ELEMENTARY GEOMETRY

明治三十九年十二月二十七日
文部省檢定濟

新撰
幾何學教科書

立體之部

東京高等師範學校教授
理學士
林鶴一

編纂

開成館藏版
東京

目次

第六編　直線及平面

第七編　多面體

第八編　三圓體

附録

注意. 星標＊ヲ附シタル箇所ハ初讀ノ際之ヲ省略シテ可ナリ。

新撰
幾何學教科書

立體幾何學
第六編
直線及平面

第一章
直線ト平面トノ關係

1. **定義. 立體幾何學或ハ空間幾何學**トハ同一ノ平面中ニ在ラザル圖形ヲ論ズル幾何學ナリ。

2. **定義. 平面**トハ其面中ニ在ル任意ノ二點ヲ通過スル直線ガ全ク其面ニ密著スル面ナリ。

直線ハ其一部分ガ或平面中ニアリテ他ノ部分ガ其平面外ニアルコトヲ得ズ。

直線或ハ點ガ平面中ニ在ルトキ其平面ハ此直線或ハ點ヲ含ム又ハ通過スト云フ。

注意. 平面ハ無限ニ廣ガレルモノナリ,然レドモ之ヲ表スニハ多クハ平行四邊形ヲ以テス。

3. 定義. 直線ト平面トガ唯一點ヲ共有スルトキ此直線ハ平面ニ**交ル**ト云フ。

直線ト平面トガ一點ヲモ共有セザルトキハ互ニ**平行**ナリト云フ。

4. 公理 I. 平面ノ兩側ニ在ル二點ヲ通過スル直線ハ必此平面ニ交ル。

公理 II. 二點又ハ一直線ヲ通過スル平面ハ無數アリ。

平面ヲ其中ニアル直線ヲ軸トシテ

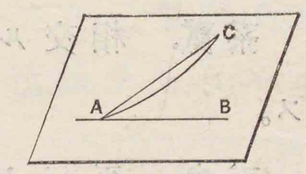
廻轉シ其原位置ニ復歸セシムルトキハ空間中ノ總ベテノ點ヲ通過スベシ。

問題

1. 直線ト平面トノ相對ノ位置幾通リアルカ。

定理一

5. 一直線(AB)及此直線外ノ一點(C)ヲ通過スル平面ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。



[證明] 直線ABヲ含メル任意ノ平面ヲ取リABヲ軸トシ之ヲ廻轉スルトキハC點ヲ含ムニ至ルベシ(4)。故ニAB線及C點ヲ含ム平面アリ。

次ニ此ノ如キ平面ハ唯一ナリ。何トナレバ若他ニ此ノ如キ平面アリトセバC點ヨリAB線中ノ任意ノ點Aニ至ル直線ハ各平面中ニ在リ(2),從テ二點ノ間ニ二直線ヲ引キ得レバナリ。

注意. 若干ノ直線又ハ點ヲ含ム平面ガ一アリテ且唯一ナルトキハ是等ノ直線又ハ點ハ此平面ヲ**決定**スト云フ。

故ニ上ノ定理ヲ畧述シテ一直線及此直線外ノ一點ハ平面ヲ決定スト云フ。

系壹. 同一ノ直線中ニ在ラザル三點ハ平面ヲ決定ス。

其故ハ三點ヲA, B, Cトスレバ直線AB及點Cヲ通過スル平面ハ是等ノ三點ヲ通過スベク,其逆モ亦眞ナレバナリ。

系貳. 相交ル二直線ハ平面ヲ決定ス。

系叄. 平行ナル二直線(AB, CD)ハ平面ヲ決定ス。

先平行ナル二直線ハ定義ニ由テ同一ノ平面中ニ在リ。次ニ之ヲ含ム平面ハ唯一アルノミ,其故ハ其一線(AB)ト他ノ線中ノ一點(C)トヲ通過スル平面ハ唯一ナレバナリ。

問題

1. 三角形ノ三邊ハ共面ナリ。

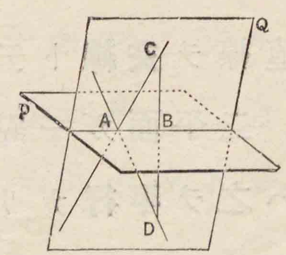
註. 數多ノ圖形ガ皆同一ノ平面中ニアルトキハ之ヲ**共面**ナリト云フ。

2. 梯形又ハ平行四邊形ノ四邊ハ共面ナリ。

3. 相交ル二直線ノ一ニ交リテ他ノ線ニ平行スル總テノ直線ハ元ノ二直線ニテ決定セル平面中ニアリ。

定理二

6. 一點(A)ヲ共有スル二平面(P,Q)ハ此點ヲ通過スル一直線ヲ共有ス,而シテ唯此一直線ニ限ル。



[證明] Q面中ニ於テA點ヲ通過スル任意ノ二直線AC,ADヲ引ケ。今其一ガP面中ニ在ラバ本題ハ明白ナリ。若然ラズシテ孰レモP面中ニ在ラズトスレバ此二線

中ニ夫々P面ノ兩側ニ在ル二點C及Dヲ取リ之ヲ連結スベシ,然ルトキ直線CDハAニアラザル一點Bニ於テP面ニ交ルベシ(公理I)。又CDハQ面中ノ二點ヲ通過スル直線ナルヲ以テQ面中ニ在リ,故ニCD中ノ一點BモQ面中ニアリ,故ニ二平面P,Qハ二點A,Bヲ共有ス,從テ直線ABヲ共有スベシ(2)。

又二平面P,Qハ直線AB外ノ點ヲ共有スルコト能ハズ,其故ハ一直線及其線外ノ點ヲ通過スル平面ハ唯一ナレバナリ(5)。

7. 定義. 二平面ガ唯一ノ直線ヲ共有スルトキハ之ヲ相**交ル**ト云ヒ,其直線ヲ**交線**ト云フ。

二平面ガ一點ヲモ共有セザルトキハ之ヲ**平行**ナリト云フ。

8. 定義. 平面ニ交ル直線ガ其交點ヲ通過スル此平面中ノ總テノ直線

ニ垂直ナルトキハ此平面ト直線トハ互ニ**垂直**ナリト云ヒ,此直線ヲ平面ノ**垂線**又ハ**法線**ト云ヒ,平面ニ垂直ナラザル直線ヲ此平面ノ**斜線**ト云フ。

垂線又ハ斜線ト平面トノ交點ヲ垂線又ハ斜線ノ**足**ト云フ。

平面ト其垂線トハ互ニ直角ニ交ルトモ又ハ互ニ直交スルトモ云ヒ,其斜線トハ互ニ斜交スト云フコトアリ。

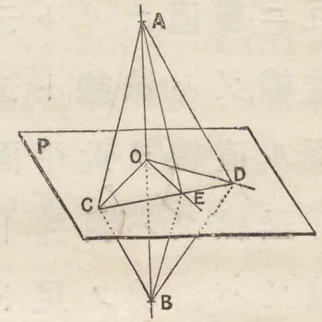
notisi!

定理三

9. 一直線(AB)ガ一平面(P)ニ交リ其交點(O)ヲ通過スル其平面中ノ二直線(OC,OD)ニ垂直ナルトキ此直線ト平面トハ互ニ垂直ナリ。

[證明] P面中ニ於テOヲ通過スル任意ノ直線OEヲ引キ$AB \perp OE$ナルコトヲ證明セントス。

三直線 OC, OD, OE ヲ截ルベキ任意ノ直線 CD ヲ引キ,又 OB=OA ナルガ如キ二點 A, B ヲ取リ,此二點ヲ C,D,E ニ連結セヨ。



然ルトキ OC ハ AB 線ノ垂直二等分線ナルヲ以テ

$$AC=BC,$$

同様ニ $$AD=BD.$$

$$\therefore \quad \triangle ACD \equiv BCD,$$

$$\therefore \quad 角ACE=BCE.$$

$$\therefore \quad \triangle ACE \equiv BCE,$$

$$\therefore \quad AE=BE.$$

故ニ OE ハ又 AB ノ垂直二等分線ナリ。故ニ AB 線ハ P 面中ノ O ヲ過グル任意ノ線,從テ總テノ線ニ垂直ナリ故ニ AB 線ト P 面トハ互ニ垂直ナリ。

注意. 一直線ガ一平面ニ垂直ナルガ爲ニハ其交點ヲ過ギ平面中ニアル二直線ニ垂直ナレバ足レリ。

又一直線ガ一平面ニ斜交スルガ爲ニハ其交點ヲ過ギ平面中ニアル一直線ニ斜交スレバ足レリ。

一直線中ノ一點ニ於テ此直線ニ垂直ナル無數ノ直線ヲ引クコトヲ得。

10. 定義. 二ツノ點ハ之ヲ連結スル直線ノ中點ニ於テ此直線ニ垂直ナル平面ニ關シテ**對稱**ナリト云フ。

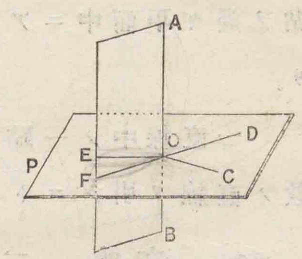
例ヘバ定理三ノ圖ニ於テ二點 A,B ハ平面 P ニ關シテ對稱ナリ。

定理四

11. 一直線(AB)中ノ一點(O)ニ於テ之ニ垂直ナル總テノ直線(OC,OD,OE 等)ハ皆此點ニ於テ該直線ニ垂直ナル同一ノ平面中ニ在リ。

[證明] 二直線 OC, OD ニテ決定セル平面ヲ P トスレバ此面ハ O 點ニ於テ AB ニ垂直ナリ(9).

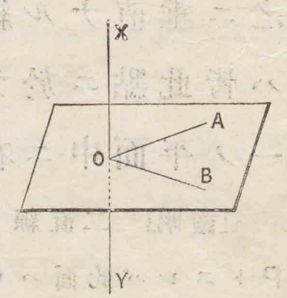
依テ直線OEガ平面P中ニ在ルコトヲ證明スレバ可ナリ。今OEガ平面P中ニ在ラズト假定セン



ニ相交線OE,ABニテ決定セル平面AEBトPトノ交線OFハABニ垂直ナリ(9)。
然ルトキハ同一ノ平面AEB上ニ於テ二直線OE,OFガ同一ノ直線ABニ垂直トナル,是レ背理ナリ。故ニOEハP面中ニ在リ。

定理五

12. 一直線(XY)中ノ一點(O)ヲ通過シ,之ニ垂直ナル平面ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。

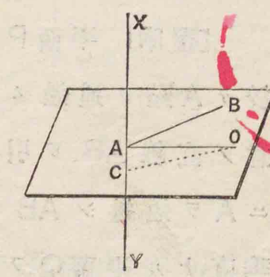


[證明] 直線XYヲ通過スル任意ノ二平面AXY,BXY中ニ於テO點ヲ通過シXYニ垂直ナル二直線

OA, OBヲ引クトキ此二直線ニテ決定セル平面AOBハXYニ垂直ナリ(9)。
又O點ニ於テXYニ垂直ナル總テノ直線ハ皆平面AOB中ニ在リ(11)。故ニOヲ通過スル他ノ平面ハXYニ斜交スル直線ヲ含ムベク,從テ其平面モ亦XYニ斜交スベシ(9注意)。

定理六

13. 一直線(XY)外ノ一點(O)ヲ通過シ之ニ垂直ナル平面ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。

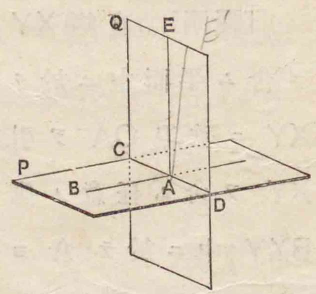


[證明] 直線XY及點Oヲ含ム平面中ニ於テOヨリXYニ垂線OAヲ引キ,次ニXYヲ含ム任意ノ他ノ平面BXY中ニ於テAヨリXYニ垂線ABヲ引クトキ平面OABハOヲ過ギテ直線XYニ垂直ナリ(9)。
又Aヲ通過シXYニ垂直ナル平面ハOAヲ含

ムヲ以テOヲ通過ス(11),而シテO點ヲ通過シXYニ垂直ナル總テノ平面ハOAヲ含ムベシ,其故ハ若然ラズトセバXYニ斜交スル直線OCヲ含ムベケレバナリ,然ルニAニ於テXYニ垂直ナル平面ハ唯一ナリ,故ニO點ヲ通過シXYニ垂直ナル平面モ亦唯一ナリ。

定理七

14. 一平面(P)中ノ一點(A)ヲ通過シ此平面ニ垂直ナル直線ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。



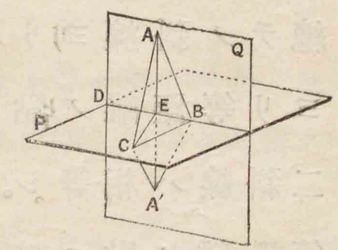
[證明] 平面P中ニ於テA點ヲ通過スル任意ノ直線ABヲ引キ,次ニAヲ通過シAB線ニ垂直ナル平面Qヲ作レ(12)。此平面中ニ於テ二平面ノ交線CDニ垂線AEヲ引クトキAEハABニモ垂直ナル故Pニ垂直ナリ。

次ニAE′ヲPニ垂直ナル他ノ直線トセバAE及AE′ハ共ニ此二線ヲ含メル平面トPトノ交線ニ垂直ナリ,是レ背理ナリ。故ニAEハ唯一ノ垂線ナリ。

notice

定理八

15. 一平面(P)外ノ一點(A)ヲ通過シ此平面ニ垂直ナル直線ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。



[證明] 先P面中ニ於テ任意ノ直線BCヲ引キ,A點ヲ通過シ此線ニ垂直ナル平面Qヲ作レ(12)。此平面トPトノ交線ヲBDトシ,A點ヨリBDニ垂線AEヲ引ケバ此線ハP面ニ垂直ナリ,其故ハBD線ニ關スルA點ノ對稱點ヲA′トスレバ直角三角形ABC, A′BCハ明ニ合同ニシテAC=A′C。故ニCEハAA′ノ

垂直二等分線ニシテ, AE ハ P 平面中ノ二直線 EB, EC ニ垂直ナリ,依テ AE ハ P ニ垂直ナリ。

且 AE ハ唯一ノ垂線ナリ,其故ハ別ニ一線 AF (圖ニハ此線ヲ略ス)ヲ引キ F ニ於テ P 面ニ會セシムレバ AEF ハ直角ナルヲ以テ AFE ハ鋭角ニシテ, AF ハ斜線ナレバナリ。

定理九

16. 平面外ノ一點ヨリ此面ヘ垂線及數多ノ斜線ヲ引クトキ, [1] 垂線ハ總テノ斜線ヨリ小ナリ。[2] 垂線ノ足ヨリ等距離ノ點ニ於テ平面ニ會スル二斜線ハ相等シ。[3] 垂線ノ足ヨリ不等距離ノ點ニ於テ平面ニ會スル二斜線ノ中大ナル距離ニアルモノガ他ヨリ大ナリ。

上ノ三箇條ノ逆モ亦眞ナリ。

17. 定義. 一點ト一平面トノ間ノ距離トハ其間ノ垂線ノ長サナリ。

問題

1. 二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此二點ヲ連ヌル直線ノ中點ニ於テ之ニ垂直ナル平面ナリ。

註. 或圖形中ノ總テノ點ガ或性質ヲ有シ,其他ノ點ハ皆此性質ヲ有セザルトキハ此圖形ヲ該性質ヲ有スル點ノ軌跡ナリト云フ。

notice

2. 列座セザル三點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此三點ヲ通過スル圓ノ中心ヲ通過シ此圓ノ面ニ垂直ナル直線ナリ。

3. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ差ガ一定不易ナル點ノ軌跡ハ此二點ヲ連ヌル直線ニ垂直ナル平面ナリ。

notice

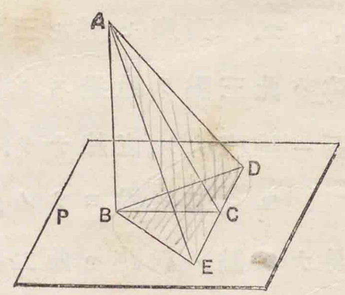
4. 一定點ヨリ一定平面ニ至ル等長ノ斜線ノ足ノ軌跡ハ圓ナリ。

5. 平面外ノ有限直線ヲ直角ノ下ニ見ル如キ此平面中ノ點ノ軌跡ハ圓ナリ。

定理十

notice.

18. 平面(P)ノ垂線(AB)ノ足ヨリ此平面中ノ任意ノ直線(DE)ヘ垂線(BC)ヲ引クトキ第二ノ垂線ノ足ト第一ノ垂線中ノ一點トヲ連ヌル直線(AC)ハ平面中ノ該直線(DE)ニ垂直ナリ。



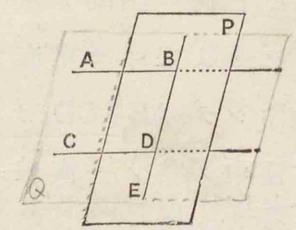
[證明] DE線上ニ於テC點ノ兩側ニCD=CEナラシメAD, AE, BD, BEヲ連ヌルトキBCハDEノ垂直二等分線ナルヲ以テBD=BE。故ニ斜線AD=AE(16)。故ニAC⊥DE.

