責

明治三十九年一月十一日
文部省檢定濟

修訂 平面幾何學教科書

全

理學士高橋豐夫
編纂

東京
學海指針社

緒　　　言

本書ハ中學校及ビ之ト同程度ノ諸學校ニ於ケル敎科書ニ充テンガ爲メニ編述セルモノナリ.

從來最モ多ク行ハレタル幾何學書ノ甚ダ良好ナルハ固ヨリ論ナシ. 然レドモ幾多ノ數學敎師ノ言フ所ト余ノ經驗トニ徵スルニ其書ハ適切ナルモノト信ズルコト能ハザルヲ遺憾トス. 蓋シ其書ハ餘リニ論理ノ嚴格ナランコトニ重キヲ置クノ結果所論往々高尙トナリ生徒ノ年齡學力ニ相應セズ爲メニ斯學ヲ修ムルノ目的ヲ達スルコト能ハザルノミナラズ却テ彼等ノ腦力ノ發達ヲ障碍スルナキカノ疑ナキヲ得ズ　又其一小部分ノ他ハ一切記號ヲ用ヰズ總テ言語ノミヲ以テ論ズルニ據リ所論甚ダ冗長トナリ大ニ了解ニ苦マシムルコト多シ. 之ニ反シテ適宜ニ記號ヲ用ヰルトキハ論理ノ嚴正ヲ失ハズ而カモ論證極メテ簡明トナリ又記號ニテ記シタルモノハ最モ見易キヲ以テ之ヲ口述シテ耳ヨリ入ルト同時ニ之ヲ見テ眼ヨリモ入ルガ故ニ記載ノ事項ヲ腦裡ニ印スルコト早ク且ツ深キハ他ニ比シテ更ニ大ナルコト言ヲ俟タズ. 幾何學ニ於テ記號ヲ採用スルコトハ代數學トノ混同ヲ生ジ且ツ論理ノ脈絡ヲ中斷スルノ慮アリトノ論アレドモ其記號若ク

ハ式ヲロ述シ論證スルニ當リテハ無論幾何學ニ於ケル所定ノ言語ヲ用ヰ幾何學上ノ論法ニ據ルベキヲ以テ前述ノ如キ虞ハ毫モ之レアラザルベシ.

以上ノ所信ニ依リ余ハ本書ヲ編スルニ當リ(第一)比例論ニ於テ「ゆーくりっど」流ノ挿ミ合ヒノ論法ヲ排シ代數學ニ於ケル比例論ヲ採用セリ(第二)前後ノ關係ノ許ス限リ記號及ビ式ヲ採用セリ(第三)面積ノ論ニ於テハ或單位ヲ以テ計リタル數ニ付キテ論ジ且ツ計算問題ヲ諸所ニ挿入シテ幾何學ノ趣味ヲ與ヘ併セテ斯學ト算術及ビ代數學トノ關係ヲ知ラシムルコトヲ勉メタリ(第四)問題ノ配置ハ其最モ平易ナルモノヲ編中諸所ニ挿入シ次ニ每編ノ全般ニ關スルモノヲ其編ノ終リニ集メ而シテ稍困難ナルモノハ補習雜問題トシテ卷末ニ附セリ(第五)定理及ビ作圖題解法ノ證明ハ往々之ヲ省略セリ是生徒ヲシテ自ラ之ヲ補充セシメンガ爲ナリ

余ハ本書編纂ニ深ク注意シタリト雖モ改良スベキ點少カラザルベシ讀者幸ニ忠言ヲ吝マズ編者ニ本書改良ノ便ヲ得シメバ豈啻編者ノ幸ノミナランヤ。終リニ余ハ友人澤山勇三郎君ニ向テ深ク謝セザル可カラザルモノアリ君ハ周到綿密ナル注意ヲ以テ編纂中屢々有益ナル助言ヲ與ヘラレタレバナリ

明治三十八年七月　　高橋豐夫識

修　訂

平面幾何學教科書

目次

修訂

平面幾何學教科書

總論

1. 定義 **立體**は空間の有限なる部分なり.

立體は大さ即ち長さ幅及び厚さを有す.

總テノ物體ハ空間中ニ在リテ其一部分ヲ充塞スルモノナリ. 物體ヲ組織スル所ノ物質及ビ物質ニ屬スル性質(重サ硬度ノ如キモノ)ニ毫モ關係スルコトナク唯其充塞スル場所ノ形,大サ及ビ位置ノミニ付キテ考フルトキハ吾人ノ所謂立體ヲ得.

2. 定義 **面**は立體の限界なり.

面は長さ及び幅を有すれども厚さを有せず.

例ヘバコヽニ一ツノ立方アレバ此立方ガ充塞スル空間ノ一部分ニ限界ナカルベカラズ. 此限界ハ即チ立方ノ面ナリ. 而シテ此面ハ立方ト之ヲ圍

繞スル空間トノ境界ナルヲ以テ厚サヲ有セザルコト明カナリ.

3.　定義　線は面の限界なり.

線は長さを有すれども幅及び厚さを有せず. 二面の相交はる所は線なり.

例ヘバ立方ノ一ツノ面ヲ截テ二ツトナストキハ其各部ノ限界ナル切リ目ハ線ナリ. 而シテ此線ハ兩部ニ共通ナル境界ニシテ何レノ部分ニモ屬セザルモノナルヲ以テ幅ヲ有セザルコト明カナリ.

4.　定義　點は線の限界なり.

點は唯位置を有するのみにして大さなし. 二線の相交はる所は點なり.

5.　定義　直線とは任意に其一部分を取り其兩端を他の何れの一部分の上に如何樣に置くも全く相合する線なり.

今一條ノ絹絲ヲ取リ其兩端ヲ手ニ持チテ之ヲ緊張スルトキハ絲ハ或特種ノ形ヲナス. 今此絲ノ太サ漸々減少シテ止ムコトナク終ニ其長サト形トノミヲ殘シテ太サハ全ク消滅セ

ツト假想スルトキハ吾人ノ所謂直線ヲ得.

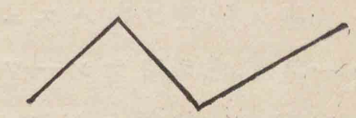
直線ハ雙方ヘ限リナク延長セルモノト考フルコトヲ得.

特ニ其一部分ヲ考フルトキハ之ヲ**有限直線**ト稱ス

例題　直線ノ例ヲ擧ゲヨ.

6.　定義　折線とは若干の直線の接續せるものなり.

例題　折線ノ例ヲ擧ゲヨ.



注意　本書ニ於テハ直線ヲ略シテ單ニ線ト稱スルコトアリ.

7.　定義　平面とは其上に任意に取りたる二點を結び付くる直線が全く其面上に在るものなり.

精良ナル平面鏡ノ表面ハ平面ナリ. 正シク直線ヲ成セル定規ノ緣ヲ斯ノ如キ鏡面上ニ置クトキハ其緣ト面トハ常ニ相密着シテ其間ニ少シノ空隙モアラザルベシ.

例題　平面ノ例ヲ擧ゲヨ.

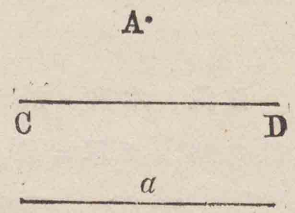
8.　定義　圖形とは立體,面,線及び點又は其集合なり.

平面圖形とは同一平面上に在る圖形なり.

9. **定義** **平面幾何學**は平面圖形の形,大さ及び位置に付きて論ずる學科なり.

10. 點ノ位置ヲ圖上ニ顯ハスニハ一ノ黒點ヲ以テシ之ニ近ク置キタル一文字ヲ以テ之ヲ示ス.

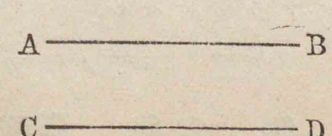
線ノ位置ヲ顯ハスニハ一ノ黒條ヲ以テシ一ツノ文字或ハ其線上ノ點ニ命ジタル二ツノ文字ヲ以テ之ヲ示ス.



點A,線CD又ハ線aトイフガ如シ.

11. **定義** 一つの直線を取り之を他の一つの直線の上に重ぬるとき其兩端が夫々相合すれば此二直線は**相等シ**といふ.

直線AB ヲ取リテ直線CD ノ上ニ重ネ其一端ナル點A ヲ CD ノ一端ナル點C ノ上ニ置キ他ノ端ナル點B ト點D トガ點C



ノ同ジキ側ニ在ル樣ニ置クトキニ若シ點B ガ點D ノ上ニ落ツレバ二直線AB, CD ハ長サ相等シトイヒ又ハ單ニ此二直線ハ相等シトイフ. 之ヲ下ノ如ク記ス.

$$AB=CD$$

上述ノ如ク爲ストキニ若シ點B ガ點C ト點D トノ間ニ落ツレバ AB ハ CD ヨリ小ナリトイヒ又ハ CD ハ AB ヨリ大ナリトイフ. 之ヲ下ノ如ク記ス.

$$AB<CD \qquad CD>AB$$

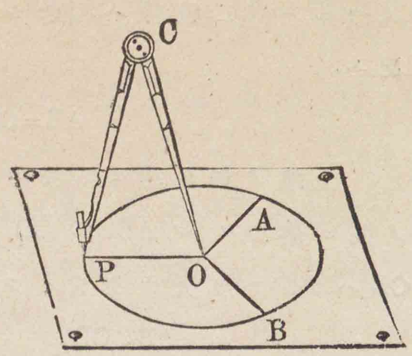
注意 一線ヲ取リテ他ノ一線ニ重ヌルトキ其兩端夫々相合スレバ二線相等シク若シ相合セザレバ一線ハ他ノ一線ヨリ大ナリトイヘリ. 然レドモ斯ノ如ク二線ヲ相重ヌルコトヲ實行セザルモ「コムパス」ヲ用キテ二線ノ相等シキヤ否ヤヲ知ルヲ得ベシ. 即チ「コムパス」ノ兩脚端ガ丁度A トB トニ當タル樣ニ其兩脚ヲ開キ其儘之ヲ線 CD ノ上ニ移シ兩脚端ガ夫々C トD トニ合スルヤ否ヤヲ見ルベシ. 若シ相合スレバ AB ハ CD ニ等シク相合 ザレバAB ハCD ニ等シカラズ. AB ハ CD ニ等シカラズトイフコトヲ下ノ如ク記スルコトアリ.

$$AB\neq CD$$

12. **定義** 二點間の**距離**とは此二點

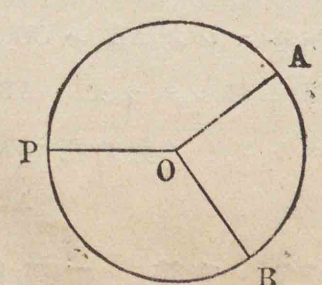
を兩端と爲すところの直線の長さなり.

13. 今適宜ニ「コムパス」ノ兩脚ヲ開キ其一脚ノ端ヲ紙面上ノ一點Oニ据エ置キ其開キノ變ラザル樣ニCPヲCOノ周リニ回轉シPニ附着セル鉛筆ノ尖頭ヲシテ紙面上ニ滑走セシムレバABPノ如キ一線ノ生ズルヲ見ルベシ. 此回轉中「コムパス」ノ開キハ終始變ラザルヲ以テ點OヨリABP上ノ任意ノ點A, B, P等ニ至ル距離皆相等シキコト明カナリ.



14. 定義 **圓**とは一線を以て圍みたる平面圖形にして其内の或一點より其線へ引ける直線皆相等しきものなり. 此點を圓の**中心**と稱す.

15. 定義 **圓周**或は周とは圓を圍むところの線なり.



[13] ニ於テ述ベタルガ如クニシテ書キタル線ABPハ圓周ナリ.

16. 定義 **半徑**とは圓の中心より圓周へ引ける直線なり.

點Oハ圓ノ中心ニシテOA, OB等ハ半徑ナリ.

例題 圓周ノ例ヲ擧ゲヨ.

17. 定義 一つの圖形を取り他の一つの圖形の上に重ぬるとき全部全く相合すれば此二つの圖形は**全ク相等シ**といひ又は**全等ナリ**といふ.

凡て圖形は其形と大さとを變ずることなくして其位置を變ずることを得べきものとす.

注意 一ツノ圖形ヲ取リテ他ノ圖形ニ重ヌルコトハ實地ニ之ヲナスノ要ナシ唯カクナシタルモノト假想スレバ足レリ.

18. 定義 **公理**とは證明を要せずして眞なることの明かなる眞理なり.

例ヘバ「量A=量B及ビ量A=量C ナルトキハ量B=量C ナリ」即チ「同一ナル量ニ等シキ量ハ相

等シ」ハ一ツノ公理ナリ. [11] ニ於テ AB, CD ナル二線ガ各」同一ノ距離(「コムパス」ノ兩脚端ノ間ノ距離) ニ等シキトキハ此二線ハ相等シトイヘルハ即チ上ノ公理ノ適用ナリ.

廣く有らゆる種類の量に適用すべき公理を**普通公理**と稱す.

特に幾何學の圖形に關する公理を**幾何學公理**と稱す.

19. 普通公理

[1] 同じき量に等しき量は相等し.

[2] 相等しき量を他の相等しき量に加ふれば其和相等し.

[3] 相等しき量を他の相等しき量より減ずれば其殘り相等し.

[4] 相等しき量の同じき倍數の量は相等し.

[5] 相等しき量の同じき分數の量は相等し.

[6] 完き量は其部分より大なり.

[7] 完き量は其總ての部分の和に等し.

[8] 相等しからざる量に相等しき量を加ふれば其和相等しからず. 而して其大なる量に加へて得たる和は他の和より大なり.

[9] 相等しからざる量より相等しき量を減ずれば其殘り相等しからず. 而して其大なる量より減じて得たる殘りは他の殘りより大なり.

20. **定義** **命題**とは或事項の陳述なり.

例へバ「完キ量ハ其部分ヨリ大ナリ」ハ一ツノ命題ナリ.

21 **定義** **定理**とは既に眞なりと知る所の命題に依り證明せらるべき命題なり.

但し既に眞なりと知る所の命題は

公理又は既に證明したる定理なり。

定理は**假設**及び**終結**の二部より成る。假設とは云々なりと假定せられたる事項にして終結とは假設より出で來るべき事項なり。

例ヘバ「一數ノ之ヲ記スル數字ノ和ガ九ノ倍數ナラバ其數モ亦九ノ倍數ナリ」ハ算術ノ一定理ナリ。茲ニ「一數ノ之ヲ記スル數字ノ和ガ九ノ倍數ナラバ」ト假定セルコトハ此定理ノ假設ニシテ之ヨリ出デ來ル所ノ「其一數モ亦九ノ倍數ナリ」トイフコトハ其終結ナリ。

22. **定義** **系**とは或命題より容易に推定し得べき他の命題なり。

例ヘバ前節ノ例ニ擧ゲタル定理ヨリ「一數ノ之ヲ記スル數字ノ和ガ三ノ倍數ナラバ其數モ亦三ノ倍數ナリ」トイフ定理ヲ容易ニ推定スルコトヲ得ベシ。斯ノ如キモノヲ前定理ノ系トイフ。

23. 幾何學公理

公理壹 二點を通過して一つの直線を引くことを得而して唯一つに限る。

上ノ如クイフベキヲ略シテ次ノ如クイフコトアリ

二點は一直線を決定す。

24. **系1** 一點に於て出會ふ所の二直線は相合して同一の直線となるにあらざれば再び出會ふ能はず。

25. **系2** 二點又は一部分を共有する二直線は相合して同一の直線となる。

26. **公理貳** 二點間に引ける種々の線の中最も短きものは直線なり。

27. **定義** **作圖題**とは幾何學的の方法に依りて作圖を爲すことを求むる命題なり。

所得の圖形を其**解**と稱す。

例ヘバ「有限直線ヲ二等分スルコト」ハ一ツノ作圖題ニシテ其直線ヲ相等シキ二ツノ部分ニ分ツコトヲ求ムル命題ナリ。

28. 初等幾何學ニ於テ作圖ヲ爲スニ用キル器

具ハ唯目盛リセザル定規及ビ「コムパス」ノ二種ニ限ル。是規約ニ依リテ定ムル所ナリ。定規ハ直線ヲ引キ又ハ之ヲ延長スル用ヲ爲シ「コムパス」ハ圓ヲ畫キ或ハ距離ヲ移ス用ヲ爲ス。

29. 最初より爲し得るものと許容せられたる作圖を**公法**と稱す。公法に三あり次の如し。

公法壹 任意の一點より他の任意の一點へ直線を引くことを得。

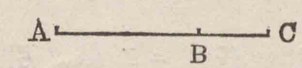
公法貳 有限直線を任意の長さに延長することを得。

公法參 任意の點を中心とし任意の長さの直線を半徑として圓を畫くことを得。

第一編
直線
第一節
直線角

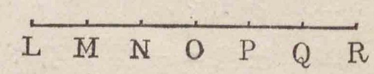
30. 有限直線 AB ヲ延長シ其上ニ任意ニ一點 C ヲ取ルトキハ AC ハ AB ト BC トノ和ニ等シ即チ

$$AC=AB+BC$$



又 AB ハ AC ト BC トノ差ニ等シ即チ

$$AB=AC-BC$$



又有限直線 LM ヲ延長シ其上ニ何レモ LM ニ等シク MN, NO, OP, PQ, QR ヲ取レバ LN ハ LM ノ二倍, LO ハ其三倍, LP ハ其四倍ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。

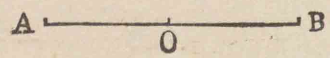
$$LN=2LM \qquad LO=3LM \qquad LP=4LM$$

又上圖ヲ見ルトキハ直線ハ若干ニ等分セラルベキコトヲ知ル。即チ LM ハ LR ノ六分ノ一, LN ハ其三分ノ一, LO ハ其二分ノ一ナリ。之ヲ下ノ如ノ記ス。

$LM=\frac{LR}{6}$ $LN=\frac{LR}{3}$ $LO=\frac{LR}{2}$

31. 圖ニ於テ

$AO=BO=\frac{AB}{2}$



ナルトキハ點Oヲ直線ABノ**中點**又ハ**二等分點**ト稱ス。

一つの有限直線の中點は一つ有り而して唯一つに限る。

問題

1. 任意ニ二線ヲ引キ而シテ其和及ビ差ニ等シキ二線ヲ引ケ。

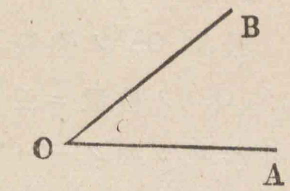
2. 任意ニ一線ヲ引キ而シテ之ヲ其三倍ニ等シクナルマデ延長セヨ。

3. [19] ニ列擧シタル九ツノ普通公理ニ於テ量ヲ直線ト定メ一ツ毎ニ圖ヲ作リ而シテ式ヲ以テ之ヲ書キ表ハセ。

---

32. **定義** 一點より二つの直線を引くときは此二つの直線は**角ヲ爲ス**といひ又は**角ヲ夾ム**といふ。其點を角の

頂點と稱し二つの直線を各〻角の邊と稱す。

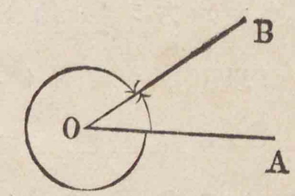


OA, OB ヲ一點Oヨリ引ケル二線トスレバOハ角ノ頂點,OA,OBハ各〻角ノ邊ナリ。

角ヲ示スニハ頂點ノ一文字ヲ以テシ角Oト呼ブ。又ハ頂點ノ一文字ヲ二邊上ノ二文字ノ間ニ置キ角AOB或ハ角BOAト呼ブ。又ハ角ノ内ニ置キタル一文字ヲ以テ之ヲ示スコトアリ,角cトイフガ如シ。

記號∠ハ角ヲ表ハス。

33. **角ノ大サ**



角ノ大サトハ如何ナルモノナルカヲ明カニセンニハ角ヲ以テ一直線ノ回轉ニヨリテ生ジタルモノト考フルヲヨシトス。即チOAノ位置ニ於テ重ナリ合フ所ノ二線ノ一ツガ同一平面上ニ於テ點Oノ周リニ回轉シテOBノ位置ニ至ルトキハ此線ハ角AOBダケ回轉シタリトイフ。OAノ位置ヨリOBノ位置ニ至ルマデノ回轉ノ量ハ即チ角AOBノ大サナリ。

角の大さは其二邊の開きの大さに

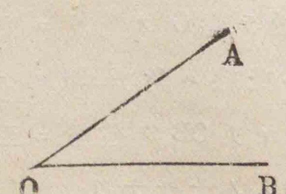
由るのみにして其長さには毫も關係することなし。

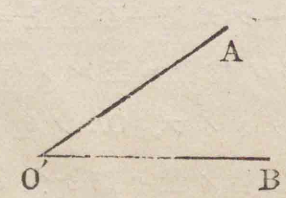
最初 OA ノ位置ニ在リタル線ガ上述ノ如クニシテ OB ノ位置ニ至ルニハ二樣ノ途アリ。即チ圖ニ示セルガ如ク一ハ時計ノ針ノ回轉スルガ如クニ回轉シ他ハ之ニ反ス。故ニ一點 O ヨリ引ケル二線 OA, OB ハ通常大サ相異ナル二角ヲ爲スモノト考フルコトヲ得。

頂點及ビ二邊ヲ共有スル所ノ上ニ云ヘルガ如キ二角ヲ**共軛角**ト稱シ其大ナル方ヲ**優角**ト稱シ,小ナル方ヲ**劣角**ト稱ス。

以下單ニ角トイフトキハ劣角ヲ指ス。

34. **定義**　一つの角を取り之を他の一つの角の上に重ね全く相合せしむることを得るときは此二角は**相等シ**といふ。



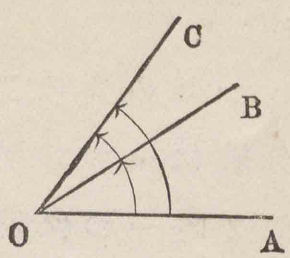


例ヘバ角 AOB ヲ取リテ角 A′O′B′ ノ上ニ重ネ頂

點 O ヲ頂點 O′ ノ上ニ置キ邊 OA ヲ邊 O′A′ ノ上ニ重ヌルトキ邊 OB ガ邊 O′B′ ノ上ニ重ナレバ二角 AOB A′O′B′ ハ相等シ。即チ

$$\angle AOB = \angle A'O'B'$$

35.　[33] ニ述ベタルガ如クニシテ OA ノ位置ヨリ OB ノ位置ニ至リタル直線ガ尙ホ同ジキ方ニ回轉シテ OC ノ位置ニ至ルトキハ角 AOC ハ二角 AOB, BOC ノ和ニ等シ。即チ

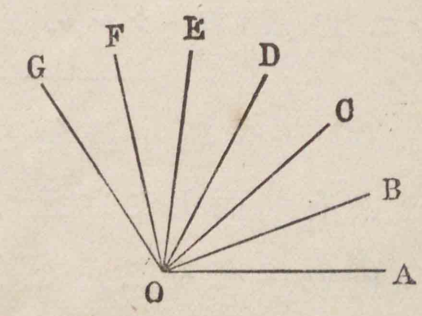


$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$$

又角 AOB ハ角 AOC ト角 BOC トノ差ニ等シ。即チ

$$\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC$$

又右圖ニ於テ AOB, BOC, COD 等ノ諸角互ニ相等シケレバ角 AOC ハ角 AOB ノ二倍,角 AOD ハ角 AOB ノ三倍ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。

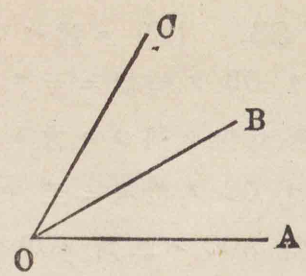


$$\angle AOC = 2\angle AOB \qquad \angle AOD = 3\angle AOB$$

又角 AOB ハ角 AOG ノ六分ノ一,角 AOC ハ其三分ノ一ナリ。之ヲ下ノ如ク記ス。

$\angle AOB=\frac{\angle AOG}{6}$　　$\angle AOC=\frac{\angle AOG}{3}$

36. 圖ニ於テ　$\angle AOB=\angle BOC=\frac{\angle AOC}{2}$ ナルトキハ直線OBヲ角AOCノ**二等分線**ト稱ス。



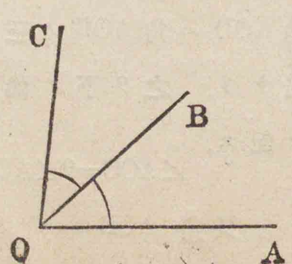
一つの角の二等分線は一つ有り而して唯一つに限る。

問題

4. [35]ノ第二圖ニ於テ何レガ角AOEノ二等分線ナルカ。又角AOFノ二等分線ハ如何ナル角ノ二等分線ト同一ナルカ。

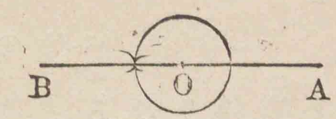
---

37. **定義**　隣角とは頂點及び一邊を共有し而して此邊の兩側に在る二角なり。



圖ニ於テ二角AOB,BOCハ隣角ナリ。

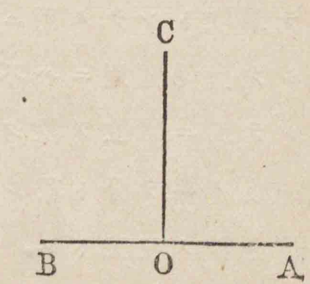
38. **定義**　平角とは其二邊が頂點の兩側に在りて同一直線上に在る角なり。



一點Oヨリ引ケル二線OA, OBガAOBナル一線ヲナストキハOA,OBハ平角ヲナス。時計ノ分針ガ三十分間ニ回轉スル角ハ平角ナリ。

39. **定義**　相等しき隣角の共通ならざる二邊が頂點の兩側に於て同一直線上に在るときは此隣角を各**直角**と稱す。

直角は平角の半分に等し。 right angle



AOC, BOCハ相等シキ隣角ニシテ其共通ナラザル二邊OA, OBガAOBナル一線ヲナストキハAOC,BOCハ各直角ナリ。

直角ヲ表ハスニR.∠ナル記號ヲ用キルコトアリ。

例題　直角ノ例ヲ擧ゲヨ

40. **定義**　一直線が他の一直線に

出會ひて之と直角をなすときは其一を他の垂線といひ又二線は互に垂直なりといふ。

一直線が他の一直線に出會ひて之と直角をなさざるときは其一を他の斜線なりといふ。

上ノ圖ニ於テ CO ト AB トハ互ニ垂直ナリ。之ヲ次ノ如ク記ス。

$$CO \perp AB$$

二線ノ交點 O ヲ垂線ノ**足**ト名ヅク。

注意　垂線 CO ハ OA, OB ノナス平角 AOB ノ二等分線ナリ。

41. **注意**　直角ハ大サノ定マレル角ナルヲ以テ單位トシテノ用ニ適ス。然レドモ直角ハ稍〻大ニシテ實地應用ニハ不便尠カラザルヲ以テ之ヲ小分シテ別ニ單位ヲ設ク。即チ一直角ノ $\frac{1}{90}$ ヲ度ト稱シ一度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ分ト稱シ一分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ秒ト稱ス。$°\,'\,''$ ヲ度分秒ノ記號トス。例ヘバ三度十二分二十秒ヲ $3°12'20''$ ト記ス。

問　題

5.　時計ノ時針ガ一平角ヲ回轉スルニハ何時間ヲ要スルカ。

6.　六時ニハ時計ノ時針ト分針トハ如何ナル角ヲナスカ。

7.　三時ニハ時計ノ時針ト分針トハ何度ノ角ヲ爲スカ。九時ニハ如何。(針ノ動ク向キト同ジキ向キニ分針ヨリ時針ノ方ヘ計リテ)

8.　直角ノ $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ヲ各〻度分秒ニテ書キ表ハセ。

9.　時計ノ時針ガ $1°, 60°, 225°, 300°$ ヲ回轉スルニハ各〻何分ヲ要スルカ。

---

42. **定義**　二角の和直角に等しきときは其一を他の餘角といふ。

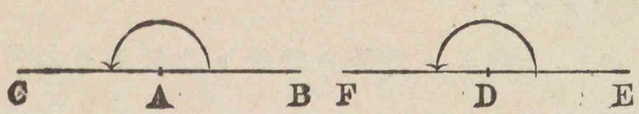
43. **定義**　二角の和平角に等しきときは其一を他の補角といふ。

44. **定義**　銳角とは直角より小なる角なり。

45. **定義**　鈍角とは直角より大にして平角より小なる角なり。

定理 1

46. 平角は皆相等し。



假設 AB,AC ヲ一平角ノ兩邊トシ A ヲ其頂點トス。又 DE, DF ヲ他ノ一平角ノ兩邊トシ D ヲ其頂點トス。

終結 AB, AC ノナス平角 BAC ハ DE, DF ノナス平角 EDF ニ等シ。

證明 AB, AC ノナス角ハ平角ナルヲ以テ AB, AC ハ CAB ナル同一直線上ニ在リ。 [38]

同理ニ依リテ DE, DF モ亦 FDE ナル同一直線上ニ在リ。 [38]

故ニ直線 CAB ヲ取リテ直線 FDE ノ上ニ重ネ點 A ヲ點 D ノ上ニ置キ AB ヲ DE ノ上ニ重ヌレバ AC ハ DF ノ上ニ重ナル [25]

即チ AB, AC ノナス平角ハ DE, DF ノナス平角ニ合ス。

故ニ此二角ハ相等シ。 [34]

47. 系1 直角は皆相等し。

如何トナレバ直角ハ平角ノ半分ニシテ [39]

相等シキ角ノ半分ハ相等シケレバナリ。 [19]ノ5

48. 系2 直線上の一點より之に一つの垂線を引くことを得而して唯一つに限る。 [40]ノ(注意)及ビ[36]

49. 系3 相等しき角の餘角は相等し。

50. 系4 相等しき角の補角は相等し。

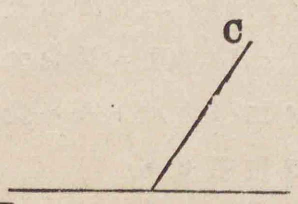
51. 系5 二つの共軛角相等しきときは其各角は平角なり。

定理 2

52. 一直線が他の一直線と出會ひてなす二つの隣角の和は二直角に等し。

假設 直線 CO ガ直線 BA ト點 O ニ於テ出會フ

終結 隣角 COA,COB ノ和ハ二直角ニ等シ。



證明 隣角 COA,COB ノ和ハ OA, OB ノナス角ナリ。

BOA ハ一直線ナルヲ以テ OA, OB ノナス角ハ平角ナリ。 [38]

故ニ $\angle COA + \angle COB = 2R.\angle$

53. 系 一點より數多の直線を引くとき其各線が順次に其次の直線となす總ての角は合せて四直角に等し。

問題

10. 一直角ノ $\frac{3}{5}$ ニ等シキ角ノ餘角ハ直角ノ幾分ナルカ,又之ヲ度ニテ表ハセバ如何。

11. $79^\circ 13' 52''$ ナル大サノ角ノ餘角及ビ補角ハ各〻幾許ナルカ。

12. 二線相交ハリテナス所ノ四角ノ一ガ直角ナレバ他ノ三角モ亦各〻直角ナルコトヲ證明セヨ.

13 一線ガ他ノ一線ト出會ヒテナス所ノ二ツノ隣角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナルヿヲ證明セヨ。

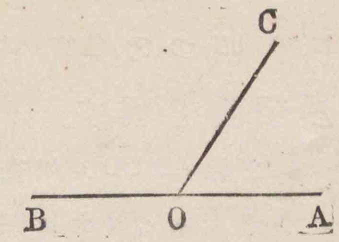
14. 互ニ補角ナル二角ノ大ナル方ガ小ナル方ノ二倍ナルトキハ此小ナル角ハ 60° ニ等シキコトヲ證明セヨ。

15. 互ニ餘角ナル二ツノ隣角ノ二等分線ガナス角ハ直角ノ幾分ナルカ。

定理 3

54. 二つの隣角の和が二直角に等しければ其共通ならざる二邊は同一直線上に在り。

假設 COA, COB ハ二ツノ隣角ニシテ其和ハ二直角ニ等シ



終結 二邊 OA, OB ハ同一直線上ニ在リ。

證明 二角 COA, COB ノ和ハ OA 及ビ OB ノナス角ナリ。

而シテ $\angle COA + \angle COB = 2R.\angle$ [假設]

故ニ OA 及ビ OB ノナス角ハ二直角即チ平角ニ等シ。

故ニ OA, OB ハ同一直線上ニ在リ。 [38]

問題

16. 二ツノ直線 AO, BO ガ直線 CD ノ反對ノ側ニ在リテ點 O ニ於テ之ニ出會ヒ而シテ二ツノ角 AOD, BOC 相等シケレバ AO, BO ハ同一ノ直線上ニ在ルコトヲ證セヨ

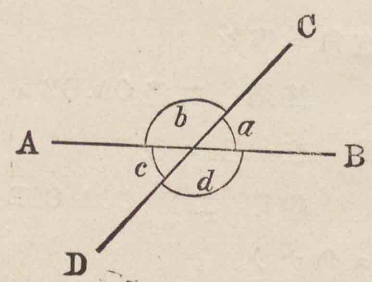
17. 四ツノ直線 AO, BO, CO, DO ガ一點 O ニ於

テ出會ヒ而シテ角 AOB ハ角 COD ニ等シク角 AOD ハ角 BOC ニ等シケレバ AO ト CO 及ビ BO ト DO ハ何レモ同一ノ直線上ニ在ルコトヲ證セヨ。

---

55. 定義 二直線相交はりてなす所の四つの角の中,隣角ならざる二角を對頂角と稱す。

二線 AB, CD ガ相交ハリテ a, b, c, d ナル四ツノ角ヲナセバ a 及ビ c ハ對頂角ナリ。又 b 及ビ d ハ對頂角ナリ。

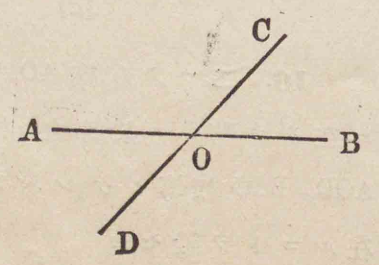


定理 4

56. 二つの直線相交はるときは對頂角は相等し。

假設 AB, CD ヲ一點 O ニ於テ相交ハル二線トス。

終結 對頂角 AOD, BOC ハ相等シ。



證明 AB ハ一直

線ナルヲ以テ $\angle BOC+\angle AOC=2R.\angle$ [52]

又 CD ハ一直線ナルヲ以テ

$\angle AOD+\angle AOC=2R.\angle$ [52]

然ルニ二直角即チ平角ハ皆相等シキヲ以テ [46]

$$\angle BOC+\angle AOC=\angle AOD+\angle AOC$$

雙方ヨリ $\angle AOC$ ヲ減ズレバ

$$\angle BOC=\angle AOD$$

同理ニ由リテ $\angle AOC=\angle BOD$

問題

18. 對頂角ノ一ヲ二等分スル直線ハ他ノ一ヲモ亦二等分ス

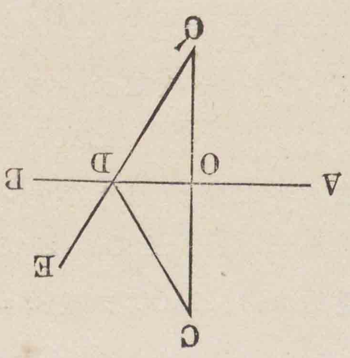
定理 5

57. 直線外の一點より此直線へ一つの垂線を引くことを得,而して唯一つに限る。

假設 AB ヲ與ヘラレタル一線トシ C ヲ其外ニ在ル一定點トス。

終結 C ヨリ AB ヘ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ

得而シテ唯一ツニ限ル。



證明　AB ヲ折リ目トシテ點 C ヲ有スル平面ノ部分ヲ折リテ他ノ部分ニ重又レバ點 C ハ C′ ノ如キ位置ニ來ルベシ。

直線 CC′ ヲ引キ O ヲ之ト AB トノ交點トセヨ。

然レバ二角 COB, C′OB ハ相合スルヲ以テ相等シ。

故ニ角 COB ハ直角ナリ。 [39]

故ニ CO ハ AB ニ垂直ナリ。 [40]

即チ C ヨリ AB ニ垂直ナル一線アリ。

次ニ CD ノ如キ他ノ直線ハ皆 AB ニ垂直ナラザルコトヲ證セントス。

線 C′D ヲ引キ之ヲ任意ノ點 E マデ延長セヨ。

前ノ如ク AB ヲ折リ目トシテ平面ヲ折リ AB ノ兩側ニ在ル平面ノ部分ヲ重又レバ二角 CDA, C′DA ハ相合スルヲ以テ相等シ。

故ニ角 CDC′ ハ角 CDA ノ二倍ナリ。

而シテ角 CDC′ ハ平角 EDC′ ヨリ角 CDE ダケ小ナリ。

故ニ角 CDA ハ直角ヨリ小ナリ。

故ニ CD ハ AB ニ垂直ナラズ。

故ニ C ヨリ AB ヘ引ケル垂直線ハ唯一ツニ限ル。

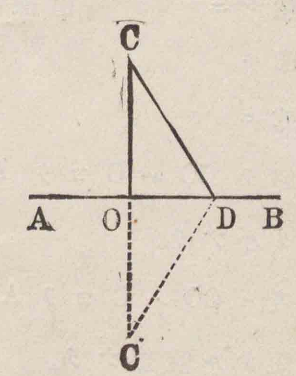
問　題

19. 直線 AB ヲ引キ其線外ニ一點 O ヲ取リ O ヨリ AB ヘ垂線ヲ引ケ(三角定規ニテ)

20. 直線 AB ヲ引キ其線上ニ一點 O ヲ取リ O ニ於テ AB ニ垂線ヲ引ケ(三角定規ニテ)

定理 6

58.　直線外の一點より此線へ引ける總ての直線の中,垂線は最短なるものなり。



假設　AB ヲ與ヘラレタル一線トシ C ヲ其外ニ在ル一定點トシ CO ヲ C ヨリ AB ヘ引ケル垂線トス

終結　C ヨリ AB ヘ引ケル總テノ直線ノ中 CO ハ最短ナルモノナリ。

證明　CD ヲ C ヨリ AB ヘ引ケル他ノ任意ノ直線トセヨ。

CO ヲ延長シ, OC′ ヲ CO ニ等シク取リ C′D ヲ引ケ。

AB ヲ折リ目トシテ圖形 COD ヲ有スル平面ノ部分

ヲ折リ返シ圖形 C′OD ヲ有スル平面ノ部分ニ重ネヨ。

然レバ OC ハ OC′ ニ重ナリ。

[∵COD, C′OD ハ各直角ナルヲ以テ相等シ]

OC ハ OC′ ニ合シ點 C ハ點 C′ ノ上ニ落ツ。

[∵作圖ニ依リテ $CO=C'O$]

故ニ $$CD=C'D$$

[∵此二線ハ同ジキ兩端ヲ有スルヲ以テ全ク相合ス]

故ニ $$CD+C'D=2CD$$

又 $$CO+C'O=2CO$$

然ルニ 直線 CC′ ＜ 折線 CDC′ [26]

即チ $$2CO<2CD$$

故ニ $$CO<CD$$

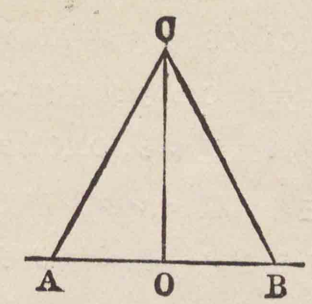
即チ CO ハ C ヨリ AB ヘ引ケル他ノ任意ノ直線ヨリ小ナリ。

故ニ CO ハ C ヨリ AB ヘ引ケル總テノ直線ノ中,最短ナル直線ナリ。

59. **定義** 點と直線との距離とは此點より此直線へ引ける垂線の長さなり。

定理 7

60. 直線外の一點より此線へ垂線及び斜線を引くとき垂線の足より等距離に於て直線を截る所の二つの斜線は相等し。



CO ヲ直線 AB 外ノ一點 C ヨリ AB ヘ引ケル垂線トシ CA, CB ヲ斜線トシ $OA=OB$ トスレバ $CA=CB$

證明 CO ヲ折リ目トシテ平面ヲ折リ圖形 COB ヲ有スル平面ノ部分ヲ圖形 COA ヲ有スル平面ノ部分ニ重ネヨ。

然レバ OB ハ OA ニ重ナリ。

[∵COB, COA ハ各直角ナルヲ以テ相等シ]

OB ハ OA ニ合シ點 B ハ點 A ノ上ニ落ツ。

[∵假設ニ依リテ $OA=OB$]

故ニ CA ハ CB ニ合ス。

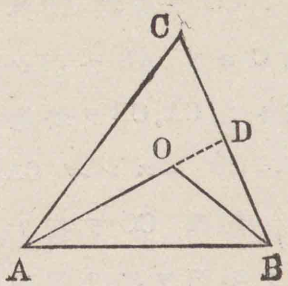
故ニ $$CA=CB$$

注意 本定理ニ於テハ是マデノ如ク假設ト終結トヲ別々ニ明記セズ。今後モ往々斯ノ如ク略記スルコトアルベシ

定理 8

61. 直線外の一點より此直線の兩端へ引ける二直線の和は其三線に圍まれたる圖形內の一點より同じき二點へ引ける二直線の和より大なり。

CA, CB ヲ直線 AB 外ノ一定點 C ヨリ其兩端ヘ引ケル二線トシ, OA,OB ヲ此三線ニ圍マレタル圖形內ノ任意ノ一點 O ヨリ引ケル二線トスレバ



$$CA+CB>OA+OB$$

證明 AO ヲ延長シ點 D ニ於テ BC ニ出會ハシメヨ

然レバ $CA+CD>DA$ [26]

雙方ヘ DB ヲ加フレバ

$$CA+CD+DB>DA+DB$$

即チ $CA+CB>DA+DB$..........(1)

又 $DB+DO>OB$ [26]

雙方ヘ OA ヲ加フレバ

$$DB+DO+OA>OB+OA$$

即チ $DA+DB>OA+OB$..........(2)

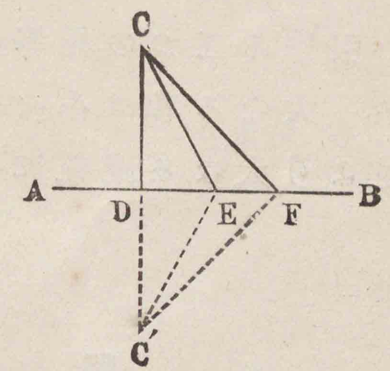
故ニ(1)及ビ(2)ヨリ

$$CA+CB>OA+OB$$

定理 9

62. 直線外の一點より此線へ引ける二つの斜線の中垂線の足より大なる距離に於て直線を截る斜線は小なる距離に於て之を截るものより大なり。

CD ヲ直線 AB 外ノ一點 C ヨリ之ヘ引ケル垂線トシ CE, CF ヲ二ツノ斜線トシ $DF>DE$ トスレバ $CF>CE$



證明 CD ヲ延長シ C'D ヲ CD ニ等シク取リ C'E, C'F ヲ引ケ.

