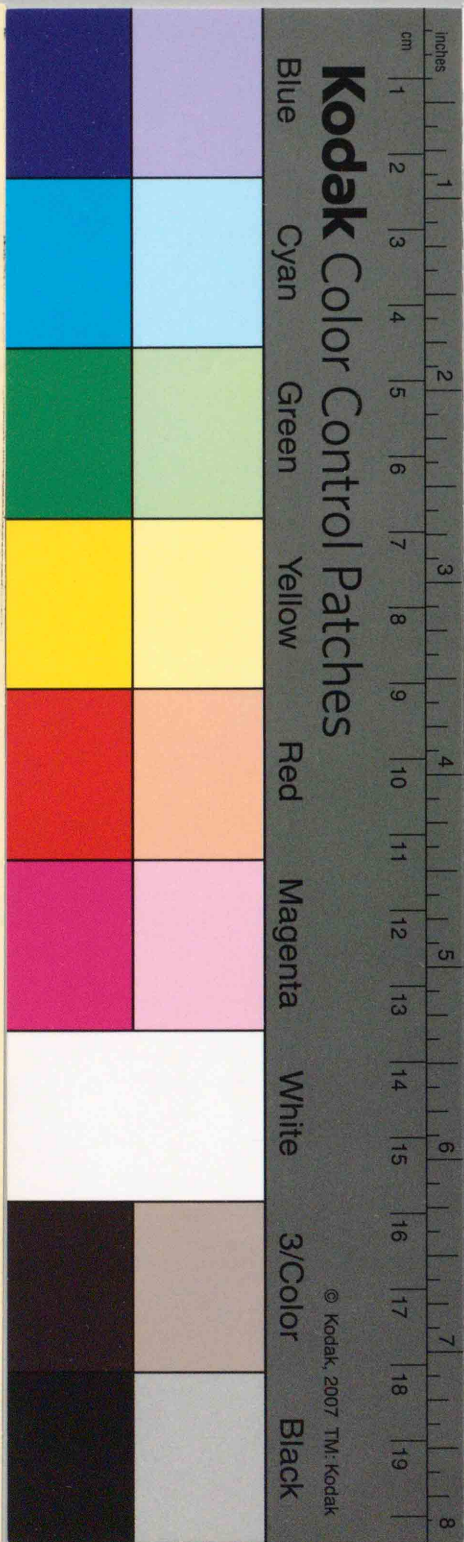


40090

教科書文庫

4
414
41-1907
20000 81706

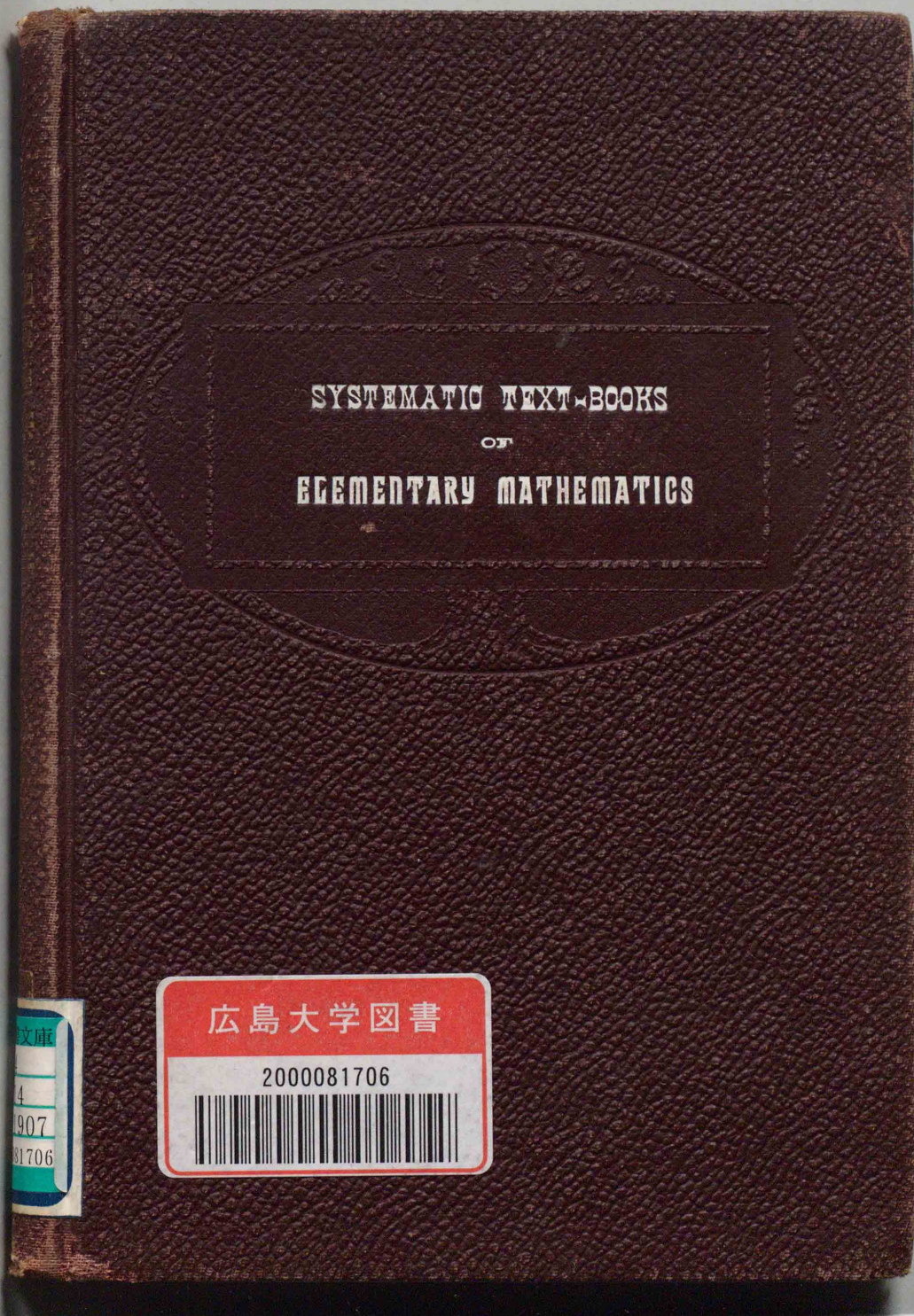
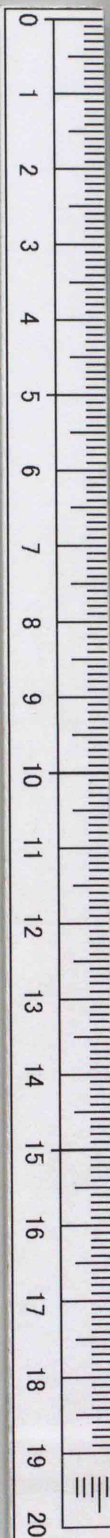


A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Kodak Gray Scale



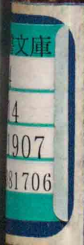
© Kodak, 2007 TM: Kodak



SYSTEMATIC TEXT-BOOKS
OF
ELEMENTARY MATHEMATICS

広島大学図書

2000081706



4a
414
明40

親愛なる
織田君に呈す

教科書文庫
4
414
41-1907
2000081706

資料室



文 部 省 檢 定 濟

明 治 四 十 年 十 二 月 廿 七 日 中 學 校 數 學 科 用

新 撰

平 面 三 角 法 教 科 書

東 京 高 等 師 範 學 校 教 授

理 學 士

林 鶴 一

廣 島 大 學 圖 書

編 纂

2000081706



開 成 館 藏 版

東 京



修正改版ニ就キテ

本書初版發行以來普ク諸學校ノ採用スル所トナリ、余ノ主義ガ廣ク世ニ行ハルヽニ至レルハ、余ノ偏ニ光榮トスル所ナリ。

本版ニ於テハ、實地教授ニ於ケル余自身及其他數氏ノ經驗ヲ參酌シ、全篇ヲ通ジテ改修ヲ加ヘ、問題ニモ一々驗證ヲ施シテ徒ニ教授ノ困難ナルモノ及生徒ノ學力ニ不相應ナルモノ、如キハ改訂又ハ削除シ、一層教課ニ適切ナラシメンコトヲ期セリ。特ニ本版ニ於テハ、既往數年間ノ高等各種學校ノ入學試験問題ヲ蒐集分類シテ適宜ニ之ヲ各篇ニ配置シ、一々其出所ヲ掲ゲタリ。余ハ之ニ由リテ學ブ者ニ興味ヲ覺エシメ、且其「力試シ」ヲナサシムル好材料ヲ供シ得タルヲ信ズ。

明治四十年九月

著者識

序

本書ハ余ガ新撰統合數學教科書ノ三角法ノ部ヲ成スモノニシテ先ニ著シタル幾何學教科書ニ連絡スルモノナリ。材料ノ選擇ト序次トハ止ムヲ得ザルモノ、外專ラ文部省所定ノ要目ニ準據セリ。

弧度法、反圓函數、三角方程式モ亦屢、中學校卒業生ノ要スルトコロナルヲ以テ附録トシテ添ヘタリ。本文ハ規定ノ時間以内ニ授業ヲ終リ得ル様短簡ニ敘述シタレバコレ等ノ附録ヲ攻究スルノ餘裕アルベシ。

附録ノ中ニ補習雜題ヲ載セ、第五年級ノ間ノミナラズ補習科ニ在ル際ノ練習用ニ供セシム。

本書編纂ニ就キテハ東利作君ノ盡力ヲ得タルコト尠カラズ茲ニ記シテ謝意ヲ表ス。

明治三十八年十月

著者識

目次

第一編 銳角ノ三角函數

第一章	三角函數ノ定義	… … …	1
第二章	同角ノ三角函數ノ關係	… … …	9
第三章	特別ナル角ノ三角函數	… … …	17
第四章	三角函數ノ眞數表	… … …	20

第二編 直角三角形

第一章	直角三角形ノ解法	… … …	25
第二章	高サ及距離ノ測量	… … …	28

第三編 一般ノ角ノ三角函數

第一章	一般ノ角ノ三角函數ノ定義 及關係	… … …	33
第二章	二角ノ和及差ノ三角函數	… … …	51
第三章	加法定理及減法定理ノ變形	… … …	60

第四編 對數

第一章 對數ノ定理 65
 第二章 常用對數 68

第五編 斜角三角形

第一章 斜角三角形ノ性質 79
 第二章 斜角三角形ノ解法 90
 第三章 測量上ノ應用問題 98

附錄一 弧度法,反圓函數,三角方程式 I
 附錄二 補習雜題 13
 附錄三 希臘文字 48

答 I
 附表 I



新 撰

平面三角法教科書

第一編

銳角ノ三角函數

第一章

三角函數ノ定義

1. 1 定義. 或量ノ測度トハ,之ヲ或單位ニテ測リタルトキ其大サヲ表ス數,即其量ト單位トノ比ナリ。測度ヲ數値トモ云フ。

例ヘバ六尺ノ長サノ測度ハ6ナリ。

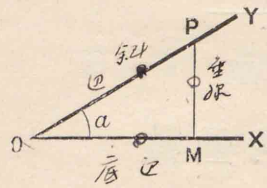
量ノ測度ハ代數學的ニ文字ヲ以テ之ヲ表スヲ得。本書ニ於テ量ヲ示セル文字ハ其測度ヲ表スモノトス。

角ヲ示セル文字ハ通常六十分法ニ依リ,即度

角に對する邊と垂線といふ。
底

分秒ヲ用ヒテ測ラレタル大サヲ代表ス。

2. 定義. XOYヲ任意ノ銳角トシ之ヲ a ニテ表シ、其一邊中ノ任意ノ點 Pヨリ他ノ邊へ垂線 PMヲ引ケバ直角三角形 POMヲ生ズ。今其三邊ノ中二邊ノ相互ノ比六種ニ附スルニ次ノ名ヲ以テス。



- (1) 角 a ノ對邊ト斜邊トノ比ヲ其角ノ正弦ト云ヒ、之ヲ $\sin a$ ト記ス。
- (2) 角 a ノ隣邊ト斜邊トノ比ヲ其角ノ餘弦ト云ヒ、之ヲ $\cos a$ ト記ス。
- (3) 角 a ノ對邊ト隣邊トノ比ヲ其角ノ正切ト云ヒ、之ヲ $\tan a$ ト記ス。
- (4) 角 a ノ隣邊ト對邊トノ比ヲ其角ノ餘切ト云ヒ、之ヲ $\cot a$ ト記ス。
- (5) 斜邊ト角 a ノ隣邊トノ比ヲ其

角ノ正割ト云ヒ、之ヲ $\sec a$ ト記ス。

(6) 斜邊ト角 a ノ對邊トノ比ヲ其角ノ餘割ト云ヒ、之ヲ $\operatorname{cosec} a$ ト記ス。

依テ次ノ如シ。

正弦	$\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}$	$\sin a = \frac{MP}{OP}$	余	$\cos a = \frac{OM}{OP}$	$\frac{\text{底}}{\text{斜邊}}$
	Sine			Cosine	
正切	$\frac{\text{垂線}}{\text{底}}$	$\tan a = \frac{MP}{OM}$	余	$\cot a = \frac{OM}{MP}$	$\frac{\text{底}}{\text{垂線}}$
	tangent			Cotangent	
正割	$\frac{\text{斜邊}}{\text{底}}$	$\sec a = \frac{OP}{OM}$	余	$\operatorname{cosec} a = \frac{OP}{MP}$	$\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}$
	secant			Cosecant	

注意 1. 正切ヲ tg 又ハ tang ト記シ、餘切ヲ cotg 或ハ ctg ト記シ、餘割ヲ csc ト記スコトアリ。

注意 2. 或角ノ餘割、正割、餘切ハ夫夫其正弦、餘弦、正切ノ逆數ナリ。

注意 3. 或角ノ正弦、餘弦等ハ不名數ナル故代數學ニ於ケルガ如ク之ヲ加減シ又ハ乗除スルヲ得。

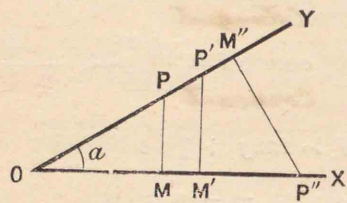
3. 1 定理. 或角ノ正弦ト餘弦トハ 1ヨリ小ニシテ、正切ト餘切トハ如何

ナル値ヲモ取り得ベク,正割ト餘割トハ1ヨリ大ナリ。

○證明. 上ノ定義ニ依リテ明ナリ。

4.2 定理. 角ガ變ゼザルトキハ其正弦,餘弦等モ亦變ゼズ。

證明. PM, P'M', P''M'' ヲ P, P', P'' ヨリ他ノ邊



へ下セル垂線トセバ
 三角形 POM, P'OM', P''OM'' ハ皆相似ナル故

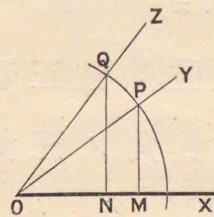
$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''} = \sin \alpha.$$

他ノ比ニ就テモ亦然リ。

5.3 定理. 角ガ増大スルニ從ヒ其正弦,正切,正割ハ増大シ餘弦,餘切,餘割ハ却テ減小ス。

證明. 角 $XOZ > XOY$ トシ共通ノ頂點 O ヲ中心トシ任意ノ圓弧 QP ヲ書キ P, Q ヨリ共通

邊 OX へ垂線 PM, QN ヲ引ケバ



$$NQ > MP,$$

$$\therefore \frac{NQ}{OQ} > \frac{MP}{OP},$$

即 $\sin XOZ > \sin XOY,$

又 $ON < OM,$

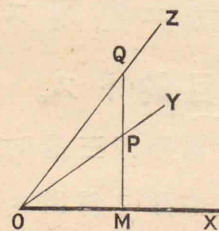
$$\therefore \frac{ON}{OQ} < \frac{OM}{OP}, \text{ 即 } \cos XOZ < \cos XOY.$$

次ニ正切ニ就テ説カンニ OX 中ノ任意ノ點 M ヲ過ギ OX へ垂線ヲ引キ OY, OZ トノ交點ヲ

夫々 P, Q トスレバ

$$\frac{MQ}{OM} > \frac{MP}{OM}$$

即 $\tan XOZ > \tan XOY.$



第2節注意2ニ於

テ述ベタルガ如ク餘切

ハ正切ノ逆數ナル故正切ガ増大スレバ餘切ハ減

小ス。

又同様ニ餘弦ガ減小スレバ正割ハ増大シ、正弦ガ増大スレバ餘割ハ減小ス。

6. 3 定義. 角ノ正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割ヲ總稱シテ其角ノ**三角函數**ト云フ。

三角函數ハ又圓函數或ハ三角比トモ云フ。

注意. 一般ニ或數ガ變ズルトキ他ノ數モ亦之ニ伴ヒテ變ズルナラバ後ヲ前者ノ**函數**ト云フ。例ヘバ $2x^2+3x-5$ ノ數値ハ x ノ函數ニシテ、圓周ノ測度ハ其半徑ノ測度ノ函數ナリ。

7. 4 定義. **三角法**ハ三角函數ノ性質ト之ヲ三角形ノ解法ニ應用スル事トヲ講究スルヲ以テ目的トス。

三角形ノ解法トハ其六部分即三邊ト三角トノ中、三部分ヲ知リテ他ノ三部分ヲ算出スル方法ヲ云フ。後編ニ至リテ之ヲ説クベシ。

平面三角形ニ關スルモノヲ**平面三角法**ト云

ヒ、球面三角形ニ關スルモノヲ**球面三角法**ト云フ。本書ハ平面三角法ノミヲ論ズ。

8. 5 定義. 二角ノ和ガ 90° ナルトキハ其各ヲ他ノ餘角ト云フ。

角 a ノ餘角ハ $90^\circ - a$ ナリ。

9. 4 定理. 或角ノ餘弦、餘切、餘割ハ夫々其餘角ノ正弦、正切、正割ニ等シ。

證明. 直角三角形

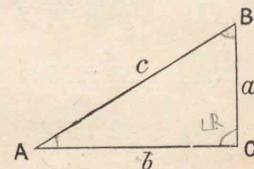
ABCニ於テ角A, B, Cノ對邊ヲ夫々 a, b, c ニテ表シ,*
C = 90° トセバAトBトハ互ニ餘角ヲ爲ス。而シテ第2節ノ定義ニ依レバ

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B,$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \tan B,$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \sec B.$$

故ニ一般ニ或角ヲ a ニテ表サバ



* 此記法ハ全書ヲ通シテ採用ス。

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \sin (90^\circ - a) \\ \cot a &= \tan (90^\circ - a) \\ \operatorname{cosec} a &= \sec (90^\circ - a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

系

$$\left. \begin{aligned} \sin a &= \cos (90^\circ - a) \\ \tan a &= \cot (90^\circ - a) \\ \sec a &= \operatorname{cosec} (90^\circ - a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

【例】 $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ, \cos 35^\circ 20' = \sin 54^\circ 40'$.

問題 一

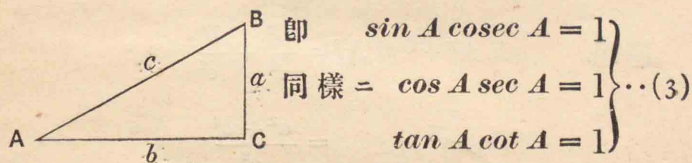
- (1) $\frac{3}{8}$ 直角ヲ度分秒ニ直セ。
- (2) $23^\circ \cdot 275$ ヲ度分秒ニテ表セ。
- (3) $42^\circ 25' 40''$ ヲ直角ノ分數ニテ表セ。
- (4) 直角三角形 ABC ニ於テ $C=90^\circ, a=3, b=4$ ナラバ A 及 B ノ總テノ三角函數如何。
- (5) 直角三角形 ABC ニ於テ $C=90^\circ, b=2mn, c=m^2+n^2$ ナラバ A ノ三角函數如何。
- (6) $\frac{2}{3}$ ヲ正弦トスル角ヲ作圖セヨ。
- (7) $\frac{5}{4}$ ヲ正切トスル角ヲ作圖セヨ。
- (8) $\frac{8}{3}$ ヲ正割トスル角ヲ作圖セヨ。

第二章

同角ノ三角函數ノ關係

10. (定理. 正弦ト餘割, 餘弦ト正割, 正切ト餘切ハ夫々互ニ逆數ヲ爲ス(逆數關係)).

證明. $\sin A \operatorname{cosec} A = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}$.



從テ

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}, \sec A = \frac{1}{\cos A}, \cot A = \frac{1}{\tan A}.$$

11. (定理. 正切ハ正弦ト餘弦トノ比ニ等シク, 餘切ハ餘弦ト正弦トノ比ニ等シ(相除關係)).

證明. $\tan A = \frac{a}{b}$,

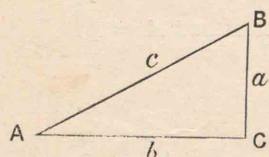
又
$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$$

故 =
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

 同様 =
$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$
 }(4)

12. 定理. 正弦ノ平方ト餘弦ノ平方トノ和ハ恒ニ1ニ等シ(第一平方關係)。

證明.
$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}$$



$$= \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

$$= \frac{c^2}{c^2}$$

$$= 1.$$

之ヲ次ノ如ク記ス。

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \dots\dots\dots (5)$$

從テ
$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A,$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A.$$

注意. 指數 n ガ正ノ整數ナルトキ三角函數

ノ n 乗幂ヲ示スニ之ヲ函數記號ノ右肩ニ置ク。

13. 定理. 1ト正切ノ平方トノ和ハ正割ノ平方ニ等シク, 1ト餘切ノ平方トノ和ハ餘割ノ平方ニ等シ(第二平方關係)。

證明.
$$1 + \tan^2 A = 1 + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= \sec^2 A.$$

即
$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

 同様 =
$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$$
 }(6)

14. 三角函數ノ一ヲ知リテ他ノ函數ヲ求ムル法。

例ヘバ $\sin A$ ヲ知リテ他ノ函數ヲ求メンニ公式(5)ヨリ

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A},$$

從テ(4)ヨリ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

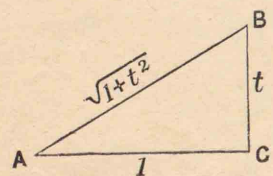
又
$$\cot A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A}$$

$$\sec A = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$$

但根號ハ皆正根ヲ表ス。

又作圖ニ依テ此等ノ公式ヲ作ルヲ得。



例ヘバ $\tan A$ ヲ知レル
 場合ニ於テハ $\tan A$ ヲ t ニ
 テ表シ $AC = 1$, $BC = t$ ナル
 如キ直角三角形ヲ作ルベ
 シ。然ルトキハ

$$AB = \sqrt{1 + t^2}$$

故ニ
$$\sin A = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{\tan A}{\sqrt{1 + \tan^2 A}},$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$$

等ナリ。

問題 二

(1) $\sin x = \frac{12}{13}$ ヲ知リテ $\cos x$, $\tan x$, $\sec x$ ヲ求

メヨ。

X (2) $\tan A = \frac{2}{3}$ ヲ知リテ $\sin A$, $\cos A$, $\sec A$ ヲ求

メヨ。

(3) $\sin a = \frac{n}{m}$ ヲ知リテ $\tan a$ ヲ求メヨ。

次ノ式ヲ證明セヨ (4)–(8)。

(4) $\tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1}$.

(5) $\cot A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$.

(6) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} = \frac{1}{\sec A}$.

(7) $\cos A = \frac{\cot A}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$.

(8) $\tan A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}}$.

X (9) $\cos A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ヲ知リテ $\sin A$, $\tan A$ ヲ求メヨ。

X (10) $\cot A = 2 + \sqrt{3}$ ヲ知リテ他ノ三角函數ヲ
 求メヨ。

15. 恒等式ノ證明法. 前述ノ關係ニヨリ三角函數ヲ含メル數多ノ恒等式ヲ證明スルヲ得. 其方法ニ四種アリ.

(第一) 兩邊中複雑ナルモノヨリ簡單ナルモノヲ誘導スル方法.

[例] $(\sec A + \operatorname{cosec} A)^2 - (\tan A + \cot A)^2 = 2 \sec A \operatorname{cosec} A$ ヲ證明セヨ.

$$\begin{aligned} \text{證明. 左邊} &= \sec^2 A + 2 \sec A \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A \\ &\quad - (\tan^2 A + 2 \tan A \cot A + \cot^2 A) \\ &= 1 + \tan^2 A + 2 \sec A \operatorname{cosec} A + 1 + \cot^2 A \\ &\quad - \tan^2 A - 2 - \cot^2 A \\ &= 2 \sec A \operatorname{cosec} A. \end{aligned}$$

(第二) 兩邊ヲ同一ノ式ニ變ズル方法.

[例] $\tan A (\cos^2 A - \sin^2 A) = \sin A \cos A (1 - \tan^2 A)$ ヲ證明セヨ.

$$\begin{aligned} \text{證明.} \\ \text{左邊} &= \frac{\sin A}{\cos A} \cos^2 A - \frac{\sin A}{\cos A} \sin^2 A = \sin A \cos A - \frac{\sin^3 A}{\cos A}. \\ \text{右邊} &= \sin A \cos A - \sin A \cos A \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin A \cos A - \frac{\sin^3 A}{\cos A}. \end{aligned}$$

故ニ所題ノ恒等式ハ真ナリ.

(第三) 既知ノ恒等式ヨリ誘導スル方法.

[例] $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a$ ヲ證明セヨ.

證明. 公式(5)ニ由テ

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1,$$

兩邊ヲ自乗シテ

$$\sin^4 a + 2 \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a = 1,$$

$$\therefore \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a.$$

(第四) 所題ノ恒等式ガ真ナル爲ニ充分ナル條件ヲ考究スル方法.

[例] 次式ヲ證明セヨ.

$$\frac{\operatorname{cosec} a + \cot a}{\sec a + \tan a} = \frac{\sec a - \tan a}{\operatorname{cosec} a - \cot a}.$$

證明. 此恒等式ガ真ナル爲ニハ

$$\operatorname{cosec}^2 a - \cot^2 a = \sec^2 a - \tan^2 a,$$

即 $(1 + \cot^2 a) - \cot^2 a = (1 + \tan^2 a) - \tan^2 a,$

ナレバ可ナリ. 然ルニ此式ノ兩邊ハ共ニ1ニ等シ. 故ニ所題ノ恒等式ハ真ナリ.

問題 三

次ノ恒等式ヲ證明セヨ.

$$(1) \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1.$$

- (2) $\sin A \cot A = \cos A.$
- (3) $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A.$
- (4) $(\sin A - \cos A)^2 = 1 - 2 \sin A \cos A.$
- (5) $(\tan A + \sec A)^2 = \frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}.$
- (6) $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x).$
- (7) $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x - \sin^2 x.$
- (8) $\cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x.$
- (9) $\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A.$
- (10) $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2.$
- (11) $\tan a + \cot a = \sec a \operatorname{cosec} a.$
- (12) $\frac{1 + \sin \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{1 + \sec \theta}{1 + \operatorname{cosec} \theta} = \tan \theta.$
- (13) $(1 - \tan A)^2 + (1 - \cot A)^2 = (\sec A - \operatorname{cosec} A)^2.$
- (14) $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B.$
- (15) $\operatorname{cosec} a (\sec a - 1) + \sin a = \cot a (1 - \cos a) + \tan a.$
- (16) $\sin^2 x \tan^2 x + \cos^2 x \cot^2 x = \tan^2 x + \cot^2 x - 1.$
- (17) $\frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = \tan \theta.$
- (18) $\cos^2 A (1 + \tan^2 A) = 1 - \tan^2 A + \tan^4 A.$
- (19) $\operatorname{cosec}^4 x (1 - \cos^4 x) - 2 \cot^2 x = 1.$
- (20) $\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} + \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} = 2 \operatorname{cosec} x.$

第三章

特別ナル角ノ三角函數

16. 45°ノ三角函數.