注意. 此定理ヲ**三垂線ノ定理**ト云フ。

系. 平面外ノ一點ヨリ此平面及其中ニアル任意ノ直線ヘ各垂線ヲ引クトキ其足ヲ連ヌル直線ハ該直線ニ垂直ナリ。

定理十一

19. 平行線ノ一(AB)ニ交ル平面(P)ハ又他ノ線(CD)ニモ交ル。



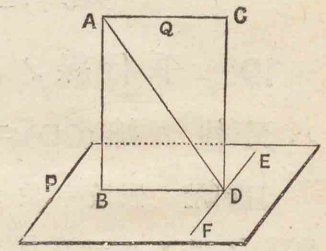
[證明] 假設ニ由テAB線トP面トハ一點Bヲ共有ス,故ニ平行線ノ平面ABCDモ亦P面ト一點Bヲ共有シ,從テ一直線BEヲ共有ス(6)。BE線ハ平行線ノ一ABニ交ル故又CDニモ交ル(平面幾何學公理VI)。其交點ヲDトスレバP面ハCD線トD點ヲ共有ス。次ニCD線中ノ他ノ點ハ皆P面外ニ在リ。其故ハ若然ラズト假定シ,BE線中ニ共有點アリトセバCDハBEト相合シ,從テCDハABニ平行ナラザルニ至ルベク,又BE線外ニ共有點アリトセバ平行線ノ平面ハP面ト相合シ,從テP面ハABニ交ラザルニ至レバナリ。

定理十二

natier

20. 二平行線ノ一(AB)ニ垂直ナル平面(P)ハ他ノ線(CD)ニモ垂直ナリ。

[證明] 平行線ノ平面Qト平面Pトノ交線ヲBDトスレバAB線ハP面ニ垂直ナルヲ以テBD線ニモ垂直ナリ。



而シテAB∥CDナル故CD⊥DB, 故ニCDガP面中ノ他ノ一直線ニ垂直ナルコトヲ證明スレバ足レリ(9)。

P面中ニ於テDヲ過ギBDニ垂線EDFヲ引ケバ EF⊥AD (18)。

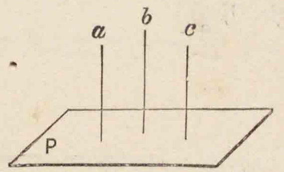
故ニEFハ二直線BD, ADヲ含ム平面Qニ垂直ナリ。故ニEFハQ面中ノ線CDニモ垂直ナリ。故ニCDハEFニ垂直ナリ。∴ CD⊥P。

系. 同一ノ平面ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ。 (同一法)

定理十三

21. 同一ノ直線(c)ニ平行ナル二直線(a,b)ハ互ニ平行ナリ。

[證明] 直線cニ垂直ナル平面Pヲ作ルトキハ$a\parallel c$, $b\parallel c$ナル故此平面ハa及bニ交リ且之ニ垂直ナリ(20), 故ニaハbニ平行ナリ(20, 系)。



問題

natier

1. 三角形ABCノ垂心Oヨリ其平面ニ垂線OPヲ引クトキAヲ通過シBCニ平行ナル直線ハPAニ垂直ナリ。

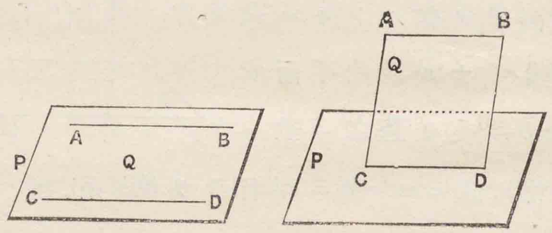
natier

2. 一平面外ノ一定點ヨリ此面中ノ一定點ヲ通過スル此面中ノ直線ヘ下セル垂線ノ足ノ軌跡如何.

3. 折面四邊形(四頂點ガ共面ナラザルモノ)ノ四邊ノ中點ヲ順次ニ連ヌルトキハ平行四邊形ヲ生ズ。

定理十四

22. 平行線ノ一(CD)ヲ含ム平面(P)ハ他ノ線(AB)ヲ含ムカ,又ハ之ニ平行ナリ。



[證明] A點ガP面中ニ在ルトキ(甲圖)平行線ノ平面QハPト合スベシ(5)。

又A點ガP面外ニ在ルトキ(乙圖)QハPト直線CDニ於テ交ルベシ,故ニABガP面ニ交ルトスルモ唯CD線中ノ點ニ於テ交リ得ルノミ,然ルニABハCDニ交ラズ,故ニABハP面ニ交ラズ,卽平行ナリ。

系. 一直線ニ平行ナル平面中ノ一點ヲ通過シ,此直線ニ平行ナル直線ハ全ク此平面中ニ在リ。

問題

1. 一平面及之ニ平行ナル一直線ノ間ニ夾マレタル任意ノ平行線ノ線分ハ相等シ。

2. 同一ノ直線ニ垂直ナル直線ト平面トハ互ニ平行ナリ。

3. 同一ノ直線ニ平行ナル二平面ノ交線ハ此直線ニ平行ナリ。

4. 一直線中ノ數多ノ點ヲ通過シ一定直線ニ平行ナル數多ノ直線ハ同一ノ平面中ニアリ。

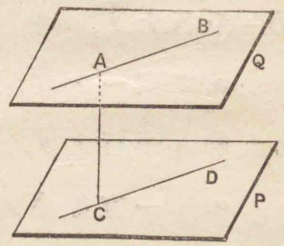
定理十五

23. 同一ノ直線ニ垂直ナル二平面ハ互ニ平行ナリ。

[證明] 是等ノ二平面ガ一點ヲ共有ストセバ,同一點ヲ通過シ同一ノ直線ニ垂直ナル二平面ヲ得ルニ至ル(13)。故ニ二平面ニハ共有點ナシ,卽互ニ平行ナリ。

定理十六

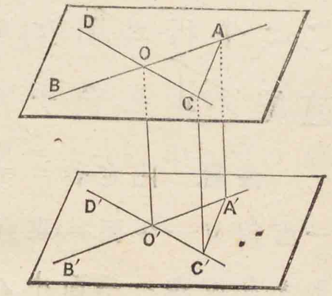
24. 一點(A)ヲ通過シ,任意ノ平面(P)ニ平行ナル直線(AB)ハ皆此點ヲ通過シ此平面ニ平行ナル同一ノ平面(Q)中ニ在リ。



[證明] A點ヨリP面ヘ垂線ACヲ引キ,AB, ACノ平面トP平面トノ交線ヲCDトスレバ $CD \parallel AB$, 而シテ $CD \perp AC$ ナル故 $AB \perp AC$, 故ニA點ヲ通過シP平面ニ平行ナル直線ハ皆此點ニ於テAC線ニ垂直ナリ,故ニ此點ニ於テACニ垂直ナルQ平面中ニアリ(11),而シテQハPニ平行ナリ(23).

定理十七

25. 相交線(AOB, COD)ガ夫々是等ト同一ノ平面中ニ在ラザル他ノ相交線(A′O′B′, C′O′D′)ニ平行ナルトキ,兩相交線ノ平面ハ平行ニシテ,其夾角ハ相等シキカ又ハ補角ヲナス。



[證明] I. 二直線AB, CDハ孰レモA′B′及C′D′ヲ含ム平面ニ平行ナリ(22),故ニ此平面ニ平行ナル平面ノ中ニ在リ(24),即AB,CDノ平面トA′B′, C′D′ノ平面トハ平行ナリ。

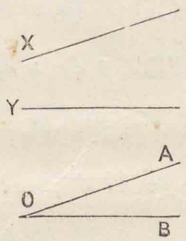
II. 次ニ角AOC=A′O′C′。其故ハ角ノ頂點O, O′ヨリ同方向ニOA=O′A′, OC=O′C′ヲ截リ取リOO′, AA′, CC′, AC, A′C′ヲ連ヌルトキハ $OA \parallel O'A'$ 及 $OC \parallel O'C'$ ナル故AOO′A′及COO′C′ハ何レモ平行四邊形ニシテAA′及CC′ハOO′ニ等クシテ且平行ナリ,從テ互ニ等クシテ且平行ナリ。故ニAC=A′C′。故ニ △AOC≡A′O′C′.

∴ 角AOC=A′O′C′.

同樣ニAOD, A′O′D′ハ相等シ,又AOC, B′O′C′等ハ補角ヲ爲スコト明ナリ。

notice

26. 定義. 同一ノ平面中ニ在ラザル二直線ノ間ノ角トハ任意ノ點ヨリ之ニ平行ニ引ケル二直線ノ夾ム角ナリ。



注意. 此定義ニヨレバ一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキ此直線ハ平面中ノ總テノ直線ト直角ヲナス。

問題

1. 三平面ガ二ツ宛相交ルトキ其三交線ハ集交スルカ,又ハ平行ナリ。

notice

2. 平行四邊形ノ一對角線ヲ通過スル平面ハ他ノ對角線ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ。

定理十八

27. 一平面ガ平行ナル二平面ニ交ルトキ其二交線ハ平行ナリ。

[證明] 二交線ハ夫々平行ナル平面中ニ在ルヲ以テ出會フコトナク,且倶ニ一平面中ニ在リ,故ニ平行ナリ。

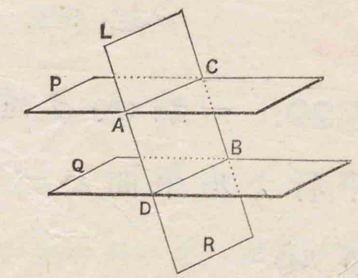
定理十九

(notice)

28. 二平面ガ平行ナルトキ

[1] 其一(P)ニ交ル直線(L)ハ他ノ面(Q)ニモ交ル。

[2] 其一(P)ニ交ル平面(R)ハ他ノ面(Q)ニモ交ル。



[證明] I. 直線Lガ平面Pニ交ル點ヲAトシ平面Q中ニ任意ノ點Bヲ取リ,此點ト直線Lトヲ含ム平面ヲ作ラバ此平面ハP,Qノ

二平面ト夫々A及Bナル點ヲ共有スル故直線AC及BDヲ共有スベク(6),而シテ此二線ハ平行ナリ(27),然ラバ直線Lハ平行線AC, BDト同平面中ニアリテACト交ル故BDトモ交ルベシ,其交點Dハ又L線トQ面トノ交點ナリ。且L線トQ面トハ他ノ點ヲ共有スル能ハズ。

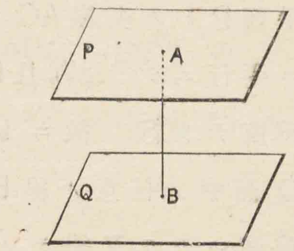
II. 二平面P, Rノ交線ヲACトシ平面R中ニ於テ交線AC中ノ任意ノ點Aヲ通過スル直線Lヲ引クトキ此直線ハPニ交ル故Qニモ交ルベシ,其交點Dハ二平面R, Q中ニアル故一直線BDヲ共有シ(6),且此線外ノ點ヲ共有スル能ハズ。故ニRハQト交ル。

定理二十

29. 一點(A)ヲ通過シ一平面(Q)ニ平行ナル平面ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] A點ヨリQ平面ヘ垂線ABヲ引キ得

ベク,又Aヲ過ギ直線ABニ垂直ナル平面Pヲ作ルヲ得ベシ(12),然ラバP∥Q。



次ニA點ヲ通過スル他ノ平面ハPニ交ル(6)故ニ又Qニ交ル(28),卽Aヲ通過シQニ平行ナル平面ハ唯一ニ限ル。

系. 同一ノ平面(R)ニ平行ナル二平面(P,Q)ハ互ニ平行ナリ。

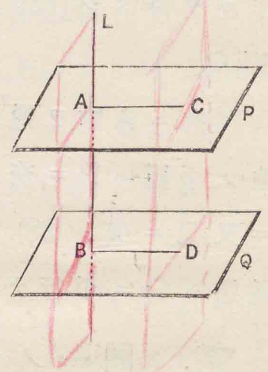
其故ハPガQニ交ルトセバQ∥Rナル故Pハ又Rニ交リ假設ニ戻ルニ至ル,因テPトQトハ交ラズ,故ニ平行ナリ。

定理二十一

30. 平行平面ノ一(P)ニ垂直ナル直線(LA)ハ又他ノ面(Q)ニモ垂直ナリ。

[證明] LA線ハP面ニ交ル,故ニ之ニ平行ナルQ面ニ交ルベシ(28),其交點ヲBトセヨ,又Q面中

ニBヨリ任意ノ直線BDヲ引クトキ平面LBDト平面Pトノ交線ACハBDニ平行ニシテ(27)，且LAニ垂直ナリ(8)。故ニLAハQ面中ノ任意ノ線BDニ垂直ニシテ又總テノ線ニ垂直ナリ。故ニLA線ハQ面ニ垂直ナリ。



注意. 此定理ヲ次ノ如ク述ブルコトヲ得。平行ナル二平面ハ共通垂線ヲ有ス。

定理二十二

31. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレタル二平行線ノ線分ハ相等シ。

系. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレタル共通垂線ノ線分ハ相等シ。

32. 定義. 平行ナル二平面ノ間ノ**距離**トハ其間ニ夾マレタル共通垂線ノ線分ノ長サヲ云フ。

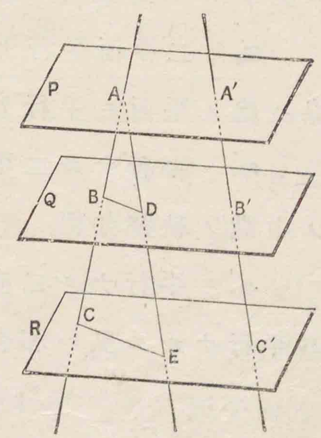
ABトCDヲ含ム平面ハP及ビQニAC及BDナリ
(∵ ACハPト平行線ノ面トノ交線ナリ)。ACハ其ノ二面ノ交線ナリ)
∴ AC∥BD.(( ) ABDCハ□ AB=CD

定理二十三

33. 任意ノ二直線(ABC, A′B′C′)ガ平行ナル三平面(P, Q, R)ニ交ルトキ對應セル部分ハ比例ヲ爲ス。

[證明] 二直線ガ平行ナルトキ對應セル部分ハ二ツ宛相等シ(31)，故ニ比例ヲ爲ス。

又二直線相交ルトキ此二直線ハ同一ノ平面中ニアルヲ以テ定理十八及平面幾何學ノ定理ヲ用ヒテ容易ニ本定理ヲ證明スルヲ得。



二直線ガ同一ノ平面中ニ在ラズシテA, B, C及A′, B′, C′ニ於テ平行平面P, Q, Rニ交ルトキハ，Aヲ通過シ直線A′B′C′ニ平行ナル直線ADEヲ引キ，平面Q及Rニ夫々D及Eニ於テ交ラシメヨ，然ラバAD=A′B′, DE=B'C' (31), 次ニBD及CEヲ引カバ此二直線ハ平行ナルヲ以テ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DE}.$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

問　　題

1. 平行ナル二平面ガ他ノ平行ナル二平面ニ交ルトキ四交線ハ皆平行ナリ。

2. 二平面平行ナルトキ其一ニ平行ナル直線ハ他ノ平面ニ平行ナルカ又ハ其中ニ在リ。

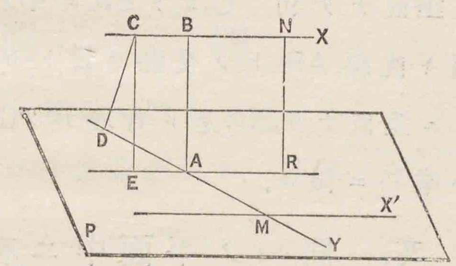
3. 平行ナル二平面ノ間ニ夾マレタル線分ノ中點ノ軌跡如何。

4. 平行ナル二直線ニ夫々垂直ナル二平面ハ平行ナルカ又ハ相合ス。

定理二十四

34. 同一ノ平面中ニ在ラザル二直線(X, Y)ニ共通ナル垂線ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。

[證明] Y線中ノ任意ノ點Mヲ過ギテXニ平行ナル線X'ヲ引キX'及Yヲ通過スル平面Pヲ作レバ此平面PハXニ平行ナリ(22)。



次ニX線中ノ任意ノ點NヨリP面ニ垂線NRヲ引キ, RヨリX線ニ平行ナル線RAヲ引ケバ此線ハY線ニ交リ且X'線ニ平行ナリ(21)。此線トY線トノ交點AヨリRNニ平行ナル線ABヲ引ケバX線トRAトハ平行線ニシテ同平面中ニ在ル故此線ABハX線ニ交ル。然ルトキハABハ所要ノ共通垂線ナリ,何トナレバNRハ平面Pニ垂直ナル故之ニ平行ナル線ABモ亦Pニ垂直

ナリ。故ニ AB ハ Y ニ垂直ナリ。又 ABNR ハ平行四邊形ナル故角 ABN ハ ARN ニ等シ,故ニ直角ナリ。故ニ AB ハ X ニモ垂直ナリ。

次ニ直線 AB ノ外ニ共通垂線 CD アリトセヨ。D ヲ通過シ X 線ニ平行ナル直線ヲ引カバ此直線ハ平面 P 中ニアルベキヲ以テ CD ハ平面 P ニ垂直ナリ(9)。C ヨリ BA ニ平行ナル直線 CE ヲ引キ直線 AR トノ交點ヲ E トセバ, CE モ亦平面 P ニ垂直ナリ(20),是レ背理ナリ(15),故ニ共通垂線ハ唯一ニ限ル。

系. 同一ノ平面中ニ在ラザル二直線(X, Y)ニ共通ナル垂線(AB)ハ此二直線間ニ引キ得ベキ最短線ナリ。

其故ハ $CE=BA$, 而シテ $CE<CD$ (16)。

$$\therefore \quad BA<CD.$$

35. **注意.** 立體幾何學ニ於ケル作圖ノ設問ノ解法ハ,平面幾何學ニ於ケルガ如クナラズ,上ノ定理ニ於テ共通垂線ヲ引ケルガ如ク唯圖形ノ位

置ヲ確定スルニ止マル。而シテ其要素トスベキモノハ[1]列座セザル三點又ハ二交線又ハ二平行線ヲ含メル平面及之ト所題ノ直線トノ交點又ハ平面トノ交線並ニ[2]一定點ヲ通過シ一定平面ニ垂直ナル直線ニシテ,是等ハ皆作リ得ルモノト假定シ諸種ノ設問ニ應用スルモノトス。