然レバ $CE=C'E$ [60]

[$\because ED\perp CC'$ $CD=C'D$]

又 $CF=C'F$ [60]

而シテ $CF+C'F>CE+C'E$ [61]

故ニ $2CF>2CE$

故ニ $CF>CE$

63.　**系 1**　直線外の一點より此線へ二つの相等しき斜線を引くことを得,而して唯二つに限る.

64.　**系 2**　直線外の一點より此線へ引ける二つの相等しき斜線は垂線の足より相等しき距離に於て此線を截る.

65.　**系 3**　直線外の一點より此線へ引ける二つの相等しからざる斜線の中,大なる者は小なる者よりも垂線の足より大なる距離に於て此線を截る.

問　題

21. 線外ノ一點ヨリ此線ヘ引ケル二ツノ相等シキ斜線ハ垂線ト等角ヲナス. 又此線ト等角ヲナス.

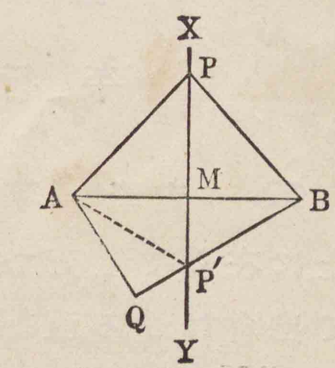
22. 線外ノ一點ヨリ此線ヘ垂線及ビ斜線ヲ引クトキ垂線ト等角ヲナス所ノ二ツノ斜線ハ相等シク之ト大角ヲナス所ノ斜線ハ小角ヲナスモノヨリ大ナリ.

66.　**定義**　有限直線の中點に於て之に**垂直**なる直線を其線の**垂直二等分線**と稱す.

定　理　10

67.　有限直線の垂直二等分線上の點は皆其線の兩端より等距離に在り,而して其垂線外の點は皆不等距離に在り.

XY ヲ有限直線 AB ノ垂直二等分線トス.



[1] P ヲ XY 上ノ任意ノ一點トシ PA, PB ヲ引ケバ

$$PA=PB$$

[2] Q ヲ XY 外ノ任意ノ一點トシ QA, QB ヲ引ケバ

$$QA \neq QB$$

證明　[1] AB ノ中點ヲ M トス.

$PM \perp AB$ 且 $AM=BM$　[假設]

故ニ　$PA=PB$　[60]

[2] BQ ト XY トノ交點ヲ P′ トシ AP′ ヲ引ケ.

然レバ　$AQ < AP'+P'Q$　$AQ < AP'+P'Q$　[26]

而シテ　　$AP'=BP'$　　[1]

故ニ　　$AQ<BP'+P'Q$

即チ　　$AQ<BQ$

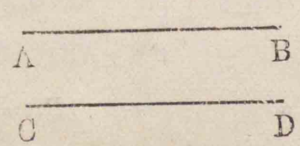
68. **系**　二つの定點より等距離に在る二點を通過する直線は其二定點を結び付くる直線の垂直二等分線なり.

第二節

平行直線

69. **定義**　**平行直線**とは同一平面上に在りて雙方へ何程延長するも決して出會はざる直線なり.

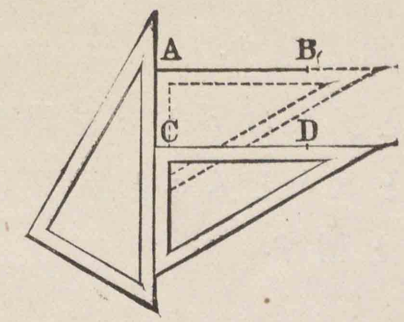
通常之ヲ略シテ單ニ**平行線**トイフ例ヘバAB, CDノ如シ.



同一平面上ニ在リテ平行ナラザル二線ヲ十分延長スレバ必ズ相交ハル.

70. 平行線ヲ引クハ二ツノ定規ヲ以テス.

其一ハ三角定規ナルヲ可トス.（二ツナガラ三角定規ナルモ可ナリ）其方法ハ先ヅ一ツノ定規ヲ平行線ヲ引カントスル平面上ニ据エ置キ而シテ他ノ定規ノ線ヲ前ノ定規ノ線ニ密着セシメツヽ之ヲ一方ニ動カシ此定規ノ他ノ線ニ沿ヒテ直線ヲ引クナリ.斯ノ如クニシテ得ルトコロノAB, CDハ平行線ナリ.



ABガCDニ平行ナリトイフコトヲ次ノ如ク記スルコトアリ.

$$AB \parallel CD$$

例題　平行線ノ例ヲ擧ゲヨ.

71. **公理參**　同一の點を通過し同一の直線に平行なる直線は唯一つに限る.

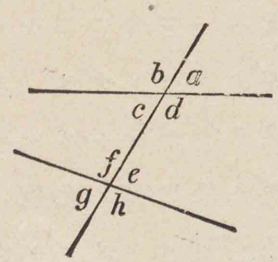
72. **系**　二平行線の一に交はる線は亦他の一にも交はる.

73. **定義**　一直線が他の二直線に交はれば八つの角をなす.

其相互の關係に由りて下の如く之に命名す.

四つの角 a, b, g, h. を各，

外角と稱す.



四つの角 c, d, e, f, を各，

内角と稱す.

d と f 又は c と e を**錯角**と稱す.

a と e, b と f, c と g 又は d と h を**同位角**と稱す.

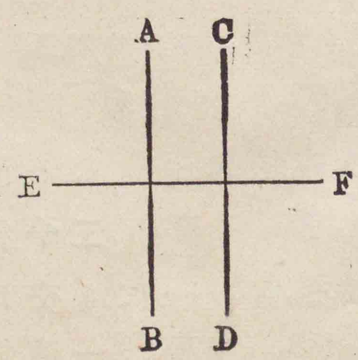
定理 11

74. 同一直線に垂直なる二直線は互に平行なり.

假設 AB⊥EF

CD⊥EF

終結 AB∥CD



證明 若シ AB, CD ガ互ニ平行ナラザレバ之ヲ雙方ヘ十分延長スレバ何レノ方カノ或點ニ於テ出會フ.

然レバ AB ト CD トハ其點ヨリ EF ヘ引ケル二ツノ垂線トナル

是不合理ナリ. [57]

[∵直線外ノ一點ヨリ之ヘ引ケル垂線ハ唯一ツニ限ルモノナレバナリ]

故ニ AB ト CD トハ之ヲ雙方ヘ何程延長スルモ決シテ出會フコトナシ.

即チ AB, CD ハ互ニ平行ナリ.

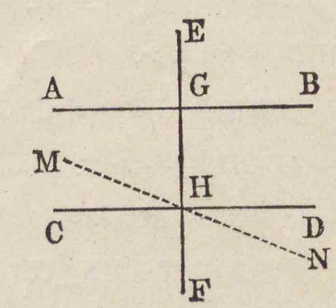
定理 12

75. 一直線が二平行線の一に垂直なれば他の一にも亦垂直なり.

假設 AB∥CD

EF⊥AB

終結 EF⊥CD



證明 先ヅ EF ハ CD ニ交ハルベシ如何トナレバ EF ハ CD ノ平行線ナル AB ニ交ハレバナリ [72]

EF ト CD トノ交點ヲ H トセヨ H ヲ通過シテ EF ニ垂直ナル一線 MN ヲ引ケ然レバ MN∥AB [74]

[∵MN⊥EF EF⊥AB]

然ルニ CD∥AB [假設]

故ニ MN ト CD トハ相合ス [71]

[∵同一ノ點Hヲ通過シ同一ノ直線ABニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル]

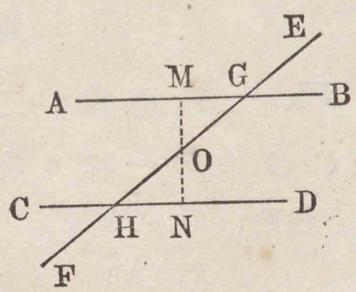
故ニ　$EF \perp CD$

定理 13

76. 一直線が二平行線に交はりてなす錯角は相等し.

假設 一線EFガ二平行線AB,CDト夫々二點G,Hニ於テ相交ハル.

終結 錯角AGH, GHDハ相等シ.



證明 GHノ中點Oヲ通過シCDヘ垂線MNヲ引キAB,CDト夫々二點M,Nニ於テ交ハラシメヨ. 然レバMNハABニモ亦垂直ナリ. [75]

[∵$MN \perp CD$　$AB \parallel CD$]

即チHN,GMハ各〻MNニ垂直ナリ.

圖HONヲ其平面内ニ於テ點Oノ周リニ二直角ダケ回轉シテONヲOMニ重ネヨ.

然レバOHハOGニ重ナリ.

[∵(56)ニ依リテ$\angle HON=\angle GOM$]

OHハOGニ合シ點Hハ點Gノ上ニ落ツ.

[∵作圖ニ依リテ$OH=OG$]

是ニ由リテ二垂線HN,GMハ相合ス. [57]

故ニ二角OGM,OHNハ相合ス.

故ニ錯角AGH, GHDハ相等シ.

77. **系 1** 一直線が二平行線に交はりてなす同位角は相等し.

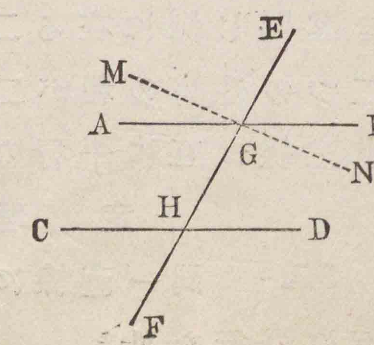
78. **系 2** 一直線が二平行線に交はれば其同じ側に在る二つの内角の和及び二つの外角の和は何れも二直角に等し.

定理 14

79. 一直線が二直線と交はりてなす錯角相等しければ其二直線は互に平行なり.

假設 一線EFガ二線AB, CDト夫々G,Hニ於テ交ハリ錯角AGH, GHDハ相等シトス.

終結 $AB \parallel CD$



證明 點Gヲ通過

シ CD ニ平行ナル直線 MN ヲ引ケ.

然レバ　　$\angle MGH = \angle GHD$　　[76]

[∵ EF ガ二平行線 MN, CD ト交ハリテ爲ス錯角ナレバナリ]

然ルニ　　$\angle AGH = \angle GHD$　　[假設]

故ニ　　$\angle MGH = \angle AGH$

故ニ二線 MN, AB ハ重ナリ合ヒテ一線トナル.

然ルニ　　$MN \parallel CD$

故ニ　　$AB \parallel CD$

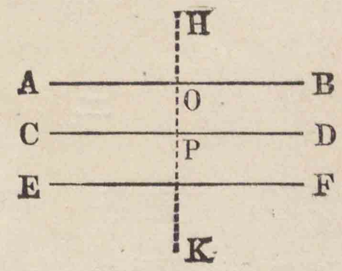
80.　系 1　一線が二線と交はりてなす同位角相等しければ其二線は互に平行なり.

蓋シ [70] ニ於テ述ベタル平行線ヲ引ク方法ハ平行線ノ此性質ニ由ルモノナリ.

81.　系 2　一線が二線と交はるとき其同じ側に在る二つの内角の和又は二つの外角の和が二直角に等しければ其二線は互に平行なり.

定理 15

82.　同一直線に平行なる二直線は互に平行なり.



假設　$AB \parallel EF$

　　　　$CD \parallel EF$

終結　$AB \parallel CD$

證明　EF ニ垂直ナル線 HK ヲ引ケ.

然レバ $AB \parallel EF$ ナルヲ以テ　　$HK \perp AB$　　[75]

又　$CD \parallel EF$　ナルヲ以テ　$HK \perp CD$　　[75]

故ニ二角 HOB, HPD ハ各直角ナルヲ以テ相等シ.

故ニ　　$AB \parallel CD$　　[80]

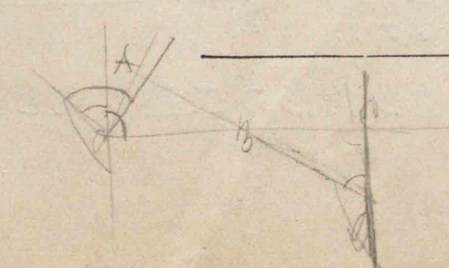
問題

23. [76]ノ圖ニ於テ錯角 BGH, GHC ハ相等シキコトヲ證明スベシ.

24. 一角ノ二邊ガ夫々他ノ一角ノ二邊ニ平行ナレバ其二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ.

25. 一角ノ二邊ガ夫々他ノ一角ノ二邊ニ垂直ナレバ其二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ.

26. 二邊ガ夫々互ニ平行ナル二角ノ二等分線ハ互ニ平行ナルカ或ハ互ニ垂直ナリ.



第三節

三角形

83. 定義 平面形とは線を以て圍みたる平面の一部分なり.

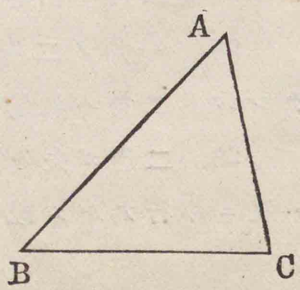
84. 定義 **直線形**又は**多角形**とは直線を以て圍みたる平面形なり.

85. 定義 **三角形**とは三直線を以て圍みたる直線形なり.

86. 定義 多角形を圍む所の各直線の其境界をなす部分を其**邊**と稱し,總ての邊の和を其**周**と稱す.

圖ニ示スモノハ三角形ニシテ之ヲ三角形ABCトイフ. BC, CA, AB ハ其三角形ノ邊ナリ.

三角形ヲ表ハスニ△ナル記號ヲ用キルコトアリ.



87. 定義 多角形の二邊の夾む其

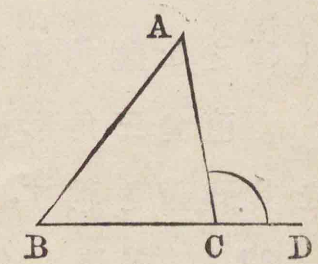
形內の角を其**內角**と稱す. 通常之を單に多角形の**角**と稱す.

上圖ニ於テ角ABC, 角BCA, 角CABハ三角形ノ角ナリ.

88. 定義 多角形の一邊と其隣邊の延長との夾角を多角形の**外角**と稱す.

三角形に於ては一外角の隣角にあらざる二つの內角を各ゝ此外角の**內對角**と稱す.

圖ニ於テ角ACDハ三角形ABCノ外角ニシテ二角CAB,ABCハ各ゝ其內對角ナリ.



89. 定義 **等邊三角形**とは三邊皆相等しき三角形なり.

90. 定義 **二等邊三角形**とは二邊相等しき三角形なり.

91. 定義 三角形の何れの邊をも其**底邊**と稱することを得. 之に對する

角の頂點を三角形の頂點と稱し頂點より底邊或は其延長へ引ける垂線の長さを三角形の**高サ**と稱す.

二等邊三角形に於ては相等しき二邊の夾角の頂點を特に頂點と稱し之に對する邊を其底邊と稱す.

92. 定義　三角形の一角が直角なれば之を**直角三角形**と稱す.

直角三角形に於て直角に對する邊を其**斜邊**と稱す.

93. 定義　**鈍角三角形**とは一角が鈍角なる三角形なり.

94. 定義　**等角三角形**とは三角皆相等しき三角形なり.

問題

27. 一多角形ヲ作ルニ必要ナル直線ノ最小數ハ幾何ナルカ.

28. 任意ノ二等邊三角形ヲ作レ.

29. 任意ノ鈍角三角形ヲ作リ其各邊ヲ順次ニ底邊ト見做シ高サヲ表ハス所ノ垂線ヲ引キ(三角定規ニテ)之ヲ延長セヨ.

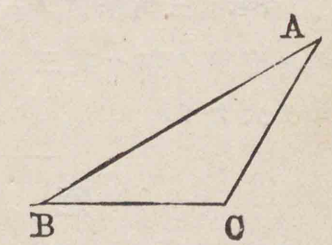
30. 直角三角形ニ於テ直角ヲ夾ム所ノ二邊ノ一ヲ底邊ト見做セバ他ノ一邊ハ何ヲ表ハスカ.

31. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大ナリ.

定理 16

95.　三角形の一邊は他の二邊の和より小なり.

三角形 ABC ニ於テ其任意ノ一邊 AB ハ他ノ二邊 BC, CA ノ和ヨリ小ナルコトヲ證明セントス.



證明　若シ AB ガ BC 又ハ AC ノ何レカ一ヨリ大ナラザルトキハ

$AB < BC + CA$　ナルコト明カナリ.

AB ガ他ノ二邊ノ何レヨリ大ナルモ

$$AB < BC + CA$$

如何トナレバ AB ハ二點 A, B ノ間ニ引ケル直線ナルヲ以テ折線 ACB ヨリ小ナリ.　[26]

96. 系　三角形の一邊は他の二邊の

差より大なり.

97. 注意 △ABC ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊 BC, CA, AB ノ長サヲ夫々 a, b, c ニテ表ハセバ

$$a<b+c \quad b<c+a \quad c<a+b$$

$$a>b\sim c \quad b>c\sim a \quad c>a\sim b$$

問題

32. 長サ二尺,三尺及ビ六尺ナル三線ニテ三角形ヲ作リ得ルカ. 一尺,二尺及ビ三尺又ハ三尺,五尺及ビ七尺ニテハ如何

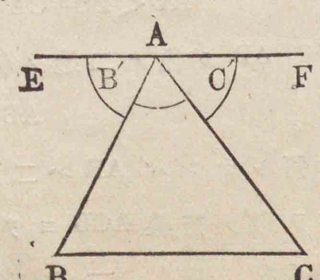
33. 三角形內ノ一點ヲ其一邊ノ兩端ニ結ビ付クル二線ノ和ハ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ.[61]ヲ見ヨ

34. 三角形內ノ一點ヲ其三角ノ頂點ニ結ビ付クル直線ノ和ハ其三邊ノ和ヨリ小ニシテ此和ノ半ヨリ大ナリ.

定理 17

98. 三角形の三角の和は二直角に等し.

三角形 ABC ニ於テ三角 A,B,C ノ和ハ二直角ニ等シキコトヲ證明セントス.



證明 一頂點 A ヲ通過シ底邊 BC ニ平行ナル線 EF ヲ引ケ

然レバ $B'=B \qquad C'=C$ [76]

[∵一線ガ二平行線ニ交ハリテナス錯角ナレバナリ]

故ニ $B'+C'=B+C$

故ニ又 $A+B'+C'=A+B+C$

然ルニ $A+B'+C'$ ハ AE ト AF トガナス平角即チ二直角ニ等シ.

故ニ $A+B+C=2R.$∠

99. **系 1** 三角形は一つより多くの直角又は鈍角を有するを得ず.

100. **系 2** 直角三角形の二鋭角は互に餘角なり.

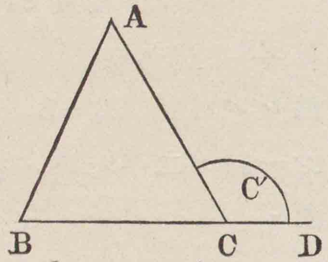
101. **系 3** 等角三角形の各角は一直角の三分の二即ち $60°$ なり.

102. **系 4** 二つの三角形の二角が夫々相等しければ殘りの一角も亦相等し.

定理 18

103. 三角形の外角は其二つの內對

角の和に等し.



三角形 ABC ノ外角 ACD ガ其二ツノ內對角 BAC, ABC ノ和ニ等シキコトヲ證明セントス.

證明 $C+C'=2R.\angle$ [52]

又 $A+B+C=2R.\angle$ [98]

故ニ $C+C'=A+B+C$

故ニ $C'=A+B$

104. 系 三角形の外角は其內對角の何れよりも大なり.

問題

35. 直角三角形ノ一角 58°12′47″ ナルトキハ他ノ二角ノ大サ各如何

36. D ヲ △ABC 內ノ一點トスレバ

$\angle BDC > \angle BAC$

37. △ABC ニ於テ角 A>B+C ナレバ角 A ハ鈍角ナリ, 角 A=B+C ナレバ角 A ハ直角ナリ, 角 A<B+C ナレバ角 A ハ鋭角ナリ

全等三角形

105. 全等ナル圖形ハ唯其位置相異ナルノミニテ形ト大サトハ同一ナルヲ以テ斯ノ如キ圖形ノ部分ナル角,線等ハ皆夫々相等シキコト明カナリ.

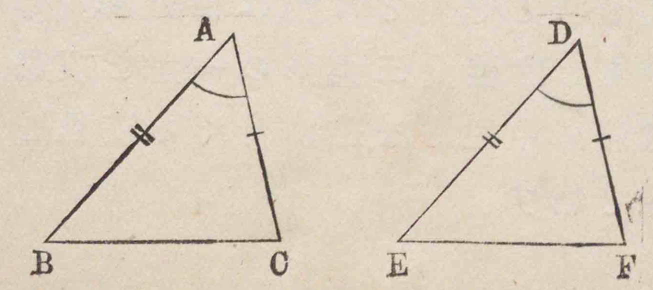
二ツノ全等ナル三角形ニ於テハ各形ノ三邊ト三角トハ互ニ相等シキヲ以テ今其一ヲ取リ他ノ一ノ上ニ重ヌルトキハ各形ノ三邊ガ圍ム所ノ平面ノ部分ハ全ク相合ス. [17] ヲ見ヨ

二ツノ三角形 ABC, DEF ガ全等ナルトキハ之ヲ次ノ如ク記スルコトアリ.

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

定理 19

106. 二つの三角形に於て二邊と其夾角相等しければ此二つの三角形は全等なり.



假設　△ABC, △DEF ニ於テ

AB=DE　AC=DF　A=D

終結　△ABC ≡ △DEF

證明　△ABC ヲ取リ之ヲ △DEF ノ上ニ重ネ邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ置キ角 A ヲ角 D ノ上ニ重ネヨ

然レバ A=D ナルヲ以テ邊

AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナル.

而シテ AB=DE ナルヲ以テ

點 B ハ點 E ノ上ニ落ツ.

又　AC=DF ナルヲ以テ

點 C ハ點 F ノ上ニ落ツ.

故ニ邊 BC ハ邊 EF ニ合シ

二ツノ三角形ハ全ク相合ス.

故ニ　△ABC≡△DEF

而シテ　BC=EF　B=E　C=F

107. 二つの三角形が全等なるときは其等邊と等角とは恒に相對す.

108. **定義**　三角形の一角を頂點と其對邊の中點とを結び付くる直線を其**中線**と稱す

問　題

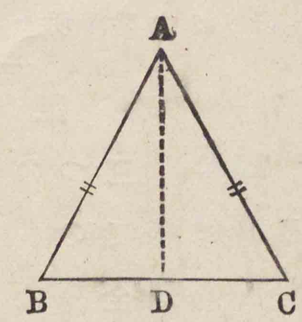
38. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ其底邊ノ垂直二等分線ナリ.

39. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線上ニ在ル任意ノ點ハ底邊ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ.

40. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ出ヅル中線ハ相等シ.

定　理　20

109. 二等邊三角形の等邊に對する角は相等し.



假設　△ABC ニ於テ

AB=AC

終結　C=B

證明　AD ヲ頂角 BAC ノ二等分線トセヨ

然レバ △ABD, ACD ニ於テ

AB=AC　[假設]

AD ハ兩形ニ通ジ, ∠BAD=∠CAD　[作圖]

即チ二邊ト夾角トガ相等シキヲ以テ

△ABD≡△ACD　[106]

因リテ兩形ニ共通ナル邊 AD ノ對角 ABC, ACB ハ

相等シ.　[107]

110. **系**　三角形の三邊相等しければ其三角も亦相等し.

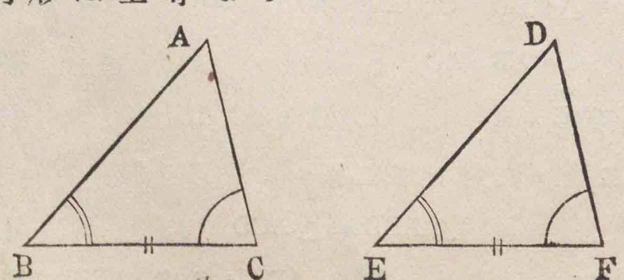
問題

41. 等邊三角形 ABC ノ三邊 AB, BC, CA ヨリ順次ニ夫々相等シキ長サ AA′, BB′, CC′ ヲ截レバ△A′B′C′ モ亦等邊ナリ.

42. 二ツノ二等邊三角形ガ同ジ底邊上ニ立ツトキハ其二頂點ヲ通過スル直線ハ底邊ノ垂直二等分線ナリ. [1] [109] 及ビ [106] ニ依リテ又 [2] [68] ニ依リテ之ヲ證明セヨ.

定理 21

111. 二つの三角形に於て一邊と其兩端に於ての角相等しければ此二つの三角形は全等なり.



假設　△ABC, DEF ニ於テ

BC=EF　B=E　C=F

終結　△ABC≡△DEF

證明　△ABC ヲ取リ之ヲ△DEF ノ上ニ重ネ點 B ヲ點 E ノ上ニ置キ邊 BC ヲ邊 EF ニ重ネヨ.

然レバ BC=EF ナルヲ以テ

點 C ハ點 F ノ上ニ落ツ

又　B=E ナルヲ以テ BA ハ ED ニ重ナリ

而シテ又 C=F ナルヲ以テ CA ハ FD ニ重ナル

故ニ點 A ハ ED 上ニ在ルト同時ニ亦 FD 上ニモ在ラザル可カラズ

故ニ A ハ ED ト FD トノ交點 D ノ上ニ落ツ

故ニ二ツノ三角形ハ全ク相合ス.

故ニ　△ABC≡△DEF

而シテ　A=D　AB=DE　AC=DF

112. **系**　二つの三角形に於て其二角夫々相等しく而して一雙の等角に對する邊相等しければ此二つの三角形は全等なり.

問題

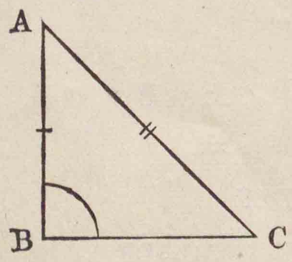
43. 三角形ノ一角ノ二等分線ガ其對邊ニ垂直

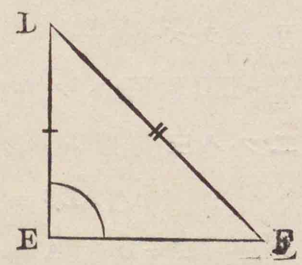
ナレバ此三角形ハ二等邊ナリ.

44. 二等邊三角形 ABC ノ底角 B, C (底邊ノ兩端ニ於テノ角)ノ二等分線ガ夫々 AC, AB ト點 D, E ニ於テ出會フトキハ　BD=CE

定理 22

113. 二つの直角三角形に於て斜邊と他の一邊とが夫々相等しければ此二つの三角形は全等なり.





假設　直角三角形 ABC, DEF ニ於テ

斜邊 AC=DF　AB=DE

終結　△ABC≡△DEF

證明　△ABC ヲ △DEF ノ上ニ重ネ點 A ヲ點 D ノ上ニ置キ邊 AB ヲ邊 DE ニ重ネヨ.

然レバ AB=DE ナルヲ以テ

點 B ハ點 E ノ上ニ落ツ

又二角 B, E ハ各直角ナルヲ以テ相等シ

故ニ BC ハ EF ニ重ナル

而シテ點 C ハ點 F ノ上ニ落ツ

如何トナレバ若シ C ガ F ノ上ニ落チザレバ BC, EF ハ相等シカラズ.

BC, EF ガ相等シカラザレバ AC, DF モ亦相等シカラザルベシ.　[62]

是假設ニ合ハズ

故ニ點 C ハ點 F ノ上ニ落チ AC ハ DF ニ合シ二ツノ三角形ハ全ク相合ス

故ニ　△ABC≡△DEF

定理 23

114. 三角形の二角相等しければ之に對する二邊相等しく此三角形は二等邊なり.

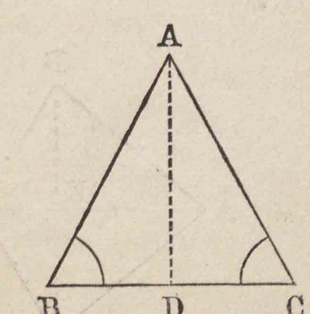
假設　△ABC ニ於テ

B=C

終結　AC=AB

證明　AD ヲ頂角 A ノ二等分線トセヨ

然レバ △ABD, ACD ニ於テ



∠BAD=∠CAD　[作圖]

$\angle ABC = \angle ACB$　　[假設]

而シテ AD ハ共通ナリ

故ニ　　$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$　　[112]

因リテ　　$AB = AC$

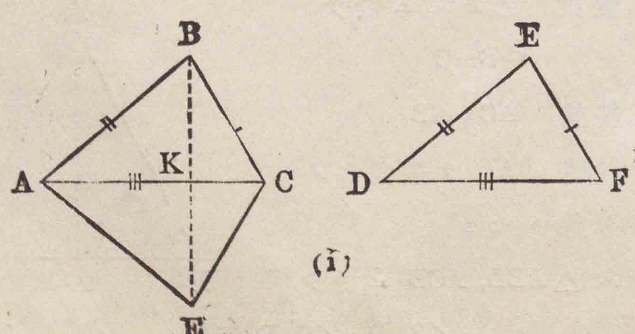
115. **系**　三角形の三角相等しければ其三邊も亦相等し.

問題

45. 三角形ノ一角ノ外角ノ二等分線ガ其角ノ對邊ニ平行ナレバ此三角形ハ二等邊ナリ.

定理 24

116.　二つの三角形に於て三邊夫々相等しければ此二つの三角形は全等なり.



(i)

假設　$\triangle ABC$, DEF ニ於テ

$BC = EF$　　$CA = FD$　　$AB = DE$

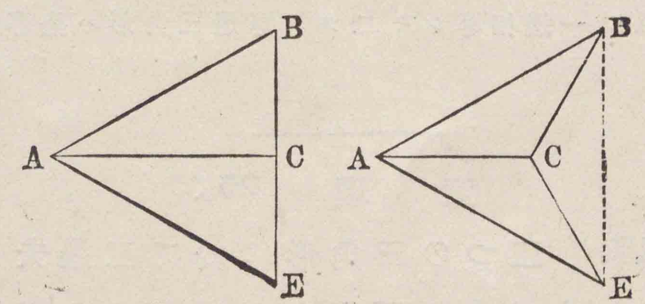
終結　　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

證明　$\triangle DEF$ ノ頂點 D ヲ $\triangle ABC$ ノ頂點 A ノ上ニ置キ邊 DF ヲ邊 AC ニ重ネ點 B ト點 E トガ AC ノ反對ノ側ニ在ル樣ニ置ケ

然レバ $AC = DF$ ナルヲ以テ

點 F ハ點 C ノ上ニ落ツ

點 E′ ヲ點 E ノ落ツル點トセヨ



(ii)　　(iii)

若シ(ii) CB ト CE′ トガ同一直線上ニ在レバ ABE′ ナル二等邊三角形ヲ得.

因リテ　　$\angle ABC = \angle AE'C$　　[109]

若シ CB ト CE′ トガ同一直線上ニ在ラザレバ BE′ ヲ引ケ

然レバ　　$\angle ABE' = \angle AE'B$　　[109]

又　　$\angle CBE' = \angle CE'B$　　[109]

上ノ二式ヲ (i) 相加ヘ或ハ (iii) 前式ヨリ後式ヲ減ズレバ　　$\angle ABC=\angle AE'C$

即チ　　$\angle ABC=\angle DEF$

即チ二ツノ三角形 ABC, DEF　二邊相等シク其夾角相等シキヲ以テ全等ナリ　　[106]

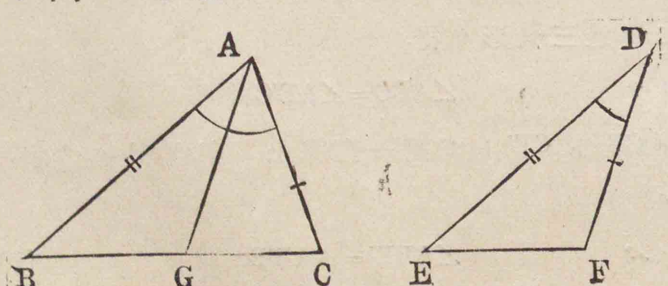
問題

46. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ出ヅル中線ハ本形ヲ二ツノ全等ナル直角三角形ニ分ツ.

47. 一邊相等シキ二ツノ等邊三角形ハ全等ナリ.

逆　定理　25（126ノ逆定理 [illegible]

117. 二つの三角形に於て二邊夫々相等しく其夾角不等なれば大角の對邊は小角の對邊より大なり.



(i)

假設　△ABC, DEF ニ於テ

AB＝DE　AC＝DF　A＞D

終結　BC＞EF

證明　△DEF ヲ取リ △ABC ノ上ニ重ネ點 E ヲ點 B ノ上ニ置キ邊 ED ヲ邊 BA ニ重ネ點 C ト點 F トガ AB ノ同ジキ側ニ在ル樣ニ置ケ

然レバ AB＝DE ナルヲ以テ

點 D ハ點 A ノ上ニ落ツ

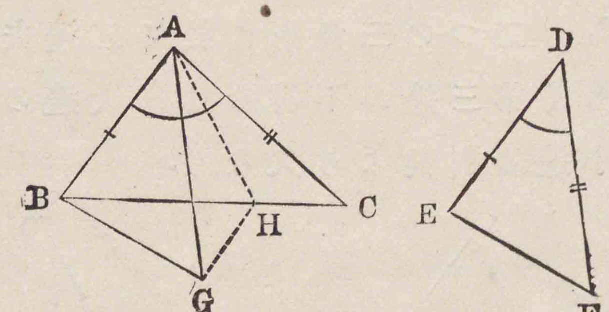
D＜A ナルヲ以テ

DF ハ角 BAC 內ニ在ル直線 AG ノ如キ位置ヲ取ル

點 G ヲ點 F ノ落ツル點トセヨ

(i) 若シ點 G ガ邊 BC 上ニ在レバ

BC ハ BG 即チ EF ヨリ大ナルコト明カナリ.



(ii)

(ii) 若シ點 G ガ BC 上ニ在ラザレバ

角 GAC ノ二等分線ヲ引キ點 H ニ於テ BC ニ出會ハシメ GH ヲ結ビ付ケヨ.

然レバ △AGH, ACH ハ二邊ト夾角相等シキヲ以ハ全等ナリ　[106]

故ニ　HG＝HC　[107]

然ルニ　BH＋HG＞BG　[95]

故ニ　BH＋HC＞BG

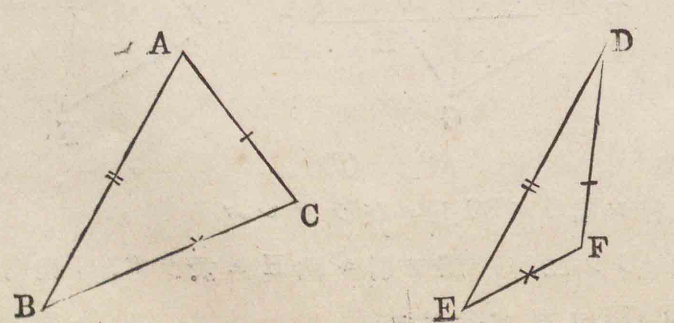
即チ　BC＞EF

問題

48. D ハ △ABC ノ邊 BC ノ中點ニシテ角 ADB ガ鈍角ナレバ　AB＞AC

逆 定理 25ノ 26

118. 二つの三角形に於て二邊夫々相等しく第三邊が不等なれば大邊の對角は小邊の對角より大なり.



假設　△ABC, DEF ニ於テ

AB＝DE　AC＝DF　BC＞EF

終結　A＞D

證明　若シ A＞D ニアラザレバ A＝D カ或ハ A＜D カノ一ナルベシ

然ルニ若シ A＝D トセバ

兩三角形ハ全等トナリ BC＝EF ナルベシ　[106]

是假設ニ戻ル

若シ又 A＜D トセバ BC＜EF ナルベシ　[117]

是モ亦假設ニ戻ル

故ニ A＞D ナラザルベカラズ

問題

49. D ハ三角形 ABC ノ一邊 BC ノ中點ニシテ AB＞AC ナレバ角 ADB ハ鈍角ナリ.

定理 27 ト互ニ逆定理

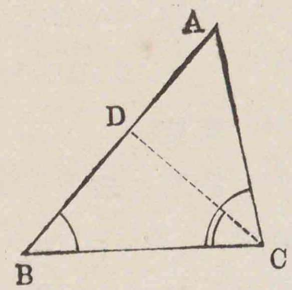
119. 三角形の二角が不等なれば大角の對邊は小角の對邊よりも大なり.

假設　△ABC ニ於テ

C＞B

終結　　AB＞AC

證明　角C內ニ於テ角Bニ等シク∠BCDヲ作リCDヲ引ケバCDハ點Aト點Bトノ間ニ於テABニ出會フ



然レバ　　DB＝DC　　[114]

而シテ　　AD＋DC＞AC　　[95]

故ニ　　AD＋DB＞AC

即チ　　AB＞AC

定　理 28

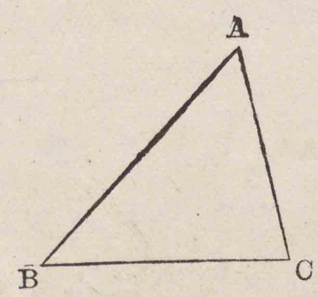
120.　三角形の二邊不等なれば大邊の對角は小邊の對角より大なり.