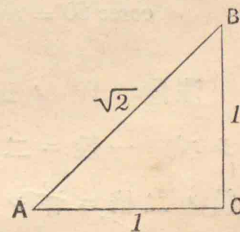
直角三角形 ABC = 於テ C = 90°, AC = BC = 1
トセバ A = B = 45°ニシテ AB = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$
故ニ $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 0.7071.$$

又 $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = \frac{1}{1} = 1,$

$$\sec 45^\circ = \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2} = 1.4142.$$

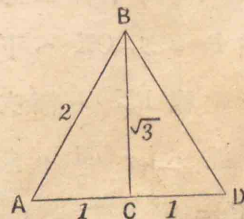


17. 30°及 60°ノ三角函數.

正三角形 ABD = 於テ各
邊ノ長サヲ 2 トシ高サ BC ヲ
引ケバ

$$AC = 1,$$

故ニ $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$



$$\therefore \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660,$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0.5000,$$

$$\tan 60^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3} = 1.7321,$$

$$\cot 60^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.5774,$$

$$\sec 60^\circ = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2,$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1.1547.$$

注意 60°ノ正弦ハ30°ノ正弦ノ二倍ニ等シカラズ。一般ニ二倍角ノ三角函數ハ原角ノ三角函數ノ二倍ニ等シカラズ。

18. 0°及90°ノ三角函數.

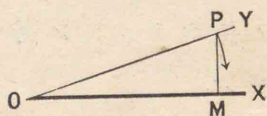
角 XOY ノ邊 OX ヲ固定シ他ノ邊 OY ヲ回轉シテ OX ニ接近セシムレバ角 XOY ハ漸次零ニ近ヅキ, OY 中ノ任意ノ

點 P ヲリ OX へ下セ

ル垂線 PM ハ漸次零

ニ近ヅキ, OM ハ漸次

OP ニ等シクナル。故ニ極限ニ於テ



$$\sin 0^\circ = 0,$$

$$\cos 0^\circ = 1,$$

從テ

$$\tan 0^\circ = 0.$$

又角ガ小トナルニ從ヒ其正切ノ逆數即餘切ハ漸次ニ増大シテ際限ナシ、之ヲ次ノ如ク略記ス

$$\cot 0^\circ = \infty.$$

同様ニ $\sec 0^\circ = 1, \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty.$

又90°ハ0°ノ餘角ナル故公式(1)ニ由テ

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \tan 90^\circ = \infty,$$

$$\cot 90^\circ = 0, \quad \sec 90^\circ = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1.$$

19. 本章ニ於テ求メ得タル重ナル三角函數ヲ次ノ表ニ掲ゲ以テ記憶ニ便セントス。任意ノ角ノ三角函數ヲ求ムル方法ハ困難ナルヲ以テ本書ニ於テハ之ヲ説述セズ。

角	0°	30°	45°	60°	90°
<i>sin</i>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
<i>cos</i>	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
<i>tan</i>	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

問題四

次ノ方程式ヨリ x ノ値ヲ求メヨ (1)–(4).

(1) $\sin 2x = \cos 3x.$

(2) $2 \sin^2 x = \sin x.$

(3) $4 \cos^2 x - 2(\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} = 0.$

(4) $4 + \sqrt{2} = 4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} + 1) \sin x.$

次ノ聯立方程式ヲ解ケ (5)–(7).

(5) $\sin(x + y) = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \cos(x - y) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

(6) $\cos(5x - 3y) = 1, \tan(5x + 6y) = \infty.$

(7) $\tan x \tan y = 1, \tan^2 x + \tan^2 y = 3\frac{1}{3}.$

(8) 次ノ方程式ヨリ $\tan \theta$ ヲ求メヨ。

$$\tan \theta + \cot \theta = 2a, \text{ 但 } a > 0.$$

第四章

三角函數ノ眞數表

20. 高等數學ニ依レバ任意ノ角ノ三角函數ノ略近値ヲ算出スルヲ得ベシ、之ヲ記入セル表ヲ

三角函數ノ眞數表ト云フ。本書ニ載スル所ノ函數表ハ十分飛ビノ表ニシテ其用法ハ次ノ如シ。

[例一] $\tan 34^\circ 50'$ ヲ求メヨ。

解. 最上列ニ \tan ト記セル行ノ數ノ中ニテ左行ナル $34^\circ 50'$ ト同列ノ數 0.6959 ヲ取リテ之ヲ所要ノ値トス、即

$$\tan 34^\circ 50' = 0.6959.$$

[例二] $\sin 46^\circ 20'$ ヲ求メヨ。

解. 最下列ニ \sin ト記セル行ノ數ノ中ニテ右行ナル $46^\circ 20'$ ト同列ノ數 0.7234 ヲ見出シ之ヲ所要ノ値トス、即

$$\sin 46^\circ 20' = 0.7234.$$

此値ハ又 $\cos 43^\circ 40' =$ 等シ、其故ハ

$$46^\circ 20' + 43^\circ 40' = 90^\circ.$$

注意. $\sin(45^\circ + x) = \cos(45^\circ - x)$ ナルヲ以テ眞數表ニ於テハ 45° ヲリ小ナル角ノ函數ヲ載セ、 45° ヲリ大ナル角ノ函數ナリトモ見ラル、如クス

[例三] $\sin 18^\circ 12'$ ヲ求メヨ。

解. 眞數表ニ由テ

$$\sin 18^\circ 10' = 0.3118,$$

$$\sin 18^\circ 20' = 0.3145.$$

即角ノ差 $10'$ ニ對スル函數ノ差ハ 0.0027 ナリ。
之ヲ表差ト云フ。依テ

角ノ微差ト之ニ對應スル三角函數
ノ微差トハ正比例ヲ爲ス(比例部分ノ
法則)。

ト假定セバ $2'$ ニ對スル正弦ノ差 x ハ比例

$$10' : 2' = 0.0027 : x$$

ヨリ

$$x = 0.0005$$

ナルヲ知ル。故ニ

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ 12' &= 0.3118 + 0.0005 \\ &= 0.3123. \end{aligned}$$

[例四] $\sin x = 0.4572$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解 眞數表ニ由テ

$$\sin 27^\circ 10' = 0.4566,$$

$$\sin 27^\circ 20' = 0.4592,$$

依テ $10'$ ニ對スル正弦ノ差ハ 0.0026 ナリ。

$$\text{又 } \sin x - \sin 27^\circ 10' = 0.0006,$$

故ニ比例 $0.0026 : 0.0006 = 10' : d'$

ヨリ $d' = 2' \cdot 3$

ヲ得、之ヲ $27^\circ 10'$ ニ加フレバ

$$x = 27^\circ 12' \cdot 3.$$

注意 \tan 及 \sec ヲ知リテ角ヲ求ムル場合ハ
同様ナリト雖 $\cos, \cot, \operatorname{cosec}$ ノ場合ニアリテハ函數
ノ増大ニ伴ヒ角ハ却テ減小スルヲ以テ次ノ例ノ
如クス。

[例五] $\cot x = 0.5455$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解 眞數表ニ由テ

$$\cot 61^\circ 20' = 0.5467$$

$$\cot 61^\circ 30' = 0.5430$$

依テ $10'$ ニ對スル餘切ノ差ハ 0.0037 ナリ。

$$\text{又 } \cot 61^\circ 20' - \cot x = 0.0012,$$

故ニ比例

$$0.0037 : 0.0012 = 10' : d'$$

ヨリ $d' = 3' \cdot 2$

ヲ得、之ヲ $61^\circ 20'$ ニ加フレバ

$$x = 61^\circ 23' \cdot 2.$$

問題 五

次ノ函數ノ値ヲ求メヨ (1)–(4).

(1) $\sin 22^\circ 40'$. (2) $\tan 43^\circ 5'$.

(3) $\cos 37^\circ 33'$. (4) $\cot 39^\circ 25'$.

次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ (5)–(8).

(5) $\sin x = 0.4912$ (6) $\tan x = 1.3360$.

(7) $\cos x = 0.3540$. (8) $\cot x = 0.5525$.

第二編

直角三角形

第一章

直角三角形ノ解法

21. 定義. 三角形ハ三邊及三角ヲ有ス, 此六部分ヲ三角形ノ原素ト云フ. 六原素ノ中, 三ツヲ知リテ他ノ三ツヲ算出スルコトヲ三角形ヲ解クト云ヒ, 其方法ヲ解法ト云フ.

三角形ヲ直角三角形及斜角三角形ニ分ツ, 後者ハ即任意ノ三角形ナリ. 本編ニ於テハ前者ノ解法ヲ論ズベシ.

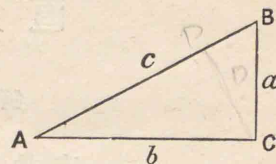
直角三角形ノ解法ニ於テハ一原素ハ必直角ナルヲ以テ他ノ二原素ヲ知ルヲ要ス, 但二鋭角ノ大サヲ知リテ三邊ノ長サヲ算出スルヲ得ズ.

三角形 ABC ニ於テハ大字 A, B, C ヲ以テ其角ヲ表シ, 其對邊ヲ順次ニ a, b, c ニテ表スヲ常トス.

22. 第一ノ場合. 二邊(a, b)ヲ知り
二銳角(A, B)及斜邊(c)ヲ求ムル法。

解法. $\tan A = \frac{a}{b}$

ナルニ依リ表ヲ用ヒテ A ヲ
求ムルヲ得。然ルトキハ



$$B = 90^\circ - A$$

ヨリ B ヲ得。

次ニ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

或ハ $c = \frac{a}{\sin A}$

ヨリ c ヲ求メ得ベシ。

[例] $a = 135.62, b = 200$ ヲ知リテ A, B 及 c ヲ
求メヨ。

解. $\tan A = \frac{135.62}{200} = 0.6781.$

之ニ依リテ A ヲ求ムレバ

$$A = 34^\circ 8' 6,$$

從テ $B = 55^\circ 51' 4.$

次ニ c ヲ計算スル爲表ヨリ $\sin A$ ヲ求ムレバ

$$\sin A = 0.5613,$$

依テ $c = \frac{135.62}{0.5613} = 241.62.$

23. 第二ノ場合. 斜邊(c)及一邊(a)
ヲ知り他ノ原素ヲ求ムル法。

解法. $\sin A = \frac{a}{c}$

ニ依リ表ヲ用ヒテ A ヲ求ムルヲ得然ルトキハ

$$B = 90^\circ - A.$$

又 $b = \sqrt{(c+a)(c-a)},$

或ハ $b = a \cot A.$

24. 第三ノ場合. 一銳角(A)及其對
邊(a)ヲ知り他ノ原素ヲ求ムル法。

解法. $B = 90^\circ - A,$

$$b = a \cot A,$$

$$c = \frac{a}{\sin A}$$

ヨリ B, b, c ヲ求ムルヲ得ベシ。

注意. 一銳角及其隣邊ヲ知レルトキハ此第
三ノ場合ニ歸セシムベシ。

25. 第四ノ場合. 斜邊(c)及一銳
角(A)ヲ知り他ノ原素ヲ求ムル法。

解法 $B = 90^\circ - A,$
 $a = c \sin A,$
 $b = c \cos A.$

問題 六

次ノ各題ニ於テ直角三角形ヲ解ケ(1)-(4).

(1) $a = 168.9, b = 500.$ (2) $c = 400, a = 356.$

(3) $A = 62^\circ 35', a = 400.5.$

(4) $c = 1000, A = 18^\circ 24'.$

(5) 直角三角形 ABC ノ直角ノ頂點 C ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ハ $c \sin A \cos A$ ニ等シ。

第二章

高さ及距離ノ測量

26. 二三ノ用語.

直角三角形ノ解法ヲ應用シテ高さ及距離ノ測量ヲ爲スヲ得、今先二三ノ用語ヲ示サン。

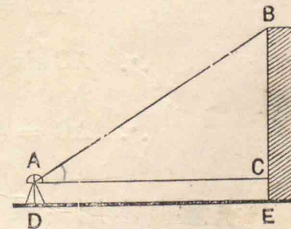
間接ニ二點間ノ距離ヲ知ラント欲セバ別ニ測鎖又ハ卷尺ヲ以テ適宜ノ距離ヲ實測スルヲ要ス、之ヲ基線ト云フ。

二直線間ノ角即距角ヲ測ルニハ通常經緯儀ヲ以テス。

重錘ヲ絲ニテ吊シタルトキ其絲ノ方向ヲ鉛直線ト云ヒ、之ニ垂直ナル平面ヲ水平面ト云ヒ、其面中ノ直線ヲ水平線ト云フ。水平面ニ垂直ナル平面(即鉛直線ヲ含ム平面)ヲ直立面ト云ヒ、此平面内ニ於テ一ツノ直線ガ水平線ト爲ス角ノ中、水平面ノ上方ニ在ルモノヲ仰角又ハ高度ト云ヒ、下方ニ在ルモノヲ俯角ト云フ。

27. 設問 I. 水平面上ニ在リテ近ヅキ得ベキ直立セル物體ノ高サヲ測ル法。

解法. BE ヲ物體ノ高サトシ、AD ヲ觀測者ノ眼高トセヨ。A 點ニ於テ物體ノ頂點ノ仰角 BAC ヲ實測シ、次ニ D ヨリ物體マ



デノ距離 DE ヲ實測スルトキハ

$$BC = AC \tan BAC.$$

故ニ 所要ノ高サ = $DE \tan BAC + AD,$

28. 設問 II. 近ツキ得ザル物體ト
觀測者ノ位置トノ距離ヲ求ムル法。

解法. Cヲ物體ノ位置トシAヲ觀測者ノ位
置トシ其距離ACヲ求メントス。適宜ニ基線AB
ヲ實測シAニ於テBAC角ヲ測リBニ於テABC
角ヲ測ルベシ。然ルトキハ

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

ナル故直ニCヲ知ルヲ得。

AヨリBCへ垂線ADヲ
引クトセバ△BADヨリ

$$AD = AB \sin B,$$

又△CADヨリ

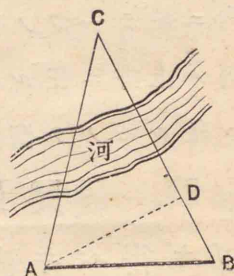
$$AD = AC \sin C.$$

$$\therefore AC \sin C = AB \sin B,$$

$$\therefore AC = \frac{AB \sin B}{\sin C}.$$

注意. 本題ニ於テハB, Cヲ孰レモ銳角ト假
定セリ, 其中一ツガ鈍角ナル場合ニ於テハ之ニ其
補角ヲ代入スレバ可ナリ。

本題ノ方法ニ由テ川ノ幅ヲ測量スルヲ得。



問題七

(1) 人アリ, 地面ト 30° ノ傾斜ヲ爲セル坂路
ヲ登ルコト12町35間ナリ。然ラバ此人地面ヨリ
幾何ノ高サニ在ルカ。

(2) 壁ニ懸ケタル梯子アリ, 其長サ12尺ニシ
テ地面ト 60° ノ傾斜ヲ爲セリ, 其梯子ノ頂上ノ高
サ及其脚ヨリ壁ノ基礎ニ至ル距離幾何。

(3) 海面上八十尺ナル一艦ノ檣頭ヨリ他ノ
船ノ船體ヲ觀測セシニ俯角 30° ヲ得タリト云フ。
二船ノ距離ヲ問フ。

(4) 旗竿アリ, 風ノ爲ニ吹き折ラレ, 其頂上ハ
竿底ヨリ10尺ヲ離レタル點ニ於テ地ヲ打チ且地
面ト 60° ノ角ヲ作レリ。竿ノ全長ヲ求メヨ。

(5) 銳角三角形ノ頂點ヨリ底へ下セル垂線
ニテ分タレタル底ノ二部分ノ比ハ之ニ隣レル底
角ノ餘切ノ比ニ等シ。

(6) 同上ノ假設ニ於テ頂角ノ二部分ノ餘弦
ノ比ハ隣邊ノ反比ニ等シ。

(7) 三角形ABCニ於テCヨリABニ下セル

垂線 CD ガ形内ニアルトキハ

$$CD = \frac{AB}{\cot A + \cot B}$$

(8) 投錨セル一汽船アリ。海岸ニ沿フタル直線上ノ一點ヨリ之ヲ測レバ其直線ト 30° ノ角ヲナシ、其線ニ沿ヒテ進ムコト三百間ニシテ又之ヲ測レバ 60° ノ角ヲナスト云フ。其直線ヨリ汽船マデノ最近距離ヲ問フ。但其距離二百間未滿ナルコトハ已ニ測知セラレタルモノトス。〔長商〕

若其距離二百間以上ナラバ如何。

(9) A, B ハ海面上ノ二點ニシテ相距ルコト 2500「メートル」ナリ。A, B 兩所ニ於テ AB 線ノ直上ニアル輕氣球 C ヲ望ミタルニ視線ガ水平面トナス角ハ夫々 45° 及 60° ナリ。輕氣球ノ水平上ノ高サヲ問フ。〔東京高工〕

(10) 川岸ニ沿ヒ基線 $AB = 300$ 尺ヲ實測シ A, B ヲ對岸ノ樹木 C ヲ觀測シテ $\angle CAB = 52^\circ 20'$, $\angle CBA = 64^\circ 30'$ ヲ得タリ、川ノ幅及 AC ノ距離如何。

第三編

一般ノ角ノ三角函數

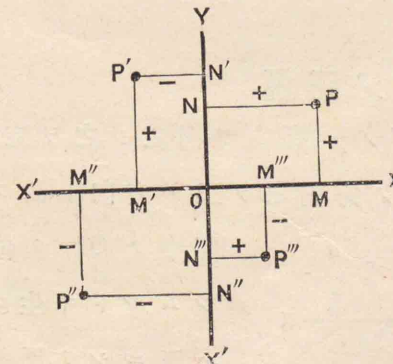
第一章

一般ノ角ノ三角函數ノ定義及關係

29. 本編ニ於テハ代數學ノ數ノ性質ノ符號 + 及 - ヲ直線及角ノ測度ニ適用シ一般ノ角ノ三角函數ノ定義ヲ述べ其關係ヲ考究セントス。

30. 直線ノ正負。

XX', YY' ヲ互ニ直角ニ交ル二直線トシ O ヲ其交點トセヨ。然ルトキハ O ヲリ OX 線中ノ一

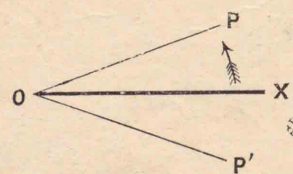


點 M = 至ル線分 OM 及之ニ平行ニシテ YY' ノ右方ニ在ル線分 NP, N''P''' 等ヲ正トシ, 又 OX' 線中ノ一點 M' = 至ル線分 OM' 及之ニ平行ニシテ YY' ノ左方ニ在ル線分 N'P', N''P'' 等ヲ負トス。又 YY' 線ニ沿ヘル ON, ON' 及之ニ平行ニシテ XX' ノ上方ニ在ル線分 MP, M'P' 等ヲ正トシ下方ニ在ル線分 ON'', ON''', M''P'', M'''P''' 等ヲ負トス。

○ 略言スレバ, (1) YY' ヨリ之ニ垂直ニ右方ニ向ヒ測レル長サヲ正トシ, 左方ニ向ヒ測レル長サヲ負トス。(2) XX' ヨリ之ニ垂直ニ上方ニ向ヒ測レル長サヲ正トシ, 下方ニ向ヒ測レル長サヲ負トス。

31. 角ノ正負.

直線 OP ノ一端 O ヲ固定シ, 之ヲ定直線 OX ノ位置ヨリ矢ノ方向(之ヲ正ノ方向ト云フ)ニ廻轉シ



圖中ノ OP ノ位置ニ至ラシムルトキ生ズル角 XOP ハ正ニシテ, 反對ノ方向之ヲ負ノ方向ト云フ)ニ廻轉

シテ生ズル角 XOP' ハ負ナリトス。

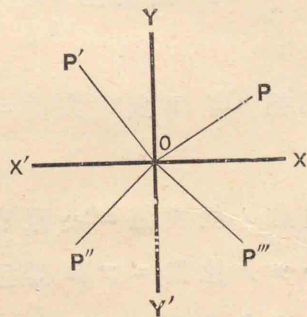
例ヘバ XOP 及 XOP' ノ大サ何レモ直角ノ三分ノ一ナルトキハ

$$\text{角 XOP} = +30^\circ, \quad \text{角 XOP}' = -30^\circ.$$

定直線 OX ヲ正角及負角ノ主線ト云ヒ, OP ヲ動徑ト云フ。

32. 象限.

互ニ直角ニ交ル二直線 XOX', YOY' ニテ分タレタル平面ノ四部分ヲ象限ト云ヒ, XOY, YOX', X'OY', Y'OX ヲ順次ニ第一, 第二, 第三, 第四象限ト云フ。



33. 角ノ大サ.

XOX', YOY' ヲ互ニ直角ニ交ル二直線トシ, 別ニ動徑 OP アリテ主線 OX ノ位置ヲ發シ O 點ヲ周リテ正ノ方向ニ廻轉セバ此線ト OX トノ間ノ

角ハ次第ニ増大ス、即 XOP, XOP', XOP'', XOP''' 等ナリ。而シテ

$$I \quad 0^\circ < XOP < 90^\circ,$$

$$II \quad 90^\circ < XOP' < 180^\circ,$$

$$III \quad 180^\circ < XOP'' < 270^\circ,$$

$$IV \quad 270^\circ < XOP''' < 360^\circ,$$

動徑 OP ガ尙廻轉ヲ續ケ OX ヲ超エテ再 OP ノ位置ニ至ルトキ XOP ハ 360° ヨリ大ナリ、例ヘバ XOP ノ始メノ大サヲ 30° トセバ後ノ大サハ $30^\circ + 360^\circ$ 即 390° ナリ。猶動徑 OP ヲ無限ニ廻轉スルヲ得。

同様ニ動徑 OP ヲ負ノ方向ニ無限ニ廻轉スルヲ得。

正角及負角ノ絶對値ニハ際限ナシ。

任意ノ一ツノ位置ニアル動徑 OP ト主線 OX トノ爲ス角ハ正角、負角共ニ無數ナリ。

○此二線ノ爲ス角ノ中最小ナル正角ヲ α トスレバ此二線ノ爲セル總テノ角ハ一ツノ式

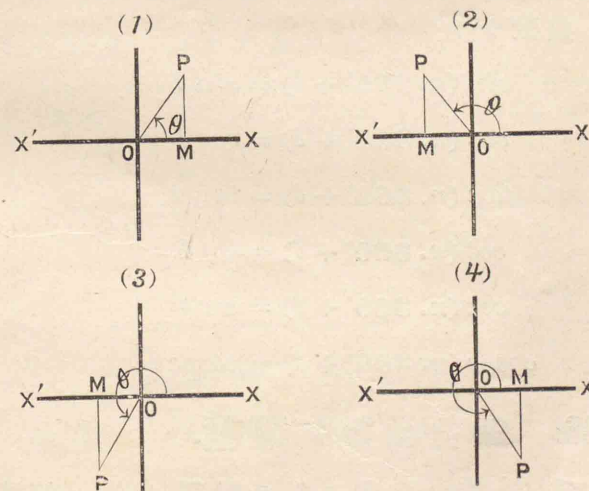
$$n \cdot 360^\circ + \alpha$$

ニヨリテ表サル、但 n ハ 0 又ハ正負ノ整数ナリ。

前圖ニ於ケル四角 XOP, XOP', XOP'', XOP''' 及此等ト二邊ヲ共有スル正角及負角ヲ夫々第一象限、第二象限、第三象限、第四象限ノ角ト云フ。

34. 三角函數ノ一般ノ定義.

主線 OX ト任意ノ線 OP トノ爲ス角ニ於テ、其一邊 OP 中ノ一點 P ヨリ OX 或ハ其延長 OX' へ垂線 PM ヲ引キ、此任意ノ角ヲ θ ニテ表サバ角 θ ノ三角函數ノ定義ハ次ノ如シ。



$$\sin \theta = \frac{MP}{OP}, \quad \cos \theta = \frac{OM}{OP},$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM}, \quad \cot \theta = \frac{OM}{MP},$$

$$\sec \theta = \frac{OP}{OM}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{OP}{MP}.$$

注意. OX ト OP トノ 爲ス角ハ正負共ニ無數ナル故同一ノ三角函數ヲ有スル角ハ無數ナリ.

35. $n \cdot 360^\circ + \theta$ ノ三角函數.

角 θ ト角 $n \cdot 360^\circ + \theta$ トハ二邊ヲ共有スル角ナリ, 依テ其三角函數ハ全ク相等シ, 但 n ハ 0 又ハ正負ノ整數ナリ. *此ハ0ナルトハ一度モ廻轉セザルコトナリ*

$$\left. \begin{aligned} \sin(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \sin \theta \\ \cos(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \cos \theta \\ \tan(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \tan \theta \\ \cot(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \cot \theta \\ \sec(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \sec \theta \\ \operatorname{cosec}(n \cdot 360^\circ + \theta) &= \operatorname{cosec} \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

36. 三角函數ノ符號.

第 34 節ノ定義ニ於テ動徑 OP ノ符號ヲ恒ニ正トシ MP, OM, OP ノ絶對値ヲ夫々 a, b, c トセバ

第一象限ニ於テハ此三線分ハ皆正ナルヲ以テ三角函數ハ皆正ナリ.

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{+a}{+c} = +\frac{a}{c}, \\ \cos \theta &= \frac{+b}{+c} = +\frac{b}{c}, \\ \tan \theta &= \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} \end{aligned} \right\} +, +,$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{+a}{+c} = +\frac{a}{c}, \\ \cos \theta &= \frac{-b}{+c} = -\frac{b}{c}, \\ \tan \theta &= \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b} \end{aligned} \right\} +, -$$

等ナリ. 第三, 第四象限ニ於テモ同様ニ符號ヲ決定スルヲ得. 即次ノ如シ

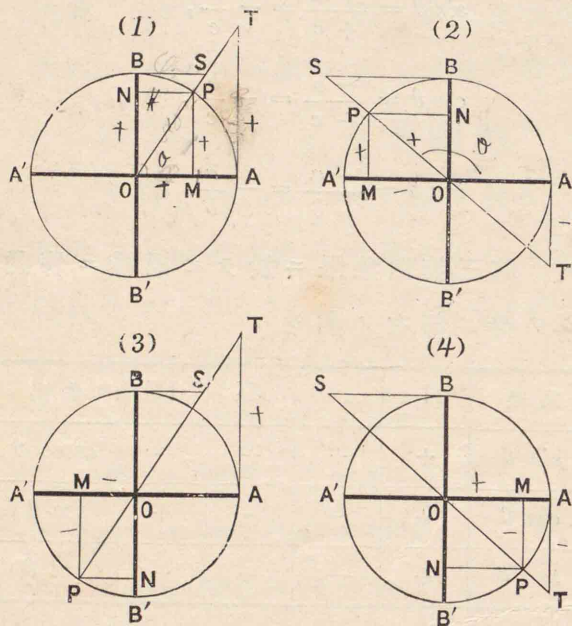
象限	I	II	III	IV	象限
$\sin \theta$	+	+	-	-	$\operatorname{cosec} \theta$
$\cos \theta$	+	-	-	+	$\sec \theta$
$\tan \theta$	+	-	+	-	$\cot \theta$

37. 三角函數ノ別定義.

線單位ニ等シキ半徑ヲ有スル圓ヲ單位圓ト云フ.

動徑 OP ノ測度ヲ 1 トスレバ P 點ハ單位圓ヲ畫ク, 其圓ト XX' トノ交點ヲ A, A' トシ, YY' トノ

交點ヲ B, B' トス。次ニ A, B ヲ過ギ圓ノ切線 AT, BS ヲ引ケバ次ノ式ニテ示スガ如ク諸線分ノ測度ヲ OA ト OP トノ爲ス角ノ三角函數ト云フヲ得。



$\theta = \angle AOP$

$$\sin \theta = MP, \quad \cos \theta = OM,$$

$$\tan \theta = AT, \quad \cot \theta = BS,$$

$$\sec \theta = OT, \quad \operatorname{cosec} \theta = OS.$$

此定義ニ於テ符號ヲ定ムルニ困難ナルモノハ正割及餘割ノミナルガ、中心 O ヲリ角ノ邊(即

OP ノ方向)ニ沿フテ測ルトキハ之ヲ正トシ邊ノ延長(即 PO ノ方向)ニ沿フテ測ルトキハ之ヲ負トスベシ。

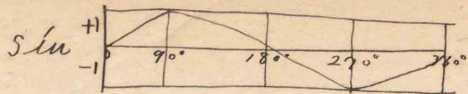
注意. 本節ノ定義ト第 34 節ノ定義トノ一致スル事ハ容易ニ之ヲ證明スルヲ得。

38. 一般ノ三角函數ノ間ノ關係.