問　題

1. 一定點ヲ通過シ,同一ノ平面中ニアラザル二直線ニ交ルベキ直線ヲ引ケ。不能ノ場合アルカ。

平行ナル場合ニハ

2. 一平面外ノ二定點ニ至ル距離ノ和(又ハ差)ガ最小(又ハ最大)ナル點ヲ此平面中ニ求メヨ。

3. 同一ノ平面中ニアラザル二直線ノ各ヲ含ミ互ニ平行ナル平面ヲ作レ。

4. 二定點ヨリ等距離ナル點ヲ定直線中ニ求メヨ。

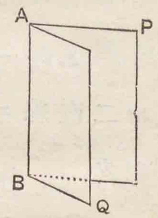
5. 一定點ヲ通過シ同一ノ平面中ニアラザル二直線ニ平行ナル平面ヲ作レ。

6. 三平面ノ相對ノ位置幾通リアルカ。

第二章
二面角

36. 定義. 同一ノ直線ニテ終ル二平面ヨリナル圖形ヲ**二面角**ト云フ。

此直線ヲ二面角ノ**稜**ト云ヒ,二平面ヲ其**面**ト云フ。



例ヘバ二平面 ABP, ABQ ハ直線 AB ニ沿フテ二面角ヲ作ル,之ヲ二面角 PABQ 又ハ二面角 AB ト記ス。

相交ル二平面ハ空間ヲ四部ニ分ツ故四ツノ二面角ヲ生ズ。

二面角ノ大サ. 二面角 PABQ ノ稜 AB ヲ含メル一平面ガ面 ABQ ノ位置ヨリ稜ヲ軸トシテ廻轉シ,角內ヲ周リテ面 ABP ノ位置ニ至ラバ其廻轉ノ大サハ卽二面角ノ大サナリ。

37. 定義. 稜及一面ヲ共有シ此面

ノ兩側ニ在ル二ツノ二面角ヲ**隣接**二面角ト云フ。

相交ル二平面ニテ成レル四ツノ二面角ノ中,隣接セザルモノヲ**對稜**二面角ト云フ。

平面ガ他ノ平面ト交リ相等シキ隣接二面角ヲ作ルヰ前者ハ後者ニ**垂直**ナリト云ヒ,其各角ヲ**直二面角**ト云フ。

補角,餘角,銳角,鈍角等ノ名稱ハ二直線間ノ角ニ於ケルト同樣ニ二面角ニ於テモ之ヲ適用スルモノトス。

38. 定義. 二面角ノ**平面角**トハ其稜中ノ一點ヨリ,各面中ニ於テ,稜ニ垂直ニ引ケル直線ノ間ノ二面角內ニアル角ナリ。

二面角ノ平面角ノ大サハ其頂點ノ位置ニ係ラズ一定不易ナルコト明ナリ(25).

定理二十五

39. 二ツノ二面角相等キトキハ其平面角モ亦相等シ。逆モ亦眞ナリ。

(重置法)

系壹. 對稜二面角ハ相等シ。

系貳. 直二面角ノ平面角ハ直角ナリ,而シテ此逆モ亦眞ナリ,從テ直二面角ハ皆相等シ。

系叁. 平面ガ他ノ平面ニ垂直ナラバ逆ニ後者ハ前者ニ垂直ナリ。

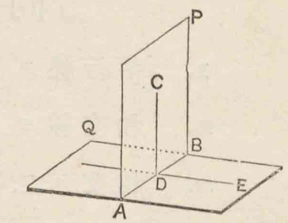
系四. 二面角ノ比ハ其平面角ノ比ニ等シ。

故ニ二面角ヲ測ルニハ其平面角ヲ以テス。

定理二十六

40. 一平面(P)ガ他ノ平面(Q)ニ垂直ナルトキ,第一ノ平面中ニアリテ交線(AB)ニ垂直ナル直線(CD)ハ第二ノ平面ニ垂直ナリ。

[證明] 平面Q中ニ於テDヲ通過シ,ABニ垂直ナル直線DEヲ引クトキCDEハ二面角CABEノ平面角ナル故直角ナリ(39,系二)。故ニCDハDEニ垂直ニシテ又ABニ垂直ナリ,故ニCDハ平面Qニ垂直ナリ。



系壹. 二平面互ニ垂直ナルトキ,其一面中ノ一點ヨリ他ノ面ヘ下セル垂線ハ全ク第一ノ面中ニ在リ。(同一法)

系貳. 相交ル二平面ガ第三ノ平面ニ垂直ナラバ其交線モ亦此平面ニ垂直ナリ。

定理二十七

41. 一直線ガ一平面ニ垂直ナルトキ,此直線ヲ含メル任意ノ平面ハ此平面ニ垂直ナリ。

系. 平面ヘノ斜線ヲ含ミ,此平面ニ垂直ナル平面ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル。

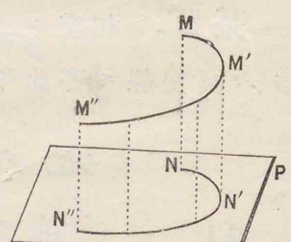
問　題

1. 平行線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何。

2. 相交線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡如何。

3. 相交ル二平面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ一雙ノ平面ナリ。平行平面ノ場合ハ如何。

42. 定義. 一平面上ニ投ズル一點ノ**正射影**トハ此點ヨリ此平面ニ下セル垂線ノ足ナリ。又一平面上ニ投ズル**線ノ正射影**トハ此線中ノ總テノ點ノ正射影ノ軌跡ナリ。

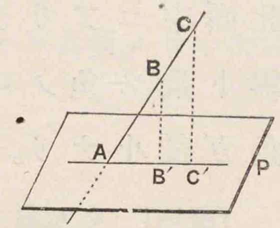


例ヘバPヲ平面トシMM′M″ヲ任意ノ線トシ,一點Mガ此線上ヲ運動スト考フレバ此點ノ正射影ハ線NN′N″ヲ生ズ,是レ線MM′M″ノ正射影ナリ。

注意. 正射影ノ外,射影ト云フモノアレドモ本書ニ於テハ正射影ノミヲ論ズルヲ以テ爾後單ニ射影ト云ハバ正射影ヲ指スモノト知ルベシ。

定理二十八

43. 平面(P)ニ斜交スル直線(ABC)ノ射影ハ直線ナリ。



[證明] 直線ABCヲ含ミ,平面Pニ垂直ナル平面(41,系)ハABC線中ノ總テノ點ヨリPニ下セル垂線ヲ含ム(40,系一)。故ニ此二平面ノ交線AB′C′ハABCノ射影ニシテ卽直線ナリ。

系壹. 平面ニ垂直ナル直線ノ射影ハ一點ナリ。

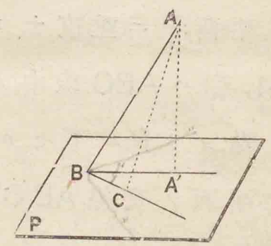
系貳. 平面ニ平行ナル直線ノ射影ハ此直線ニ平行ナリ。逆モ亦眞ナリ。

第二學期

定理二十九

notice n.

44. 平面(P)ニ斜交スル直線(AB)ガ此面中ニアリテ其足ヲ通過スル諸直線ト爲ス角ノ中其射影(A'B)ト爲ス銳角ガ最小ナリ。



[證明] 交點Bヲ過ギル他ノ直線ヲBCトシ, A'ヲAノ射影トシBCヲBA'ニ等クセバ三角形ABA'及ABCニ於テ二邊相等ク,第三邊不等ナリ,即AA'<AC,

∴ 角ABA'<ABC。

注意. 直線ABト平面Pトノ交點Bヲ通過セザル直線ト雖平面P中ニアルモノニハ本定理ヲ適用スルコトヲ得(26)。

系. 平面ニ斜交スル直線ガ此面中ノ諸線ト爲ス角ノ中,射影ト等角ヲ爲セル直線ト爲ス角ハ相等ク,射影ト大ナル角ヲ爲セル直線ト爲ス角ハ他ヨリ大ナリ。

ex.

45. 定義. 直線ト平面トノ角トハ此直線ト其射影トノ爲セル銳角ヲ云フ。

直線ガ平面ニ垂直ナルトキ其間ノ角ハ勿論直角ナリ。

問題

1. 任意ノ平面上ニ投ズル平行線ノ射影ハ平行ナルカ又ハ相合ス。

2. 一點ヨリ相交ル二平面ニ夫々垂線ヲ下セバ此二垂線ノ平面ハ此二平面ノ交線ニ垂直ニシテ,且二垂線ノ交角ノ一ハ二平面ノ成セル二面角ノ平面角ニ等シ。

3. 一平面上ニ投ズル數多ノ點ノ射影ガ一直線中ニアラバ是等ノ點ハ皆同平面中ニアリ。

notice!

4. 相交ル二平面上ニ投ズル任意ノ一線ノ射影ガ何レモ直線ナルトキハ原線モ亦直線ナリ,例外ノ場合ハ如何。

5. 平行ナル二平面ト一直線トノ爲ス角ハ相等シ。

6. 平行線ト平行平面トノ爲ス角ハ相等シ。

7. 一定直線ヲ含メル無數ノ平面上ニ投ズル一定點ノ射影ノ軌跡ハ圓ナリ。

8. 一直線ヲ含ミ一平面ニ垂直ナル平面ハ一アリ而シテ唯一ニ限ル。

第三章

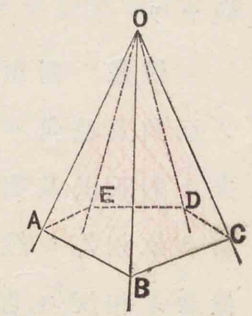
多面角

46. 定義. 一點ヲ共有シ,且二ツ宛順次ニ交ル三ツ以上ノ平面ヨリナル圖形ヲ**多面角**或ハ**立體角**ト云フ。

多面角ニハ之ヲ成セル平面ノ數ニヨリテ**三面角**,**四面角**,**五面角**等ノ名アリ。

二平面相交ルトキ空間ハ四部ニ分タル,其交線ト交ルベキ第三ノ平面ヲ作ラバ空間ハ八部ニ分タル,其各部ハ**三面角**ナリ。

47. 多面角ヲ成セル平面ハ皆二隣面ノ交線ニテ終ルモノトス。例ヘバ五平面 AOB, BOC 等ガ一點Oヲ通過スル直線OA,OB等ニテ交レバ五面ノ多面角ヲ生ズ。Oヲ多面角ノ**頂點**ト云ヒ,平面ヲ其**面**ト云ヒ,交線OA, OB等ヲ其**稜**ト云ヒ,稜ノ間ノ角AOB, BOC等ヲ其**面角**ト云フ。又各二面ノ間ノ二面角ヲ多面角ノ内部ニ向テ測ルトキハ之ヲ**稜角**ト云フ。

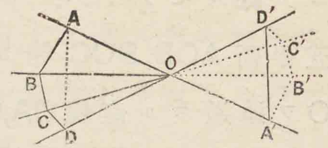


多面角ノ總テノ稜ヲ截ルベキ平面ヲ作ルトキ此面ト多面角ノ面トノ交線ハ多角形ヲ生ズベシ,之ヲ多面角ノ**截面**又ハ**底面**ト云フ。

48. 定義. **凸多面角**トハ其截面ノ凸多角形ナル多面角ナリ。

49. 定義. **對頂多面角**トハ二ツノ多面角ニシテ其各角ノ各稜ガ他ノ角ノ各稜ノ延長トナレルモノナリ。

例ヘバO-ABCD及O-A′B′C′D′ハ對頂多面角ナリ。



注意. 對頂多面角ノ面角及稜角ハ二ツ宛夫々對頂角及對稜角ヲ爲ス故相等シ,然レドモ兩形ニ於ケル各部分ノ排置全ク相反ス,卽O點ヨリ見ルトキA,B,C,Dハ左周リニシテA′,B′,C′,D′ハ右周リナリ,故ニ

對頂多面角ハ一般ニ合同ナラズ。

50. 定義. 各部分夫々相等キモ其排置相反スル二ツノ多面角ハ**對稱**ナリト云フ。 Symmetry

對稱多面角ハ合同ナラザルモ之ヲ動カシ對頂多面角ノ位置ヲ取ラシムルコトヲ得。

定理三十

notice

51. 三面角ノ二ツノ面角(AOB, BOC)ガ相等キトキハ是ニ對スル稜角(OC, OA)モ亦相等シ。逆モ亦眞ナリ。

[證明] 稜OB中ノ任意ノ點PヨリOA, OC及面AOCニ垂線PM, PN, PDヲ下シDM, DNヲ連ヌルトキハ

DM⊥OA 及 DN⊥OC. (18)

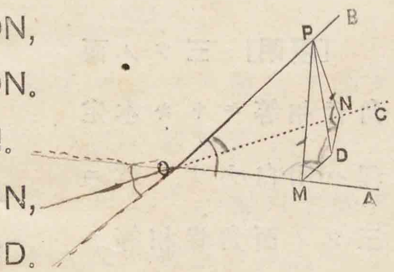
又 角POM=PON,

∴ △POM≡PON.

故ニ PM=PN.

∴ △PDM≡PDN,

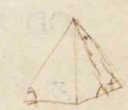
∴ 角PMD=PND.



然ルニ角PMD及PNDハ夫々稜角OA及OCノ平面角ナリ。故ニ稜角モ亦相等シ。

逆定理モ亦容易ニ證明スルヲ得。

***系.** 三面角ノ二ツノ面角相等シキトキ此三面角ト其對頂三面角トハ合同ナリ。

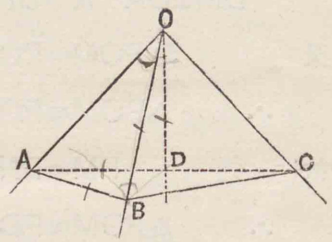


定理三十一

52. 三面角ノ一ノ面角ガ他ノ面角ヨリ大ナルトキ,前者ニ對スル稜角ハ後者ニ對スル稜角ヨリ大ナリ。

定理三十二

53. 三面角ノ各面角ハ他ノ面角ノ和ヨリ小ナリ。



[證明] 三ツノ面角皆相等キトキ本定理ハ明白ナリ。故ニ三ツノ面角皆相等カラズトス。三面角 O-ABC ニ於テ AOC ヲ最大ナル面角トセヨ。

二邊 OA, OC ノ間ニ任意ノ直線 AC ヲ引キ,角 AOC ノ内ニ角 AOB ニ等ク角 AOD ヲ作リテ直線 OD ヲ引キ,次ニ OB ヲ OD ニ等ク截リ, AB, BC ヲ連ヌルトキハ

$$\triangle AOD \equiv AOB.$$

然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ $AC-AB<CB$, 即 $CD<CB$.

故ニ $\triangle OCD$ 及 OCB ニ於テ OC ハ共通ニシテ

$$OD=OB, \qquad CD<CB.$$

$$\therefore \quad \text{角}\, COD<COB.$$

此不等式ノ兩邊ニ等角 AOD ト AOB トヲ加フレバ

$$\text{角}\, AOC<COB+AOB.$$

問題

1. 一稜角及之ヲ夾メル二ツノ面角ヲ等クスル兩三面角ハ合同ナルカ,又ハ對稱ナリ。

2. 一面角及之ニ隣レル二ツノ稜角ヲ等クスル兩三面角ハ合同ナルカ,又ハ對稱ナリ。

*3. 三面角ノ三ツノ稜角ヲ二等分スル三平面ハ同一ノ直線ヲ含ム。

4. 多面角ノ面角ノ一ハ他ノ面角ノ和ヨリ小ナリ。

*5. 三面角ノ各稜ト之ニ對スル面角ノ二等分線トヲ含メル三平面ハ同一ノ直線ヲ含ム。

6. 二ツノ三面角ハ其面角ガ夫々相等ケレバ合同ナルカ或ハ對稱ナリ。

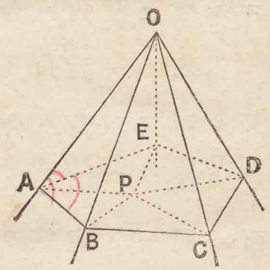
逆ノ順ニ取リテ相等シキ時ハ同様ニシテ二ツノ三面角ガ對稱ナルコトヲ証明シ得ヘシ.