假設　△ABCニ於テ

AB＞AC

終結　C＞B

證明　若シC＞Bニアラザレバ C＝B カ或ハ C＜B カノ一ナルベシ



然ルニ若シ　C＝B　トセバ　AB＝AC　　[114]

是假設ニ戻ル

若シ又 C＜B トセバ AB＜AC　　[119]

是モ亦假設ニ戻ル

故ニ C＞B ナラザル可ラズ.

問　題

50.　AD ヲ △ABC ノ中線トス [1] BC＞2AD ナレバ角 A ハ鈍角ナリ [2] BC＝2AD ナレバ角 A ハ直角ナリ [3] BC＜2AD ナレバ角 A ハ鋭角ナリ.

51.　[120] ノ圖ニ於テ AB ヨリ AC ニ等シク AD ヲ取リ CD ヲ結ビ付ケ [109] ト [104] トニ依リテ本定理ヲ證明セヨ.

121.　或定理の假設を終結とし其終結を假設となす所の一命題を原定理の**逆**と稱す或は此等の二命題は**互ニ逆ナリ**といふ.

或定理が眞なるも其逆は必ずしも眞ならず.

例ヘバ「△ABC ニ於テ AB＝AC ナレバ C＝B」ナル命題ト「△ABC ニ於テ C＝B ナレバ AB＝AC」ナル命題トハ互ニ逆ナリ而シテ何レモ眞ナルコトハ既ニ [109] 及ビ [114] ニ於テ證明シタルガ如シ. 然レドモ「二角各直角ナレバ此二角ハ相等シ」ハ眞ナレ

ドモ其逆ナル「二角相等シケレバ此二角ハ各直角ナリ」ハ必ズシモ眞ナラザルコト言ヲ俟タズ

是ニ由リテ今一定理ノ眞ナルコトヲ知ルモ其逆モ亦眞ナリト直チニ斷定スルヲ得ズ. 其眞ナルト眞ナラザルトハ別ニ推究スルヲ要ス.

定理の假設が複雜なるときは其一部分と終結とを交換して得る所の命題を原定理の逆と稱す.

[117] ト [118] トニ於ケル二定理ノ如シ

122. [118] ノ定理ヲ證明シタル方法ハ**間接法**ト稱スルモノニシテ其法ハ若シ本定理ノ終結ガ眞ナラズシテ之ニ異ナル事項ガ眞ナリトセバ常ニ或不合理ノ關係ヲ生ズルコトヲ示シ以テ本定理ノ終結ガ眞ナラザル可カラズト推定スルナリ.

問題 不済

52. 第二節ニ於ケル諸定理中互ニ逆ナル二定理ヲ指示セヨ

53. 第三節ニ於テ互ニ逆ナル定理ハ上記ノ定理 20 ト 23 及ビ定理 25 ト 26 トノ外尚ホ一雙アリ. 其何レナルカヲ指示セヨ.

54. 第三節ニ於ケル諸定理中 [118] ノ定理ノ外間

接法ニ依リテ證明セラレタル定理ヲ指示セヨ

第四節

四形邊

123. **定義**　**四邊形**とは四直線を以て圍みたる直線形なり.

124. **定義**　**梯形**とは一雙の相對する邊は平行にして他の一雙の相對する邊は平行ならざる四邊形なり.

平行なる二邊を各梯形の**底**と稱す.

125. **定義**　**平行四邊形**とは二雙の相對する邊が平行なる四邊形なり.

記號▱を以て平行四邊形を表はすことあり.

126. **定義**　**矩形**とは總ての角が直角に等しき四邊形なり.

記號□を以て矩形を表はすことあり.

127. **定義**　**菱形**とは總ての邊が相等しき四邊形なり.

128. **定義**　**正方形**とは總ての角が直角に等しく總ての邊が相等しき四邊

形なり.

129. **定義** 四邊形の相對する角の頂點を結び付くる直線を其**對角線**と稱す.

定理 29

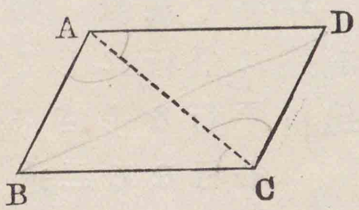
130. 平行四邊形に於て1相對する邊は相等し2相對する角は相等し.

平行四邊形 ABCD ニ於テ

1 $AD=BC \quad AB=DC$

2 $\angle ABC=\angle ADC$

$\angle BAD=\angle BCD$



ナルコトヲ證明セントス.

證明 對角線 AC ヲ引ケ

$\triangle ABC$, ADC ニ於テ AC ハ兩形ニ共通ニシテ

$\angle BAC=\angle ACD \quad \angle BCA=\angle CAD$ [76]

[∵ ACガ二平行線ニ出會ヒテナス錯角ナレバナリ]

故ニ $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ [111]

故ニ $AD=BC \quad AB=DC$

$\angle ABC=\angle ADC$

同様ニ對角線 BD ヲ引キテ $\angle BAD=\angle BCD$ ナルコトヲ證明スルヲ得ベシ.

131. **系 1** 平行四邊形の各對角線は之を全等なる兩三角形に分つ.

132. **系 2** 平行四邊形の相隣れる二角は互に補角なり.

133. **系 3** 平行四邊形にして其一角直角なるものは矩形なり.

134. **系 4** 平行四邊形にして其二隣邊相等しきものは菱形なり.

135. **系 5** 矩形,菱形及び正方形は皆平行四邊形なり.

問題

55. 平行四邊形ノ一角 $124°15'$ ナルトキハ他ノ三角各〻何度ナルカ.

56. 平行四邊形ノ二隣角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ

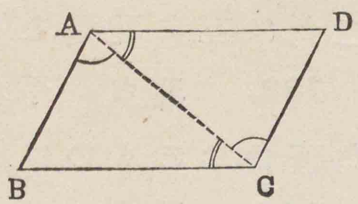
57. 平行四邊形ノ二對角線相等シケレバ本形ハ矩形ナリ.

58. 菱形ノ各對角線ハ其角ヲ二等分ス.

定理 30

136. 四邊形の一雙の相對する邊相

等しく且つ互に平行なれば此四邊形は平行四邊形なり.



四邊形 ABCD ニ於テ

AD=BC AD∥BC

ナレバ ABCD ハ平行四邊形ナリ

證明 對角線 AC ヲ引ケ

△ADC, ABC ニ於テ AD=BC [假設]

∠DAC=∠ACB [76]

而シテ AC ハ兩形ニ共通ナリ

故ニ △ADC≡△ABC [106]

因リテ ∠DCA=∠CAB

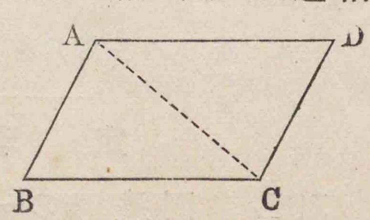
故ニ CD∥AB [79]

而シテ假設ニ依リテ AD∥BC

故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ. [125]

定理 31

137. 四邊形の二雙の相對する邊相等しければ此四邊形は平行四邊形なり.

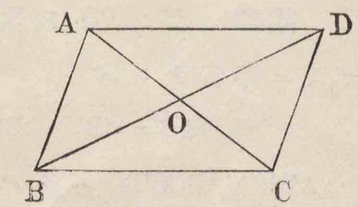


四邊形 ABCD ニ於テ AB=DC AD=BC ナレバ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

[對角線ヲ引キ(116) (79) 等ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得]

定理 32

138. 平行四邊形の對角線は互に二等分す.



平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC, BD ガ點 O ニ於テ相交ハレバ

AO=CO BO=DO

[111] 等ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得.

問題

59. 平行四邊形ニシテ其二對角線互ニ垂直ナルモノハ菱形ナリ.

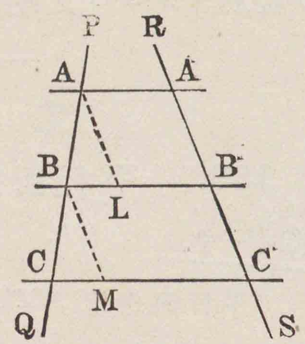
60. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ナリ.

定理 33

139. 若干の平行線が一直線と交はりて之を相等しき部分に截れば如何な

る直線と交はるも亦之を相等しき部分に截る.

假設 平行線 AA', BB', CC' ガ一線 PQ ト A, B, C ニ於テ交ハリ $AB=BC$ トス.



終結 AA', BB', CC' ガ他ノ任意ノ一線 RS ト A', B', C' ニ於テ交ハレバ

$$A'B'=B'C'$$

證明 若シ PQ ト RS トガ互ニ平行ナレバ

$AB=A'B'$　　$BC=B'C'$　　[130]

[∵ $ABB'A'$, $BCC'B'$ ハ各平行四邊形ナレバナリ]

然ルニ　$AB=BC$　　[假設]

故ニ　$A'B'=B'C'$

若シ PQ ト RS トガ互ニ平行ナラザレバ

A, B ヨリ RS ニ平行線 AL, BM ヲ引ケ

然レバ AL, BM ハ各 RS ニ平行ナルヲ以テ互ニ平行ナリ.　　[82]

$\triangle ABL$, BCM ニ於テ　$AB=BC$　　[假設]

$\angle BAL=\angle CBM$　　$\angle ABL=\angle BCM$　　[77]

故ニ　$\triangle ABL \equiv \triangle BCM$　　[111]

因リテ　$AL=BM$

然ルニ　$AL=A'B'$　　$BM=B'C'$　　[130]

故ニ　$A'B'=B'C'$

140. 系 1 三角形の一邊の中點より底邊に平行に引ける直線は他の一邊の中點を通過す.

141. 系 2 三角形の二邊の中點を結び付くる直線は [1] 底邊に平行なり [2] 底邊の半に等し.

[1] ヲ直接ニ并ニ間接法ニ依リテ證明セヨ

142. 系 3 直角三角形の斜邊の中點は其三項點より等距離に在り.

143. 系 4 梯形の平行ならざる二邊の中點を結び付くる直線は [1] 底に平行なり [2] 兩底の和の半に等し.

問題

61. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ之ヲ四ツノ全等ナル三角形ニ分ツ.

62. 四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ一ツノ平行四邊形ヲナス而シテ其周ハ原形

ノ對角線ノ和ニ等シ.

第五節

多角形

144. **定義** 多角形の相隣らざる二角の頂點を結び付くる直線を其**對角線**と稱す.

145. **定義** 多角形の一邊と之に隣れる邊の延長との夾角を其**外角**と稱す.

146. **定義** **等邊多角形**とは其邊皆相等しき多角形なり.

例題 等邊多角形ノ例ヲ擧ゲヨ

147. **定義** **等角多角形**とは其角皆相等しき多角形なり.

例題 等角多角形ノ例ヲ擧ゲヨ.

148. **定義** **正多角形**とは等邊にして等角なる多角形なり.

例題 正多角形ノ例ヲ擧ゲヨ.

149. **定義** 多角形の何れの邊を延長するも形内に入らざるものを**凸多角形**と稱す.

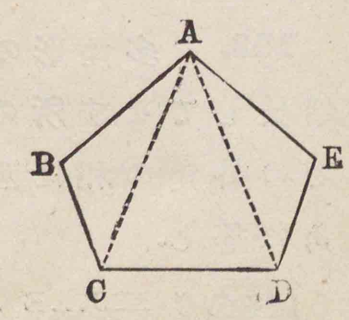
單ニ多角形トイヘバ凸多角形ヲ指ス.

150. **定義** 五邊を有する多角形を**五邊形**と稱し,六邊を有する多角形を**六邊形**と稱す又之を**五角形,六角形**ともいふ. 其他之に準ず.

三角形は多角形の最も簡單なるものなり.

定理 34

151. 多角形の內角の和は其邊數の二倍の直角より四直角だけ小なり.



多角形 ABC...E ノ角ヲ A, B, C...E ニテ表ハシ其邊數ヲ n ニテ表ハセバ

$$A+B+C+\ldots+E$$
$$=2nR.\angle-4R.\angle$$

證明 一頂點 A ヨリ之ニ隣ラザル總テノ頂點ヘ對角線ヲ引ケバ $n-2$

箇ノ三角形ヲ得ベシ.

如何トナレバ角Aヲ夾ム二邊 AB, AE ヲ除クノ外總テノ他ノ邊ハ各〻一三角形ノ一邊トナレバナリ.

斯ノ如クニシテ得タル $n-2$ 箇ノ三角形ノ內角ノ和ハ多角形ノ內角ノ和ニ等シ.

今各三角形ノ內角ノ和ハ二直角ナルヲ以テ $n-2$ 箇ノ三角形ノ內角ノ和ハ直角ノ $2n-4$ 倍ニ等シ.

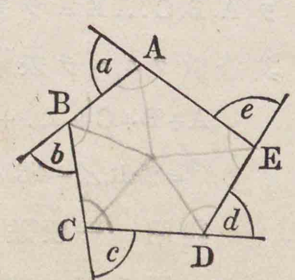
故ニ $\quad A+B+C+\ldots+E=2n\mathrm{R}.\angle-4\mathrm{R}.\angle$

$$=n180^\circ-360^\circ$$

152. **系** 邊數 n なる等角多角形の各角は $\dfrac{2(n-2)}{n}\mathrm{R}.\angle$ 即ち $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$ に等し.

定理 35

153. 多角形の各邊を順次に一方へ延長してなす所の總ての外角の和は四直角に等し.



多角形 ABC...E ノ邊 AB, BC,...EA ヲ順次ニ一方へ延長シテ爲ス所ノ外角ヲ $a, b, c,\ldots e$ トスレバ

$$a+b+c+\ldots+e=4\mathrm{R}.\angle$$

證明 多角形ノ角ヲ A, B,...E ニテ表ハセバ

$$A+a=2\mathrm{R}.\angle \qquad [52]$$

$$B+b=2\mathrm{R}.\angle \qquad [52]$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

$$E+e=2\mathrm{R}.\angle$$

故ニ多角形ノ邊數ヲ n ニテ表ハセバ

$$(A+B+\ldots+E)+(a+b+\ldots+e)=2n.\mathrm{R}\angle$$

然ルニ $\quad A+B+\ldots+E=2n\mathrm{R}.\angle-4\mathrm{R}.\angle \qquad [151]$

故ニ $\quad a+b+\ldots+e=4\mathrm{R}.\angle$

問題

63. 六角形ノ總テノ內角ノ和ハ八直角ニ等シ.

64. 等角五角形ノ各角ハ一直角ノ五分ノ六即チ 108° ニ等シ.

65. 正八角形,正十角形,正十二角形及ビ正十五角形ノ各角ノ大サヲ求ム. [135°, 144°, 150°, 156°]

66. 等角多角形アリ其四角ノ和ハ七直角ニ等シ其多角形ノ邊數幾許. [$n=16$]

67. 多角形アリ其總テノ內角ノ和ハ其各邊ヲ順次ニ一方ヘ延長シテナス所ノ總テノ外角ノ和ニ

等シ其多角形ノ邊數幾許. [n=4]

第六節

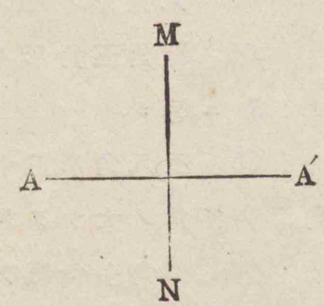
對稱

直線に關する對稱

154. **定義** 一定直線が二點を結び付くる直線の垂直二等分線なるときは此二點は其定直線に關して**對稱ナリ**といふ.

定直線を對稱の**軸**と稱す.

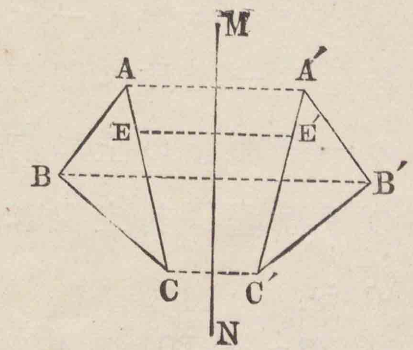
直線MNガ二點A, A'ヲ結ビ付クル直線ノ垂直二等分線ナルトキハA,A'ハMNニ關シテ對稱ノ點ニシテMNハ對稱ノ軸ナリ.



155. **定義** 二つの平面圖の各形の各點が一定直線に關して對稱なる點を

他の一平面圖の上に有するときは此二つの平面圖は其定直線に關して對稱なりといふ.

例へバABCナル圖上ノ任意ノ點EノMNニ關シテ對稱ナル點E'ハA'B'C'ナル圖上ニ在リ,又A'B'C'ナル圖上ノ任意ノ點ノMNニ關シテ對稱ナル點ハABCナル圖上ニ在ルトキハABCトA'B'C'トハ軸MNニ關シテ對稱ナリ.



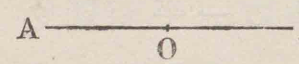
二ツノ平面圖ガ軸ニ關シテ對稱ナルトキハ此軸ヲ折リ目トシテ其一圖ノ平面ヲ折リ返シ他ノ圖ノ平面ニ重ヌレバ二ツノ圖ハ全ク相合ス.

點に關する對稱

156. **定義** 一定點が他の二點を結び付くる直線の中點なるときは此二點は其定點に關して**對稱ナリ**といふ.

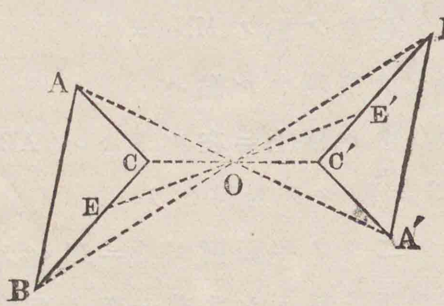
定點を對稱の**中心**と稱す.

點 O ガ直線 AA′ ノ中點ナルトキハ二點 A,A′ ハ點 O ニ關シテ對稱ニシテ O ハ對稱ノ中心ナリ.



157. **定義** 二つの平面圖の各形の各點が一定點に關して對稱なる點を他の一平面圖の上に有するときは此二つの平面圖は其定點に關して對稱なりといふ.

例ヘバ ABC ナル圖上ノ任意ノ點 E ノ點 O ニ關シテ對稱ナル點 E′ ハ A′B′C′ ナル圖上ニ在リ,又 A′B′C′ ナル圖上ノ任意ノ點ノ點 O ニ關シテ對稱ナル點ハ ABC ナル圖上ニ在ルトキハ ABC ト A′B′C′ トハ點 O ニ關シテ對稱ナリ.



二ツノ平面圖ガ點ニ關シテ對稱ナルトキハ其一ヲ其平面內ニ於テ此點ノ周リニ二直角ダケ回轉スレバ二ツノ圖ハ全ク相合ス.

158. 一平面圖ガ一直線ニ依リテ之ニ關シテ對稱ナル二圖ニ分タレ得ルトキハ此圖ハ其線ニ關

シテ對稱ナリトイヒ或ハ**線對稱**ヲ有ストイフ. 其線ヲ**對稱ノ軸**ト稱ス.

又一平面圖ニ於テ其內ニ在ル一點ヲ通過スル總テノ直線ガ此點ニ關シテ對稱ナル二點ニ於テ此圖ノ周ニ出會フトキハ此圖ハ其點ニ關シテ對稱ナリトイヒ或ハ**點對稱**ヲ有ストイフ. 其點ヲ**對稱ノ中心**ト稱ス.

問題

68. 平行四邊形ハ其對角線ノ交點ニ關シテ對稱ナリ.

69. 菱形ノ各對角線ハ其對稱ノ軸ナリ.

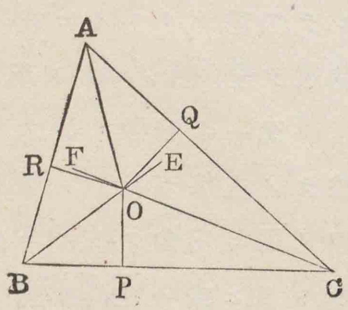
70. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ其對稱ノ軸ナリ.

71. 平行四邊形ノ其一對角線ニ關シテ對稱ナルモノハ菱形ナリ.

第一編問題集

159. 問題 72. 三角形ノ各角ノ二等分線ハ同一點ヲ通過ス而シテ此點ヨリ三邊ニ至ル距離相等シ.

證明 BE, CF ヲ夫々 $\triangle ABC$ ノ二角 B, C ノ二等分線トシ先ヅ此二線ノ相交ハルコトヲ證明スベシ



若シ BE, CF ガ相交ハラザレバ

$$BE \parallel CF$$

然レバ $\angle CBE + \angle BCF = 2R.\angle$ [78]

是不合理ナリ.

[∵此二角ハ各〻三角形ノ角ノ半ナルヲ以テ其和ハ 2R.∠ ヨリ小ナレバナリ]

故ニ BE, CF, ハ相交ハル.

O ヲ其交點トシ線 AO ヲ引ケ

是ニ於テ AO ガ角 BAC ヲ二等分スルコトヲ證明スレバ三角ノ二等分線ガ皆一點 O ヲ通過スルコトトナル.

OP, OQ, OR ヲ O ヨリ三邊ヘ引ケル垂線トセヨ.

今 $\triangle BOP \equiv \triangle BOR$ [112]

[∵OB ハ共通 $\angle OBP = \angle OBR$, $\angle OPB = \angle ORB$]

因リテ $OP = OR$

同様ニ $OP = OQ$

故ニ $OQ = OR$

然ルトキハ $\triangle AOQ \equiv \triangle AOR$ [113]

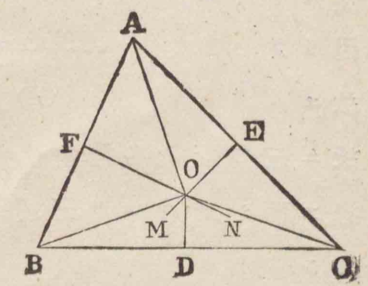
[∵OQA, ORA ハ各〻直角ニ等シク斜邊 AO ハ共通, $OQ = OR$ ナレバナリ]

因リテ $\angle OAQ = \angle OAR$

故ニ三角形ノ三角ノ二等分線ハ皆一點 O ヲ通過ス而シテ點 O ヨリ三邊ニ至ル距離 OP, OQ, OR 相等シ.

此點ヲ三角形ノ**内心**ト稱ス.

160. 問題 73. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ通過ス而シテ此點ヨリ三頂點ニ至ル距離相等シ.



證明 EM, FN ヲ夫々 $\triangle ABC$ ノ二邊 AC, AB ノ垂直二等分線トシ先ヅ此二線ノ相交ハルコトヲ證明スベシ.

若シ EM, FN ガ相交ハラザレバ

$$EM \parallel FN$$

然レバ $AC \perp EM$ ナルヲ以テ [假設]

$AC \perp FN$ ナルベシ [75]

然ルニ $AB \perp FN$ [假設]

故ニ點 A ヨリ一線 FN ヘ二ツノ垂線ヲ得.

是不合理ナリ [57]

故ニ EM, FN ハ相交ハル

O ヲ其交點トシ,之ト BC ノ中點 D トヲ結ビ付ケヨ是ニ於テ OD ガ BC ニ垂直ナルコトヲ證明スレバ三ツノ垂直二等分線ガ皆一點 O ヲ通過スルコトトナル. OA, OB, OC, ヲ引ケ

FO ハ AB ノ垂直二等分線ナルヲ以テ

$AO = BO$ [67]

同樣ニ　$AO = CO$ [67]

故ニ　$BO = CO$

然ルトキハ　$\triangle BOD \equiv \triangle COD$ [116]

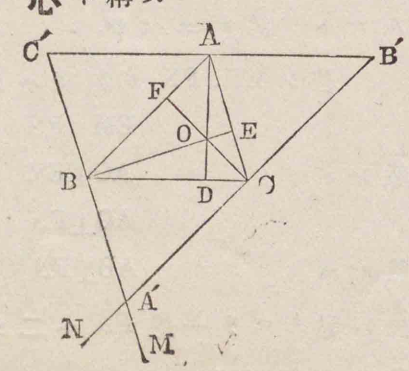
因リテ　$\angle BDO = \angle CDO$

故ニ　$OD \perp BC$

故ニ三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ皆一點 O ヲ通過ス,而シテ O ヨリ三頂點ニ至ル距離 OA, OB, OC 相等シ.

此點ヲ三角形ノ**外心**ト稱ス

161. 問題 74. 三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル三垂線ハ同一ノ點ヲ通過ス.



AD, BE, CF ヲ $\triangle ABC$ ノ三頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線トス

レバ此三線ハ一點ニ於テ相交ハル.

證明　A, B 及ビ C ノ各點ヲ通過シ夫々 BC, CA 及ビ AB ニ平行線ヲ引ケバ其各線ハ他ノ二線ト交ハリ A'B'C' ナル三角形ヲ成スベシ.

[例ヘバ CN, BM ハ A' ニ於テ相交ハル

∵ $CA \parallel BM$ ニシテ CN, CA ハ相交ハレバナリ [72]]

四邊形 ABCB' ハ其二雙ノ對邊互ニ平行ナルヲ以テ平行四邊形ナリ. [125]

故ニ　$BC = AB'$ [130]

又 ACBC' ハ平行四邊形ナルヲ以テ

$BC = AC'$

故ニ　$AB' = AC'$

即チ A ハ B'C' ノ中點ナリ

而シテ　$AD \perp BC$　ナルヲ以テ

$AD \perp B'C'$ [75]

故ニ AD ハ $\triangle A'B'C'$ ノ一邊 B'C' ノ垂直二等分線ナリ

同樣ニ BE, CF ハ夫々邊 C'A', A'B' ノ垂直二等分線ナルコトヲ證明スルヲ得.

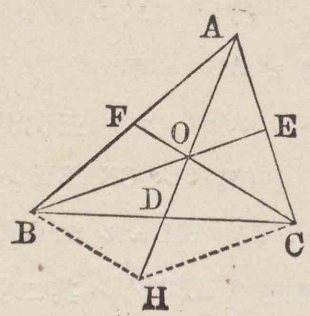
故ニ三線 AD, BE, CF ハ一點 O ヲ通過ス. [160]

此點ヲ三角形ノ**垂心**ト稱ス.

162. 問題 75. 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ヲ通過ス而シテ此點ヨリ各頂點ニ至ル距離ハ其中線

ノ三分ノ二ナリ.

證明 BE, CF ヲ △ABC ノ二ツノ中線トスレバ此二線ハ相交ハル



如何トナレバ若シ相交ハラザレバ

$\angle EBC+\angle FCB=2R.\angle$

ナラザル可カラズ.

是不合理ナルコト明カナリ

故ニ BE, CF ハ相交ハル

O ヲ其交點トシ線 AO ヲ引ケ AO ヲ延長シ點 D ニ於テ BC ニ出會ハシメ AD ハ中線ナルコトヲ證明セントス.

B ヨリ FC ニ平行線ヲ引キ, AD ノ延長ト點 H ニ於テ出會ハシメヨ

然レバ　$AO=OH$　[140]

[∵ △ABH ニ於テ $AF=BF$, $FO \parallel BH$]

CH ヲ結ビ付ケヨ

然レバ　$OE \parallel HC$　[141]

[∵ △ACH ニ於テ $AO=HO$, $AE=CE$]

故ニ OBHC ハ平行四邊形ナリ　[125]

故ニ OH ハ BC ヲ二等分ス　[138]

即チ AD ハ中線ナリ

故ニ三中線 AD, BE, CF ハ一點 O ニ於テ相交ハル.

又 $OD=\frac{OH}{2}=\frac{AO}{2}$ ナルヲ以テ

$$AO=\frac{2}{3}AD$$

同樣ニ　$BO=\frac{2}{3}BE$　　$CO=\frac{2}{3}CF$

三角形ノ三中線ノ交點ヲ其**重心**ト稱ス.

76. 一雙ノ對頂角ノ二等分線ハ同一直線上ニ在リ.

77. 二雙ノ對頂角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナル二直線ナリ.

78. 四邊形ノ周ハ其二對角線ノ和ヨリ大ニシテ其二倍ヨリ小ナリ.

79. 正三角形 ABC ノ二角 B, C ノ二等分線ノ交點ヨリ邊 AB, AC ヘ平行ニ引ケル二線ハ邊 BC ヲ三等分ス.

80. 三角形ノ一中線ハ其一端ヨリ出ヅル所ノ二邊ノ和ノ半ヨリ小ニシテ其和ト底邊トノ差ノ半ヨリ大ナリ.

81. 三角形ノ三中線ノ和ハ三邊ノ和ヨリ小ニシテ三邊ノ和ノ半ヨリ大ナリ.

82. 三角形ノ中線ガ之ニ隣レル二ツノ不等ナル邊トナス角ノ中,小邊トナス角ハ大邊トナス角ヨリ大ナリ.

83. 三角形ノ二邊ガ不等ナレバ小邊ヘ引ケル中線ハ大邊ヘ引ケル中線ヨリ大ナリ.

84. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ一點ヨリ他ノ二邊ニ至ル距離ノ和ハ底邊ノ一端ヨリ其對邊ニ至ル距離ニ等シ.

85. 二等邊三角形ノ底邊ノ延長上ノ任意ノ一點ヨリ二邊ニ至ル距離ノ差ハ底邊ノ一端ヨリ其對邊ニ至ル距離ニ等シ.

86. 正三角形內ノ任意ノ一點ヨリ三邊ニ至ル距離ノ和ハ一定ノ長サナリ.

87. 四邊形ハ $\boxed{1}$ 二雙ノ對角相等シキトキ $\boxed{2}$ 二對角線ガ其中點ニ於テ相交ハルトキハ平行四邊形ナリ.

88. 平行四邊形 ABCD ニ於テ E ガ邊 AD ノ中點, F ガ邊 BC ノ中點ナレバ BE, DF ハ對角線 AC ヲ三等分ス.

89. 三角形ノ一角ノ二等分線ト他ノ二角ノ外角ノ二等分線トハ同一ノ點ヲ通過ス,而シテ此點ハ三邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

此點ヲ三角形ノ**傍心**ト稱ス.

90. O ヲ三角形 ABC ノ傍心トシ角 BAC ノ內ニ在リトセヨ. O ヨリ AB, AC ノ延長ヘ夫々垂線

OE, OF ヲ引ケバ AE, AF ハ何レモ此三角形ノ周ノ半ニ等シ.

91. 多角形ノ任意ノ一邊ハ他ノ總テノ邊ノ和ヨリ小ナリ.

92. 正多角形アリ其外角ノ一ハ一直角ノ三分ノ二ナリ其邊數幾何. [$n=6$]

93. 邊數 n ナル多角形ニ於テ總テ幾何ノ對角線ヲ引キ得ルカ. $\left[\dfrac{n(n-3)}{2}\right]$

第二編

圓

第一節

圓の性質

163. 定義 圓とは一線を以て圍みたる平面圖形にして其内の或一點より其線へ引ける直線皆相等しきものなり.

此點を圓の**中心**と稱す. [14]

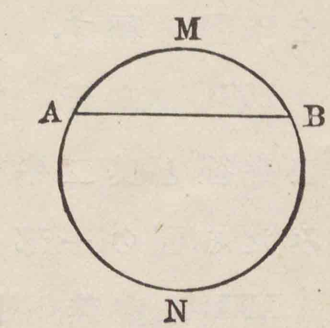
164. 定義 圓周或は**周**とは圓を圍むところの線なり. 通常圓周を圓と稱す. [15]

165. 定義 **半徑**とは圓の中心より圓周へ引ける直線なり. [16]

166. 定義 **直徑**とは圓の中心を通過する直線にして其兩端は圓周上に在るものなり.

圓の定義に依りて一つの圓の半徑は皆相等し. 故に半徑の二倍なる直徑も亦相等し.

167. 定義 **弧**とは圓周の一部分なり.



圓ニ於テ AMB ハ弧ナリ.

半圓周とは圓周の半に等しき弧なり.

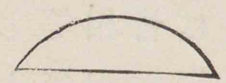
168. 定義 **弦**とは圓周上に在る任意の二點を結び付くる直線なり.

直線 AB ハ弦ナリ.

一つの弦は圓周を二弧に分つ.此二弧を**共軛弧**と稱す. 共軛弧の大さ相異なるときは其大なるものを**優弧**といひ其小なるものを**劣弧**といふ.

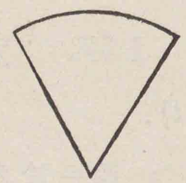
單ニ弧トイフトキハ劣弧ヲ指ス. AMB 及ビ ANB ハ共軛弧ナリ.

169 **定義**　**弓形**とは弧及び其兩端の間の弧にて圍みたる圓の一部分なり



圓の半に等しき弓形を**半圓**と稱す.

170. **定義**　**扇形**とは



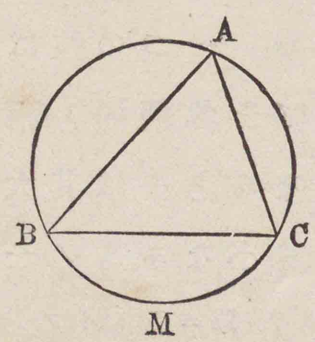
二半徑と其二半徑が夾む弧とを以て圍みたる圓の一部分なり.

171. **定義**　**同心圓**とは同じき中心を有する圓なり.

172. **定義**　圓周上の一點を頂點とし此點より引ける二弦を其邊となす所の角を**周ニ於テノ角**と稱す.

角 BAC ノ如シ. 此角ハ弧 BMC ノ上ニ**立ツ**トイフ.

又角 BAC ヲ弓形 BAC 内ノ角トノヒ又此弓形ハ此角ヲ**含ム**トイフ.



173. **定義**　**切線**とは圓周と唯一點に於て出會ひ雙方へ何程延長するも再び之と出會はざる直線なり.

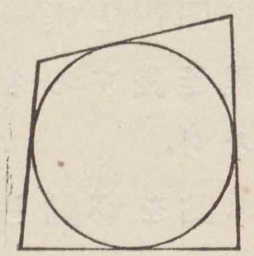
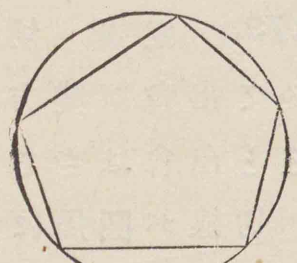
切線が圓周に出會ふ點を**切點**と稱す.

174. **定義**　二圓周が唯一點を共有するときは二圓は**相切ス**といふ. 而して此二圓の各が全く他の外に在れば此二圓は**外切ス**といひ, 一圓が全く他の内に在れば此二圓は**内切ス**といふ.

175. **定義**　二圓周が二點を共有するときは二圓は**相交ハル**といふ.

176. **定義**　二點に於て圓周に交はる限りなき直線を**割線**と稱す.

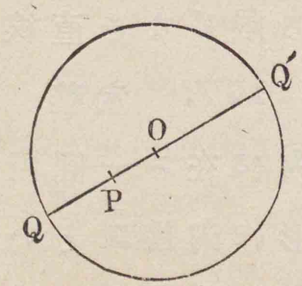
177. **定義**　多角形の總ての邊が其内に在る一圓周の切線なれば圓は多角形に**内接ス**といひ多角形は圓に**外接ス**といふ.

178. **定義** 多角形の總ての頂點が其外に在る一圓周上に在れば圓は多角形に**外接ス**といひ多角形は圓に**内接ス**といふ.

定理 1

179. 圓の中心と一點との距離は此點が圓内に在れば半徑より小なり圓周上に在れば半徑に等し,圓外に在れば半徑より大なり.



Oヲ圓ノ中心トシPヲ任意ノ一點トスレバOPハPガ圓内ニ在レバ半徑ヨリ小ナリ, 圓周上ニ在レバ半徑ニ等シ. 圓外ニ在レバ半徑ヨリ大ナリ,

證明 二點O,Pヲ通過スル直線ハ圓周ト二點Q, Q′ニ於テ交ハル而シテ唯此二點ニ限ル.

如何トナレバ此直線上Oヨリ半徑ニ等シキ距離ノ點ハ唯二ツニ限レバナリ.

若シPガQ,Q′ノ間ニ在レバPハ圓内ニ在リテPOハOQ即チ半徑ヨリ小ナリ.

若シPガQ或ハQ′ト合スレバPハ圓周上ニ在リテOPハ半徑ニ等シ.

若シPガOQ或ハOQ′ノ延長上ニ在レバPハ圓外ニ在リテOQ或ハOQ′即チ半徑ヨリ大ナリ.

180. **系** 圓の中心より一點に至る距離が半徑より小なれば此點は圓内に在り,半徑に等しければ圓周上に在り,半徑より大なれば圓外に在り. [間接法]

問題

94. 圓ノ中心ハ圓ノ對稱ノ中心ナリ.

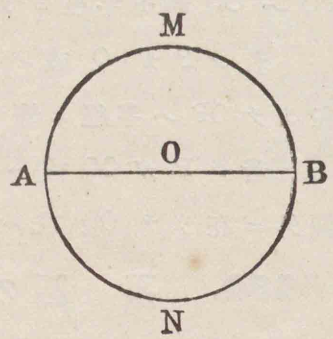
95. 圓ハ唯一ツノ中心ヲ有ス.

定理 2

181. 直徑は圓及び圓周を二等分す.

AOB ヲ圓 AMBN ノ直徑トスレバAOB ハ此圓及ビ其周ヲ二等分ス.

證明 AOB ヲ折リ目トシテ圖ANB ノ平面ヲ折リ返シ圖 AMB ノ平面ニ重ネヨ.



然ルトキハ二弧 ANB,AMB ハ全ク相合ス.

如何トナレバ若シ二弧全ク相合セザレバ其二弧ノ上ニ中心ヨリノ距離相等シカラザル點アルベシ

即チ二ツノ半徑ハ相等シカラザルコトトナル

是不合理ナリ. [166]

故ニ二弧全ク相合ス

故ニ二孤 ANB, AMB ハ相等シク各ゝ半圓周ナリ.

又直徑ノ兩側ニ在ル二弓形ハ各ゝ半圓ナルコト明カナリ.

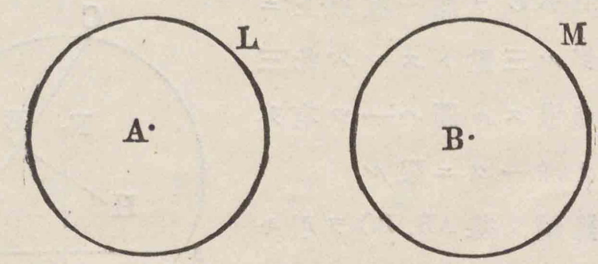
問題

96. 如何ナル弧ハ其共軛弧ト相等シキカ

97. 圓ノ直徑ハ其對稱ノ軸ナリ.

定理 3

182. 相等しき半徑の圓は全等なり



L及ビ M ヲ相等シキ半徑ノ二圓トシ其全等ナルコトヲ證明セントス.

證明 L圓ヲ取リM圓ノ上ニ重ネ中心Aヲ中心Bノ上ニ置キ而シテ[181]ニ於テノ如ク間接法ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得ベシ.

183. 系 1 相合する二圓は相等しき半徑を有す.

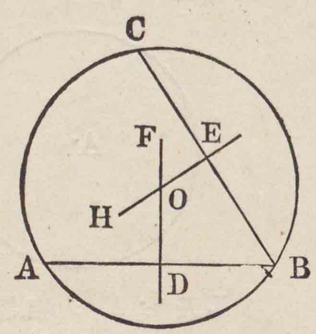
184. 系 2 二圓相合するときは其一を共通中心の周りに回轉するも二圓は常に相合す.

定　理　4

185.　同一直線上に在らざる三點を通過する圓周は一つ有り,而して唯一つに限る.

A, B, C ヲ同一直線上ニ在ラザル三點トスレバ此三點ヲ通過スル圓ハ一ツ有リ.而シテ唯一ツニ限ル.

證明　線 AB, BC ヲ引キ其各線ノ垂直二等分線 DF, EH ヲ引ケ



然レバ DF, EH ハ一點ニ於テ相交ハリ
其交點 O ハ A,B,C ヨリ等距離ニ在リ　[160]
故ニ O ヲ中心トシ OA, OB, OC ノ中ノ一ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ其圓ハ A, B, C ヲ通過ス
即チ A, B, C ヲ通過スル圓ハ一ツ有リ.