第 34 節及第 37 節ノ定義ニ於テ符號ヲ考フルモ猶次ノ關係アルコトハ容易ニ之ヲ證明スルヲ得。

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta \operatorname{cosec} \theta &= 1, \\ \cos \theta \sec \theta &= 1, \\ \tan \theta \cot \theta &= 1, \\ \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \\ \cot \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1, \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta, \\ 1 + \cot^2 \theta &= \operatorname{cosec}^2 \theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

故ニ是等ノ公式ヨリ誘導セラレ得ベキ恒等式ハ角ノ大サ及符號ノ如何ニ係ラズ皆眞ナリ。



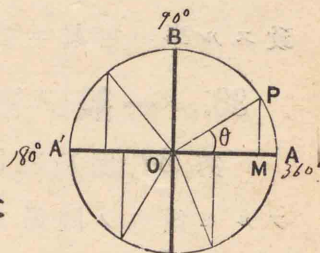
39. 三角函數ノ變化.

OP ト OA トノ爲ス角ヲ θ ニテ表シ、此角ガ 0° ヨリ 360° マデ増大スルニ從ヒ其函數ノ變化スル有様ヲ考究セントス。

(第一) 正弦.

$\sin \theta = MP$

先 $\sin 0^\circ = 0$ 。



θ ガ 0° ヨリ 90° マデ増大

スルトキ、 $\sin \theta$ ハ 0 ヨリ 1 マ
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 デ増大ス。 $\therefore \sin 90^\circ = 1$ 。

θ ガ 90° ヨリ 180° マデ増大スルトキ、 $\sin \theta$ ハ
 1 ヨリ 0 マデ減小ス。 $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\therefore \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$
 $\therefore \sin 180^\circ = 0$ 。

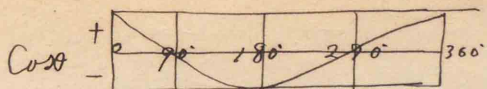
θ ガ 180° ヨリ 270° マデ増大スルトキ、 $\sin \theta$ ハ
 常ニ負ニシテ其絶對值ハ 0 ヨリ 1 マデ増大ス。

$\sin 270^\circ = -1$ 。

θ ガ 270° ヨリ 360° マデ増大スルトキ、 $\sin \theta$ ハ
 猶常ニ負ニシテ其絶對值ハ 1 ヨリ 0 マデ減小ス。

$\sin 360^\circ = 0$ 。

注意 θ ガ 360° ヲ超エテ増大スレバ再上ト



同ノ變化ヲ繰返スコト明ナリ。

(第二) 餘弦. 前圖ニ於テ

$\cos \theta = OM$ 。

故ニ第一象限ニアリテハ $\cos \theta$ ハ 1 ヨリ 0 マ
 デ減小シ、第二象限ニアリテハ 0 ヨリ -1 マデ減
 小ス、又第三、第四象限ニアリテハ反對ニ増大ス。

$\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$,

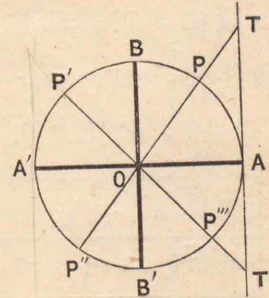
$\cos 270^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = 1$ 。

(第三) 正切.

$\tan \theta = AT$ 。

先 $\tan 0^\circ = 0$ 。

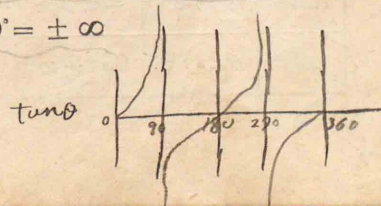
θ ガ 0° ヨリ 90° マデ増
 大スルトキ、 $\tan \theta$ ハ 0 ヨリ
 次第ニ増大シ、 θ ガ充分ニ
 90° ニ近ヅケバ $\tan \theta$ ハ如何
 ナル數ヨリモ大トナル。
 之ヲ 90° ノ正切ハ無限大ナリト略言ス。



θ ガ僅ニ 90° ヲ超ユレバ正切ハ俄ニ負トナリ
 テ其絶對值ハ如何ナル數ヨリモ大ナリ、故ニ

$\tan 90^\circ = \pm \infty$

ナリト云フ。



正切、余切、正割、余割

θ が 90° より 180° マデ増大スルトキハ $\tan \theta$ ハ常ニ負ニシテ其絶對値ハ ∞ より 0 マデ減少ス。

$\tan 180^\circ = 0.$

θ が第三象限ニ在ルトキハ $\tan \theta$ ハ第一象限ト同一ノ變化ヲ爲シ、第四象限ニ於テハ第二象限ト同一ノ變化ヲ爲スコト明ナリ。

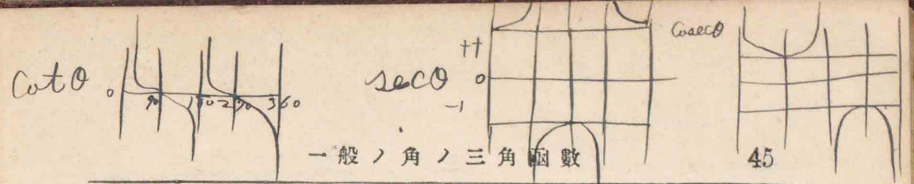
從テ $\tan 270^\circ = \pm \infty,$

$\tan 360^\circ = 0.$

(第四) 餘切, (第五) 正割, (第六) 餘割ハ順次ニ正切, 餘弦, 正弦ノ逆數ナルヲ以テ容易ニ其變化ヲ知ルコトヲ得ベシ。

上ノ變化ヲ表ニ作レバ次ノ如シ。

象限	I	II	III	IV	
$\sin \theta$	0より1	1より0	0より-1	-1より0	ニ變ズ
$\operatorname{cosec} \theta$	∞ より1	1より ∞	$-\infty$ より-1	-1より $-\infty$	ニ變ズ
$\cos \theta$	1より0	0より-1	-1より0	0より1	ニ變ズ
$\sec \theta$	1より ∞	$-\infty$ より-1	-1より $-\infty$	∞ より1	ニ變ズ
$\tan \theta$	0より ∞	$-\infty$ より0	0より ∞	$-\infty$ より0	ニ變ズ
$\cot \theta$	∞ より0	0より $-\infty$	∞ より0	0より $-\infty$	ニ變ズ

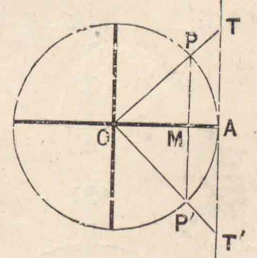


一般ノ角ノ三角函數

注意. 正弦及餘弦ハ 1 より 0 ヲ經テ -1 ニ至ル總テノ實數値ヲ取り, 正割及餘割ハ 1 ト -1 トノ間ノ實數値ヲ取ルコトナク, 又正切及餘切ハ $+\infty$ より 0 ヲ經テ $-\infty$ ニ至ル總テノ實數値ヲ取ルヲ得。

40. 負角ノ三角函數.

OA ト OP トノ爲ス角ノ中一ツヲ θ ニテ表シ, 垂線 PM ヲ延長シ P' ニ於テ圓ト會セシムレバ OP' ト OA トノ爲ス角ノ中一ツハ $-\theta$ ナリ. 而シテ



$MP' = -MP,$
 $OM = OM,$
 $AT' = -AT.$

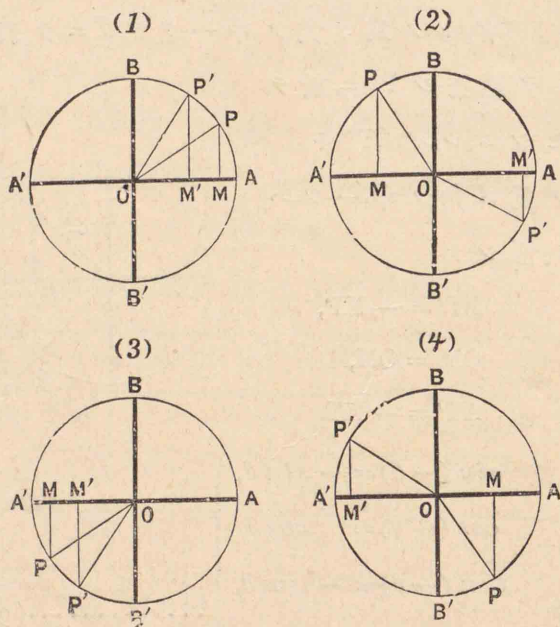
即 $\left. \begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta, \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta, \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta, \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta, \\ \sec(-\theta) &= \sec \theta, \\ \operatorname{cosec}(-\theta) &= -\operatorname{cosec} \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$

從テ

41. 定義. 二角ノ和ガ 90° ナルトキ
ハ其各ヲ他ノ餘角ト云フ。

注意. 茲ニ云フ所ノ二角ハ銳角ニ限ルニ非ズ。例ヘバ 120° ノ餘角ハ $90^\circ - 120^\circ$ 即 -30° ナリ。

42. 餘角ノ三角函數.



OA ト OP トノ爲ス角ヲ θ トシ, OA ト OP' ト
ノ爲ス角ヲ $90^\circ - \theta$ トシ P, P' ヨリ直径 AOA' = 垂

線 PM, P'M' ヲ引ケバ大サ及符號共ニ

$\triangle OPM = \triangle OP'M'$
 $M'P' = OM, \quad OM' = MP.$
 即 $\sin AOP' = \cos AOP, \quad \cos AOP' = \sin AOP.$

即

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta,$

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta,$

從テ

$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta,$

$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta,$

$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta,$

$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta.$

.....(10)

43. 定義. 二角ノ和ガ 180° ナルトキ
ハ其各ヲ他ノ補角ト云フ。

44. 補角ノ三角函數.

OA ト OP トノ爲ス角ヲ θ トシ, P ヨリ AO =

平行ナル直線 PP' ヲ引

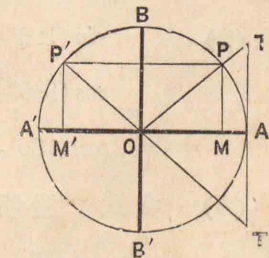
キ, P' ニ於テ圓ト會セシ

ムレバ, OA ト OP' トノ

爲ス角ハ $180^\circ - \theta$ ナリ。

P, P' ヨリ直径 AOA' =

垂線 PM, P'M' ヲ引ケバ



$M'P' = MP, \quad OM' = -OM.$

$\sin AOP' = \sin AOP, \quad \cos AOP' = -\cos AOP.$

$$\begin{array}{l}
 \text{故} = \left. \begin{array}{l} \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \\ \text{從テ} \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta, \\ \cot(180^\circ - \theta) = -\cot \theta, \\ \sec(180^\circ - \theta) = -\sec \theta, \\ \operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta, \end{array} \right\} \dots\dots\dots(11)
 \end{array}$$

問題 八

先作圖ニヨリ、次ニ本文ノ公式ニヨリテ次ノ式ヲ證明セヨ(1)–(2).

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad \begin{array}{l} \sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \\ \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \\ \tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta. \end{array} \\
 (2) \quad \begin{array}{l} \sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta, \\ \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta, \\ \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta. \end{array}
 \end{array}$$

(3) 次式ヲ證明セヨ。

$$\begin{array}{l}
 \sin(\theta - 90^\circ) = -\cos \theta, \\
 \cos(\theta - 90^\circ) = \sin \theta.
 \end{array}$$

(4) 次式ヲ證明セヨ。

$$\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\sin 135^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 135^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

(5) $-30^\circ, 150^\circ, -150^\circ, -210^\circ$ ノ正弦及餘弦ヲ書ケ。 [海兵]

(6) 次式ヲ證明セヨ。

$$\sin 300^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos 300^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \cos 330^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\sin 750^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 750^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\sin 1080^\circ = 0, \quad \cos 1080^\circ = 1.$$

$$\sin(-315^\circ) = \cos(-315^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(7) Aヲ第二象限ノ角トスレバ

$$\sin A = +\sqrt{1 - \cos^2 A},$$

$$\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

又一般ニ第 14 節ニアル式ノ右邊ハ複號トヲ要ス、之ヲ證明セヨ。

$$\sqrt{(8)} \quad \tan \theta = -\frac{4}{3} \text{ ナルトキ } \sin \theta \text{ 及 } \cos \theta \text{ ノ値}$$

ヲ見出セ。

〔海兵〕

$$(9) \quad a \sin x = b, \quad c \cos x = d \text{ ナルトキハ}$$

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{d^2}{c^2} = 1.$$

注意. 本題ニ於ケル如ク或數ヲ含メル若干ノ等式ヨリ之ヲ含マザル等式ヲ作ルコトヲ此數ヲ消去スト云フ。

$$(10) \quad \text{次ノ二等式ヨリ } x \text{ ヲ消去セヨ。}$$

$$m \sin x + n \cos x = p,$$

$$n \sin x - m \cos x = q.$$

$$(11) \quad \text{次ノ二等式ヨリ } \theta \text{ ヲ消去セヨ。}$$

$$\tan \theta + \sin \theta = m,$$

$$\tan \theta - \sin \theta = n.$$

$$(12) \quad \text{次ノ二等式ヨリ } A, B \text{ ヲ消去セヨ。}$$

$$\sin A = a \cos B + b \sin B,$$

$$\cos A = a \sin B - b \cos B.$$

第二章

二角ノ和及差ノ三角函數

45. 正弦及餘弦ノ加法定理.

a, β ヲ任意ノ二角トセバ

$$\left. \begin{aligned} \sin(a + \beta) &= \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta \\ \cos(a + \beta) &= \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

證明. 二角ヲ XOY, YOZ トシ之ヲ a, β ニテ表サバ其和 XOZ ハ $a + \beta$ ナリ。

今 $XOZ < 90^\circ$ ト假定

シ OZ 中ノ任意ノ點 C ヲリ OX, OY = 垂線 CA, CB

ヲ引キ, 次ニ B ヲリ OX,

CA = 垂線 BD, BE ヲ引ケ

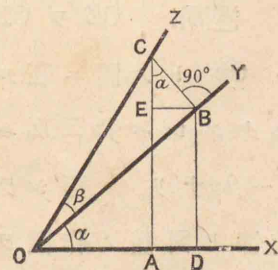
バ 角 BCE = BOD = a ,

又 OC ノ測度ヲ 1 トスレバ

$$AC = \sin(a + \beta), \quad BC = \sin \beta, \quad OB = \cos \beta,$$

故ニ $EC = BC \cos a = \cos a \sin \beta,$

及 $AE = DB = OB \sin a = \sin a \cos \beta,$



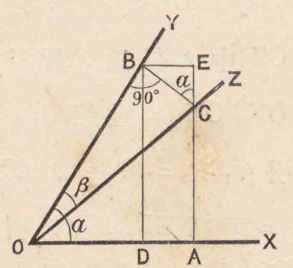
$$\begin{aligned} \text{又 } N \sin(a+\beta) &= \frac{OA}{OC} = \frac{AE+CE}{OC} = \frac{BD+CE}{OC} = \frac{BD}{OC} + \frac{CE}{OC} = \frac{BD}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} + \frac{CE}{OC} \\ &= N \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta \end{aligned}$$

然ルニ AC = AE + EC,
 故ニ $\sin(a+\beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$.
 又 OA = $\cos(a+\beta)$, BC = $\sin \beta$, OB = $\cos \beta$,
 而シテ OD = OB $\cos a = \cos a \cos \beta$,
 及 AD = EB = BC $\sin a = \sin a \sin \beta$,
 然ルニ OA = OD - AD,
 故ニ $\cos(a+\beta) = \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta$.

46. 正弦及餘弦ノ減法定理.

$$\left. \begin{aligned} \sin(a-\beta) &= \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta \\ \cos(a-\beta) &= \cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

證明. OZヲOX
 トOYトノ間ニ在ル
 如クスレバ角XOZハ
 $a-\beta$ ナリ。而シテ
 前節ト同様ノ作圖ヲ
 爲セバ



AC = $\sin(a-\beta)$, BC = $\sin \beta$, OB = $\cos \beta$,
 故ニ EC = BC $\cos a = \cos a \sin \beta$,
 及 AE = DB = OB $\sin a = \sin a \cos \beta$,
 然ルニ AC = AE - EC.

此 Cos(a+β) = ...
 $\frac{OD}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OC} = \frac{OD-AD}{OC} = \frac{OD-BC \sin a}{OC} = \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta$

$$\begin{aligned} \text{又 } N \sin(a-\beta) &= \frac{OA}{OC} = \frac{AE-EC}{OC} = \frac{BD-EC}{OC} = \frac{BD}{OC} - \frac{EC}{OC} = \frac{BD}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} - \frac{EC}{OC} \\ &= N \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta \end{aligned}$$

故ニ $\sin(a-\beta) = \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta$,
 同様ニ $\cos(a-\beta) = \cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta$.

注意1. 加法定理及減法定理ハ又基本公式ト稱シ極メテ重要ナルモノナリ。

注意2. 本節及前節ノ證明ニ於テハ $a, \beta, a+\beta$ ヲ何レモ 90° ヨリ小ナル正角ト假定セリ然レドモ角ノ大サ及正負ノ如何ニ拘ラズ上ノ定理ハ成立ス。但其證明ハ稍困難ナルヲ以テ之ヲ略ス。

注意3. 加法定理ニ於テ β ヲ $-\beta$ ニ變ズル

注意4. $\sin(a+\beta) \neq \sin a + \sin \beta$,
 $\cos(a+\beta) \neq \cos a + \cos \beta$.

47. 正切ノ加法定理.

$$\tan(a+\beta) = \frac{\tan a + \tan \beta}{1 - \tan a \tan \beta} \dots (14)$$

證明. 公式(12)ニ由テ

$$\tan(a+\beta) = \frac{\sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta}{\cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta}$$

右邊ノ分母子ヲ $\cos a \cos \beta$ ニテ除スベシ。

$$\begin{aligned} \text{右邊} &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin a \sin \beta}{\cos a \cos \beta}} = \frac{\tan a + \tan \beta}{1 - \tan a \tan \beta} \end{aligned}$$

Cos(a-β) = ...
 $\frac{OD}{OC} = \frac{OD+ED}{OC} = \frac{OD+BE}{OC} = \frac{OD}{OC} + \frac{BE}{OC} = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} + \frac{BE}{OC} \cdot \frac{OC}{OC}$

又公式(13) = 由テ

$$\tan(a - \beta) = \frac{\tan a - \tan \beta}{1 + \tan a \tan \beta} \dots\dots(15)$$

是レ正切ノ減法定理ナリ。

48. 15° 及 75° ノ三角函數.

公式(13) = 於テ $a = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$ トセバ

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$= \cos 75^\circ.$$

$$\text{同様} = \cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{又} \quad \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

$$= \cot 75^\circ.$$

他ノ函數モ亦容易ニ求ムルヲ得。

49. 二倍角ノ三角函數.

公式(12) = 於テ $\beta = a$ トスレバ

$$\left. \begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a, \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ &= 1 - 2 \sin^2 a \\ &= 2 \cos^2 a - 1. \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

$$\text{又(14)ヨリ} \quad \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

公式(16) = 於テ $a = \frac{1}{2} A$ トスレバ

$$\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A.$$

50. 半角ノ三角函數.

公式(16)ヨリ

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} A &= \frac{1 - \cos A}{2} \\ \cos^2 \frac{1}{2} A &= \frac{1 + \cos A}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(17) A$$

$$\text{又} \quad \left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2} A &= \frac{1 - \cos A}{\sin A} \\ \tan^2 \frac{1}{2} A &= \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

51. 三倍角ノ三角函數.

公式(12) = 於テ $\beta = 2a$ トスレバ

$$\sin 3a = \sin(a + 2a) = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 3a &= \sin a(1 - 2\sin^2 a) + \cos a \cdot 2\sin a \cos a \\ &= \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a(1 - \sin^2 a). \end{aligned}$$

$$\therefore \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\text{同様} = \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \quad \dots\dots (19)$$

$$\text{又} \quad \tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

52. 18°ノ三角函數.

$$a = 18^\circ \text{ トセバ } 2a + 3a = 5a = 90^\circ,$$

$$\therefore 2a = 90^\circ - 3a.$$

$$\therefore \sin 2a = \cos 3a.$$

$$\text{即} \quad 2\sin a \cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

今 $\cos a \neq 0$ ナル故之ヲ以テ兩邊ヲ割レバ

$$2\sin a = 4\cos^2 a - 3 = 4(1 - \sin^2 a) - 3$$

ヲ得、因テ $\sin a = x$ トスレバ

$$2x = 4(1 - x^2) - 3,$$

$$\therefore 4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

負數ハ題意ニ適セズ、故ニ正數ヲ取レバ

$$x = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \cos 72^\circ$$

$$\therefore \cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16},$$

$$\therefore \cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \cos 72^\circ$$

他ノ函數モ亦之ヨリ求メ得ベシ。

注意 18°ノ三角函數ヲ得タルトキハ之ヨリ
容易ニ 72°, 36°, 54°ノ三角函數ヲ得。

問題九

(1) 次式ヲ證セヨ。

$$\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm a) = \cos a \pm \sin a,$$

$$\sqrt{2}\cos(45^\circ \pm a) = \cos a \mp \sin a,$$

$$\tan(45^\circ \pm a) = \frac{1 \pm \tan a}{1 \mp \tan a}.$$

(2) 次式ヲ證セヨ。

$$\cos 22^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \cos 11^\circ 15' = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

(3) A, Bガ共ニ第一象限ノ角ニシテ

$$\sin A = \frac{5}{13}, \quad \sin B = \frac{7}{25} \text{ ナルトキ } \sin(A + B), \cos(A - B)$$

ヲ求メヨ。

A, Bニ制限ナキトキハ如何。

$$(4) A, Bハ各銳角ニシテ \tan A = \frac{2}{3}, \tan B$$

$= \frac{3}{2}$ ナルトキ $A + B$ ヲ求メヨ。 [千葉醫專]

次式ヲ證明セヨ(5)-(25).

$$(5) \quad \sin(a + \beta) + \cos(a - \beta) \\ = (\sin a + \cos a)(\sin \beta + \cos \beta). \quad \text{〔海兵〕}$$

$$(6) \quad 1 \pm \sin 2a = (\cos a \pm \sin a)^2.$$

$$(7) \quad \cot(a + \beta) = \frac{\cot a \cot \beta - 1}{\cot a + \cot \beta}. \quad \text{公式}$$

$$(8) \quad \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}. \quad \text{〔千葉醫專〕}$$

$$(9) \quad \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}.$$

$$(10) \quad \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \tan a.$$

$$(11) \quad \cos^6 \theta + \sin^6 \theta = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\theta. \quad \text{〔海兵〕}$$

$$(12) \quad \sin 8A = 8 \sin A \cos A \cos 2A \cos 4A.$$

$$(13) \quad \tan A + \cot 2A = \operatorname{cosec} 2A.$$

$$(14) \quad \tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2 \tan 2A. \quad \text{〔商船〕}$$

$$(15) \quad \cot A - \tan A = 2 \cot 2A. \quad \text{公式} \quad \text{〔陸士〕}$$

$$(16) \quad \cot A - 8 \cot 8A = \tan A + 2 \tan 2A + 4 \tan 4A.$$

$$(17) \quad 2 \sin 2A - \sin 4A = 4 \sin 2A \sin^2 A.$$

$$(18) \quad \sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C \\ + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C. \quad \text{公式}$$

$$(19) \quad \cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C \\ - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C. \quad \text{公式}$$

$$(20) \quad \tan(A + B + C) \\ = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}. \quad \text{公式}$$

$$(21) \quad A + B + C = 180^\circ \text{ ナルトキ} \\ \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

$$(22) \quad A + B + C = 90^\circ \text{ ナルトキ} \\ \tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1.$$

$$(23) \quad \sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \cos^2 A. \quad \text{公式}$$

$$(24) \quad \cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \sin^2 A. \quad \text{公式}$$

$$(25) \quad 1 + \tan(A + B) \tan(A - B) \\ = \frac{1 - 2 \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}. \quad \text{〔札幌〕}$$

$$(26) \quad 4 \sin a \sin(60^\circ - a) \sin(60^\circ + a) \\ = \sin 3a. \quad \text{〔海兵〕}$$

(27) 正切ガ夫々 $\sqrt{7} + \sqrt{6}$, $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ ナル二
鋭角ノ和ヲ求メヨ。 [大塚]

$$(28) \quad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \quad \text{ヲ知リテ } 36^\circ \text{ ノ三角函數}$$

ヲ計算セヨ。

[東京高工]

(29) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{5}{4}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ 及 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ノ値ヲ求メヨ。

[海機]

(30) $\sin \theta$ ト $\sin \frac{\theta}{2}$ トノ比ガ 8:5 ナルトキハ $\cos \theta$ ノ値如何。

[商船]

(31) 地上ノ一定點ヨリ空中ニアル直徑六間ノ輕氣球ヲ望ム視角 30° ニシテ其中心ノ仰角ハ 45° ナリ。此輕氣球ノ中心ガ地面ヲ距ル鉛直ノ高サヲ求ム。

[東京高工]

(32) $\tan B = \frac{2 \sin A \sin C}{\sin(A+C)}$ ナラバ $\cot A, \cot B, \cot C$ ハ等差級數ヲナス。

[仙臺醫專]

第三章

加法定理及減法定理ノ變形

53. 公式(12), (13)ニ加減ヲ施セバ

$$\left. \begin{aligned} \sin(a+\beta) + \sin(a-\beta) &= 2 \sin a \cos \beta, \\ \sin(a+\beta) - \sin(a-\beta) &= 2 \cos a \sin \beta, \\ \cos(a+\beta) + \cos(a-\beta) &= 2 \cos a \cos \beta, \\ -\cos(a+\beta) + \cos(a-\beta) &= 2 \sin a \sin \beta. \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

今 $a + \beta = x, a - \beta = y$ トスレバ

$$a = \frac{1}{2}(x+y), \quad \beta = \frac{1}{2}(x-y).$$

之ヲ上ノ公式ニ代入スレバ

$$\left. \begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y), \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y), \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y), \\ -\cos x + \cos y &= 2 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y). \end{aligned} \right\} (21)$$

是等ノ四公式ハ正弦或ハ餘弦ノ和或ハ差ヲ積ノ形ニ變化スルニ必要ナルモノナリ。

54. [例題一] $\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\tan \frac{1}{2}(x-y)}{\tan \frac{1}{2}(x+y)}$

[例題二] $\cos(a+\beta+\gamma) + \cos a + \cos \beta + \cos \gamma$
 $= 4 \cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma) \cos \frac{1}{2}(\gamma+a) \cos \frac{1}{2}(a+\beta).$

解. $\cos(a+\beta+\gamma) + \cos a$
 $= 2 \cos \frac{1}{2}(2a+\beta+\gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta+\gamma),$

Handwritten notes:
 $\cos \frac{1}{2}(x+y) \tan \frac{1}{2}(x-y) = \frac{\sin \frac{1}{2}(x-y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)}$
 $\frac{2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x-y)}{2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(x-y)}{\cos \frac{1}{2}(x-y)}$

及 $\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma).$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(a + \beta + \gamma) + \cos a + \cos \beta + \cos \gamma \\ = 2 \cos \frac{1}{2}(2a + \beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + 2 \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \\ = 2 \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \left[\cos \frac{1}{2}(2a + \beta + \gamma) + \cos \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \times 2 \cos \frac{1}{4}(2a + 2\beta) \cos \frac{1}{4}(2\gamma + 2a)$$

$$= 4 \cos \frac{1}{2}(\beta + \gamma) \cos \frac{1}{2}(a + \beta) \cos \frac{1}{2}(\gamma + a).$$

問 題 十

次式ヲ證明セヨ (1)–(4).