定理三十三

notice

54. 凸多面角ノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

[證明] 凸多面角O-ABC…ノ底面內ノ任意ノ一點ヲPトシPA,PB,PC,……ヲ連ヌルトキハ面角ノ數ト同數ノ三角形ヲ得ベシ,是等ノ三角形ノ底角ノ和ヲxニテ表サバ其內角ノ和ハ$4R+x$ナリ,但Rハ直角ヲ表ス。又Oニ於ケル面角ノ和ヲSトシ,面上ニ於ケル三角形ノ底角ノ和ヲyトスレバ二組ノ三角形ハ同數ナル故



$$S+y=4R+x$$

故ニ

$$S<4R$$

ヲ證明スルニハ

$$y>x$$

ヲ證明スレバ可ナリ。

三面角A-BOEニ於テ

$$角\ OAB+OAE>PAB+PAE, \quad (53)$$

又之ト同樣ノ關係ガB,C,D,Eニ於テモ成立ス。故ニyヲ成セル各二角ノ和ハxヲ成セル各二角ノ和ヨリ大ナリ。故ニ

$$y>x.$$

問題

notice

*1. 三面角ノ各面角ノ二等分線ヲ含ミ,其各面ニ垂直ナル三平面ハ同一ノ直線ヲ通過ス。

notice

*2. 平面ニ關シテ對稱ナル二點O,O′ヲ此平面中ノ數多ノ點A,B,C,……ニ連ネテ生ズル所ノ多面角O-ABC……及O′-ABC……ハ合同ナリヤ否ヤ。

notice

*3. 三面角ノ三ツノ稜角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。

第七編

多面體

第一章

多面體ノ定義及性質

55. 定義. **多面體**トハ數多ノ平面多角形ニテ圍マレタル立體ナリ。

是等ノ多角形ヲ多面體ノ面ト云ヒ,其邊及頂點ヲ夫々多面體ノ**稜**及**頂點**ト云フ。

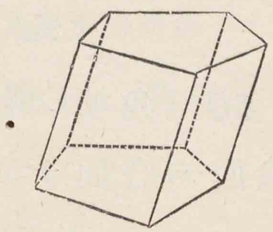
多面體ニハ其面ノ數ニ從テ**四面體,五面體,六面體**等ノ名アリ。

多面體ヲ作ルニハ少クトモ四平面ヲ要ス。

56. 定義. **凸多面體**トハ其何レノ面ヲ擴グルモ其體內ニ入ラザルモノナリ。

本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ。

57. 定義. **角壔**トハ二面平行ニシテ他面皆平行四邊形ナル多面體ナリ。



平行セル二面ヲ角壔ノ**底面**ト云ヒ,他ノ面ヲ**側面**ト云ヒ,側面ノ交線ヲ**側稜**ト云フ。兩底面ハ合同ナル多角形ナルコト明ナリ。

角壔ニハ其底面ノ邊數ニ從テ**三角壔,四角壔**等ノ名アリ。

兩底面ノ距離ヲ角壔ノ**高サ**ト云フ。

58. 定義. **直角壔**トハ側稜ガ底面ニ垂直ナル角壔ナリ。然ラザルモノヲ**斜角壔**ト云フ。

正角壔トハ直角壔ノ底面ガ正多角形ナルモノナリ。

59. 定義. 多面體ノ**截面**トハ之ヲ平面ニテ截ルトキ生ズル多角形ナリ。

角壔ノ**直截面**トハ側稜ニ垂直ナル截面ナリ。

定理一

60. 角壔ノ總テノ側稜ニ交ル平行截面ハ合同ナル多角形ナリ。

定理二

natice

61. 角壔ノ側面積ハ其直截面ノ周圍ト側稜ノ一トノ乘積ニ等シ。

natice

系. 直角壔ノ側面積ハ其底面ノ周圍ト高サトノ乘積ニ等シ。

問題

1. 角壔ノ側稜ニ平行ナル截面ハ平行四邊形ナリ。

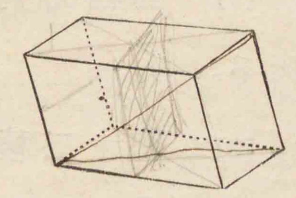
2. 角壔ノ二雙ノ側稜ヲ通過スル二平面ノ交線ガ底面ニ垂直ナルモノハ直角壔ナリ。

3. 底面ノ一邊a尺,高サh尺ナル正六角壔ノ全面積ヲ求メヨ。

4. 底面ノ一邊一尺,高サ二尺ナル正八角壔ノ側面積ヲ平方分ニテ示シ,平方分未滿切捨テヨ。

62. 定義. **平行六面體**トハ角壔ノ底面ガ平行四邊形ナルモノナリ。

平行六面體ハ二ツ宛互ニ合同ナル三雙ノ平行四邊形ニヨリテ圍マル。



直角平行六面體又ハ**直方體**トハ面ガ皆矩形ナル平行六面體ナリ。直方體ノ稜ガ皆相等キモノヲ**立方體**又ハ單ニ**立方**ト云フ。

63. 定義. 多面體ノ**對角線**トハ同一ノ面中ニ在ラザル頂點ヲ連ヌル直線ナリ。

定理三

64. 平行六面體ニ於テハ

[1] 其十二稜ハ四ツ宛相等ク且平行ナリ。

[2] 其四對角線ハ各中點ニ於テ集交ス。

[3] 其十二稜ノ平方ノ和ハ四對角線ノ平方ノ和ニ等シ。

系壹. 直方體ノ對角線ハ皆相等ク,其平方ハ一頂點ニ集マル三稜ノ平方ノ和ニ等シ。

系貳. 立方體ノ各對角線ノ平方ハ其各稜ノ平方ノ三倍ニ等シ。

注意. 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ其**中心**ト云フ。

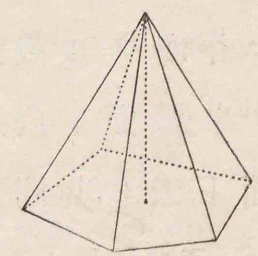
問題

1. 四對角線ガ集交スル四角壔ハ平行六面體ナリ。

2. 各稜ノ長サ一尺ナル立方體ノ對角線ノ長サヲ厘位マデ算出セヨ。

3. 直角平行六面體ノ三稜ノ長サヲ a,b,c トスレバ其全面積ヲ表ス公式如何。

65. 定義. **角錐**トハ一面ヲ除キ他面ガ悉ク同一ノ頂點ヲ有スル三角形ナル多面體ナリ。



共通ノ頂點ヲ角錐ノ**頂點**ト云ヒ,之ニ對スル面ヲ**底面**ト云フ。頂點ヨリ底面ニ下セル垂線ノ長サヲ角錐ノ**高サ**ト云ヒ,又頂點ニ集マル稜及面ヲ夫々其**側稜**及**側面**ト云フ。

角錐ニハ其底面ノ邊數ニ從テ**三角錐,四角錐**等ノ名アリ。

66. 定義. **正角錐**トハ角錐ノ底面ガ正多角形ニシテ其底面ノ中心ガ此底面上ニ投ズル頂點ノ射影ナルモノナリ。

正角錐ノ頂點ヨリ底面ノ一邊ニ下セル垂線ノ長サヲ其**斜高**ト云フ。

注意. 正角錐ノ側面ハ皆合同ナル等脚三角形ナリ。

67. 定義. **角錐臺**トハ角錐ノ底面ニ平行スル截面ト底面トノ間ノ立體ナリ。截面ト底面トヲ共ニ角錐臺ノ底面ト云ヒ,其間ノ距離ヲ其高サト云フ。

正角錐臺ノ底面ノ平行ナル二邊間ノ距離ヲ其斜高ト云フ。

定理四

68. 角錐ヲ底面ニ平行スル平面ニテ截ルトキ

notice

[1] 側稜及高サハ比例ニ分タル。

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'} = \cdots$

notice

[2] 截面ト底面トハ相似ナリ。

notice

[3] 截面ト底面トノ比ハ之ヨリ頂點マデノ距離ノ二乘比ニ等シ。

notice

系壹. 等高ナル二角錐ニ於テ,頂點ヨリ等距離ニシテ底面ニ平行ナル兩截面ノ比ハ兩底面ノ比ニ等シ。

系貳. 等底等高ナル二角錐ニ於テ頂點ヨリ等距離ニシテ底面ニ平行ナル兩截面ハ相等シ。

定理五

notice

69. 正角錐ノ側面積ハ底面ノ周圍ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

定理六

notice

70. 正角錐臺ノ側面積ハ兩底面ノ周圍ノ和ノ半ト斜高トノ乘積ニ等シ。

問題

notice

1. 三角錐(卽四面體)ノ對稜ノ中點ヲ連ヌル三直線ハ各中點ニ於テ集交ス。

notice

2. 四面體ノ六ツノ稜角ヲ二等分スル六平面ハ同一點ヲ通過ス。

notice

3. 三角錐ノ底面ニ平行スル截面ノ面積ヲ底面ノ半ニ等クセヨ。

第二章

角壔ノ體積

71. **定義.** 立體ノ**體積**トハ其面ニヨリテ圍マレタル空間ノ大サナリ。

二ツノ立體ハ相重ネルコトヲ得ザルモ其體積相等キコトヲ得。相重ネ得ルトキ**合同**ナリト云フ。

體積ノ**單位**ハ線單位ヲ稜トスル立方體ノ體積ナリ。

定理七

72. 等高ニシテ合同ナル底面ヲ有スル二ツノ直角壔ハ合同ナリ。(重置法)

系. 一頂點ニ於テ集マル三稜ヲ等クスル二ツノ直方體ハ合同ナリ。

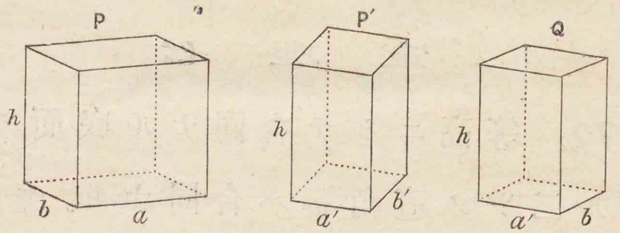
定理八

73. 底面ガ合同ナル二ツノ直方體ノ比ハ其高サノ比ニ等シ。

系. 二稜ヲ等クスル二ツノ直方體ノ比ハ第三稜ノ比ニ等シ。

定理九

74. 等高ナル二ツノ直方體ノ比ハ其底面ノ比ニ等シ。



［證明］ P及P′ヲ所題ノ直方體トシ底面ノ二邊ヲ夫々 a, b 及 a', b' トシ,高サヲ h トセヨ。a', b, h ヲ三稜トスル直方體ヲQトセバ

$$\frac{P}{Q}=\frac{a}{a'},\qquad \frac{Q}{P'}=\frac{b}{b'}\qquad (73\text{系}),$$

$$\therefore\qquad \frac{P}{P'}=\frac{a}{a'}\times\frac{b}{b'}.$$

然ルニ此式ノ右節ハ明カニP及P′ノ底面ノ比ニ等シ。

定理十

notice!

75. 二ツノ直方體ノ比ハ其三稜ノ測度ノ乘積ノ比ニ等シ。

［證明］ P及P′ヲ兩體ノ體積トシ,其三稜ノ測度ヲ a, b, c 及 a', b', c' トス,而シテ a, b', c' ナル三稜ヲ有スル直方體Rヲ考フレバ前定理ニ由テ

$$\frac{P}{R}=\frac{b\times c}{b'\times c'}\qquad 及\qquad \frac{R}{P'}=\frac{a}{a'}$$

ヲ得,故ニ

$$\frac{P}{P'}=\frac{a\times b\times c}{a'\times b'\times c'}.$$

系壹. 直方體ノ體積ノ測度ハ底面ト高サトノ測度ノ乘積ニ等シ,從テ三稜ノ測度ノ乘積ニ等シ。

系貳. 立方體ノ體積ハ其稜ノ三乘冪ニ等シ。(以下測度ナル語ヲ略ス)。

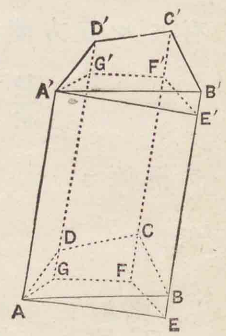
故ニ或數ノ三乘冪ヲ其立方ト云フ。

ex notice

定理十一

76. 斜角壔ノ體積ハ其直截面ヲ底面トシ其稜ヲ高サトスル直角壔ノ體積ニ等シ。

〔證明〕 所題ノ角壔ヲ ABCDA′B′C′D′ トシ稜 AA′ ノ兩端ヲ通過シ,之ニ垂直ナル平面ヲ作リテ側面ト交ラシム。然ラバ此直截面 AEFG, A′E′F′G′ ヲ底面トシ AA′ ヲ高サトスル直角壔ハ原斜角壔ニ等シ。



其故ハ立體 ABCDEFG ヲ取リテ之ヲ他ノ立體 A′B′C′D′E′F′G′ ニ重ネ,面 AF ヲ面 A′F′ ノ上ニ置ケバ此二面ハ合同ナルヲ以テ (60) 相重ナル。又稜 EB, FC, GD ハ夫々 E′B′, F′C′, G′D′ ニ等シク且相重ナル面ニ垂直ナル故相重ナル。從テ兩立體ハ合同ナレバナリ。

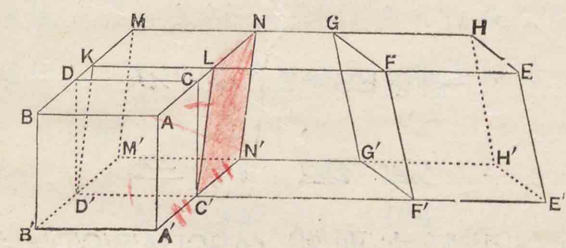
注意. A及A′ヲ通過スル直截面ガ底面ト交ル場合モ亦容易ニ證明スルヲ得。

定理十二

notice

77. 平行六面體 (EFGHE′F′G′H′) ノ體積ハ其底面 (E′F′G′H′) ト高サ (h) トノ乘積ニ等シ。

〔證明〕 稜 EF, HG, E′F′, H′G′ ヲ任意ニ延長シ, E′F′ ノ延長上ニ C′D′ ヲ E′F′ ニ等シク取リ,二點 C′, D′ ヲ通過シ,直線 C′D′ ニ垂直ナル平面ヲ作レバ直立平行六面體*KN′ ヲ得ベシ。



次ニ稜 N′C′, NL, MK, M′D′ ヲ延長シ N′C′ ノ延長上ニ C′A′ ヲ N′C′ ニ等シク取リ,平面 ANN′A′ 中ニ於テ C′ ヨリ A′C′ ニ垂線 C′C ヲ引ケ。

稜 D′C′ ハ平面 AN′ ニ垂直ナル故 C′C 及 C′A′

* 直立平行六面體トハ直角壔ノ底面ガ平行四邊形ナルモノナリ。

ニ垂直ナリ。故ニ平面 CC′D′ ヲ作リ,又 A′ ヲ通過シ此平面ニ平行ナル平面 A′B′BA ヲ作レバ生ズル所ノ立體 A′D ハ直方體ナリ。

然ルニ元ノ立體 EG′ ハ直立平行六面體 KN′ ト等積ニシテ此立體ハ又直方體 A′D ト等積ナリ (76), 而シテ是等ノ三立體ノ高サハ同ジ平行平面ノ距離ナル故皆 h ニ等シ。

然ルニ體積 $A'D = A'B'D'C' \times h$ (75 系一)。

又 $$A'B'D'C' = C'D'M'N' = E'F'G'H',$$

故ニ

$$\text{體積 } EG' = E'F'G'H' \times h.$$

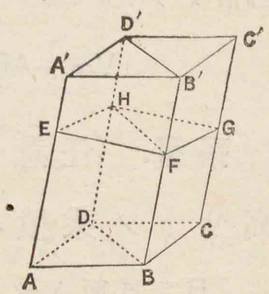
定理十三

notice

78. 平行六面體 (ABCDA′B′C′D′) ヲ,相對セル二稜 (BB′,DD′) ヲ通過スル平面ニテ分ツトキ其兩三角壔ハ等積ナリ。

[證明] 稜 BB′ ニ垂直ナル直截面ヲ EFGH トスレバ △EFH, GHF ハ夫々三角壔 ABD′, CBD′ ノ直截面ナリ。

然ルニ三角壔 ABD′ ハ BB′ ヲ高サトシ △EFH ヲ底面トスル直三角壔ト等積ナリ。又三角壔 CBD ハ前者ト同高ニシテ △GHF ヲ底面トスル直三角壔ト等積ナリ。然ルニ此二ツノ直三角壔ハ合同ナル底面 EFH, GHF ヲ有スル故合同ナリ (72),



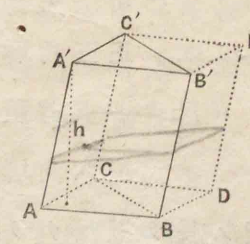
$$\therefore \quad \text{三角壔 } ABD' = CBD'.$$

注意. 三角壔 ABD′, CBD′ ノ各面及二面角ハ二ツ宛相等シ,然レドモ其排置ノ順序相反スルヲ以テ兩體合同ナラズ。

定理十四

notice

79. 三角壔 (ABCA′B′C′) ノ體積ハ其底面 (ABC) ト高サ (h) トノ乘積ニ等シ。



[證明] 平行四邊形 ABDC 及 A′B′D′C′ ヲ完成シ DD′ ヲ連

ヌルトキ AD′ ハ平行六面體ニシテ三角壔 ABC′ ノ二倍ナリ(78)。故ニ三角壔ノ體積ヲ V トスレバ

$$V=\frac{1}{2}ABCD\times h=\triangle ABC\times h.$$

natürl,

系壹. 任意ノ角壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ。

B ヲ底面トシ，h ヲ高サトシ，V ヲ體積トセバ

$$V=Bh.$$

natürl!

