平行ニシテ(六編定.15) 且全ク相等シ。(六編定.9) 其他ノ相對スル面モ同様ニ平行ニシテ且全ク相等シ。

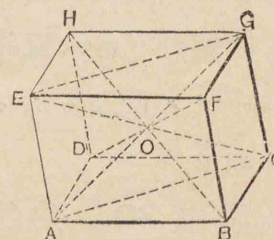
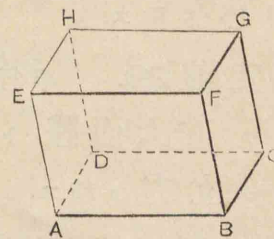
次ニ四ツノ對角線 AG, BH, CE, DF ハ同一ノ點 O ニ於テ交リ且互ニ二等分セラルベシ。

**證.** AC, EG ヲ結ヒ付ク, AE, CG ハ各 BF ニ等シク 且

平行ナルヲ以テ互ニ相等シク 且平行ナリ, 故ニ ACGE ハ平行四邊形ニシテ其ノ對角線 AG, CE ハ互ニ二等分セラル。

同様ニ AG ト BH, AG ト DF モ亦互ニ二等分セラル。故ニ四ツノ對角線ハ同一点ヲ過リ此點ニ於テ互ニ二等分セラル。

**定義 28.** 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ其ノ



中心ト稱ス。

**定義29.** 平行六面體ノ各ノ面ガ矩形ナルモノヲ直六面體ト稱シ、各ノ面ガ正方形ナルモノヲ立方ト稱ス。

**系.** 直六面體ノ四ツノ對角線ハ皆相等シ。

**問題27.** 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ハ十二ノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

**問題28.** 直六面體ノ一ツノ對角線ノ上ノ正方形ハ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

**定義30.** 角錐トハ一ツノ多角形ト此多角形ノ邊ヲ底邊トシ、其平面外ノ一ツノ點ヲ頂點トシタル三角形トノ界スル多面體ナリ。

其多角形ヲ角錐ノ底面、各ノ三角形ナル面ヲ其ノ斜面ト稱シ斜面ノ交リヲ其ノ斜稜ト稱ス。各ノ斜面ノ出會フ共通ノ點ヲ角錐ノ頂點ト稱シ、頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ヲ其ノ高サト稱ス。

角錐ハ其ノ底面ノ邊ノ數ニ由リテ三角錐、四

角錐等ト稱ス。三角錐ハ又四面體トモ稱ス。

**定義31.** 角錐ノ底面ガ正多角形ニシテ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ノ足カ其ノ中心ト合スルモノヲ直角錐ト稱ス。

直角錐ノ總テノ斜面ハ各全ク相等シキ二等邊三角形ナルヲ明ナリ。

直角錐ノ斜面ノ高サヲ直角錐ノ斜高ト稱ス。

**定理25.** 角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルキハ (I) 斜稜及ヒ高サハ比例ニ分タル、(II) 截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形ナリ。

角錐  $S-ABCD$  ヲ其ノ底面  $ABCD$  ニ平行ナル平面  $KLMN$  ニテ截ルキハ、

(I) 斜稜  $SA, SB, \dots$  及ヒ高サ  $SH$  ハ同シ比ニ分タルベシ、(II) 截リ口  $KLMN$  ハ底面  $ABCD$  ニ相似ナル多角形ナルベシ。

(I)ノ證.  $AB \parallel KL$  (六編定.13) 故ニ

$SA:SK=SB:SL$  同様ニ  $SB:SL=SC:SM= \dots$   
次ニ  $SH$  ガ平面  $KLMN$  ニ出會フ點ヲ  $P$  トセヨ.  $AH,$

KPヲ結ヒ付ク、然ルキハ

AH//KP 故ニ SA:SK=SH:SP

即チ斜稜及ヒ高サハ同シ比ニ分タル。

(II)ノ證. AB//KL, BC//LM,

故ニ  $\angle ABC = \angle KLM$  (六編定.9)

同様ニ次キ々々ノ角ハ皆相等シ。

又 SB:SL=BA:LK, SB:SL=BC:LM

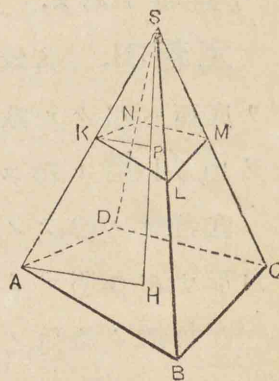
故ニ AB:KL=BC:LM 即チ AB:BC=KL:LM

同様ニ他ノ對應邊ハ皆比例ヲナス。

故ニ多角形 ABCD  $\propto$  多角形 KLMN.

**系 1.** 角錐ノ底面ニ平行ナル平面ニ由リテノ截面ノ比ハ頂點ヨリ其平面ニ至ル距離ノ比ノ二乗比ニ等シ。

**系 2.** 相等シキ高サノ二ツノ角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニシテ且底面ニ平行ナル平面ニテ截ルキハ其ノ截面ノ比ハ底面ノ比ニ等シ。



**定理 26.** 任意ノ多面體ノ面ノ數及ヒ頂點ノ數ノ和ハ稜ノ數ヨリ二ツ多シ。

Fヲ面ノ數、Vヲ頂點ノ數、Eヲ稜ノ數トセヨ。然ルキハ  $F+V=E+2$  ナルベシ。

**證.** 多面體ヲ組ミ立ツル順序ヲ先ツ二ツノ面ヲ取り之ニ一ツ宛次キ々々ノ面ヲ加ヘテ最後ノ面ニ至ルモノト想像セヨ。

初第一ノ面ガ  $a$  邊ノ多角形ナレハ其ノ頂點ハ多面體ノ頂點トナリ、其ノ邊ハ多面體ノ稜トナルナリ故ニ第一ノ面ニ於テハ  $V=E$ 。

次ニ  $b$  邊ヲ有スル第二ノ面ヲ加フレハ二ツノ面ハ二ツノ頂點及ヒ一ツノ稜ヲ共有ス。

故ニ  $V=a+b-2, E=a+b-1,$

故ニ第二ノ面ニ於テハ  $V+1=E$ 。

此ノ如ク一面ヲ加フル毎ニ稜ノ數ハ頂點ノ數ヨリ一ツ宛多ク増加ス。

故ニ第三ノ面ニ於テハ  $V+2=E,$

第四ノ面ニ於テハ  $V+3=E,$

即チ頂點ト稜ノ數ノ關係ハ頂點ノ數ニ組ミ立テツ、

進ム所ノ面ノ數ヨリ常ニ一ツ少キ數ヲ加ヘタルモ  
ノガ稜ノ數ニ等シキナリ。故ニ最後ノ面ヨリ一ツ  
前ノ面  $F-1$  番目マデ組ミ立テタルモノ頂點ト稜  
ノ數ノ關係ハ  $V+(F-2)=E$ 。

是ニ於テ最後ノ面ヲ加フルモ、言ヒ換ヘレハ多面  
體ヲ完成シタル際ニモ此面ヲ加ヘタル爲ニ頂點モ  
稜モ増加スルヲナク、其關係ハ前ノ如クナルベシ故  
ニ  $V+F-2=E$ 、即  $V+F=E+2$ 。

**定義 32.** 正多面體トハ總テノ面ガ相等  
シキ正多角形ニシテ、總テノ立體角ガ相等シキ多面  
體ナリ。

**定理 27.** 正多面體ハ五種アリ、而シ  
テ唯五種ニ限ル。

一ツノ立體角ヲナスニハ三ツ或ハ三ツヨリ多ク  
ノ平面ガ一點ニ出會フヲ要ス。

又立體角ノ頂點ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨ  
リ小ナリ

以上二ツノ條件ヲ以テ下ニ正多面體ノ種類ヲ吟  
味スベシ。

扱先ツ正三角形ニテ作り得ル立體角ハ三ツノ正  
三角形、四ツノ正三角形、五ツノ正三角形、以上  
三種ノ外ニ有ル能ハズ。何トナレバ正三角形ノ一  
ツノ角ハ  $\frac{2}{3}R\angle$  ナルヲ以テ之ヲ六ツ合スレバ  $4R\angle$   
ニ等シクシテ立體角ヲナス能ハザレハナリ。

次ニ正四角形、正五角形ハ各三ツノ面ヲ以テ立  
體角ヲナシ得レモ三ツヨリ多クノ面ニテハ平面角  
ノ和ガ  $4R\angle$ ニ等シク或ハ之ヨリ大ナルヲ以テ立體  
角ヲナス能ハズ

正六角形ハ三ツニテ既ニ  $4R\angle$ ニ等シキヲ以テ立  
體角ヲナス能ハズ。正七角形以上ナレバ不能ナル  
ヲ勿論ナリ。

故ニ正多面體ハ其ノ立體角ヲナス面ガ

- I. 三ツノ正三角形, II. 四ツノ正三角形,  
III. 五ツノ正三角形, IV. 三ツノ正方形,  
V. 三ツノ正五角形,

以上五種ニ限リ此外ニ有ル能ハズ。

下ニ此五種ノ正多面體ハ各幾面體ナ  
ルカヲ論ズベシ。

$F$  ヲ面ノ數、 $V$  ヲ頂點ノ數、 $E$  ヲ稜ノ數、 $S$  ヲ

總テノ頂點ニ於ケル平面角ノ數トセヨ。

Iノ場合. 先ツ各ノ面ガ三角形ナルヲ以テ一ツノ面ノ平面角ノ數ハ三ツアリ, 故ニSハ面ノ數Fノ三倍ニ等シ.

$$\text{即} \quad 3F=S.$$

次ニ多面體ノ一ツノ頂點ニ於ケル平面角ノ數ハ三ツナルヲ以テSハ頂點ノ數Vノ三倍ニ等シ,

$$\text{即} \quad 3V=S.$$

次ニ一ツノ面ニ於ケル稜ノ數ト平面角ノ數ハ相等シ, 而シテ一ツノ稜ハ二ツノ面ニ共通ナリ.