次ニ A, B ヨリ等距離ナル點ハ線 DF 外ニハ無ク又 B, C ヨリ等距離ナル點ハ線 EH 外ニハ無シ　[67]
而シテ DF, EH ハ一ツヨリ多クノ點ニ於テ相交ハルコトナシ　[24]
故ニ A, B, C ヨリ等距離ナル點ハ唯一ツニ限ル

故ニ A, B, C ヲ通過スル圓ハ唯一ツニ限ル.

186.　**系 1**　同じき三點を通過する二圓周は全く相合す.

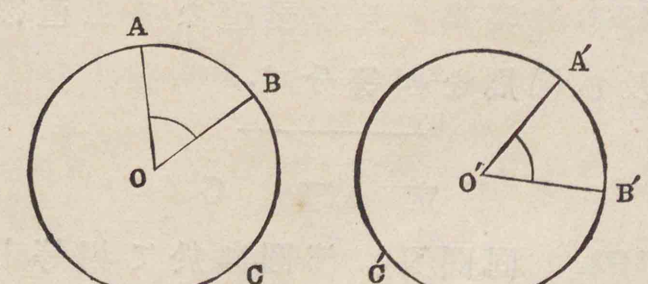
187.　**系 2**　二圓周は相合するにあらざれば二つより多くの點を共有するを得ず.

第　二　節

中心角　弦　弓形內ノ角

定　理　5

188.　同圓又は等圓に於て中心角相等しければ其二邊の夾む弧も亦相等し.



假設　ABC, A′B′C′ ヲ二等圓トシ其中心角 AOB, A′O′B′ ハ相等シトス.

終結　二孤 AB, A'B' ハ相等シ.

證明　圓 ABC ヲ取リ圓 A'B'C' ノ上ニ重ネ中心 O ヲ中心 O' ノ上ニ置ケバ二圓ハ相等シキヲ以テ其周ハ相合ス

OA ガ O'A' ニ重ナルマデ共通中心ノ周リニ ABC ヲ回轉スルモ二圓周ハ離ルヽコトナク二點 A, A' ハ相合ス

又 ∠AOB=∠A'O'B' ナルヲ以テ OB ハ O'B' ニ重ナリ二點 B, B' ハ相合ス

故ニ孤 AB ハ孤 A'B' ニ合ス

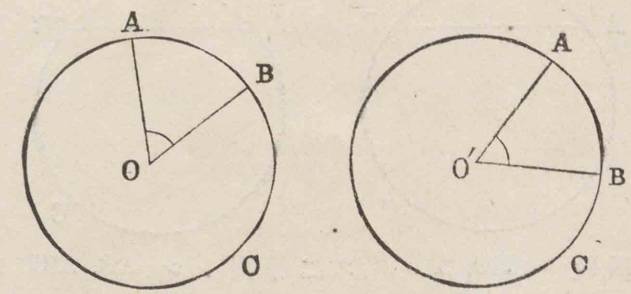
故ニ此二孤ハ相等シ.

189. **系 1**　同圓又は等圓に於て中心角不等なれば大角の二邊の夾弧は小角の二邊の夾弧より大なり.

190. **系 2**　互に垂直なる二直徑は圓及び圓周を四等分す.

定　理　6

191. 同圓又は等圓に於て相等しき弧(優弧をも含む)に對する中心角は相等し.



假設　ABC, A'B'C' ヲ二等圓トシ二孤 AB, A'B' ハ相等シトス

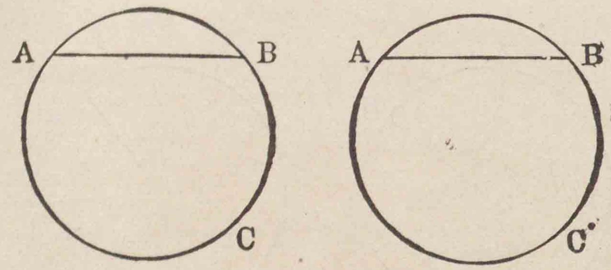
終結　∠AOB=∠A'O'B'

[188] ニ於テノ如ク一圓ヲ他ノ圓ノ上ニ重ヌルコトニ依リテ, 或ハ [189] ヲ用ヰ間接法ニ依リテ容易ニ之ヲ證明スルコトヲ得.

192. **系**　同圓又は等圓に於て弧不等なれば大弧に對する中心角は小弧に對する中心角より大なり.

定　理　7

193. 同圓又は等圓に於て相等しき弧に對する弦は相等し.



假設　ABC, A'B'C' ヲ二等圓トシ AB, A'B' ヲ其等弧トス.

終結　二弦 AB, A'B' ハ相等シ

證明　[188] ニ於テノ如ク一圓ヲ他圓ノ上ニ重ヌルコトニ依リテ二弧 AB, A'B' ノ相合スルコトヲ證明スルヲ得

因リテ二弦 AB, A'B' ハ相合ス故ニ相等シ.

194.　系　同圓又は等圓に於て弧不等なれば大弧に對する弦は小弧に對する弦より大なり.

注意　コヽニ弧ハ劣弧ヲ指ス

定理 8

195.　同圓又は等圓に於て相等しき弦に對する弧は相等し.

假設　ABC, A'B'C' ヲ二等圓トシ AB, A'B' ヲ其等弦トス.

終結　二弧 AB, A'B' ハ相等シ.

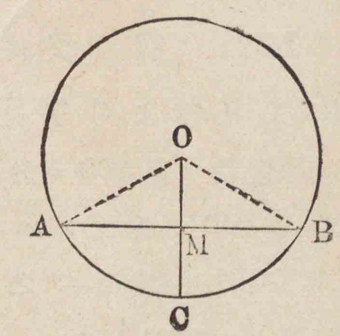
證明　[194] ヲ用ヰ間接法ニ依リテ之ヲ證明セヨ.

196.　系　同圓又は等圓に於て弦不等なれば大弦に對する弧は小弦に對する弧より大なり.

注意　コヽニ弧ハ劣弧ヲ指ス

定理 9

197.　弦に垂直なる半徑は其弦及び之に對する弧を二等分す.



假設　AB ヲ弦トシ O ヲ中心トシ OC ヲ點 M ニ於テ AB ニ垂直ナル半徑トス.

終結　AM=BM

弧AC=弧BC

證明　OA, OB ヲ引ケ 二ツノ直角三角形 OAM, OBM ハ全等ナリ　[112]

[∵ 斜邊 OA, OB ハ相等シク OM ハ兩形ニ通ズ]

故ニ　AM=BM

又　∠AOC=∠BOC

故ニ　　弧AC=弧BC　　[188]

198. 系　弦の垂直二等分線は圓の中心を通過す.

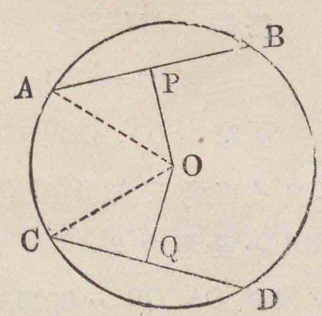
問　題

98. 圓心ヨリ弦(直徑ニアラザル)ノ中點へ引ケル直線ハ其弦ニ垂直ナリ.

99. 二ツノ同心圓ノ周ヲ一直線ニテ截レバ兩圓周ノ間ニ夾マレタル其直線ノ部分ハ相等シ.

定　理　10

199. 同圓又は等圓に於て相等しき弦は中心より等距離に在り.



假設　圓ABCニ於テAB, CDヲ等弦トシ, OP, OQヲ中心Oヨリ之ニ引ケル垂線トス.

終結　$OP=OQ$

證明　OA, OCヲ引ケ

然レバ二ツノ直角三角形AOP, COQニ於テ

$OA=OC$

$AP=CQ$　　[197]

[∵等弦AB, CDノ半ナレバナリ]

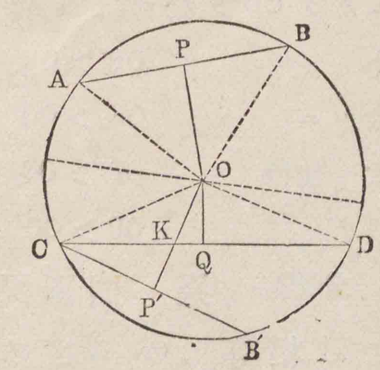
故ニ　　$\triangle AOP \equiv \triangle COQ$　　[113]

故ニ　　$OP=OQ$

200. 系　同圓又は等圓に於て中心より等距離に在る弦は相等し.

定　理　11

201. 同圓又は等圓に於て二弦不等なれば大弦は小弦よりも中心に近し.



假設　圓ABCニ於テAB, CDヲ二弦トシ

$AB<CD$トス.

又OP, OQヲ中心Oヨリ夫々二弦AB, CDニ引ケル垂線トス

終結　$OP>OQ$

證明　AO, BO, CO, DOヲ引ケ

角AOCヲ二等分スル所ノ直徑ヲ折リ目トシテ圓ヲ折リABヲ有スル半圓ノ平面ヲ他ノ半圓ノ平面ニ

重ネヨ

然レバ點Aハ點Cノ上ニ落チ弧ABハ弧CDノ上ニ重ナル

今 $\angle AOB < \angle COD$ [118]

[∵ $\triangle AOB, COD$ ニ於テ $AO=CO$, $BO=DO$, $AB<CD$]

故ニ 弧$AB<$弧CD [189]

故ニ點Bハ弧CD上ノ一點B'ト合ス

故ニCヲ除クノ外弦CB'上ノ總テノ點ハ中心OトハCDノ反對ノ側ニ在リ

因リテP'ヲ點Pノ落ツル點トスレバOP'ハ或點Kニ於テCDヲ截ル

今 $OP'>OK$ ナルコト明カナリ

然ルニ $OK>OQ$ [58]

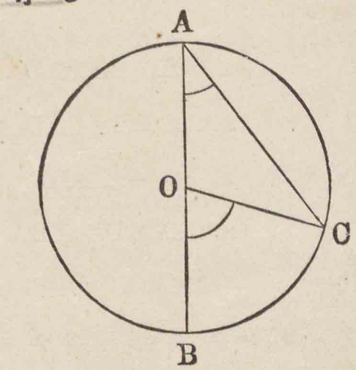
故ニ無論 $OP'>OQ$

即チ $OP>OQ$

202. 系　同圓又は等圓に於て中心より相等しからざる距離に在る弦の中，中心に近きものは之に遠きものより大なり.

定理 12

203. 周に於ての角は同弧の上に立つ所の中心角の半に等し.



假設 BACヲ弧BCノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角トシBOCヲ同弧ノ上ニ立ツ所ノ中心角トス.

終結 $\angle BAC=\dfrac{\angle BOC}{2}$.

證明 (i) 中心Oハ角BACノ一邊上ニ在リトセヨ (i)

$OC=OA$ ナルヲ以テ $\angle OAC=\angle OCA$ [109]

然ルニ $\angle BOC=\angle OAC+\angle OCA$ [103]

故ニ $\angle BOC=2\angle BAC$

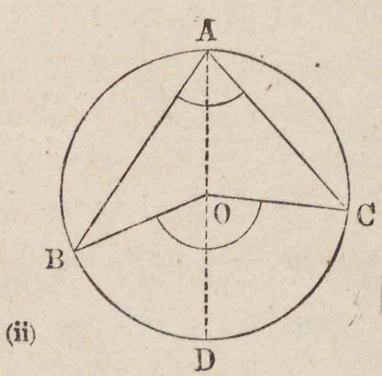
(ii) Oハ角BACノ内ニ在リトセヨ

Aヨリ直徑AODヲ引ケ

然ルトキハ(i)ニ依リテ

$\angle BOD=2\angle BAD$

$\angle COD=2\angle CAD$



(ii)

之ヲ相加フレバ

$$\angle BOD+\angle COD=2(\angle BAD+\angle CAD)$$

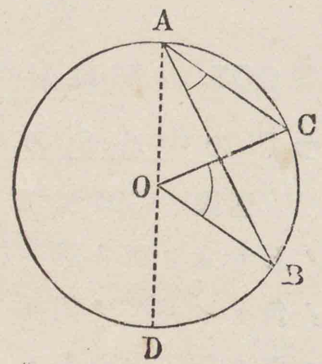
故ニ $\angle BOC=2\angle BAC$

(iii) O ハ角 BAC ノ外ニ在リトセヨ

然ルトキハ (ii) ニ於テノ如ク

$$\angle BOD=2\angle BAD$$

$$\angle COD=2\angle CAD$$



(iii)

因リテ $\angle COD-\angle BOD$

$$=2(\angle CAD-\angle BAD)$$

故ニ $\angle BOC=2\angle BAC$

故ニ何レノ場合ニ於テモ

$$\angle BAC=\frac{\angle BOC}{2}$$

204. **系 1** 半圓周の上に立つ所の周に於ての角は直角なり. [即ち半圓内の角は直角なり]

205. **系 2** 半圓周より小なる弧の上に立つ所の周に於ての角は鋭角にして半圓周より大なる弧の上に立つ所の周に於ての角は鈍角なり.

206. **系 3** 同弧の上に立つ所の周に於ての角は皆相等し. [即ち同弓形内の角は皆相等し]

問題

100. 互ニ平行ナル二弦ノ間ニ在ル二弧ハ相等シ.

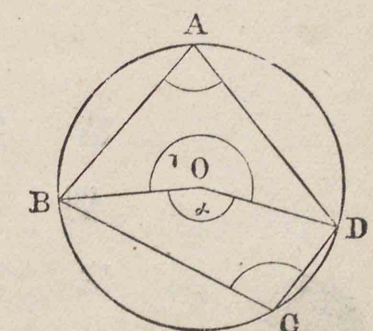
101. 二弦 AB, CD ガ圓内ノ一點 O ニ於テ相交ハレバ角 AOC ハ二弧 AC, BD ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角ノ和ニ等シ.

102. 二弦 AB, CD ノ延長ガ圓外ノ一點 O ニ於テ相交ハレバ角 AOC ハ二弧 AC, BD ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角ノ差ニ等シ.

103. △ABC ニ外接スル圓ノ中心 O ヨリ一邊 BC ニ垂線 OD ヲ引ケバ角 BOD ハ角 A ニ等シキカ或ハ其補角ナリ.

定理 13

207. 圓に内接する四邊形の對角は互に補角なり.



ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トスレバ

$$A+C=2R.\angle$$

證明 半徑 OB, OD ノナス共軛角ヲ α, γ トスレバ

$$A=\frac{\alpha}{2} \quad C=\frac{\gamma}{2}$$ [203]

故ニ $$A+C=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)=2R.\angle$$

即チ二角 A,C ハ互ニ補角ナリ.

208. 系 1　圓に內接する四邊形の外角は之に隣れる內角の對角に等し.

209 系 2　四邊形の對角の和が二直角なれば之に外接する圓を畫くことを得.

[207] 等ヲ用キ間接法ニ依リテ之ヲ證明セヨ.

問　題

104.　圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナリ.

105.　圓ニ內接スル六邊形ノ角ヲ一ツ置キニ取リタル三角ノ和ハ四直角ニ等シ.

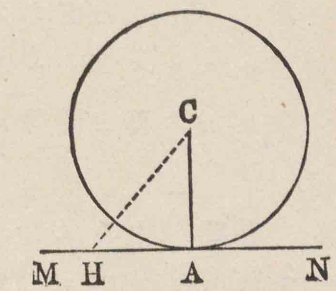
第三節

切　線

定理 14

210. 半徑が圓周に出會ふ點に於て

之に垂直なる直線は此圓の切線なり.



MN ヲ半徑 CA ノ一端 A ニ於テ之ニ垂直ナル直線トスレバ MN ハ此圓ノ切線ナリ.

證明　線 MN 上ニ點 A ノ他ノ任意ノ一點 H ヲ取リ CH ヲ結ビ付ケヨ

$CA \perp MN$ ナルヲ以テ $CA<CH$ [58]

即チ CH ハ圓ノ半徑ヨリ大ナリ

故ニ點 H ハ圓外ニ在リ [180]

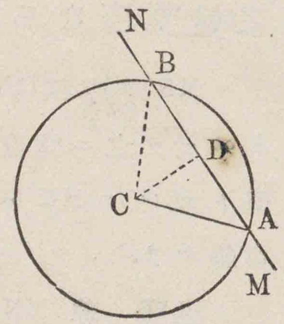
即チ MN ハ圓周ト唯一點 A ニ於テ出會フ

故ニ MN ハ點 A ニ於テ圓ニ切線ナリ.

定理 15

211. 半徑が圓周に出會ふ點に於て之に垂直ならざる直線は再び圓周に出會ふ.

MNヲ半徑CAノ一端Aニ於テCAニ垂直ナラザル直線トスレバMNハAノ他ノ點ニ於テ再ビ圓周ニ出會フ.



證明 中心CヨリMNニ垂線CDヲ引キMN上ニ於テDAニ等シクDBヲ取リCBヲ結ビ付ケヨ

CDハABノ垂直二等分線ナルヲ以テ

CA=CB [67]

即チCBハ圓ノ半徑ニ等シ

故ニ點Bハ圓周上ノ一點ナリ [180]

故ニMNハ點Bニ於テ再ビ圓周ニ出會フ.

212. 系1 切線と其切點へ引ける半徑とは互に垂直なり.

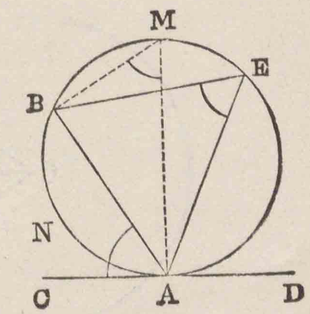
213. 系2 切線に其切點に於て垂直なる直線は圓の中心を通過す,又中心より切線へ引ける垂線は切點を通過す.

定理 16

214. 切線及び其切點より引ける弦

の夾む角は此角內の弧の上に立つ所の周に於ての角に等し.

假設 CDヲ圓ANBノ點Aニ於テノ切線トシABヲAヨリ引ケル弦トス.



終結 角BACハ弧ANBノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角AEBニ等シ.

證明 直徑AMヲ引キBMヲ結ビ付ケヨ

然レバMACハ直角ナルヲ以テ [212]

BACハBAMノ餘角ナリ

又MBAハ直角ナルヲ以テ [204]

AMBモ亦BAMノ餘角ナリ

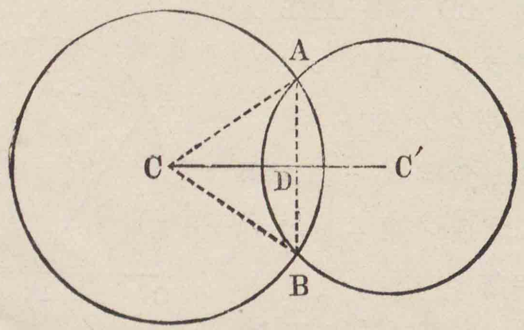
故ニ $\angle BAC = \angle AMB = \angle AEB$ [206]

215. 系 弦の一端を通過して引ける直線と此弦との夾角が此角內の弧の上に立つ所の周に於ての角に等しければ其直線は圓の切線なり.

定理 17

216. 二圓周が其中心を通過する直

線上に在らざる一點に於て出會ふときは他の一點に於て再び出會ふ。



C及ビC′ガ中心ナル二圓周ガ直線CC′上ニ在ラザル一點Aニ於テ出會フトキハ此二圓周ハAノ他ノ一點ニ於テ再ビ出會フ.

證明 AヨリCC′ヘ垂線ADヲ引キ之ヲ延長シADニ等シクDBヲ取レ

AC, BCヲ結ビ付ケヨ

CDハABノ垂直二等分線ナルヲ以テ

CA=CB　[67]

故ニ點Bハ中心Cナル圓周上ニ在リ

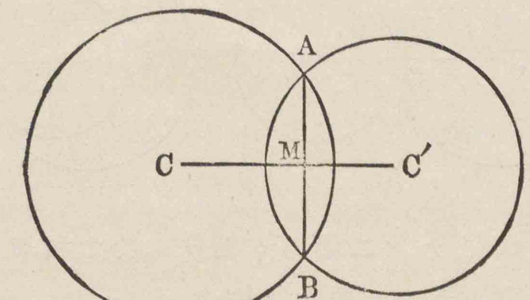
同樣ニ點Bハ中心C′ナル圓周上ニ在リ

即チ二圓周ハ點Bニ於テ出會フ

定理 18

217. 相交はる二圓の中心を通過す

る直線は此二圓に共通なる弦の垂直二等分線なり.



C及ビC′ヲ二點A,Bニ於テ相交ハル二圓ノ中心トシABヲ之ニ共通ナル弦トスレバ線CC′ハABノ垂直二等分線ナリ.

證明 ABノ垂直二等分線ハ唯一ツ有リ C及ビC′ヲ通過スル直線モ亦唯一ツ有リ

而シテABノ垂直二等分線ハC及ビC′ヲ通過ス　[198]

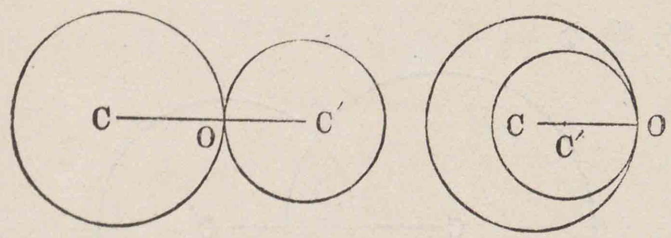
故ニC及ビC′ヲ通過スル直線ハ即チABノ垂直二等分線ナラザル可カラズ

注意 上ノ證明法ハ**同一法**ト稱スルモノナリ.

定理 19

218. 二圓相切するときは切點は中

心を結び付くる直線上に在り.



(i)　(ii)

中心 C, C' ナル二圓周ガ點 O ニ於テ相切スルトキハ O ハ CC' ナル直線上ニ在リ.

證明　若シ點 O ガ CC' ナル線上ニ在ラザレバ此二圓周ハ O ノ他ニ尙一點ヲ共有スベシ　[215]

是假設ニ合ハズ

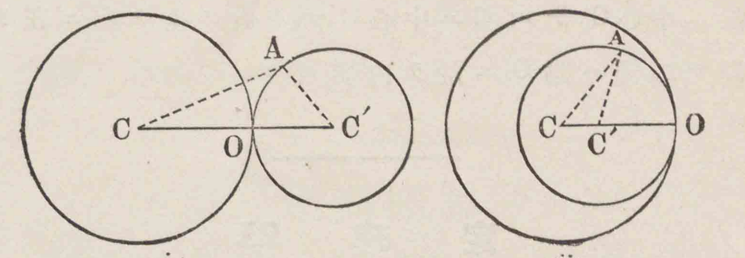
如何トナレバ二圓周ハ相切スルヲ以テ之ニ共通ナル點ハ唯一ツナリ

故ニ點 O ハ CC' ナル線上ニ在リ.

219.　系　相切する二圓は其切點に於て共通の切線を有す.

定理　20

220.　二圓周が其中心を結び付くる直線上の一點に於て出會ふときは此二圓周は外切し或は內切す.



(i)　(ii)

中心ガ C 及ビ C' ナル二圓周ガ直線 CC' 上ノ一點 O ニ於テ出會フトキハ此二圓周ハ點 O ニ於テ外切シ或ハ內切ス.

證明　中心 C' ナル圓周上ニ O ノ他ノ任意ノ一點 A ヲ取リ AC, AC', ヲ結ビ付ケヨ

(i)ニ於テハ　$AC+AC'>CC'$

而シテ　$AC'=OC'$

故ニ　$AC>OC$

故ニ點 A ハ中心 C ナル圓ノ外ニ在リ

故ニ中心 C' ナル圓ハ中心 C ナル圓ノ全ク外ニ在リ

同様ニ中心 C ナル圓ハ中心 C' ナル圓ノ全ク外ニ在ルコトヲ證明スルヲ得.

即チ二圓ハ點 O ニ於テ外切ス

(ii)ニ於テハ　$AC<CC'+AC'$

而シテ　$AC'=OC'$

故ニ　$AC<OC$

故ニ點 A ハ中心 C ナル圓ノ內ニ在リ

故ニ中心C′ナル圓ハ中心Cナル圓ノ全ク內ニ在リ
即チ二圓ハ點Oニ於テ內切ス.

定理 21

221. $\boxed{\text{i}}$ 二圓が出會ふことなく其各が全く他の外に在れば二つの中心の距離は二半徑の和より大なり.

$\boxed{\text{ii}}$ 二圓が外切すれば二つの中心の距離は二半徑の和に等し.

$\boxed{\text{iii}}$ 二圓が相交はれば二つの中心の距離は二半徑の和より小にして其差より大なり.

$\boxed{\text{iv}}$ 二圓が內切すれば二つの中心の距離は二半徑の差に等し.

$\boxed{\text{v}}$ 二圓が出會ふことなく其一が全く他の內にあれば二つの中心の距離は二半徑の差より小なり.

[此定理ノ證明ハ容易ナルヲ以テ之ヲ略ス]

問題

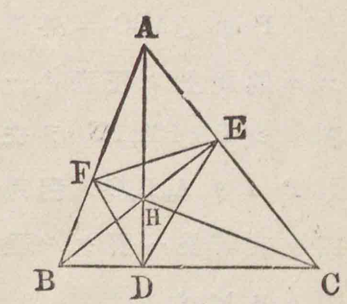
106. [221]ノ定理ノ逆ヲ述べ且ツ之ヲ證明セヨ.

第二編問題集ノ一

222. 問題 107. 三ツノ角ガ皆鋭角ナル三角形ノ各頂點ヨリ其對邊へ引ケル垂線ハ此等ノ垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形ノ角ヲ夫々二等分ス.

三角形ノ各頂點ヨリ其對邊へ引ケル垂線ノ足ヲ頂點トスル三角形ヲ原三角形ノ **垂足三角形** ト稱ス.

AD, BE, CF ヲ △ABC ノ頂點 A, B, C ヨリ夫々其對邊ニ引ケル垂線トスレバ AD, BE, CF ハ △DEF ノ角 D, E, F ヲ夫々二等分ス.



證明 H ヲ △ABC ノ垂心トセヨ

二角 HFB 及ビ HDB ハ各直角ナルヲ以テ四邊形 BDHF ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得 [209]

故ニ $\angle HDF = \angle HBF$ [206]

[∵同ジ弧FHノ上ニ立ツ周ニ於テノ角ナレバナリ]

同樣ニ　$\angle HDE=\angle HCE$

ナルコトヲ證明スルヲ得

然ルニ　$\angle HBF=\angle HCE$

[∵何レモ$\angle BAC$ノ餘角ナレバナリ]

故ニ　$\angle HDF=\angle HDE$

即チ AD ハ角 EDF ヲ二等分ス.

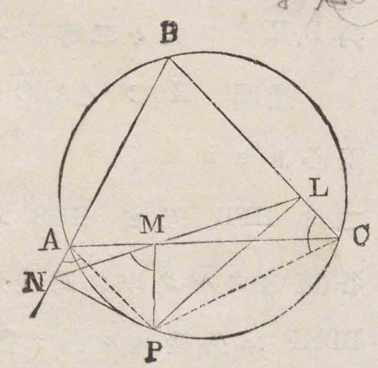
BE 及ビ CF ニ就キテモ同樣ニ證明スルコトヲ得ベシ.

注意　ABC ガ鈍角三角形ナル場合ヲ考フベシ.

223. 問題 108. 三角形ニ外接スル圓周上ノ任意ノ一點ヨリ其邊或ハ邊ノ延長ヘ引ケル三垂線ノ足ハ同一ノ直線上ニ在リ.　シムソン定義

P ヲ △ABC ニ外接スル圓周上ノ任意ノ一點トシ PL, PM, PN ヲ夫々 P ヨリ A, B, C ノ對邊或ハ其延長ヘ引ケル垂線トスレバ

三點 L, M, N ハ同一ノ直線上ニ在リ.



證明　LM, MN, AP, CP ヲ結ビ付ケヨ

四邊形 PMAN ノ相對スル二角ハ互ニ補角ナルヲ以テ之ニ外接スル圓ヲ書クコトヲ得　[209]

故ニ　$\angle PMN=\angle PAN$　[206]

又　$\angle PAN=\angle BCP$　[208]

故ニ　$\angle PMN=\angle BCP$

又 PLC, PMC ハ各直角三角形ナルヲ以テ四邊形 LMPC ニ外接スル圓ヲ書クコトヲ得　[142]

故ニ　$\angle BCP+\angle LMP=2R.\angle$　[207]

故ニ　$\angle PMN+\angle LMP=2R.\angle$

故ニ LM, MN ハ同一ノ直線上ニ在リ.　[54]

即チ三點 L, M, N ハ同一ノ直線上ニ在リ.

109. 圓ノ内或ハ外ニ在ル一點ヨリ其周ヘ引ケル諸直線ノ中,之ヲ延長スレバ中心ヲ通過スルモノハ最モ短シ.

110. 圓ノ内或ハ外ニ在ル一點ヨリ其周ニ引ケル諸直線ノ中,中心ヲ通過シテ後周ニ出會フモノハ最モ長シ.

111. 圓内ノ一定點ヲ通過スル所ノ諸弦ノ中此點ヲ通過スル直徑ニ垂直ナルモノハ最モ短シ.

112. 直徑ノ兩端ヨリ引ケル互ニ平行ナル二弦ハ相等シ.

113. 圓ノ中心ヲ通過セザル一ツノ弦ヲ二等分

スル直徑ハ此弦ニ平行ナル他ノ總テノ弦ヲ二等分ス.

114. 一圓ガ其直徑ヲ半徑トセル他ノ一圓ト內切ス,今其切點ヲ通過シテ大圓ノ任意ノ弦ヲ引ケバ此弦ハ小圓ノ周ニ依リテ二等分セラル.

○**115.** ABC ヲ圓ニ內接スル正三角形トシ P ヲ弧 BC 上ノ任意ノ點トスレバ $PA=PB+PC$

116. 圓ニ內接スル四邊形ノ一雙ノ對邊相等シケレバ他ノ一雙ノ對邊ハ互ニ平行ナリ.

117. 圓周上ノ一定點ヲ通過シテ引ケル總テノ弦ノ中點ハ一定圓周上ニ在リ.

118. 相切スル二圓ノ二直徑ガ互ニ平行ナレバ切點ト一直徑ノ兩端トヲ通過スル二線ハ亦他ノ直徑ノ兩端ヲ通過ス.

119. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナレバ其交點ヨリ一邊ヘ引ケル垂線ノ延長ハ此邊ノ對邊ヲ二等分ス.

120. 鋭角三角形ノ垂心ハ其垂足三角形ノ內心ナリ.

121. 鋭角三角形ノ各頂點ハ其垂足三角形ノ傍心ナリ

122. 內切シ或ハ外切スル二圓ノ切點ヲ通過シテ二線 AB, CD ヲ引ケバ二弦 AC 及ビ BD ハ互ニ平行ナリ.

第四節

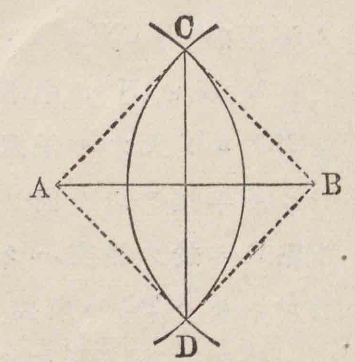
作圖題

224. コヽニ再ビ[27]及ビ[28]ニ掲ゲタル作圖題ノ定義等ヲ一讀スルヲ要ス.

定規ト「コムパス」トヲ以テ解法ヲ得タル後ハ三角定規,分度器等ヲ實地ノ用ニ供スルモ妨ナシ.

作圖題 1

225. 與へられたる有限直線ABの垂直二等分線を引くこと.



解法 Aヲ中心トシABノ半ヨリ大ナル直線ヲ半徑トシテ圓ヲ書キ又Bヲ中心トシ同半徑ヲ以テ圓ヲ書キ前ノ圓ト二點C,Dニ於テ相交ハラシメCDヲ結ビ付ケヨ

然ルトキハCDハ所要ノ直線ナリ.

證明 二點C,Dハ各、A,Bヨリ等距離ナルヲ以テCDハABノ垂直二等分線ナリ. [68]

問題

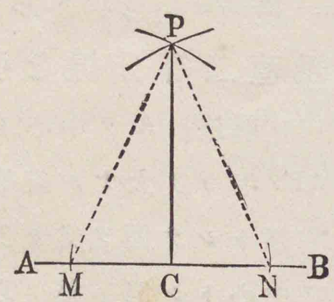
123. 與ヘラレタル有限直線ヲ四等分セヨ.

124. 圓ノ與ヘラレタル弧ヲ二等分セヨ.

125. 與ヘラレタル三角形ノ外接圓ヲ畫ケ.

作圖題 2

226. 與へられたる直線 AB 上の定點 C に於て之に垂線を引くこと.



解法 線 AB 上ニ與ヘラレタル點 C ヨリ任意ノ等距離 CM, CN ヲ取レ

M 及ビ N ヲ中心トシ MC ヨリ大ナル任意ノ同ジキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ點 P ニ於テ相交ハラシメ PC ヲ結ビ付ケヨ

然ルトキハ PC ハ所要ノ直線ナリ.

證明 PM, PN ヲ引ケ

然レバ　$\triangle PMC \equiv \triangle PNC$　[116]

[∵其三邊夫々相等シ]

因リテ　$\angle PCM = \angle PCN$

故ニ　$PC \perp AB$

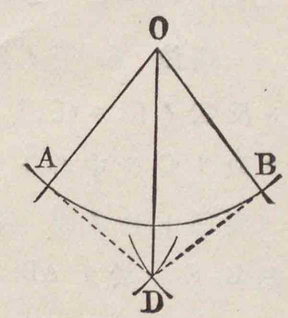
注意 作圖題 1 ノ如ク [68] ニ依リテ之ヲ證明スルコトヲ得.

問題

126. 斜邊ト一邊トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ

作圖題 3

227. 與へられたる角 AOB を二等分すること.



解法 頂點 O ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ二邊ヲ二點 A, B ニ於テ截ラシメヨ.

A, B ヲ中心トシ直線 AB ノ半ヨリ大ナル同ジ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ

D ヲ其周ノ二交點中ノ角 AOB 內ニ在ル方トシ OD ヲ結ビ付ケヨ

然ルトキハ OD ハ所要ノ二等分線ナリ.

證明 AD, BD ヲ引ケ

然レバ　$\triangle AOD \equiv \triangle BOD$　[116]

因リテ　　$\angle AOD=\angle BOD$

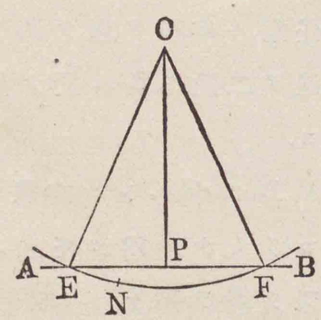
問題

127. DO ノ延長ハ $\angle AOB$ ノ共軛角ヲ二等分スルコトヲ證明セヨ.

128. 45°, 135°, 22° 30′ ノ角ヲ作レ.

作圖題 4

228. 與へられたる直線 AB 外の一定點 C より之に垂線を引くこと.



解法 線 AB ノ定點 C ト反對ノ側ニ任意ノ點 N ヲ取リ C ヲ中心トシ CN ヲ半徑トシテ圓ヲ書キ二點 E, F 、於テ AB ニ交ハラシメヨ

CE, CF ヲ結ビ付ケ角 ECF ノ二等分線 CP ヲ引キ P ニ於テ AB ト交ハラシメヨ　[227]

然ルトキハ CP ハ所要ノ垂線ナリ.

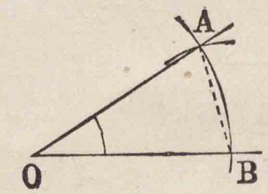
證明　　$\triangle CPE \equiv \triangle CPF$　[106]

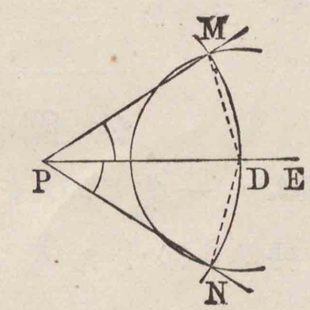
因リテ　　$\angle CPE=\angle CPF$

故ニ　　$CP \perp AB$

作圖題 5

229. 與へられたる有限直線 PE の一端 P に於て之と與へられたる角 AOB に等しき角をなす所の直線を引くこと.





解法　O ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ A, B ニ於テ二邊ヲ截ラシメ

弦 AB ヲ引ケ

P ヲ中心トシ OA ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ PE ヲ D ニ於テ截ラシメヨ

D ヲ中心トシ BA ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ前ノ圓ト二點 M, N ニ於テ相交ハラシメ

PM, PN ヲ引ケ

然ルトキハ PM, PN ハ所要ノ直線ナリ.

證明 DM, DN ヲ引ケ

$\triangle AOB \equiv \triangle MPD$ [116]

因リテ $\angle AOB = \angle MPD$

即チ PM ハ PE ト AOB ニ等シキ角ヲ爲ス.

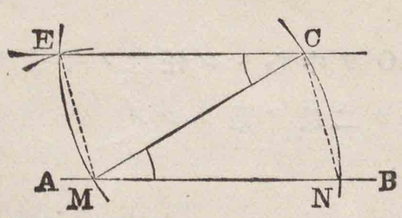
同樣ニ PN モ PE ト AOB ニ等シキ角ヲ爲ス.

問題

129. 三角形ノ二角ヲ知リテ他ノ一角ヲ作レ.

作圖題 6

230. 一定點 C を通過し與へられたる直線 AB に平行なる直線を引くこと.



解法 AB 上ニ任意ノ一點 M ヲ取リ MC ヲ引ケ

C ヲ中心トシ CM ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケ

M ヲ中心トシ同半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ N ニ於テ AB

ヲ截ラシメヨ

M ヲ中心トシ NC ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ之ト前ノ圓トノ交點ヲ E トシ CE ヲ引ケ

然ルトキハ CE ハ所要ノ平行線ナリ.

證明 $\triangle CME \equiv \triangle CMN$ [116]

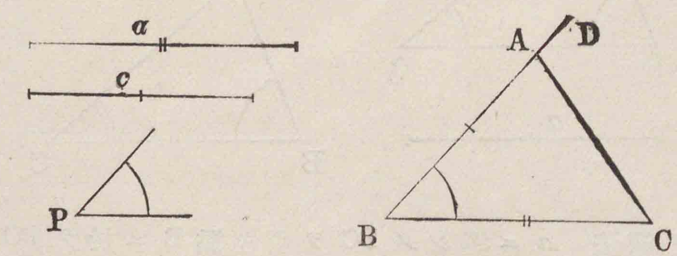
而シテ CN=ME ナルヲ以テ

$\angle ECM = \angle CMN$

故ニ $EC \parallel AB$ [79]

作圖題 7

231. 二邊 a, c 及び其夾角 P を知りて三角形を作ること.



解法 a ニ等シク BC ヲ引キ點 B ニ於テ BC ト P ニ等シキ角ヲナス所ノ直線 BD ヲ引ケ [229]

BD ヨリ c ニ等シク BA ヲ截リ

AC ヲ引ケ

然ルトキハ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

證明 如何トナレバ三角形ABCニ於テ

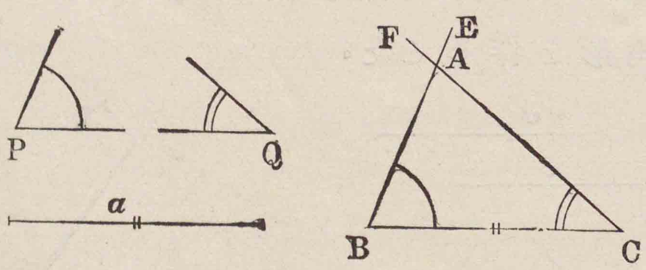
$BC=a \qquad AB=c \qquad \angle ABC=\angle P$

問題

130. 與ヘラレタル直線ヲ等邊ノ一トシテ二等邊ナル直角三角形ヲ作レ.

作圖題 8

232. 二角P,Q及び其間の一邊aを知りて三角形を作ること.



解法 aニ等シクBCヲ引キ點Bニ於テBCト
Pニ等シキ角ヲナス所ノ直線BEヲ引ケ
又點Cニ於テCBトQニ等シキ角ヲナス所ノ直線
CFヲ引キ二角EBC,FCBヲシテBCノ同ジキ側ニ
在ラシメ
點AヲBEトCFトノ交點トセヨ

然ルトキハABCハ所要ノ三角形ナリ.