系貳. 角壔ノ體積ハ其直截面ト側稜トノ乘積ニ等シ。

問　　題

1. 三角壔ノ體積ハ其一側面ト對稜中ノ一點ヨリ此面ニ下セル垂線トノ乘積ノ半ニ等シ。

2. 正三角壔アリ，底面ノ一邊 a 尺ニシテ，高サ h 尺ナリ，其體積立方尺ナルカ。

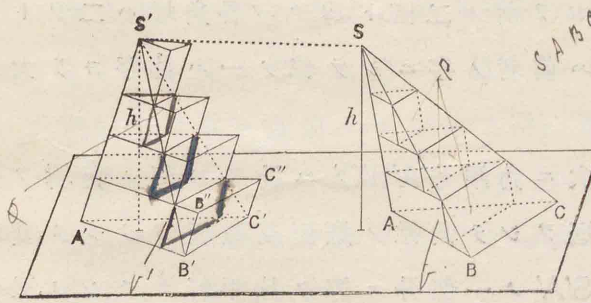
3. 正六角壔アリ，底面ノ一邊三尺ニシテ側稜ノ長サ五尺ナリ，其體積幾立方尺ナルカ。

第三章

角錐ノ體積

定理十五

80. 等底 (ABC, A′B′C′) 等高 (h) ナル二ツノ三角錐 (SABC, S′A′B′C′) ハ等積ナリ。



[證明] 所題ノ兩體ヲ同一ノ平面上ニ置クトキ兩體ハ等高ナル故直線 SS′ ハ此平面ニ平行ナルベシ。稜 SA ヲ n 等分シ，其分點ヲ通過シ底面ニ平行ナル平面ヲ作ルトキ兩角錐ノ截面ハ二ツ宛相等シ(68系二)。

角錐 SABC ニ於テ，各截面ヲ上底トシ稜 SA ノ

一部分ニ等ク且平行ナル稜ヲ有スル$n-1$個ノ角壔ヲ作リ,又$S'A'B'C'$ニ於テモ同樣ノ作圖ヲ爲ストキ,兩體ニ於ケル角壔ハ二ツ宛等底等高ナル故等積ナリ。

角錐$SABC, S'A'B'C'$ノ體積ヲV, V'トシ內部ノ角壔ノ體積ノ和ヲPトスレバ

$$P<V \text{及} P<V'.$$

nヲ大ナラシムレバPハ從テ大ナルベシ,例ヘバnヲ前ノ二倍ト爲サバ各角壔ハ二ツトナリ,其一ハ前者ノ半ニシテ他ノ一ハ此半ヨリ大ナルベシ。

次ニ角錐$S'A'B'C'$ニ於テn個ノ角壔ヲ作リ,其下底ヲシテ角錐ノ底面及截面タラシメ,其稜ヲシテ$S'A'$ノ一部分ニ等ク且平行ナラシメ,又角錐$SABC$ニ於テモ同樣ノ作圖ヲ爲セヨ。然ラバ兩體ニ於ケル各角壔ハ二ツ宛相等シ,故ニ各角錐ニ於ケル角壔ノ體積ノ和ヲQトスレバ

$$Q>V \text{及} Q>V'.$$

而シテnヲ大ナラシムレバQト各角錐トノ差ハ如何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得ベシ。

故ニP及Qハ孰レモ或極限ニ近迫ス。故ニ其兩極限ガ相等キコトヲ知ラバ,常ニPトQトノ間ニ在ル定量V及V′ハ相等クシテP及Qノ共有スル極限ニ等キコトヲ知リ得ベシ。

偖$Q-P$ハ角壔$A'B''C''$ナリ,其故ハ他ノ$n-1$個ノ角壔ハ$SABC$ノ內部ニアル$n-1$個ノ角壔ト夫々等積ナレバナリ。

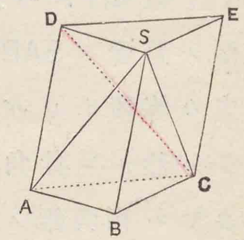
然ルニ此角壔$A'B''C''$ノ底面ハ恆ニ一定シ,其高サハ兩角錐ノ高サノ$\frac{1}{n}$ナル故其體積ハnガ限リ無ク大ナルニ從テ零ニ近迫ス。故ニ$Q-P$ハ之ヲ如何程ニテモ零ニ近迫セシムルヲ得。然ルニV及V′ハ共ニQトPトノ間ニアル故其差ハ$Q-P$ヨリモ小ナリ,從テ零ナリ,卽V及V′ハQ及Pノ共有スル極限ニシテ卽相等シ。

notiez

定理十六

81. 三角錐$(SABC)$ノ積體(V)ハ其底面(ABC)ト高サ(h)トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

［證明］ 頂點 S ヨリ稜 BA, BC ト等キ平行線 SD, SE ヲ引キテ AD, DE, EC ヲ連ヌレバ三角錐ト同底同高ナル三角壔ヲ得,此三角壔ハ元ノ三角錐ノ三倍ニ等カルベシ。其故ハ面 SDC ヲ作レバ此角壔ハ三ツノ三角錐 SADC, SECD, SABC ヨリ成ル,然ルニ第一,第二ノ角錐ハ等底 ADC, ECD ヲ有シ,且 S ヨリ平面 AE ニ下セル垂線ヲ高サトスルヲ以テ互ニ等積ナリ。次ニ第二,第三ノ角錐ヲ比較スルニ第二ハ C ヲ頂點トシ DSE ヲ底面トストモ見做スコトヲ得ルヲ以テ第三ト等底同高ナリ,故ニ等積ナリ。



故ニ三角錐 SABC ハ此三角壔ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ。故ニ

$$V=\frac{\triangle ABC\times h}{3}。$$

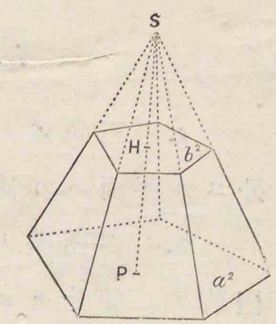
系壹. 任意ノ角錐ノ體積(V)ハ底面(B)ト高サ(h)トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。即　$V=\frac{1}{3}Bh$。

其故ハ所題ノ角錐ハ同高ナル數多ノ三角錐ニ分チ得レバナリ。

系貳. 等高(又ハ等底)ナル兩角錐ノ體積ノ比ハ底面(又ハ高サ)ノ比ニ等シ。

定理十七

82. 角錐臺ノ體積ハ兩底ト其比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタル積ノ三分ノ一ニ等シ。



［證明］ SP ヲ角錐ノ高サ, V ヲ角錐臺ノ體積, a^2 及 b^2 ヲ其兩底ノ面積, $HP=h$ ヲ其高サトシ

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$$

ナルコトヲ證明セントス。

V ハ二ツノ角錐ノ差ナルヲ以テ

$$V=\frac{SP}{3}\times a^2-\frac{SH}{3}\times b^2,$$

然ルニ $\dfrac{a^2}{SP^2}=\dfrac{b^2}{SH^2}$,

故ニ $\dfrac{a}{SP}=\dfrac{b}{SH}=\dfrac{a-b}{h}$。

$\therefore$ $SP=\dfrac{ah}{a-b}$, 及 $SH=\dfrac{bh}{a-b}$。

故ニ $V=\dfrac{a^3h}{3(a-b)}-\dfrac{b^3h}{3(a-b)}$

$=\dfrac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)}$

$=\dfrac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$。

問題

notice

1. 三角錐ノ側稜ノ一ヲ含ミ,其稜角ヲ二等分スル平面ハ其對稜ヲ二隣面ノ比ニ分ツ。

2. 四面體ノ一稜ヲ通過スル平面ヲ以テ其體積ヲ二等分セヨ。

3. 一ツノ三面角ヲ等クスル二ツノ三角錐ノ比ハ此三面角ノ三稜ノ乘積ノ比ニ等シ。

4. 三角錐アリ,高サ 2·04 尺ニシテ底面ノ三邊夫々 0·4尺, 0·5尺, 0·6尺 ナリ,體積幾何。

第八編

三　圓　體*

第一章

直　圓　壔

83. 定義. **直圓壔**トハ矩形ガ其一邊ヲ軸トシ,其原位置ニ歸ルマデ廻轉シテ生ズル立體ナリ。

軸ニ垂直ナル二對邊ハ圓ヲ生ズ,之ヲ圓壔ノ**底面**ト云フ。軸ニ平行ナル邊ハ曲面ヲ生ズ,之ヲ其**側面**ト云フ。

軸トセル邊ノ長サ即兩底面ノ距離ヲ其**高サ**ト云フ。

* 直圓壔ト直圓錐ト球トヲ總稱シテ三圓體ト云フ。

84. 定義. 直角壔ノ底面ガ直圓壔ノ底面ニ内接又ハ外接スルトキ此直角壔ハ此直圓壔ニ**内接**又ハ**外接**スト云フ。

定理一

notice

85. 直圓壔ノ側面積ハ底面ノ周ト高サトノ乘積ニ等シ。

[證明] 直圓壔ニ内接スル正多角壔ノ周ヲPニテ表シ,高サヲHニテ表サバ此角壔ノ側面積ハP·Hナリ(61系). 今其底面ノ邊數ヲ無限ニ增セバPノ極限ハ圓壔ノ底面ノ周Cナリ。故ニ角壔ノ側面積ノ極限ハC·Hニシテ,是レ圓壔ノ側面積ナリ。

系. 直圓壔ノ底面ノ半徑ヲRトシ,高サヲHトセバ其全面積 $S=2\pi R(R+H)$.

注意. 曲面ノ面積トハ常ニ平面ノ面積ノ和ノ極限ナリ。

定理二

notice

86. 直圓壔ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ。

[證明] 直圓壔ノ體積Vハ内接正多角壔ノ體積Pヨリ大ニシテ外接正多角壔ノ體積P′ヨリ小ナリ,即

$$P<V<P'.$$

今高サヲHトシ,内外角壔ノ底面積ヲB, B′トセバ

$$P=B.H,\quad P'=B'.H.$$

然ルニ角壔ノ底面ノ邊數ヲ無限ニ增セバP及P′ハ何レモVニ近迫ス,故ニVハ其共有ノ極限ニシテ底面ト高サトノ乘積ニ等シ。

系. 直圓壔ノ底面ノ半徑ヲRトシ,高サヲHトセバ

$$\boxed{體積V=\pi R^2 H.}$$

問題

notice

1. 直圓壔ノ軸ニ平行ナル平面ヲ以テ,之ヲ截ラバ其截面ハ矩形ナルベシ。

notice

2. 矩形ノ二隣邊ヲ a, b トセバ其各邊ヲ軸トシ此矩形ヲ廻轉シテ生ズベキ兩直圓壔ノ體積ノ比如何。

notice

3. 底面ノ直徑一尺五寸,高サ四尺ナル直圓壔形ノ水桶アリ。其容量ヲ勺マデ算出セヨ。但 $\pi=3{\cdot}1416$ トス。

一石＝6.4827立方尺

第二章

直圓錐

87. 定義. 直圓錐トハ直角三角形ガ其直角ノ一邊ヲ軸トシ,原位置ニ歸ルマデ廻轉シテ生ズル立體ナリ。

軸ノ長サハ圓錐ノ**高サ**ニシテ,軸ニ垂直ナル邊ニ由テ生ズル圓ハ圓錐ノ**底面**ナリ。又斜邊ノ

長サヲ圓錐ノ**斜高**ト云ヒ,斜邊ニ由テ生ズル曲面ヲ其側面ト云フ。

角錐ガ直圓錐ト頂點トヲ共有シ,其底面ガ直圓錐ノ底面ニ內接又ハ外接スルトキ其角錐ハ直圓錐ニ內接又ハ外接スト云フ。

定理三

g. notice

88. 直圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

[證明] 直圓錐ニ內接スル正角錐ノ側面積ハ

底面ノ周×斜高ノ半

ニ等シ(69)。今底面ノ邊數ヲ無限ニ增セバ角錐ノ側面積ハ圓錐ノ側面積ニ近迫ス。而シテ角錐ノ底面ノ周ノ極限ハ圓錐ノ底面ノ周ニシテ角錐ノ斜高ノ極限ハ圓錐ノ斜高ナリ。故ニ圓錐ノ側面積ハ底面ノ周ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

系壹. 直圓錐ノ側面積ハ高サノ中點ヲ通過シ底面ニ平行ナル截面ノ周ト斜高トノ乘積ニ等シ。

系貳. 直圓錐ノ高サヲHトシ,斜高ヲH′トシ,底面ノ半徑ヲRトスレバ

$$全面積\ S=\pi R(H'+R),$$

且

$$H'=\sqrt{H^2+R^2}.$$

定理四

notice

89. 直圓錐ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

系. 直圓錐ノ底面ノ半徑ヲRトシ,高サヲHトスレバ

$$體積\ V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

90. **定義.** **直圓錐臺**トハ直圓錐ノ底面及之ニ平行ナル截面ノ間ニ夾マレタル立體ナリ。

梯形ノ一邊ガ其兩底ニ垂直ナルトキ此邊ヲ軸トシ其原位置ニ歸ルマデ囘轉セバ直圓錐臺ヲ生ズ。軸ニ對スル邊ヲ此圓錐臺ノ斜高ト云フ。

定理五

notice

91. 直圓錐臺ノ側面積ハ底面ノ周ノ和ト斜高トノ乘積ノ半ニ等シ。

系壹. 直圓錐臺ノ側面積ハ軸ヲ直角ニ二等分スル截面ノ周ト斜高トノ乘積ニ等シ。

系貳. 直圓錐臺ノ體積,高サ,兩底ノ半徑ヲ夫々V, H, R, R′トセバ

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+RR'+R'^2), \quad (82).$$

問題

notice

1. 直圓錐ノ頂點ヲ通過スル截面ハ等脚三角形ナリ。

notice

2. 二邊ノ長サa及bナル直角三角形ヲ,其斜邊ヲ軸トシテ,廻轉シ生ズル所ノ立體ノ全面積及體積ヲ求メヨ。

notice

3. 直圓錐アリ,高サ32糎,體積100立方糎ナリ. 底面ノ半徑ヲ計算セヨ.

notice!

4. 直圓錐ノ高サ四尺ニシテ底面ノ直徑六尺ナルモノアリ。其斜高ト側面積ト底面積ト體積トヲ求メヨ。

5. 直圓錐ノ側面積ガ底面積ノn倍ナルトキ其高サト底面ノ半徑トノ比ハ$\sqrt{n^2-1}$ナリ。

第三章

球

92. 定義. **球面**トハ閉塞セル曲面ニシテ其面上ノ總テノ點ガ**中心**ト云ハル、定點ヨリ等距離ナルモノナリ。

球面ニテ圍マレタル立體ヲ**球**ト云フ。 Sphere

中心ト球面上ノ一點トヲ連ヌル直線ヲ球ノ**半徑**ト云ヒ,中心ヲ通過シ其兩端球面ニテ終レル直線ヲ其**直徑**ト云ヒ,直徑ノ兩端ヲ球ノ**對點**ト云フ。

注意壹. 球面ハ一定點ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ。

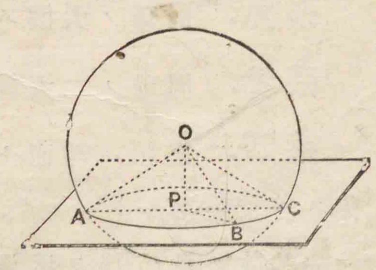
注意貳. 半圓ノ直徑ヲ軸トシ之ヲ廻轉シ其原位置ニ歸ラシムレバ球ヲ生ズ。

注意參. 球面ト唱フベキヲ略シテ球ト唱フルコトアリ。

定理六

93. 球面ト平面トノ交線ハ圓周ナリ。

[證明] 球ニ交ル平面ガ球ノ中心ヲ通過スルトキ交線中ノ點ハ皆此平面上ニアリテ球ノ中心ヨリ等距離ニ在リ,故ニ此交線ハ球ノ半徑ヲ半徑トシ球ノ中心ヲ中心トスル圓周ナリ。



此平面ガ球ノ中心Oヲ通過セザルトキハOヨリ此平面ヘ垂線OPヲ引キ,交線ABC中ノ任意ノ二點

A及Bヲ O ニ連ネヨ。然ラバ OA, OB ハ球ノ半徑ナル故相等シ,故ニ A及B ハ此垂線ノ足Pヨリ等距離ニアリ(16)。故ニ交線 ABC ハ P ヲ中心トシ PA ヲ半徑トスル圓周ナリ。

注意. 圓 ABC ヲ球ノ**截面**ト云フ。

系壹. 球ノ半徑ヲ R トシ截面ノ半徑ヲ r トシ兩中心ノ距離 OP ヲ d トスレバ

$$r^2 = R^2 - d^2,$$

故ニ中心ヨリ等距離ニ在ル截面ハ皆相等シク,中心ヨリ遠キ截面ハ近キ截面ヨリ小ナリ。

定義. 球ノ中心ヲ通過スル截面ヲ球ノ**大圓**ト云ヒ,然ラザルモノヲ**小圓**ト云フ。

系貳. 同球ノ大圓ハ皆合同ナリ。

系叁. 同球ノ二大圓ハ互ニ二等分ス。

系四. 直線ハ球面ト二點ヨリ多クノ點ヲ共有スル能ハズ。

其故ハ此直線ヲ通過スル任意ノ平面ト球ト

ノ交線ハ圓周ニシテ,此圓周ト此直線トノ交點ハ二ツヨリ多カラザレバナリ。

系五. 球面上ノ對點ナラザル二點ヲ通過スル大圓ハ一有リ,而シテ唯一ニ限ル。

定理七

94. 大圓ハ球及球面ヲ二等分ス。

[證明] 大圓ノ直徑ノ一ヲ軸トシ,球ノ一部分ヲ平角ダケ廻轉シ,此大圓ガ其原位置ニ合スルトキ,二部分ノ曲面ハ相合スベシ,然ラザレバ中心ヨリ球面上ノ點ニ至ル距離ガ不等トナルベシ。故ニ二部分合同ナリ。

95. 定義. 球ノ大圓又ハ小圓ノ中心ヲ通過シ其面ニ垂直ナル直線ヲ此圓ノ**軸**ト云ヒ,軸ト球面トノ二交點ヲ此圓ノ**極**ト云フ。

球ノ大圓又ハ小圓ノ軸ハ球ノ中心ヲ通過シ各極ハ其圓周上ノ點ヨリ等距離ニ在リ。

問　　題

1. 二定點又ハ三定點ヲ通過スル球ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 四面體ノ四頂點ヲ通過スル球ハ一アリ,而シテ唯一ニ限ル[此球ハ四面體ニ外接スト云フ]。