(1) $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}.$

(2) $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}.$

(3) $\sin 5A + \sin A = 2 \sin 3A \cos 2A.$

(4) $\frac{1}{2} \cos 4A - \frac{1}{2} \cos 6A = \sin 5A \sin A.$

(5) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ ヲ求メヨ。 (千葉醫專)

次式ヲ證明セヨ (6)–(15).

(6) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ = \sin 20^\circ.$

(7) $\sin(30^\circ + A) + \sin(30^\circ - A) = \cos A.$

(8) $\cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A) + \cos A = 0.$ [商船]

(9) $\frac{\sin 3A}{\sin A} - \frac{\cos 3A}{\cos A} = 2.$ [金澤醫專, 陸士]

(10) $\frac{\sin 3A}{\sin A} + \frac{\cos 3A}{\cos A} = 4 \cos 2A.$

(11) $\sin A \cos A + \sin B \cos B = \sin(A + B) \cos(A - B).$

(12) $\frac{\cos A + \cos B}{\sin(A + B)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)}.$

(13) $\frac{\cos B - \cos A}{\sin(A + B)} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}.$

(14) $2 \cos(45^\circ - A) \cos(45^\circ + A) = \cos 2A.$

(15) $2 \sin a (\sin 2a + \sin 4a + \sin 6a) = \cos a - \cos 7a.$

(16) $\frac{\sin \theta - \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos \theta - \cos 3\theta + \cos 5\theta}$ ヲ最簡ナル形ニ化

セヨ。

[大阪高工]

次式ヲ證明セヨ (17)–(21).

(17) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos y - \cos x} = \cot \frac{x + y}{2} \cot \frac{x - y}{2}.$

71) 右辺 = $\frac{1}{2}(\sin A \cos A + \sin B \cos B) = \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B)$
 $= \frac{1}{2} \times 2 \sin \frac{1}{2}(2A + 2B) \cos \frac{1}{2}(2A - 2B) = \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$

$$(18) \quad \cos^2 2A - \cos^2 3A = \sin A \sin 5A.$$

$$(19) \quad \sin A + \cos B \\ = 2 \cos \left(45^\circ + \frac{A-B}{2} \right) \cos \left(45^\circ - \frac{A+B}{2} \right).$$

$$(20) \quad A + B + C = 180^\circ \text{ ナルトキハ} \\ \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$(21) \quad A + B + C = 180^\circ \text{ ナルトキハ} \\ \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A-B}{2}. \quad [\text{東京高商}]$$

$$(22) \quad \text{次ノ式ヲ積ノ形ニ變ゼヨ。} \\ \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x. \quad [\text{大豫}]$$

$$(23) \quad \text{次ノ式ノ値ヲ求メヨ。} \\ \sin 100^\circ \sin (-160^\circ) + \cos 200^\circ \cos (-280^\circ). \quad [\text{大豫}]$$

$$(24) \quad 17A = 180^\circ \text{ ナラバ} \\ \frac{\cos A \cos 13A}{\cos 3A + \cos 5A} = -\frac{1}{2}$$

ナリ。

〔仙臺醫專、大阪醫專〕

第四編

對數

第一章

對數ノ定理

55. 定義. 等式 $2^5 = 32$ ニ於テ指數 5 ヲ 2
ニ關スル 32 ノ對數ト云フ。又等式 $10^{-1} = 0.1$ ニ於
テ 10 ニ關スル 0.1 ノ對數ハ -1 ナリ。

或數 M ノ他ノ數 a ニ關スル對數ト
ハ M ヲ得ル爲ニ要スル a ノ冪指數ナ
リ。 a ヲ對數ノ底ト云フ。

即 $a^x = M$ ナルトキ底 a ニ關スル M ノ對數ハ
 x ナリ、之ヲ $x = \log_a M$ ト記ス。

注意. 常ニ同一ノ底 a ニ關スル對數ノミヲ
說クトキハ底 a ニ關スルト云フ詞ヲ略ス。

底 a ハ正ニシテ M モ亦正ナリ然レドモ x ハ正或ハ負ナリ。 M ヲ對數ノ眞數ト云フ。

相等シキ二數ノ對數ハ相等シク、大數ノ對數ハ小ナル數ノ對數ヨリ大ナリ、逆モ亦眞ナリ。

56. 對數ノ定理.

I. 底ノ對數ハ 1 ナリ。

證明. $a^1 = a$ ナル故 $\log_a a = 1$.

II. 1 ノ對數ハ零ナリ。

證明. $a^0 = 1$ ナル故 $\log_a 1 = 0$.

III. 積ノ對數ハ其因數ノ對數ノ和ニ等シ。

證明. $x = \log_a M, y = \log_a N$ トスレバ

$$M = a^x, N = a^y.$$

$$\therefore M \cdot N = a^{x+y}.$$

故ニ $\log_a(M \cdot N) = x + y = \log_a M + \log_a N$.

同様ニ $\log_a(M \cdot N \cdot P) = \log_a M + \log_a N + \log_a P$.

IV. 商ノ對數ハ實ノ對數ヨリ法ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ。

證明. $x = \log_a M, y = \log_a N$ トスレバ

$$M = a^x, N = a^y.$$

$$\therefore \frac{M}{N} = a^{x-y}.$$

故ニ $\log_a \frac{M}{N} = x - y = \log_a M - \log_a N$.

V. 或數ノ乘冪ノ對數ハ其數ノ對數ニ冪指數ヲ乘ジタル積ニ等シ。

證明. $x = \log_a M$ トスレバ $M = a^x$.

$$\therefore M^n = a^{nx}.$$

故ニ $\log_a M^n = nx = n \log_a M$.

VI. 或數ノ乘根ノ對數ハ其數ノ對數ヲ根指數ニテ除シタル商ニ等シ。

證明. $x = \log_a M$ トスレバ $M = a^x$.

$$\therefore \sqrt[n]{M} = a^{\frac{x}{n}}$$

故ニ $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \log_a M$.

問 題 十 一

次ノ式ノ値ヲ求メヨ (1)–(3).

(1) $\log_{16} 8$. (2) $\log_3 243$. (3) $\log_8 128$.

(4) $\log_m a$, $\log_m b$, $\log_m c$ ヲ以テ次ノ式ヲ表セ.

$$\log_m \left(\frac{a^2 b^3}{c^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

第 二 章

常 用 對 數

57. 定義. 常用對數トハ10ヲ底トスル對數ナリ。

應用數學ニ於テハ專之ヲ用フ。通例 $\log_{10} M$ ヲ單ニ $\log M$ ト記ス。本章以後ハ常用對數ヲ單ニ對數ト云フ。

58. 定理. 或數ノ對數ト唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數トノ差ハ整數ナリ。

證明. $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ 等ナル故

$$\log 10 = 1,$$

$$\log 100 = 2,$$

$$\log 1000 = 3$$

等ナリ。

一般ニ $\log 10^n = n$,

但 n ハ任意ノ正ノ整數ナリ

$$\begin{aligned} \therefore \log (M \times 10^n) &= \log M + \log 10^n \\ &= \log M + n. \end{aligned}$$

又 $\log (M \div 10^n) = \log M - n$.

注意. 此定理ニヨリ或數ノ對數ヲ知ラバ、唯小數點ノ位置ノミヲ異ニスル他ノ數ノ對數ヲ知ルヲ得。

例ヘバ $\log 1.2$ ヲ知ラバ

$$\log 12 = \log 1.2 + 1,$$

$$\log 0.12 = \log 1.2 - 1,$$

$$\log 120 = \log 1.2 + 2.$$

59. 定義. 對數ニ於テ10ノ冪ニ相當セザル數ノ對數ハ一般ニ不盡數ナレドモ、小數若干位ヲ算出シテ實用ニ供ス。

對數ノ目的ハ計算ヲ簡便ナラシムルニ在リ。
即對數表ヲ用フルトキハ加法、減法ヲ以テ乘法、除法ニ代ヘ、乘法、除法ヲ以テ冪法、開法ニ代フルヲ得ルナリ(第 56 節參照)。

整數ノ對數ヲ竝列セル表ヲ**對數表**ト云フ。

對數表ニヨリ $\log 2 = 0.30103$,
從テ $\log 20 = 1.30103$,
 $\log 200 = 2.30103$,
 $\log 2000 = 3.30103$.

故ニ對數ハ整數部及小數部ヨリ成ル。

對數ノ整數部ヲ**指標**ト云ヒ、小數部ヲ**假數**ト云フ。

60. 指標法則.

例ヘバ $\log 356.72$ ノ指標ヲ求メンニ

$$1000 > 356.72 > 100.$$

$$\therefore 3 > \log 356.72 > 2.$$

故ニ $\log 356.72$ ハ 2 ト小數トノ和ニ等シ、即其指標ハ 2 ナリ。故ニ次ノ法則ヲ立ツ。

法則[1] 1ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ其整數部ノ桁數ヨリ1ダケ小ナリ。

小數ハ 1ヨリ小ナル故其對數ハ 0ヨリ小ニシテ負數ナリ、然レドモ不便ヲ避ケンガ爲メ、指標ノミヲ負トシ假數ハ常ニ正トス。

例ヘバ $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$,

$$0.01 = \frac{1}{100} = 10^{-2},$$

$$0.001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

等ナル故 $\log 0.1 = -1$,

$$\log 0.01 = -2,$$

$$\log 0.001 = -3$$

等ナリ。故ニ $\log 0.2 = \log (0.1 \times 2)$

$$= \log 0.1 + \log 2$$

$$= -1 + 0.30103$$

之ヲ $\log 0.2 = \bar{1}.30103$

ト記ス。

$$\text{同様ニ } \log 0.02 = \bar{2}.30103, \log 0.002 = \bar{3}.30103$$

等ナリ。故ニ次ノ法則ヲ立ツ。

法則[2] 小數ノ對數ノ指標ハ負數ニシテ其絶對値ハ小數點ノ右ニアル零ノ數ヨリ1ダケ大ナリ。

上ノ二法則ニ由テ容易ニ指標ヲ補充シ得ル故、對數表ニハ假數ノミヲ記入シ、指標ヲ省略ス。

指標ハ正又ハ負ナリト雖、假數ハ常ニ正ナリ。

61. 三角函數ノ對數.

三角函數ハ1ヨリ小ナルモノ多キガ故ニ其對數ハ負ノ指標ヲ有スルモノ多シ。

$$\text{例ハバ} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \sin 30^\circ &= \log \frac{1}{2} \\ &= \log 1 - \log 2 \\ &= 0 - 0.30103 \\ &= -1 + 1 - 0.30103 \\ &= \bar{1}.69897. \end{aligned}$$

負ノ指標ハ印刷ニ不便ナルヲ以テ、故ラニ之

ニ10ヲ加フルコトアリ、之ヲ表對數ト云フ。之ヲ示スニLヲ以テス。

$$\text{例ハバ} \quad L \sin 30^\circ = 10 + \log \sin 30^\circ = 9.69897.$$

62. 對數計算ノ例.

茲ニ既知ノ對數ヨリ他ノ對數ヲ算出スル方法ヲ説カントス。

[例一] $\log 7 = 0.84510$, $\log 11 = 1.04139$ ヲ知リテ $\log \frac{1331}{49}$ ヲ求メヨ。

$$\begin{aligned} \text{解.} \quad \log \frac{1331}{49} &= \log 11^3 - \log 7^2 \\ &= 3 \log 11 - 2 \log 7 \\ &= 3 \times 1.04139 - 2 \times 0.84510 \\ &= 3.12417 - 1.69020 \\ &= 1.43397. \end{aligned}$$

[例二] $\log 5 = 0.69897$ ヲ知リテ $\log 25$, $\log \sqrt{5}$, $\log \sqrt[3]{0.05}$ ヲ求メヨ

$$\text{解.} \quad \log 25 = 2 \log 5 = 1.39794,$$

$$\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = 0.34949,$$

又 $\log 0.05 = \log 5 - 2$
 $= \bar{2}.69897.$

$\therefore \log \sqrt[3]{0.05} = \frac{1}{3} \log 0.05$

$= \frac{1}{3} \times \bar{2}.69897$

$= \frac{1}{3} \times (-2 + 69897)$

$= \frac{1}{3} (\bar{3} + 1.69897)$

$= \bar{1}.56632.$

63. 對數表ノ用法.

[例一] $\log 175.4$ ヲ求メヨ。

解. 指標ハ 3-1 即 2ニシテ假數ハ對數表ニヨリ 24403ナルヲ知ル。故ニ

$\log 175.4 = 2.24403,$ 答。

[例二] $\log x = \bar{3}.15351$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解. 指標ガ $\bar{3}$ ナル故, x ハ小數點ノ右ニニツノ零ヲ有スル數ナルベシ。對數表ヲ搜索シテ 15351ニ對スル真數 1424ヲ得。故ニ

$x = 0.001424,$ 答。

64. 比例部分ノ法則.

五數字以上ノ數ノ對數ハ卷末對數表中ニ載セズ。之ヲ求ムルニハ次ノ法則ニヨル。

二數ノ微差ト之ニ對應スル對數ノ差トハ正比例ヲ爲ス。モト見倣ヒテ誤看ナシ。

三角函數ノ真數(第 20 節例三參照)及三角函數ノ對數ニ於テモ同様ノ法則アリ。

[例一] $\log 1912.6$ ヲ求メヨ。

解. 對數表ニヨリテ

$\log 1912 = 3.28149,$

$\log 1913 = 3.28171.$

故ニ $\log 1913 - \log 1912 = 0.00022$ (之ヲ表差ト云フ)。

依テ比例*

$1 : 0.6 = 0.00022 : x$

ヨリ $x = 0.00013$

ヲ得、之ヲ $\log 1912$ ニ加フレバ

$\log 1912.6 = 3.28162,$ 答。

* 通常ハ比例ヲ用ヒズシテ表中ノ比例部分ト記セル所ヲ用フ。

[例二] $\log x = 1.23108$ ヨリ x を求む。

解. 指標が1ナル故 x の整数部ハ二桁ナリ。
今假數 23108 を挾メル所ヲ表中ニ求ムレバ

$$\log 17.02 = 1.23096,$$

$$\log 17.03 = 1.23121.$$

故ニ此所ニ於ケル表差ハ 0.00025 ナリ、而シテ

$$\log x - \log 17.02 = 0.00012.$$

故ニ比例

$$0.00025 : 0.00012 = 0.01 : d$$

$$\text{ヨリ} \quad d = 0.0048$$

ヲ得、之ヲ 17.02 ニ加フレバ

$$x = 17.0248, \text{ 答.}$$

[例三] $L \cos 17^\circ 31' 40''$ を求む。

解. 三角函數ノ對數表ニヨリテ

$$L \cos 17^\circ 30' = 9.97942,$$

$$L \cos 17^\circ 40' = 9.97902,$$

故ニ $L \cos$ ハ此所ニ於テ 10' ニ付キ 0.00040 だけ減少スルヲ見ル。ニ 1' 40'' 即 1.67 ニ對スル差ハ

比例

$$10 : 1.67 = 0.00040 : x$$

$$\text{ヨリ} \quad x = 0.00007$$

ナルヲ知ル。之ヲ $L \cos 17^\circ 30'$ ヨリ引ケバ

$$L \cos 17^\circ 31' 40'' = 9.97935, \text{ 答.}$$

注意. 餘弦, 餘切, 餘割ハ差ヲ引キ, 正弦, 正切, 正割ハ之ヲ加フルヲ要ス(第5節参照).

[例四] $\log \sin \theta = \bar{1}.44881$ ヨリ θ を求む。

解. 對數表中 $L \sin$ ノ行ニ於テ 9.44881 を挾メル所ヲ求ムレバ

$$\log \sin 16^\circ 10' = \bar{1}.44472,$$

$$\log \sin 16^\circ 20' = \bar{1}.44905.$$

故ニ此所ニ於ケル表差ハ 0.00433 ナリ、而シテ

$$\log \sin \theta - \log \sin 16^\circ 10' = 0.00409,$$

故ニ比例

$$433 : 409 = 10 : x$$

$$\text{ヨリ} \quad x = 9.44$$

$$\text{故ニ} \quad \theta = 16^\circ 19' 44''$$

$$\text{即} \quad \theta = 16^\circ 19' 26''.$$

問 題 十 二

(1) 次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ

$$\log(x^2 - 6x + 8) - \log(x - 4) = 1.$$

(2) $\log 2, \log 3$ ヲ知レリトシテ $(1.08)^x = 72$ ヨリ x ヲ求ムル方法如何。

次ノ數ノ對數ヲ求メヨ(3)-(10), 但 $\log 2 = 0.30103, \log 3 = 0.47712$ ヲ知レリトス。

(3) 1800. (4) $\sqrt{0.000032}$. (5) $\frac{4}{9}$.

(6) 0.0375. (7) $(5\frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}}$ (8) $\tan 30^\circ$.

(9) $\sin 60^\circ, 5 \sec 45^\circ$. [東京高商]

(10) $\operatorname{cosec} 45^\circ, \cos 30^\circ, 5 \tan 60^\circ$. [大豫]

(11) $54^\circ =$ 於ケル數字ノ數如何。

(12) $\log \cot 18^\circ 35' 13''$ ヲ求メヨ。

(13) $\log x = 2.14028$ ヨリ x ヲ求メヨ。

(14) 次式ヲ證明セヨ

$$a^{\log b} = b^{\log a}.$$

第 五 編

斜 角 三 角 形

第 一 章

斜 角 三 角 形 ノ 性 質

65. 角ノ關係.

任意ノ三角形ヲ ABC トスレバ

$$A + B + C = 180^\circ.$$

從テ $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^\circ.$

$\therefore \sin A = \sin(B + C),$

$\cos A = -\cos(B + C),$

$\sin \frac{1}{2}A = \cos \frac{1}{2}(B + C),$

$\cos \frac{1}{2}A = \sin \frac{1}{2}(B + C),$

$\tan \frac{1}{2}A = \cot \frac{1}{2}(B + C)$

等ナリ。

$N \sin B = N \sin(C+A)$
 $N \sin C = N \sin(A+B)$
 $\cos B = -\cos(C+A)$
 $\cos C = -\cos(A+B)$

.....(22)

$N \sin \frac{1}{2}B = N \cos \frac{1}{2}(C+A)$
 $N \sin \frac{1}{2}C = N \cos \frac{1}{2}(A+B)$

$\cos \frac{1}{2}B = N \sin \frac{1}{2}(C+A)$
 $\cos \frac{1}{2}C = N \sin \frac{1}{2}(A+B)$

$\tan \frac{1}{2}B = \cot \frac{1}{2}(C+A)$
 $\tan \frac{1}{2}C = \cot \frac{1}{2}(A+B)$

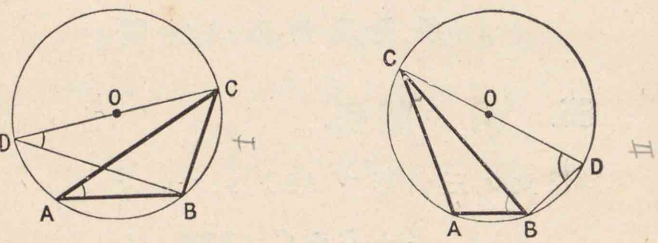
補角有リ

66. 定理 (正弦法則).

三角形ノ三邊ハ其對角ノ正弦ニ比例ス。

即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots(23)$

Handwritten notes: $\angle CDB = \angle CAB$, $\angle CDB = \frac{a}{2R}$, $\angle CDB + \angle DAC = 2R \therefore CD = \frac{a}{\sin A}$



證明. Cヨリ外接圓ノ直徑CDヲ引ケバ

A < 90° ナルトキ角 D = A,
A > 90° ナルトキ角 D = 180° - A.

故ニ孰レノ場合ニ於テモ

$\sin D = \sin A.$

然ルニ BC = CD sin D.

故ニ外接圓ノ半径ヲ R ニテ表ストキハ

$2R = \frac{a}{\sin A}.$

Handwritten note: $\angle CDB = \angle DAC$, $2R$ ヲ以テ外接圓ノ半径ヲ表セルハ $2R = \frac{a}{\sin A}$

同様ニ $2R = \frac{b}{\sin B}, 2R = \frac{c}{\sin C}.$

又 A = 90° ナルトキニハ

$2R = \frac{a}{1} = \frac{a}{\sin A}.$

故ニ總テノ場合ニ於テ

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$

系. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一邊ヲ其對角ノ正弦ニテ除シタル商ニ等シ.

又 $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C.$

67. 定理 (第一餘弦法則).

三角形ノ各邊ハ他ノ二邊ノ各ト之ニ接スル角ノ餘弦トノ乘積ノ和ニ等シ。

$$\left. \begin{aligned} a &= c \cos B + b \cos C \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= b \cos A + a \cos B \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

證明. 第一式ヲ證センニ

$$\begin{aligned}
 a &= 2R \sin A = 2R \sin (B + C) \\
 &= 2R (\sin B \cos C + \cos B \sin C) \\
 &= 2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B \\
 &= b \cos C + c \cos B.
 \end{aligned}$$

第二第三式ヲ得ルニハ文字ヲ輪換スベシ。

又此三式ハ直接ニ圖ニ由テ證明スルヲ得。

68. 定理 (第二餘弦法則).

三角形ノ各邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ヨリ此二邊ト其夾角ノ餘弦トノ乘積ノ二倍ヲ減ジタル差ニ等シ。

$$\left. \begin{aligned}
 a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\
 b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

證明. 公式(24)ノ第二式ニbヲ乘ジ第三式ニcヲ乘ジテ其積ヲ加ヘ、之ヨリ第一式ニaヲ乘ジタル積ヲ引ケバ

$$\begin{aligned}
 b^2 + c^2 - a^2 &= 2bc \cos A, \\
 \therefore a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A.
 \end{aligned}$$

文字ヲ輪換スレバ他ノ二式ヲ得

又此三式ハ直接ニ圖ニ由テ證明スルヲ得。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{系. } \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\
 \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\
 \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

三辺ノ長ノ知レバ、
cosヲ求メル。

69. 二邊ノ和ト第三邊トノ比.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots(27)$$

$$\begin{aligned}
 \text{證明. } \frac{a+b}{c} &= \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R \sin C} \\
 &= \frac{\sin A + \sin B}{\sin C}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C}$$

$$\text{然ルニ } \sin \frac{1}{2}(A+B) = \cos \frac{1}{2}C,$$

$$\text{故ニ(27)ヲ得. } \left\{ \begin{aligned}
 A+B+C &= 2R \\
 \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}C &= R \\
 \therefore \sin \frac{1}{2}(A+B) &= \cos \frac{1}{2}C
 \end{aligned} \right.$$

70. 二邊ノ差ト第三邊トノ比.

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C} \dots \dots (28)$$

前節ト同様ニ證明スルヲ得.

71. 二邊ノ差ト和トノ比(正切法則).

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} \dots \dots (29)$$

公式(27), (28) = 由テ容易ニ證明スルヲ得.

系. $\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C \dots \dots (30)$

72. 半角ノ正弦.

公式(17)及(26) = 由テ

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \frac{A}{2} &= 1 - \cos A \\ &= 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \end{aligned}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}.$$

三角形ノ周圍ノ半ヲ s トセバ

$$a+b+c=2s,$$

$$a+b-c=2(s-c),$$

$$a-b+c=2(s-b).$$

之ヲ上ノ式ニ代入セバ

$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{4(s-c)(s-b)}{2bc}.$$

$$\therefore \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\text{同様} = \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}, \dots \dots (31)$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

73. 半角ノ餘弦.

前節ト同様ニ

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

$$= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

76. 三邊ヲ以テ面積ヲ表ス公式.

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$$

ナル故、公式(31)及(32)ニ由テ

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots (35)$$

ヲ得。故ニ(34)ニ由テ

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots (36)$$

之ヲ Hero ノ公式ト云フ。

問題 十三

三角形 ABC = 於テ次ノ關係アリ。之ヲ證セヨ。

$$(1) \quad \sin A + \sin B > \sin C. \quad \text{〔陸士〕}$$

$$(2) \quad \frac{3a + 5b - 7c}{a - b + 2c} = \frac{3 \sin A + 5 \sin B - 7 \sin C}{\sin A - \sin B + 2 \sin C}.$$

$$(3) \quad (3 \sin A + 2 \sin B) : \sin C = (3a + 2b) : c.$$

$$(4) \quad a + b + c = (b + c) \cos A \\ + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C.$$

$$(5) \quad b \cos A - a \cos B = \frac{b^2 - a^2}{c}. \quad \text{〔商船〕}$$

$$(6) \quad \frac{a - b}{c} = \frac{\cos B - \cos A}{1 + \cos C}.$$

$$(7) \quad \frac{a \sin C}{b - a \cos C} = \tan A.$$

$$(8) \quad b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = s.$$

$$(9) \quad a(\cos B \cos C + \cos A) = b(\cos C \cos A + \cos B) \\ = c(\cos A \cos B + \cos C).$$

$$(10) \quad \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \quad \text{ナルトキハ } C = 90^\circ.$$

$$(11) \quad a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3} - 1 \quad \text{ナルトキハ} \\ A = 135^\circ, B = 30^\circ, C = 15^\circ.$$

$$(12) \quad a \cos A = b \cos B \quad \text{ナレバ } \triangle ABC \text{ ハ直角三角} \\ \text{形ナルカ又ハ等脚三角形ナリ。}$$

$$(13) \quad b \cos A = a \cos B \quad \text{ナルトキハ } a = b.$$

$$(14) \quad a^2 = b^2 + bc + c^2 \quad \text{ナルトキハ } A \text{ 角ノ大サ如} \\ \text{何。} \quad \text{〔商船〕}$$

$$(15) \quad \cos B = \frac{\sin A}{2 \sin C} \quad \text{ナルトキハ } B = C. \quad \text{〔陸士〕}$$

(16) 水平面ニ四十五度傾斜セル長サ百尺ノ坂路アリ。傾斜ヲ減ジテ三十度トナサバ坂路ノ長サ幾尺トナルカ。〔東京高工〕

第二章

斜角三角形ノ解法

77. 斜角三角形ニ於テ其六原素ノ中、三原素ヲ知ラバ他ノ三原素ヲ算出スルヲ得。但三角ノ大サヲ知リテ三邊ノ長サヲ算出スルヲ得ズ。此法ヲ四ツノ場合ニ分ツ。

78. 第一ノ場合. 二角及其頂點ノ間ノ邊ヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知 a, B, C .

未知 A, b, c .

公式 $A = 180^\circ - (B + C)$,

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

解法. $A + B + C = 180^\circ$ ナル故

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

又正弦法則ニ由テ b 及 c ノ式ヲ得。

注意1. 計算ニハ對數表ヲ用フル故次ノ如クス。

$$\log b = \log a + \log \sin B - \log \sin A,$$

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A.$$

[例] $a = 142.46,$
 $B = 47^\circ 35',$
 $C = 61^\circ 43'$

ナルトキ三角形ヲ解ケ。

解. Aノ計算

$$180^\circ = 179^\circ 60'$$

$$B = 47^\circ 35'$$

$$C = 61^\circ 43'$$

$$\therefore A = 70^\circ 42'.$$

bノ計算

$$\log a = 2.15369$$

$$\log \sin B = \bar{1}.86821$$

$$\log \sin A = \bar{1}.97488$$

$$\log b = 2.04702$$

$$\therefore b = 111.43.$$

cノ計算

$$\log a = 2.15369$$

$$\log \sin C = \bar{1}.94479$$

$$\log \sin A = \bar{1}.97488$$

$$\log c = 2.12360$$

$$\therefore c = 132.92.$$

注意2. 二角及其一ニ對スル邊ヲ知レル場合ハ此第一ノ場合ニ歸ス。

79. 第二ノ場合. 二邊及夾角ヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知 $a, b, C.$

未知 $A, B, c.$

$$\text{公式 } \frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C,$$

$$\tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C,$$

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)}.$$

解法. $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$ ナル故 $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ求メ得バ A, B ヲ知り得ベシ。然ルニ公式(30)

ヨリ $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ求ムルヲ得。次ニ c ヲ求ムル式ハ公式(27)ヨリ得ラル。

$$\text{注意1. } c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

ヨリ c ヲ求メ得レドモ上ノ公式ヲ用フルヲ良トス。又(28)ヨリ得ラル、式

$$c = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}$$

ヲ用フルモ可ナリ。

注意2. 上ノ解法ニ於テハ $a > b$ ナリトセルモ $a < b$ ナルトキハ全ク之ト同様ナリ。
(A-B)ニ+レドモ (B-A)トスル

80. 第三ノ場合. 二邊及其一對角ヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知 a, b, A

未知 $B, C, c.$

$$\text{公式 } \sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

$$C = 180^\circ - (A+B),$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

解法. 正弦法則ヨリ直ニ $\sin B$ ノ式ヲ得從テ他ノ公式ヲ得.