證明 如何トナレバ三角形ABCニ於テ

$BC=a \qquad B=P \qquad C=Q$

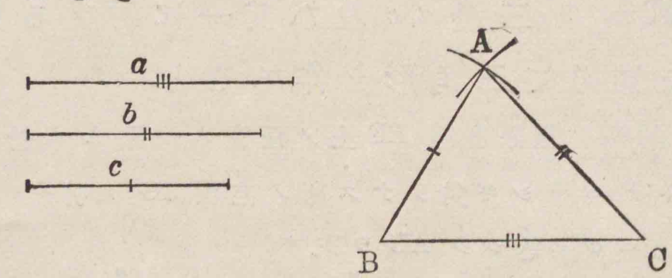
注意 與ヘラレタル二角ノ和ハ二直角ヨリ小ナルヲ要ス. 然ラザレバ本題ハ解ナシ.

問題

131. 斜邊ト一鋭角トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ.

作圖題 9

233. 三邊a, b, cを知りて三角形を作ること.



解法 aニ等シクBCヲ引ケ
Cヲ中心トシbニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ
又Bヲ中心トシcニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ前
ノ圓ト點Aニ於テ相交ハラシメ

AB, AC ヲ引ケ

然ルトキハ ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

證明 如何トナレバ三角形 ABC ノ三邊 BC, CA, AB ハ夫々 a, b, c ニ等シ.

注意 與ヘラレタル三線ノ中何レノ二ツノ和モ他ノ一ツヨリ大ナルヲ要ス. 然ラザレバ本題ハ解ナシ.

問題

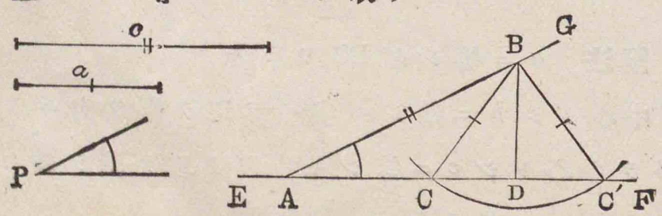
132. 一邊 a ヲ知リテ正三角形ヲ作レ.

133. 直角ヲ三等分セヨ.

作圖題 10

234. 二邊 a, c 及び其一に對する角 P を知りて三角形を作ること.

解法 無限直線 EF 上ノ任意ノ一點 A ニ於テ AF ト P ニ等シキ角ヲナス所ノ直線 AG ヲ引ケ AG 上ニ c ニ等シク AB ヲ取リ



B ヲ中心トシ a ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書ケ

∠P ノ大サ及ビ二邊 a, c ノ長サノ異ナルニ從ヒテ種々ノ塲合アリ

BD ヲ B ヨリ EF ヘ引ケル垂線トシ之ヲ p トセヨ.

第一 P ガ鋭角ナル塲合

(1) 若シ $a<p$ ナレバ

圓ハ EF ニ出會ハザルヲ以テ解ナシ.

(2) 若シ $a=p$ ナレバ

圓ハ點 D ニ於テ EF ニ切シ題意ニ適スル一ツノ三角形ヲ得. 直角三角形 ABD 是ナリ.

(3) 若シ $a>p$. $a<c$ ナレバ

圓ハ A ノ同ジキ側ニ在ル二點 C, C′ ニ於テ EF ニ交ハル

BC 及ビ BC′ ヲ結ビ付ケヨ

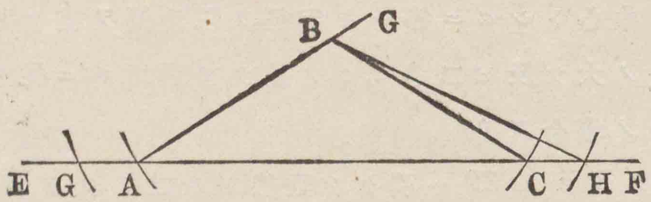
然レバ ABC, ABC′ ハ所要ノ三角形ナリ.

(4) 若シ $a=c$ ナレバ

圓ハ A 及ビ C ニ於テ EF ニ交ハリ ABC ナル所要ノ三角形ヲ得.

(5) 若シ $a>c$ ナレバ

圓ハ A ノ兩側ニ在ル二點 G, H ニ於テ EF ニ交ハリ題意ニ適スル ABH ナル一三角形ヲ得.



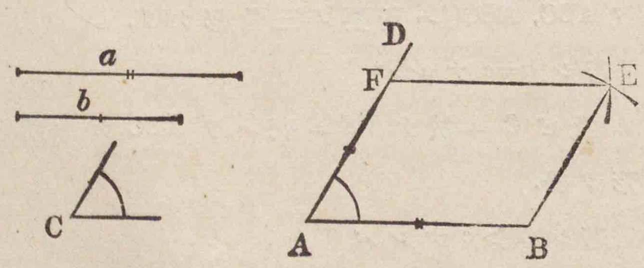
上ノ解法ノ證明及ビ次ニ記スル二ツノ場合ノ解法ト證明トハコヽニ略ス．學生宜シク自カラ之ヲナスベシ．

第二　Pガ直角ナル場合

第三　Pガ鈍角ナル場合

作圖題 11

235. 二邊 a, b 及び其夾角 C を知りて平行四邊形を作ること．



解法　a ニ等シク直線 AB ヲ引キ

點 A ニ於テ AB ト C ニ等シキ角ヲナス所ノ直線 ADヲ引ケ　[229]

AD 上ニ b ニ等シク AF ヲ取リ

F ヲ中心トシ a ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ

又 B ヲ中心トシ b ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ前ノ圓ト點 E ニ於テ相交ハラシメ

EB, EF ヲ引ケ

然ルトキ ABEF ハ所要ノ平行四邊形ナリ．

證明　如何トナレバ四邊形 ABEF ハ平行四邊形ニシテ　[137]

而シテ　$AB=a,\ AF=b,\ \angle FAB=C$ ナレバナリ．

問題

134. 一邊ヲ知リテ正方形ヲ作レ．

135. 相隣レル二邊ヲ知リテ矩形ヲ作レ．

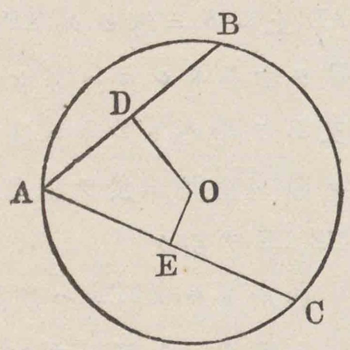
136. (i) 一邊及ビ一對角線 (ii) 一對角線及ビ二對角線ノ夾角ヲ知リテ矩形ヲ作レ．

137. (i) 一邊及ビ一角 (ii) 一邊及ビ一對角線 (iii) 兩對角線 (iv) 一角及ビ其頂點ヨリ出ヅル對角線ヲ知リテ菱形ヲ作レ．

作圖題 12

236. 與へられたる圓 ABC の中心を看出すこと．

解法 圓周上ノ任意ノ一點Aヨリ任意ノ二弦AB,ACヲ引ケ AB及ビACノ垂直二等分線ヲ引キ點Oニ於テ相交ハラシメヨ



然ルトキハOハ所要ノ中心ナリ.

證明 點Oハ三點A,B,Cヨリ等距離ニ在リ [160]

故ニOヨリ此三點中ノ一ニ至ル距離ヲ半徑トシテ圓ヲ書ケバ其圓ハ他ノ二點ヲ通過スベシ

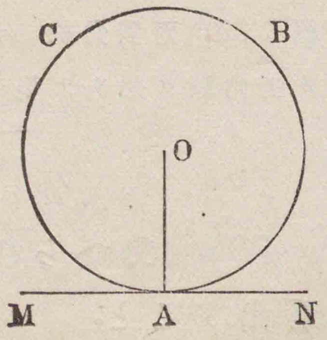
而シテ此圓ハ與ヘラレタル圓ト相合ス [186]

故ニOハ與ヘラレタル圓ノ中心ナリ.

注意 此作圖題ニ依リテ與ヘラレタル圓弧ノ中心ヲ看出スコトヲ得.

作圖題 13

237. 與へられたる圓周ABC上の定點Aに於て之に切線を引くこと.



解法 中心Oヲ看出シ [236]

半徑OAヲ引キ

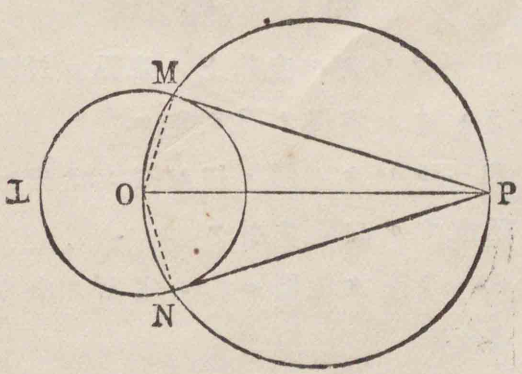
點Aニ於テOAニ垂線MNヲ引ケ [226]

然ルトキハMNハ所要ノ切線ナリ.

證明 如何トナレバMNハ半徑ガ圓周ニ出會フ點ニ於テ之ニ垂直ナレバナリ. [210]

○作圖題 14

238. 與へられたる圓LMN外の定點Pより之に切線を引くこと.



解法 中心Oヲ看出シOPヲ引ケ

OPヲ直徑トシテ圓ヲ書キ與ヘラレタル圓ト二點M,Nニ於テ相交ハラシメPM,PNヲ引ケ

然ルトキハPM,PNハ所要ノ切線ナリ.

證明 半徑 OM ヲ引ケ

OMP ハ半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ナリ [204]

故ニ PM ハ與ヘラレタル圓ノ切線ナリ [210]

同樣ニ PN モ亦與ヘラレタル圓ノ切線ナルコトヲ證明スルヲ得.

239. 系 圓外の一點より之に引ける二つの切線(PM,PN)は相等しく而して此點と中心とを結び付くる直線(PO)と等角をなす.

問　題

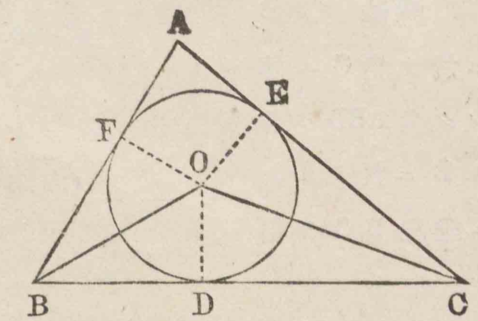
138. 與ヘラレタル直線上ノ定點ニ於テ之ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ書ケ.

139. 與ヘラレタル圓ニ切シ而シテ與ヘラレタル直線ニ垂直ナル直線ヲ引ケ.

140. 與ヘラレタル圓ニ切シ定點ヲ中心トナス所ノ圓ヲ書ケ.

作圖題 15

240. 與へられたる三角形 ABC に内接する圓を畫くこと.



解法 二角 B, C ノ二等分線ヲ引キ點 O ニ於テ相交ハラシメ O ヨリ BC ニ垂線 OD ヲ引ケ

O ヲ中心トシ OD ヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケ

此圓ハ所要ノ圓ナリ.

證明 CA, AB ヘ夫々垂線 OE, OF ヲ引ケ

然レバ OE, OF ハ何レモ OD ニ等シク [159]

BC, CA, AB ハ夫々 OD, OE, OF ニ垂直ナルヲ以テ O ガ中心, OD ガ半徑ナル圓ハ D, E, F ナル三點ヲ通過シ且此等ノ點ニ於テ三邊ニ切ス [210]

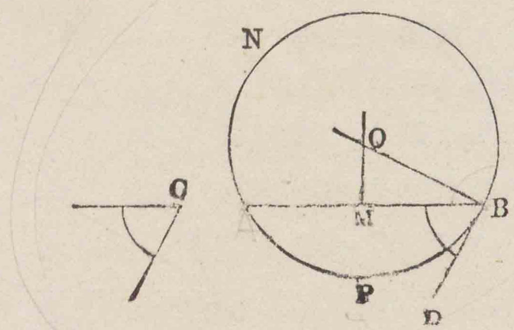
即チ圓 DEF ハ三角形 ABC ニ内接スル圓ナリ [177]

注意 三角形ニ内接スル圓ノ中心ハ其内心ナリ. [159]

作圖題 16

241. 與へられたる直線 AB 上に與へられたる角 C を含む所の弓形を畫くこと.

解法　點Bニ於テ角Cニ等シク角ABDヲ作リBニ於テDBニ垂線BOヲ引ケ



ABノ垂直二等分線ヲ引キBOトOニ於テ相交ハラシメヨ

Oヲ中心トシOBヲ半徑トシテ圓ヲ書ケ

然ルトキハ角ABD外ニ在ル弓形ANBハ所要ノ弓形ナリ.

證明　OA=OBナルヲ以テ　[67]

此圓周ハ點Aヲ通過ス

BD⊥BOナルヲ以テBDハ圓ノ切線ナリ　[210]

故ニABDハ弧APBノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角

即チ弓形ANB內ノ角ニ等シ　[214]

而シテ　$\angle ABD=\angle C$

故ニANBハ所要ノ弓形ナリ.

第二編問題集ノ二

141. 一定點ヨリ一線ヲ引キテ二ツノ與ヘラレタル平行線ヲ截リ其間ニ夾マルル部分ヲシテ所定ノ長サニ等シカラシメヨ.

142. 一定點ヲ通過シ相交ハル二線ノ各ト等角ヲ爲ス所ノ一線ヲ引ケ.

143. △ABCノ底邊BCニ一平行線ヲ引キ二邊AB, ACヲ夫々二點D, Eニ於テ截リDE=DB+ECノ如クナラシメヨ.

144. 與ヘラレタル有限直線ヲ任意ノ數ニ等分セヨ.

145. 與ヘラレタル圓外ノ一定點ヨリ割線ヲ引キ其圓內ニ在ル部分ガ與ヘラレタル直線ニ等シクナル如クセヨ.

146. 底邊,頂角及ビ其頂點ヨリ引ケル中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

147. 底邊,頂角及ビ底邊ノ一端ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

148. 底邊,其一端ニ於テノ角及ビ他ノ二邊ノ和又ハ差ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

149. 二角及ビ周ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

150. 二邊及ビ第三邊ヘ引ケル中線ヲ知リテ三

角形ヲ作レ.

151. 與ヘラレタル圓ニ内接シ與ヘラレタル三角形ト等角ナル三角形ヲ作レ.

152. 一對角線ト一邊トノ和ヲ知リテ正方形ヲ作レ.

153. 一定點ヲ通過シ與ヘラレタル一直線ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫ケ.

154. 一定點ヲ通過シ與ヘラレタル直線上ノ定點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ.

第三編
比及び比例　相似形

第一節
定義　比及び比例の理に關する定理

242. 定義　量Aが量Bを丁度若干度含むときはAをBの**倍量**と稱す. 又BをAの**約量**と稱す.

例ヘバ一尺ハ一寸ノ倍量ニシテ一寸ハ一尺ノ約量ナリ.

243. 定義　二つ或は二つより多くの量が各,他の一量の倍量なるときは此諸量を**通約スベキ量**と稱す. 後の一量を前の諸量の**公約量**と稱す.

公約量を有せざる二つの量を**通約スベカラザル量**と稱す.

244. 定義　量Aの之と同種類の量

Bに對する比とはBを單位としてAを計るとき之を表はす數なり. $\frac{A}{B}$ 又は A:B にて之を表はす。

AとBとが通約すべき量なるときは其比は整數又は分數なり.

例ヘバ一間ノ一尺ニ對スル比ハ 6 ニシテ一間ノ一丈ニ對スル比ハ $\frac{3}{5}$ ナリ.

AとBとが通約すべからざる量なるときは其比は不盡數なり.

例ヘバ正方形ノ對角線ノ其一邊ニ對スル比ハ不盡數 $\sqrt{2}$ ナリ. (其證明ハ略ス) 然レドモ其近似ノ値ハ何程近似ノ度マデモ分數或ハ小數ヲ以テ之ヲ表ハスコトヲ得ベシ. 例ヘバ $\sqrt{2}$ ノ近似數ハ 1·4, 1·41, 1·414, 1·4142 等ナリ.

注意　同種類ノ量ニアラザレバ比ヲ有セズ.

245. 量Bを單位として量Aを計るときは之を表はす數をAの數價と稱す.

[244] ノ例ニ於テ 6, $\frac{3}{5}$, ハ何レモ一間ノ數價ニシテ $\sqrt{2}$ ハ正方形ノ對角線ノ數價ナリ.

是ヨリ以下一量ノ他ノ一量ニ對スル比トイフ

トキハ其二量ハ通約スベキモノト假定ス. 因リテ數價ハ恒ニ整數又ハ分數ナリ.

故ニ n ヲ以テ上述ノ如キ數價ヲ表ハセバ

$$A=nB$$

246. **定義**　AのBに對する比がMのNに對する比に等しきときは此四量は**比例ヲナス**といふ. 此四量を**比例量**と稱す.

二量 A, B ト二量 M, N トハ同種類ナルモ或ハ然ラザルモ可ナリ. 五寸ノ線ノ三寸ノ線ニ對スル比ハ百坪ノ地面ノ六十坪ノ地面ニ對スル比ニ等シ. 是其種類ノ相異ナレル例ナリ.

上ノ比例ヲ　A:B::M:N

或ハ

$$\frac{A}{B}=\frac{M}{N}$$

ト記シ之ヲ「AノBニ對スル比ハMノNニ對スル比ニ等シ」ト讀ム.

AとNとを比例の**外項**と稱しBとMとを其**内項**と稱す. Nを A, B, M の**第四比例項**と稱す. AとMとは**相對應ス**といひ又BとNとは相對應すといふ.

247. **定義**　比例 A:B::B:C に於

てはCをA及びBの**第三比例項**と稱し
BをA及びCの間の**比例中項**と稱す.

此比例ニ於テハA, B及ビCハ皆同種類ノ量ナラザル可カラズ.

248. **定義**　二つの比A:B及びB:Aの各を他の**反比**と稱す.

249. 量Aの量Bに對する比は其各量を同一の單位を以て計れば其數價の比に等し. 即ち若し $A=aL$, $B=bL$ なるときは $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ なり.

例ヘバ五尺ノ三尺ニ對スル比ハ $\frac{5}{3}$ ナリ.

250. A, B, C, D を比例量とし A, B を同一單位にて計りたる數價を夫々 a, b とし又 C, D を同一單位にて計りたる數價を夫々 c, d とすれば

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

如何トナレバ $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$ [249]

而シテ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$

故ニ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

逆に $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

注意　AトCトハ同種類ノ量ニアラザルモ妨ゲナシ.

251. [249]に陳述する所に由りて之を見れば量の比は其數價の比に等しきを以て若し所論の量が皆同種類なるときは數の比に關する事項を直ちに量の比に關する事項となすことを得べし.

然れども所論の量が皆同種類のものにあらざるときは必ずしも斯の如くなすことを得ず.

252. **定理1**　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

注意　コヽニa, b, c, dハ任意ノ數ヲ表ハス下ノ四定理ニ於テモ亦然リ.

253. **定理2**　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

254.　**定理 3**　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ \text{又}\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

255.　**定理 4**　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ なるときは

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

256.　**定理 5**　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ なるときは

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

257.　上ニ掲ゲタル五ツノ定理ノ證明ハ簡單ナルヲ以テ之ヲ略ス．學生宜シク自カラ之ヲナスベシ．

上の定理の中 **1, 3,** 及び **4** の三定理は a, b, c, d を量と見做すときは直ちに量の比に關する定理となる．[a, b なる前の二量と c, d なる後の二量とが同種類なると異種類なるとに拘はらず]

2 及び **5** の二定理は a, b, c, d 等を皆同種類の量と見做したるときにのみ直ちに量の比に關する定理となる．

第二節

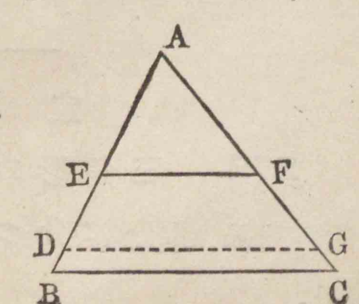
比及ビ比例ノ應用

258.　**定義**　有限直線上に在る一點は之を**内分ス**といふ，或は單に之を**分ツ**といふ．

有限直線の延長上に在る一點は之を**外分ス**といふ．何れの場合に於ても此直線の兩端より分點に至る距離を其**分線**と稱す．内分の場合に於ては二分線の和が此直線に等し，外分の場合に於ては其差が之に等し．

定理 6

259.　三角形の底邊に平行に引ける直線は二邊を相等しき比を有する部分に分つ．



三角形 ABC ニ於テ EF ガ底邊 BC ニ平行ナレバ

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$$

證明　BD ヲ AE, EB ノ公約量トシ

$AE=mBD$　$EB=nBD$　トスレバ

$$\frac{AE}{EB}=\frac{m}{n} \qquad [249]$$

AE ヲ m 等分シ EB ヲ n 等分セヨ.

各分點ヲ通過シテ BC ニ平行線ヲ引ケバ此等ノ線ハ AF ヲ m 等分シ FC ヲ n 等分ス.　[139]

CG ヲ其等部分ノ一トスレバ

$AF=mCG$　$FC=nCG$

故ニ　$\frac{AF}{FC}=\frac{m}{n}$

因リテ　$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$

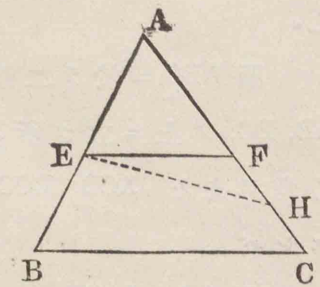
注意　本定理ハ AE, EB ガ通約スベカラザルトキニモ亦眞ナリ. 其證明ハ略ス.

260.　系 1　$\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

261.　系 2　$\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AF}=\frac{EB}{FC}$

定理 7

262.　三角形の二邊を相等しき比を有する部分に分つ直線は底邊に平行なり.



三角形 ABC ニ於テ線 EF ハ二邊 AB, AC ニ交ハリ　$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$

ナルトキハ　$EF \parallel BC$

證明　E ヨリ BC ニ平行線ヲ引キ H ヲ AC トノ交點トセヨ

然レバ　$\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HC}$　[259]

而シテ　$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}$　[假設]

故ニ　$\frac{AH}{HC}=\frac{AF}{FC}$

故ニ　$\frac{AH+HC}{HC}=\frac{AF+FC}{FC}$　即チ　$\frac{AC}{HC}=\frac{AC}{FC}$　[254]

故ニ　$HC=FC$

因リテ EH ハ EF ニ合ス

故ニ　$EF \parallel BC$

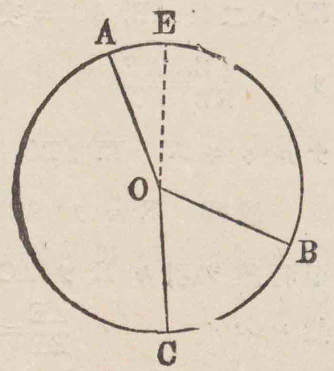
263.　系　$\triangle ABC$ に於て $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$ なるときは　$EF \parallel BC$

定理 8

264.　同圓又は等圓に於て二つの弧の比は其上に立つ所の中心角の比に等

し.

圓 ABC ニ於テ二弧 AB, BC, ノ上ニ立ツ所ノ中心角ヲ夫々 AOB, BOC トスレバ



$$\frac{\text{弧 AB}}{\text{弧 BC}}=\frac{\angle AOB}{\angle BOC}$$

證明　AE ヲ二弧 AB, BC ノ公約量トシ

$$AB=mAE,\quad BC=nAE \text{ トスレバ}$$

$$\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}$$

AB ヲ m 等分シ BC ヲ n 等分セヨ

各分點ヘ半徑ヲ引ケバ此等ノ半徑ハ角 AOB ヲ m 等分シ角 BOC ヲ n 等分ス　　[191]

故ニ　$$\frac{\angle AOB}{\angle BOC}=\frac{m}{n}$$

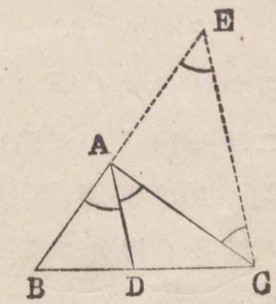
故ニ　$$\frac{AB}{BC}=\frac{\angle AOB}{\angle BOC}$$

265.　中心ニ於テノ單位角ニ對スル弧ヲ單位弧トスレバ中心角ノ數價ト之ニ對スル弧ノ數價トハ同一ナリ．角ニ於テノ如ク圓周ノ $\frac{1}{360}$ ヲ度ト稱シ一度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ分ト稱シ分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ秒ト稱ス．

定　理　9

266.　三角形の頂角の二等分線は底邊を他の二邊の比に內分す．

三角形 ABC ノ頂角 BAC ノ二等分線 AD ガ點 D ニ於テ底邊 BC ニ出會フトキハ



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

證明　C ヨリ DA ニ平行線ヲ引キ BA ノ延長ト點 E ニ於テ交ハラシムレバ

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AE} \qquad [259]$$

然ルニ　$\angle DAC=\angle ACE$　　[76]

　　　　$\angle BAD=\angle AEC$　　[77]

而シテ　$\angle DAC=\angle BAD$　　[假設]

故ニ　$\angle ACE=\angle AEC$

故ニ　$AE=AC$

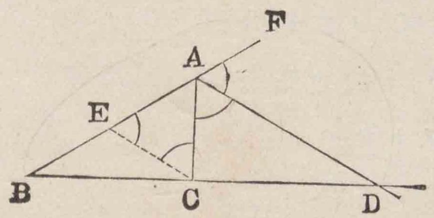
因リテ　$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

267.　**系**　三角形の底邊を他の二邊の比に分つ點を頂點に結び付くる直線は頂角を二等分す．

定理 10

268. 三角形の頂角の外角の二等分線は底邊を他の二邊の比に外分す.

三角形ABCノ頂角ノ外角CAFノ二等分線ADガ點Dニ於テ底邊BCノ延長ニ出會フトキハ



$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$$

[266] ノ定理ノ如クニシテ之ヲ證明スルコトヲ得. 學生自カラ之ヲ爲スベシ.

注意 AB=AC ナルトキハ ∠CAF ノ二等分線ハ BC ニ平行ナリ.

269. 系 三角形の底邊を他の二邊の比に外分する點より頂點へ引ける直線は頂角の外角を二等分す.

第三節

相似形

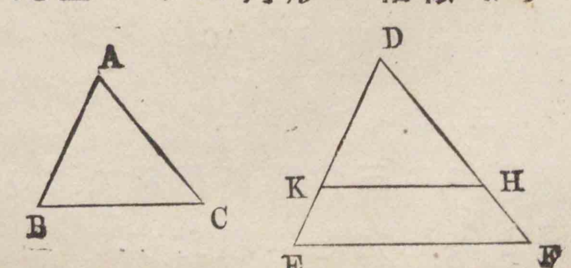
270. 定義 二つの多角形に於て各形の同じき順に取りたる角が夫々相等しければ此二つの多角形は**互ニ等角ナリ**といふ. 其相等しき角を**對應角**といひ,對應角の間に在る邊を**對應邊**といふ.

271. 定義 二つの多角形が互に等角にして其對應邊の比が皆相等しきときは之を**相似多角形**と稱す.

通例之を略して單に**相似形**と稱す.

定理 11

272. 二つの三角形の三角相等しければ此二つの三角形は**相似**なり.



△ABC, DEF ニ於テ

$A=D \quad B=E \quad C=F$ ナルトキハ

此兩三角形ハ相似ナリ.

證明 △ABC ヲ取リ之ヲ △DEF ノ上ニ重子角 A ヲ角 D ノ上ニ重ネ邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ネヨ

然レバ $A=D$ ナルヲ以テ AC ハ DF ニ重ナル

而シテ點 B ハ DE 或ハ其延長上ノ一點 K ノ上ニ落チ點 C ハ DF 或ハ其延長上ノ一點 H ノ上ニ落ツベシ

KH ヲ結ビ付ケヨ

$\angle DKH=\angle E$ ナルヲ以テ $KH \parallel EF$

故ニ $$\frac{DK}{DE}=\frac{DH}{DF} \qquad [260]$$

即チ $$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF} \cdots\cdots (1)$$

又 $\angle B$ ヲ $\angle E$ ニ重スルコトニ依リテ

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF} \cdots\cdots (2)$$

ナルコトヲ證明スルヲ得

故ニ(1)及ビ(2)ヨリ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$

因リテ二ツノ三角形ハ相似ナリ.

273. 二つの三角形が相似なるときは對應邊と對應角とは相對す.

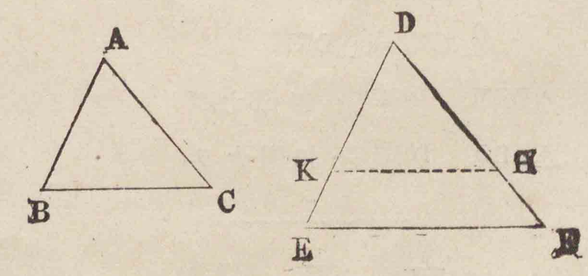
問題

155. 二ツノ直角三角形ニ於テ一鋭角相等シケレバ此兩形ハ相似ナリ.

156. 三角形 ABC ニ於テ AD, BE ガ A, B ヨリ其對邊ヘ引ケル垂線ナレバ三角形 CDE, ABC ハ相似ナリ.

定理 12

274. 二つの三角形に於て同じき順に取りたる邊が比例を爲すときは此二つの三角形は相似なり.



△ABC, DEF ニ於テ

$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}$ ナルトキハ

此兩三角形ハ相似ナリ.

證明 DE 上ニ AB ニ等シク DK ヲ取リ又 DF

上ニ AC ニ等シク DH ヲ取リ KH ヲ引ケ

然レバ $\frac{DK}{DE}=\frac{DH}{DF}$

故ニ KH ∥ EF [263]

即チ △DKH, DEF ハ互ニ等角ナル三角形トナルヲ以テ相似ナリ [272]

故ニ $\frac{DK}{DE}=\frac{KH}{EF}$

[∵ DK ト DE, KH ト EF ハ何レモ對應邊ナリ]

然ルニ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ [假設]

而シテ DK＝AB

故ニ $\frac{KH}{EF}=\frac{BC}{EF}$

故ニ KH＝BC

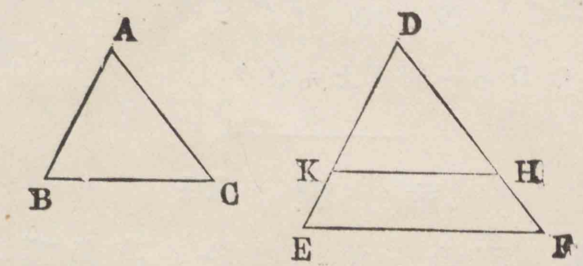
故ニ △ABC ≡ △DKH [116]

然ルニ △DKH, DEF ハ相似ナリ

故ニ △ABC, DEF ハ相似ナリ.

定理 13

275. 二つの三角形に於て一角が相等しく此角を夾む二邊が比例を爲すときは此二つの三角形は相似なり



△ABC, DEF ニ於テ

A＝D $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$ ナルトキハ

此兩三角形ハ相似ナリ.

證明 (272) ニ於テノ如ク △ABC ヲ △DEF ノ上ニ重ネ DKH ヲ ABC ノ取リタル位置トセヨ

然レバ $\frac{DK}{DE}=\frac{DH}{DF}$

故ニ KH ∥ EF [263]

即チ △DKH, DEF ハ互ニ等角ナル三角形トナルヲ以テ相似ナリ [272]

故ニ △ABC, DEF ハ相似ナリ

問題

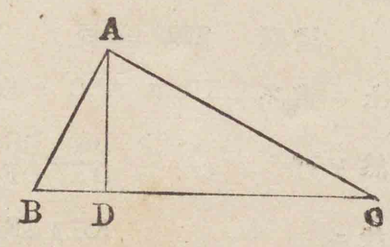
157. 三角形ノ一頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ガ此形内ニ在リテ底邊ノ二ツノ部分ノ間ノ比例中項ナルトキハ本形ハ直角三角形ナリ.

158. 二線 AB, CD 或ハ其各線ノ延長ガ一點 O ニ

於テ相交ハリ $\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}$ ナル比例ヲナストキハ四點 A, B, C, D ハ一圓周上ニ在リ.

定理 14

276. 直角三角形に於て直角項より斜邊へ引ける垂線は之を全形と相似にして又互に相似なる二つの三角形に分つ.



直角三角形 ABC ニ於テ AD ヲ直角項 A ヨリ斜邊 BC へ引ケル垂線トスレバ △ABD, ACD ハ何レモ △ABC ト相似ニシテ又互ニ相似ナリ.

證明 △ABD, ABC ニ於テ二角 BAC, ADB ハ各,直角ナルヲ以テ相等シク角 B ハ兩形ニ通ズ故ニ他ノ一角モ亦相等シ.

故ニ此兩形ハ相似ナリ. [272]

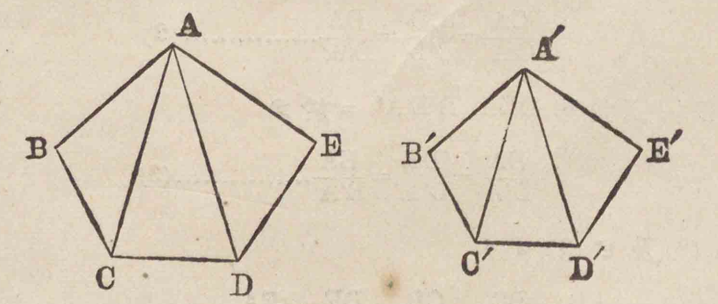
同様ニ △ACD, ABC モ亦相似ナリ.

又 △ABD, ACD ハ各,同一ノ三角形 ABC ト相似ナルヲ以テ互ニ相似ナリ.

277. 系 直角三角形の直角項より斜邊へ引ける垂線は斜邊の二つの部分の比例中項なり, 而して其各邊は斜邊及び斜邊の其邊に隣れる部分の間の比例中項なり.

定理 15

278. 二つの多角形が夫々相似にして相似の位置に在る同數の三角形より成るときは此二つの多角形は相似なり



多角形 ABCDE ハ ABC, ACD, ADE ナル三ツノ三角形ヨリ成リ又多角形 A′B′C′D′E′ ハ夫々 ABC, ACD, ADE ト相似ニシテ且ツ相似ノ位置ニ在ル A′B′C′, A′C′D′, A′D′E′ ナル三ツノ三角形ヨリ成ルトキハ此兩多角形ハ相似ナリ.

證明 相似三角形ノ對應角ナルヲ以テ

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

同理ニ依リ $\angle BCA = \angle B'C'A'$ $\angle ACD = \angle A'C'D'$

因リテ $\angle BCD = \angle B'C'D'$

同樣ニ三ツノ角 CDE, DEA, EAB ハ夫々三ツノ角 C'D'E', D'E'A', E'A'B' ニ等シキコトヲ證明スルヲ得.

故ニ ABCDE, A'B'C'D'E' ハ互ニ等角ナル多角形ナリ.

是ヨリ其對應邊ガ比例ヲナスコトヲ證明セン

相似三角形 ABC, A'B'C' ニ於テ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又相似三角 ACD, A'C'D' ニ於テ

$$\frac{CA}{C'A'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

又相似三角形 DEA, D'E'A' ニ於テ

$$\frac{DA}{D'A'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

即チ二ツノ多角形ノ對應邊ハ比例ヲナス

故ニ此二ツノ多角形ハ相似ナリ.

279. 系 二つの多角形が相似なるときは之を相似にして且相似の位置に在る同數の三角形に分つことを得.

第三編問題集ノ一

159. 二ツノ三角形ノ三邊ガ夫々平行ナレバ此兩形ハ相似ナリ.

160. 二ツノ三角形ノ三邊ガ夫々垂直ナレバ此兩形ハ相似ナリ.

161. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ノ一端 B ヲ中心トシ BC ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ CA 或ハ其延長ヲ點 D ニ於テ截レバ BC ハ CA 及ビ CD ノ間ノ比例中項ナリ.

162. 二ツノ相似多角形ノ周ノ比ハ其任意ノ二ツノ對應邊ノ比ニ等シ.

163. 二圓ガ內切スルトキハ其切點ヲ通過スル所ノ大圓ノ弦ハ小圓ノ周ニ依リテ一定ノ比ヲ有スル二ツノ部分ニ分タル.

164. 二ツノ相似三角形ノ對應角頂ヨリ夫々其對邊ヘ引ケル二ツノ垂線ノ比ハ其任意ノ二ツノ對應邊ノ比ニ等シ.

165. 二ツノ四角形ニ於テ其三ツノ角ガ夫々相等シク一雙ノ等角ヲ夾ム邊ガ相等シキ二角ノ間ノ

邊ガ對應ナル如ク比例ヲナストキハ此兩形ハ相似ナリ.

166. 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊ヲ D ニ於テ截リ其外接圓ノ周ヲ E ニ於テ截ルトキハ

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$$

167. 梯形ノ對角線ノ交點ヲ通過シテ底邊ニ平行ナル直線ノ二邊ノ間ニ在ル部分ハ此交點ニ於テ二等分セラル.

168. 一點ヨリ引ケル三線ガ二平行線ヲ夫々 A, B, C 及ビ A′, B′, C′, ナル點ニ於テ截ルトキハ

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

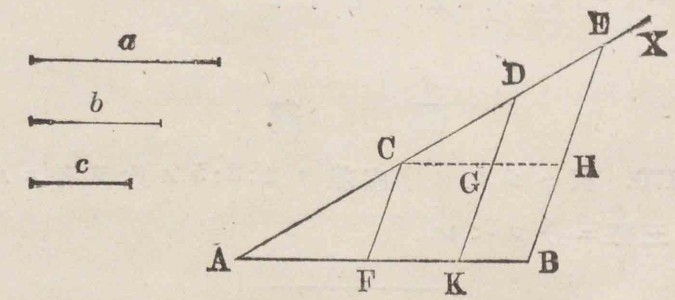
169. C, C′ ガ夫々二平行線 AB, A′B′ ヲ相等シカラザル比ニ内分スル點ナルカ或ハ同ジキ比ニ外分スル點ナルトキハ AA′, BB′, CC′ ハ一點ヲ通過ス

第四節

作圖題

作圖題 1

280. 與へられたる直線 AB を與へられたる數直線 a, b, c に比例すべき部分に分つこと.



解法 點 A ヨリ AB ト任意ノ角ヲナストコロノ直線 AX ヲ引ケ

AX 上ニ a ニ等シク AC ヲ, b ニ等シク CD ヲ, c ニ等シク DE ヲ取リ, BE ヲ引ケ

C 及ビ D ヨリ EB ニ平行線ヲ引キ F 及ビ K ヲ AB トノ交點トセヨ

然ルトキハ F, K ハ AB ヲ要スル如ク分ツ點ナリ.

證明 CF, DK ハ各々 EB ニ平行ナルヲ以テ互ニ平行ナリ [82]

故ニ $$\frac{AF}{FK}=\frac{AC}{CD}=\frac{a}{b}\cdots\cdots(1)$$ [259]

C ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ G 及ビ H ヲ夫々 DK 及ビ EB トノ交點トスレバ

$$\frac{CG}{GH}=\frac{CD}{DE} \quad 即チ \quad \frac{FK}{KB}=\frac{b}{c} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

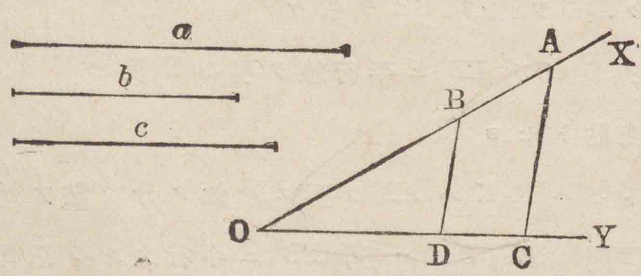
(1) 及ビ (2) ヨリ $\dfrac{AF}{a}=\dfrac{FK}{b}=\dfrac{KB}{c}$

問　題

170. 與ヘラレタル直線ヲ 2:3:5 ノ比ヲ有スル所ノ三部ニ分ツベシ.

作圖題 2

281. 三つの與へられたる直線 a, b, c の第四比例項を求むること.