3. 二定點ニ至ル距離ノ比ガ一定不易ナル點ノ軌跡ハ球ナリ。

4. 二定點ヨリノ距離ノ平方ノ和ガ一定不易ナル點ノ軌跡如何。

5. 半徑五寸ナル球ノ中心ヨリ三寸ノ距離ニ在ル小圓ノ面積ヲ計算セヨ。

96. 定義. 直線又ハ平面ト球面トガ唯一點ヲ共有スルトキハ**相切**スト云ヒ,此直線又ハ平面ヲ夫々球面ノ**切線**又ハ**切平面**ト云フ。二ツノ球面ガ唯一點ヲ共有スルトキハ之ヲ**相切**スト云フ。

定理八

97. 球ノ半徑ノ端點ニ於テ之ニ垂直ナル平面ハ其球面ニ切ス。

系壹. 半徑ノ端點ニ於テ之ニ垂直ナル直線ハ球面ニ切ス。

系貳. 球面ニ切スル直線又ハ平面ハ切點ニ至ル半徑ニ垂直ナリ。

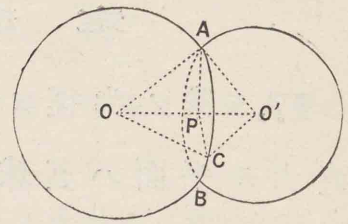
其故ハ此半徑ハ中心ヨリ切線又ハ切平面ニ至ル最短線ナレバナリ。

定理九

98. 二ツノ球面ノ交線(ABC)ハ圓周ニシテ此圓ノ平面ハ兩球ノ共通ノ中心線(OO′)ニ垂直ナリ。

[證明] 交線中ノ任意ノ點ヲCトスレバ三角形OCO′ノ三邊ノ長サハ一定ナル故高サCPノ長サモ一定ニシテPハ定點ナリ。故ニC點ハ常ニ

Pヲ通過シ OO′ ニ垂直ナル平面ノ中ニ在リテ(11), P點ヨリ定距離ニ在リ,故ニ交線ABCハPヲ中心トスル圓周ナリ。



定理十

99. 共通ノ中心線中ノ一點ヲ共有スル二ツノ球面ハ相切ス。

注意. 共有點ガ兩中心ノ間ニ在レバ兩球面ハ**外切**シ,然ラザレバ**内切**スト云フ。

系. 相切スル二球面ノ切點ハ共通ノ中心線中ニ在リ,且此點ニ於テ共通ノ切平面ヲ作ルヲ得。

問題

1. 球面外ノ一點ヨリ此球ヘ引ケル切線ハ皆相等シク,且其切點ハ同一ノ小圓上ニアリ。

2. 二平面又ハ三平面ニ切スル球面ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

100. **定義.** **球帶**トハ平行平面ノ間ニ在ル球面ノ部分ナリ。

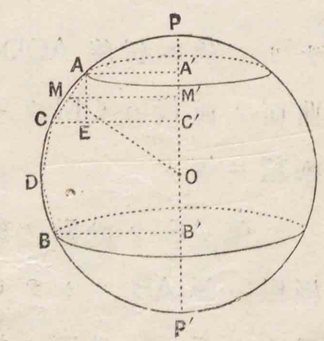
二平面ノ距離ヲ球帶ノ**高サ**ト云フ。

缺球トハ小圓ニテ截リタル球ノ各部分ヲ云フ。

小圓ヲ其**底面**ト云ヒ,其極ト底面トノ距離ヲ其**高サ**ト云フ。

定理十一

101. 球帶ノ面積ハ其高サト大圓ノ周トノ乘積ニ等シ。



[證明] 中心Oナル圓ノ直徑PP′ヲ軸トシ,弧ACBヲ廻轉スレバ一ノ球帶ヲ得ベシ。弧ABヲC, D等ニ於テ若干等分シ,弦AC, CD等ヲ引キ,OヨリACニ垂線OMヲ引キ,又PP′上ニ投ズル

A, M, C, B ノ射影ヲ A′, M′, C′, B′ トセバ A′B′ ハ球帶ノ高サナリ。

先弦 AC ノ廻轉ニヨリテ生ズル曲面ノ面積ヲ求メンニ此面積ハ圓錐臺ノ側面ナル故

$$2\pi MM'.AC$$

ニ等シ(91系壹)。A ヨリ CC′ ニ垂線 AE ヲ引ケバ三角形 ACE, OMM′ ハ等角ナル故

$$\frac{AC}{AE}=\frac{OM}{MM'},$$

$$\therefore \qquad MM'.AC=OM.AE$$

而シテ AE=A′C′ ナル故所要ノ面積ハ

$$\boxed{2\pi OM.A'C'}$$

ナリ。故ニ折線 ACD……B ノ廻轉ニ由テ生ズル曲面ノ面積ハ OM ヲ半徑トセル圓周ト A′B′ トノ乘積ニ等シ。

弧 AB ノ分點ノ數ヲ無限ニ增セバ此折線ノ極限ハ弧 AB ニシテ OM ノ極限ハ球ノ半徑ナリ。又上ニ云ヘル曲面ノ極限ハ球帶ノ面積ナル故球帶ノ面積ハ大圓ノ周ト高サ A′B′ トノ乘積ナリ。

系. 缺球ノ曲面ハ球帶ト見做スヲ得。故ニ其曲面積ハ大圓ノ周ト高サトノ乘積ニ等シ。

定理十二

102. 球ノ面積ハ其直徑ト大圓ノ周トノ乘積ニ等シ

其故ハ球面ハ直徑ヲ高サトセル球帶ト見做スコトヲ得レバナリ。

系壹. 球ノ面積ヲ S トシ,半徑ヲ R トセバ

$$S=4\pi R^2,$$

πr²
2πR 2r

故ニ球面ハ大圓ノ四倍ニ等シ。

系貳. 球ノ面積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ側面積ニ等シ。又其全面積ノ $\frac{2}{3}$ ニ等シ。

定理十三

103. 球ノ體積ハ其面積ト半徑トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

[證明] 球面上ニ無數ノ點ヲ取リ二ツ宛連ネ

テ三角形ヲ作レバ,各面皆三角形ナル多面體ガ此球ニ內接セラレタリト見做スヲ得。而シテ此多面體ノ頂點ヲ球ノ中心ニ連ヌレバ,此多面體ハ無數ノ三角錐ノ和ニ等シト見做スコトヲ得。

而シテ球面上ニ取レル點ノ數ヲ無限ニ增ストキハ此多面體ノ體積ハ球ノ體積ニ近迫シ,其面ノ面積ノ和ハ球ノ面積ニ近迫ス。且此多面體ヲ作レル三角錐ノ高サハ球ノ半徑ニ近迫ス。然ルニ三角錐ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times\text{底}\times\text{高サ}$$

ナリ,故ニ球ノ體積ハ

$$\frac{1}{3}\times\text{球ノ面積}\times\text{半徑}$$

ナリ。

系壹. 球ノ體積ヲVトスレバ

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3。$$

系貳. 球ノ體積ハ之ニ外接スル直圓壔ノ體積ノ$\frac{2}{3}$ニ等シ。　(*Archimedes*).

問題

1. 球ノ半徑ヲ直角ニ二等分スル平面ニテ分タレタル球面ノ二部分ノ比ヲ求メヨ。

2. 直徑一尺ナル球ノ體積ト其外接直圓壔ノ體積トノ差ヲ求メヨ。

附錄一

雜題

1. 平面

1. 共面ナラザル三平行直線ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 所設ノ三點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ所設ノ平面中ニ求メヨ。

3. 三面角ノ三稜ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ。

4. 三面角ノ三面ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. 折面四邊形ノ二邊ニ平行スル平面ハ他ノ二邊ヲ比例ニ分ツ。

6. 三平面ノ三交線ガ互ニ平行ナルトキ其二面ニ垂直ナル平面ハ第三面ニモ亦垂直ナリ。

7. 折面四邊形ノ四角ノ和ハ周角ヨリ小ナリ,

8. 相交ル二平面間ニアル一點Aヨリ此二平面ヘ垂線AB, ACヲ引キ二平面ト夫々B及Cニ於テ會セシムルトキBC線ハ二平面ノ交線ニ垂直ナリ。

9. ABCDガ折線ニシテ角BCDガ直角ナルトキ, ABガ平面BCDニ垂直ナラバCDハ平面ABCニ垂直ナリ。

10. 數多ノ平面ノ交線ガ平行ナレバ任意ノ一點ヨリ是等ノ平面ニ下セル垂線ノ足ハ共面ナリ。

11. 共面ナラザル二直線ノ共通垂線ノ中點ヲ通過シ,此二線ニ平行スル平面ハ此二線ノ間ニ引ケル任意ノ線分ヲ二等分ス。

12. 一直線ガ一平面ニ交リ,其交點ヲ通過スル此面内ノ三直線ト等角ヲ作ルトキ此直線ハ平面ニ垂直ナリヤ否ヤ。

13. 二定點ニ至ル距離ノ平方ノ差ガ既知ノ値ヲ有スベキ點ヲ所設ノ直線中ニ求メヨ。

14. 二定點ニ至ル距離ノ和ガ最小ナル如キ點ヲ之ト共面ナラザル定直線中ニ發見セヨ。

15. 二定點ニ至ル距離ノ差ガ最大ナル如キ點ヲ之ト共面ナラザル定直線中ニ發見セヨ。

16. 三面角O-ABC内ニ線ODヲ引クトキハ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ。

[1] 角 $AOD+BOD+COD$
$$>\frac{1}{2}(BOC+COA+AOB).$$

[2] 角 $AOD+BOD<AOC+BOC.$

[3] 角 $AOD+BOD+COD$
$$<BOC+COA+AOB.$$

17. 直角三角形ノ三頂點ヨリ等距離ニ在ル點ヲ斜邊ノ中點ニ連結スルトキ此線ハ此三角形ノ平面ニ垂直ナリ。

18. 一平面中ノ二直線ガ他ノ平面ト等角ヲ爲ストキ此二直線ハ二平面ノ交線トモ亦等角ヲ爲ス。

19. 一平面中ノ直線ガ他ノ平面ト最大角ヲ作ルトキ此直線ハ此二平面ノ交線ニ垂直ナリ。

20. 平行セル二線分ノ比ハ任意ノ平面上ニ投ズル其射影ノ比ニ等シ。

21. 一定點及數多ノ平行線ヲ設クルトキ,此點ト是等ノ平行線トニテ決定セル諸平面ト任意ノ平面トノ交線ハ集交スルカ,又ハ平行ナリ。

22. 一直線ト之ニ平行スル一平面中ノ諸直線トノ最近距離ハ相等シ。

此定理ノ例外ノ場合ヲ發見セヨ。

23. 一定ノ長サヲ有スル線分ノ兩端ガ夫々共面ナラズシテ且互ニ直交スル二直線ノ上ヲ運動スルトキ其中點ハ定圓周上ニアリ。

24. 任意ノ一點Oヨリ平面Pニ平行スル二直線OA, OBヲ引キ,次ニO點ヲ通過シOA, OBニ垂直ナル二平面ヲ作ルトキ其交線ハP平面ニ垂直ナリ。

25. 動線アリ,恆ニ所設ノ平面ニ平行シ,且二定直線ニ交ル。其交點ノ間ノ線分ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡如何。

26. 直三面角(三面角ヲ作レル三面ガ二ツ宛垂直ナルモノ)ヲ平面ニテ截ルトキ,頂點ヨリ底面マデノ稜ノ長サヲa, b, cトスレバ底面ノ面積ハ

$$\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$$

ナリ。

27. 直三面角ヲ平面ニテ截ルトキ其截面ノ垂心ハ此截面上ニ投ズル頂點ノ射影ナリ。

28. A, Bヲ二點トシ, P, Qヲ二平面トス。AヨリP, Qニ至ル距離ノ和ガBヨリP, Qニ至ル距離ノ和ニ等シキトキハAB線中ノ任意ノ點ヨリP, Qニ至ル距離ノ和モ亦其和ニ等シ。

29. 三定點アリ,各點ヨリ二定平面ニ至ル距離ノ和ガ皆相等シキトキハ此三點ヲ含ム平面中ノ任意ノ點ヨリ此二平面ニ至ル距離ノ和モ亦一定不易ナリ。

30. 三面角ノ各稜ヲ含ミ,其對面ニ垂直ナル三平面ハ同一ノ直線ヲ通過ス。

31. 平面外ノ二定點ヘ引ケル二直線ガ此面ト等角ヲ爲ス如キ此平面中ノ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

2. 多面體

32. 角錐ノ側面積ハ底面積ヨリ大ナリ。

33. 直方體ノ三稜ノ長サヲ a,b,c ニテ表サバ對稜ヲ通過スル截面ノ面積ハ

$$a\sqrt{b^2+c^2},\quad b\sqrt{c^2+a^2},\quad c\sqrt{a^2+b^2}$$

ナリ。又 $a>b>c$ トスレバ最大截面ハ孰レナルカ。又數值ヲ用キズシテ最大截面ヲ發見セヨ。

34. 四面體ヲ其二對稜ニ平行スル平面ニテ截ラバ其截面ハ平行四邊形ナリ。此截面ハ平面ガ稜ノ中點ヲ通過スルトキ最大ナリ。

35. 角錐ヲ其底面ニ平行スル平面ニテ截リ,截面ト底面トノ比ヲ既知ノ比ニ等シクセヨ。

36. 四面體ノ六稜ノ平方ノ和ハ對稜ノ中點ヲ通過スル三稜ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ。

37. 任意ノ四角壔ノ十二稜ノ平方ノ和ハ,四對角線ノ平方ノ和ヨリ大ナルコト,二ツ宛ノ對角線ノ共通ナル中點ヲ連ヌル線分ノ平方ノ八倍ナリ。

38. 四面體ノ各頂點ト對面ノ重心トヲ連ヌル

四直線ハ同一點ニテ交リ,各直線ハ此點ニテ1ト3トノ比ニ分タル。

注意. 此點ヲ四面體ノ重心ト云フ。

[系] 四面體ノ各稜ト對稜ノ中點トヲ通過スル平面ハ同一點ヲ通過ス。

39. 四面體ニ於テ,二雙ノ對稜ガ互ニ垂直ナルトキ,他ノ一雙ノ對稜モ亦互ニ垂直ナリ,又頂點ヨリ對面ニ下セル四垂線ハ集交ス。

[系壹] 各稜ヲ含ミ對稜ニ垂直ナル六平面ハ同一點ヲ通過ス。

[系貳] 三雙ノ對稜ノ共通垂線ハ集交ス。

40. 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過ギ之ニ垂直ナル六平面ハ同一點ヲ通過ス。

41. 四面體ノ各面ノ外心ヲ通過シ各面ニ垂直ナル四直線ハ集交ス。

42. 三角錐ノ底面ガ正三角形ニシテ頂點ニ於ケル各面角ガ何レモ直角ナルトキ,

[1] 三側稜ハ皆相等シ。

[2] 高サノ平方ハ側稜ノ平方ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シ。

[3] 底面中ノ一點ヨリ三側面ニ至ル三垂線ノ和ハ一定不易ナリ。

43. 三角錐 O-ABC ノ頂點 O ニ於ケル面角ガ何レモ直角ナルトキ,

[1] 底面 ABC ハ鋭角三角形ナリ。

[2] H ヲ頂點 O ノ底面 ABC 上ニ投ズル射影ナリトスレバ △AOB ハ △ABC ト △HAB トノ比例中項ナリ。

44. 角壔又ハ角錐ノ截面ノ各邊ト他ノ截面ノ對應邊トノ交點ハ列座ナリ。

之ヨリ次ノ定理ヲ推定セヨ。

二ツノ三角形ノ頂點ガ二ツ宛三ツノ集交線或ハ三ツノ平行線中ニ在ルトキ對應邊ノ交點ハ列座ナリ。

45. 四面體ノ各三面角ニ於テ,其三面ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケバ,是等ノ四直線ハ集交ス。

46. 四面體 ABCD ノ三面角 A ノ内ニ在リテ,其三面ト等角ヲ爲ス直線ト對面 BCD トノ交點ヲ A′ トスレバ,三角形 A′BC, A′CD, A′DB ノ面積ハ面 ABC, ACD, ADB ノ面積ニ比例ス