故ニ又Sハ稜ノ數Eノ二倍ニ等シ

$$\text{即} \quad 2E=S$$

又何レノ多面體ニ於テキ

$$F+V=E+2 \quad (\text{定理 26})$$

$$\text{依リテ} \quad 3F=3V=2E, \quad F+V=E+2$$

ナル一組ノ通元方程式ヲ得タリ,

$$\text{之ヲ解キテ} \quad F=4. \quad \text{即正四面體ナリ.}$$

同様ニ下ノ次キ々々ノ通元方程式ヲ得.

$$\text{IIノ場合.} \quad 3F=4V=2E, \quad F+V=E+2.$$

$$\text{之ヲ解キテ} \quad F=8. \quad \text{即正八面體ナリ.}$$

$$\text{IIIノ場合.} \quad 3F=5V=2E, \quad F+V=E+2.$$

$$\text{之ヲ解キテ} \quad F=20. \quad \text{即正二十面體ナリ.}$$

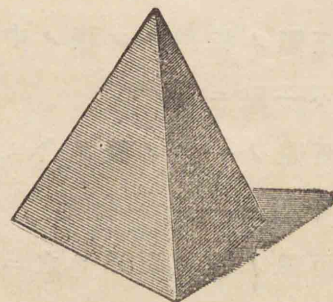
$$\text{IVノ場合.} \quad 4F=3V=2E, \quad F+V=E+2.$$

$$\text{之ヲ解キテ} \quad F=6. \quad \text{即正六面體ナリ.}$$

$$\text{Vノ場合.} \quad 5F=3V=2E, \quad F+V=E+2.$$

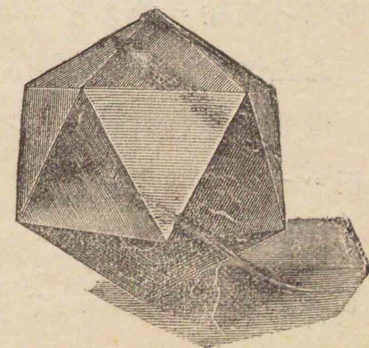
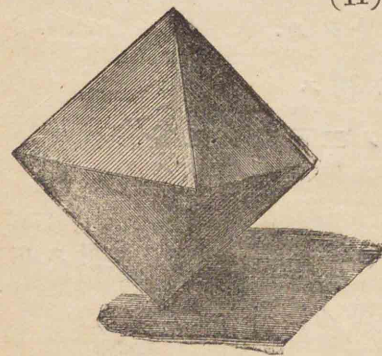
$$\text{之ヲ解キテ} \quad F=12. \quad \text{即正十二面體ナリ}$$

(I)

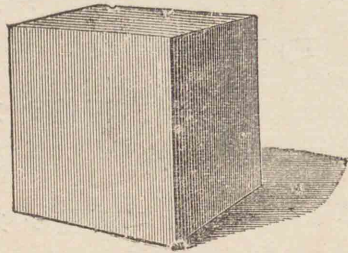


(II)

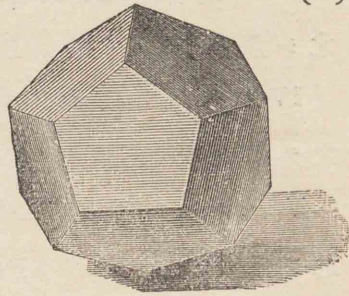
(III)



(IV)



(V)



第三節之問題

問題 29. 四面體ノ相對スル稜ノ中點ヲ結ビ付クル三ツノ直線ハ一點ニ交ル。

問題 30. 四面體ノ一ツノ稜ヲ含ミ之ニ對スル稜ノ中點ヲ過ル平面ハ一點ニ交ル。

問題 31. 四面體ノ各ノ頂點ヲ之ニ對スル面ノ重心ニ結ビ付クル四ツノ直線ハ一點ニ交ル，又此四直線ハ此點ニ於テ比 3:1ニ分タル。

此點ヲ四面體ノ重心ト稱ス

問題 32. 四面體ノ六ツノ二面角ヲ二等分スル平面ハ一點ニ交ル。

問題 33. 正四面體ノ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル面ヘ引ケル垂線ノ足ハ其面ノ中心ナリ

第四節  
多面體ノ體積

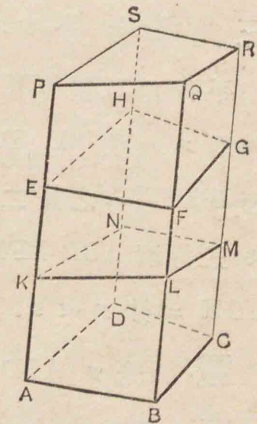
定義 33. 立體ノ體積トハ其ノ境界内ノ場所ノ量ナリ。

單ニ二ツノ立體ガ相等シト云フイハ其ノ體積ガ等シキコニシテ重ヲ合ストヲ得ルト得サルトニ係ラザルナリ。

定理 28. 斜角嚮ハ其ノ直截面ニ等シキ底面及ヒ其ノ側稜ニ等シキ側稜ヲ有スル直角嚮ニ等シ。

ABCD-EFGH ヲ斜角嚮，KLMN ヲ其ノ直截面トセヨ，然ルキハ ABCD-EFGH ハ底面ガ KLMN ニ等シク，側稜ガ AE ニ等シキ直角嚮ニ等シカルベシ。

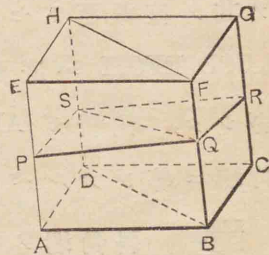
證. 斜角嚮ノ總テノ側面ヲ延長シ， $KP=AE$  ト取り P ヲ過リ KLMN ニ平行ナル平面 PQRS ヲ畫ク。然ルキハ角嚮 KLMN-PQRS ハ其ノ側稜



KP が底面 KLMN に垂直ナルヲ以テ直角罫ナリ  
 而シテ側稜 KP ハ斜角罫ノ側稜 AE ニ等シク、又多  
 面體 ABCD-KLMN ト多面體 EFGH-PQRS トハ其ノ總  
 テノ對應スル稜及ヒ立體角ガ夫々相等シキヲ容  
 易ニ證明スルヲ得。故ニ重テ合ハスヲ得、  
 即全ク相等シ。依リテ此二ツノ多面體ノ各ニ多面  
 體 KLMN-EFGH ヲ加ヘタルモノハ相等シ。即斜角  
 罫 ABCD-EFGH=直角罫 KLMN-PQRS.

**定理 29.** 平行六面體ノ二ツノ相對ス  
 ル稜ヲ含ム平面ハ之ヲ二ツノ相等シキ  
 三角罫ニ分ツ。

平行六面體 ABCD-EFGH ノ  
 相對スル稜 BF, DH ヲ含ム平  
 面 BDHF ハ之ヲ二ツノ相等シ  
 キ三角罫 ABD-EFH, BCD-  
 FGH ニ分ツベシ。

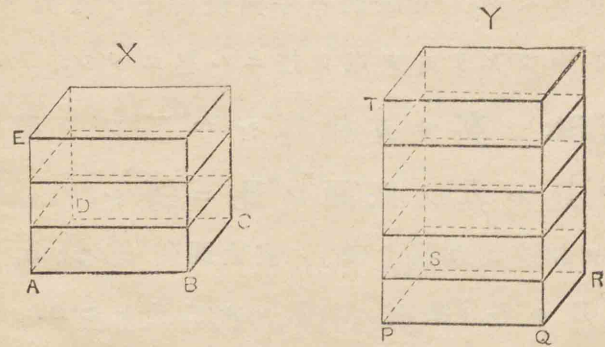


**證.** 先ツ ABD-EFH, BCD-  
 FGH ハ各三角罫ナルヲ明ナリ。次ニ平行六面體ノ  
 直截面ヲ PQRS トセヨ。然ルキハ PQRS ガ平行四

邊形ナルヲハ容易ニ證明スルヲ得。SQ ハ其ノ  
 對角線ナルヲ以テ  $\triangle PQS \equiv \triangle QRS$ , 而シテ PQS,  
 QRS ハ二ツノ三角罫ノ直截面ナリ。故ニ二ツノ三  
 角罫ハ底面ガ夫々 PQS, QRS ニ等シク、側稜ガ AE  
 ニ等シキ直三角罫ニ等シ(六編定. 28). 然ルニ二ツ  
 ノ直角罫ハ底面ガ全ク相等シク、側稜ガ相等シキ  
 故ニ重テ合ハスヲ得ルハ明ナリ。故ニ

$$\text{三角罫 } ABD-EFH = \text{三角罫 } BCD-FGH.$$

**定理 30.** 底面ガ全ク相等シキ二ツノ  
 直六面體ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ



二ツノ直六面體 X, Y ニ於テ AE, PT ヲ各ノ高サ  
 トシ、底面 ABCD  $\equiv$  底面 PQRS トセヨ、然ルキハ  
 $X:Y = AE:PT$  ナルベシ。

證. 先ツ AE ト PT ガ公度ヲ有スル場合トス.  
AE ヲ  $m$  個ニ等分シ, 其一部分ガ PT ノ中ニ丁度  $n$   
個ダケ含マレタリトセヨ. 然ルルハ

$$AE:PT=m:n,$$

AE, PT ノ各分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ畫ク,  
X, Y ハ夫々  $m, n$  個ノ全ク相等シキ直六面體ニ分タ  
ル、 $\Gamma$  ハ容易ニ證明スルヲ得. 依リテ

$$X:Y=m:n,$$

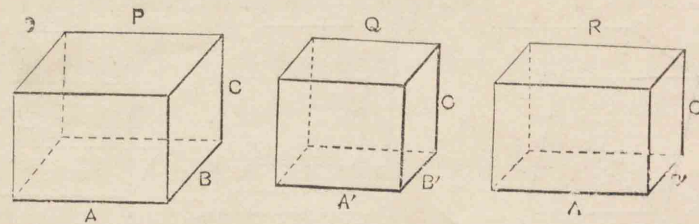
故ニ  $X:Y=AE:PT$ .

次ニ AE, PT ガ公度ヲ有セザル場合ニモ尙此定理  
ハ成リ立ツベシ. 其證明ハ平面幾何學ノ比例ノ部  
ニテ屢々論ジタリシヲ以テ茲ニハ畧スベシ.

**定理 31.** 高サガ相等シキ二ツノ直六  
面體ノ比ハ其ノ底面ノ比ニ等シ.

P, Q ヲ相等シキ高サ(C)ノ直六面體トシ, A, B  
及ビ A', B' ヲ各ノ底面ノ相隣レル二邊トセヨ.  
然ルルハ  $P:Q=A, B:A', B'$  ナルベシ.

證. 高サガ C, 底面ノ二邊ガ A, B' ナル直六面體  
R ヲ作レ. 直六面體ハ何レノ稜ニテモ高サト考フ



$\Gamma$  ヲ得,

故ニ定理 30 ニ依リテ  $P:R=B:B'$

又同様ニ  $R:Q=A:A'$

此二ツノ比例式ヨリ相乘比ノ定理ニ依リ

$$P:Q=(B:B')(A:A'),$$

即  $P:Q=A, B:A', B'$ .

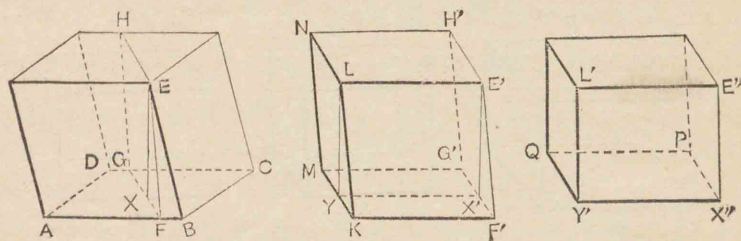
即定理ハ證明セラレタリ.

**系.** 底面ガ相等シク, 高サガ相等シ  
キ二ツノ直六面體ハ相等シ.

**定理 32.** 一ツノ平行六面體ハ其ノ高  
サト, 底面ノ底邊及ヒ高サトヲ三ツノ稜  
トスル直六面體ニ等シ.

ABCD-E ヲ一ツノ平行六面體トシ, EX ヲ其ノ  
高サ, AB, FG ヲ夫々底面ノ底邊及ヒ高サトセヨ.





然ルキハ ABCD-E ハ一ツノ頂點ニ出會フ三ツノ稜  
 が夫々 EX, AB, FG ニ等シキ直六面體ニ等シカルベ  
 シ。

證. 平行六面體 ABCD-E ハ  $\square CE$  ヲ底面, AB ヲ  
 側稜トスル斜角壱ト考フヲ得. 故ニ其體積ハ直  
 截面 EFGH ニ等シキ底面, AB ニ等シキ側稜ヲ有ス  
 ル直六面體ニ等シ(六編定.28).  $E'F'G'H'-L$  ヲ ( $AB=KF'$   
 $\square EG \equiv \square E'G'$ ) 此ノ如キ直六面體トセヨ. 又  $\square E'G'$  ハ  
 矩形ナラザルガ故ニ此平行六面體(上ノ直六面體ハ勿  
 論一ツノ平行六面體ナリ)ハ  $E'F'KL$  ヲ底面トシ,  
 $F'G'$  ヲ側稜トスル斜角壱ト考フヲ得. 故ニ其體  
 積ハ直截面  $E'X'YL$  ( $\angle H'E'L = \angle R$  ナルヲ以テ直截面  
 ハ  $E'L$  ヲ含ム) ニ等シキ底面,  $F'G'$  ニ等シキ側稜ヲ  
 有スル直六面體ニ等シ.  $Y'X'PQ-E''$  ヲ ( $F'G'=X'P$ ,  
 $\square E'Y \equiv \square E''Y'$ ) 此ノ如キ直六面體トセヨ.