解法 任意ノ大サノ角 XOY ヲ作リ其一邊 OX 上ニ a ニ等シク OA ヲ, b ニ等シク OB ヲ取レ
又他ノ一邊 OY 上ニ c ニ等シク OC ヲ取レ
AC ヲ結ビ付ケ B ヨリ之ニ平行線 BD ヲ引キ, D ヲ OY トノ交點トセヨ

然ルトキハ OD ハ所要ノ直線ナリ.

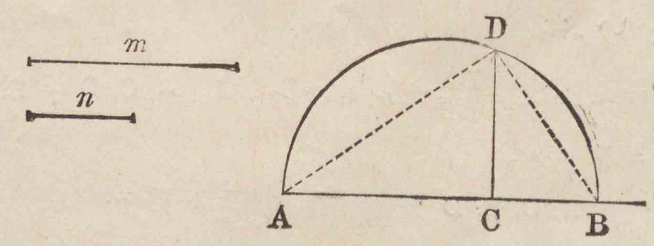
證明 BD ∥ AC ナルヲ以テ

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD} \quad 即チ \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{OD}$$

282. 系 二つの與へられたる直線の第三比例項を求む.

作圖題 3

283. 二つの與へられたる直線 m, n の間の比例中項を求むること.



解法 無限直線上 m ニ等シク AC ヲ, n ニ等シク CB ヲ取リ, AB ヲ直徑トシテ其上ニ半圓ヲ書ケ
C ヨリ AB ニ垂線 CD ヲ引キ, D ヲ之ト圓周トノ交點トセヨ.

然ルトキハ CD ハ所要ノ比例中項ナリ.

證明 AD, BD ヲ引ケ

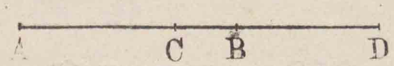
ADB ハ半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ナリ

而シテ DC ハ AB ニ垂直ナリ [作圖]

故ニ DC ハ AC, CB ノ比例中項ナリ [277]

即チ $\frac{m}{DC}=\frac{DC}{n}$

284. **定義** 一直線が一點に於て任意の比に内分せられ又他の一點に於て同じき比に外分せらるるときは



此直線は此二點に於て**調和ニ分タレタリ**といふ.

例へバ $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ ナルトキハ AB ハ C, D ニ於テ調和ニ分タル.

四點 A, C, B, D ヲ **調和列點**ト稱ス.

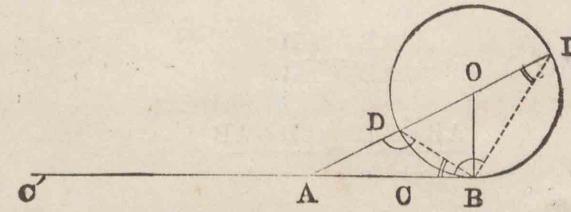
問題

171. △ABC (AB, AC ハ不等トス) ノ角 A ノ二等分線及ビ其外角ノ二等分線ハ邊 BC ヲ調和ニ分ツ

172. 與ヘラレタル直線ヲ 2:3 ノ如ク調和ニ分ツベシ

作圖題 4

285. 與へられたる直線 AB を内分又外分し一分線をして全線と他の一分線との比例中項に等しからしむること



解法 B ニ於テ AB ニ垂線ヲ引キ之ヨリ AB ノ半ニ等シク BO ヲ取レ

O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トシテ圓ヲ書ケ

A, O ヲ通過シ一直線ヲ引キ D, D′ ニ於テ圓周ト相交ハラシメヨ

AB 上ニ AD ニ等シク AC ヲ取リ, 又 BA ノ延長上ニ AD′ ニ等シク AC′ ヲ取レ

然ルトキハ C, C′ ハ所要ノ點ナリ.

證明 OB⊥AB ナルヲ以テ AB ハ圓ノ切線ナリ.

因リテ △ABD, AD′B ノ三ツノ角ハ夫々相等シ [214]

故ニ此兩形ハ相似ナリ [272]

故ニ $\frac{AD'}{AB}=\frac{AB}{AD}=\frac{AB}{AC}$ ......(1)

故ニ　$\dfrac{AD'-AB}{AB}=\dfrac{AB-AC}{AC}$　[254]

而シテ　$AD'-AB=AD'-DD'=AD=AC$

故ニ　$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{BC}{AC}$　即チ　$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{BC}$

故ニ AB ハ點 C ニ於テ要スル如ク內分セラル

(1)ヨリ　$\dfrac{AB}{AD'}=\dfrac{AD}{AB}$　[252]

故ニ　$\dfrac{AB+AD'}{AD'}=\dfrac{AD+AB}{AB}$　[254]

而シテ　$AB+AD'=AB+AC'=BC'$

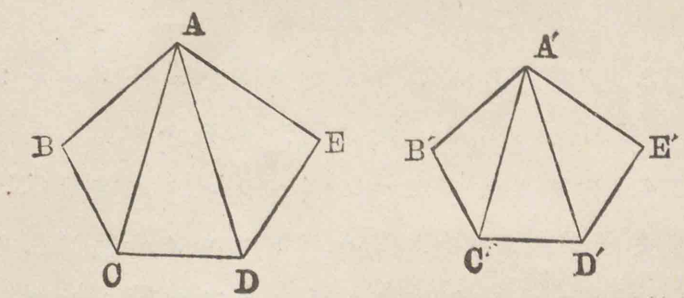
$AD+AB=AD+DD'=AD'=AC'$

故ニ　$\dfrac{BC'}{AC'}=\dfrac{AC'}{AB}$

故ニ AB ハ點 C′ ニ於テ要スル如ク外分セラル.

作圖題 5

285. 直線 A′B′ 上に他の直線 AB 上の與へられたる多角形 ABCDE と相似にして此二直線が對應邊となるが如き多角形を作ること.



解法　A ヨリ對角線 AC, AD ヲ引ケ

A′ ヨリ ∠BAC ニ等シク ∠B′A′C′ ヲ作レ

B′ ヨリ ∠ABC ニ等シキ角ヲ B′A′ トナス直線ヲ引キ

A′C′ ト C′ ニ於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ △ABC, A′B′C′ ハ相似ナリ.

又 A′ ヨリ ∠CAD ニ等シク ∠C′A′D′ ヲ作レ

C′ ヨリ ∠ACD ニ等シキ角ヲ C′A′ トナス直線ヲ引キ

A′D′ ト D′ ニ於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ △ACD, A′C′D′ ハ相似ナリ.

同樣ニ △ADE ト相似ニシテ且相似ノ位置ニ在ル △A′D′E′ ヲ作レ.

斯ノ如クニシテ ABCDE ト相似ナル多角形 A′B′C′D′E′ ヲ得　[278]

而シテ AB, A′B′ ハ兩形ノ對應邊ナリ.

故ニ A′B′C′D′E′ ハ所要ノ多角形ナリ.

第三編問題集ノ二

173. 直線 AB ガ C, D ニ於テ調和ニ分タルルトキハ直線 CD ハ A, B ニ於テ調和ニ分タル.

174. 定點 A ヨリ二ツノ與ヘラレタル直線 OX, OY ト夫々 P, Q ニ於テ交ハルトコロノ一線ヲ引キ OP:OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニセヨ.

175. 定點 O ヨリ一直線 OA ヲ引キ他ノ二定點 P, Q ヨリ OA ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニセヨ.

176. 頂角底邊及ビ他ノ二邊ノ比ヲ知リテ三角形ヲ作レ. [266 ヲ參照セヨ]

第五節
軌跡

287. 二つの定理の中其一つの假設と終結とが夫々他の一つの終結と假設とを否定したるものなるときは此二つの定理は互に對偶なりといふ.

例ヘバ「有限直線ノ垂直二等分線上ノ點ハ其線ノ兩端ヨリ等距離ニ在リ」 [67]

ナル定理ト「有限直線ノ兩端ヨリノ距離不等ナル點ハ此直線ノ垂直二等分線上ニ在ラズ」

ナル定理トハ互ニ對偶ナリ.

一定理ガ眞ナルトキハ其對偶モ亦眞ナラザル可カラズ.

288. **定義** 或線あり其上に在る點は總て或與へられたる要件に適し而して其線外には此要件に適する點なきときは其線を此要件に適する點の**軌跡**と稱す.

例ヘバコヽニ一ツノ圓アリ其中心ヲ O トシ其半徑ヲ a トスレバ其周上ノ點ハ總テ O ヨリ a ナル距離ニ在リ而シテ他ニハ a ナル距離ノ點ナシ.故ニ

圓周は一定點より一定の距離に在る點の軌跡なり.

又有限直線 AB ノ垂直二等分線ナル MN 上ノ總テノ點ハ兩端 A, B ヨリ等距離ニ在リ而シテ MN 外ニハ A, B ヨリ等距離ノ點ナシ. 故ニ

有限直線の垂直二等分線は其兩端より等距離なる點の軌跡なり.

289. 或線(L)が或與へられたる要件(A)に適する點の軌跡なりといふことを得るには下の二定理を證明するを要す.

(1) 線L上に在る總ての點は要件Aに適す.

(2) 線L上に在らざる點は要件Aに適せず.

又は(2)の代りに其對偶(3)を取り(1)及び(3)の二定理を證明するも可なり.

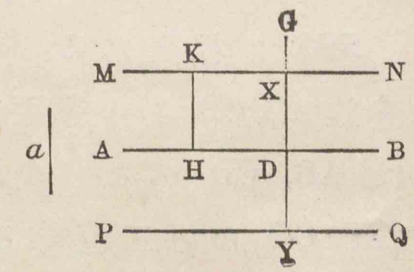
(3) 要件Aに適する點は線L上に在り.

又は(3)及び(1)の對偶(4)を證明するも可なり.

(4) 要件Aに適せざる點は線L上に在らず.

軌跡 1

290. 與へられたる直線ABより a なる一定の距離に在る點の軌跡は線ABの兩側に於て之より a なる距離に在る一雙の平行直線MN, PQなり.



前節ニ述ベタル(1)及ビ(2)ニ依リテ之ヲ證明セントス.

證明 KヲMN, PQ中ノ一ツナルMN上ノ任意ノ一點トシKヨリABヘ垂線KHヲ引ケ

然レバ　$KH=a$

即チ點KハABヨリ a ニ等シキ距離ニ在リ

因リテMN, PQ上ノ總テノ點ハABヨリ a ニ等シキ距離ニ在リ. [之ヲ(1)ノ證明トス]

次ニGヲMN及ビPQ外ノ任意ノ一點トセヨ GヨリABヘ垂線GDヲ引キGD及ビ其延長ヲシテMN, PQト夫々X, Yニ於テ交ハラシメヨ

然レバ $DX=a$, $DY=a$ ナルヲ以テ DGハ a ニ等シカラズ即チ點GヨリABニ至ル距離ハ a ニ等シカラズ

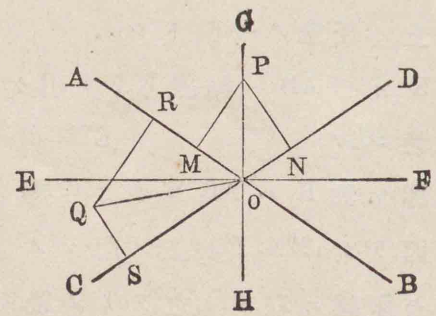
故ニMN及ビPQ外ニハABニ至ル距離ガ a ニ等シキ點ナシ. [之ヲ(2)ノ證明トス]

故ニ AB ヨリ a ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハMN, PQ ナル一雙ノ平行直線ナリ.

軌　跡　2

291. 相交はる二つの與へられたる直線AB, CDより等距離に在る點の軌跡はAB, CDがなす角を二等分する所のEF, GHなる二直線なり

[289] ニ述ベタル(3)及ビ(4)ニ依リテ之ヲ證明セントス.



證明　PヲAB, CDヨリ等距離ナル任意ノ一點トシPヨリABニ垂線PMヲ引キCDニ垂線PNヲ引ケ

然レバ　$PM=PN$　[假設]

POヲ結ビ付ケヨ

然レバ　$\triangle POM \equiv \triangle PON$　[113]

故ニ　$\angle POM=\angle PON$

二點M, Nハ必ズOPノ反對ノ側ニ在リ如何トナレバ若シM,NガOPノ同側ニ在リトスレバ

$\angle POM=\angle PON$ ニアラズシテ $\angle POM \sim \angle PON=\angle MON$ ナルベケレバナリ]

故ニPOハ角AODノ二等分線ナルGHト同一ノ直線上ニ在リ

即チAB, CDヨリ等距離ナル任意ノ點Pハ此二線ノ爲ス角ノ二等分線上ニ在リ

因リテAB, CDヨリ等距離ナル總テノ點ハEF或ハGHノ上ニ在リ. [之ヲ(3)ノ證明トス]

次ニQヲAB, CDヨリ等距離ナラザル任意ノ點トシQヨリABニ垂線QRヲ引キCDニ垂線QSヲ引キQOヲ結ビ付ケヨ

然レバQOハ角AOCヲ二等分セズ

如何トナレバ若シQOガ角AOCヲ二等分スレバ

$\triangle QOR \equiv \triangle QOS$　[112]

ニシテ　$QR=QS$

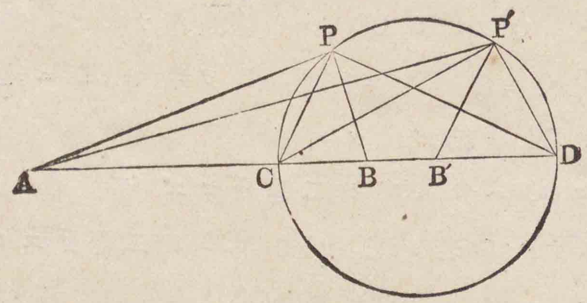
是假設ニ合ハズ

故ニAB, CDヨリ等距離ニアラザル任意ノ點Qハ此二線ノナス角ノ二等分線上ニ在ラズ. [之ヲ(4)ノ證明トス]

故ニ與ヘラレタル要件ニ適スル點ノ軌跡ハGH, EFナル二直線ナリ.

軌跡 3

292. 二つの與へられたる點よりの距離の比が與へられたる比(等比にあらざる)に等しき點の軌跡は此二點を結び付くる直線を其比に調和に分ちたる二つの分點の間の線を直徑として畫きたる圓周なり。



A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル點トシ $m:n$ ヲ與ヘラレタル比トシ $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}$ ナリトセヨ

然ルトキハ A, B ヨリノ距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ナル點ノ軌跡ハ CD ヲ直徑トセル圓周ナリ

[289] ニ述ベタル(3)及ビ(1)ニ依リテ之ヲ證明セントス.

證明　P ヲ A, B ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ ニ等シキ任意ノ一點トシ AP, BP, CP, DP ヲ引ケ

然レバ　$\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{BC}$　$\frac{AP}{BP}=\frac{AD}{BD}$

故ニ PC ハ △APB ノ一角 APB ヲ二等分シ, PD ハ其外角ヲ二等分ス　[267],[269]

故ニ ∠CPD ハ直角ナリ

故ニ點 P ハ CD ヲ直徑トセル圓周上ニ在リ

[∵若シ P ガ此圓外ニ在レバ ∠CPD<R.∠
若シ其內ニ在レバ ∠CPD>R.∠ ナレバナリ]

[之ヲ(3)ノ證明トス]

次ニ此圓周上ニ任意ノ一點 P′ ヲ取リ AP′, CP′ DP′ ヲ引ケ

∠AP′C ニ等シク ∠CP′B′ ヲ CP′ ノ反對ノ側ニ取リ B′ ヲ P′B′ ト AD トノ交點トセヨ

然レバ CP′ ハ ∠AP′B′ ヲ二等分シ而シテ ∠CP′D ハ直角ナルヲ以テ P′D ハ △AP′B′ ノ一角 AP′B′ ノ外角ヲ二等分ス

故ニ　$\frac{AC}{B'C}=\frac{AD}{B'D}$　[266],[268]

故ニ　$\frac{AC}{AD}=\frac{B'C}{B'D}$　[253]

然ルニ　$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$　[假設]

故ニ　$\frac{AC}{AD}=\frac{BC}{BD}$

因リテ　$\frac{B'C}{B'D}=\frac{BC}{BD}$

故ニ $\frac{B'C+B'D}{B'D}=\frac{BC+BD}{BD}$ [254]

即チ $\frac{CD}{B'D}=\frac{CD}{BD}$

故ニ $B'D=BD$

故ニ B' ハ B ニ合ス

故ニ P'C ハ角 AP'B ヲ二等分ス

故ニ $\frac{AP'}{BP'}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}$ [266]

[之ヲ(1)ノ證明トス]

故ニ A, B ヨリノ距離ノ比ガ $\frac{m}{n}$ ナル點ノ軌跡ハ CD ヲ直徑トセル圓周ナリ.

軌跡問題

177. 下ノ定理ヲ[289]ノ(1)及ビ(3)ニ依リテ證明セヨ. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此二點ヲ結ビ付クル直線ノ垂直二等分線ナリ.

178. [291]ノ定理ヲ(1)ト(3)トニ依リテ證明セヨ.

179. 同上ノ定理ヲ(1)ト(2)トニ依リテ證明セヨ.

180. 一ツノ與ヘラレタル有限直線ヲ底邊トセル二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ヲ求ム.

181. 定點 O ヨリ引ケル直線 OA ノ一端 A ハ常ニ此點ヲ通過セザル一定直線上ニ在リ. OA ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

182. 二ツノ定點ヲ通過スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

183. 相交ハル二ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

184. 與ヘラレタル直線ヲ底邊トシ其同ジ側ニ於テ與ヘラレタル角ニ等シキ頂角ヲ有スル三角形ノ頂點ノ軌跡ハ此直線ヲ弦トセル圓弧ナリ.

185. P ハ與ヘラレタル圓弧 APB 上ノ任意ノ點ナリ. AP ヲ Q マデ延長シ PQ ヲ PB ニ等シク取ル. 然レバ點 Q ノ軌跡ハ一ツノ圓弧ナリ.

186. 一點ヨリ二ツノ與ヘラレタル平行線ノ各ニ至ル距離ノ和ガ一定ノ長サニ等シキトキ其點ノ軌跡ヲ求ム.

187. 與ヘラレタル圓ニ於テ一定ノ長サヲ有スル弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

188. 直角ニ相交ハル二ツノ與ヘラレタル直線上ニ常ニ兩端ヲ置ク所ノ與ヘラレタル長サノ直線ノ中點ノ軌跡ハ一圓周ナリ.

189. 一定點 A ヲ通過スル所ノ直線ガ一ツノ與ヘラレタル圓周ヲ二點 B, C ニ於テ截ル. 弦 BC ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

190. 一點ヨリ二ツノ與ヘラレタル平行線ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル比(等比ニアラザル)ニ等シキトキ其點ノ軌跡ヲ求ム.

第四編
面積

第一節

面積の比　多角形の面積

293. **定義**　平面形の其境界内なる場所の廣さを其**面積**と稱す.

以下本編ニ於テ二ツノ平面形ノ比トイヒ又ハ二ツノ平面形相等シトイフガ如キハ皆其面積ニ付キテイフモノトス.

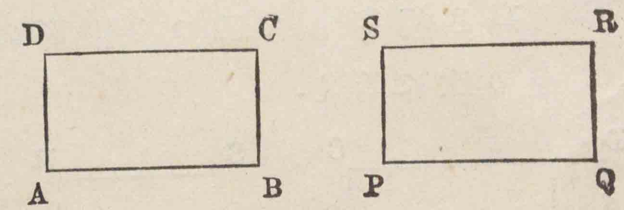
294. **定義**　平行四邊形の何れの邊をも其**底邊**と稱することを得. 底邊及び其對邊の間の垂直距離を其**高サ**と稱す.

矩形に於ては其一邊を底邊とすれば其隣邊は高さなり.

295. **定義**　梯形の平行邊の間の垂直距離を其高さと稱す.

定理 1

296. 二つの矩形に於て其底邊と高さとが夫々相等しければ此二つの矩形は全く相等し.



二ツノ矩形 ABCD, PQRS ニ於テ

AB=PQ　AD=PS ナルトキハ

▭ABCD=▭PQRS

證明　▭ABCD ヲ取リ之ヲ ▭PQRS ノ上ニ重ネ邊 AB ヲ之ニ等シキ邊 PQ ノ上ニ置キ角 A ヲ角 P ニ重ヌレバ AD ハ PS ニ重ナリ點 D ハ點 S ノ上ニ落ツ

同様ニ BC ハ QR ニ重ナリ點 C ハ點 R ノ上ニ落ツ

故ニ DC ハ SR ニ合ス

即チ二ツノ矩形ハ相合ス

故ニ兩形全ク相等シク面積モ亦相等シ

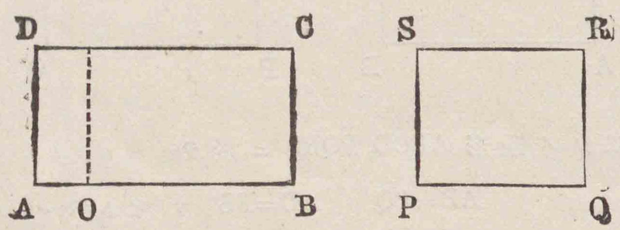
297. **系**　一邊が夫々相等しき二つ

の正方形は相等し.

逆に相等しき二つの正方形の邊は相等し.

定理 2

298. 高さ相等しき二つの矩形の比は其底邊の比に等し.



二ツノ矩形 AC, PR ニ於テ高サ AD, PS 相等シケレバ

$$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{AB}{PQ}$$

證明　AO ヲ底邊 AB, PQ ノ公約量トシ

$AB=mAO,\quad PQ=nAO$　トスレバ

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{m}{n}$$

AB ヲ m 等分シ PQ ヲ n 等分シ而シテ各分點ニ於テ AB, PQ ヘ垂線ヲ引ケ

然レバ □AC ハ m 箇ノ矩形ニ分タレ

□PR ハ n 箇ノ矩形ニ分タル

而シテ此等ノ矩形ハ皆相等シ　[296]

故ニ $$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{m}{n}$$

因リテ $$\frac{\square AC}{\square PR}=\frac{AB}{PQ}$$

299. **系**　底邊相等しき二つの矩形の比は其高さの比に等し.

300. A, B 及び C が皆同種類の量にして　$\frac{A}{B}=m$　$\frac{B}{C}=n$　なれば

$$\frac{A}{C}=mn$$

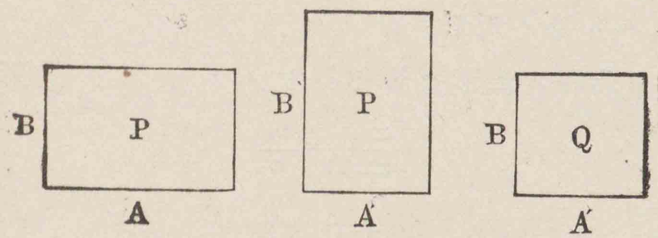
如何トナレバ　$A=B\times m$　$B=C\times n$

故ニ　$A=C\times n\times m=C\times mn$

即チ　$\frac{A}{C}=mn$

定理 3

301. 二つの矩形の比は其底邊の比と高さの比との積に等し.



P, P′ヲ二ツノ矩形トシ A, A′及ビ B, B′ヲ夫々其底邊及ビ高サトスレバ

$$\frac{P}{P'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'}$$

證明　底邊ハ A′ニ等シク高サハ B ニ等シキ矩形 Q ヲ作レ

然レバ　$\frac{P}{Q}=\frac{A}{A'}$　[298]

$\frac{Q}{P'}=\frac{B}{B'}$　[299]

故ニ　$\frac{P}{P'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'}$　[300]

302.　系　二つの正方形の比は其各邊の比の平方に等し.

303.　A, A′, B, B′ヲ表ハス數(同一ナル長サノ單位ニテ之ヲ計ルトキ表ハス所ノ數)ヲ夫々 a, a', b, b' トスレバ

$\frac{A}{A'}=\frac{a}{a'}$　　$\frac{B}{B'}=\frac{b}{b'}$　[249]

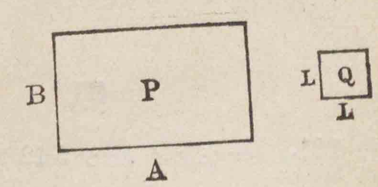
故ニ　$\frac{P}{P'}=\frac{ab}{a'b'}$　[301]

定理 4

304.　長さの單位に等しき一邊を有する正方形の面積を面積の單位とすれば矩形の面積を表はす數は其底邊の長さを表はす數と高さを表はす數との積に等し.

通常上ノ定理ヲ下ノ如ク略述ス

矩形の面積は其底邊と高さとの積に等し.



P ヲ一ツノ矩形トシ其底邊 A 及ビ高サ B ヲ同一ノ長サノ單位 L ニテ計ルトキ之ヲ表ハス所ノ數ヲ夫々 a, b トセヨ　即チ $A=aL$　$B=bL$ トセヨ

又各邊ガ L ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位 Q トシ此 Q ニテ P ヲ計ルトキ之ヲ表ハス數ヲ m トセヨ

即チ　$P=mQ$ トセヨ

然ルトキハ $m=ab$

證明 $\frac{P}{Q}=\frac{A}{L}\times\frac{B}{L}$ [301]

然ルニ $\frac{P}{Q}=m$ $\frac{A}{L}=a$ $\frac{B}{L}=b$

故ニ $m=ab$

305. 系 正方形の面積を表はす數は其一邊の長さを表はす數の平方に等し.

之ヲ略述スレバ

正方形の面積は其一邊の平方に等し.

問題

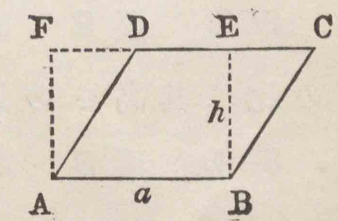
191. 一邊ノ長サ5·12尺ナル正方形ノ面積ハ幾何平方寸ナルカ. (答 262 .44 平方寸)

192. 面積 4.6225 平方「メートル」ナル正方形ノ一邊ハ幾尺ナルカ. (答 7·095 尺)

193. 矩形アリ其周圍 26 間ニシテ底邊ハ高サヨリ三間半長シ. 底邊高サ及ビ面積ヲ計算セヨ. (答 8·25 間, 4·75 間, 39·1875 坪)

定理 5

306. 平行四邊形は其底邊と高さとの積に等し.



ABCD ヲ平行四邊形トシ其底邊ノ長サ高サ及ビ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 a, h, m トスレバ

[304]ニ於テノ如ク單位ヲ定メテ) $m=ah$

證明 底邊ABノ兩端ヨリ之ニ垂線ヲ引キ對邊CD及ビ其延長ト夫々E及ビFニ於テ出會ハシメヨ然ルトキハ ABEF ハ平行四邊形 ABCD ト AB ナル同ジ底邊及ビ BE ナル同ジ高サヲ有スル矩形ナリ.

二ツノ直角三角形 BCE, ADF ハ BC=AD, BE=AF ナルヲ以テ全等ナリ [113]

今全圖形 ABCF ヨリ三角形 BCE ヲ取リ去レバ矩形 ABEF 殘リ

又同ジ全圖形ヨリ三角形ADF ヲ取リ去レバ平行四邊形 ABCD 殘ル

故ニ $\square ABCD=\square ABEF$

然ルニ ▱ABEF ノ面積ハ ah ナリ [304]

故ニ ▱ABCD ノ面積 $=m=ah$

307. 系 1 底邊及び高さ相等しき平行四邊形は相等し.

308. 系 2 底邊等しき平行四邊形の比は其高さの比に等し.

309. 系 3 高さ相等しき平行四邊形の比は其底邊の比に等し.

310. 系 4 二つの平行四邊形の比は其底邊と高さとの積の比に等し.

問題

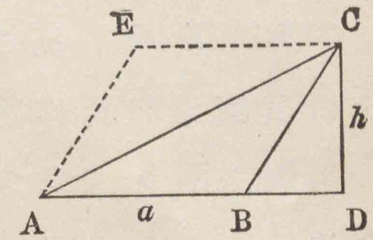
194. 同底邊,同面積ニシテ異ナル形ノ若干ノ平行四邊形ヲ作レ.

195. 同面積ノ正方形ト菱形トアリ,其高サノ比ガ4:1ナレバ其周ノ比ハ如何.

196. 與ヘラレタル平行四邊形ヲ其一邊ニ平行ニ引ケル直線ヲ以テ 2:3 ナル比ヲ有スル二ツノ部分ニ分ツベシ.

定理 6

311. 三角形は其底邊と高さとの積の半に等し.



三角形ABCノ底邊ノ高サ及ビ面積ヲ夫々 a, h 及ビ m トスレバ

$$m=\frac{1}{2}ah$$

證明 A ヨリ BC ニ平行線ヲ引キ又 C ヨリ BA ニ平行線ヲ引キ AE ト點 E ニ於テ相交ハラシメヨ

然レバ ABCE ハ △ABC ト AB ナル同底邊及ビ CD ナル同高ヲ有スル平行四邊形ナリ

而シテ AC ハ其對角線ナルヲ以テ

$$\triangle ABC=\triangle AEC=\frac{1}{2}▱ABCE$$

然ルニ ▱ABCE ノ面積 $=ah$ [306]

故ニ △ABC ノ面積 $=m=\frac{1}{2}ah$

312. 系 1 三角形は之と等しき底邊及び高さの平行四邊形の半に等し.

313. 系 2 底邊及び高さ相等しき

三角形は相等し.

314. 系 3 底邊相等しき三角形の比は其高さの比に等し.

315. 系 4 高さ相等しき三角形の比は其底邊の比に等し.

316. 系 5 二つの三角形の比は其底邊と高さとの積の比に等し.

問題

197. 直角ヲ夾ム二邊ノ和ガ二尺ニシテ其一ハ他ノ一ノ一倍半ナル直角三角形ノ面積ヲ求ム.

(答 48 平方寸)

198. 三角形ノ一中線ハ之ヲ二等分ス.

199. 三角形ヲ其一頂點ヨリ引ケル直線ヲ以テ若干ニ等分セヨ.

200. 平行四邊形ノ二對角線ハ之ヲ相等シキ四ツノ三角形ニ分ツ.

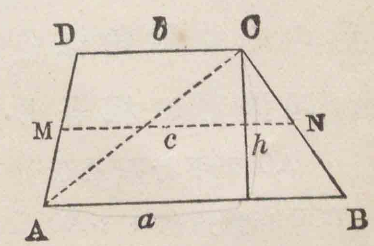
201. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クルトキ生ズル三角形ノ原形ニ對スル比ヲ問フ.

定理 7

317. 梯形は其平行邊の和の半と高さとの積に等し.

a, b 及ビ h ヲ夫々梯形 ABCD ノ平行邊及ビ高サトシ m ヲ其面積トスレバ

$$m=\frac{h}{2}(a+b)$$



證明 對角線 AC ヲ引ケ

然ルトキハ $\triangle ABC$ ノ面積 $=\frac{1}{2}ah$ [311]

$\triangle ACD$ ノ面積 $=\frac{1}{2}bh$ [311]

而シテ 梯形 $ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

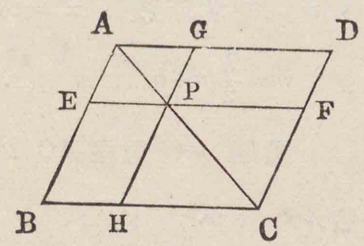
故ニ $m=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$

$=\frac{1}{2}h(a+b)$

318. 系 梯形の平行ならざる二邊の中點を結び付くる直線 MN の長さを c とすれば $m=ch$

定理 8

319. 平行四邊形の對角線上の一點を通過し二隣邊に平行に引ける二直線が原形を分ちて得たる四つの平行四邊形の中此對角線の兩側に在る二つの平行四邊形は相等し.



AC ヲ平行四邊形 ABCD ノ對角線トシ AC 上ノ一點 P ヲ通過シ二隣邊ニ平行ナル直線 EF, GH ヲ引キ之ヲ四ツノ平行四邊形ニ分チタリトス

然ルトキハ AC ノ兩側ニ在ル二ツノ平行四邊形 BP, DP ハ相等シ.

證明 平行四邊形ハ其一對角線ニ依リテ二等分セラルルヲ以テ

$\triangle ABC=\triangle ADC$........................(1)

$\triangle AEP=\triangle AGP$........................(2)

$\triangle PHC=\triangle PFC$........................(3)

(2) ト (3) トノ和ヲ (1) ヨリ減ズレバ

▱BP=▱DP

320. 或る二直線に等しき二隣邊を有する矩形を此二直線の**包ム矩形**と稱す.

二直線 AB 及ビ CD ノ包ム矩形ヲ

AB.CD

ナル記號ヲ以テ表ハス.

或る一直線に等しき邊を有する正方形を此直線の**上の正方形**と稱す.

直線 AB ノ上ノ正方形ヲ

AB^2

ナル記號ヲ以テ表ハス.

321. 注意 若シ a, b ヲ矩形ノ底邊ト高サトノ數價トスレバ其乘積 ab ハ其面積ノ數價ヲ表ハシ a ヲ正方形ノ一邊ノ數價トスレバ其平方 a^2 ハ其面積ノ數價ヲ表ハスコトハ前ニ述ベタルガ如シ

然レドモ AB.CD ハ上述ノ如ク矩形ノ面積ヲ表ハス一ツノ記號ニシテ二因數ノ乘積ニアラズ又 AB^2 ハ正方形ノ面積ヲ表ハス一ツノ記號ニシテ一數ノ平方ニアラズ. 即チ前者ハ代數學上ノ乘積ニシテ後者ハ幾何學上ノ圖形ノ面積ナリ. 學生ハ彼ト此トヲ混同セザル樣注意スルヲ要ス.

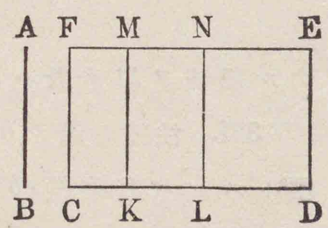
然ルニ今若シ AB ガ a 寸, CD ガ b 寸ナレバ

$AB.CD = ab$平方寸　$AB^2 = a^2$平方寸

ナルガ如キ關係アルガ故ニ代數學ト幾何學トノ一方ニ於ケル或定理ニ對應スル定理ヲ他ノ一方ニ於テ有スルコト尠カラズ.

定理 9

322. 二つの直線の包む矩形は其一と他の一を分ちたる諸部分との包む矩形の和に等し.



AB, CD ヲ二ツノ與ヘラレタル直線トシ CD ヲ二點 K, L ニ於テ三分シタリトス

然ルトキハ

$AB.CD = AB.CK + AB.KL + AB.LD$

證明 直線 CD 上ニ矩形 CE ヲ作リ CF = AB トセヨ

二點 K, L ヨリ CD ニ垂線 KM, LN ヲ引ケ

然レバ　$CM = AB.CK$　$KN = AB.KL$　$LE = AB.LD$

而シテ　$CE = CM + KN + LE$

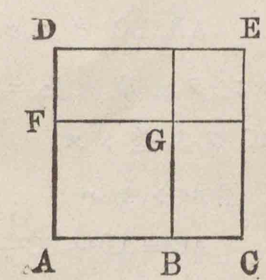
故ニ　$AB.CD = AB.CK + AB.KL + AB.LD$

323. 系　一つの直線を二分すれは

其一部分と全線との包む矩形は此部分の上の正方形及び二つの部分の包む矩形の和に等し.

定理 10

324. 二つの直線の和の上の正方形は各線上の正方形の和に二つの直線の包む矩形の二倍を加へたるものに等し.



AB, BC ヲ二ツノ直線トシ之ヲ一直線上ニ置キ AC ヲ其和トス

然ルトキハ

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC$

證明 AC 上ニ正方形 AE ヲ作レ

一邊 AD 上ニ AB ニ等シク AF ヲ取リ

B ヨリ AC ニ垂線ヲ引キ又 F ヨリ AD ニ垂線ヲ引キ點 G ニ於テ相交ハラシメヨ

然レバ　$AG = AB^2$　$GE = BC^2$

$CG = AB.BC = DG$

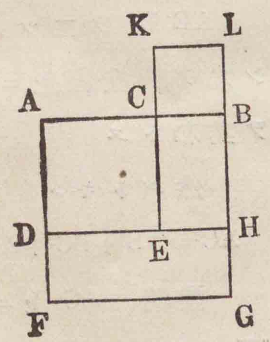
而シテ　$AE = AG + GE + CG + DG$

即チ $AC^2=AB^2+BC^2+2AB.BC$

325. 系　一つの直線上の正方形は其半の上の正方形の四倍なり.

定理 11

326. 二つの直線の差の上の正方形は各線上の正方形の和より二つの直線の包む矩形の二倍を減じたるものに等し.



AB, BC ヲ二ツノ直線トシ之ヲ一直線上ニ重ネ置キ AC ヲ其差トス

然ルトキハ

$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC$

證明　AC 上ニ正方形 AE ヲ作レ

一邊 AD ノ延長上ニ AB ニ等シク AF ヲ取リ

B ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ　又 F ヨリ AF ニ垂線ヲ引キ點 G ニ於テ相交ハラシメヨ

DE ヲ延長シ點 H ニ於テ BG ニ交ハラシメヨ

BC 上ニ正方形 BK ヲ AFGB ノ外ニ作レ

BL, BH ハ同一ノ點 B ニ於テ AB ニ垂直ナルヲ以テ

同一直線上ニ在リ

同様ニ CK, CE ハ同一直線上ニ在リ

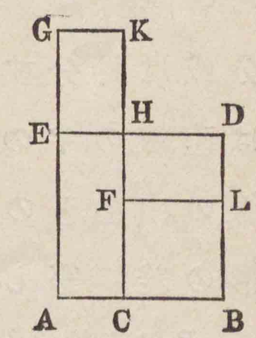
然レバ　$AG=AB^2$　$DG=AB.BC=HK$

而シテ　$AE=AG+BK-DG-HK$

即チ　$AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC$

定理 12

327. 二つの直線上の正方形の差は此二つの直線の和及び差の包む矩形に等し.



AB, BC ヲ二ツノ直線トシ $AB>BC$ トス

然ルトキハ

$AB^2-BC^2=(AB+BC).(AB-BC)$

證明　AB, BC ヲ一直線上ニ重ネ置キ AC ヲ其差トセヨ

AB 上ニ正方形 AD ヲ作リ

又 BC 上ニ正方形 BF ヲ作リ D ト F トヲ AB ノ同ジ側ニ在ラシメヨ

AE ノ延長上ニ BC ニ等シク EG ヲ取レ

CF ヲ延長シ H ヲ ED トノ交點トシ HK ヲ BC ニ等シク取リ

GKヲ結ビ付ケヨ

BL及ビBDハ同一ノ點Bニ於テABニ垂直ナルヲ以テ同一直線上ニ在リ

四邊形EK, FDハ何レモ矩形ニシテ且ツ相等シ.

[學生自ラ之ヲ證明セヨ]

故ニ $AH+FD=AH+EK=AK$

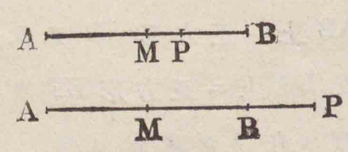
$=AG.AC=(AB+BC).(AB-BC)$

然ルニ $AD-CL=AH+FD$

故ニ $AB^2-BC^2=(AB+BC).(AB-BC)$

328. 系 直線を任意の點に於て内分或は外分すれば其二分線の包む矩形は直線の半の上の正方形及び分點と直線の中點との間に在る部分の上の正方形の差に等し.

Pヲ直線ABヲ内分或ハ外分シタル點トシMヲABノ中點トスレバ



$AP=AM+MP \quad BP=AM\sim MP$

故ニ $AP.BP=AM^2\sim MP^2$

問題

202. 定理10,11及ビ12ハ代數學ノ如何ナル定理ニ對應スルカヲ示セ.

203. 一定ノ長サノ周ヲ有スル總テノ矩形ノ中正方形ハ最大ナリ.

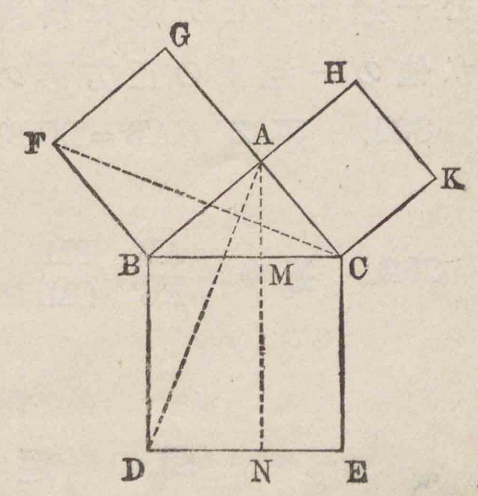
[上ノ系ニ依リテ及ビ之ニ依ラズシテ特ニ圖形ヲ畫キテ之ヲ證明セヨ]

定理 13

329. 直角三角形の斜邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和に等し.