吟味. 本題ハ數多ノ場合ヲ吟味スルヲ要ス. 是レ正弦ニ依リテ角ノ値ヲ決定スルニ當リ銳角ト其補角ナル鈍角トヲ得レバナリ.

I. $A > 90^\circ$.

(1) $a < b$ 或ハ $a = b$ ナルトキハ $A < B$ 或ハ $A = B$ ニシテ二角 A, B ガ共ニ鈍角ナル故本題ハ不能ナリ.

(2) $a > b$ ナルトキハ $A > B$ ナル故 B ノ値トシテ $\frac{b \sin A}{a}$ ヲ正弦トスル銳角ノミヲ取ルベシ故ニ解答ハ唯一アリ.

II. $A = 90^\circ$.

(1) $a < b$ 或ハ $a = b$ ナルトキハ $A < B$ 或ハ $A = B$ ニシテ二角 A, B ノ中一ツガ直角ニシテ他ガ鈍角ナルカ或ハ二角共ニ直角ナリ. 故ニ本題ハ不能ナリ.

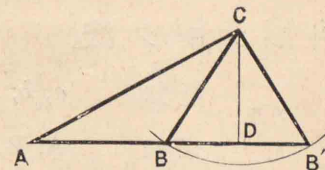
(2) $a > b$ ナルトキハ $A > B$ ナル故 B ノ値トシテ $\frac{b \sin A}{a}$ ヲ正弦トスル銳角ノミヲ取ルベシ,

故ニ解答ハ唯一ツアリ.

III. $A < 90^\circ$.

(1) $a > b$ 或ハ $a = b$ ナルトキハ $A > B$ 或ハ $A = B$ ナル故 B ノ値トシテ $\frac{b \sin A}{a}$ ヲ正弦トスル銳角ノミヲ取ルベシ, 故ニ解答ハ唯一ツアリ.

(2) $a < b$ ナルトキハ $A < B$ ナル故 B ハ銳角トモ又鈍角トモナルヲ得. 今又三ツノ場合ヲ分チテ詳論セン.



角 CAB ヲ既知角 A

トシ AC ヲ b ニ等シクセバ垂線 CD ハ BC 即 a ヲ小ナルコトアリ, 或ハ之ニ等シキコトアリ. 然レドモ之ヨリ大ナルコト能ハズ. 然ルニ

$$CD = b \sin A.$$

(i) $b \sin A < a$ ノ場合.

此時ニハ B ノ値トシテ銳角及其補角ナル鈍角ヲ採ルヲ得. 故ニ解答ハ二ツアリ. 從テ C 及 c ノ値モ亦夫々二ツアリ.

此場合ヲ兩意ノ場合ト云フ.

(ii) $b \sin A = a$ ノ場合.

解法 $\log \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \}$
 $\therefore \log \frac{A}{2} = 10 + \frac{1}{2} \{ \log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a) \}$
 $\text{I. } \log \frac{B}{2} = 10 + \frac{1}{2} \{ \log(s-c) + \log(s-a) - \log s - \log(s-b) \}$
 $\text{II. } \log \frac{C}{2} = 10 + \frac{1}{2} \{ \log(s-a) + \log(s-b) - \log s - \log(s-c) \}$

96

第五編

此時ニハ B ノ 値ハ 直角ナリ、故ニ 解答ハ 唯一ツアリ。

(iii) $b \sin A > a$ ノ 場合。

此時ニハ $\frac{b \sin A}{a} > 1$ ナル故 B ノ 値ナシ、故ニ 問題ハ 不能ナリ。

81. 第四ノ場合. 三邊ヲ知リテ三角形ヲ解ク法。

既知 a, b, c .

未知 A, B, C .

公式 $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$,

$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$,

$\tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$.

解法. 公式 (33) ヲ其儘用フルモノトス。

注意1. 公式 (26) 卽

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

ヨリ A ヲ求メ得レドモ此式ハ對數計算ニ適セズ。

又公式 (31) 或ハ (32) ヲ用ヒ得ルモ公式 (33) ヲ用

フルヲ最良トス。其故ハ唯四數 $s, s-a, s-b, s-c$ ノ對數ノミヲ表中ヨリ求ムレバ可ナルヲ以テナリ。

注意2. 上ノ公式ニ由テ求メ得タル三ツノ角ノ和ハ 180° ナルベキモノナレドモ實際ニ於テハ斯ノ如キコト稀ナリ、是レ五桁ノ對數表ヲ用フルヨリ起ル誤差ナリ。

問題十四

次ノ三原素ヲ知リテ三角形ヲ解ケ (1) — (5).

(1) $B = 60^\circ 40', C = 59^\circ 10', a = 10.62$. [東京高商]

(2) $A = 82^\circ 20', B = 43^\circ 20', a = 479$.

(3) $a = 20.71, b = 18.87, C = 55^\circ 12'$.

(4) $a = 77.04, b = 91.06, A = 40^\circ 13'$.

(5) $a = 317, b = 533, c = 510$.

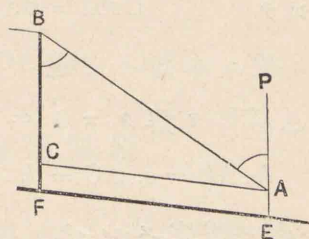
(6) 四邊形 ABCD ノ三邊 $AB = a, BC = b,$

$CD = c$ ト兩對角線 $AC = p, BD = q$ トヲ知リテ

$AD = x$ ヲ計算セヨ。

[大塚]

直線 AD ト AB トノ爲
ス角 BAD ヲ測リ, 又 EF
ヲ測ルベシ, 然ルトキハ
ABC = BAD, EF = AC ナ
ル故正弦法則ニ由テ

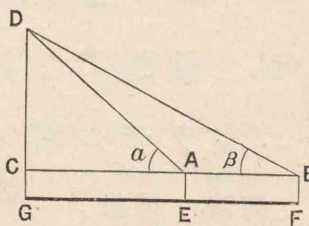


$$BC = \frac{AC \sin BAC}{\sin BAC \cdot \frac{1}{AB \sin C}}$$

之ニ CF 即 AE ヲ加フレバ塔ノ高ヲ得。

84. 設問 III. 水平面上ニ在リテ,
近ヅキ得ザル塔ノ高ヲ求ムル法。

解法. DG ヲ所要ノ高サトセヨ。一點 E ニ
於テ塔頂ノ仰角 DAC (α) ヲ測リ, 次ニ塔基 G ト E
點ト一直線上ニアルベキ點 F ニ於テ仰角 DBC (β)
ヲ測リ, 又基線 EF (AB)
ヲ測ルベシ。然ルト
キハ



$$DC = DB \sin \beta,$$

又 $\triangle DAB$ ヨリ

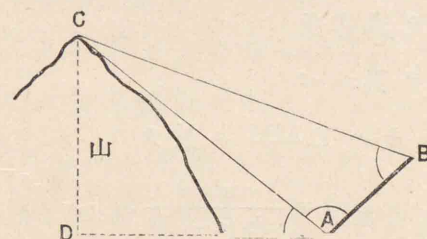
$$BD = \frac{AB \sin \alpha}{\sin (\alpha - \beta)},$$

$$\therefore DC = \frac{AB \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

之ニ眼高 AE ヲ加フレバ DG ヲ得。

注意. 此方法ニヨリテ山ノ高ヲ知ルヲ得。

85. 設問 IV. 山ノ高ヲ求ムル
法。



解法. 先適宜ノ處ニ於テ基線 AB ヲ測リ A
ニ於テ山頂ノ仰角 CAD 及 CAB ヲ測リ, 次ニ B
ニ於テ ABC ヲ測ルベシ。然ルトキハ $\triangle ABC$ ヨリ

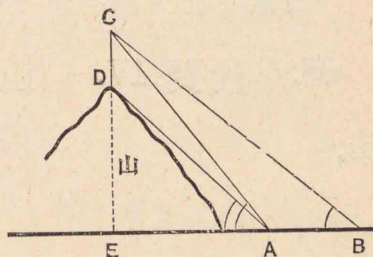
$$AC = \frac{AB \sin ABC}{\sin (BAC + ABC)},$$

然ルニ $CD = AC \sin CAD,$

$$\text{故ニ } CD = \frac{AB \sin ABC \sin CAD}{\sin (BAC + ABC)}.$$

86. 設問 V. 丘上ニ立テル旗竿ノ長サヲ求ムル法。

解法. CDヲ旗竿トス. 地面上ノ一點 Aニ於テ仰角 CAE (a) 及 DAE (a')ヲ測リ, 更ニ基線 AB (a)ヲ退キテ再仰角 CBE (β)ヲ測ルベシ.



然ルトキハ $\triangle ABC$ ニ於テ

$$AC = \frac{a \sin \beta}{\sin (a - \beta)}$$

又 $\sin ADC = \sin ADE = \cos a'$,

然ルニ $\frac{CD}{AC} = \frac{\sin (a - a')}{\sin ADC}$,

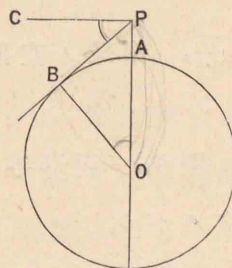
$$\therefore CD = \frac{a \sin \beta \sin (a - a')}{\sin (a - \beta) \cos a'}$$

又丘ノ高サヲモ求ムルヲ得.

87. 設問 VI. 視界半徑ヲ求ムル法.

解法. 地球ハ殆球狀ヲ爲ス. 今高處 Pヨリ

地球ノ表面ヘ切線ヲ引ケバ, 切點 Bノ軌跡ハ圓ニシテ此圓内ナル地面ノ部分ハ Pニ於ケル觀測者ノ望見シ得ル範圍ナリ, 之ヲ Pニ於ケル視界ト云ヒ, 切線 PBノ長サヲ Pニ於ケル視界半徑又ハ天涯距離ト云フ.



又 Oヲ地球ノ中心トシ, 平面 OBPニ於テ OPト直角ニ PCヲ引クトキハ角 CPBヲ Pニ於ケル視水平俯角又ハ天涯俯角ト云フ.

OPト地面トノ交點ヲ Aトシ, CPBヲ α トセバ中心角 BOPモ亦 α ニ等シ, 故ニ地球ノ半徑ヲ r トセバ

然ルニ $AP = OP - r,$
 $OP = r \sec \alpha,$
 故ニ $AP = r(\sec \alpha - 1)$
 $= \frac{r(1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} \therefore \gamma = \frac{AP \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \dots (B)$

$\therefore PB = r \tan \alpha$
 $= \frac{AP \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \tan \alpha$

$= \frac{AP \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{AP \times 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{AP \cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

$$= AP \cot \frac{a}{2}$$

系. 地球ノ直径ハ $\frac{AP \cos a}{\sin^2 \frac{a}{2}}$ = 等シ.

別法. 視界半径ノ略近値ヲ求ムルニハ次ノ如クスベシ.

幾何學ニ由テ

$$PB^2 = PA(PA + 2r) = PA^2 + 2r.PA.$$

然ルニ PA ハ直径 2r ニ比較シテ甚小ナル故猶更ニ小ナル PA²ヲ捨ツレバ

$$PB^2 = 2r.PA.$$

而シテ地球ノ半径ハ約 3963 哩ナル故, n ヲ PB ノ

哩數トシ, h ヲ PA ノ呎數トセバ

$$(n \times 5280)^2 = 2 \times 3963 \times 5280 \times h,$$

$$n^2 = \frac{2 \times 396}{528} h,$$

$$n^2 = \frac{3}{2} h. \quad \therefore n = \sqrt{\frac{3}{2} h}$$

是レ甚簡單ナル n ト h トノ關係ナリ.

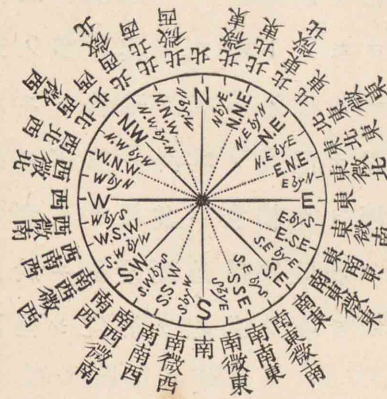
試ニ n = 1 トスレバ h = $\frac{2}{3}$. 故ニ海面上高

サ八吋ノ物體ハ一哩ヲ距ツルトキ望見スルコトヲ得ズ.

88. 航海羅針盤.

航海用羅針盤

ニ於テハ東西南北ノ間ノ角ヲ八等分シテ總テノ方向ヲ三十二方位トス, 其名稱ハ圖ノ如シ.



例ヘバ東(E)ヨリ北(N)ヘノ名稱ハ

東微北 (E by N), 東北東 (E. N. E), 北東微東 (N. E by E), 北東 (N. E) 等ナリ. 其他類推スベシ.

相隣接セル二方位ノ間ノ角ハ

$$360^\circ \div 32 = 11^\circ 15'.$$

又物體ノ方位ヲ示スニ, 上ノ方法ニ由ラズシテ北(或ハ南)ヨリ東(或ハ西)ヘ何度何分ト云ヒ, 北何度何分東ト記スコトアリ. 又陸地測量ニ於テハ北ヲ 0°ノ方位ト定メ之ヨリ東, 南, 西ヲ經テ北ニ復ル度數ヲ以テスル方法アリ. 例ヘバ 90°ハ東, 180°

ハ南, 270° ハ西, 315° ハ北西ヲ示スガ如シ。

89. 地圖ノ製作.

地形ヲ測定スルニハ其地面上ニアル數多ノ重要ナル地點ヲ選ビ、之ヲ頂點トスル數多ノ三角形ヲ以テ其地面ヲ被フモノト考フ。其數多ノ三角形ノ諸邊中最便宜ナル數邊ハ之ヲ基線トスルガ爲ニ銅製ノ直鋸ヲ以テ溫度ノ其鋸ニ及ボス影響ヲモ精査シナガラ極メテ精密ニ其長サヲ測定スルモノトス。例ヘバ我陸軍陸地測量部ニ於テハ「メートル」ヲ單位トシテ次ノ基線ヲ測定シ全國ノ地圖ヲ作ル。

羽前國最上郡	鹽野原基線	5129.587
相模國高座郡	相模野基線	5209.970
遠江國濱名郡	三方原基線	10839.770
近江國高島郡	饗庭野基線	3065.724
阿波國阿波郡	西林村基線	2832.212
伯耆國久米郡	天神野基線	3301.805
筑後國久留米市	久留米基線	3161.007
大隅國肝屬郡	笠野原基線	5875.509

此等ノ基線ト各地點ニ於テ測定セル他ノ兩

地點ノ距角トヲ以テ順次間接ニ三角形ノ解法ヲ用ヒテニツノ地點間ノ距離ヲ測定スルモノトス。

上ノ如キ測量ヲ三角測量ト云ヒ、一等、二等、三等ノ別アリ。又地面ヲ被ヘル三角形ノ群ヲ三角網ト云フ。

重要ナル地點ニハ皆其何等測點タルコトヲ刻シタル花崗石ヲ埋メアリ。

問題十五

(1) 川岸ノ一點ヨリ對岸ニアル高サ 145 尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ $34^\circ 50'$ ヲ得タリ。川ノ幅ヲ算出セヨ。但眼高ヲ算入セス。

(2) 海岸ニ於テ高サ 420 尺ナル絶壁ノ頂上ヨリ之ト同一ノ直立面中ニアル二船ノ俯角ヲ測リテ 60° 及 45° ヲ得タリ。二船間ノ距離ヲ求メヨ。

(3) 高サ h 尺ノ塔ノ頂ヨリ之ト同一ノ地平面上ニ立テル圓柱ノ頂上及基礎ノ俯角ヲ測リテ α 及 β ヲ得タリ。此圓柱ノ高サ如何。

(4) 毎時 12 海里ノ速度ニテ正東ニ航行スル船アリ。或人正午ニハ此船ヲ南ヨリ 15° 東ニ見午

後一時半ニハ此船ヲ南東ニ見タリ。正午ニ於ケル此船マデノ距離ヲ求メヨ。

○(5) 南西ニ向テ航行スル船ヨリ碇泊セル二艦甲乙ヲ觀測セシニ、甲ハ北北西ニ在リテ、乙ハ西北西ニ在ルヲ知レリ。然ルニ此船10海里ヲ航行セシ後甲ハ北ニ在リテ乙ハ北西ニ在ルヲ見タリ甲乙二艦ノ距離及相互ノ方位如何。

○(6) 高サ h 尺ナル塔及其上ニ立テル尖針ヲ此塔基ヨリ a 尺ノ距離ニ在ル地平面上ノ一點ヨリ見タルニ等角ヲ張レル事ヲ知レリ。尖針ノ高サ如何。

(7) 地球ノ半徑ヲ四千哩ト假定セバ高サ一哩ノ山巔ニ於ケル視界半徑約幾哩ナルカ。

(8) 塔基ヨリ地平面上ニ於テ a 尺ヲ退キ塔ノ頂上ニ立テル旗竿ノ距角ヲ測リテ α ヲ得更ニ b 尺ヲ退キテ再同ジ距角ヲ得タリ。然ルトキ竿ノ長サハ $(2a+b)\tan\alpha$ ナリ。之ヲ證セヨ。

○(9) 直線ヲナス道ニ沿ヒテ歩行スル人アリ塔ノ最大高度ヲ測リテ α ヲ得、又他ノ直線ヲナス道ヨリ最大高度ヲ測リテ β ヲ得タリ。但兩觀測

點ヨリ兩道ノ交點ニ至ル距離ハ a 及 b ナリ。然ルトキ塔ノ高サハ次ノ如シ

$$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\cot^2\alpha - \cot^2\beta}}$$

之ヲ證セヨ

(10) 湖水面ヨリ h 尺高キ場所ニ於テ雲ノ高度ヲ測リテ α ヲ得、又湖水面ニ映ズル雲像ノ俯角 β ヲ得タリ。然ルトキハ雲ノ高サハ

$$\frac{h \sin(\beta + \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}$$

ナリ。之ヲ證セヨ。

(11) 或人河岸ニアリテ、對岸ニ立テル木ノ高サヲ知ラント欲シ、樹根ヲ通過スル一直線上ノ三點 A, B, C ヨリ木ノ頂上ノ仰角ヲ測リシニ夫々 $2\alpha, 90^\circ - \alpha, \alpha$ ヲ得タリ。然ラバ木ノ高サハ

$$\sqrt{\left(AC^2 - \frac{1}{4}BC^2\right)}$$

ナリ。之ヲ證セヨ。

(12) 海濱ニアル山ノ高サ CD ヲ知ラント欲シ、相距ルコト 365 尺ナル二船 A, B ニ於テ角 $BAC = 67^\circ 16'$, $ABC = 54^\circ 20'$, 仰角 $CAD = 35^\circ 30'$ ヲ測リ得

タリ。山ノ高サヲ問フ。但眼高ヲ10尺トス。

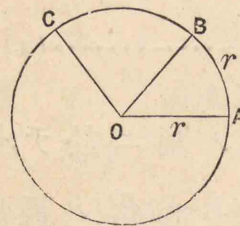
附 錄 一

弧度法 反圓函數 三角方程式

第 一 章

弧 度 法

1. 設問 I. 圓ノ半徑ト等シキ長サヲ有スル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ大サヲ求ムル法。



解法. 圓 ABC = 於テ半徑 OA ヲ r トシ、又弧 AB ヲ r ニ等シトシ中心角 AOB ノ大サヲ求メントス。

中心角ハ其弧ニ比例ス

ル故、AOB ヲ ω ニテ表セバ

$$\omega : 360^\circ = r : 2\pi r$$

$$\therefore \omega = \frac{360^\circ}{2\pi} = 180^\circ \times 0.3183 = 57^\circ 17' 45''$$

$$= 206265''$$

注意. 此角 ω ハ一定ノ大サヲ有スル故、之ヲ

測角ノ單位トスルヲ得。之ヲ「れいちあん」ト云ヒ其測角法ヲ弧度法ト云フ。

系。四直角ハ $2\pi\omega$ ニシテ平角ハ $\pi\omega$ ナリ。而シテ ω 即「れいちあん」ヲ單位トスルトキハ其測度ノミヲ記スルモノトス。

故ニ $360^\circ = 2\pi,$

$180^\circ = \pi,$

$90^\circ = \frac{1}{2}\pi,$

$60^\circ = \frac{1}{3}\pi.$

一般ニ $n^\circ = \frac{n}{180}\pi. \dots\dots\dots(1)$

2. 設問 II. 半徑 r ノ圓ニ於テ、長さ a ナル弧ノ上ニ立ツ中心角ノ弧度ヲ求ムル法。

解法。前圖ニ於テ弧 $AC = a$ トシ、所要ノ弧度ヲ x トセバ

角 AOC : 角 $AOB =$ 弧 AC : 弧 $AB,$

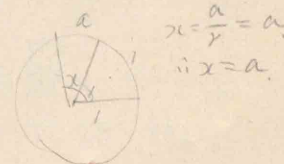
即 $x : 1 = a : r,$

$\therefore x = \frac{a}{r}.$

故ニ AOC 角ハ $\frac{a}{r}$ 「れいちあん」ニシテ其度數ハ

$\frac{a}{r} \times 57.2958$

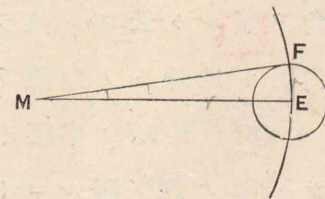
ニシテ秒數ハ $\frac{a}{r} \times 206265.$



系。單位圓ニ於ケル中心角ト其弧トハ測度ヲ同ジクス。故ニ角ノ三角函數ヲ弧ノ三角函數トモ云フ。

[例] 地球ノ半徑ヲ 3963 哩トスレバ此半徑ハ月ニ於テ $57' 3''.16$ ノ角ヲ張ルト云フ。然ラバ地球ト月トノ距離如何。

解法。Mヲ月ノ中心、Eヲ地球ノ中心トス。Mヲ中心トシ MEヲ半徑トシテ圓弧 EFヲ書



ケバ弧 EFハ殆地球ノ半徑ニ等シキ故、MEヲ x 哩トセバ

$3423.16 = \frac{3963}{x} \times 206265,$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{3963 \times 206265}{3423 \cdot 16} \\ &= 238793. \end{aligned}$$

即所要ノ距離ハ約二十四萬哩ナリ。

問題 十六

- (1) $23^\circ 30'$ ヲ弧度ニテ表セ。
- (2) $11^\circ 15'$ ヲ弧度ニテ表セ。
- (3) $\frac{7\pi}{6}$ ヲ度数ニテ表セ。
- (4) 邊數ガ n ナル正多角形ノ一角ヲ弧度ニテ表セ。
- (5) 月ノ直徑ハ地球ノ中心ニ於テ $1868''$ ノ角ヲ張ルト云フ。然ラバ月ノ直徑ハ幾哩ナルカ。但月ト地球トノ距離ヲ $238\,793$ 哩トス。
- (6) 地球ノ半徑 (3963 哩)ハ太陽ノ中心ニ於テ $8'' \cdot 82$ ノ角ヲ張ルコトヲ知レリ。地球ト太陽トノ距離ヲ求メヨ。

第二章

反圓函數

3. 定義. 或數 y ガ他ノ數 x ノ函數ナルトキ x ハ y ノ反函數ナリト云フ。

例ヘバ $y = \sin x$

トセバ x ハ y ノ反圓函數ナリ。之ヲ次ノ如ク記ス。 $x = \arcsin y$ 又ハ $x = \sin^{-1} y$ 。

同様ニ $\tan \theta = t$

トセバ $\theta = \arctan t$ 又ハ $\theta = \tan^{-1} t$ 。

故ニ $30^\circ = \sin^{-1} \frac{1}{2}$, $45^\circ = \tan^{-1} 1$ 。

注意 1. $\sin^{-1} y$ 又ハ $\tan^{-1} t$ ハ $\frac{1}{\sin y}$ 又ハ $\frac{1}{\tan t}$ トハ全ク異ナルコトヲ忘ルベカラズ。

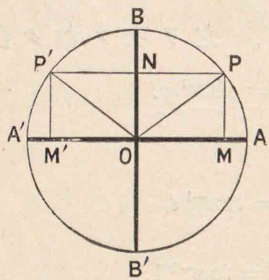
上ノ記法ニヨレバ

$$\sin(\sin^{-1} y) = y.$$

注意 2. 反圓函數モ亦六種アリテ反正弦、反餘弦、反正切、反餘切、反正割、反餘割ト云フ。

4. 設問 I. 既知數 k ヲ正弦トスル總テノ角ヲ求ムル法。

解法. 或角ノ正弦ハ唯一ナルドモ同一ノ正弦ヲ有スル角ハ無數ニ多シ(第 34 節注意參照). 單位圓 O ニ於テ互ニ垂直ナル直徑ヲ AOA' , BOB' トシ直徑 BOB' 上ニ於テ, 中心 O ヨリ ON ヲ k ニ等シク取り(圖ニハ k ヲ正トス), N ヲ通過シ直徑 AOA'



ニ平行ナル弦 PP' ヲ引クトキハ OA ト OP トノ爲ス角ノ正弦ハ MP ニシテ OA ト OP' トノ爲ス角ノ正弦ハ $M'P'$ ナリ, 而シテ共ニ k ニ等シ. 今角 AOP ヲ α ニ

テ表サバ角 AOP' ハ $\pi - \alpha$ ナリ. 故ニ此二角ニ周角ノ若干倍即 $2n\pi$ ヲ加ヘタル角ハ皆 k ヲ正弦トス. 故ニ $\sin^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ

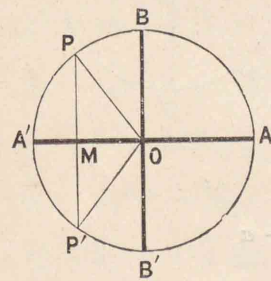
$$\left. \begin{aligned} \theta &= 2n\pi + \alpha \\ \text{及} \quad \theta &= (2n + 1)\pi - \alpha \\ \text{之ヲ} \quad \theta &= m\pi + (-1)^m \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ナル一式ニ纏ムルヲ得, 但 m, n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數ナリ.

之レ即 $\sin \theta = k$ ニ適合スル θ ノ總テノ價ナリ.

5. 設問 II. 既知數 k ヲ餘弦トスル總テノ角ヲ求ムル法。

解法. 單位圓 O ニ於テ直徑 AOA' 上ニ OM ヲ



k ニ等シク取り, M ヲ通過シ AOA' ニ垂直ナル弦 PP' ヲ引クベシ(圖ニハ k ヲ負數トス). 角 AOP ヲ α ニテ表サバ AOP' ハ $-\alpha$ ナリ.

故ニ α 又ハ $-\alpha$ ニ 2π ノ若干倍ヲ加ヘタルモノハ皆 k ヲ餘弦トス. 故ニ $\cos^{-1}k$ ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha, \dots\dots\dots(3)$$

但 n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數ナリ.