故ニ  $ABCD-E = KF'G'M-E' = Y'X''PQ-E''$

而シテ此終リノ直六面體ハ總テノ面ガ矩形ニシテ一  
 ツノ直六面體ナリ.

且  $E''X'' = E'X' = EX$   
 $X''Y' = F'K = AB$   
 $X'P = F'G' = FG$

即任意ノ平行六面體 ABCD-E ハ其ノ高サ EX ト底  
 面 ABCD ノ底邊 AB, 高サ FG トニ等シキ三ツノ稜  
 $E'X''$ ,  $X''Y'$ ,  $X'P$  ヲ有スル直六面體ニ等シ.

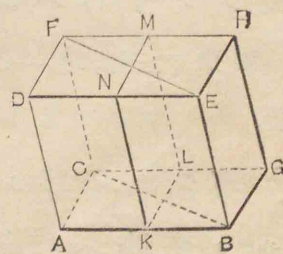
系. 高サ及ヒ底面ガ相等シキ平行六  
 面體ハ相等シ.

本定理及ヒ定理31系ニ依リテ證明スルヲ得.

定理 33. 三角壱ハ之ト等シキ底面, 等  
 シキ高サノ平行六面體ニ等シ.

ABC-DEF フ一ツノ三角壱  
 トセヨ, 然ルキハ此角壱ハ之  
 ト等シキ底面, 等シキ高サノ  
 平行六面體ニ等シカルベシ.

證. 稜 BE ヲ含ミ 平面



DCニ平行ナル平面EGヲ引キ、又FCヲ含ミ平面AEニ平行ナル平面CHヲ引キ、ニツノ底面ABC、DEFノ延長ト出會ハシメヨ。然ルキハ平行六面體ABGC-DEHFヲ得。而シテ此六面體ハ三角壘ABC-DEFノ二倍ニ等シ(六編定.29)。次ニABノ中點Kヲ過リ平面AFニ平行ナル平面KLMNヲ引ケバ平行六面體ABGC-DEHFハニツノ全ク相等シキ平行六面體ニ分タル(其證明ハ容易ナリ)。故ニ其半分ノ平行六面體AKLC-DNMFハ三角壘ABC-DEFニ等シ。而シテ $\square AL = \triangle ABC$ ニシテ且與ヘラレタル三角壘ト此平行六面體トハ共通ノ高サヲ有ス。故ニ三角壘ABC-DEFハ之ト等シキ底面、等シキ高サノ平行六面體ニ等シ。

**系1.** 角壘ハ之ト等シキ底面、等シキ高サノ平行六面體ニ等シ。

角壘ヲ三角壘ニ分チ本定理ニ依リテ證明スルヲ得。

**系2.** 相等シキ底面及ビ相等シキ高サノ角壘ハ相等シ。

系1. 及ヒ定理32系ニ依リ容易ニ證明スルヲ得。

**系3.** 底面ガ相等シキ角壘ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ。

各角壘ハ底面及ヒ高サ相等シキ直六面體ニ等シキヲ以テ定理30ニ依リテ容易ニ證明スルヲ得。

**系4.** 高サガ相等シキ角壘ノ比ハ其ノ底面ノ比ニ等シ。

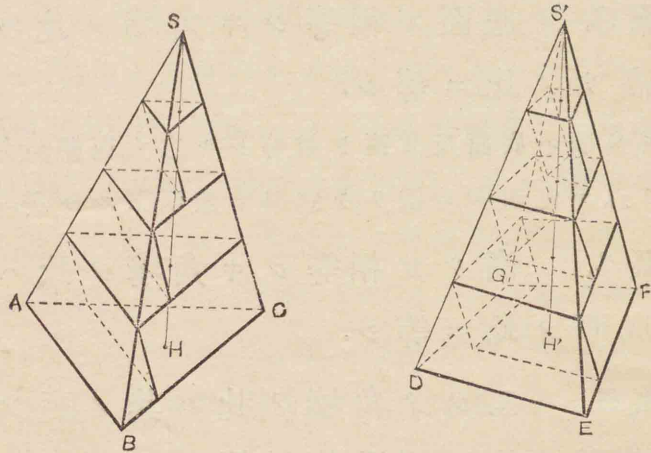
**系5.** ニツノ角壘ノ比ハ其ノ高サ及ヒ底面ノ比ノ相乘比ニ等シ。

**定理34.** 相等シキ底面及ヒ相等シキ高サノ角錐ハ相等シ。

S-ABC, S'-DEFGヲニツノ角錐トシ、其ノ底面ABC, DEFGガ相等シク且高サSH, S'H'ガ相等シトセヨ、然ルキハニツノ角錐ハ相等シカルベシ、

**證.** ニツノ角錐ノ高サヲ若干ノ部分ニ等分シ、各分點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ヲ書キ、各ノ截面ノ下ニ、各截面ヲ上ノ底面トシ、角錐ノ高サヲ等分シタル一部分ヲ高サトスル所ノ角壘ヲ作レ。

然ルモハニツノ角錐ノ相對應スル截面ガ相等シク



(六編定.25,系2) 高サガ相等シキヲ以テ相對應スル角嚮ハ夫々相等シ(六編定.33,系2). 故ニ  $S-ABC$ ,  $S'-DEFG$  ノ内ニ作ラレタル角嚮ノ和ヲ夫々  $V, V'$  ニテ表セハ

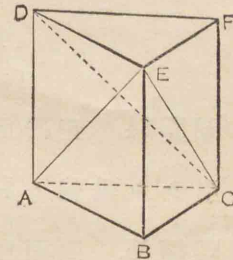
$$V = V'$$

今各ノ高サヲ分テタル部分ノ數ヲ漸々増スモハ  $V, V'$  ハ漸々大キクナリ, 其部分ノ數ヲドコマデモ大キクスルモハ終ニ  $V$  ノ限リハ  $S-ABC$  ニ等シク,  $V'$  ノ限リハ  $S'-DEFG$  ニ等シカルベシ. 然ルニ  $V, V'$  ハ角錐ノ内ニ在ル角嚮ノ數ノ如何ニ係ラズ, 常ニ相等シ. 故ニ  $S-ABC$  ハ  $S'-DEFG$  ニ等シ.

**定理 35.** 一ツノ三角嚮ハ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヲ得.

$ABC-DEF$  ヲ一ツノ三角嚮トセヨ. 然ルモハ之ヲ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヲ得ベシ.

**證.** ニツノ平面  $EAC, EDC$  ヲ畫ケバ角嚮ハ  $EABC, EDAC, EDFC$  ナル三ツノ三角錐ニ分タル.



扱  $EABC, EDFC$  ニ於テ  $ABC, DEF$  ヲ夫々ノ底面,  $E, C$  ヲ夫々ノ頂點ト考フレハ底面  $ABC =$  底面  $DEF$  ニシテ, 高サハ平行ナル平面  $ABC$  ト  $DEF$  トノ距離ナルヲ以テ相等シ. 故ニ  $EABC = CDEF$  (六編定.34).

又  $EDAC, EDFC$  ニ於テ  $DAC, DFC$  ヲ夫々ノ底面,  $E$  ヲ共通ノ頂點ト考フレハ 底面  $DAC = DFC$  ニシテ, 高サハ何レモ  $E$  ヲリ平面  $DACF$  ニ至ル垂線ナリ. 故ニ  $EDAC = EDFC$  (六編定.34). 故ニ三ツノ三角錐ハ相等シ.

**系 1.** 角錐ハ底面及ヒ高サガ相等シキ角嚮ノ三分ノ一ニ等シ.

系2. ニツノ角錐ノ比ハ其ノ底面ノ比及ヒ高サノ比ノ相乗比ニ等シ.

#### 第四節之問題

問題34. 正四面體內ノ任意ノ一點ヨリ四ツノ面ヘ引ケル垂線ノ和ハ此四面體ノ高サニ等シ.

問題35. 四面體內ニ一點ヲ求メ、此點ヲ共通ノ頂點トシ、四ツノ面ヲ夫々底面トスル四ツノ四面體ヲ相等シクスルヲ.

#### 第六編之問題

問題36. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ、二ツノ與ヘラレタル直線ニ出會フ直線ヲ引クヲ.

問題37. 一ツノ直線ヲ過ル無數ノ平面アリ、一ツノ點Aヨリ其等ノ平面ヘ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ハ一ツノ圓周ナリ.

問題38. 二ツノ三面角ハ其ノ平面角ガ夫々相等シキトハ重テ合スヲ得ルカ或ハ對稱ナリ.

問題39. 一ツノ二面角ガ直角ナル三面角ニ於テ何レニテモ一ツノ稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ直角三角形ナリ.

問題40. 正四面體ノ高サハ其ノ足ヨリーツノ面ヘ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ.

定義34. ニツノ多面體ニ於テ

I. 相似ノ位置ニ在ル面ガ相似形,

II. 相似ノ位置ニ在ル二面角ガ夫々相等シ,

III. 相似ノ位置ニ在ル立體角ガ夫々相等シ.

ナル三ツノ要件ノ中、IトII、或ハIトIIIヲ備フルトハニツノ多面體ハ相似ナリト云フ

問題41. ニツノ相似多面體ハ相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル同シ數ノ角錐ニ分ツヲ得.

問題42. ニツノ相似多面體ノ比ハ相對應スル稜ノ比ノ三乗比ニ等シ

問題43. 角錐ヲ其ノ斜稜ノ中點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ截レトハ爲ニ分タレタルニツノ體ノ比如何.

## 第七編 圓壙圓錐球 第一節

### 直圓壙 及ヒ 直圓錐

定義1. 矩形ヲ其一邊ヲ軸トシテ一周廻轉セシムルニ生スル立體ヲ直圓壙ト稱シ、其邊ヲ直圓壙ノ軸ト稱ス.

軸ニ對スル邊ハ一周廻轉シテ一ツノ曲面ヲ生シ、軸ニ隣レル二邊ハ之ニ垂直ニシテ且相等シキヲ以テ軸ニ垂直ナルニツノ全ク相等シキ圓ノ平面ヲ成ス。故ニ直圓壙ハ一ツノ曲面トニツノ圓ノ平面トニテ界セラル。此ニツノ圓ヲ直圓壙ノ底面(或ハ端面)ト稱シ、底面ノ圓ノ半徑ヲ直圓壙ノ半徑ト稱ス。軸ノ長サヲ直圓壙ノ高サト稱シ、軸ニ對スル邊(即廻轉スル邊)ヲ直圓壙ノ母線ト稱

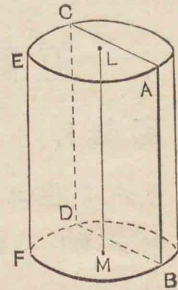


本書ニハ直圓壙ノミヲ論スルヲ以テ略シテ單ニ

圓壙ト稱スルコアリ.

**定理1.** 直圓壙ノ一ツノ母線ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ矩形ナリ.

ABヲ圓壙BFD-AECノ一ツノ母線LMヲ其軸トセヨ. 然ルキハABヲ含ム平面ト圓壙ノ曲面及ビ底面トノ交リABDCハ矩形ナルベシ.