ABCヲ角BACガ直角ナル直角三角形トスレバ

$BC^2=AB^2+AC^2$



證明 AB, BC, CA上ニ夫々正方形AF, BE, CHヲ作レ

Aヨリ BDニ平行線

AMN ヲ引キ AD, CF ヲ結ビ付ケヨ

BAC, BAG ハ各直角ナルヲ以テ AC, AG ハ同一直線上ニ在リ

故ニ　正方形 AF$=2\triangle$CFB　[312]

又　矩形 BN$=2\triangle$ABD　[307]

然ルニ　$\triangle CFB \equiv \triangle ABD$　[106]

[$\because$ BC$=$BD　BF$=$AB　$\angle CBF=\angle ABD$]

故ニ　正方形 AF$=$ 矩形 BN

同様ニ　正方形 CH$=$ 矩形 CN

故ニ　正方形 BE$=$ BN$+$CN $=$AF$+$CH

即チ　$BC^2=AB^2+AC^2$

330. 系 1　直角三角形の直角を含む一邊上の正方形は斜邊上の正方形及び他の一邊上の正方形の差に等し.

331. 系 2　$AB^2=BC.BM$

[329] ノ圖ヲ見ヨ

332. 系 3　$\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{BM}{CM}$　[仝上]

問　題

204. 正方形ノ對角線上ノ正方形ハ原形ノ二倍

ナリ.

205. 正方形ノ一邊ノ數價ガ a ナレバ其對角線ノ數價ハ $a\sqrt{2}$ ナリ

206. 四邊形 ABCD ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ

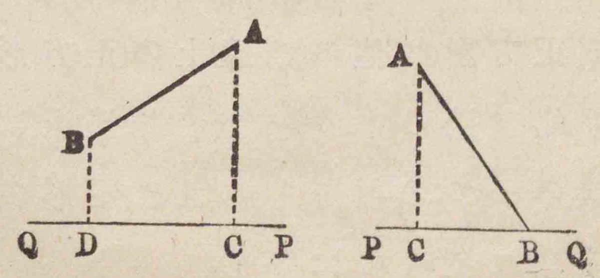
$$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$$

207. 菱形ノ對角線ガ 16米突及ビ30米突ナレバ其一邊ハ何米突ナルカ.

208. 正三角形ノ一邊ノ長サガ a 尺ナレバ其高サハ $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 尺, 面積ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 平方尺ナリ.

---

333. 定義　有限直線が他の直線上に投ずる**射影**とは其有限直線の兩端より後の直線へ引ける垂線の足の間に在る後の直線の部分なり.



例ヘバ有限直線ABノ兩端A,Bヨリ他ノ一直線PQヘ垂線ヲ引キC,Dニ於テ之ニ出會ハシムレバCDハABガPQ上ニ投ズル射影ナリ.

若シABノ一端BガPQ上ニ在ルトキハ其射影ハBCナリ.

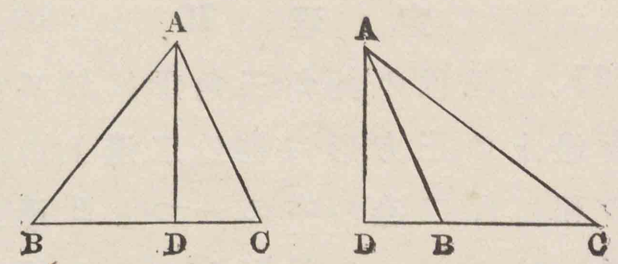
問題

209. AB∥PQナルトキハ其射影如何,又AB⊥PQナルトキハ如何.

210. 平行ニシテ且相等シキ二直線ガ同一直線上ニ投ズル射影ハ相等シ.

定理 14

334. 任意の三角形に於て鋭角の對邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和より此二邊の中の一つと此邊上に投ずる他の一つの射影との包む矩形の二倍を減じたるものに等し.



三角形ABCニ於テ角ACBヲ鋭角トシCDヲ邊ACガ邊BC上ニ投ズル射影トスレバ

$$AB^2=BC^2+CA^2-2BC.CD \quad\ldots\ldots(1)$$

證明　若シABCガ直角ナレバACガBC上ニ投ズル射影ハBCトナルヲ以テBC.CDハBC^2トナリ(1)ハ$AB^2=CA^2-BC^2$トナル

是[330]ニ依リテ既ニ知ル所ナリ.

若シABCガ直角ナラザレバ

$BD=BC\sim DC$ナルヲ以テ

$$BD^2=BC^2+DC^2-2BC.DC \qquad [326]$$

雙方ニAD^2ヲ加フレバ

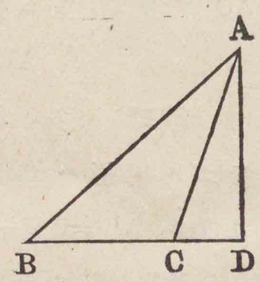
$$BD^2+AD^2=BC^2+DC^2+AD^2-2BC.DC$$

然ルニ
$$\left.\begin{array}{l}BD^2+AD^2=AB^2\\DC^2+AD^2=AC^2\end{array}\right\} \qquad [329]$$

故ニ
$$AB^2=BC^2+AC^2-2BC.DC$$

定理 15

335. 任意の鈍角三角形に於て鈍角の對邊上の正方形は他の二邊上の正方形の和に此二邊の中の一つと此邊上に投ずる他の一つの射影との包む矩形の二倍を加へたるものに等し.



三角形ABCニ於テ角ACBヲ鈍角トシCDヲ邊ACガ邊BC上ニ投ズル射影トスレバ

$$AB^2=BC^2+CA^2+2BC.CD$$

證明 $BD=BC+CD$ ナルヲ以テ

$$BD^2=BC^2+CD^2+2BC.CD \qquad [324]$$

雙方ニ AD^2 ヲ加フレバ

$$BD^2+AD^2=BC^2+CD^2+AD^2+2BC.CD$$

然ルニ
$$\left.\begin{aligned}BD^2+AD^2&=AB^2\\CD^2+AD^2&=AC^2\end{aligned}\right\} \qquad [329]$$

故ニ
$$AB^2=BC^2+AC^2+2BC.CD$$

336. **系** 三角形ABCに於て

[1] $BC^2>AB^2+AC^2$ なれば角Aは鈍角なり

[2] $BC^2=AB^2+AC^2$ なれば角Aは直角なり

[3] $BC^2<AB^2+AC^2$ なれば角Aは鋭角なり.

問題

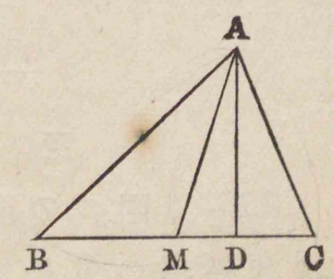
211. 三角形アリ其三邊ガ8, 11, 15ナルトキハ其一角ハ鈍角ナルベシ

212. 三邊ノ長サガ x^2-1, $2x$, x^2+1 ナル式ヲ以ヲ表ハサルベキ三角形ハ直角三角形ナリ.

213. 前問ニ於ケル x ニ逐次 $\frac{3}{2}$, 2, 3 ナル値ヲ與ヘテ三ツノ直角三角形ノ邊ノ長サヲ求メヨ

定理 16

337. 三角形の二邊の上の正方形の和は底邊の半の上の正方形及び頂點より引ける中線上の正方形の和の二倍なり.



三角形ABCニ於テ AM ヲ頂點Aヨリ引ケル中線トスレバ

$$AB^2+AC^2=2BM^2+2AM^2$$

證明 若シ $AM\perp BC$

ナレバ本定理ハ[329]ニ依リテ明カナリ.

若シ $AM \perp BC$ ナラザレバ角 AMB ヲ鈍角トシ, AD ヲ A ヨリ BC ヘ引ケル垂線トセヨ

然レバ MD ハ中線 AM ガ BC 上ニ投ズル射影ナリ

因リテ　　$AB^2=BM^2+AM^2+2BM \cdot MD$........(1)　[335]

$AC^2=CM^2+AM^2-2CM \cdot MD$........(2)　[334]

$BM=CM$ ナルヲ以テ

$BM^2=CM^2$　　$BM \cdot MD=CM \cdot MD$

故ニ(1)及ビ(2)ヲ加フレバ

$$AB^2+AC^2=2BM^2+2AM^2$$

問題

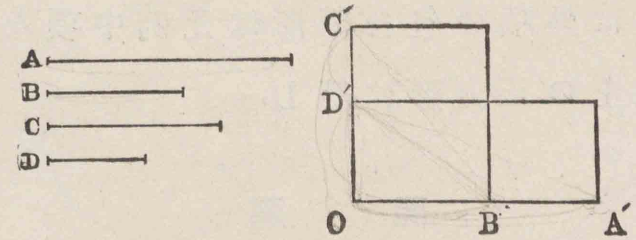
214. 平行四邊形ノ各邊上ノ正方形ノ和ハ其對角線上ノ正方形ノ和ニ等シ

215. 四邊形ノ二雙ノ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ和ノ二倍ハ二ツノ對角線上ノ正方形ノ和ニ等シ.

定理 17

338. 四つの直線が比例をなすときは其外項の包む矩形は內項の包む矩形

に等し.



A, B, C, D ナル四ツノ直線アリ　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$

ナルトキハ　　$A \cdot D=B \cdot C$

證明　直角 O ヲ作リ其一邊上ニ A ニ等シク OA′ ヲ取リ B ニ等シク OB′ ヲ取レ

又他ノ一邊上ニ C ニ等シク OC′ ヲ取リ D ニ等シク OD′ ヲ取レ

A′, B′, C′, D′ ヨリ直線ヲ引キ矩形 A′D′, B′C′ ヲ作レ

然レバ　$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A'D'}{B'D'}=\dfrac{OA'}{OB'}=\dfrac{A}{B}\\[2ex]\dfrac{B'C'}{B'D'}=\dfrac{OC'}{OD'}=\dfrac{C}{D}\end{array}\right\}$　[298]

然ルニ　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{C}{D}$　[假設]

故ニ　$\dfrac{A'D'}{B'D'}=\dfrac{B'C'}{B'D'}$

故ニ　$A'D'=B'C'$

即チ A, D ナル外項ノ包ム矩形ハ B, C ナル內項ノ包ム矩形ニ等シ.

339. 系　三つの直線が比例をなすときは外項の包む矩形は比例中項なる直線上の正方形に等し.

問　題

216. 直角三角形ABCニ於テADヲ直角頂Aヨリ斜邊BCヘ引ケル垂線トスレバ

$$AD^2=BD.CD$$

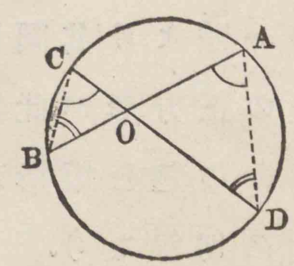
217. 直角三角形ABCノ直角Aノ二等分線ガ斜邊BCト點Eニ於テ交ハリ其外接圓ノ周トDニ於テ交ハレバ　$AE.AD=2\triangle ABC$

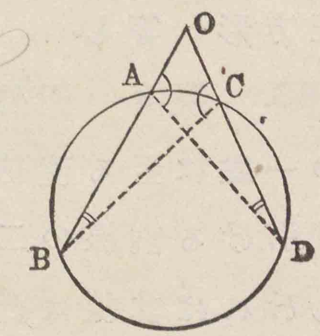
定　理　18

340. 圓の二つの弦或は其延長が圓內或は圓外に於て相交はるときは其一弦の二部分の包む矩形は他の一弦の二部分の包む矩形に等し.

二弦AB, CD或ハ其延長ガ點Oニ於テ相交ハルトキハ

$$AO.BO=CO.DO$$





證明　CB, ADヲ結ビ付ケヨ

三角形AOD, COBハ互ニ等角ナルヲ以テ相似ナリ　[272]

故ニ其對應邊ハ比例ヲナス

即チ　$$\frac{AO}{CO}=\frac{DO}{BO}$$

故ニ　$AO.BO=CO.DO$　[338]

341. 系 1　圓內の一定點を通過する弦の二部分の包む矩形は此點に於て二等分せらるる弦の半の上の正方形に等し.

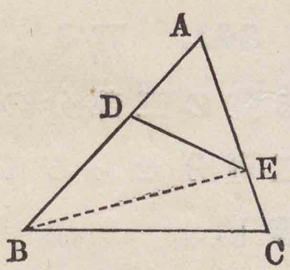
342. 系 2　圓外の一定點より引ける割線の二部分(其點より割線と圓周との交點に至る二線)の包む矩形は此點より引ける切線(其點より切點に至る線)上

の正方形に等し．

343. 系3 圓外の一點より其圓周上の一點に至る直線上の正方形が此點より引ける割線の二部分の包む矩形に等しければ其線は此圓の切線なり．

定理 19

344. 一角相等しき二つの三角形の比は其角を夾む所の二邊の包む矩形の比に等し．



三角形ABC, ADEヲ相等シキ角Aガ相合スル樣ニ置カレタルモノトスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AB.AC}{AD.AE}$$

證明 BEヲ結ビ付ケヨ

然レバ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ABE}=\frac{AC}{AE}$　$\frac{\triangle ABE}{\triangle ADE}=\frac{AB}{AD}$ [315]

故ニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AC}{AE}\times\frac{AB}{AD}$ [300]

而シテ $\frac{AC}{AE}\times\frac{AB}{AD}=\frac{AC.AB}{AE.AD}$ [301]

故ニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AC.AB}{AE.AD}$

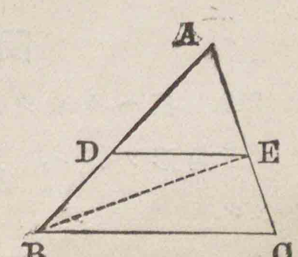
345. 系 一角相等しき二つの平行四邊形の比は其角を夾む所の二邊の包む矩形の比に等し．

問題

218. 三角形ABCニ於テAB, AC上ニ$AD=\frac{2}{3}AB$ $AE=\frac{3}{4}AC$ナル二點D, Eヲ取レバ△ABCハ△ADEノ何倍ナルカ

定理 20

346. 相似三角形の比は其對應邊上の正方形の比に等し．



△ABC, ADEヲ相等シキ角Aガ相合スル樣ニ置カレタル相似三角形トシAB, ADヲ其對應邊トスレバ

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AB^2}{AD^2}$$

證明 前定理ニ於テノ如ク

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AC}{AE}\times\frac{AB}{AD}$$

然ルニ $$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$$

故ニ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AB}{AD}\times\frac{AB}{AD}$$

故ニ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\frac{AB^2}{AD^2}$$

347. 系 1 相似三角形の比は其對應邊の長さを表はす數の平方の比に等し.

348. 系 2 二つの相似多角形の比は其對應邊上の正方形の比に等し因て又對應邊の長さを表はす數の平方の比に等し.

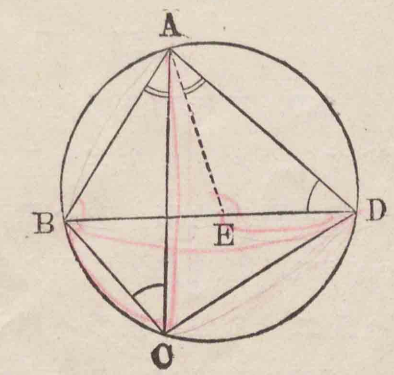
問題

219. 與ヘラレタル三角形ト相似ニシテ其四倍ナル三角形ヲ作レ, 又其九分ノ一ナル相似三角形ヲ作レ.

定理 21

プトレミー定理

349. 圓に内接する四邊形に於て其兩對角線の包む矩形は二雙の相對する邊の包む矩形の和に等し.



ABCD ヲ圓ニ内接スル四邊形トシ AC,BD ヲ其對角線トスレバ

$AC.\ BD=AB.\ CD+BC.\ AD$

證明 $\angle BAC$ ニ等シク $\angle DAE$ ヲ作レ

然レバ $\triangle ABC$, ADE ハ其三角夫々相等シキヲ以テ相似ナリ

因リテ $$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{DE}$$

故ニ $AC.\ DE=BC.\ AD$ ....(1) [338]

又 $\triangle ACD$, ABE ハ其三角夫々相等シキヲ以テ相似ナリ

因リテ $$\frac{AC}{CD}=\frac{AB}{BE}$$

故ニ $AC.\ BE=AB.\ CD$ ....(2) [338]

(1) 及ビ (2) ヲ加フレバ

$$AC.DE+AC.BE=BC.AD+AB.CD$$

故ニ　$AC.BD=BC.AD+AB.CD$　[322]

第四編問題集ノ一

證明問題

220. 平行四邊形内ノ任意ノ一點ヲ其各頂點ニ結ビ付クルトキ生ズル四ツノ三角形ノ中相向ヒ合フ所ノ兩三角形ノ和ハ原形ノ半ニ等シ.

221. 四邊形ノ二對角線ガ直角ニ相交ハルトキハ此二線ノ包ム矩形ハ四邊形ノ二倍ナリ

222. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クル直線ノナス四邊形ハ原形ノ半ニ等シ.

223. ADガ正三角形ABCノ高サナレバ

$$AD^2=3BD^2$$

224. 一ツノ直線ノ二部分ノ上ノ正方形ノ和ハ此二部分ガ相等シキトキ最小ナリ.

225. Oヲニ等邊三角形ABCノ底邊BC或ハ其延長上ノ一點トスレバ

$$AB^2\sim AO^2=OB \cdot OC$$

226. 三角形ノ三邊上ノ正方形ノ和ノ三倍ハ其三中線上ノ正方形ノ和ノ四倍ニ等シ.

227. 四邊形ノ各邊上ノ正方形ノ和ハ其二對角線上ノ正方形ノ和ヨリ對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線上ノ正方形ノ四倍ダケ大ナリ.

228. 二直線AB, CD或ハ其延長ガ一點Oニ於テ相交ハリ$OA.OB=OC.OD$ナルトキハ四點A,B,C,Dハ同一ノ圓周上ニ在リ.

229. 三角形ニ外接スル圓ノ直徑ト其頂角ヨリ底邊ヘ引ケル垂線トノ包ム矩形ハ此角ヲ夾メル二邊ノ包ム矩形ニ等シ.

230. $\triangle ABC$ノ三邊上ニ同ジキ順ニAA', BB', CC'ヲ夫々AB, BC, CAノ三分ノ二ヅツニ取ルトキハ

$$\triangle A'B'C'=\frac{1}{3}\triangle ABC$$

231. 三角形ノ三ツノ中線ヲ三邊ト爲ス所ノ三角形ハ原形ノ四分ノ三ニ等シ.

計算問題

232. 對角線ノ長サ八尺ナル正方形ノ面積ヲ計算セヨ.　(答三十二平方尺)

233. 矩形アリ其面積108·60平方米突ニシテ周ハ48·20米突ナリ　二邊各幾許　(答18·10, 6.00米突)

234. 直角ヲ夾ム二邊ノ長サガa, bナル直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ノ長サヲ計算

セヨ (答 $ab \div \sqrt{a^2+b^2}$)

235. 二圓アリ其中心間ノ距離ハ一尺ニシテ其半徑ハ六寸ト八寸トナリ 其共通弦ノ長サヲ求ム (答 九寸六分)

236. 三角形アリ二邊ノ長サ六寸,七寸ニシテ其夾角30°ナリ 其面積ヲ求ム (答 $10\frac{1}{2}$平方寸)

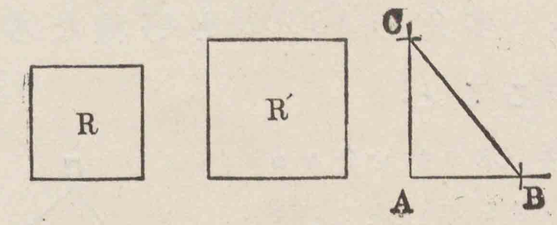
237. 三角形ノ二邊ノ長サヲ a b トスレバ $\boxed{1}$ 其夾角30°又ハ150°ナルトキハ面積ハ $\frac{ab}{4}$ $\boxed{2}$ 夾角45°又ハ135°ナルトキハ面積 $ab\sqrt{2}\div4$ $\boxed{3}$ 夾角60°又ハ120°ナルトキハ面積 $ab\sqrt{3}\div4$ ナリ.

238. 甲乙二ツノ相似形アリ其對應邊ハ夫々12米突,36米突ニシテ甲ノ面積ハ180平方米突ナリ乙ノ面積ヲ求ム (答 1620平方米突)

第二節
作圖題
作圖題 1

350. 二つの與へられたる正方形R, R'の和に等しき一つの正方形を作るこ

と.



解法 直角BACヲ作レ

此角ノ一邊上ニ正方形Rノ一邊ニ等シクABヲ取リ他ノ一邊上ニ正方形R'ノ一邊ニ等シクACヲ取リBCヲ結ビ付ケヨ

然ルトキハBCハ所要ノ正方形ノ一邊ニ等シ.

證明 BCハ直角三角形ABCノ斜邊ナルヲ以テ

$$BC^2=AB^2+AC^2 \quad [329]$$

即チBC上ノ正方角ハR, R'ノ和ニ等シ.

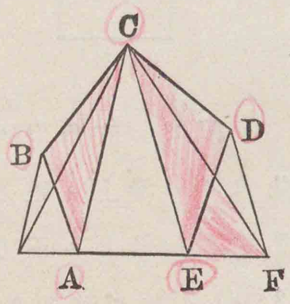
問題

239. 三ツノ與ヘラレタル正方形ノ和ニ等シキ一ツノ正方形ヲ作レ.

240. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ差ニ等シキ一ツノ正方形ヲ作レ.

作圖題 2

351. 多角形ABCDEと等積なる三角形を作ること．



解法 CE ヲ結ビ付ケヨ D ヨリ CE ニ平行線ヲ引キ AE ノ延長ト F ニ於テ出會ハシメ CF ヲ結ビ付ケヨ 多角形 ABCF ノ邊數ハ原形ノ邊數ヨリ一ツ少シ而シテ其面積ハ相等シ．

證明 △CFE, CDE ハ CE ナル同一底邊ヲ有シ高サ相等シキヲ以テ等積ナリ　[313]

故ニ雙方ニ多角形 ABCE ヲ加フレバ其和相等シ

即チ　　ABCF=ABCDE

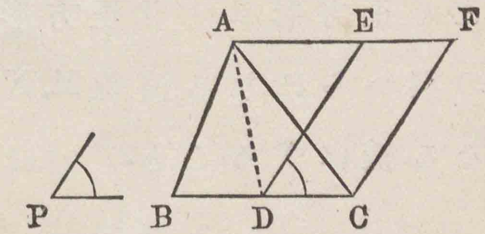
同様ニ多角形 ABCF ノ邊數ヨリ一ツ少キ邊數ヲ有シ而シテ之ト等積ナル多角形ヲ作ルコトヲ得

斯ノ如クニシテ遂ニ與ヘラレタル多角形ト等積ナル三角形ヲ作ルコトヲ得ベシ．

作圖題 3

352. 與へられたる三角形ABCに等

しく而して一角が與へられたる角Pに等しき平行四邊形を作ること．



解法 一邊 BC ヲ D ニ於テ二等分シ DC ト P ニ等シキ角 EDC ヲナス所ノ直線 DE ヲ引ケ A ヨリ BC ニ平行線 AEF ヲ引キ又 C ヨリ DE ニ平行線 CF ヲ引キ AEF ト F ニ於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ EDCF ハ所要ノ平行四邊形ナリ．

證明 AD ヲ引ケ

然レバ　　△ADB=△ADC　[313]

故ニ　　△ABC=2△ADC

又　　▱DCFE=2△ADC　[312]

故ニ　　▱DCFE=△ABC

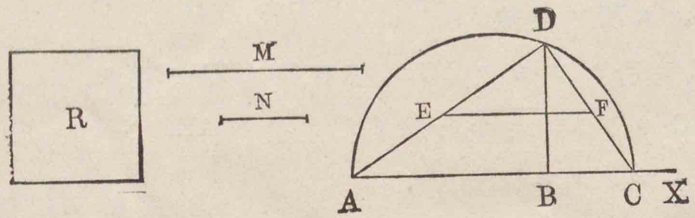
而シテ　　∠EDC=∠P

問　題

241. 與ヘラレタル三角形ニ等シキ矩形ヲ作レ

作圖題 4

353. 一つの正方形を作り與へられたる正方形Rと其正方形との比が二つの與へられたる直線M, Nの比に等しくなる樣にすること.



解法 AX ナル一直線上ニ M ニ等シク AB ヲ取リ N ニ等シク BC ヲ取レ

AC ヲ直徑トシテ其上ニ半圓ヲ書ケ

B ニ於テ AC ニ垂線 BD ヲ引キ圓周ト點 D ニ於テ交ハラシメヨ

DA, DC ヲ引ケ

DA 或ハ其延長上ニ與ヘラレタル正方形 R ノ一邊ニ等シク DE ヲ取リ E ヨリ AC ニ平行ニ EF ヲ引キ DC 或ハ其延長ト點 F ニ於テ交ハラシメヨ

然ルトキハ DF ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ.

證明 DAC ハ D ガ直角ニ等シキ直角三角形ナ

ルヲ以テ $\dfrac{DA^2}{DC^2}=\dfrac{AB}{BC}$ ……………………(1) [332]

今 $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{DE}{DF}$ [261]

故ニ $\left(\dfrac{DA}{DC}\right)^2=\left(\dfrac{DE}{DF}\right)^2$ ……………………(2)

然ルニ $\left(\dfrac{DA}{DC}\right)^2=\dfrac{DA^2}{DC^2}$ $\left(\dfrac{DE}{DF}\right)^2=\dfrac{DE^2}{DF^2}$ [302]

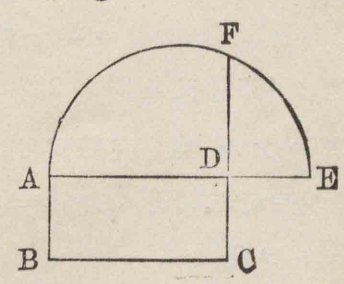
故ニ(1)及ビ(2)ヨリ $\dfrac{DE^2}{DF^2}=\dfrac{AB}{BC}$

即チ $\dfrac{R}{DF^2}=\dfrac{M}{N}$

作圖題 5

354. 一つの與へられたる矩形 ABCD に等しき正方形を作ること.

解法 ABCD ノ相隣レル二邊 AD, DC ノ間ノ比例中項ナル直線 DF ヲ作レ [283]



然ルトキハ DF ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ.

證明 $\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{DF}{DC}$ [作圖]

故ニ $DF^2=AD.DC.$ [339]

問題

242. 一ツノ與ヘラレタル正方形ノ三倍ニ等シキ正方形ヲ作レ

此問題ハ事實ニ於テ次ニ記スルモノト同一ナリ. 直線 a ヲ與ヘテ $a\sqrt{3}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ畫ケ.

解 [353] ニ於テ $3M=N$ トスレバ

$$\frac{R}{DF^2}=\frac{M}{3M}=\frac{1}{3} \qquad \therefore DF^2=3R$$

即チ DF ハ與ヘラレタル正方形 R ノ三倍ニ等シキ正方形ノ一邊ナリ.

又ハ a, x ヲ夫々與ヘラレタル正方形及ビ所要ノ正方形ノ邊トスレバ

$$x^2=3a^2=3a\times a$$
$$=(2a)^2-a^2$$

因テ [354] 又ハ問題239ニ依リテ x 即チ $a\sqrt{3}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ引クコトヲ得

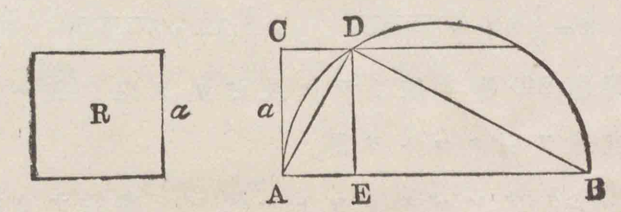
或ハ又[350]ノ方法ニ依リテ所要ノ正方形ヲ作ルコトヲ得

243. 與ヘラレタル正方形ノ三倍半ニ等シキ正方形ヲ作レ

244. 直線 a ヲ與ヘテ $a(\sqrt{5}-1)$ ニテ表ハサルベキ直線ヲ引ケ

作圖題 6

355. 與へられたる正方形Rに等しく而して相隣れる二邊の和が與へられたる直線ABに等しき矩形を作ること.



解法 AB ヲ直徑トシ其上ニ半圓ヲ畫ケ

A ニ於テ AB ニ垂線ヲ引キ R ノ一邊 a ニ等シク AC ヲ取レ

C ヨリ AB ニ平行線ヲ引キ圓周ト點 D ニ於テ交ハラシメ D ヨリ AB ニ垂線ヲ引キ AB ト點 E ニ於テ交ハラシメヨ.

然ルトキハ AE, BE ハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ.

證明 DE ハ DAB ナル直角三角形ノ直角頂ヨリ斜邊へ引ケル垂線ナルヲ以テ

$$DE^2=AE.BE \qquad [277], [339]$$

而シテ $AE+BE=AB \qquad DE=CA=a$

故ニ AE, BE ハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ.

356. **注意1** 本題ハ $2a \leqq AB$ ナルトキニノミ解

有リ.

注意2　ABノ長サヲbトシ所要ノ二邊ノ長サヲx. yトスレバ

$$x+y=b \qquad xy=a^2$$

此聯立方程式ヲ解ケバ

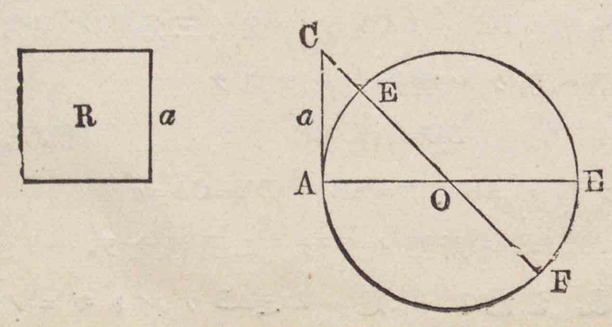
$$x=\frac{1}{2}(b+\sqrt{b^2-4a^2}) \qquad y=\frac{1}{2}(b-\sqrt{b^2-4a^2})$$

故ニ問題240等ニ依リテx及ビyヲ以テ表ハスベキ二直線ヲ引クコトヲ得

若シ $2a>b$ ナレバxトyトハ何レモ虛數ナリ故ニ此場合ニハ所要ノ矩形ヲ作ルコトヲ得ズ. [注意1ヲ參照セヨ]

作圖題 7

357.　與へられたる正方形Rに等しく而して相隣れる二邊の差が與へられたる直線ABに等しき矩形を作ること.



解法　ABヲ直徑トシテ圓ヲ畫ケ

點Aニ於テ圓ニ切線ACヲ引キRノ一邊aニ等シクACヲ取レ

Cト中心Oトヲ通過シ一直線ヲ引キ二點E, Fニ於テ圓周ト交ハラシメヨ.

然ルトキハ CE, CF ハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ

證明　CAハ切線, CEFハ割線ナルヲ以テ

$$CA^2=CE.CF \qquad [342]$$

而シテ　$CF-CE=EF=AB \qquad CA=a$

故ニ CE, CF ハ所要ノ矩形ノ二隣邊ナリ.

358. **注意1**　本題ハ常ニ解有リ.

注意2　ABノ長サヲbトシ所要ノ二邊ノ長サヲx, yトスレバ

$$x-y=b \qquad xy=a^2$$

此聯立方程式ヲ解ケバ

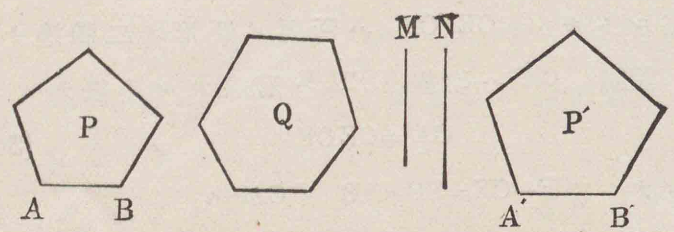
$$x=\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4a^2}+b) \qquad y=\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+4a^2}-b)$$

故ニ[350]等ニ依リx及ビyヲ以テ表ハスベキ直線ヲ引クコトヲ得

上ノxトyトノ値ハ常ニ實數ナルヲ以テ本題ハ常ニ成立ス

作圖題 8

359. 一つの多角形Pと相似にして他の一つの多角形Qに等しき多角形を作ること.



解法 先ヅPニ等シキ三角形ヲ作レ [351]

次ニ此三角形ニ等シキ矩形ヲ作レ [352]

次ニ此矩形ニ等シキ正方形ヲ作レ [354]

Mヲ其一邊トセヨ

又上ト同ジキ手續キニ依リテQニ等シキ正方形ヲ作レ

Nヲ其一邊トセヨ

Pノ一邊ABヲ取リM, N及ビABノ第四比例項ヲ求メ [281]

之ヲA'B'トセヨ

A'B'ノ上ニPト相似ニシテ且A'B'トABトガ對應邊トナル如キ多角形P'ヲ作レ [286]

然ルトキハP'ハ所要ノ多角形ナリ.

證明 $\frac{M}{N}=\frac{AB}{A'B'}$ (作圖)

故ニ $\left(\frac{M}{N}\right)^2=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$

故ニ $\frac{M^2}{N^2}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$ [302]

然ルニ $M^2=P$ $N^2=Q$ (作圖)

又 $\frac{P}{P'}=\frac{AB^2}{A'B'^2}$ [346]

故ニ $\frac{P}{P'}=\frac{M^2}{N^2}=\frac{P}{Q}$

故ニ $P'=Q$

而シテP'ハPト相似ナリ

故ニP'ハ所要ノ多角形ナリ.

第四編問題集ノ二

作圖題

245. 與ヘラレタル直線ヲ底邊トシ與ヘラレタル三角形ト等積ナル三角形ヲ作レ.

246. 平行四邊形ヲ其內或ハ外ニ在ル一定點ヨリ引ケル直線ヲ以テ二等分セヨ.

247. 平行四邊形ヲ其一ツノ頂點ヨリ引ケル直線ヲ以テ三等分セヨ.

248. 三角形ヲ其一邊上ノ一定點ヨリ引ケル直

線ヲ以テ二等分セヨ.

249. 一直線ヲ二分シ其一分線ノ上ノ正方形ガ全線ノ上ノ正方形ノ半ニ等シクナル樣ニセヨ.

250. 底邊及ビ頂角ヲ知リ與ヘラレタル面積ヲ有スル即チ(與ヘラレタル正方形ニ等シキ)三角形ヲ作レ.

251. 底邊及ビ之ニ隣レル一角ヲ知リ與ヘラレタル面積ヲ有スル三角形ヲ作レ.

252. △ABC ノ內或ハ外ニ於テ三ツノ三角形 OBC, OCA, OAB ガ相等シカルベキ一點 O ヲ求メヨ.

253. 任意ノ與ヘラレタル三角形ト等積ナル正三角形ヲ作レ.

第五編

正多角形及ビ圓

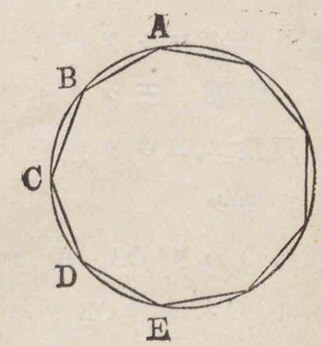
第一節

正多角形ニ關スル定理

圓周ノ長サ及ビ圓ノ面積

定理 1

360. 圓に內接する等邊多角形は正多角形なり.



ABCD……ヲ圓ニ內接スル等邊多角形トスレバ ABCD……ハ正多角形ナリ.

證明 弧 AB, BC, CD 等ハ等弦ニ對スルヲ以テ相等シ [195]

故ニ弧 ABC, BCD 等ハ相等シ

故ニ全周ヨリ弧 ABC, BCD 等ヲ減ズレバ其殘リノ弧モ亦相等シ

故ニ此殘リノ相等シキ弧ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角 ABC, BCD 等ハ相等シ [206]

故ニ ABCD……ハ等角多角形ナリ而シテ假設ニ依リテ等邊多角形ナリ

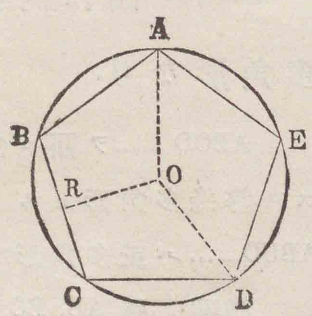
故ニ ABCD……ハ正多角形ナリ

定理 2

361. ① 正多角形には圓を外接することを得.

② 正多角形には圓を内接することを得.

① ABCDE ヲ正多角形トスレバ之ニ外接スル圓ヲ書クコトヲ得.



證明　三ツノ相隣レル頂點 A, B, C ヲ通過スル圓ヲ書ケ

中心 O ヨリ OA, OD ヲ引キ又 BC ヘ垂線 OR ヲ引ケ

OR ヲ折リ目トシテ四邊形 OABR ノ平面ヲ折リ返シ四邊形 ODCR ノ平面ニ重ネヨ

然ルトキハ RB ハ RC ニ重ナリ點 B ハ點 C ノ上ニ

落ツ

[∵ ORB, ORC ハ各ゝ直角ナルヲ以テ相等シク又 RB=RC ナレバナリ]

又 BA ハ CD ニ重ナリ點 A ハ D ノ上ニ落ツ

[∵ ∠B=∠C, BA=CD]

故ニ OA ハ OD ニ合ス

因リテ　　OA=OD

故ニ三點 A, B, C ヲ通過スル圓ハ點 D ヲ通過ス

同樣ニ B, C, D ヲ通過スル圓ハ點 E ヲ通過スルコトヲ證明スルヲ得.

順次斯ノ如クニシテ最初ニ書キタル圓ハ正多角形ノ總テノ頂點ヲ通過スルコトヲ證明スルヲ得.

② ABCDE ニ内接スル圓ヲ書クコトヲ得.

證明　ABCDE ノ各邊ハ一ツノ圓ノ等弦ナルヲ以テ中心ヨリ等距離ニ在リ [199]

故ニ O ヲ中心トシ OR ヲ半徑トシテ圓ヲ書ケバ ABCDE ノ各邊ハ何レモ其切線トナル

故ニ此圓ハ正多角形 ABCDE ニ内接ス.

定理 3

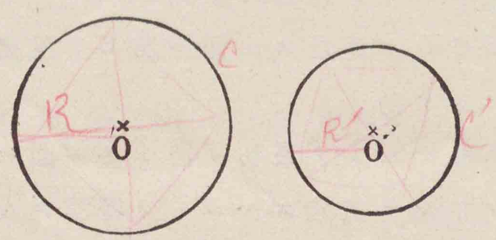
362. 同じ邊數の正多角形は相似なり而して其周の比は其外接圓の半徑の

比に等しく又其内接圓の半徑の比に等し.

[本定理ノ證ハ略ス學生自ラ之ヲナセ]

定理 4

363. 二つの圓周の比は其半徑の比に等し.



O及ビO′ヲ二ツノ圓トシ, C及ビC′ヲ夫々其周トシ, R及ビR′ヲ夫々其半徑トスレバ

$$C:C'::R:R'$$

證明 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大ナルヲ以テ圓ニ内接スル正多角形ノ周ハ圓周ヨリ小ナリ.

今圓ニ任意邊數ノ正多角形ヲ内接シ而シテ其邊數二倍ナル正多角形ヲ作レバ其周ハ前ノ多角形ノ周ヨリ大ナリ.

是ニ由リテ圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ヲ二倍スルコトヲ繰リ返シテ止マザレバ其周ハ漸々大キ

クナリ終ニ其邊數ヲ極リナク多クスルトキハ其外接圓ノ周ニ極リナク接近スベシ, 換言スレバ圓ニ内接スル正多角形ノ邊數ヲ極リナク多クスルトキハ其周ト圓周トノ差ハ極リナク小サクナリ遂ニ相等シクナルモノト見做スコトヲ得. 斯ノ如キ場合ニ於テハ圓周ヲ多角形ノ周ノ**極根**ト稱ス.