47. 四面體ノ二對稜ノ中點ヲ通過スル平面ハ他ノ二對稜ヲ比例ニ分ツ。

48. 四面體ノ二對稜 AB, CD ノ中點ヲ E, F トシ此二點ヲ通過スル平面ト他ノ二稜トノ交點ヲ G, H トスレバ直線 EF ハ GH ヲ二等分ス。

49. 四面體ノ二對稜ノ中點ヲ通過スル平面ハ本體ヲ二等分ス。

50. 立方體ヲ平面ニテ截リ,截面ヲシテ正六邊形ナラシメヨ。

51. 四面體內ニ一點ヲ求メ,此點ト各稜トヲ含メル六平面ニテ本體ヲ四等分セヨ。

52. 四面體 ABCD 內ノ一點ヲ O トシ, AO, BO, CO, DO ト面トノ交點ヲ A′, B′, C′, D′ トスレバ

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}+\frac{OD'}{DD'}=1.$$

53. 四面體 ABCD ノ底面 BCD 內ニアル一點 O ヨリ AB, AC, AD ニ平行スル直線ヲ引キ側面ト B′, C′, D′ ニ於テ會セシムルトキ

$$\frac{OB'}{AB}+\frac{OC'}{AC}+\frac{OD'}{AD}=1.$$

54. 三定直線上ニ三稜ヲ有スル平行六面體ヲ作レ。

55. 直方體アリ,其體積 V ニシテ其三稜ハ三數 a,b,c ニ比例スト云フ,三稜ノ長サヲ求メヨ。

56. 角壔ノ直截面ハ他ノ截面ヨリ小ナリ。

57. 四面體ノ重心ヨリ之ヲ截ラザル平面ニ至ル距離ハ四頂點ヨリ同平面ニ至ル距離ノ和ノ四分ノ一ニ等シ。

平面ガ此四面體ヲ截ル場合ヲ考究セヨ。

58. 定直線ヲ通過スル平面ヲ以テ所設ノ平行六面體ヲ二等分セヨ。

59. 定點ヲ通過シ,所設ノ四面體ヲ二等分スル平面ノ位置ヲ求メヨ。

60. 定直線ニ平行シ,所設ノ四面體ヲ二等分スル平面ノ位置ヲ求メヨ。

61. 等面積ヲ有スル直方體ノ中ニテ,立方體ノ體積ガ最モ大ナリ。

3. 三圓體

62. 定長ノ線分ガ其兩端ヲ球面上ニ置キテ動クトキハ其中點ノ軌跡如何。

63. 所設ノ二球又ハ三球ヲ等角ノ下ニ見ル點ノ軌跡如何。

64. 球ノ小圓ヨリ其極ニ至ル大圓弧ノ長サガ象限ノ $\frac{1}{3}$ ナルトキ其小圓ノ半徑ハ球ノ半徑ノ $\frac{1}{2}$ ニ等シ。

65. 所設ノ二線分ヲ直角ノ下ニ見ル點ノ軌跡如何。

66. 三ツノ球面ガ相交ルトキ共通ナル二點ハ三球ノ中心ヲ通過スル平面ニ關シテ對稱ナリ。

67. 二球面ヲ大圓周ニテ截ルベキ球ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

68. 定點 O ヨリ定平面ヘ直線 OA ヲ引キ,之ヲ B 點ニ於テ矩形 OA.OB ガ一定不易ナル如ク分ツトキハ B 點ノ軌跡如何。

*69. 球面三角形ノ三內角ヲ二等分スル大圓弧ハ集交ス。[附錄三ヲ看タル後ニ解ケヨ]。

又二ツノ外角及第三ノ内角ヲ二等分スル大圓弧ハ集交ス。[同上]。

*70. 球面菱形ノ兩對角線ハ互ニ垂直ナリ。[同上]。

71. 缺球ノ曲面積ハ其底面タル小圓ノ周ヨリ極ニ至ル距離ノ平方トπトノ積ニ等シ。

72. 球ニ外接スル直圓壔ノ全面積ト此球ノ面積トノ比如何。又其體積ノ比如何。

73. 球ニ内接スル立方體ノ體積ト此球ノ體積トノ比如何。

74. 球ニ外接スル立方體ノ體積ト此球ノ體積トノ比ヲ求メヨ。

75. 半徑rナル球面ヲ二ツノ缺球面ニ分チ,其大部ガ小部ト全球面トノ比例中項ナルトキ,球ノ中心ヨリ截面ニ至ル距離如何。

76. 等半徑ノ二球ニ外接スル多面體ノ體積ノ比ハ其全面積ノ比ニ等シ。

77. 等側面積ノ二ツノ直圓壔ノ體積ノ比如何。

78. 等體積ノ二ツノ直圓壔ノ側面積ノ比如何。

79. 矩形ノ隣邊ヲ夫々軸トシ,之ヲ回轉シテ生ズル兩圓壔ノ體積ガa立方尺及b立方尺ナルトキ此矩形ノ對角線ノ長サ如何。

80. 直圓壔ノ高サ及全面積ヲ知リテ其底面ノ半徑ヲ求メヨ。

81. 直圓壔ノ底面ニ平行スル平面ヲ以テ之ヲ截リ,其側面ノ二部分ノ比例中項ヲシテ截面ニ等シクセヨ。

82. 三角形ト共面ニシテ,其一頂點ヲ過ギ之ヲ截ラザル直線ヲ軸トシ,此三角形ヲ回轉スルトキ,生ズル所ノ立體ノ體積ハ,此頂點ニ對スル邊ノ回轉ニ由テ生ズル面積ト之ニ應ズル高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

83. 直圓壔ノ側面積ハ其高サト底面ノ直徑トノ比例中項ヲ半徑トセル圓ノ面積ニ等シ。

84. 球扇形(半圓内ノ扇形ガ其直徑ヲ軸トシ,其原位置ニ復歸スルマデ回轉シテ生ズル立體)ノ體積ハ其底面ナル球帶ノ面積ト球ノ半徑トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

85. ABヲ半圓CABDノ弧トシ,直徑CD上ニ投

ズルAB弦ノ射影ヲA′B′トスレバ,CDヲ軸トシ弓形ABヲ回轉シテ生ズル立體ノ體積ハ $\frac{\pi}{6}\overline{AB}^2\times A'B'$ ナリ。

86. 缺球ノ體積ハ

$$V=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2)。$$

ナリ但 r ハ底面ノ半徑ニシテ h ハ其高サトス。又Rヲ球ノ半徑トスレバ

$$V=\pi h^2(R-\frac{1}{3}h)。$$

87. **球分**(平行平面ノ間ニ夾マレタル球ノ部分)ノ體積ハ

$$V=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r^2+3r'^2)$$

ナリ但 r, r' ハ其兩底面ノ半徑ニシテ h ハ其距離卽高サナリ。

88. 直圓錐及直圓壔ノ底面ガ何レモ球ノ大圓ニ等シキトキ圓錐ト球ト圓壔トノ體積ハ三數1, 2, 3ニ比例ス。但高サハ直徑ニ等シトス。

89. 定義. **等邊圓壔**トハ其軸ヲ通過スル截面ガ正方形トナル如キ直圓壔ナリ。

等邊圓錐トハ其軸ヲ通過スル截面ガ正三角形トナル如キ直圓錐ナリ

之ニ依テ次ノ定理ヲ證明セヨ。

[1] 球ニ内接スル等邊圓壔ノ全面積ハ球ノ面積ト内接等邊圓錐ノ全面積トノ比例中項ナリ。體積ニ就キテモ亦然リ。

[2] 球ニ外接スル等邊圓壔ノ全面積ハ球ノ面積ト外接等邊圓錐ノ全面積トノ比例中項ナリ。體積ニ就キテモ亦然リ。

90. 酒造桶ノ口徑ヲ d トシ,底徑ヲ d' トシ,胴徑(高サヲ直角ニ二等分スル截面ノ直徑)ヲ d'' トシ,高サヲ h トスレバ桶ノ體積Vハ大略次ノ如シ

$$V=\frac{\pi h}{24}\{(d+d'')^2+(d''+d')^2-d''(d+d')\}。$$

4. 作圖ノ設問

91. 作圖ニ由テ實球ノ半徑ヲ求メヨ。

[解法] 球面上ノ任意ノ點Pヲ極トシ隨意ニ兩脚器ヲ開キテ圓ABCヲ球面上ニ畫ケ。次ニ兩脚器ヲ以テ距離AB, BC, CAヲ紙面上ニ移シ,之ヲ三邊トシテ三角形A′B′C′ヲ作リ其外接圓ノ中心ヲO′トシ此點ニ於テA′O′ニ垂線P′Q′ヲ引キ, A′

ヲ中心トシ, AP ニ等シキ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ此垂線トP′ニ於テ交ラシメ, A′點ニ於テ A′P′ ニ垂線 A′Q′ ヲ引クトキ P′Q′ ハ球ノ直徑 PQ ニ等シカルベシ。

[系] 實球上ノ大圓周ヨリ其極ニ至ル距離ヲ作圖セヨ。

92. 球面上ノ二定點 A, B ヲ通過スル大圓弧ヲ畫ケ。

[解法] 本題ノ未知件ハ所要ノ圓ノ極Pナリ, 然ルニ此極ヨリ A 及 B ニ至ル距離ハ孰レモ象限弧ノ弦ニ等シキヲ以テ二定點ヲ夫々極トシ,此弦ニ等シキ距離ヲ以テ圓弧ヲ畫ケバ其交點 P ハ所要ノ極ナリ。

注意. 二定點ガ對點ナルトキ補助ノ二大圓ハ合一シ,本題ハ不定トナル。

93. 球面上ノ定點 A ヲ通過シ,且所設ノ大圓弧 BC ニ垂直ナル大圓弧ヲ畫ケ。

[解法] A 點ヲ極トシ,象限ノ弦ニ等シキ極距離ヲ以テ大圓弧ヲ畫キ, P 點ニ於テ BC 弧ヲ截ラシメ,次ニ此點ヲ極トシ同ジ極距離ヲ以テ大圓ヲ畫カバ此圓弧ハ A ヲ通過シ且 BC 弧ニ垂直ナルベシ。

94. 球面上ニ於テ所設ノ大圓弧ヲ直角ニ二等分スベキ大圓弧ヲ畫ケ。

95. 球面上ノ三定點ヲ通過スベキ小圓ノ極ヲ求メヨ。

96. 所設ノ大圓弧ノ上ニ取リタル一點ヲ通過シ,之ト所設ノ角ニ等シキ傾斜ヲ爲スベキ大圓弧ヲ畫ケ。

97. 所設ノ直線ヲ通過シ,所設ノ球ニ切スル平面ヲ作レ。

98. 三定點ヨリ夫々既知ノ距離ニ在ル點ヲ求メヨ。

99. 定直線ヲ通過シテ平面ヲ畫キ,所設ノ球ヲ截リ其截面ノ半徑ヲ既知ノ長サニ等シカラシメヨ。

5. 計算問題

100. 正三角壔アリ,其高サ125糎,底面ノ一邊ノ長サ48糎ナリト云フ,體積如何。 答 124704立方糎。

101. 平行六面體アリ,體積553350立方寸ニシテ底面ノ面積16275平方寸ナリ,其高サヲ算出セヨ。

答 34寸。

102. 立方體アリ,全面積30931·44平方尺ナリ,體積如何。 答 370146·232立方尺。

103. 體積148·877立方糎ナル立方體ノ全面積ヲ問フ。 答 168·54平方糎。

104. 直方體アリ,全面積497·26平方呎ニシテ三稜ノ比ハ3ト4ト5トノ如シ,其三稜ノ長サ如何。

答 69呎, 92呎, 115呎。

105. 立方體ノ對角線ノ長サ35尺ナルモノノ全面積及體積如何。答 約2450平方尺, 8251立方尺。

106. 正四角錐アリ,底ノ一邊ノ長サ345呎ニシテ高サ452呎ナリ,其全面積ヲ求メヨ。

答 約452800平方呎。

107. 直方體ノ水槽アリ,長サ六尺五寸,幅三尺二寸,深サ二尺八寸ナリ,容量ヲ勺マデ求メヨ。

答 8石9斗8升3合9勺。

108. 石盤アリ,長サ0·27米,幅0·154米,厚サ0·008米ナリ,其體積ヲ立方糎ニテ表セヨ。

答 332640立方糎。

109. 長サ5·20米,幅2·18米,高サ1·54米ナル水槽ニハ幾立ノ水ヲ容ルベキカ。

但一立ハ一立方粉ナリ。 答 17457·44立。

110. 前題ニ於ケル水ノ重量幾瓩ナルカ。

但一瓩ハ一立方粉ノ水ノ重サナリ。

答 17457·44瓩。

111. 三角錐アリ,高サ2·04尺ニシテ底面ノ三邊ノ長サハ4寸ト5寸ト6寸トナリ,體積如何。

答 67·47立方寸。

112. 直圓壔形ノ水桶アリ,高サ1·25米,底面ノ半徑0·35米ナリ,此容器ノ重量ヲ1·24瓩トセバ滿水セシトキノ全重量如何。[$\pi=3·1416$]。 答 482·3瓩。

113. 長サ1·72米,幅1·03米,厚サ0·685米ナル大理石ノ體積及重量ヲ求メヨ。

但大理石ノ比重ハ2·717ナリ。

答 $\begin{cases}\text{體積 1·2135立方米。}\\ \text{重量 3297瓩餘。}\end{cases}$

注意. 物體ノ重サヲPトシ,體積ヲVトシ比重ヲDトセバP=V.D.

114. 水銀ヲ充シタル壜アリ,其全重量21·348瓩ニシテ壜ノ重サハ1·5瓩ナリ。壜ノ容量如何。

但水銀ノ比重ハ13·598ナリ。 答 約1·46立.

115. 地球ノ面積ヲ概算セヨ。

[解] 地球ノ大圓周ハ凡四萬粁ナル故其直徑ハ $\frac{40000}{\pi}$ 粁ナリ。故ニ其面積ハ $\pi\left(\frac{40000}{\pi}\right)^2$ 平方粁即50929萬平方粁ナリ。

116. 地球ノ半徑ハ凡幾粁ナリヤ。 答 6366粁.

117. 地球ノ體積ヲ概算セヨ。

答 108×10^{10}立方粁.

118. 面積一平方尺ナル球ノ半徑ヲ算出セヨ。

答 0·282尺.

119. 缺球狀ノ鍋アリ,口徑二尺四寸,深サ九寸ナリ,其容量ヲ勺マデ算出セヨ。答 3斗7升2合9勺.

120. 鑄鐵球アリ,其重量36瓩ナリ,其直徑如何。

但鑄鐵ノ比重ハ7·2トス。 答 21·4糎.

121. 黃金ノ薄板アリ,長サ15糎,幅8糎,重サ12瓦ナリ,厚サヲ算出セヨ。

但黃金ノ比重ハ19·26ナリ。 答 0·0052糎.

122. 等邊圓錐ノ底面ノ半徑2·5寸ナルトキ其內接球ノ體積如何。 答 12·56立方寸.

123. 直徑48糎ナル直圓壔形ノ容器ニ水ヲ入レタルアリ,或物體ヲ其中ニ沈メタルニ水ノ上昇スルコト57粍ナルヲ見タリ,此物體ノ體積ヲ求メヨ。

答 10314·5立方糎.

124. 前題ノ容器中ニ黃銅製ノ小彫刻像ヲ投入セシニ水ノ上昇スルコト26粍ナリ。此像ノ重サヲ求ム。

但黃銅ノ比重ハ8·4ナリ。 答 39·5瓩.

125. 月ノ半徑ハ地球ノ半徑ノ $\frac{31}{114}$ ナリトスレバ其體積ノ比ハ殆 $\frac{1}{49}$ ナルコトヲ證セヨ。

附錄二

正多面體

1. 定義. 正多面體トハ其面皆合同ナル正多角形ニシテ其多面角モ亦皆合同ナルモノナリ。

定理一

2. 正多面體ハ五種ヨリ多カラズ。

[證明] 正多面體ノ多面角ハ皆互ニ合同ニシテ,且其各面角ハ正多角形ノ角ニ等シキヲ要ス。然ルニ正三角形ノ一角ハ一直角ノ$\frac{2}{3}$ナル故,正三角形ヲ面トシテ作リ得ベキ多面角ハ唯三種ニ止ル,即三面角ト四面角ト五面角ト是レナリ,而シテ之ヨリ多クノ面ヲ有スル多面角ハ面角ノ和ガ四直角ヨリ小ナラザルガ故作リ得ベカラズ。

正方形ノ一角ハ一直角ナル故之ヲ以テ唯一種ノ多面角即三面角ヲ作ルコトヲ得。

正五角形ノ一角ハ$\frac{6}{5}$直角ナルガ故之ヲ以テ唯一種ノ多面角即三面角ヲ作ルコトヲ得。

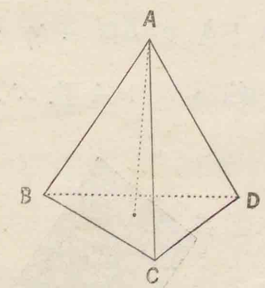
正六角形ノ一角ハ$\frac{8}{5}$直角ナル故之ヲ以テ多面角ヲ作ルコトヲ得ズ。之ヨリ多キ邊數ノ正多角形ニ就テモ亦然リ。故ニ正多面體ハ唯五種アルコトヲ得。

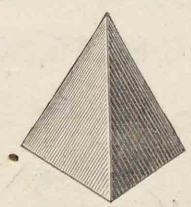
設　問

3. 正多面體ヲ作ルコト

[1] 正四面體.

正三角形BCDノ中心ヨリ其面ニ垂線ヲ引キ



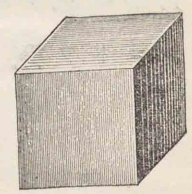


其中ニA點ヲ求メAB=BCナラシムレバAC, ADモ亦BCニ等シク,四面體ABCDノ面ハ皆合同ナ

ル正三角形ナリ。且此四面體ノ四頂點ニ於ケル三面角ハ皆面角ヲ等シクスル故合同ナリ。故ニ此立體ハ正多面體ナリ。之ヲ正四面體ト云フ。

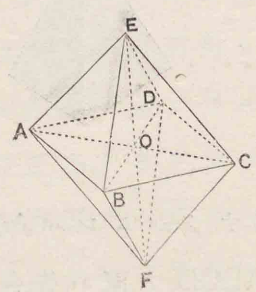
[2] 正六面體.

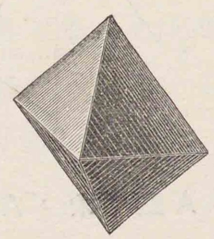
直角平行六面體ノ各面正方形ナルモノヲ作ルトキハ之レ正多面體ナリ。之ヲ正六面體ト云フ。卽立方體ナリ。



[3] 正八面體.