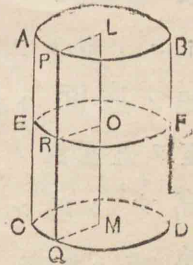


**證,** 平面ト曲面トノ交リナルCD線上ノ一點CヨリABニ平行ナル直線ヲ引ケ. 然レハ  $AB \parallel LM$  ナルヲ以テ此直線ハ軸LMニ平行ナルベシ, 即一ツノ母線ナリ. 故ニ曲面ノ上ニ在リ, 而シテ勿論截リタル平面ノ上ニモアリ. 故ニ曲面ト平面トノ交リナリ. 故ニ交リノ線CDハ一ツノ母線ナリ. 故ニABDCハ平行四邊形ナリ. 而シテ軸  $LM \perp$  底面, 依リテ母線  $AB \perp$  底面. 故ニ  $\angle CAB = R\angle$  即 ABDCハ矩形ナリ.

**系.** 直圓壙ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ矩形ナリ.

**定理2.** 直圓壙ノ底面ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口ハ底面ニ等シキ圓ナリ.

LMヲ圓壙CQD-APBノ軸トシ, 線ERFヲ底面ニ平行ナル平面ト曲面トノ交リトセヨ. 然ルキハERFハ底面ニ等シキ圓ナルベシ.



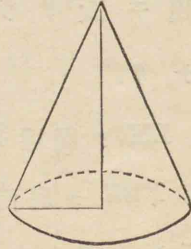
**證.** Rヲ交リノ上ノ任意ノ一點トシ, Rヲ過リ母線PRQヲ引ケ軸ト截リタル平面トノ交リヲOトシ, OR, MQヲ結ビ付ケ 然ルキハ  $OR \parallel MQ, OM \parallel RQ$ , 故ニ  $OR = MQ$ , 故ニOヨリ交リノ上ノ任意ノ點ヘノ距離ハ皆圓壙ノ半徑ニ等シ. 而シテ勿論一ツノ平面ノ上ニ在リ. 故ニ截リ口ハ中心Oナル底面ニ等シキ圓ナリ

**系.** 直圓壙ノ曲面ハ軸ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ

**定義2.** 直角三角形ヲ其直角ヲ夾ム一邊ヲ軸トシテ一周廻轉セシムルキ生スル立體ヲ直圓錐

ト稱シ、其邊ヲ直圓錐ノ軸ト稱ス。

斜邊ハ一周廻轉シテ一ツノ曲面ヲ生シ、軸ト直角ヲナス邊ハ軸ニ垂直ナル一ツノ圓ノ平面ヲナス。故ニ直圓錐ハ一ツノ曲面ト圓ノ平面トニテ界セラル。此圓ノ面ヲ直圓錐ノ底面ト稱シ、底面ノ圓ノ半徑ヲ直圓錐ノ半徑ト稱ス。軸ノ長サヲ直圓錐ノ高サト稱シ、斜邊(即廻轉スル邊)ヲ直圓錐ノ母線(或ハ斜高)ト稱ス。



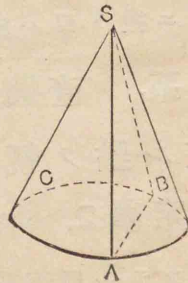
本書ニハ直圓錐ノミヲ論スルヲ以テ略シテ單ニ圓錐ト稱スルヲアリ

**定理3.** 直圓錐ノ頂點ヲ過ル平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ。

Sヲ圓錐 S-ABCノ頂點トセヨ。

然ルキハ Sヲ過ル平面ト圓錐ノ曲面及ヒ底面トノ交リ SABハ二等邊三角形ナルベシ。

**證.** 直線 SA, SBヲ引ク。然ル



キハ SA, SBハ何レモ母線ナリ 故ニ曲面ノ上ニ在リ、而シテ勿論截リタル平面ノ上ニモアリ。即曲面ト平面トノ交リナリ。故ニ截リ口 SABハ三角形ナリ。而シテ SA=SB 故ニ SABハ二等邊三角形ナリ

**系.** 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ。

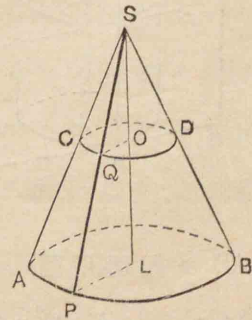
**定義3.** 軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ノ頂角ヲ直圓錐ノ頂角ト稱ス。

**定理4.** 直圓錐ノ底面ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口ハ圓ナリ。

SLヲ圓錐 S-APBノ軸トシ、

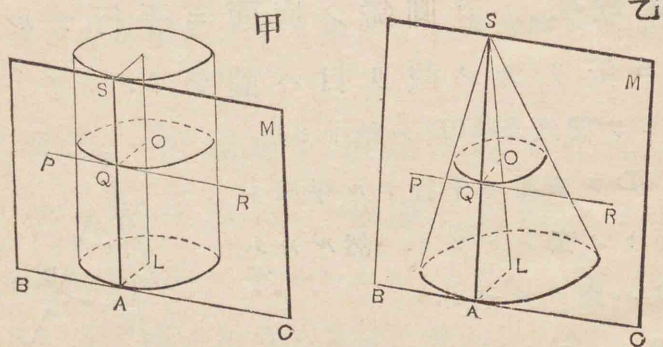
線 CQDヲ底面ニ平行ナル平面ト曲面トノ交リトセヨ。然ルキハ CQDハ圓ナルベシ。

**證.** Qヲ交リノ上ノ任意ノ一點トシ、Qヲ過リ母線 SQPヲ引ク、軸ト截リタル平面トノ交リヲ Oトシ。OQ, LPヲ結ヒ付ク。



然ルキハ  $OQ \parallel LP$ , 故ニ  $SL:SO=PL:QO$   
 而シテ  $SL, SO, PL$  ハ不變ナルヲ以テ  $QO$  モ不變ナリ  
 故ニ  $O$  ヨリ交リノ上ノ任意ノ點ヘノ距離ハ皆  $OQ$   
 ニ等シ. 而シテ勿論一ツノ平面上ニ在リ. 故ニ截  
 リ口ハ中心  $O$  ナル一ツノ圓ナリ.

**定理5.** 直圓壩或ハ直圓錐ノ一ツノ  
 母線ト其ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ  
 含ム平面ハ其母線ノ外ノ點ニ於テ圓壩  
 或ハ圓錐ト出會フヲナシ.



$AS$  ヲ圓壩(甲圖) 或ハ圓錐(乙圖)ノ一ツノ母線,  
 $BAC$  ヲ其ノ端  $A$  ニ於ケル底面ノ切線トシ.  $AS, BC$   
 ヲ含ム平面ヲ  $M$  トセヨ. 然ルキハ  $M$  ト圓壩或ハ圓

錐トハ  $AS$  ノミヲ共通ニ有シ其外ノ點ニ於テ出會  
 フヲナカルベシ.

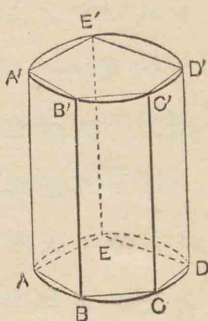
**證.** 平面  $M$  上ニ於テ  $AS$  外ニ任意ノ點  $P$  ヲ取  
 レ, 今  $P$  ガ圓壩或ハ圓錐ノ外ニ在ルヲ證スベシ.  
 扱  $P$  ヲ含ミ底面ニ平行ナル平面ヲ畫キ之ト平面  $M$   
 トノ交リヲ  $PQR$ , 又之ト軸トノ交リヲ  $O$  トシ, 圓  
 壩或ハ圓錐トノ交リヲ中心  $O$ , 半径  $OQ$  ナル圓トセ  
 ヨ(七編定.2,4). 底面ノ中心  $L$  ト  $A$  ヲ結ビ付ク,  
 然ルキハ  $PQR \parallel BAC$ ,  $OQ \parallel LA$ . 故ニ  $\angle OQP = \angle LAB$   
 $= R\angle$ . 故ニ  $PQR$  ハ  $Q$  ニ於テ截リ口ノ圓ノ切線ナ  
 リ. 依リテ  $P$  ハ圓周ノ外ニ在リ, 從フテ圓壩或ハ  
 圓錐ノ外ニ在リ. 即平面  $M$  ハ母線  $AS$  ノ外ニ於テ  
 圓壩或ハ圓錐ニ出會ハズ.

**定義4.** 圓壩或ハ圓錐ト唯一ツノ母線ニ於テ  
 出會ヒ其他ニ於テ決シテ出會ハザル平面ヲ圓壩或  
 ハ圓錐ノ切平面ト稱シ, 平面ハ其母線ニ於テ圓  
 壩或ハ圓錐ニ切スト云フ.

**定義5.** 直角壩ノ底面ガ直圓壩ノ底面ニ内接  
 スルキハ其角壩ハ其圓壩ニ内接スト云フ.



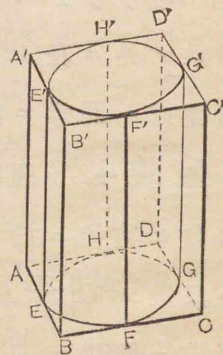
多角形 ABCDE が直圓壺ノ底面ニ  
 内接スルニ各頂點ヲ過リ母線 AA',  
 BB' 等ヲ引キ, A'B'C'D'E' ヲ結ビ付  
 クヨ。母線ハ皆平行ナルヲ以テ  
 AA' ト BB', BB' ト CC' 等ヲ含ミ平  
 面ヲ畫ケバ ABB'A', BCC'B' 等ハ皆  
 矩形(七編定.1)ニシテ直角壺



ABCDE-A'B'C'D'E' ヲナス。故ニ圓壺ニ内接スル直  
 角壺ノ側稜ハ圓壺ノ母線ナリ。

**定義6.** 直角壺ノ底面ガ直圓壺ノ底面ニ外接  
 スルニハ其角壺ハ其圓壺ニ**外接**スト云フ。

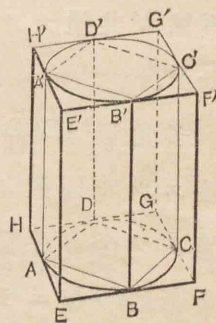
多角形 ABCD が直圓壺ノ底面ニ  
 外接スルニ AB, BC 等ノ切點 E, F  
 等ニ於テ圓壺ノ母線 EE', FF' 等ヲ  
 引キ AB ト EE', BC ト FF' 等ヲ夫  
 々含ム所ノ平面ヲ畫キ 圓壺ノ他  
 ノ底面ノ延長ト多角形 A'B'C'D' ニ  
 於テ出會ハシメヨ。此等ノ平面  
 ハ皆軸ニ平行ナルヲ以テ ABCD-A'B'C'D' ハ一ツノ直  
 角壺ニシテ其側面ハ皆圓壺ノ切平面ナリ(七編定.5)



故ニ圓壺ニ外接スル直角壺ノ側面ハ皆圓壺ノ切  
 平面ナリ。

**定理6.** 圓壺ハ之ニ内接或ハ外接ス  
 ル底面ガ正多角形ナル直角壺ノ邊數ヲ  
 限リナク増シタルモノニ等シ。

**證.** ABCD ヲ圓壺ノ底面ニ内接  
 スル正方形トシ。 EFGH ヲ A,B,C,D  
 ニ引ケル切線ノナス正方形トセヨ。  
 ABCD, EFGH ヲ夫々底面トシ圓壺ニ  
 内接, 外接スル直角壺 ABCD-A'B'C'D',  
 EFGH-E'F'G'H' ヲ畫ク(七編定義5,6).