又同ジ場合ニ於テ圓ノ面積ヲ多角形ノ面積ノ極限ト稱ス.

今各圓ニ内接スル任意ノ同ジ邊數ノ正多角形ヲ作レ

同ジ邊數ノ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ其邊數ノ多少ニ關セズ常ニ其外接圓ノ半形ノ比ニ等シ [362]

故ニ邊數ヲ極リナク多クシタルトキノ極限ナル二ツノ圓周ノ比モ亦其半徑ノ比ニ等シ.

[是大サヲ變ズル或二量ノ比ガ常ニ或同ジ比ニ等シキトキハ各量ノ極限ノ比モ亦此比ニ等シトイフ定理ヨリ出デ來ル其證ハコヽニ略ス]

即チ $$\frac{C}{C'}=\frac{R}{R'}$$

364. 注意 上ノ比例ニ於テ第二ノ比ノ各項ヲ二倍スレバ $$\frac{C}{C'}=\frac{2R}{2R'}$$

故ニ　$\dfrac{C}{2R}=\dfrac{C'}{2R'}$　[253] [257]

即チ　圓周ト其直徑トノ比ハ常數ナリ

此比ヲ表ハスニ「ギリシャ」文字ノ π ヲ以テス

π ハ通約スベカラザル二量ノ比ナルヲ以テ其近似ノ値ノ外ハ數字ヲ以テ之ヲ表ハスコト能ハズ.

365. **系**　圓周 C, 半徑 R の長さを表はす數を夫々 c, r とすれば

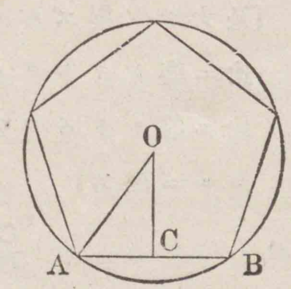
$$c=2\pi r$$

定　理　5

366. 圓に内接する正多角形の邊數が極りなく多くなるときは圓心より各邊へ引ける垂線の極限は半徑なり.

OC ヲ中心 O ヨリ之ニ内接スル正多角形ノ一邊 AB ヘ引ケル垂線トスレバ

此正多角形ノ邊數ガ極リナク多クナルトキハ OC ノ極限ハ OA ナリ.



證明　$OC<OA$

又　$OA-OC<AC$

邊數ガ極リナク多クナルトキハ AB ハ極リナク小サクナル

故ニ AC モ亦極リナク小サクナル

故ニ $OA-OC$ ハ無論極リナク小サクナル

故ニ OC ノ極限ハ OA ナリ.

367. **定義**　正多角形の内接圓及び外接圓の共通なる中心を**正多角形の中心**と稱す.

368. **定義**　正多角形の一邊が中心に於て對する角を正多角形の**中心ニ於テノ角**と稱す.

定　理　6

369. 正多角形は其周と其中心より一邊に至る距離との積の半に等し.

p 及ビ a ヲ夫々正多角形ノ周ノ長サ及ビ中心ヨリ一邊ニ至ル距離トスレバ其面積ハ $\dfrac{pa}{2}$ ナリ

[此證明ハ略ス學生自ラ之ヲナセ]

定　理　7

370. 圓は其周と半徑との積の半に

等シ.

S ヲ圓ノ面積トシ r 及ビ c ヲ夫々其半徑及ビ周ノ長サトスレバ

$$S=\frac{1}{2}cr$$

證明　此圓ニ內接スル任意ノ正多角形ヲ作リ其周ノ長サ及ビ中心ヨリ一邊ニ至ル距離ヲ夫々 p, a トスレバ此多角形ノ面積ハ $\frac{1}{2}pa$ ナリ　[369]

今此正多角形ノ邊數ヲ極リナク多クシタリトセヨ

然ルトキハ p ノ極限ハ c　[363]

a ノ極限ハ r　[366]

而シテ正多角形ノ極限ハ圓ナリ　[363]

故ニ　$$S=\frac{1}{2}cr$$

371.　**系 1**　$c=2\pi r$ なるを以て

$S=\frac{1}{2}cr$ に於て c の代りに $2\pi r$ を置けば

$$S=\pi r^2$$

372.　**系 2**　二つの圓の面積の比は其半徑の平方の比に等し.

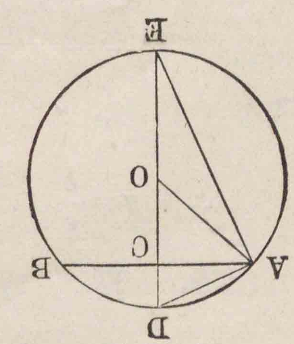
373.　**系 3**　扇形の面積は半徑と其弧との積の半に等し.

第二節

正多角形の作圖及び其邊長の計算等

374.　圓に內接する正多角形の一邊及び圓の半徑の長さを知りて同圓に內接する二倍邊數の正多角形の邊を計算すること並に其逆の計算をなすこと.

AB ヲ圓 O ニ內接スル正多角形ノ一邊トシ D ヲ弧 AB ノ中點トシ弦 AD ヲ引ケバ AD ハ二倍邊數ノ正多角形ノ一邊ナリ.



[I]　AB=a, 半徑 OA=r ヲ知リテ AD ノ長サヲ計算スルコト

AB ニ垂直ナル直徑 EC ヲ引ケバ此線ハ D ヲ通過シ又弦 AB ヲ二等分ス　[197]

EA ヲ引ケ

$$\angle EAD=R.\angle \qquad AC\perp DE$$

ナルヲ以テ $AD^2=DE.DC$ [331]

AD, OC ノ長サヲ夫々 b, c トスレバ

$$b^2=2r(r-c)$$

ACO ハ直角三角形ナルヲ以テ

$$c^2=r^2-\frac{a^2}{4} \quad \therefore\ c=\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2}$$

$$\therefore\ b^2=2r\left(r-\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2}\right)$$

$$\therefore\ b=\sqrt{\{2r^2-r\sqrt{(4r^2-a^2)}\}}\ \cdots\cdots(1)$$

$\boxed{2}$ 逆ニ b 及ビ r ヲ知リテ a ヲ計算スルコト

$$AD.EA=AC.DE$$

[各々△ADE ノ二倍ニ等シキヲ以テ]

即チ $$b\sqrt{4r^2-b^2}=\frac{a}{2}2r$$

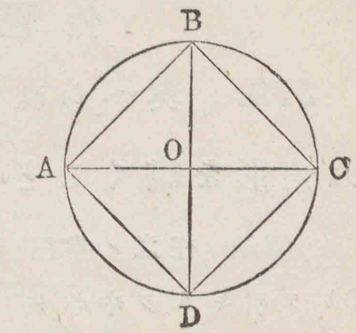
$$\therefore\ a=\frac{b}{r}\sqrt{(4r^2-b^2)}\ \cdots\cdots(2)$$

375. **系** 半徑 r が長さの單位に等しきときは $b=\sqrt{\{2-\sqrt{(4-a^2)}\}}$

$$a=b\sqrt{(4-b^2)}$$

作圖題 1

376. 與へられたる圓に内接する正方形を書くこと.



解法 互ニ垂直ナル二ツノ直徑 AC, BD ヲ引キ AB, BC, CD, DA ヲ結ビ付クレバ ABCD ナル所要ノ正方形ヲ得

證明 中心 O ニ於テノ角ハ各々直角ナルヲ以テ相等シ

故ニ弧 AB, BC, CD, DA ハ相等シ

故ニ弦 AB, BC, CD, DA ハ相等シ

即チ ABCD ハ圓ニ内接スル等邊四角形ナルヲ以テ正方形ナリ. [360]

377. **系 1** 弧 AB, BC 等ヲ各々二等分シ各弧ノ弦ヲ引ケバ内接正八邊形ヲ得.

378. **系 2** 圓ノ半徑ヲ r トシ其内接正方形ノ一邊ヲ a_4 トスレバ $2r^2=a_4^2$

$$\therefore\ a_4=r\sqrt{2}$$

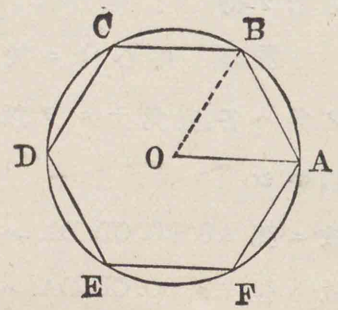
[以下邊數 n ノ正多角形ノ一邊ヲ a_n ニテ表ハス]

又 $$a_8=\sqrt{\{2r^2-r\sqrt{(4r^2-2r^2)}\}}$$ [374]

$$\therefore\ a_8=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

作圖題 2

379. 與へられたる圓に內接する正六角形を書くこと.



解法 任意ノ半徑 OA ヲ引キ A ヲ中心トシ AO ヲ半徑トシテ圓弧ヲ書キ點 B ニ於テ周ト相交ハラシメ AB ヲ引ケ

然ルトキハ AB ハ內接正六角形ノ一邊ナリ.

證明 OB ヲ引ケ

然レバ △OAB ハ等邊ナルヲ以テ亦等角ナリ

故ニ ∠AOB ハ二直角ノ三分ノ一即チ四直角ノ六分ノ一ナリ

故ニ弧 AB ハ全周ノ六分ノ一ナリ

故ニ弦 AB ハ內接正六角形ノ一邊ナリ

因リテ全周ヲ各ゝガ弧 AB ニ等シキ六ツノ部分ニ分チ各弧ノ弦ヲ引ケバ所要ノ正六角形ヲ得.

380. **系 1** 正六角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付クル直線ヲ引ケバ內接正三角形ヲ得.

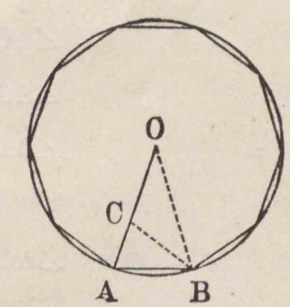
六ツノ弧 AB, BC, CD 等ヲ各ゝ二等分シ各弧ノ弦ヲ引ケバ正十二角形ヲ得.

381. **系 2** $a_6=r$

$a_3=r\sqrt{3}$ $a_{12}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ [274]

作圖題 3

382. 與へられたる圓に內接する正十角形を書くこと.



解法 任意ノ半徑 OA ヲ引キ之ヲ點 C ニ於テ

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{CA}$$

ナル比例ヲナス如ク分ツベシ [285]

A ヲ中心トシ OC ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ書キ圓周ト點 B ニ於テ交ハラシメ AB ヲ引ケ

然ルトキハ AB ハ所要ノ正十角形ノ一邊ナリ.

證明 BC, BO ヲ引ケ

$\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{CA}$ AB＝OC [作圖]

故ニ $$\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{CA}$$

而シテ ∠OAB ハ △OAB, BAC ニ共通ナリ

故ニ △OAB, BAC ハ相似ナリ [275]

[∵一角相等シク之ヲ夾ム邊ガ比例ヲナス]

然ルニ △OAB ハ二等邊ナリ

故ニ之ト相似ナル △BAC モ亦二等邊ナリ

而シテ $BC=BA$

然ルニ $OC=BA$

故ニ $BC=OC$

故ニ $\angle AOB=\angle OBC$

然ルニ $\angle ACB=\angle AOB+\angle OBC$

故ニ $\angle ACB=2\angle AOB$

故ニ $\angle OAB=2\angle AOB=\angle OBA$

故ニ △OAB ノ内角ノ和即チ二直角ハ ∠AOB ノ五倍ニ等シ, 即チ ∠AOB ハ二直角ノ五分ノ一即チ四直角ノ十分ノ一ナリ

故ニ弧 AB ハ全周ノ十分ノ一ナリ

是ニ由リテ全周ヲ各ガ AB ニ等シキ十個ノ部分ニ分チ各弧ノ弦ヲ引ケバ所要ノ正十角形ヲ得.

383. 系 1 正十角形ノ頂點ヲ一ツ置キニ結ビ付クル直線ヲ引ケバ正五角形ヲ得.

内接正十角形ノ各邊ニ對スル弧ヲ二等分シ各

弧ノ弦ヲ引ケバ内接正二十角形ヲ得.

384. 系 2 $OA.CA=OC^2$ ナルヲ以テ

$$r(r-a_{10})=a_{10}^2$$

因リテ $$a_{10}=\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$$

又 $$a_5=\frac{a_{10}}{r}\sqrt{(4r^2-a_{10}^2)}$$ [374]

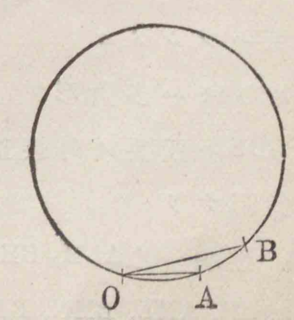
上記ノ a_{10} ノ値ヲ換置シテ計算スレバ

$$a_5=\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r}{2}$$

作圖題 4

385. 與へられたる圓に正十五角形を内接すること.

解法 内接正六角形ノ一邊ニ等シク OB ヲ引キ又内接正十角形ノ一邊ニ等シク OA ヲ引キ AB ヲ結ビ付ケヨ



然ルトキハ AB ハ所要ノ正十五角形ノ一邊ナリ.

證明　弧 OB ハ圓周ノ $\frac{1}{6}$ ニシテ又弧 OA ハ圓周ノ $\frac{1}{10}$ ナリ

故ニ弧 AB ハ圓周ノ $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ ナリ

故ニ弦 AB ハ内接正十五角形ノ一邊ナリ

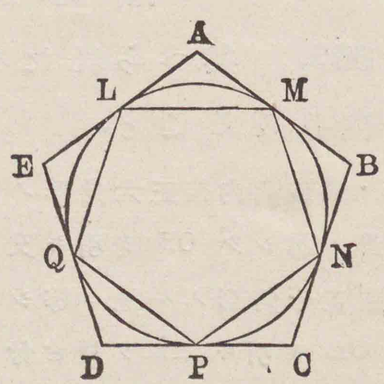
故ニ圓周ヲ各〻ガ AB ニ等シキ十五ノ部分ニ分チ各弧ノ弦ヲ引ケバ所要ノ正十五角形ヲ得.

作圖題 5

386. 圓に内接する與へられたる正多角形 LMNPQ と同じ邊數の圓に外接する正多角形を書くこと.

解法　LMNPQ ノ各頂點ニ於テ圓ニ切線ヲ引キ A, B, C, D, E ニ於テ相交ハラシメヨ

然ルトキハ多角形 ABCDE ハ所要ノ外接正多角形ナリ



證明　△ALM, BMN ニ於テ LM=MN

角 ALM, AML, BMN, BNM ハ相等シ

故ニ　△ALM≡△BMN

故ニ　∠LAM=∠MBN

同様ニ多角形 ABCDE ノ角ハ皆相等シキコトヲ證明スルヲ得

全等ナル三角形 ALM, BMN 等ニ於テ角 ALM, AML, BMN 等皆相等シキヲ以テ AL, AM, BM, BN 等ハ皆相等シ

因リテ多角形 ABCDE ノ邊ハ皆相等シ

故ニ ABCDE ハ正多角形ナリ

而シテ ABCDE ノ邊數ハ LMNPQ ノ邊數ニ同ジ

故ニ ABCDE ハ所要ノ正多角形ナリ.

387. 圓周の直徑に對する比即ち π の近似の値を計算すること.

圓周及ビ半徑ノ長サヲ夫々 c 及ビ r トスレバ

$$\pi=\frac{c}{2r} \qquad [365]$$

故ニ $r=1$ ナルトキハ $\pi=\frac{c}{2}$

公式 $b=\sqrt{\{2-\sqrt{(4-a^2)}\}}$ ニ於テ a ハ圓ノ内接正六角形ノ一邊ノ長サヲ表ハスモノトシ逐次此公式ニ依リテ邊數ガ 12, 24 等ノ内接正多角形ノ一邊ノ長サヲ計算シ之ニ夫々其邊數ヲ掛ケテ此等ノ多角形ノ周ノ長サヲ求メ以テ π ノ近似ノ値ヲ得ルコト次ノ如シ.

邊數	周ノ長サ	邊數	周ノ長サ
12	6·211657	192	6·282905
24	6·265257	384	6·283115
48	6·278700	768	6·283169
96	6·282064		

是ニ由リテ半徑1ナル圓周ハ大略 6·28317 ナリ
故ニ此數ノ半ナル π ノ値ハ大略 3·14159 ナリ
多クノ精密ヲ要セザル實地計算上ニハ $\pi=3\cdot142$ 或ハ $\pi=\frac{22}{7}$ ニテ十分ナリ.

第五編問題集

254. 圓ニ外接スル等邊多角形ハ若シ其邊數ガ奇數ナレバ正多角形ナリ.

255. 圓ニ內接スル等角多角形ハ若シ其邊數ガ奇數ナレバ正多角形ナリ.

256. 圓ニ外接スル等角多角形ハ正多角形ナリ.

257. 正三角形ニ外接スル圓ノ直徑ハ之ニ內接スル圓ノ直徑ノ二倍ナリ.

258. 圓ノ內接正三角形ノ面積ハ同圓ノ內接正六角形ノ面積ノ半ニ等シ.

259. 圓ノ內接正六角形ノ面積ハ同圓ノ外接正六角形ノ面積ノ四分ノ三ナリ

260. 直徑ノ長サ 12·56 尺ナル圓ノ半徑ヲ求ム. $(\pi=3\cdot14)$　(答 2尺)

261. 直徑ノ長サ 1·4 米突ナル車輪ガ 132 基米突ノ距離ヲ行クニハ幾回回轉スルカ. $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$　(答 30000回)

262. 地球ノ半徑ハ凡ソ 1640 里ナリ其周圍ハ大略何里ナリヤ $\pi=3\cdot1416$ ヲ用キルト $\pi=\frac{22}{7}$ ヲ用キルト其差凡ソ何里ナルカ　(答 差凡5里)

263. 地球ハ一日ニ一回其軸ノ周リヲ回轉ス今其直徑ヲ 8000 哩トスレバ赤道直下ノ或場所ハ每秒何哩ヲ回轉スルカ.　(答 凡0·3哩)

264. 半徑ノ長サ 5 寸ナル圓ノ面積ヲ求ム. $(\pi=3\cdot14)$　(答 78·5 平方寸)

265. 二ツノ圓周ノ和又ハ差ニ等シキ圓周ヲ畫ケ.

266. 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トセル圓ノ面積ハ他ノ二邊ヲ直徑トセル二圓ノ面積ノ和ニ等シ.

267. 二ツノ圓ノ和又ハ差ニ等シキ一ツノ圓ヲ畫ケ.

268. 與ヘラレタル圓ヲ之ト同心ナル圓ノ周ヲ

以テ二等分セヨ.

269. 直角ヲ五等分セヨ.

270. 半徑rナル圓ノ中心ヨリ之ニ內接スル正三角形正方形及ビ正六角形ノ一邊ニ至ル距離ヲ求ム (答 $\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{2}}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}$)

271. 半徑12寸ナル圓ニ內接スル正八角形ノ面積ヲ求ム (答 $288\sqrt{2}$ 平方寸)

補習雜問題

第一編 直線

證明問題

1. 二ツノ三角形ニ於テ二邊ト一中線トガ夫々相等シケレバ此二ツノ三角形ハ全等ナリ. [二ツノ場合アリ]

2. 四角形ノ三邊ト二夾角トガ夫々同順序ニ取リタル他ノ四角形ノ三邊ト二夾角トニ等シケレバ此二ツノ四角形ハ全等ナリ.

3. 三角形 ABC ニ於テ $AB < AC$ ニシテ點 D ハ角 BAC ノ二等分線ガ邊 BC ニ出會フ點ナレバ

$$BD < CD$$

4. 三角形 ABC ノ三邊上ニ其外方ニ向テ正三角形 BCA′, CAB′, ABC′ ヲ畫ケバ

$$AA' = BB' = CC'$$

5. 三角形 ABC ノ角 B ノ二等分線ト角 C ノ外角ノ二等分線トノ夾角ハ角 A ノ半ニ等シ.

6. 三角形 ABC ノ角 B ノ外角ノ二等分線ト角 C ノ外角ノ二等分線トノ夾角ハ角 A ノ外角ノ半ニ等シ.

7. 凸五角形ノ各邊ヲ延長シテ星形ヲ作ルコトヲ得ルトキハ五ツノ交點ニ於テノ角ハ合セテ平角ニ等シ.

8. 三角形 ABC ニ於テ AD ヲ A ヨリ BC ヘ引ケル垂線トシ AE ヲ角 A ノ二等分線トスレバ角 DAE ハ二角 B, C ノ差ノ半ニ等シ.

9. 三角形ノ一角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ガ此角ヲ夾ム邊ノ各〻トナス角ハ他ノ二角ノ和ノ半ニ等シ.

10. 三角形ノ一角ノ二等分線ニ垂直ナル直線ガ此角ノ對邊トナス角ハ他ノ二角ノ差ノ半ニ等シ.

11. A, B ハ直線 MN ノ同ジキ側ニ在ル二點ナリ P ハ MN 上ノ一點ニシテ APM, BPN ナル相等シキ角ヲナス. 而シテ Q ハ MN 上ノ他ノ任意ノ點ナリ. 然ルトキハ

$$AP+BP < AQ+BQ$$

12. A, B ハ直線 MN ノ兩側ニ在ル二點ナリ P ハ MN 上ノ一點ニシテ APN, BPN ナル相等シキ角ヲ爲ス而シテ Q ハ MN 上ノ他ノ任意ノ點ナリ然ルトキハ $AP \sim BP > AQ \sim BQ$

13. 梯形ノ互ニ平行ナラザル二邊ガ相等シケレバ其二對角線ハ相等シ.

14. 四邊形ノ二雙ノ相對スル邊ノ中點ヲ結ビ

付クル直線ノ交點ハ其二對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ノ中點ト相合ス.

15. 有限直線 AB ノ兩端 A, B 及ビ其中點 M ヨリ任意ノ直線ニ到ルベキ三平行線ヲ引キ夫々 A′, B′, M′ ニ於テ之ニ會セシムレバ 2MM′ ハ AA′+BB′ 又ハ AA′∼BB′ ニ等シ.

16. 三角形 ABC ノ三頂點及ビ其重心 G ヨリ之ニ交ハラザル任意ノ直線ヘ垂線 AA′, BB′, CC′, GG′ ヲ引ケバ

$$GG'=\frac{AA'+BB'+CC'}{3}$$

第二編　圓

証明問題

17. 圓ノ中心ヲ通過セザル二弦ハ互ニ二等分スルヲ得ズ.

18. 正方形ノ對角線上ノ一點ヨリ二隣邊ニ平行ニ引キタル直線ト四邊トノ交點ハ同一圓周上ニ在リ.

19. 圓ノ內接四邊形ノ對角線ノ交點ニ於テ此點ト二頂點トヲ通過スル圓ニ切スル直線ハ本形ノ

一邊ニ平行ナリ.

20. 三角形ノ一頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ノ足ハ其延長ガ外接圓ノ周ニ出會フ點及ビ垂心ノ間ノ中點ナリ.

21. 三角形ノ一頂點ヨリ其垂心ニ至ル距離ハ其外心ヨリ此頂點ノ對邊ニ至ル距離ノ二倍ナリ.

22. 圓ノ二弦 AB, CD ガ直角ニ相交ハルトキハ弧 AC, BD ノ和ハ弧 AD, BC ノ和ニ等シ.

弦ノ延長ガ圓外ニ於テ直角ニ相交ハル場合ヲ吟味セヨ.

23. 三角形ノ傍心ハ其傍接圓ノ中心ナリ.

三角形ノ**傍接圓**トハ其一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ナリ.

24. 三角形ノ各邊上ニ外方ニ向ケテ作リタル三ツノ正三角形ノ外接圓ノ周ハ一點ヲ通過ス, 又此三圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ハ一ツノ正三角形ヲナス.

25. 三角形ノ各邊ノ中點ト各頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ノ足ト各頂點ヨリ垂心ニ至ル直線ノ中點トハ同一ノ圓周上ニ在リ.

此圓ヲ三角形ノ**九點圓**ト稱ス.

26. 三角形ノ外心,垂心,重心及ビ九點圓ノ中心ハ同一ノ直線上ニアリ. 又九點圓ノ中心ハ外心ヨリ垂心ニ至ル直線ノ中點ナリ.

27. 九點圓ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半ニ等シ.

作圖題

28. 一角,其角ノ二等分線及ビ其頂點ヨリ出ヅル高サヲ知リテ三角形ヲ作レ.

29. 底邊,頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線及ビ外接圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

30. 三ツノ與ヘラレタル點ヨリ等距離ニ在ル直線ヲ引ケ.

31. 三角形 ABC 內ニ於テ

$$\angle BOC = \angle COA = \angle AOB$$

トナル如キ一點 O ヲ看出セ.

32. 與ヘラレタル菱形內ニ正方形ヲ容ルルコトヲ求ム.

33. 一邊及ビ他ノ二邊ヘ引ケル中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

34. 三中線ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

35. 底邊,頂角及ビ他ノ二邊ノ和又ハ差ヲ知リテ三角形ヲ作レ.

36. 三角形ノ各頂點ヲ中心トシテ三圓ヲ作リ其各圓ガ他ノ二圓ニ切スル樣ニセヨ.

37. 互ニ外切スル二圓ノ切點ヲ通過シ一定ノ

長サノ直線ヲ其兩端ガ各〻一圓周上ニ在ル樣ニセヨ.

38. 相交ハル二圓ノ一交點ヲ通過シテ一線ヲ引キ各圓ノ之ヨリ截リ取ル弦ガ相等シクナル樣ニセヨ.

39. 與ヘラレタル直線上ノ一定點ニ於テ本直線ニ切シ且與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫ケ.

40. 二ツノ與ヘラレタル圓ニ共通ナル切線ヲ引ケ.

[$\boxed{1}$ 各圓ガ全ク他ノ外ニ在リテ出會ハザルトキハ共通切線四ツ有リ $\boxed{2}$ 外接スルトキハ三ツ有リ $\boxed{3}$ 相交ハルトキハ二ツ有リ $\boxed{4}$ 內接スルトキハ一ツ有リ.]

第三編 比及ビ比例

証明問題

41. 梯形ノ平行邊ニ平行ニ引ケル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ヲ有スル二ツノ部分ニ分ツ.

42. 三角形 ABC ノ底邊 BC ノ中點 D ヨリ二角 ADC, ADB ノ二等分線ヲ引キ邊 AC, AB ト夫々 E, F ニ於テ交ハラシメ EF ヲ引ケバ $EF \parallel BC$

43. 二圓ガ外切スルトキハ其切點ヲ通過セザル其共通切線ノ二切點ノ間ニ在ル部分ハ二圓ノ直徑ノ間ノ比例中項ナリ.

44. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ其角頂ヨリ底邊ヘ引ケル垂線及ビ此角ヲ夾ム二邊ノ第四比例項ナリ.

45. D ガ二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ BC ノ延長上ノ一點ナレバ三角形 ABD 及ビ ACD ニ外接スル二圓相等シ.

46. 一點ヨリ多角形ノ總テノ頂點ヘ引ケル直線ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ部分ニ分チ而シテ其分點ヲ順次ニ結ビ付クルトキハ原形ト相似ナル多角形ヲ得.

47. 二ツノ相似多角形ヲ其對應邊ガ平行ナル樣ニ置クトキハ各形ノ對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ハ平行ナルカ或ハ同一點ヲ通過ス

此點ヲ二ツノ相似形ノ**相似ノ中心**ト稱ス

48. 有限直線ヲ任意ノ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ部分ニ分ツコトヲ得. 又等比ニアラザル任意ノ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ部分ニ外分スルコトヲ得而シテ斯ノ如キ分點ハ各〻一ツニ限ル.

[(266)—(269) ヲ見ヨ]

49. [262] ノ定理ヲ同一法ニ依リテ證明セヨ.

50. A, C, B, D ガ調和列點ニシテ M ガ AB ノ中點ナレバ AM ハ CM ト DM トノ間ノ比例中項ナリ.

51. 直線 AB ヲ點 C ニ於テ $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$ ナル如ク內分シ A, C, B ヨリ平行線 AA′, BB′, CC′ ヲ引キ AB ヲ截ラザル任意ノ直線ト A′, B′, C′ ニ於テ交ハラシムレバ　$(m+n)CC'=nAA'+mBB'$

52. 二圓ノ共通切線ハ其二中心ヲ通過スル直線上ニ於テ相交ハル而シテ二中心間ノ部分ヲ半徑ノ比ニ內分シ或ハ外分ス.

此交點ヲ二圓ノ **相似ノ中心** ト稱ス.

作　圖　題

53. 一ツノ直線ヲ A, B, C ナル三ツノ部分ニ分チ $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$, $\frac{B}{C}=\frac{p}{q}$ ナル樣ニセヨ.

54. 一點 O ヲ通過シテ二ツノ與ヘラレタル直線ト二點 A, B ニ於テ交ハル所ノ一直線ヲ引キ $\frac{OA}{OB}$ ガ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニセヨ.

55. 與ヘラレタル圓弧ヲ二分シ其二弦ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニセヨ

[直線ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二部分ニ分ツ法ヲ應用スベシ]

56. 三角形ノ外接圓ノ半徑及ビ其三邊ノ比ヲ知リテ其三角形ヲ作レ.

57. 圓周上ノ二定點ヲ通過シテ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ平行弦ヲ引ケ.

軌　跡　問　題

58. 一點 O ヨリ引ケル直線 OA ノ一端 A ハ常ニ此點ヲ通過セザル一定直線上ニ在リ, P ガ OA ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ部分ニ分ツ點ナレバ P ノ軌跡如何.

59. 一點 O ヨリ引ケル直線 OA ノ一端 A ハ常ニ一定圓周上ニ在リ, P ガ OA ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二部分ニ分ツ點ナレバ P ノ軌跡如何.

60. 一直線上相隣レル二ツノ部分ヲ AB, BC トス　$\angle APB=\angle BPC$　ナル如キ P 點ノ軌跡ヲ求ム.

61. 一點ヨリ相交ハル二直線ノ各々ニ至ル距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキトキ其點ノ軌跡ハ一雙ノ直線ナリ.

62. 問題 186 ニ於テ與ヘラレタル二ツノ直線ガ相交ハル場合ヲ論ゼヨ.

第四編　面積

証明問題

63. 梯形ノ互ニ平行ナラザル邊ノ一ツヲ底邊トシ其對邊ノ中點ヲ頂點トセル三角形ハ梯形ノ半ニ等シ.

64. 同一直線上ニ於テ相等シキ底邊ヲ有シ其同ジ側ニ在ル同ジ高サノ二ツノ三角形ニ於テ底邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ各形ノ二邊或ハ其延長ノ間ニ在ル其直線ノ部分ハ相等シ.

65. 同底等積ナル三角形ノ中ニテ二等邊三角形ノ周ハ最小ナリ.

66. 三角形 ABC ニ於テ $\angle C=60°$ ナルトキハ

$$AB^2=AC^2+BC^2-AC.BC$$

67. 三角形 ABC ニ於テ $\angle C=120°$ ナルトキハ

$$AB^2=AC^2+BC^2+AC.BC$$

68. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トスレバ

$$AB^2+BC^2+CA^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$$

69. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシ O ヲ任意ノ一點トスレバ

$$AO^2+BO^2+CO^2=AG^2+BG^2+CG^2+3GO^2$$

70. A, B, C, D ヲ同一直線上ニ此順ニ取リタル四點トスレバ

$$AC.BD=AB.CD+BC.AD$$

71. ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形トシ F ヲ二對角線 AC, BD ノ交點トスレバ

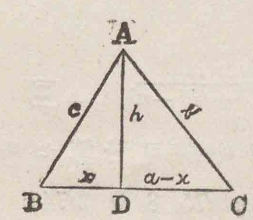
$$\frac{AB.AD}{CB.CD}=\frac{AF}{CF}$$

72. 三角形 ABC ノ三頂點ヨリ對邊ニ至ル三線 AA′, BB′, CC′ ガ形內ノ一點 O ヲ通過スルトキハ

$$\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$$

計算問題

73. 三角形ノ各頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト



△ABC ニ於テ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c ニテ表ハセ

A ヨリ引ケル垂線 AD ヲ h トシ

BD ヲ x トス

△ABD ヨリ　$h^2=c^2-x^2$............(1)

△ACD ヨリ　$h^2=b^2-(a-x)^2$.....(2)

$\therefore\ c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$　　因テ　$x=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$

x ノ此値ヲ(1)ニ換置シテ　$h=\sqrt{c^2-\dfrac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}$

根號內ノ式ヲ因數ニ分解シ

且ツ $a+b+c=2s$ ト置ケバ

$$h=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\boxed{1}$$

74.　三邊ノ長サ 6, 8, 12 寸ナル三角形ニ於テ最大邊ヘ引ケル垂線ヲ計算セヨ　　(答 3·55 寸餘)

75.　三角形ノ面積ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

所要ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a\times\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

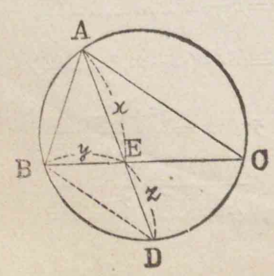
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\cdots\cdots\boxed{2}$$

76.　三邊ノ長サ 13, 14, 15 尺ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ　　(答 84 平方尺)

77.　三角形ノ中線ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

角 A ヨリ出ヅル中線 $=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}\cdots\cdots\boxed{3}$

78.　問題 74 ニ於ケル三角形ノ中線ヲ計算セヨ　　(答約 9·75, 8·60, 3·74)



79.　三角形ノ各角ノ二等分線ノ長サヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

三角形 ABC ニ外接スル圓ヲ畫キ角 A ノ二等分線 AE ヲ延長シ其周ヲ D ニテ截ラシメ BD ヲ引ケ △ABD, AEC ハ相似ナルヲ以テ

$$\frac{x+z}{c}=\frac{b}{x}\cdots\cdots(1)$$

又[266]ニ依リテ

$$\frac{c}{b}=\frac{y}{a-y}\cdots\cdots(2)$$

又[340]ニ依リテ　$xz=y(a-y)\cdots\cdots(3)$

(1) (2) 及ビ (3) ヨリ y 及ビ z ヲ逐出ストキハ

$$x=\sqrt{bc\left\{1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right\}}$$

根號内ノ式ヲ因數ニ分解シ且ツ $a+b+c=2s$ ト置ケバ

角 A ノ二等分線 $=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}\cdots\cdots\boxed{4}$

80.　三角形ヲ外接スル圓ノ半徑ヲ其三邊ヲ以テ表ハス式ヲ作ルコト

R ヲ外接圓ノ半徑トスレバ問題 229 ニ依リテ

$$2Rh=bc$$

$$R=\frac{bc}{2h}$$

$$=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

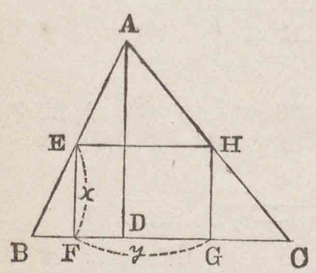
$$R=\frac{abc}{4S}\cdots\cdots\boxed{5}$$

81.　正三角形ノ面積 164·51 平方寸ナルアリ其一邊ノ長サヲ求ム　　(答 19·49)

82. 二ツノ相似形アリ其面積合セテ 579 坪ニシテ其對應邊ノ比ハ 7 ト 12 トノ如シ各形ノ面積ヲ求ム (答 147, 432 坪)

作圖題

83. 與ヘラレタル三角形ニ二邊ノ比ガ與ヘラレタル數ニ等シキ矩形ヲ内接セヨ



EFGH ヲ所要ノ矩形トシ

AD$=h$, BC$=a$, $y=mx$ トセヨ

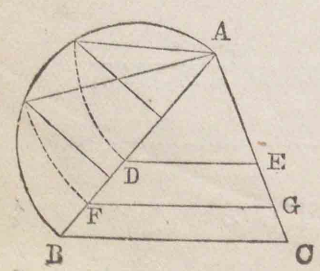
然レバ $\dfrac{h-x}{y}=\dfrac{h}{a}$

$$x=\frac{ah}{a+mh}$$

即チ x ハ $a+mh$, a 及ビ h ノ第四比例項ヲ以テ表ハスベキ直線ノ數價ナリ

84. 與ヘラレタル三角形ニ正方形ヲ内接セヨ

85. 與ヘラレタル三角形 ABC ヲ其一邊ニ平行スル直線ニ依リテ三等分スベシ



DE, DF ヲ要スル如ク引カレタル線トシ

AB$=a$, AD$=x$, AF$=y$

トスレバ

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{y^2}{a^2}=\frac{\triangle AFG}{\triangle ABC}=\frac{2}{3}$$

因ヲ $x=\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{3}}$ $y=\pm\sqrt{\dfrac{2a^2}{3}}$

即チ x ハ a ト $\dfrac{a}{3}$ トノ比例中項ニシテ y ハ a ト $\dfrac{2a}{3}$ トノ比例中項ナリ.

負ノ値ハ x 及ビ y ヲ BA ノ延長上ニ取ルベキコトヲ示ス.

86. 與ヘラレタル三角形ヲ其一邊ニ平行スル直線ニ依リテ二等分セヨ

87. 與ヘラレタル三角形ニ等シク與ヘラレタル高サノ三角形ヲ作レ

88. 三角形ノ角及ビ面積ヲ與ヘテ其三角形ヲ作レ

89. 與ヘラレタル直線 AB ヲ點 P ニ於テ内分シ或ハ外分シ $AP^2 \sim BP^2$ ガ與ヘラレタル正方形ニ等シクナル樣ニセヨ.

90. 直線 a ヲ知テ $a\sqrt[4]{2}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ引ケ

91. 直線 a, b, c, d, e ヲ知テ $\sqrt{\dfrac{abc}{d}-e^2}$ ヲ以テ表ハサルベキ直線ヲ引ケ

92. 平行四邊形ヲ其一頂點ヨリ引ク所ノ直線ニ依リテ五等分セヨ

93. 三角形ヲ其一邊上ノ與ヘラレタル一點ヨリ引ク所ノ直線ヲ以テ三等分セヨ.

第五編　正多角形及ビ圓

雜問題

94. 次ノ正多角形ヲ以テ一點ノ周圍ノ表面ヲ充塞シ得ルコトヲ證明セヨ.

[1] 正三角形六箇　　[2] 正方形四箇

[3] 正六角形三箇

[4] 正八角形二箇及ビ正方形一箇

[5] 正十二角形二箇及ビ正三角形一箇

[6] 正方形,正六角形及ビ正十二角形各1一箇

95. OC ヲ圓ノ直徑 AOB ニ垂直ナル半徑トシ M ヲ OB ノ中點トシ MA 上ニ MC ニ等シク MD ヲ取レバ CD ハ此圓ニ內接スル正五角形ノ一邊ニ等シク OD ハ同ジク正十角形ノ一邊ナリ.

96. 半徑 r ナル圓ニ內接スル正五角形ノ對角線ヲ d トスレバ

$$d=\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

97. 半徑 r ナル圓ニ內接スル正多角形ノ一邊ヲ a トシ同圓ニ外接スル同邊數ノ正多角形ノ一邊ヲ a_1 トスレバ

$$a_1=\frac{2ar}{\sqrt{(4r^2-a^2)}}\qquad a=\frac{2a_1r}{\sqrt{(4r^2+a_1^2)}}$$

98. 一ツノ圓及ビ其中心ヲ與ヘ「コムパス」ノミヲ以テ圓周上ニツノ對點(或直徑ノ兩端)ヲ求ム

99. 與ヘラレタル任意ノ多角形ヲ之ト等積ナル正十角形ニ變形スベシ

100. 正方形ノ四隅ヨリ夫々三角形ヲ截リ去リ正八角形ヲ作ルベシ.

——{(終リ)}——

明治三十五年二月四日發行
明治三十五年三月三十一日訂正再版發行
明治三十五年八月十九日訂正三版發行
明治三十八年二月二十三日四版發行
明治三十八年十月三日訂正五版發行
明治三十八年十二月二十二日訂正六版印刷
明治三十八年十二月二十五日訂正六版發行
明治三十九年三月六日訂正七版印刷
明治三十九年三月九日訂正七版發行

著作者　高橋豐夫

發行兼印刷者　鈴木有三
東京市淺草區猿屋町十二番地

發行所　學海指針社
東京市日本橋區通旅籠町十一番地

平面幾何學教科書
定價金七拾五錢