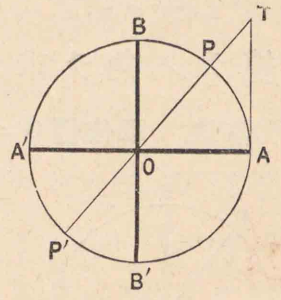
之レ即 $\cos \theta = k$ ニ適合スル θ ノ總テノ値ナリ.

6. 設問 III. 既知數 k ナ正切トスル總テノ角ヲ求ムル法。

解法. 直徑 AOA' ノ一端 A ニ於テ垂線 AT ヲ引キ其長サヲ k ニ等シク取り TO ヲ結ビ P, P' ニ於テ圓周ニ交ラシムレバ

$$\tan \angle AOP = \tan \angle AOP' = k.$$

角 $\angle AOP$ ヲ α ニテ表サバ $\angle AOP'$ ハ $\alpha + \pi$ ナリ。故ニ所要ノ一般ノ値ヲ θ ニテ表サバ



$$\theta = 2n\pi + \alpha,$$

及
$$\theta = 2n\pi + \pi + \alpha$$

ナリ。之ヲ一式ニ纏ムレバ

$$\theta = m\pi + \alpha, \dots\dots\dots(4)$$

但 m, n ハ零又ハ正或ハ負ノ整數ナリ。

之レ $\tan \theta = k$ ニ適合スル θ ノ總テノ價ナリ。

注意. 餘割, 正割, 餘切ハ夫々正弦, 餘弦, 正切ノ逆數ナルニ因リ其公式ハ夫々 (2), (3), (4) ト同様ナリ。

例ヘバ $\cot \theta = k$ ナルトキ $\tan \theta = \frac{1}{k}$ ナル故, $\frac{1}{k}$ ヲ正切トスル一ツノ値ヲ α トスレバ其一般ノ値ハ $m\pi + \alpha$ ナリ。即 k ヲ餘切トスル θ ノ一ツノ値ヲ α トスレバ其一般ノ値ハ $m\pi + \alpha$ ナリ。

問題 十七

次ノ方程式ニ適合スル θ ノ一般ノ値如何

(1)–(5).

(1) $\sin \theta = 1.$

(2) $\sin \theta = \frac{1}{2}.$

(3) $\cos^2 \theta = 1.$ [東京高工] (4) $\sin \theta = 0.$

(5) $2 \cos \theta = -\sqrt{3}.$

(6) $2\sqrt{2} \cos 5\theta = \sqrt{3} + 1$ ナルトキ 0° ト 180°

トノ間ニ在ル θ ノ値ヲ求メヨ。

(7) $\cos^{-1} 0$ ノ一般ノ値ヲ求メヨ。

(8) $\cot \theta = 1$ ナルトキ θ ノ一般ノ値如何。

(9) $\tan^2 \theta = 3$ ナルトキ θ ノ一般ノ値如何。

(10) $\tan 10\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ナル方程式ニ適合スル總

テノ銳角ヲ求メヨ。

第三章

三角方程式ノ解法

7. 定義. 未知角ノ圓函數ヲ含メル方程式ヲ三角方程式ト云ヒ其未知角ノ大ヲ求ムル事ヲ三角方程式ヲ解クト云フ。

既ニ前章ニ於テ簡單ナル三角方程式

$$\sin \theta = k, \quad \cos \theta = k, \quad \tan \theta = k$$

ヲ解キタリ。今猶二三ノ例ヲ示サン。

[例一] 方程式 $\cos 2\theta = \cos \theta$ ヲ解ケ。

解法. 公式(3)ニ由テ

$$2\theta = 2n\pi \pm \theta.$$

$$\therefore \theta = 2n\pi \quad \text{又ハ} \quad \theta = \frac{2}{3}n\pi.$$

[例二] $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = 1$ ヲ解ケ。

解法. 兩邊ヲ2ニテ除セバ

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta = \frac{1}{2},$$

(2 cos θ + 1) (cos θ - 1) = 0
 $2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$
 $2 \cos^2 \theta - \cos 2\theta - 1 = 0$
 $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ or $\cos \theta = \frac{1}{2}$
 $2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$

即 $\cos \theta \cos \frac{\pi}{6} + \sin \theta \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$

即 $\cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3},$

$$\therefore \theta - \frac{\pi}{6} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}.$$

[例三] $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = 2$ ヲ解ケ。

解法. $\tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = 2,$

$$\therefore \tan^4 \theta - 2 \tan^2 \theta + 1 = 0,$$

$$\therefore \tan^2 \theta - 1 = 0,$$

$$\therefore \tan \theta = \pm 1,$$

$$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

(tan 45° = 1)
 $\tan(-45°) = -1$
 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$
 $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}$

問題 十八

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $\cos 3\theta = \frac{1}{2}.$

(2) $\cos \theta + \cos 3\theta = 0.$

(3) $\cos 5\theta + \cos 3\theta + \cos \theta = 0.$

- (4) $\sin 9\theta - \sin \theta = \sin 4\theta.$
- (5) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
- (6) $\sin \theta + \frac{3}{2} = \operatorname{cosec} \theta.$
- (7) $\tan \theta + \cot \theta = 2.$
- (8) $2 \sin \theta = \tan \theta.$
- (9) $4 \sin \theta = \operatorname{cosec} \theta.$
- (10) $3 \tan^2 \theta = 1 + 4 \sin^2 \theta$

附 錄 二

補 習 雜 題

第一集 銳角ノ三角函數

次ノ恒等式ヲ證セヨ (1)–(10).

- (1) $\sin A + \tan A = \sin A \tan A (\cot A + \operatorname{cosec} A).$
- (2) $\cot^4 A + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^4 A - \operatorname{cosec}^2 A.$
- (3) $\tan^4 A + \tan^2 A = \sec^4 A - \sec^2 A.$
- (4) $\frac{1}{1 - \sin A} + \frac{1}{1 + \sin A} = 2 \sec^2 A.$
- (5) $(\sec A - \tan A)^2 = \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}.$
- (6) $(\operatorname{cosec} A + \cot A)^2 = \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}.$
- (7) $\cos^6 A + \sin^6 A = 1 - 3 \sin^2 A \cos^2 A.$
- (8) $(\tan A + \cot A)^2 = \sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A.$
- (9) $(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A.$
- (10) $\sin^2 A \cos^2 B (1 + \cot^2 A)(1 + \tan^2 B) = 1.$
- (11) $\cos A = \cos \alpha \sin C, \cos B = \sin \alpha \sin C$ ナレバ
 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2.$

$$\gamma(12) \quad \sin^2 A \operatorname{cosec}^2 B + \cos^2 A \cos^2 C = 1 \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\sin^2 C = \tan^2 A \cot^2 B.$$

$$\gamma(13) \quad \tan \theta = \frac{a}{b} \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

$$(14) \quad \tan \theta + \sec \theta = 1.5 \quad \text{ナルトキ} \sin \theta \text{ヲ求メヨ。}$$

$$\gamma(15) \quad \cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = 5 \quad \text{ナルトキ} \cos \theta \text{ヲ求メヨ。}$$

$$\gamma(16) \quad \sec^2 \theta = 2(1 + \tan \theta) \quad \text{ナルトキ} \tan \theta \text{ヲ求メヨ。}$$

第二集 直角三角形

$$\textcircled{\gamma}(1) \quad \sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2} \quad \text{ナルトキ} \cot B \text{ヲ求メヨ。}$$

$$\textcircled{\gamma}(2) \quad m \tan B = \sqrt{n^2 - m^2} \quad \text{ナルトキ} \sin A \text{ヲ求メヨ。}$$

$$(3) \quad c = 240, a = 137.66 \quad \text{ヲ知リ} A, b \text{ヲ求メヨ。}$$

$$(4) \quad c = 1760, A = 32^\circ \quad \text{ヲ知リ} a, b \text{ヲ求メヨ。}$$

$$(5) \quad a = 520, A = 36^\circ \quad \text{ヲ知リテ} b, c \text{ヲ求メヨ。}$$

$$(6) \quad a = 225.1, b = 250 \quad \text{ヲ知リ} A, c \text{ヲ求メヨ。}$$

$\gamma(7)$ A, B, C ハ海岸ニ於テ一直線上ニアル三ツノ目標ニシテ $AB = BC = 2$ 哩ナリ。或船 B ニ向ヒ海岸ニ直角ヲナシテ進メルニ初メ AC ガ 60° ヲ張

リ十分後ニハ 120° ヲ張ルヲ知レリ。船ノ速サハ毎時 $8\sqrt{3}$ 哩ナリ。之ヲ證セヨ。

$\gamma(8)$ 海濱ニ在ル高サ h 尺ノ高樓ヨリ海上ナル二船ヲ同方位ニ見タルニ其俯角 α, β ナルコトヲ知リ得タリ。然ラバ二船ノ距離ハ $h(\cot \beta \sim \cot \alpha)$ 尺ナリ。之ヲ證セヨ。

第三集 一般ノ角ノ三角函數

次ノ恒等式ヲ證セヨ (1)–(9)。

$$\gamma(1) \quad (\sec^2 \theta - \cos^2 \theta)(\operatorname{cosec}^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2 + \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

$$(2) \quad \tan^2 \theta + \cot^2 \theta = \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta - 2.$$

$$\gamma(3) \quad \sin^3 \theta + \cos^3 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta + \cos \theta.$$

$$(4) \quad \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} = \cot^2 \theta \sin^2 \theta (\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta).$$

$$(5) \quad \sin(360^\circ - A) = -\sin A, \cos(360^\circ - A) = \cos A.$$

$$(6) \quad \sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta, \cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta.$$

$$(7) \quad \tan 200^\circ = \tan 20^\circ, \sin 240^\circ = -\sin 60^\circ.$$

$$\gamma(8) \quad \tan(45^\circ - \theta) \tan(45^\circ + \theta) = 1.$$

$$\gamma(9) \quad \cos(2n + 1)90^\circ = 0.$$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ (10)–(14).

$$(10) \quad m \cos(90^\circ - \theta) + n \cos(90^\circ + \theta).$$

$$(11) \quad \frac{\sin \theta \tan(180^\circ + \theta)}{\tan \theta \cos(90^\circ - \theta)}$$

$$(12) \quad \frac{(a^2 - b^2) \cot(180^\circ - \theta)}{\cot(180^\circ + \theta)} - \frac{(a^2 + b^2) \tan(90^\circ - \theta)}{\cot(180^\circ - \theta)}.$$

$$(13) \quad \frac{\sin(90^\circ + \theta) \cos(90^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} + \frac{\sin(180^\circ - \theta) \cos(90^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)}.$$

〔海機〕

(14) 次ノ三式ノ連乘積ヲ求メヨ。

$$\sin(\theta - 90^\circ) + \cos(\theta - 180^\circ),$$

$$\cot(\theta - 90^\circ) - \tan(\theta - 180^\circ),$$

$$\sec(\theta - 90^\circ) - \operatorname{cosec}(\theta - 180^\circ).$$

次ノ式ノ値ヲ求メヨ (15)–(18).

$$(15) \quad \cos 510^\circ, \quad \cos(-30^\circ), \quad \cos 3540^\circ,$$

$$\cos 225^\circ, \quad \cos 315^\circ.$$

$$(16) \quad \tan 120^\circ, \quad \tan 225^\circ, \quad \tan(-585^\circ),$$

$$\tan 750^\circ, \quad \tan 7320^\circ.$$

$$(17) \quad \sin 480^\circ, \quad \cos 4080^\circ, \quad \tan 8400^\circ,$$

$$\cot(-7260^\circ), \quad \sec 7335^\circ, \quad \operatorname{cosec} 1485^\circ.$$

$$(18) \quad \cos^2 \theta + \cos^2(90^\circ + \theta) + \cos^2(180^\circ + \theta) + \cos^2(270^\circ + \theta).$$

(19) $\sin \beta = \sin a, \cos \beta = \cos a$ ナルトキ $a - \beta$ ハ 0° 又ハ 360° ノ倍數ナリ。之ヲ證セヨ。

(20) $\cos \beta = \cos a, \tan \beta = -\tan a$ ナルトキ $a + \beta$ ハ 0° 又ハ 360° ノ倍數ナリ。之ヲ證セヨ。

(21) θ ガ 0° ヨリ 360° マデ變化スル間ニ於ケル次ノ各式ノ變化ヲ考究セヨ。

$$\sin \theta + \cos \theta \text{ (海兵)}, \quad \cos \theta - \sin \theta,$$

$$\sec \theta - \tan \theta, \quad \operatorname{cosec} \theta + \cot \theta.$$

(22) x ヲ實數トセバ等式

$$\sin \theta = x + \frac{1}{x}$$

ニ適合スル角 θ ナシ。之ヲ證セヨ。

(23) $x = y$ ナルニ非ザレバ等式

$$\sec^2 \theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$$

ハ成立セズ。之ヲ證セヨ。

第四集 二角ノ和又ハ差ノ

三角函數

次ノ式ヲ證明セヨ (1)–(92).

$$(1) \cos(60^\circ + A) + \cos(60^\circ - A) = \cos A.$$

$$(2) \cos(60^\circ - A) - \cos(60^\circ + A) = \sqrt{3} \sin A.$$

$$(3) \sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) \\ + \sin C \sin(A - B) = 0.$$

$$(4) \frac{\tan a + \tan \beta}{\tan a - \tan \beta} = \frac{\sin(a + \beta)}{\sin(a - \beta)}.$$

$$(5) \frac{\tan a \tan \beta + 1}{1 - \tan a \tan \beta} = \frac{\cos(a - \beta)}{\cos(a + \beta)}.$$

$$(6) \cot a - \tan \beta = \frac{\cos(a + \beta)}{\sin a \cos \beta}.$$

$$(7) \frac{\tan x + \cot y}{\cot y - \tan x} = \frac{\cos(x - y)}{\cos(x + y)}.$$

$$(8) \frac{1 + \cot A \tan B}{\cot A - \tan B} = \tan(A + B).$$

$$(9) \tan(\theta - 45^\circ) + \cot(\theta + 45^\circ) = 0.$$

$$(10) \frac{\tan(n + 1)a - \tan(n - 1)a}{1 + \tan(n + 1)a \tan(n - 1)a} = \tan 2a.$$

$$(11) \frac{\sin(45^\circ + A) - \cos(45^\circ + A)}{\sin(45^\circ + A) + \cos(45^\circ + A)} = \tan A.$$

$$(12) \frac{\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A)}{\tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A)} = \sin 2A.$$

$$(13) \tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta}.$$

$$(14) \tan 2A \tan 3A \tan 5A = \tan 5A - \tan 3A - \tan 2A$$

$$(15) \frac{\sin 2A}{1 + \sin 2A} = \frac{2}{(1 + \tan A)(1 + \cot A)}.$$

$$(16) \sin \theta + \sin(\theta + 120^\circ) + \sin(\theta + 240^\circ) = 0.$$

$$(17) \tan(45^\circ - \theta) = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}.$$

$$(18) \cos(B + C) \cos(B - C) - \cos(A + C) \cos(A - C) \\ = \sin(A + B) \sin(A - B).$$

$$(19) \sin(A + C) \cos(A - C) - \sin(B + C) \cos(B - C) \\ = \cos(A + B) \sin(A - B).$$

$$(20) \sin 70^\circ = \sin 10^\circ + \cos 40^\circ$$

$$(21) \sin 118^\circ - \sin 2^\circ = \sin 58^\circ.$$

$$(22) \cos 9^\circ - \cos 51^\circ = \sin 21^\circ.$$

$$(23) \sin(A - B) \sin(C + D) + \sin(B - C) \sin(A + D) \\ + \sin(C - A) \sin(B + D) = 0.$$

$$(24) \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos A - \sin B \cos B} = \tan(A + B).$$

$$(25) \frac{1 + \sin A}{1 + \cos A} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan \frac{1}{2} A \right)^2.$$

$$(26) \frac{\sin(B + C) - \sin B}{\sin(A + C) - \sin A} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(B + C) \cos \frac{1}{2} B - \cos \frac{1}{2} C}{2 \cos \frac{1}{2}(A + C) \cos \frac{1}{2} A - \cos \frac{1}{2} C}.$$

$$(27) \cot \theta - \tan \theta = 2 \left(\frac{1 + \cos 4\theta}{1 - \cos 4\theta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\sqrt{(28)} \quad \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \cos(A+B) \\ = \sin^2(A+B).$$

$$(29) \quad \operatorname{cosec} 2\theta + \cot 4\theta + \operatorname{cosec} 4\theta = \cot \theta.$$

$$(30) \quad \{\sin A + \sin B + \sin(A+B)\}^2 \\ + \{1 + \cos A + \cos B + \cos(A+B)\}^2 \\ = 16 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2}.$$

$$\sqrt{(31)} \quad \frac{2 \tan A - \sin 2A}{2 \cot A - \sin 2A} = \tan^4 A.$$

$$\sqrt{(32)} \quad \tan(A+60^\circ) \tan(A-60^\circ) + \tan A \tan(A+60^\circ) \\ + \tan(A-60^\circ) \tan A + 3 = 0.$$

$$(33) \quad \cot(A+60^\circ) \cot(A-60^\circ) + \cot A \cot(A+60^\circ) \\ + \cot(A-60^\circ) \cot A + 3 = 0.$$

$$(34) \quad \cos(A+B) \sin B - \cos(A+C) \sin C \\ = \sin(A+B) \cos B - \sin(A+C) \cos C.$$

$$(35) \quad 1 + \cos 2(A-B) \cos 2B = \cos^2 A + \cos^2(A-2B).$$

$$(36) \quad \sin 3^\circ \\ = \frac{1}{8} \{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3-\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}\}.$$

$$(37) \quad \cos 3^\circ \\ = \frac{1}{8} \{(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)\sqrt{3-\sqrt{5}}\}.$$

$$(38) \quad \sin(A+B) \sin(A-B) \{\cos(A+B) \cos(A-B) + 1\} \\ = \cos^4 B - \cos^4 A.$$

$$\sqrt{(39)} \quad \{\cot \theta + \cot(\theta-90^\circ)\} \{\tan(45^\circ-\theta) + \tan(45^\circ+\theta)\} \\ = 4 \operatorname{cosec} 2\theta.$$

$$\sqrt{(40)} \quad 4 \cos(a+\beta+45^\circ) \cos(a+\beta-45^\circ) \cos(a-\beta) \\ = \cos(a+3\beta) + \cos(3a+\beta).$$

$$\sqrt{(41)} \quad \cos^2 A + \cos^2(120^\circ+A) + \cos^2(120^\circ-A) = \frac{3}{2}.$$

$$\sqrt{(42)} \quad \cos 47^\circ - \cos 61^\circ - \cos 11^\circ + \cos 25^\circ = \sin 7^\circ.$$

$$(43) \quad 1 + \tan 65^\circ + \tan 70^\circ = \tan 65^\circ \tan 70^\circ.$$

$$\sqrt{(44)} \quad 4 \sin 110^\circ \sin 70^\circ \sin 40^\circ = \sin 80^\circ + 2 \sin 40^\circ.$$

$$(45) \quad \cos \theta \cos(120^\circ+\theta) + \cos \theta \cos(120^\circ-\theta) \\ + \cos(120^\circ+\theta) \cos(120^\circ-\theta) = -\frac{3}{4}.$$

$$\sqrt{(46)} \quad \cos 40^\circ \cos 80^\circ + \cos 80^\circ \cos 160^\circ \\ + \cos 160^\circ \cos 40^\circ = -\frac{3}{4}.$$

$$(47) \quad \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ = -\frac{1}{8}.$$

$$\sqrt{(48)} \quad \sin 3A = \sin A (2 \cos 2A + 1).$$

$$(49) \quad \cos 3A = \cos A (2 \cos 2A - 1).$$

$$\sqrt{(50)} \quad \cot 3A = (\cot^3 A - 3 \cot A) / (3 \cot^2 A - 1).$$

- (51) $\sin^3 A + \sin^3(120^\circ + A) - \sin^3(120^\circ - A)$
 $= -\frac{3}{4} \sin 3A.$
- ✓(52) $\sin 3A \sin^2 A + \cos 3A \cos^3 A = \cos^3 2A.$
- (53) $4 \cos^3 A \sin 3A + 4 \sin^3 A \cos 3A = 3 \sin 4A.$
- (54) $\sin 3A \cos^2 A + \cos 3A \sin^2 A$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2A \sin(45^\circ - A)(3 + 2 \sin 2A).$
- (55) $\sin 4A = 4 \sin A \cos A - 8 \sin^3 A \cos A.$
- ✓(56) $\sin 5A = 5 \sin A - 20 \sin^3 A + 16 \sin^5 A.$
- (57) $\cos 4A = 1 - 8 \cos^2 A + 8 \cos^4 A.$
- (58) $\cos 5A = 5 \cos A - 20 \cos^3 A + 16 \cos^5 A.$
- ✓(59) $\sin 6A = \cos A (6 \sin A - 32 \sin^3 A + 32 \sin^5 A).$
- ✓(60) $\cos 6A = 32 \cos^6 A - 48 \cos^4 A + 18 \cos^2 A - 1.$
- (61) $2 \sec(A+B)(\cos^2 A - \sin^2 B)$
 $= (\sin 2A + \sin 2B) \operatorname{cosec}(A+B).$
- (62) $2 \sin \frac{3A}{2} \cos \frac{3A}{2} \cos 2A - 2 \sin A \cos A \cos 3A$
 $= \sin A.$
- (63) $2(\cos^3 A - \sin^3 A) = \cos 2A (1 + \cos^2 2A).$
- (64) $\sin(3A+B) \sin(3A-B) - \sin(A+B) \sin(A-B)$
 $= \sin 4A \sin 2A.$

- (65) $\{\cos(A+B) + \sin(A-B)\} \{\sin(A+B) + \cos(A-B)\}$
 $= \cos 2B (1 + \sin 2A).$
- ✓(66) $\left(\frac{3 \sin A - \sin 3A}{3 \cos A + \cos 3A}\right)^2 = \left(\frac{\sec 2A - 1}{\sec 2A + 1}\right)^2.$
- (67) $\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)$
 $= -4 \sin \frac{1}{2}(\beta - \gamma) \sin \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$
- (68) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C + \sin^2(A+B+C)$
 $= 2 - 2 \cos(B+C) \cos(C+A) \cos(A+B).$
- ✓(69) $\cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta - \gamma)$
 $+ \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$
- (70) $\sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma)$
 $- \sin(\alpha + \beta + \gamma) = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$
- (71) $\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$
 $= 4 \sin \frac{1}{2}(y+z) \sin \frac{1}{2}(z+x) \sin \frac{1}{2}(x+y).$
- (72) $\sin(A+B+C) + \sin(B+C-A) + \sin(C+A-B)$
 $- \sin(A+B-C) = 4 \cos A \cos B \sin C.$
- (73) $\cos \frac{S}{2} \cos \frac{S-A}{2} \cos \frac{S-B}{2} \cos \frac{S-C}{2}$
 $+ \sin \frac{S}{2} \sin \frac{S-A}{2} \sin \frac{S-B}{2} \sin \frac{S-C}{2}$
 $= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}, \quad \text{但 } 2S = A+B+C.$

$$(74) \quad \cos^2 S + \cos^2(S-A) + \cos^2(S-B) + \cos^2(S-C) \\ = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C, \quad \text{但 } 2S = A+B+C.$$

$$(75) \quad \tan \frac{A+B}{2} - \tan \frac{A-B}{2} = \frac{2 \sin B}{\cos A + \cos B}. \quad \text{〔大豫〕}$$

$$(76) \quad \sin^2(B-A) + \sin^2(B-A+C) \\ - 2 \sin(B-A) \sin(B-A+C) \cos C = \sin^2 C.$$

$$(77) \quad 4 \cos 3A \sin^3(60^\circ - A) - 4 \sin 3A \cos^3(60^\circ - A) \\ = 3 \sin(60^\circ - 4A).$$

$$(78) \quad \cos A + \cos(72^\circ - A) + \cos(72^\circ + A) \\ + \cos(144^\circ - A) + \cos(144^\circ + A) = 0.$$

$$(79) \quad 1 + \cos(B-C) + \cos(C-A) + \cos(A-B) \\ = 4 \cos \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(C-A) \cos \frac{1}{2}(A-B).$$

$$(80) \quad \sin(B-C) + \sin(C-A) + \sin(A-B) \\ = 4 \sin \frac{1}{2}(B-C) \sin \frac{1}{2}(C-A) \sin \frac{1}{2}(A-B). \quad \text{〔海兵〕}$$

$$(81) \quad \sin 3(A-15^\circ) \\ = 4 \cos(A-45^\circ) \cos(A+15^\circ) \sin(A-15^\circ).$$

$$(82) \quad \frac{\sin(2A-B-C)}{\sin(A-B)\sin(A-C)} + \frac{\sin(2B-C-A)}{\sin(B-C)\sin(B-A)} \\ + \frac{\sin(2C-A-B)}{\sin(C-A)\sin(C-B)} = 0.$$

$$(83) \quad \frac{\cos(2A-B-C)}{\sin(A-B)\sin(A-C)} + \frac{\cos(2B-C-A)}{\sin(B-C)\sin(B-A)} \\ + \frac{\cos(2C-A-B)}{\sin(C-A)\sin(C-B)} = -4.$$

$$(84) \quad \cot^2 A - \tan^2 A = \frac{4 \cos 2A}{\sin^2 2A}.$$

$$(85) \quad 8(\cos^6 A + \sin^6 A) = 5 + 3 \cos 4A.$$

$$(86) \quad \cos^3 2A + 3 \cos 2A = 4(\cos^6 A - \sin^6 A).$$

$$(87) \quad 4(\cos^3 10^\circ + \sin^3 20^\circ) = 3(\cos 10^\circ + \sin 20^\circ).$$

$$(88) \quad \cos 3(A+45^\circ) + \cos(A+45^\circ)(1+2\sin 2A) = 0$$

$$(89) \quad \tan(B-C) + \tan(C-A) + \tan(A-B) \\ = \tan(B-C) \tan(C-A) \tan(A-B).$$

$$(90) \quad \tan mA + \tan nA + \tan pA \\ = \tan mA \tan nA \tan pA, \quad \text{但 } m+n+p=0.$$

$$(91) \quad 4 \cos a \cos \beta \sin \gamma = \sin 2a + \sin 2\beta - \sin 2\gamma. \\ \text{但 } a+\beta+\gamma=180^\circ.$$

$$(92) \quad 4 \sin a \sin \beta \cos \gamma \\ = \cos(\beta-\gamma-a) + \cos(\gamma+a-\beta) \\ - \cos(a+\beta-\gamma) - \cos(a+\beta+\gamma).$$

○ (93) $\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ ナルトキ $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ。

〔山口高商〕

○ (94) $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$ ノ最大値ハ 1 ナリ。之ヲ證セヨ。

○ (95) $\sin \theta \cos \theta$ ノ最大値ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。之ヲ證セヨ。

○ (96) $\sin x + \cos x = \sin \theta + \cos \theta$ ナルトキハ $\sin x$ ハ $\sin \theta$ 或ハ $\cos \theta$ ニ等シ。之ヲ證セヨ。

○ (97)
$$\begin{aligned} x &= a \cos^m \theta \cos^m \phi, \\ y &= b \cos^m \theta \sin^m \phi, \\ z &= c \sin^m \theta. \end{aligned}$$

ナルトキハ

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{m}} = 1.$$

○ (98)
$$\begin{aligned} \sin \theta \cos^2 \theta &= a, \\ \sin^2 \theta \cos \theta &= b \end{aligned}$$

ナルトキハ

$$a^2 b^2 = (a^2 + b^2)^3$$

○ (99) 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ノ二根ヲ $\tan \alpha,$

$\tan \beta$ トシテ $\tan(a + \beta)$ ノ値ヲ求メヨ。

○ (100) $\cos(a - \beta) = m \sin(a + \beta)$ ナルトキハ

$$\tan(45^\circ + a) = \frac{m+1}{m-1} \tan(45^\circ - \beta).$$

○ (101) $\cos A = \frac{\cos B - k}{1 - k \cos B}$ ナルトキハ

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \tan \frac{B}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

〔大豫〕

○ (102) 次ノ方程式ヨリ θ ヲ消去セヨ。

$$(x - a \sin \theta)^2 + (y - a \cos \theta)^2 = (x \cos \theta - y \sin \theta)^2 = a^2.$$

(103) $a \cos^2 x + b \sin^2 x = m \cos^2 y,$

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = n \sin^2 y,$$

$$m \tan^2 x = n \tan^2 y$$

ナルトキハ

$$\tan^2 x = 1$$

及 $(a + b)(m + n) = 2mn.$

(104) $\cos 5^\circ 37' 30''$ ノ値ヲ求メヨ。

○ (105) $a^2 \tan^2 x + b^2 \cot^2 x$ ノ最小値ハ $\pm 2ab$ ナリ。之ヲ證セヨ。

✓ (106) 二次方程式 $x^2 - 2x \cot 2a - 1 = 0$ の根ヲ
求メ成ルベク簡單ニセヨ。

✓ (107) $\tan \theta = \frac{b}{a}$ ナルトキ

$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

ナルコトヲ證セヨ。

[大豫]

第五集 三角形

次ノ問題ニ於テハ A, B, C ヲ三角形ノ内角ト
シ a, b, c ヲ其對邊トス。又 S ヲ面積トシ r ヲ内
接圓ノ半徑トシ, r', r'', r''' ヲ A, B, C ノ角内ニアル
傍接圓ノ半徑トシ, R ヲ外接圓ノ半徑トス。又
 h_a, h_b, h_c ハ頂點 A, B, C ヨリ對邊 a, b, c ニ下セル高
サトス。

○ ✓ (1) 直角三角形 ABC ノ斜邊 AB ヲ D ニ於テ
 $AD : BD = a : b$

ノ如ク内分スルトキ

$$\tan \angle ACD = \frac{a^2}{b^2}, \quad CD = \frac{\sqrt{a^4 + b^4}}{a + b}$$

✓ (2) $C = 90^\circ$ ナルトキハ

$$\cos(A - B) = \frac{2ab}{c^2}, \quad \cos 2B = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

$$\tan 2B = \frac{2ab}{a^2 - b^2}, \quad \tan \frac{1}{2}B = \frac{b}{a + c}$$

✓ (3) $C = 90^\circ$ ナルトキハ $S = s(s - c)$.