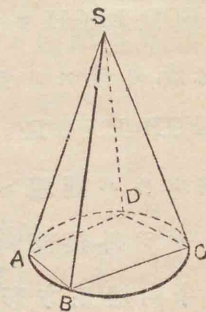


然ルニハ圓壺ハ内接直角壺ヨリ大  
 ニシテ外接直角壺ヨリ小ナルヲハ公理的ナリトス,  
 今内接正方形及ヒ外接正方形ノ邊數ヲ漸次二倍  
 ニナシ 之ヲ底面トスル直角壺ヲ畫ケバ角壺ノ底  
 面ノ周ガ漸次圓壺ノ底面ノ圓周ニ近ツクト同時ニ  
 内接角壺ノ側面ハ漸次増大シ, 外接角壺ノ側面ハ  
 漸次減少シ, 二ツナガラ圓壺ノ曲面タルヲニ近ツ  
 クベシ。故ニ内接, 外接角壺ノ底面ノ邊數ヲドコマ

デモ増スルハ其ノ周ノ限リガ圓周ナル(平面四編補定理3)ト同時ニ角錐ノ側面ノ限リハ圓錐ノ曲面ナルベシ。故ニ圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル底面ガ正多角形ナル直角錐ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ。

**定義7.** 角錐ノ底面ガ直圓錐ノ底面ニ内接シ、頂點ガ共通ナルルハ其角錐ハ其圓錐ニ内接スト云フ。

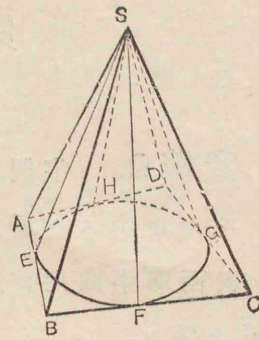
多角形 ABCD ガ圓錐ノ底面ニ内接スルル圓錐ノ頂點ト多角形ノ各邊トヲ含ム平面ヲ畫ケバ二等邊三角形 SAB 等ニテ圓錐ニ交リ(七編定. 3) 角錐 S-ABCD ヲナス。故ニ圓錐ニ内接スル角錐ノ斜稜ハ圓錐ノ母線ナリ。



**定義8.** 角錐ノ底面ガ直圓錐ノ底面ニ外接スルルハ其角錐ハ其圓錐ニ外接スト云フ。

多角形 ABCD ガ圓錐ノ底面ニ外接スルル AB, BC 等ノ切點 E, F 等ニ於テ圓錐ノ頂點 S ヨリ母線 SE, SF 等ヲ引キ, AB ト SE, BC ト SF 等ヲ夫々含ム所ノ平面

ヲ畫ケバ此等ノ平面ハ皆 S ニ於テ相交リ。角錐 S-ABCD ヲナス。而シテ其斜面 SAB 等ハ皆圓錐ノ切平面ナリ(七編定. 5) 故ニ圓錐ニ外接スル角錐ノ側面ハ皆圓錐ノ切平面ニシテ頂點ハ共通ナリ。



**定理7.** 直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ。

定理6ノ圓錐ヲ圓錐ニ、角錐ヲ角錐ニ換へ、同様ニ證明スルヲ得。

## 第 二 節 球

**定義9.** 半圓ヲ其直徑ヲ軸トシテ一周廻轉セシムル所生スル所ノ立體ヲ球ト稱ス。球ヲ界スル表面即半圓周ガ廻轉シテ生スル所ノ曲面ヲ球面ト稱ス。

廻轉セシメタル半圓ノ中心ヨリ球面上ノ何レノ點ヘノ距離ハ皆半圓ノ半徑ナルヲ以テ總テ相等シ。此中心ヲ球ノ中心ト稱ス。中心ヨリ球面ノ任意ノ點ヘ引ケル直線ヲ球ノ半徑ト稱ス。中心ヲ過リ兩端ガ球面ニ終ル直線ヲ球ノ直徑ト稱ス。直徑ハ半徑ノ二倍ナリ。直徑ノ兩端ニ在ル二ツノ點ヲ對點ト稱ス。

空間ノ一點ヨリ球ノ中心ニ至ル距離ガ其ノ半徑ヨリ大ナルカ、或ハ之ニ等シキカ、或ハ之ヨリ小ナルカニ從フテ其點ハ球面ノ外ニ、或ハ其ノ上ニ、或ハ其ノ内ニ在ルヲ明ナリ。故ニ球面ニ次ノ如キ定義ヲ與フルヲ得。

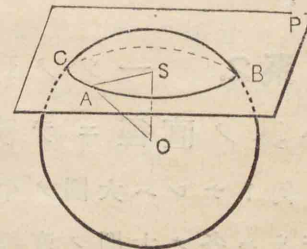
球面ハ一ツノ定マレル點ヨリ定マレル距離ニ

在ル點ノ軌跡ナリ。

而シテ球ハ此球面ヲ以テ圍マレタル立體ナリト云フヲ得ベシ。

**定理8.** 球ヲ平面ニテ截リタル截リ口ハ圓ナリ。

平面  $P$  ガ中心  $O$  ナル球ヲ截リ平面ト球面トノ交リヲ  $ABC$  トセヨ。然ルキハ  $ABC$  ハ圓ナルベシ。



**證.** 先ツ平面ガ球ノ中心ヲ過ルキハ截リ口ハ球ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ナルヲハ明瞭ナリ。

次ニ平面ガ中心ヲ過ラザル場合ヲ論ズベシ。

$O$  ヨリ平面  $P$  へ垂線  $OS$  ヲ引キ、交リノ上ノ任意ノ點  $A$  ヲ取リ  $OA, SA$  ヲ結ビ付クヨ、 $OA$  ハ球ノ半徑ナルヲ以テ不變ナリ、從フテ其ノ正射影  $SA$  ハ不變ナリ。故ニ截リ口  $ABC$  ハ  $S$  ヲ中心トセル一ツノ圓周ナリ。

**定義10.** 球ノ中心ヲ過ル平面ニ依リテノ截

口ヲ大圓ト稱シ、其他ノ平面ニ依リテノ截リ口ヲ小圓ト稱ス。

**系1.** 球ノ中心ヨリ等距離ニ在ル小圓ハ相等シク、距離ノ等シカラザル小圓ハ球ノ中心ニ近キモノガ他ヨリ大ナリ。

**系2.** 一ツノ球ノ任意ノ二ツノ大圓ハ其ノ直徑ニテ交ル。

何トナレハ大圓ノ平面ハ球ノ中心ヲ過ルヲ以テ交リハ各ノ大圓ノ直徑ナレハナリ。

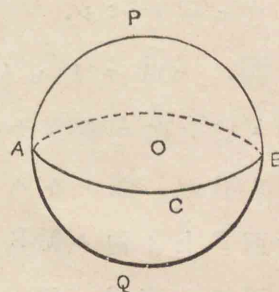
**系3.** 球面上對點ナラザル任意ノ二點ハ大圓ヲ定ム。

何トナレハ其二點ト中心トヲ過ル平面ハ唯一ツニ限レハナリ。

問題44. 球面上ノ一ツノ點ニ於テ出會フ所ノ大圓ハ又其ノ對點ニ於テ出會フ。

**定理9.** 大圓ハ球ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ。

ACBヲ中心Oナル球ノ大圓トセヨ。然ルキハ之ニ依リテ分タレタル二ツノ部分APB, AQBハ全ク相等シカルベシ。



**證.** 一ツノ部分AQBヲ倒マニシテ他ノ部分APBノ上ニ兩方ノ大圓ヲ重テ合セ、而シテ二ツノ部分ハ此大圓ノ同シ側ニ在ル様ニ置ク。然ルキハ二ツノ部分ノ表面APB, AQBノ上ノ點ハ總テ中心Oヨリ等距離ニ在ルヲ以テ(七編定義9)二ツノ表面ハ全ク重テ合フ。故ニ二ツノ部分ハ全ク相等シ。

**定義11.** 大圓ニ依リテ分タレタル球ノ各ノ部分ヲ半球ト稱ス。

**定理10.** 球面ト一點ニ於テ出會ヒ其他ニ於テ出會ハザル平面ハ一ツ有リ、而シテ唯一ツニ限ル。

Aヲ中心Oナル球面上ノ一點トセヨ、然ルキハ此點ノミニ於テ球面ニ出會ヒ其他ノ點ニ於テ再ヒ出會ハザル平面ハ一ツハ必ず有ルベク、而シテ唯

一ツニ限ルベシ。

證. OAヲ結ヒ付ク。

Aニ於テ之ニ垂直ナル平面

Pヲ引ク。然ルモハOヨリ

平面P上ノ他ノ點(Bノ如キ

ヘ引ケル直線ハ何レモOA

ヨリ大ナリ(六編定.3) 故ニP上Aノ他ノ點ハ何レ

モ球ノ外ニ在リ(七編定義9)。故ニ半徑ノ端ニ於テ

之ニ垂直ナル平面ハ其他ノ點ニ於テ球面ト出會ハ

ザルナリ。

次ニ此ノ如キ平面ハ一ツヨリ外ニナシ。

何トナレハAヲ過ル其他ノ平面ヲ畫クハOAハ

其平面ヘ斜線ナルヲ以テOヨリ之ヘ引ケル垂線ハ

(OSトス)半徑OAヨリ小ナリ 故ニ垂線ノ足(S)ハ球

ノ内ニ在リ(七編定義9)。故ニ此平面ハ球ト(中心S,

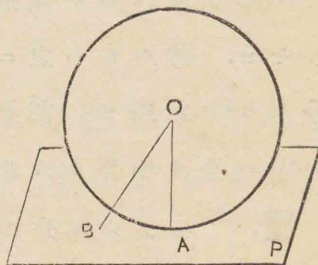
半徑SAナル)圓ニ於テ交ル(七編定.8)。故ニ唯一點

ヲ球面ト共通ニ有スル平面ハ一ツニ限ル。

定義12. 球面ト唯一點ニ於テ出會ヒ、四方ヘ

限リ無ク延長スルモ再ヒ之ト出會ハザル平面ヲ球

ノ切平面ト稱シ、平面ハ其點ニ於テ球ニ切ス



ト云フ。其點ヲ切點ト稱ス。

依リテ本定理ヲ下ノ如ク述フルヲ得。

球ノ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂直ナル平面  
ハ此球ニ切ス。

系1. 此定理ノ逆モ亦眞ナリ。

系2. 切平面上ニ在リテ切點ヲ過ル  
直線ハ再ヒ球面ト出會ハズ。

定義13. 球面ト一點ニ於テ出會ヒ双方ヘ限リ  
ナク延長スルモ再ヒ之ト出會ハザル直線ヲ球ノ切  
線ト稱シ 直線ハ其點ニ於テ球ニ切スト云フ  
其點ヲ切點ト稱ス。

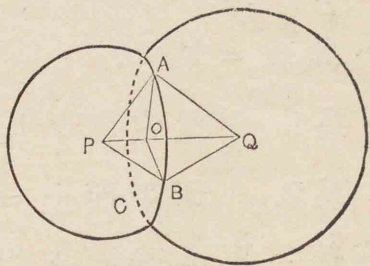
系3. 球ノ切線ハ其ノ切點ヘ引ケル  
半徑ニ垂線ナリ。

定義14. ニツノ球ノ各ガ一部分他ノ内ニ在リ  
テ一部分他ノ外ニ在ルモハ、ニツノ球ハ交ルト  
稱シ、ニツノ球面ノ出會フ所ヲ其ノ交リト稱ス。

定理11. ニツノ球ノ交リハ圓ナリ。

中心P, Qナルニツノ球ノ交リABCハ圓ナルベシ。

證. 交リノ上ニ任意ノ二點 A, B ヲ取り, PA, PB, QA, QB ヲ結ヒ付ケヨ. 然ルキハ  $\triangle PAQ \equiv \triangle PBQ$  故ニ A, B ヨリ共通ノ底邊 PQ へ引ケル垂線ハ同一點 O ニ於テ出會ヒ, 且相等シ. 故ニ二ツノ球ノ交リノ上ノ任意ノ點ハ皆 O ニ於テ PQ ニ垂直ナル平面上ニ在リテ且 O ヨリ相等シキ距離ニ在リ. 故ニ交リハ O ヲ中心トセル圓周ナリ.