ABCD ヲ正方形トシOヲ其中心トセヨ。Oヲ通過シ正方形ノ平面ニ垂直ナル直線ヲ引キ,其中ニ二點 E, F ヲ求メ, EA, FA ヲ AB ニ等シクシ, EB, EC, ED, FB, FC, FD ヲ連ヌルトキ生ズル所ノ



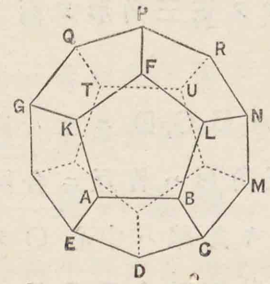


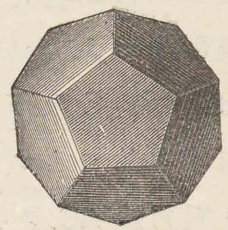
立體 E-ABCD-F ハ八ツノ正三角形ヲ面トスル正多面體ナリ。

[證明] E 及 F ヨリ A, B, C, D ニ至ル直線ハ皆相等シ,故ニ八ツノ正三角形ハ皆互ニ合同ナリ。次ニ對角線 AC ヲ引クトキ此線ハ中心 O ヲ通過シ, EF モ亦 O ヲ通過スル故四點 A, E, C, F ハ共面ナリ。又三角形 AEC, ABC, AFC ハ三邊ヲ等シクスル故合同ニシテ,角 ABC ハ直角ナル故 AEC, AFC モ亦直角ナリ。故ニ AECF ハ ABCD ニ等シキ正方形ナリ。故ニ B ニ於ケル多面角ハ E ニ於ケル多面角ト合同ナリ。他ノ頂點ニ於ケル多面角モ亦同樣ニ之ト合同ナリ。故ニ立體 E-ABCD-F ハ正多面體ナリ。之ヲ正八面體ト云フ。

[4] 正十二面體.

正五角形 ABCDE ヲ底面トシ,之ト合同ナル五ツノ正五角形ヲ其邊ニ接合シ, A,B,C,D,E ニ於テ夫々三面角ヲ作ルトキ,其面角ハ皆相等シ故ニ五個ノ三面角ハ合同ナリ。故ニ AK, BL, CM,…… ニ沿ヘル二面角ハ AB,BC,CD,…… ニ沿ヘル二面角

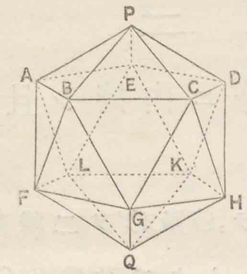


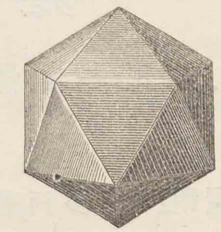


ニ等シ。次ニ平面 NLF, FKG,……ヲ作リ, FP, GQ, ……ヲ其交線トスルトキ L, K,……ニ於ケル三面角ハ二ツノ面角及其夾メル二面角ヲ等シクスルヲ以テ A ニ於ケル三面角ニ等シ,故ニ NLF, FKG,……ハ皆正五角形ノ一角ニ等シ。故ニ五ツノ正五角形ヲ完成スルトキハ正五角形 PRUTQ ヲ生ズ,是レ三面角 P ヲ三面角 A ニ重子,面 FPQ ヲ面 EAK ニ重ヌルトキ PRUTQ ハ明カニ ABLFK ニ重ナレバナリ。故ニ之ヲ閉塞スレバ正多面體ヲ得。之ヲ正十二面體ト云フ。

[5]　正二十面體.

正五角形 APCGF ノ中心ヨリ引ケル垂線中ニ B 點ヲ求メ, AB=AP ナラシメ,此點ヲ P, C, G, F ニ連ヌルトキハ正五角錐ヲ得。又三角形 PBG.





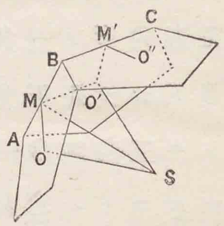
PCG ハ三邊ヲ等シクスル故合同ニシテ,角 PBG ハ正五角形ノ一角 PCG ニ等シ,故ニ PB, BG ヲ二隣邊トシテ正五角形 PBGHD ヲ作リ CD, CH ヲ引クトキ五角錐 C－PBGHD ガ初メノ正五角錐ト合同ナルコトハ容易ニ證明シ得ラル。次ニ G 點ニ於テ五角錐 G－FBCHQ ヲ完成スルトキハ十個ノ正三角形ヨリ成レル折面ヲ得,然ラバ A, P, D, H, Q, F ニ於ケル面ノ數ハ順次ニ 2, 3, 2, 3, 2, 3 ニシテ三點 B, C, G ニ於テ集ル稜角ハ皆相等シ。

別ニ上ニ云ヘル折面ト合同ナル第二ノ折面ヲ作リ,之ヲ裏返シテ其境界ヲ第一ノ折面ノ境界タル折線 APDHQF ニ接合スベシ。然ラバ A, P, D,…… ニ於ケル五面角ハ皆 B ニ於ケル五面角ト合同ナルコト明カナリ。斯クシテ得ラレタル立體 PQ ヲ正二十面體ト云フ。

定理二

4. 正多面體ハ球ニ内接シ且外接ス。

[證明] 正多面體ニ於テ,O及O′ヲ二隣面ノ中心トシ,ABヲ其交線トスルトキ,二點O及O′ヨリABニ垂線ヲ引ケバ同一ノ點Mニ於テ會スベシ,又各平面ニ垂線ヲ引ケバ,此二垂線ハ面ノ頂點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナル故,平面OMO′中ニアル一點Sニ於テ相交ルベシ。然ラバ直角三角形MOS, MO′Sハ共通ノ斜邊ヲ有シ,且OM=O′Mナル故合同ナリ。然ルニ角OMO′ハ二面角ABノ平面角ナル故何レノ二隣面ニ就テモ一定ニシテ,其半ナル角OMS,從テ△OMSモ亦一定ナリ。



次ニ第二ノ面トBCニ於テ隣接セル第三ノ面ヲ考フルニ其中心O″ヨリ其面ニ垂直ニ引ケル直線ハ又S點ニ於テO′Sニ會ス,其故ハ△O″M′Sハ△OMSト合同ナレバナリ。

順次同法ヲ行フトキハ,正多面體ノ總テノ面ノ中心ヲ通過スル垂線ハ皆同一ノ點Sニ於テ集交シ,此點ハ總テノ面ヨリ等距離ニシテ,且總テノ頂點ヨリモ等距離ナルコトヲ知ルベシ,故ニSヲ中心トシSAヲ半徑トスル球ハ多面體ノ總テノ頂點ヲ通過ス,卽之ニ外接ス。又Sヲ中心トシSOヲ半徑トスル球ハ多面體ノ總テノ面ノ中心ニ於テ之ニ切ス,卽之ニ内接ス。

注意. Sヲ多面體ノ中心ト云ヒSAヲ其半徑ト云フ。

正多面體ノ面ノ數ヲFトシ,各面ノ邊ノ數ヲnトシ,頂點ノ數ヲVトシ,各頂點ニ會スル稜ノ數ヲmトシ稜ノ數ヲEトスレバ次表ノ如シ。

	F	n	V	m	E
正四面體	4	3	4	3	6
正六面體	6	4	8	3	12
正八面體	8	3	6	4	12
正十二面體	12	5	20	3	30
正二十面體	20	3	12	5	30

問　題

1. 正多面體ハ之ヲ其面ト同數ノ正多角錐ニ分ツコトヲ得.

2. 正四面體ノ稜ノ長サ a 尺ナルトキハ其高サ,全面積及體積如何.

3. 正四面體ノ內ニアル一點ヨリ其四面ニ至ル距離ノ和ハ一定不易ナリ.

4. 正四面體ノ對稜ハ互ニ垂直ニシテ,其中點ヲ連ヌル直線ハ其共通垂線ナリ.

5. 各稜ノ長サ a 尺ナル正四面體ノ內接球及外接球ノ半徑ヲ求メヨ.

6. 各稜ノ長サ a 尺ナル正八面體ノ體積ハ $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ 立方尺ナリ.

7. 正多面體ノ面ノ數ト頂點ノ數ト稜ノ數トヲ順次ニ F, V, E トシ各面ノ邊數ヲ n トシ,各頂點ニ會スル稜ノ數ヲ m トスレバ

$$2E=nF=mV.$$

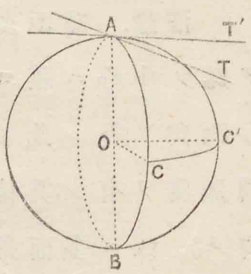
8. 正多面體ノ體積ハ其全面積ト內接球ノ半徑トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

附錄三

球面多角形

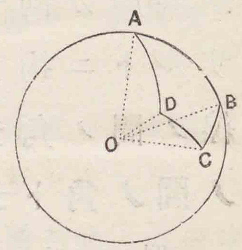
1. 定義. 二圓周ガ相交ルトキ,其兩圓周ガ同一ノ平面中ニアルトアラザルトニ拘ラズ其交點ニ於ケル各切線ノ間ノ角ヲ此交點ニ於ケル**二圓周ノ間ノ角**ト云フ.

例ヘバ球ノ二ツノ大圓弧 ACB 及 AC′B ノ間ノ角トハ A ニ於ケル各切線ノ間ノ角 TAT′ ナリ. 故ニ此角ハ此二ツノ大圓弧ノ平面ノ間ノ二面角ト同測度ヲ有ス.



注意. O ヲ中心トシ, AC, AC′ ヲ象限弧トスレバ OC, OC′ ハ夫々 AT, AT′ ニ平行ナル故,角 COC′=TAT′ ナリ,故ニ弧 CC′ ハ此二ツノ大圓弧ノ間ノ角ヲ測ル.

2. 定義. 球面多角形トハ三ツ以上ノ大圓弧ニテ圍マレタル球面ノ部分ナリ。其弧ヲ此多角形ノ**邊**,其弧ノ間ノ角ヲ此多角形ノ**角**,其弧ノ交點ヲ此多角形ノ**頂點**ト云フ。



球面多角形ニハ其邊數ニ從テ**球面三角形**,**球面四角形**等ノ名アリ。例ヘバ ABCD ハ球面四角形ナリ。

注意. 球面多角形ノ頂點ヲ球ノ中心ニ連ヌルトキハ此中心ヲ頂點トスル多面角ヲ得。此多面角ノ面角ハ此多角形ノ邊ト同測度ヲ有シ,其稜角ハ此多角形ノ角ト同測度ヲ有ス。故ニ多面角ノ性質ヨリ容易ニ球面多角形ノ性質ヲ導キ出スコトヲ得。

3. 定義. 二ツノ球面多角形ノ邊及角ガ互ニ相等シキモ其順序相反對セルトキ兩形ハ**對稱**ナリト云フ。

二ツノ球面多角形ノ頂點ガ互ニ對點ナルトキ兩形ハ**對頂**ナリト云フ。

次ノ定理ハ多面角ノ性質ヨリ容易ニ證明シ得ベシ。

[1] 對頂球面多角形ハ對稱ナリ。

[2] 球面三角形ノ二邊ガ相等シケレバ其對角モ亦相等シ。逆モ亦眞ナリ。

[3] 二ツノ對稱等脚球面三角形ハ合同ナリ。

[4] 對稱球面三角形ハ等積ナリ。

[三頂點ヲ通過スル小圓ノ極ヨリ三頂點ニ至ル大圓弧ヲ引カバ三ツノ等脚三角形ヲ得ベシ]。

[5] 球面三角形ノ三角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。

[球面三角形ノ三角ノ和ト二直角トノ差ヲ其**球面過剩**ト云フ]。

定理一

4. 球面三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

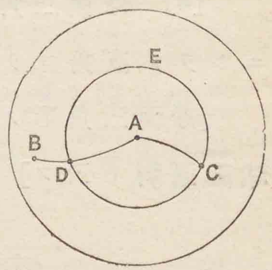
[證明] 球面三角形ノ三頂點ヲ球心ニ結ベバ, 球心ヲ頂點トスル三面角ヲ得,而シテ頂點ニ於ル三面角ノ各面角ハ他ノ面角ノ和ヨリ小ナリ。故ニ一邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ。

系. 球面三角形ノ一邊ハ他ノ二邊ノ差ヨリ大ナリ。

定理二

5. 球面中一點ヨリ他ノ一點ニ至ル最短キ途ハ此二點ヲ過グル大圓ノ劣弧ナリ。

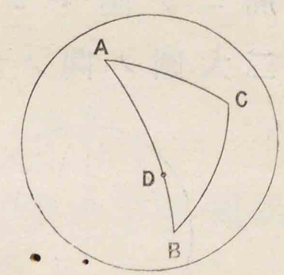
[證明] 二段ニ分チテ之ヲ證明セントス。



I. A,B,C ヲ球面中ノ三點トシ A,B 間ノ大圓弧(劣弧トス,以下皆同ジ)ハ A,C 間ノ大圓弧ヨリ大ナリトセヨ。然ルトキハ球面中AヨリBニ至ル最短キ途ハAヨリCニ至ル最短キ途ヨリ大ナルベシ。何トナ

レバAヲ中心トシテAヨリCニ至ル最短キ途ヲ球面ニ沿ヒテ回轉スルトキCハ小圓或ハ大圓ノ弧CDEヲ畫キAトBトハ此圓弧ノ兩側ニ分レAヨリBニ至ル最短キ途ガ如何ナル形ヲ取ルトモ必此圓弧ト一點Dニ於テ交ルベシ。而シテAヨリCニ至ル最短キ途トAヨリDニ至ル最短キ途トハ其長サ相等シカルベシ。故ニAヨリBニ至ル最短キ途ハAヨリCニ至ル最短キ途ヨリモ,DヨリBニ至ル最短キ途ダケ長シ。

II. 球面上AヨリBニ至ル大圓弧ADB外ノ一點Cヲ過グルト假定セヨ大圓弧ADヲ大圓弧ACニ等シク截ルトキAヨリDニ至ル最短キ途ハAヨリCニ至ル最短キ途ト等シク且大圓弧 $DB<BC$ ナルガ故ニDヨリBニ至ル最短キ途ハCヨリBニ至ル最短キ途ヨリ小ナリ。故ニAヨリBニ至ル大圓弧ADB外ノ一點Cヲ過グルトセバ此ヨリ更ニ短

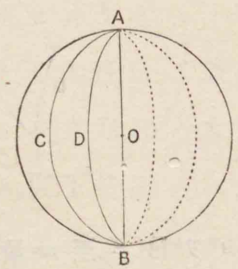


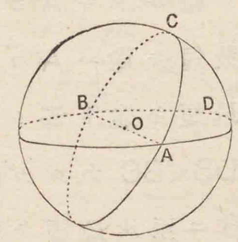
キ途存在ス。故ニAヨリBニ至ル最短キ途ハ大圓弧ADBナラザルベカラズ。

6. 定義. 三角ガ皆直角ナル球面三角形ヲ三直球面三角形ト云フ。

三直球面三角形ノ面積ハ全球面ノ$\frac{1}{8}$ナル故,其測度ハ$\frac{1}{2}\pi R^2$ナリ。故ニ任意ノ球面三角形ノ面積ヲ知ルニハ之ト三直球面三角形ノ面積トノ比ヲ知ラバ足レリ。今此比ヲ求ムル方法ヲ段階ヲ履ミテ説キ示サントス。

7. 定義. 月形トハ二大圓ノ半圓周ニテ圍マレタル球面ノ部分ナリ。二大圓ノ間ノ角ヲ月形ノ角ト云フ。





例ヘバACBDAハ月形ニシテ二大圓弧AC, ADノ間ノ角ハ月形ノ角ナリ。

定理三

8. 同球又ハ等球ニ於テ,等角ヲ有スル二ツノ月形ハ合同ナリ。

系壹. 同球又ハ等球ニ於テ二ツノ月形ノ比ハ其角ノ比ニ等シ。

系貳. 月形ト球面トノ比ハ其角ト四直角トノ比ニ等シ。

系叄. 月形ノ面積ハ其角ノ二倍ト測度ヲ同ジクス。但三直球面三角形ヲ面積ノ單位トシ直角ヲ角ノ單位トス。

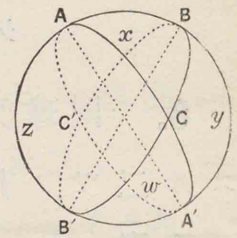
定理四

9. 球面三角形ノ面積ハ其球面過剩ト測度ヲ同ジクス。

但三直球面三角形ヲ面積ノ單位トシ直角ヲ角ノ單位トス。

[證明] ABCヲ球面三角形トシ,頂點ノ對點ヲ

A', B', C' トシ,半球 $ABA'B'C$ 上ニ於ケル三角形 ABC, $A'BC$, $AB'C$, $A'B'C$ ノ測度ヲ順次ニ x, y, z, w トセバ



$$x+y= 月形A=2A,$$

$$x+z= 月形B=2B.$$

又對頂球面三角形 $A'B'C$, ABC' ハ等積ナル故

$$x+w= 月形C=2C,$$

故ニ $$2x+(x+y+z+w)=2(A+B+C).$$

然ルニ $x+y+z+w$ ハ半球ノ測度ナル故4ニ等シ.

$$\therefore \quad x=A+B+C-2.$$

系. 球面多角形ノ面積ノ測度ヲ S トシ,邊數ヲ n トシ,角ノ測度ノ和ヲ s トセバ

$$S=s-2(n-2).$$

問題

1. 半徑一尺ナル球面上ニ球面三角形アリテ,三角ノ大サ $100°, 120°, 110°$ ナリ,其面積如何.

2. 球面四角形アリ,其角ノ大サ $120°, 130°, 140°, 150$ ニシテ球ノ半徑五寸ナリ,其面積如何.

林氏立體幾何學
定價金五拾錢

明治卅七年七月廿五日印刷
明治卅七年七月廿八日發行
明治卅八年一月十四日訂正再版發行
明治卅九年十月三十日訂正三版發行
明治卅九年十二月廿一日訂正四版印刷
明治卅九年十二月廿四日訂正四版發行

編纂者 林鶴一
發行者 東京市小石川區小日向水道町七十三番地 西野虎吉
發賣者 大阪市東區北久寶寺町四丁目百六番屋敷 三木佐助
印刷者 東京市京橋區築地三丁目十一番地 野村宗十郎
發行所 東京市小石川區小日向水道町七十三番地 東京開成館 【振替貯金口座】第五參貳貳番
發行所 大阪市心齋橋通北久寶寺町角 大阪開成館 【振替貯金口座】第貳壹六〇番

(株式會社東京築地活版製造所印刷)