(4) $C = 90^\circ$ ナルトキハ

$$c = \frac{s}{\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B} = \frac{s - c}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B}$$

$$= \frac{s - b}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B} = \frac{s - a}{\sqrt{2} \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B}$$

✓ (5) 次ノ關係アラバ $C = 90^\circ$ ナルベシ

$$\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B},$$

或ハ $\square \frac{\sin A}{\cos B} = \sin C + \cos C \cot A.$

(6) $C = 90^\circ$ ナルトキハ $2(R + r) = a + b.$

(7) $C = 90^\circ$ ナルトキハ $r''' = r + r' + r''.$

任意ノ三角形ニ於テ次ノ關係アルコトヲ證

明セヨ (8) - (61).

$$\sqrt{(8)} \quad \sin A = \frac{1}{2bc} \sqrt{(2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}.$$

$$\sqrt{(9)} \quad \left(\tan \frac{1}{2}A - \tan \frac{1}{2}B\right) : \left(\tan \frac{1}{2}A + \tan \frac{1}{2}B\right) = a - b : c.$$

$$(10) \quad r = (s-a) \tan \frac{1}{2}A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}.$$

$$(11) \quad r' = s \tan \frac{1}{2}A, \quad r'' = s \tan \frac{1}{2}B, \quad r''' = s \tan \frac{1}{2}C.$$

$$(12) \quad S = sr = (s-a)r' = (s-b)r'' = (s-c)r'''.$$

$$\sqrt{(13)} \quad S = s^2 \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C.$$

$$(14) \quad r \left(\cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C\right) = a.$$

$$(15) \quad r = a \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C \sec \frac{1}{2}A.$$

$$(16) \quad r' = a \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \sec \frac{1}{2}A.$$

$$(17) \quad \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}.$$

$$(18) \quad S = r^2 \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$$

$$(19) \quad S = r'^2 \cot \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C.$$

$$(20) \quad s = 4R \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

$$\sqrt{(21)} \quad s^2 = bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2}.$$

$$(22) \quad S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

$$(23) \quad 4Rsr = abc.$$

$$(24) \quad a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$$

$$(25) \quad \frac{R}{r} = \frac{a+b+c}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}.$$

$$(26) \quad r = 4R \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

$$(27) \quad r'r''r''' = abc \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

$$(28) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}$$

$$(29) \quad 4R = r' + r'' + r''' - r.$$

$$(30) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}.$$

$$(31) \quad h_a \sin \frac{1}{2}A = 2r \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C \\ = 2r' \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

$$(32) \quad h_a \left(1 - \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C\right) = 2r,$$

$$h_a \left(1 - \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C\right) = -2r'.$$

$$\checkmark (33) \quad a \cos(B-C) + b \cos(C-A) + c \cos(A-B) \\ = 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C).$$

$$\checkmark (34) \quad 2\left(a \cos^2 \frac{1}{2}A + b \cos^2 \frac{1}{2}B + c \cos^2 \frac{1}{2}C\right) \\ = (a+b+c)(\cos A + \cos B + \cos C).$$

$$O \checkmark (35) \quad c(\cos A + \cos B) = 2(a+b) \sin^2 \frac{1}{2}C.$$

$$(36) \quad c(\cos A - \cos B) = 2(b-a) \cos^2 \frac{1}{2}C.$$

$$\checkmark (37) \quad \cot A = (b - a \cos C) / a \sin C.$$

$$O \checkmark (38) \quad c^2 \sin(A-B) = (a^2 - b^2) \sin(A+B).$$

$$(39) \quad (b^2 + c^2 - a^2) \tan A = (c^2 + a^2 - b^2) \tan B \\ = (a^2 + b^2 - c^2) \tan C.$$

$$(40) \quad R = \frac{\sqrt[3]{abc}}{2\sqrt{\sin A \sin B \sin C}}.$$

$$\checkmark (41) \quad S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4 \tan \frac{1}{2}(A+B-C)}.$$

$$\checkmark (42) \quad S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4(\cot A + \cot B + \cot C)}.$$

$$(43) \quad S = \frac{(a+b+c)^2}{4\left(\cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C\right)}.$$

$$(44) \quad S = \frac{1}{4}(a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C).$$

$$(45) \quad a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R+r).$$

$$\checkmark (46) \quad a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A = 2ab \sin C.$$

$$\checkmark (47) \quad \frac{b^2 - c^2}{a \sin(B-C)} = \frac{c^2 - a^2}{b \sin(C-A)} = \frac{a^2 - b^2}{c \sin(A-B)}.$$

$$\checkmark (48) \quad (b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0.$$

$$\checkmark (49) \quad (b-c) \cot \frac{1}{2}A + (c-a) \cot \frac{1}{2}B + (a-b) \cot \frac{1}{2}C = 0.$$

$$\checkmark (50) \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \\ + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0.$$

$$\checkmark (51) \quad \sin A + \sin B + \sin C \\ = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (\text{山口高商})$$

$$(52) \quad \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

$$\checkmark (53) \quad \cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1 \\ = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

$$\checkmark (54) \quad \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$(55) \quad \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

$$\checkmark (56) \quad \sin^2 A + 2 \sin B \sin C \cos A = \sin^2 B + \sin^2 C. \quad (\text{大阪高工})$$

$$\checkmark (57) \quad \cot \frac{1}{2}A + \cot \frac{1}{2}B + \cot \frac{1}{2}C = \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C.$$

$$(58) \quad \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

$$(59) \quad b^2 \cos 2C + 2bc \cos (B - C) + c^2 \cos 2B = a^2.$$

$$\gamma (60) \quad c^2 = (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2}.$$

$$(61) \quad c^2 = \left\{ (a+b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} - (a-b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} \right\} \sec (A-B).$$

$$\gamma (62) \quad x, y, z \text{ フ}$$

$$\cos x = \frac{a}{b+c}, \quad \cos y = \frac{b}{c+a}, \quad \cos z = \frac{c}{a+b}$$

ナル如キ鋭角トスレバ

$$\tan^2 \frac{x}{2} + \tan^2 \frac{y}{2} + \tan^2 \frac{z}{2} = 1,$$

$$\gamma \tan \frac{x}{2} \tan \frac{y}{2} \tan \frac{z}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

$$\gamma (63) \quad b = 4c \cos \left(30^\circ + \frac{A}{2} \right) \cos \left(30^\circ - \frac{A}{2} \right)$$

ナルトキハ $A = 2C$ 及 $a^2 = c(b+c)$.

(64) 一角及二ツノ高ヲ知リテ三角形ノ原素ヲ求メヨ。

(65) 直角三角形ニ於テ二鋭角ヨリ出ヅル中線ヲ知リテ其二角ヲ求ムル方法ヲ問フ。

(66) 次ノモノヲ知リテ三角形ノ原素ヲ求メヨ。

(i) s, A, B . (ii) S, A, B . (iii) $A, B, a+b$. (iv) r, A, B .

γ (67) 任意ノ三角形ニ於テ

$$\tan^2 \phi = \frac{4ab}{(a-b)^2} \sin^2 \frac{1}{2} C$$

トスレバ $c = (a-b) \sec \phi$.

(68) 任意ノ三角形ニ於テ

$$\sin^2 \theta = \frac{4ab}{(a+b)^2} \cos^2 \frac{1}{2} C$$

トスレバ $c = (a+b) \cos \theta$.

(69) 次ノ等式ヲ證セヨ:

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C$$

$$= 2(h_a \cos A + h_b \cos B + h_c \cos C).$$

γ (70) $C = 60^\circ$ ナルトキハ

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

γ (71) $B = 60^\circ$ ナルトキハ

$$\frac{a+c}{2b} = \sin (30^\circ + C).$$

[大豫]

γ (72) 三角形 ABC ニ於テ $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ ガ

等差級數ヲナストキハ

$$\cot \frac{A}{2} \cot \frac{C}{2} = 3$$

ヲ證セヨ。

[大豫]

✓(73) $\tan \frac{A}{2} = \frac{5}{6}, \tan \frac{B}{2} = \frac{20}{37}$ ナルトキ $\tan C$

ハ如何。

[大阪高工]

✓(74) 三角形ノ二邊夫々五尺ト七尺トニシテ
其夾角六十度ナリ。依テ第三邊及面積ヲ求メヨ。

[東京高工]

(75) $A = 72^\circ 15', B = 38^\circ 26', b = 1824.5$ ヲ知
リテ a ヲ求メヨ。

(76) $c = 1326, A = 58^\circ 30', B = 73^\circ 24'$ ヲ知リ
テ a ヲ求メヨ。

(77) $A = 109^\circ, B = 48^\circ, c = 273$ ヲ知リテ a, b
ヲ求メヨ。

(78) $a = 748, b = 375, C = 63^\circ 35'5$ ナルトキ
 A, B, c ヲ求メヨ。

(79) $a = 1923, b = 3285, C = 67^\circ 40'$ ヲ知リテ
 A, B ヲ求メヨ。

(80) $a = 167.4, c = 341.5, B = 26^\circ 30'$ ヲ知リ
テ A, C ヲ求メヨ。

(81) $a = 1925, b = 2637, A = 37^\circ 18'$ ヲ知リ
テ B, C ヲ求メヨ。

(82) $a = 1925, b = 2637, B = 37^\circ 18'$ ヲ知リテ
 A, C ヲ求メヨ。

✓(83) $a = 6, b = 12, \alpha = 30^\circ$ ナルトキ B, C, c
ヲ求メヨ。

(84) $c = 2, a = 3(\sqrt{3}-1), C = 75^\circ$ ナルトキ
他ノ原素ヲ求メヨ。

(85) $a = 341, b = 260, c = 158$ ナルトキ $A, B,$
 C ヲ求メヨ。

(86) $a = 273.96, b = 198.63, c = 236.91$ ヲ知リ
テ三角形ヲ解ケ。

(87) $a:b:c = 4:7:9$ ナルトキ三角ヲ求メヨ。

✓(88) 二等邊直角三角形 ABC アリ。 B ヲ直角
トス。 BC ヲ E, F ニ於テ三等分シ角 EAF 及 FAC
ノ正切ヲ求メヨ。

[東京高工]

第六集 應用

(1) 三角形ノ地面アリ。其三邊ノ長サ夫々
120間, 130間, 134間ナリ。面積ヲ求メヨ。

(2) 川岸ナル高塔ノ高サヲ知ラント欲シ、對
岸ヨリ頂上ノ仰角ヲ測リテ $25^\circ 10'$ ヲ得タリ。川

幅ガ二百尺ナルトキ塔ノ高サハ幾尺ナルカ。

(3) 高サ 6600 呎ノ山ハ百哩ノ距離ヨリ見ルヲ得ベシト云フ。地球ノ半徑ヲ求メヨ。

(4) 富士山ノ頂上(海面ヲ抜クコト 12000 尺トス)ヨリ天涯俯角ヲ測リシニ $1^{\circ} 56'$ ヲ得タリト云フ。地球ノ半徑ハ何里ナルカ。

(5) 太陽ノ直徑ノ視角ヲ $31' 30''$ トシ、地球ヨリノ距離ヲ九千六百萬哩トスレバ太陽ノ中心ヲ地球ノ中心ノ所ニ置キタルトキ其體ハ月ヲ超エテ廣ガルコト約二十萬哩ナリ。之ヲ證セヨ。但地球ヨリ月マデノ距離ヲ二十四萬哩トス。

(6) 敵港ヲ封鎖セル軍艦アリ。港ノ南方四海里ノ處ニ在リテ敵船ノ該港ヨリ出テ $S.60^{\circ}E.$ ノ方向ニ逃走スルヲ見タリ。今毎時十八海里ノ速サヲ以テ半時間ノ後敵船ノ航路ニ達センニハ何レノ方向ニ進航スベキカ。

(7) 塔ノ頂上ニ立テル長サ a 尺ノ旗竿ヲ、塔基ト同水平面中ノ一點ヨリ觀測セシニ塔ト等角 α ヲ張ルコトヲ知レリト云フ。塔ノ高サ如何。

(8) 太陽ノ高度 α ナルトキ同方位ナル雲ノ高度ヲ測リテ β ヲ得、又觀測點ヨリ雲影マデノ距離 d 尺ヲ得タリ。雲ノ高サヲ求メヨ。

(9) 或人正午ニ輕氣球ヲ 30° ノ高度ニ於テ南方ニ見、其影ニ至ル距離一哩ニシテ太陽ノ高度 45° ナルヲ知レリ。此輕氣球ハ午前十一時ニ南東微南ニ在リテ午後一時ニハ南西微西ニ在リ。然ラバ輕氣球ヲ等速等高ニ進行スト假定シ其毎時ノ速度及方向ヲ求メヨ。

(10) 圓ニ内接スル四邊形 ABCD ニ於テ角 $\angle CAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta$, $\angle ABD = \gamma$ トセバ

$$CD = \frac{AB \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

(11) 或人塔ノ高サヲ知ラント欲シ、其北方ナル一點ニ於テ塔頂ノ仰角 α ヲ得、次ニ此點ノ東方 d ナル距離ノ點ニ於テ仰角 β ヲ得タリ。然ラバ塔ノ高サハ次ノ如シ、之ヲ證セヨ。

$$\frac{d \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{\{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)\}}}$$

(12) 平原上ニアル列座セル三點 A, B, C ヨリ
輕氣球ノ高度ヲ同時ニ測リテ α, β, γ ヲ得タリ。
 $AB = a, CA = b, BC = c$ ナルトキ球ノ高サハ

$$\sqrt{\frac{abc}{a \cot^2 \gamma + c \cot^2 \alpha - b \cot^2 \beta}}$$

ナリ。之ヲ證セヨ。

(13) 小丘ノ麓ニ樓閣アリ、其脚ヨリ百尺ヲ上
リ其頭脚ノ距角ヲ測リテ 54° ヲ得タリ、而シテ坂
路ノ傾斜ハ 9° ナリト云フ。樓閣ノ高サ如何。

(14) 地平面上ニ立テル塔ノ脚ヨリ a 尺ヲ退
キテ其仰角ヲ測リ、更ニ b 尺ヲ退キテ再仰角ヲ測
リテ前ノ角ノ三分ノ一ニ等シキ角ヲ得タリ。然
ラバ塔ノ高サハ $(a+b)\sqrt{(b-2a)/(3b+2a)}$ 尺ナリ。
之ヲ證セヨ。

(15) 直立セル一塔アリ、其底ヲ通ズル水平面
上ノ一點ニテ其頂ヲ見レバ仰角 $32^\circ 27'$ ナリ。此
點ヨリ塔ニ向テ同平面上尙 100 尺ヲ進ミタル點
ニテ頂ヲ見レバ仰角 45° ナリ、此平面上塔ノ高サ
幾尺ナルカ。 [大豫]

(16) 人アリ B 點ヨリ或山ノ頂點 C ヲ測リシ
ニ $27^\circ 18'$ ヲ得タリ。又同ジ水平面上 500 間後方
ナル A 點ヨリ之ヲ測リシニ $16^\circ 10'$ ヲ得タリト云
フ。依テ山ノ高サヲ求ム、但 A, B, C ハ同一ノ平面
内ニアリ。 [長崎高商]

(17) A, B, C ヲ三ツノ物體トシ $BC = 1716$ 尺、
 $CA = 924$ 尺、 $AB = 1056$ 尺ナリトス。或人平面 ABC
上ノ一點 D ヨリ此三ツノ物體ヲ觀測セシニ C ヲ
A ノ前面ニ見又角 $CDB = 14^\circ 24'$ ヲ得タリ。CD ヲ
求メヨ。

(18) 半徑 R ノ圓ニ内接スル n 邊ノ正多角形
ノ周圍ハ $2nR \sin \frac{\pi}{n}$ ニシテ其面積ハ $\frac{n}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ ナリ。

(19) 半徑 R ノ圓ニ外接スル n 邊ノ正多角形
ノ周圍ハ $2nR \tan \frac{\pi}{n}$ ニシテ其面積ハ $nR^2 \tan \frac{\pi}{n}$ ナリ。

(20) 周圍ト邊數トヲ以テ正多角形ノ面積ヲ
表セ。

(21) 等周ナル正三角形ト正方形ト正六角形
トハ其面積ノ比殆 10 ト 13 ト 15 トノ如シ。

次ノ各式ヲ對數計算ニ適スル形ニ化セヨ。

(22) $\sin 80^\circ + \sin 40^\circ$. [海兵]

(23) $m \cos a + n \sin a$. (24) $a^2 + b^2$.

第七集 弧度法

次ノ恒等式ヲ證セヨ。

(1) $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$.

(2) $\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$.

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$.

(4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta$.

(5) $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$.

(6) $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$.

(7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos \theta$.

(8) $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta$.

(9) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \theta\right) = \pm \sin \theta$.

(10) $\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos \theta$.

(11) $\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$.

(12) $\sin\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right\} = \cos \theta$.

(13) $\tan\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right\} = \mp \cot \theta$.

(14) $\tan(\theta - \pi) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \tan(\pi - \theta)$
 $+ \cot\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) + \tan(\pi + \theta) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = 0$.

(15) $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

$\sin\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\cos\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

(16) $\sin \theta + \cos \theta = \pm \sqrt{1 + \sin 2\theta}$,
 $\sin \theta - \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin 2\theta}$.

上ノ公式ニ於テ θ ガ $\frac{\pi}{4}$ ト $\frac{3\pi}{4}$ トノ間ニ在ル

トキハ複號ノ中何レヲ取ルベキカ。

第八集 三角方程式

次ノ方程式ヲ解キテ x ノ最小正值ヲ求メヨ

(1)–(17).

(1) $\tan x + \cot x = 4.$

(2) $\cot x \sec 2x - \cos x \operatorname{cosec} x = 1.$

(3) $\sin x + \operatorname{cosec} x = 2.$

(4) $\cot^2 x - \tan^2 x = 2 \sec x \operatorname{cosec} x.$

(5) $3 \cos^2 x - \sin^2 x + (\sqrt{3} + 1)(1 - 2 \cos x) = 0.$

(6) $\tan x + \cot x = \frac{4}{3} \sqrt{3}.$

(7) $\frac{\tan x}{\cos 2x} + \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x} = 1.$

(8) $\cot 2x + 2 \tan 2x$
 $= 4 \sec 2x \operatorname{cosec} 2x \tan^2 2x - \tan^3 2x.$

(9) $\sin 4x = \cos 5x.$

(10) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$

(11) $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 3. \quad \text{〔海機〕}$

(12) $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x.$

(13) $\cos x - \sin x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x.$

(14) $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{3}{2 \cos 2x}.$

(15) $5 \sin x = \cos 2x + 2. \quad \text{〔大阪高工〕}$

(16) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad \text{〔陸士〕}$

(17) $\cos x + \cos 7x = 3 \cos 4x.$

次ノ方程式ヲ解キ θ ノ一般ノ値ヲ弧度ニテ
 求メヨ (18)–(37).

(18) $\sin \theta + \cos 2\theta = 1.$

(19) $\tan 4\theta = \tan \theta.$

(20) $\sin 9\theta + \sin 5\theta + 2 \sin^2 \theta = 1.$

(21) $\sin 5\theta \cos 3\theta = \sin 9\theta \cos 7\theta.$

(22) $\cos(a+c)\theta \cos(b+c)\theta = \cos a\theta \cos b\theta.$

(23) $\sin 7\theta - \sin \theta = \sin 3\theta.$

(24) $\cos 8\theta + \cos 4\theta = 2 \cos 2\theta.$

(25) $\cos 7\theta + \cos \theta = 3 \cos 4\theta.$

(26) $2 \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta = 2. \quad \text{〔海兵, 海機〕}$

(27) $\sin^2 \theta + \cos 2\theta = \cos \theta. \quad \text{〔海兵〕}$

(28) $\sin 5\theta - \cos 3\theta = \sin \theta.$

(29) $\sin 4\theta = \sin \theta.$

(30) $\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin \theta.$

$$(31) \quad \tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}.$$

$$(32) \quad \sin 3\theta = 2 \sin 2\theta - \sin \theta.$$

$$(33) \quad \sin \theta + \cos \theta = 1.$$

$$(34) \quad \sin^2 \theta + \sin \theta = \cos^2 \theta + \cos \theta.$$

$$(35) \quad \cos 2\theta - \cos 4\theta = \sin \theta. \quad \text{〔海兵〕}$$

$$(36) \quad \sqrt{3} \tan^2 \theta - (\sqrt{3} + 1) \tan \theta + 1 = 0.$$

$$(37) \quad \cos 2\theta = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1. \quad \text{〔大豫〕}$$

(38) 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$x + y = 90^\circ, \quad \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{〔東京高工〕}$$

次ノ方程式ヨリ x ヲ求メヨ (39)–(45), 但對數ヲ用フベシ。

$$(39) \quad \left(\frac{10}{3}\right)^{x+2} = 9^{2x-1}.$$

$$(40) \quad 8^x \times 125^{3-x} = 2^{4x+3} \times 5^x. \quad (41) \quad 2^x = \sin 65^\circ.$$

$$(42) \quad x^2 = 135^2 + 318^2. \quad (43) \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 0.8.$$

$$(44) \quad x^3 = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{3}}{\tan 2\gamma},$$

$$\text{但 } \alpha = 253^\circ 32', \quad \beta = 373^\circ 36', \quad \gamma = 104^\circ 43'.$$

$$(45) \quad \tan 2x = \frac{a \sin \beta - b \sin \alpha}{a \sin \beta + b \sin \alpha},$$

$$\text{但 } 0^\circ < x < 180^\circ, \quad a = 5792, \quad b = 4564,$$

$$\alpha = 51^\circ 16'5, \quad \beta = 63^\circ 32'8.$$

第九集 反圓函數

次ノ各式ヲ證明セヨ。

$$(1) \quad \sin^{-1} a = \cos^{-1} \sqrt{1-a^2}$$

$$= \tan^{-1} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{a}.$$

$$(2) \quad \cos^{-1} a = \sin^{-1} \sqrt{1-a^2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

$$(3) \quad \tan^{-1} a = \sin^{-1} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$(4) \quad \sin^{-1} a + \sin^{-1} b = \sin^{-1} (a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}).$$

$$(5) \quad \tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right).$$

$$(6) \quad \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(7) \quad 2 \tan^{-1} a = \sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} \quad \text{〔陸士〕}$$

附 錄 三
希 臘 文 字

GREEK ALPHABET
WITH
PRONUNCIATIONS.

A α Alpha	N ν Nu
B β Beta	Ξ ξ Xi
Γ γ Gamma	Ο ο Omicron
Δ δ Delta	Π π Pi
E ε Epsilon	Ρ ρ Rho
Z ζ Zeta	Σ σ, ς Sigma
H η Eta	T τ Tau
Θ θ Theta	Υ υ Upsilon
I ι Iota	Φ φ Phi
K κ Kappa	X χ Chi (like ki)
Λ λ Lambda	Ψ ψ Psi
M μ Mu	Ω ω Omega

答

[容易ナルモノハ之ヲ略ス]

問題一. (1) $33^{\circ} 45'$. (2) $23^{\circ} 16' 30''$. (3) $\frac{7637}{16200}$.

問題二. (10) $\tan A = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} A = \sqrt{6} + \sqrt{2}$,
 $\sin A = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, 等.

問題四. (1) 18° . (2) $30^{\circ}, 0^{\circ}$.
(3) $30^{\circ}, 60^{\circ}$. (4) $45^{\circ}, 30^{\circ}$. (5) $x = 52^{\circ} 30'$,
 $y = 7^{\circ} 30'$. (6) $x = 6^{\circ}, y = 10^{\circ}$. (7) 30° 及 60° .
(8) $a \pm \sqrt{a^2 - 1}$. $\tan \theta$ が實數ナル爲ニハ $a \geq 1$
ナルヲ要ス.

問題五. (1) 0.3854. (2) 0.9353.
(3) 0.7929. (4) 1.2167. (5) $29^{\circ} 25' \cdot 2$.
(6) $53^{\circ} 11' \cdot 1$. (7) $69^{\circ} 16' \cdot 1$. (8) $61^{\circ} 4' \cdot 7$.

問題六. (1) $A = 18^{\circ} 40'$, $c = 527 \cdot 7$.

(2) $A = 62^{\circ} 52' \cdot 3$, $B = 27^{\circ} 7' \cdot 6$, $b = 182 \cdot 4$.

(3) $B = 27^\circ 25'$, $b = 207.8$, $c = 451.2$.

(4) $B = 71^\circ 36'$, $a = 315.6$, $b = 948.8$.

問題七. (1) 6町17間3尺. (2) $6\sqrt{3}$ 尺, 6尺.

(3) $80\sqrt{3}$ 尺. (4) 37.32尺.

(8) 129.9間, 259.8間 (9) 1584.9米.

(10) 川幅 240.2尺, $AC = 303.4$ 尺.

問題八. (10) $m^2 + n^2 = p^2 + q^2$.

(11) $(m^2 - n^2)^2 = 16mn$. (12) $a^2 + b^2 = 1$.

問題九. (3) $\sin(A+B) = \frac{204}{325}$, $\cos(A-B) = \frac{323}{325}$.

及 $\sin(A+B) = \pm \frac{204}{325}$, $\pm \frac{36}{325}$.

$\cos(A-B) = \frac{323}{325}$, $-\frac{253}{325}$.

(4) $A+B = 90^\circ$. (27) 90° .

(28) $\sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, $\cos 36^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$, 等.

(29) $\frac{9}{16}$, $\frac{115}{128}$. (30) $\frac{7}{25}$.

(31) $3(\sqrt{3}+1)$ 即 8.196間.

問題十. (5) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 即 $\frac{\sqrt{6}}{2}$. (16) $\tan 3\theta$

(22) $4 \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta$. (23) $-\frac{1}{2}$.