系1. 二ツノ球ノ交リノ圓ノ平面ハ其ノ中心ヲ結ヒ付ケル直線ニ垂直ナリ.

系2. 唯一點ニ於テ出會ヒ, 一ツガ全ク他ノ外ニ在ルカ, 或ハ一ツガ全ク他ノ内ニ在ル二ツノ球アリ.

何トナンハ相交ル二ツノ球ノ中心ヲ漸々遠サケ或ハ漸々近ツクルキハ其ノ交リナル圓周ハ漸々小サクナリ, 其ノ中心距離ヲ半徑ノ和或ハ差ニ等シカラシムルキハ圓ノ半徑ハ限リナク小サク 即

一ツノ點トナル. 故ニ二ツノ球ハ唯一點ニ於テ出會ヒ, 各ガ全ク他ノ外ニ在ルカ, 或ハ一ツガ全ク他ノ内ニ在リ.

定義15. 唯一點ニ於テ出會フ所ノ二ツノ球ハ相切スト稱ス. 而シテ各ガ全ク他ノ外ニ在ルカ或ハ一ツガ全ク他ノ内ニ在ルカニ從フテ外切或ハ内切スト云フ.

系3. 二ツノ球ガ相切スレバ其ノ中心ヲ結ヒ付ケル直線ハ切點ヲ過ル.

問題45. 二ツノ球ガ相切スレバ其ノ切點ニ於テ共通ノ切平面ヲ有ス.

定義16. 大圓或ハ小圓ノ平面ニ垂直ナル球ノ直徑ノ兩端ヲ其圓ノ極ト稱シ, 其直徑ヲ其圓ノ軸ト稱ス.

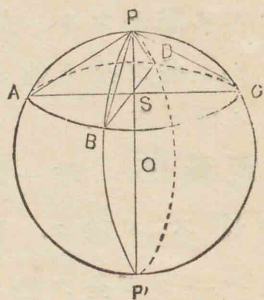
定義17. 一ツノ圓ノ極ヨリ其圓周上一點ニ至ル大圓弧ノ長ヲ此圓ノ極距離ト稱ス.

定理12. 一ツノ圓ノ極距離ハ相等シ.

P, P' ヲ圓 ABCD ノ二ツノ極トシ, PAP'C, PBP'D ヲ兩極ヲ過ル大圓トセヨ. 然ルキハ弧 PA, PB, PC,

PD ハ相等シカルベシ。

證. 圓 ABCD ノ中心ヲ  
トセハ  $\triangle PSA$ ,  $\triangle PSB$  等ノ相等  
シキヲハ直ニ證明スルヲ得  
故ニ弦 PA, PB 等ハ相等シ  
依リテ弧 PA, PB 等ハ相等シ。



系1. 大圓ノ二ツノ極ヨリノ極距離  
ハ皆相等シ。

何トナレハ P, P' ヲ大圓 ABCD ノ二ツノ極トスレ  
ハ 弧 PA, P'A, PB, P'B 等ハ大圓 PAP'C, PBP'D ノ中  
心ニ於テノ直角ニ對スル弧ナルヲ以テ各四分圓ニ  
等シケレハナリ。

系2. 大圓上ノ(對點ナラザル)二點ヨ  
リ球面上ノ一點ニ至ル大圓弧ガ各四分  
圓ニ等シケレバ其點ハ其大圓ノ極ナリ。

### 第二節之問題

問題46. 同ジ平面上ニ在ラザル四ツノ點ハ球ヲ  
定ム。

問題47. 四面體ノ四ツノ面ニ切スル球ヲ畫クヲ。  
此ノ如キ球ハ四面體ニ内接シ, 四面體ハ球ニ  
外接スト云フ。

## 第七編之問題

問題48. 一ツノ圓壙ノ軸ノ上ニ中心ヲ有シ其ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル球面ト圓壙ノ曲面トハ其球ノ大圓ニシテ且圓壙ノ底面ニ等シキ圓ニ於テ出會ヒ其他ニ於テ出會ハズ.

問題49. 一ツノ圓錐ノ軸ノ上ノ一點ヲ中心トシ其點ヨリ母線ニ引ケル垂線ニ等シキ半徑ヲ有スル球面ト圓錐ノ曲面トハ其球ノ小圓ニ於テ出會ヒ其他ニ於テ出會ハズ.

上ノ二ツノ場合ニ於テ球ト圓壙或ハ圓錐トハ相切スト云フ.

問題50. 高サ及ビ直徑ノ等シキ圓壙ノ軸ノ中點ヲ中心トシ其ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル球面ハ圓壙ノ曲面ト其球ノ大圓ニ於テ出會ヒ其ノ二ツノ極ニ於テ底面ニ切シ其他ノ點ニ於テ出會ハズ.

問題51. 圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ノ三角形ノ内接圓ノ中心ヲ中心トシ其ノ半徑ニ等シキ半徑ヲ有スル球ハ圓錐ノ曲面ト其球ノ小圓ニ於テ出會ヒ其ノ一ツノ極ニ於テ底面ニ切シ其他

ノ點ニ於テ出會ハズ.

上ノ二ツノ場合ニ於テ球ハ圓壙或ハ圓錐ニ内接シ圓壙或ハ圓錐ハ球ニ外接スト云フ.



## 第 八 編

## 立 體 ノ 面 積 及 ヒ 體 積 ノ 計 算

## 面 積

下ニ掲クルモノ、中、其最明瞭ナルモノハ證明ヲ畧ス。

## 1. 直角塼ノ側面ノ面積。

直角塼ノ側面ノ面積ヲ表ス數( $a$ )ハ其ノ底面ノ周ノ長サヲ表ス數( $p$ )ト側稜ノ長サヲ表ス數( $h$ )トノ相乘積ニ等シ

即  $a = ph.$

斜角塼ナレハ底面ノ周ノ代リニ直截面ノ周ヲ用フベシ(第六編問題26).

## 2. 直角錐ノ斜面ノ面積。

直角錐ノ斜面ノ面積ヲ表ス數( $a$ )ハ其ノ底面ノ周ノ長サヲ表ス數( $p$ )ト斜高ノ長サヲ表ス數( $s$ )トノ相乘積ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ。

即  $a = \frac{1}{2}ps.$

**定義.** 角錐或ハ圓錐ヲ其底面ニ平行ナル平面

ニ依リテ截ルルハ底面ト此截面トノ間ニ夾マル、部分ヲ截頭角錐或ハ截頭圓錐ト稱ス。截面ト元ノ底面トヲ何レモ其ノ底面ト稱シ、錐體ノ斜面及ヒ斜高ガ兩底面ノ間ニ截リ取ラレタル部分ヲ截頭錐體ノ斜面及ヒ斜高ト稱ス。

注意. 截頭角錐ノ如クニシテ其ノ斜面ヲ延長スルモ一點ニ交ラザル立體アリ 此ノ如キ體ト截頭角錐トヲ混同スベカラズ。

## 3. 截頭直角錐ノ斜面ノ面積。

截頭直角錐ノ斜面ハ皆全ク相等シキ二等邊梯形ナルコトハ明ナリ。故ニ斜面ノ面積ヲ表ス數( $a$ )ハ二ツノ底面ノ周ノ長サヲ表ス數( $p, p'$ )ノ和ノ半ト斜高ノ長サヲ表ス數( $s$ )トノ相乘積ニ等シ。

即  $a = \frac{1}{2}(p+p')s.$

## 4. 直圓塼ノ曲面ノ面積。

直圓塼ハ之ニ内接或ハ外接スル底面ガ正多角形ナル直角塼ノ底面ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シキヲ以テ(七編定.6)直圓塼ノ曲面ノ面積ヲ表ス數( $a$ )ハ直角塼ノ側面ノ面積ヲ表ス數 $ph$ (八編1)

ノ  $p$  カ圓周ノ長サニ等シクナリシ場合ナリ。今直  
圓錐ノ半徑ノ長サヲ表ス數ヲ  $r$  トセハ  $p$  ハ  $2\pi r$   
トナルガ故ニ  $a=2\pi rh$ .

### 5. 直圓錐ノ曲面ノ面積.

直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル直角錐ノ底面ノ  
邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ(七編定.7) 故  
ニ直圓錐ノ曲面ノ面積、半徑ノ長サ及ヒ斜高(母線)ノ  
長サヲ表ス數ヲ夫々  $a, r, s$  トセハ八編 2, ヨリ

$$a = \frac{1}{2} \times 2\pi rs = \pi rs.$$

問題 52. 直圓錐ノ高サト半徑トヲ以テ曲面ノ面  
積ヲ表セ.

### 6. 截頭直圓錐ノ曲面ノ面積.

截頭直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル截頭直角錐  
ノ底面ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ(其  
證明ハ容易ナリ) 故ニ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積、  
兩底面ノ半徑ノ長サ及ヒ斜高ノ長サヲ表ス數ヲ夫  
々  $a, r_1, r_2, s$  トセハ八編 3 ヨリ

$$a = \frac{1}{2} (2\pi r_1 + 2\pi r_2) s = \pi (r_1 + r_2) s.$$

系. 斜高ノ中點ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニ

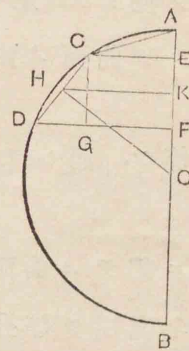
テノ截リ口ノ圓ノ半徑ノ長サヲ表ス數ヲ  $r$  トセハ

$$r_1 + r_2 = 2r$$

故ニ  $a = 2\pi rs.$

### 7. 球ノ面積.

半圓周 ACDB ヲ若干等分シ、CD ヲ其一部分トシ  
弦 CD ヲ引キ、AB へ垂線 CE, DF  
ヲ引ク。扱 AB ヲ軸トシテ半圓ヲ  
廻轉セシムレハ半圓周ハ球面ヲ  
生シ、梯形 CDFE ハ截頭直圓錐  
ヲ生ズ。CD ノ中點 H ヨリ AB ニ  
垂線 HK ヲ引キ、CD, HK ノ長サ  
ヲ表ス數ヲ夫々  $x, y$  トセバ截頭  
直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ス數ハ  $2\pi xy$  (八編 6. 系) ナ



リ。中心 O ト H ヲ結ヒ付ケ、EE ニ平行ニ CG テ  
引ク  $\triangle OHK \sim \triangle CDG,$

故ニ  $OH : HK = CD : CG,$

即  $OH : HK = CD : EF.$

今 OH, EF ノ長サヲ表ス數ヲ夫々  $d, p$  トセハ上ノ比

例式ヨリ  $d : y = x : p$

即  $xy = dp$

ヲ得。故ニ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ス數ハ

$$2\pi dp$$

ナリ。依リテ總テノ弦ヲABノ周リニ廻轉セシメ生シタル截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ス數ヲ求ムルヲ得。面シテ  $d$  ハ何レノ弦ニ於テモ相等シク。又各ノ弦ノAB上ヘノ正射影ヲ夫々  $p_1, p_2, p_3, \dots$  トセハ總テノ曲面ノ面積ノ和ヲ表ス數ハ

$$2\pi d(p_1 + p_2 + p_3 + \dots)$$

ニ等シ。而シテ球ノ半徑ノ長サヲ表ス數ヲ  $r$  トセハ

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 2r$$

故ニ總テノ曲面ノ面積ノ和ヲ表ス數  $= 2\pi d \times 2r$ 。

扱半圓周ヲ等分スル數ヲ限リナク増スルハ截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ノ和ハドコマデモ球ノ表面積ニ接近シ其限リハ之ニ等シクナル。之ト同時ニ  $d$  ノ長サハ漸々大キクナリ終ニ  $r$  ニ等シクナル。故ニ球ノ面積ヲ表ス數ヲ  $a$  トセハ

$$a = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2.$$

**系1.** ニツノ球面ノ面積ノ比ハ各ノ半徑ノ比ノ二乗比ニ等シ。

**定義.** 球ヲニツノ平行ナル平面ニテ截ルキハ其間ニ夾マル、球面ノ部分ヲ帶ト稱シ、此ニツノ平面ノ距離ヲ帶ノ高サト稱ス。

**系2. 帶ノ面積.** 球ノ半徑ノ長サ、帶ノ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々  $r, p$  トセハ帶ノ面積ヲ表ス數  $a = 2\pi rp$  ナリ

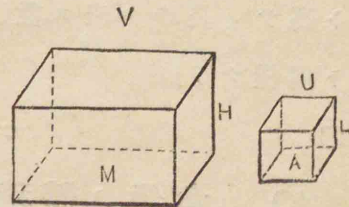
## 體積

一ツノ立體ノ體積ヲ計ルニハ長サノ單位ヲ稜トシテ作りタル立方ヲ體積ノ單位トス。例ヘハ長サノ單位ガ一尺ナレハ各ノ稜ノ長サガ一尺ナル立方ヲ體積ノ單位トス(之ヲ立方尺ト云フ)。

### 8. 直六面體ノ體積.

直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ其底面ノ面積及ヒ高サノ長サヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ。

$V$  ヲ與ヘラレタル直六面體トシ、 $M$  ヲ其ノ底面、 $H$  ヲ其ノ高サトス。 $U$  ハ長サノ單位  $L$  ヲ稜トスル立方



ニシテ 即體積ノ單位ナリ.  $A$ ハ $L$ ノ上ノ正方形  
ニシテ面積ノ單位ナリ.

切直六面體及立方ハ角壙ノ特別ナル場合ナルヲ以  
テ  $V:U=(M:A)(H:L)$  (六編定.33系5)

切 $U, A, L$ ハ夫々體積, 面積及ヒ長サノ單位ナルヲ  
以テ  $V, M, H$ ノ大サヲ表ス數ヲ夫々 $v, m, h$ トセハ  
 $v:1=(m:1)(h:1)=mh:1$  即  $v=mh$ .

**系.** 底面 $M$ ノ二邊ノ長サヲ表ス數ヲ $a, b$ トセ  
ハ  $m=ab$ ナルヲ以テ  $v=abh$ .

故ニ直六面體ノ體積ヲ表ス數ハ其一ツノ頂點ニ出  
會フ三ツノ稜ノ長サヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ.

立方ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ稜ノ長サヲ表ス數ノ  
三乘器ニ等シ.

### 9. 角壙ノ體積.

角壙ノ體積ヲ表ス數( $v$ )ハ底面ノ面積ヲ表ス數( $m$ )  
ト高サノ長サヲ表ス數( $h$ )ノ相乘積ニ等シ(證明ハ8  
ト同様ナリ)

即  $v=mh$ .

### 10. 角錐ノ體積.

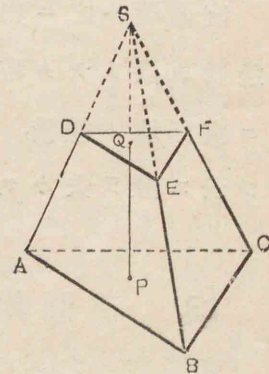
角錐ノ體積ヲ表ス數( $v$ )ハ底面ノ面積ヲ表ス數  
( $m$ )ト高サノ長サヲ表ス數( $h$ )ノ相乘積ノ三分ノ一ニ  
等シ(六編定.35系1)

即  $v=\frac{1}{3}mh$ .

### II. 截頭角錐ノ體積.

截頭角錐ノ體積ヲ表ス數( $v$ )ハ兩底面ノ面積ヲ表  
ス數( $m_1, m_2$ )及ヒ其ノ比例中項( $\sqrt{m_1 m_2}$ )ノ和ト高サ  
ノ長サヲ表ス數( $h$ )トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ,  
 $ABC-DEF$ ヲ與ヘラレタル

截頭角錐トシ, 二ツノ底面  
 $ABC, DEF$ ノ面積ヲ表ス數ヲ夫  
々 $m_1, m_2$ トシ, 高サ $PQ$ ノ長  
サヲ表ス數ヲ $h$ トセヨ. 總テ  
ノ斜面ヲ延長シ  $S$ ヲ頂點ト  
スル角錐ヲ作レ. 然ルルハ截  
頭角錐ノ體積ヲ表ス數ハ二ツ



ノ角錐  $S-ABC$  ト  $S-DEF$  トノ體積ヲ表ス數ノ差ニ  
等シ. 今  $S-DEF$  ノ高サヲ表ス數ヲ假リニ $x$ トセ  
ハ  $v=\frac{1}{3}m_1(h+x)-\frac{1}{3}m_2x\dots\dots(1)$

又  $\triangle ABC:\triangle DEF=(AB:DE)^2$  ナルニ依リ  $AB, DE$ ノ

長サヲ表ス數ヲ假リニ  $y, z$  トセハ

$$m_1 : m_2 = (y : z)^2,$$

依リテ  $\sqrt{m_1} : \sqrt{m_2} = y : z$

而シテ  $h+x : x = y : z = \sqrt{m_1} : \sqrt{m_2}$

此比例式ヨリ  $x = \frac{h\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}$

之ヲ(1)式ノ  $x$  ニ代用セハ

$$v = \frac{1}{3}h(m_1 + \sqrt{m_1 m_2} + m_2).$$

### 12. 直圓壩ノ體積.

直圓壩ハ之ニ内接或ハ外接スル直角壩ノ底面ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ(七編定.6). 故ニ直圓壩ノ體積, 其ノ半徑ノ長サ及ヒ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々  $v, r, h$  トセハ八編 9 ヨリ

$$v = \pi r^2 h.$$

### 13. 直圓錐ノ體積.

直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ(七編定.7). 故ニ直圓錐ノ體積, 其ノ半徑ノ長サ及ヒ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々  $v, r, h$  トセハ八編 10 ヨリ

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

### 14. 截頭直圓錐ノ體積.

截頭直圓錐ハ之ニ内接或ハ外接スル截頭直角錐ノ底面ノ邊數ヲ限リナク増シタルモノニ等シ故ニ其ノ體積, 二ツノ底面ノ半徑ノ長サ及ヒ高サノ長サヲ表ス數ヲ夫々  $v, r_1, r_2, h$  トセハ八編 11 ヨリ

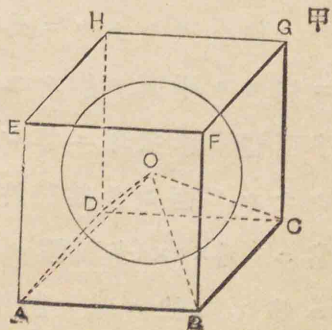
$$v = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

### 15. 球ノ體積.

球ノ體積ヲ表ス數ハ其ノ面積ヲ表ス數ト半徑ノ長サヲ表ス數トノ相乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

與ヘラレタル球ノ中心ヲ  $O$  トシ, 之ニ外接スル立方  $ABCD-EFGH$  ヲ作レ(立方ハ球ニ外接シ得ルハ明ナリ. 而シテ其ノ稜ハ即球ノ直徑ニ等シ). 中心  $O$  ヲ八ツノ頂點ニ結ヒ付シレハ  $O$  ヲ頂點トシ, 立方ノ各面ヲ底面トスル

$O-ABCD$  ノ如キ六ツノ直角錐ヲ得. 而シテ各角錐ノ高サハ皆球ノ半徑ニ等シキヲ以テ其長サヲ表ス數ハ  $r$  ナリ. 故ニ六ツノ角錐ノ體積

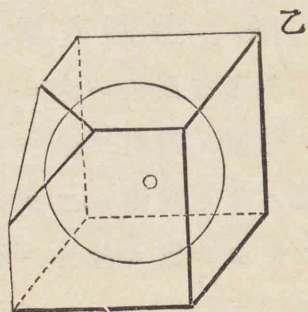


ノ和即球ニ外接スル立方ノ  
體積ヲ表ス數ハ

$\frac{1}{3} \times r \times (\text{立方ノ面積ヲ表ス數})$

(八編13). 次ニ乙圖ノ如ク

各頂點ニ於ケル三面角ヲ截  
リ球ニ切スル八ツノ平面ヲ



作レ. 斯クシテ得タル外接多面體ハ立方ヨリモ小  
ニシテ球ノ體積ニ近キ體積ヲ有スベシ, 今中心 O  
ヲ此多面體ノ各ノ頂點ニ結ヒ付クレハ多面體ノ各  
面ヲ底面トシ球ノ半徑ヲ高サトスル所ノ多クノ角  
錐ヲ得. 而シテ各角錐ノ體積ヲ表ス數ハ各底面ノ  
面積ヲ表ス數ト $r$ トノ相乘積ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ. 故ニ總  
テノ角錐ノ體積ヲ表ス數ハ

$\frac{1}{3} \times r \times (\text{多面體ノ面積ヲ表ス數})$

上ノ如ク次キ々々ニ外接多面體ノ立體角ヲ截リ球  
ニ切スル平面ヲ作ル $\Gamma$ ヲ限リナク續クル $\Gamma$ ハ外接  
多面體ハ漸次球ニ等シキ $\Gamma$ ニ近ヅキ終ニ球ト等シ  
クナル. 而シテ其間外接多面體ノ體積ヲ表ス數ハ  
常ニ  $\frac{1}{3} \times r \times (\text{多面體ノ面積ヲ表ス數})$

ニ等シ. 故ニ球ノ體積ヲ表ス數ヲ $\Gamma$ トセハ

$v = \frac{1}{3} \times r \times (\text{球ノ面積ヲ表ス數})$

系1. 球ノ面積ヲ表ス數  $= 4\pi r^2$  ナルヲ以テ

$$v = \frac{1}{3} \times r \times 4\pi r^2,$$

即

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

系2. ニツノ球ノ體積ノ比ハ各ノ半  
徑ノ比ノ三乗比ニ等シ.

問題53. 球ノ體積ガ與ヘラレテ面積ヲ求ムル $\Gamma$ .

## 第八編之問題

問題54. 直六面體ノ三ツノ稜ノ比ガ $2:3:4$ ニシテ其體積ハ $3$ 立方尺ナリ. 其三ツノ稜ノ長サ各幾寸ナルカ.

問題55. 正四面體ノ一ツノ稜ノ長サガ與ヘラレテ體積ヲ表ス.

問題56. 曲面ノ面積ガ相等シキニツノ直圓塼ノ體積ノ比ヲ求ム.

問題57. 體積ガ相等シキニツノ直圓塼ノ曲面ノ面積ノ比ヲ求ム.

問題58. 一ツノ稜ノ長サガ與ヘラレタル正四面體ニ内接或ハ外接スル球ノ半徑ヲ求ム.

問題59. 球ノ面積或ハ體積ハ之ニ外接スル直圓塼ノ全面積或ハ體積ノ三分ノ二ニ等シ.

問題60. 軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ガ正三角形ナル圓錐ニ内接或ハ外接スル球ノ半徑ガ與ヘラレテ圓錐ノ曲面ノ面積及ビ體積ヲ求ム.

問題61. 半徑ノ長サガ $r$ ナル球ノ中心ヲ距ル $l$

$d$ ナル點ニ在ル光リガ球面ヲ照ラス部分ノ面積ヲ求ム.

## 雜 問 題

## 第 六 編 之 部

1. 與へラレタル平面上ニ其平面外ノ二點ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ム。
2. 一ツノ平面上ノ直線ガ他ノ平面上ニ其ノ射影トナス銳角ノ中二ツノ平面ノ二面角ヲ度ル平面角ガ最大ナリ。
3. A, Bハ平面Pノ同ジ側ニ在ル二點ナリ。平面P上ニ一點Cヲ求メ直線AC, BCノ和ヲ最小ニスルヲ。
4. A, Bハ平面Pノ反對ノ側ニ在ル二點ナリ。平面P上ニ一點Cヲ求メ直線AC, BCノ差ヲ最大ニスルヲ。
5. 平面P上ノ與へラレタル點AヨリP上ニ直線ACヲ引キ、P外ノ與へラレタル點BヨリACへ引ケル垂線ヲ與へラレタル有限直線ニ等シカラシメントス。ACノ引キ方ヲ求ム。
6. 一ツノ線ノ一ツノ平面上ニ於ケル射影ガ直線ナレバ其線ハ其平面ニ垂直ナル一ツノ平面上ニ

在リ。

7. 與へラレタル平面上ノ與へラレタル點ヲ過リ其平面上ニ、空間ノ與へラレタル直線ト直角ヲナスベキ直線ヲ引クヲ。
8. 二點A, Bヨリ平面Pへ垂線AC, BDヲ引キ、又直線ABニ垂直ナル平面Qヲ畫キ、QトPトノ交リヲLMトセバ $CD \perp LM$ ナルベシ。
9. 四ツノ面ヨリ成ル立體角(四面角トモ云フ)ヲ一ツノ平面ニテ截リ其截リ口ヲ平行四邊形ナラシメントヲ求ム。
10. 四面體ノ二双ノ相對スル稜ガ夫々直角ヲナセバ第三双モ又直角ヲナス。
11. 四面體ノ重心ヨリ此體ノ外ニ在ル一ツノ平面へ引ケル垂線ノ四倍ハ四ツノ頂點ヨリ其平面へ引ケル垂線ノ和ニ等シ。
12. 立方ヲ一ツノ平面ニテ截リ其截リ口ヲ正六邊形ニスルヲ。
13. 同一平面上ニ在ラザル與へラレタル三ツノ限リナキ直線ヲ夫々三ツノ稜トスル平行六面體ヲ作ルヲ。



14. 四面體ノ一ツノ二面角ヲ二等分スル平面ガ之ニ對スル稜ヲ分ツニツノ分ノ比ハ其二面角ノニツノ面ノ比ニ等シ。

### 第七編之部

15. 球面ノ一部分ヲ與ヘ其ノ中心ヲ求ムルヲ。

16. 與ヘラレタル直線ヲ含ミ與ヘラレタル球ニ切スル平面ヲ畫クヲ。

17. 與ヘラレタル二點ヨリノ距離ガ夫々與ヘラレタル二直線ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム。

18. 與ヘラレタル二點ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム。

19. 球面外ノ一點ヨリ其球ニ引ケル切線ハ相等シ。又此切線ノ軌跡ハ一ツノ直圓錐ノ曲面ナリ。

20. 與ヘラレタル球ノ直徑ヲ求ムルヲ。

### 第八編之部

21. 底面ガ正六邊形ナル截頭直角錐ノ一ツノ底面ノ一邊ハ8寸、他ノ底面ノ一邊ハ6寸、而シテ

高サハ30寸ナリト云フ。其ノ體積ヲ求ム。

22. 埃及ノ一ツノ[ピラミッド]ノ底面ハ一邊ノ長サ20[メートル]ノ正方形ニシテ其ノ斜面ハ皆正三角形ナリト云フ。其ノ體積ヲ求ム。

23. 矩形ノ相隣レル二邊ヲ夫々軸トシテ廻轉セシメ生ジタルニツノ圓壙ノ體積ノ比ハ各ノ軸ノ比ノ反比ニ等シ。

24. 底面ガ球ノ大圓ニ等シク、高サガ球ノ直徑ニ等シキ圓壙及ビ圓錐アリ。然ルキハ、圓錐、球、圓壙ノ體積ノ比ハ 1:2:3 ナルベシ。

25. 一邊ノ長サ $a$ ナル正三角形ト同ジ平面上ニ其頂點ヲ過リテ引キタル直線ヲ軸トシテ此三角形ヲ一廻轉セシメ生ズル所ノ體ノ體積ヲ求ム。

26. 直圓錐ノ底面ニ平行ナル平面ヲ引キ其ノ曲面ノ面積ヲ二等分スルヲ。

27. 地球、月、太陽ノ半徑ノ比ハ 11:3:1232 ナリ。地球ノ面積及ビ體積ヲ夫々ノ單位トシテ月、太陽ノ面積及ビ體積ヲ表セ。

28. 半徑ノ長サ $r$ ナル球ニ直圓壙ヲ内接シ(兩底面ノ圓周ガ球面ト小圓ニテ出會フ場合ヲ云フ)

兩底面ノ面積ノ和ヲ曲面ノ面積ノ半分ニ等シクス

ル。

明 治 四 十 年 一 月 三 十 一 日  
中 學 校 數 學 科 用 教 科 書

文 部 省 檢 定 濟

明 治 三 十 六 年 二 月 二 十 五 日 印 刷  
 明 治 三 十 六 年 二 月 二 十 八 日 發 行  
 明 治 三 十 六 年 十 二 月 二 十 一 日 訂 正 再 版 印 刷  
 明 治 三 十 六 年 十 二 月 二 十 五 日 發 行  
 明 治 三 十 九 年 十 月 二 十 八 日 訂 正 三 版 印 刷  
 明 治 三 十 九 年 十 月 三 十 一 日 訂 正 三 版 發 行  
 明 治 四 十 年 一 月 十 六 日 訂 正 四 版 印 刷  
 明 治 四 十 年 一 月 十 九 日 訂 正 四 版 發 行  
 明 治 四 十 一 年 三 月 七 日 第 五 版

不 許 複 製

訂 正 幾 何 學 教 科 書 立 體  
定 價 金 卅 五 錢

著 作 者 三 輪 恒 一 郎

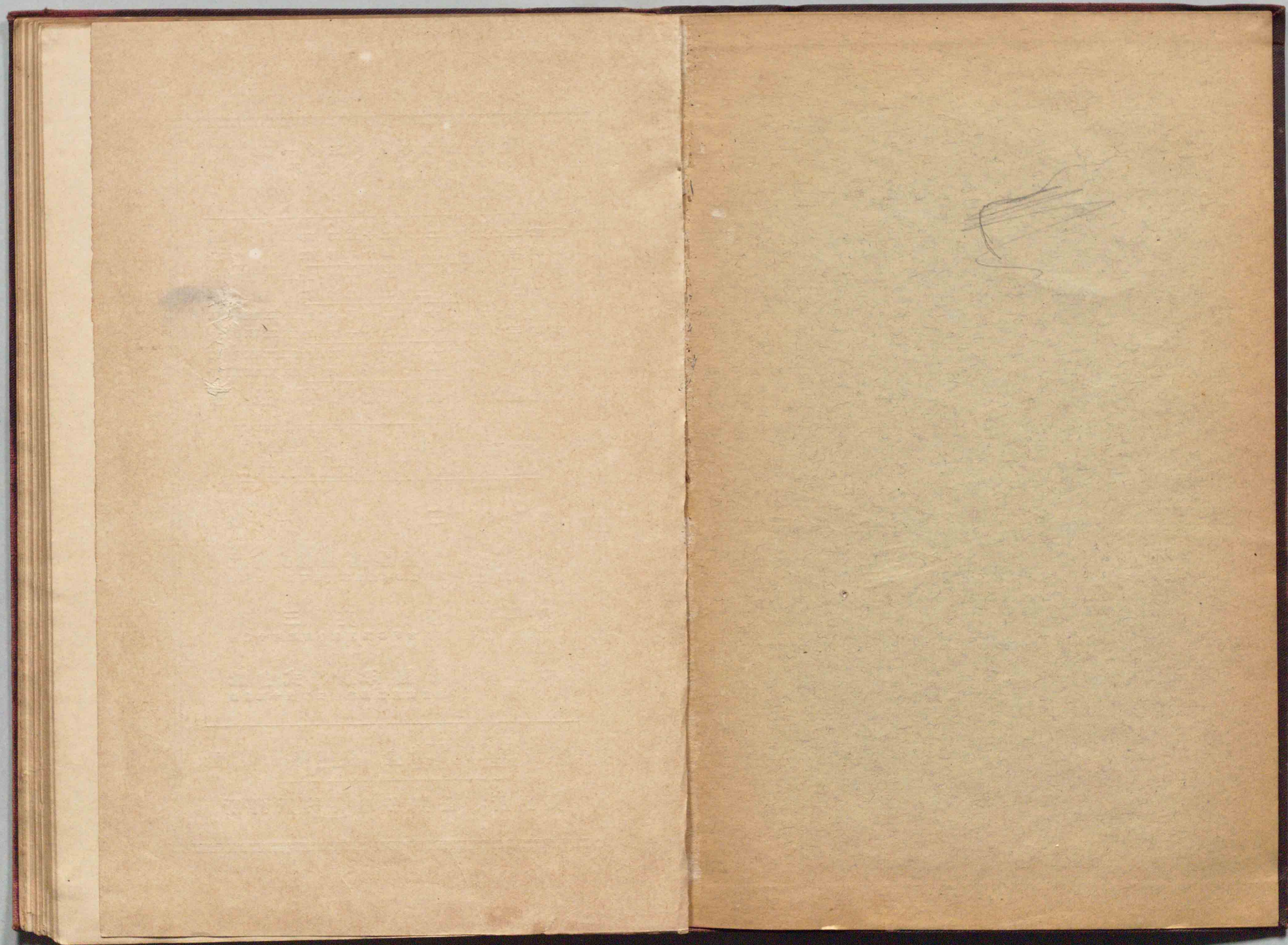
發 行 兼 印 刷 者 金 港 堂 書 籍 株 式 會 社  
東 京 市 日 本 橋 區 本 町 三 丁 目 十 七 番 地

代 表 者 社 長 原 亮 三 郎  
東 京 市 下 谷 區 龍 泉 寺 町 四 百 十 番 地

印 刷 所 帝 國 印 刷 株 式 會 社  
東 京 市 京 橋 區 築 地 三 丁 目 十 五 番 地

發 賣 所 東 京 市 日 本 橋 區 本 町 三 丁 目 十 七 番 地 金 港 堂 書 籍 株 式 會 社

賣 捌 所 全 國 各 地 特 約 販 賣 所



三十一

廣島  
廣島縣比婆郡  
比婆郡東城町上市

廣島縣比婆郡東城町上市

谷本商會

谷本商會

廣島縣比婆郡

谷本