問題十一. (1) 0. (2) 0.75. (3) 5. (4) $\frac{7}{3}$.

(5) $\frac{1}{2}(2 \log_m a + 3 \log_m b - 4 \log_m c)$.

問題十二. (1) 12. (2) $(3 \log 2 + 2 \log 3) / (3 \log 3 + 2 \log 2 - 2)$. (3) 3.25527. (4) 3.75258.

(5) 1.64782. (6) 2.57403. (7) 1.75767.

(8) 1.76144. (9) 1.93753, 0.84948.

(10) 0.15052, 1.93753, 0.93753.

(11) 14. (12) 0.47329. (13) $x = 138.128$.

問題十三. (14) $A = 120^\circ$. (15) 141.42 尺.

問題十四. (1) $A = 60^\circ 10'$, $b = 10.67$, $c = 10.51$.

(2) $C = 54^\circ 20'$, $b = 331.68$, $c = 392.66$.

(3) $A = 67^\circ 28'.9$, $B = 57^\circ 19'.1$, $c = 18.41$.

(4) $B = 49^\circ 44'.9$, $C = 90^\circ 2'.1$, $c = 119.31$.

或 $B = 130^\circ 15'.1$, $C = 9^\circ 34'.9$, $c = 19.77$.

(5) $A = 35^\circ 17' 8$, $B = 76^\circ 18' 9$.

(6) a, b, p を用ヒテ角 ABC を求メ, 次ニ b, c, q を用ヒテ角 DBC を求メ 其差角 ABD ト a ト q トヲ用ヒテ x を算出ス。

問題十五. (1) 208.37 尺. (2) $140(3 - \sqrt{3})$ 尺.

(3) $h \sin(\beta - \alpha) / \cos \alpha \sin \beta$. (4) $18\sqrt{2}$ 海里.

(5) 距離 = $10\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ 海里. 甲ハ乙ノ東北東.

(6) $\frac{h(a^2 + h^2)}{a^2 - h^2}$ 尺. (7) 89.44 哩. (12) 212.17 尺.

問題十六. (1) $\frac{47\pi}{360}$. (2) $\frac{\pi}{16}$.

(3) 210° . (4) $\frac{n-2}{n}\pi$. (5) 2162 哩.

(6) 92 678 844 哩.

問題十七. (1) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$. (2) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.

(3) $2n\pi$ 及 $(2n+1)\pi$, 之ヲ一式ニ纏ムレバ $m\pi$.

(4) $n\pi$. (5) $2n\pi \pm \frac{5}{6}\pi$.

(6) $3^\circ, 69^\circ, 75^\circ, 141^\circ, 147^\circ$. (7) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

(8) $n\pi + \frac{\pi}{4}$. (9) $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

(10) $\theta = 3^\circ, 21^\circ, 39^\circ, 57^\circ, 75^\circ$.

問題十八. (1) $\frac{1}{3}(2n\pi \pm \frac{\pi}{3})$. (2) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

或ハ $(2n+1)\frac{\pi}{4}$. (3) $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ 或ハ $n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

(4) $\frac{n\pi}{4}$ 或ハ $\frac{2n\pi}{5} \pm \frac{\pi}{15}$. (5) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$.

(6) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. (7) $n\pi + \frac{\pi}{4}$.

(8) $n\pi$ 或ハ $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$. (9) $n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

(10) $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

補 習 雜 題 答

第二集. (1) $\pm \frac{2mn}{m^2 - n^2}$. (2) $\pm \frac{m}{n}$.

(3) $A = 35^\circ, b = 196.6$. (4) $a = 932.7, b = 1492.6$.

(5) $b = 715.7, c = 884.7$ (6) $A = 42^\circ, c = 336.4$.

第三集. (10) $(m-n)\sin\theta$. (11) 1.

(12) $2b^2$ (13) 0. (14) 8.

(15) $-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(16) $-\sqrt{3}, 1, -1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}$.

(17) $\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, \sqrt{2},$

(18) 2.

第四集 (95) $\frac{4}{5}$ (99) $b/(c-a)$.

(102) $x^2 + y^2 = 2a^2$.

(104) $\frac{1}{2}\sqrt{[2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}]}$.

(106) $-\tan a, \cot a$.

第五集 (73) 20/21.

(74) $\sqrt{39}$ 尺, $\frac{35}{4}\sqrt{3}$ 平方尺.

(75) 2795.4. (76) 1519.

(77) $a=660.6, b=519.2$.

(78) $A=86^\circ 23' 2, B=30^\circ 1' 3, c=671.27$.

(79) $A=34^\circ 51' 15, B=77^\circ 28' 85$.

(80) $A=21^\circ 17', C=132^\circ 13'$.

(81) $B=56^\circ 7', C=86^\circ 35'$.

或 $B=123^\circ 53', C=18^\circ 49'$.

(82) $A=26^\circ 15', C=116^\circ 27'$.

(83) $B=90^\circ, C=60^\circ, c=6\sqrt{3}$. (84) 不能.

(85) $A=106^\circ 46' 7, B=46^\circ 53' 2$.

(86) $A=77^\circ 24' 2, B=45^\circ 2' 3$.

(87) $A=25^\circ 12', B=48^\circ 11'$. (88) $\frac{3}{11}, \frac{1}{5}$.

第六集 (1) 7050.66 坪. (2) 94 尺.

(3) 4000 哩. (4) 1626 里.

(6) S. $82^\circ 38' 3$ E. (7) $a \cos 2a$.

(8) $d \sin a \sin \beta \operatorname{cosec}(a \sim \beta)$ 尺.

(9) $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$ 哩, 西北西.

(13) $25(\sqrt{10} + \sqrt{2})$ 尺. (15) 174.6 尺.

(16) 330.7 間. (17) 2109.8 尺.

(22) $\sqrt{3} \cos 20^\circ$. (23) $\sin \varphi = m / (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}}$ トセバ
題式 $= (m^2 + n^2)^{\frac{1}{2}} \sin(a + \varphi)$.

(24) $\tan \varphi = a/b$ トセバ 題式 $= a^2 \sec^2 \varphi$.

第八集 (1) 15° (2) $22^\circ 30'$. (3) 90° .

(4) $22^\circ 30'$. (5) 30° . (6) 30° .

(7) $22^\circ 30'$. (8) 15° . (9) 10° .

(10) 45° . (11) 30° . (12) 45° .

(13) 15° . (14) 15° . (15) 30° .

(16) 45° (17) $22^\circ 30'$.

$$(18) \theta = n\pi \text{ 或 } \wedge n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}. \quad (19) 4\theta = \theta + n\pi.$$

$$(20) 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \wedge 7\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

$$(21) 8\theta = n\pi \text{ 或 } \wedge 8\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$(22) (a+b+2c)\theta = 2n\pi \pm (a+b)\theta.$$

$$(23) 3\theta = n\pi \text{ 或 } \wedge 4\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$(24) 2\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \wedge 6\theta = 2n\pi.$$

$$(25) 4\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

$$(26) \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \wedge n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$(27) \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \wedge 2n\pi.$$

$$(28) 3\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \wedge 2\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

$$(29) 4\theta = n\pi + (-1)^n \theta.$$

$$(30) \theta = n\pi \text{ 或 } \wedge 4\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

$$(31) \theta = (3n+1)\frac{\pi}{6}. \quad (32) \theta = \frac{n\pi}{2}.$$

$$(33) \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$(34) \theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \wedge \theta - \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}.$$

$$(35) \theta = n\pi \text{ 或 } \wedge n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

$$(36) \theta = n\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \wedge \theta = n\pi + \frac{\pi}{6}.$$

$$(37) \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \wedge \theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}.$$

$$(38) x = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4}, y = 90^\circ - \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

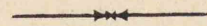
$$(39) x = 1.44341. \quad (40) x = 1.06.$$

$$(41) x = -0.14191. \quad (42) x = \pm 345.48.$$

$$(43) 2x = 39^\circ 13' 9. \quad (44) x = -1.0536.$$

$$(45) x = 5^\circ 15' 8. \left[\tan(45^\circ - 2x) = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} \right].$$

附 表



- I. 數ノ對數表
- II. 三角函數ノ眞數表
- III. 三角函數ノ對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424	
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 654
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 244	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 6									

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
100	00	000	043	087	130	173	217	260	303	346	389	44 43 42
101		432	475	518	561	604	647	689	732	775	817	1 4.4 4.3 4.2
102		860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242	2 8.8 8.6 8.4
103	01	284	326	368	410	452	494	536	578	620	662	3 13.2 12.9 12.6
104		703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078	4 17.6 17.2 16.8
105	02	119	160	202	243	284	325	366	407	449	490	5 22.0 21.5 21.0
106		531	572	612	653	694	735	776	816	857	898	6 26.4 25.8 25.2
107		938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302	7 30.8 30.1 29.4
108	03	342	383	423	463	503	543	583	623	663	703	8 35.2 34.4 33.6
109		743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100	9 39.6 38.7 37.8
110	04	139	179	218	258	297	336	376	415	454	493	41 40 39
111		532	571	610	650	689	727	766	805	844	883	1 4.1 4.0 3.9
112		922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269	2 8.2 8.0 7.8
113	05	308	346	385	423	461	500	538	576	614	652	3 12.3 12.0 11.7
114		690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032	4 16.4 16.0 15.6
115	06	070	108	145	183	221	258	296	333	371	408	5 20.5 20.0 19.5
116		446	483	521	558	595	633	670	707	744	781	6 24.6 24.0 23.4
117		819	856	893	930	967	*004	*041	*078	*115	*151	7 28.7 28.0 27.3
118	07	188	225	262	298	335	372	408	445	482	518	8 32.8 32.0 31.2
119		555	591	628	664	700	737	773	809	846	882	9 36.9 36.0 35.1
120		918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243	38 37 36
121	08	279	314	350	386	422	458	493	529	565	600	1 3.8 3.7 3.6
122		636	672	707	743	778	814	849	884	920	955	2 7.6 7.4 7.2
123		991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307	3 11.4 11.1 10.8
124	09	342	377	412	447	482	517	552	587	621	656	4 15.2 14.8 14.4
125		691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003	5 19.0 18.5 18.0
126	10	037	072	106	140	175	209	243	278	312	346	6 22.8 22.2 21.6
127		380	415	449	483	517	551	585	619	653	687	7 26.6 25.9 25.2
128		721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025	8 30.4 29.6 28.8
129	11	059	093	126	160	193	227	261	294	327	361	9 34.2 33.3 32.4
130		394	428	461	494	528	561	594	628	661	694	35 34 33
131		727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024	1 3.5 3.4 3.3
132	12	057	090	123	156	189	222	254	287	320	352	2 7.0 6.8 6.6
133		385	418	450	483	516	548	581	613	646	678	3 10.5 10.2 9.9
134		710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001	4 14.0 13.6 13.2
135	13	033	066	098	130	162	194	226	258	290	322	5 17.5 17.0 16.5
136		354	386	418	450	481	513	545	577	609	640	6 21.0 20.4 19.8
137		672	704	735	767	799	830	862	893	925	956	7 24.5 23.8 23.1
138		988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270	8 28.0 27.2 26.4
139	14	301	333	364	395	426	457	489	520	551	582	9 31.5 30.6 29.7
140		613	644	675	706	737	768	799	829	860	891	32 31 30
141		922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198	1 3.2 3.1 3.0
142	15	229	259	290	320	351	381	412	442	473	503	2 6.4 6.2 6.0
143		534	564	594	625	655	685	715	746	776	806	3 9.6 9.3 9.0
144		836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107	4 12.8 12.4 12.0
145	16	137	167	197	227	256	286	316	346	376	406	5 16.0 15.5 15.0
146		435	465	495	524	554	584	613	643	673	702	6 19.2 18.6 18.0
147		732	761	791	820	850	879	909	938	967	997	7 22.4 21.7 21.0
148	17	026	056	085	114	143	173	202	231	260	289	8 25.6 24.8 24.0
149		319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	9 28.8 27.9 27.0
150		609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	比例部分	
150	17	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869	29 28
151		898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156	1 2.9 2.8
152	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441	2 5.8 5.6
153		469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	3 8.7 8.4
154		752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005	4 11.6 11.2
155	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285	5 14.5 14.0
156		312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	6 17.4 16.8
157		590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	7 20.3 19.6
158		866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112	8 23.2 22.4
159	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385	9 26.1 25.2
160		412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	27 26
161		683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	1 2.7 2.6
162		952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192	2 5.4 5.2
163	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458	3 8.1 7.8
164		484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	4 10.8 10.4
165		748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	5 13.5 13.0
166	22	011	037	063	089	115	141	167	193	220	246	6 16.2 15.6
167		272	298	324	350	376	401	427	453	479	505	7 18.9 18.2
168		531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	8 21.6 20.8
169		789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019	9 24.3 23.4
170	23	045	070	096	121	147	172	198	223	249	274	25
171		300	325	350	376	401	426	452	477	502	528	1 2.5
172		553	578	603	629	654	679	704	729	754	779	2 5.0
173		805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030	3 7.5
174	24	055	080	105	130	155	180	204	229	254	279	4 10.0
175		304	329	353	378	403	428	452	477	502	527	5 12.5
176		551	576	601	625	650	674	699	724	748	773	6 15.0
177		797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018	7 17.5
178	25	042	066	091	115	139	164	188	212	237	261	8 20.0
179		285	310	334	358	382	406	431	455	479	503	9 22.5
180		527	551	575	600	624	648	672	696	720	744	24 23
181		768	792	816	840	864	888	912	935	959	983	1 2.4 2.3
182	26	007	031	055	079	102	126	150	174	198	221	2 4.8 4.6
183		245	269	293	316	340	364	387	411	435	458	3 7.2 6.9
184		482	505	529	553	576	600	623	647	670	694	4 9.6 9.2
185		717	741	764	788	811	834	858	881	905	928	5 12.0 11.5
186		951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161	6 14.4 13.8
187	27	184	207	231	254	277	300	323	346	370	393	7 16.8 16.1
188		416	439	462	485	508	531	554	577	600	623	8 19.2 18.4
189		646	669	692	715	738	761	784	807	830	852	9 21.6 20.7
190		875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081	22 21
191	28											

三角函數ノ眞數表

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °
0 0	0.0000	0.0000	∞	1.0000	090
10	0.0029	0.0029	343.7737	1.000050	
20	0.0058	0.0058	171.8854	1.000040	
30	0.0087	0.0087	114.5887	1.000030	
40	0.0116	0.0116	85.9398	0.999920	
50	0.0145	0.0145	68.7501	0.999910	
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	089

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °	° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °
1 0	0.0175	0.0175	57.2900	0.9998	089	7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	083
10	0.0204	0.0204	49.1039	0.9998	50	10	0.1248	0.1257	7.9530	0.9922	50
20	0.0233	0.0233	42.9641	0.9997	40	20	0.1276	0.1287	7.7704	0.9918	40
30	0.0262	0.0262	38.1885	0.9997	30	30	0.1305	0.1317	7.5958	0.9914	30
40	0.0291	0.0291	34.3678	0.9996	20	40	0.1334	0.1346	7.4287	0.9911	20
50	0.0320	0.0320	31.2416	0.9995	10	50	0.1363	0.1376	7.2687	0.9907	10
2 0	0.0349	0.0349	28.6363	0.9994	088	8 0	0.1392	0.1405	7.1154	0.9903	082
10	0.0378	0.0378	26.4316	0.9993	50	10	0.1421	0.1435	6.9682	0.9899	50
20	0.0407	0.0407	24.5418	0.9992	40	20	0.1449	0.1465	6.8269	0.9894	40
30	0.0436	0.0437	22.9038	0.9990	30	30	0.1478	0.1495	6.6912	0.9890	30
40	0.0465	0.0466	21.4704	0.9989	20	40	0.1507	0.1524	6.5606	0.9886	20
50	0.0494	0.0495	20.2056	0.9988	10	50	0.1536	0.1554	6.4348	0.9881	10
3 0	0.0523	0.0524	19.0811	0.9986	087	9 0	0.1564	0.1584	6.3138	0.9877	081
10	0.0552	0.0553	18.0750	0.9985	50	10	0.1593	0.1614	6.1970	0.9872	50
20	0.0581	0.0582	17.1693	0.9983	40	20	0.1622	0.1644	6.0844	0.9868	40
30	0.0610	0.0612	16.3499	0.9981	30	30	0.1650	0.1673	5.9758	0.9863	30
40	0.0640	0.0641	15.6048	0.9980	20	40	0.1679	0.1703	5.8708	0.9858	20
50	0.0669	0.0670	14.9244	0.9978	10	50	0.1708	0.1733	5.7694	0.9853	10
4 0	0.0698	0.0699	14.3007	0.9976	086	10 0	0.1736	0.1763	5.6713	0.9848	080
10	0.0727	0.0729	13.7267	0.9974	50	10	0.1765	0.1793	5.5764	0.9843	50
20	0.0756	0.0758	13.1969	0.9971	40	20	0.1794	0.1823	5.4845	0.9838	40
30	0.0785	0.0787	12.7062	0.9969	30	30	0.1822	0.1853	5.3955	0.9833	30
40	0.0814	0.0816	12.2505	0.9967	20	40	0.1851	0.1883	5.3093	0.9827	20
50	0.0843	0.0846	11.8262	0.9964	10	50	0.1880	0.1914	5.2257	0.9822	10
5 0	0.0872	0.0875	11.4301	0.9962	085	11 0	0.1908	0.1944	5.1446	0.9816	079
10	0.0901	0.0904	11.0594	0.9959	50	10	0.1937	0.1974	5.0658	0.9811	50
20	0.0929	0.0934	10.7119	0.9957	40	20	0.1965	0.2004	4.9894	0.9805	40
30	0.0958	0.0963	10.3854	0.9954	30	30	0.1994	0.2035	4.9152	0.9799	30
40	0.0987	0.0992	10.0780	0.9951	20	40	0.2022	0.2065	4.8430	0.9793	20
50	0.1016	0.1022	9.7882	0.9948	10	50	0.2051	0.2095	4.7729	0.9787	10
6 0	0.1045	0.1051	9.5144	0.9945	084	12 0	0.2079	0.2126	4.7046	0.9781	078
10	0.1074	0.1080	9.2553	0.9942	50	10	0.2108	0.2156	4.6382	0.9775	50
20	0.1103	0.1110	9.0098	0.9939	40	20	0.2136	0.2186	4.5736	0.9769	40
30	0.1132	0.1139	8.7769	0.9936	30	30	0.2164	0.2217	4.5107	0.9763	30
40	0.1161	0.1169	8.5555	0.9932	20	40	0.2193	0.2247	4.4494	0.9757	20
50	0.1190	0.1198	8.3450	0.9929	10	50	0.2221	0.2278	4.3897	0.9750	10
7 0	0.1219	0.1228	8.1443	0.9925	083	13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	077

° /	cos.	cot.	tan.	sin.	' °	° /	cos.	cot.	tan.	sin.	' °
-----	------	------	------	------	-----	-----	------	------	------	------	-----

三角函數ノ眞數表

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °	° /	sin.	tan.	cot.	cos.	' °
13 0	0.2250	0.2309	4.3315	0.9744	077	21 0	0.3584	0.3839	2.6051	0.9336	069
10	0.2278	0.2339	4.2747	0.9737	50	10	0.3611	0.3872	2.5826	0.9325	50
20	0.2306	0.2370	4.2193	0.9730	40	20	0.3638	0.3906	2.5605	0.9315	40
30	0.2334	0.2401	4.1653	0.9724	30	30	0.3665	0.3939	2.5386	0.9304	30
40	0.2363	0.2432	4.1126	0.9717	20	40	0.3692	0.3973	2.5172	0.9293	20
50	0.2391	0.2462	4.0611	0.9710	10	50	0.3719	0.4006	2.4960	0.9283	10
14 0	0.2419	0.2493	4.0108	0.9703	076	22 0	0.3746	0.4040	2.4751	0.9272	068
10	0.2447	0.2524	3.9617	0.9696	50	10	0.3773	0.4074	2.4545	0.9261	50
20	0.2476	0.2555	3.9136	0.9689	40	20	0.3800	0.4108	2.4342	0.9250	40
30	0.2504	0.2586	3.8667	0.9681	30	30	0.3827	0.4142	2.4142	0.9239	30
40	0.2532	0.2617	3.8208	0.9674	20	40	0.3854	0.4176	2.3945	0.9228	20
50	0.2560	0.2648	3.7760	0.9667	10	50	0.3881	0.4210	2.3750	0.9216	10
15 0	0.2588	0.2679	3.7321	0.9659	075	23 0	0.3907	0.4245	2.3559	0.9205	067
10	0.2616	0.2711	3.6891	0.9652	50	10	0.3934	0.4279	2.3369	0.9194	50
20	0.2644	0.2742	3.6470	0.9644	40	20	0.3961	0.4314	2.3183	0.9182	40
30	0.2672	0.2773	3.6059	0.9636	30	30	0.3987	0.4348	2.2998	0.9171	30
40	0.2700	0.2805	3.5656	0.9628	20	40	0.4014	0.4383	2.2817	0.9159	20
50	0.2728	0.2836	3.5261	0.9621	10	50	0.4041	0.4417	2.2637	0.9147	10
16 0	0.2756	0.2867	3.4874	0.9613	074	24 0	0.4067	0.4452	2.2460	0.9135	066
10	0.2784	0.2899	3.4495	0.9605	50	10	0.4094	0.4487	2.2286	0.9124	50
20	0.2812	0.2931	3.4124	0.9596	40	20	0.4120	0.4522	2.2113	0.9112	40
30	0.2840	0.2962	3.3759	0.9588	30	30	0.4147	0.4557	2.1943	0.9100	30
40	0.2868	0.2994	3.3402	0.9580	20	40	0.4173	0.4592	2.1775	0.9088	20
50	0.2896	0.3026	3.3052	0.9572	10	50	0.4200	0.4628	2.1609	0.9075	10
17 0	0.2924	0.3057	3.2709	0.9563	073	25 0	0.4226	0.4663	2.1445	0.9063	065
10	0.2952	0.3089	3.2371	0.9555	50	10	0.4253	0.4699	2.1283	0.9051	50
20	0.2979	0.3121	3.2041	0.9546	40	20	0.4279	0.4734	2.1123	0.9038	40
30	0.3007	0.3153	3.1716	0.9537	30	30	0.4305	0.4770	2.0965	0.9026	30
40	0.3035	0.3185	3.1397	0.9528	20	40	0.4331	0.4806	2.0809	0.9013	20
50	0.3062	0.3217	3.1084	0.9520	10	50	0.4358	0.4841	2.0655	0.9001	10
18 0	0.3090	0.3249	3.0777	0.9511	072	26 0	0.4384	0.4877	2.0503	0.8988	064
10	0.3118	0.3281	3.0475	0.9502	50	10	0.4410	0.4913	2.0353	0.8975	50
20	0.3145	0.3314	3.0178	0.9492	40	20	0.4436	0.4950	2.0204	0.8962	40
30	0.3173	0.3346	2.9887	0.9483	30	30	0.4462	0.4986	2.0057	0.8949	30
40	0.3201	0.3378	2.9600	0.9474	20	40	0.4488	0.5022	1.9912	0.8936	20
50	0.3228	0.3411	2.9319	0.9465	10	50	0.4514	0.5059	1.9768	0.8923	10
19 0	0.3256	0.3443	2.9042	0.9455	071	27 0	0.4540	0.5095	1.9626	0.8910	063
10	0.3283	0.3476	2.8770	0.9446	50	10	0.4566	0.5132	1.9486	0.8897	50
20	0.3311	0.3508	2.8502	0.9436	40	20	0.4592	0.5169	1.9347	0.8884	40
30	0.3338	0.3541	2.8239	0.9426	30	30	0.4617	0.5206	1.9210	0.8870	30
40	0.3365	0.3574	2.7980	0.9417	20	40	0.4643	0.5243	1.9074	0.8857	20
50	0.3393	0.3607	2.7725	0.9407	10	50	0.4669	0.5280	1.8940	0.8843	10
20 0	0.3420	0.3640	2.7475	0.9397	070	28 0	0.4695	0.5317	1.8807	0.8829	062
10	0.3448	0.3673	2.7228	0.9387	50	10	0.4720	0.5354	1.8676	0.8816	50
20	0.3475	0.3706	2.6985	0.9377	40	20	0.4746	0.5392	1.8546	0.8802	40
30											

° /	sin.	tan.	cot.	cos.	° /	° /	sin.	tan.	cot.	cos.	° /
29 0	0.4848	0.5543	1.8040	0.8746	061	37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	053
10	0.4874	0.5581	1.7917	0.8732	50	10	0.6041	0.7581	1.3190	0.7969	50
20	0.4899	0.5619	1.7796	0.8718	40	20	0.6065	0.7627	1.3111	0.7951	40
30	0.4924	0.5658	1.7675	0.8704	30	30	0.6088	0.7673	1.3032	0.7934	30
40	0.4950	0.5696	1.7556	0.8689	20	40	0.6111	0.7720	1.2954	0.7916	20
50	0.4975	0.5735	1.7437	0.8675	10	50	0.6134	0.7766	1.2876	0.7898	10
30 0	0.5000	0.5774	1.7321	0.8660	060	38 0	0.6157	0.7813	1.2799	0.7880	052
10	0.5025	0.5812	1.7205	0.8646	50	10	0.6180	0.7860	1.2723	0.7862	50
20	0.5050	0.5851	1.7090	0.8631	40	20	0.6202	0.7907	1.2647	0.7844	40
30	0.5075	0.5890	1.6977	0.8616	30	30	0.6225	0.7954	1.2572	0.7826	30
40	0.5100	0.5930	1.6864	0.8601	20	40	0.6248	0.8002	1.2497	0.7808	20
50	0.5125	0.5969	1.6753	0.8587	10	50	0.6271	0.8050	1.2423	0.7790	10
31 0	0.5150	0.6009	1.6643	0.8572	059	39 0	0.6293	0.8098	1.2349	0.7771	051
10	0.5175	0.6048	1.6534	0.8557	50	10	0.6316	0.8146	1.2276	0.7753	50
20	0.5200	0.6088	1.6426	0.8542	40	20	0.6338	0.8195	1.2203	0.7735	40
30	0.5225	0.6128	1.6319	0.8526	30	30	0.6361	0.8243	1.2131	0.7716	30
40	0.5250	0.6168	1.6212	0.8511	20	40	0.6383	0.8292	1.2059	0.7698	20
50	0.5275	0.6208	1.6107	0.8496	10	50	0.6406	0.8342	1.1988	0.7679	10
32 0	0.5299	0.6249	1.6003	0.8480	058	40 0	0.6428	0.8391	1.1918	0.7660	050
10	0.5324	0.6289	1.5900	0.8465	50	10	0.6450	0.8441	1.1847	0.7642	50
20	0.5348	0.6330	1.5798	0.8450	40	20	0.6472	0.8491	1.1778	0.7623	40
30	0.5373	0.6371	1.5697	0.8434	30	30	0.6494	0.8541	1.1708	0.7604	30
40	0.5398	0.6412	1.5597	0.8418	20	40	0.6517	0.8591	1.1640	0.7585	20
50	0.5422	0.6453	1.5497	0.8403	10	50	0.6539	0.8642	1.1571	0.7566	10
33 0	0.5446	0.6494	1.5399	0.8387	057	41 0	0.6561	0.8693	1.1504	0.7547	049
10	0.5471	0.6536	1.5301	0.8371	50	10	0.6583	0.8744	1.1436	0.7528	50
20	0.5495	0.6577	1.5204	0.8355	40	20	0.6604	0.8796	1.1369	0.7509	40
30	0.5519	0.6619	1.5108	0.8339	30	30	0.6626	0.8847	1.1303	0.7490	30
40	0.5544	0.6661	1.5013	0.8323	20	40	0.6648	0.8899	1.1237	0.7470	20
50	0.5568	0.6703	1.4919	0.8307	10	50	0.6670	0.8952	1.1171	0.7451	10
34 0	0.5592	0.6745	1.4826	0.8290	056	42 0	0.6691	0.9004	1.1106	0.7431	048
10	0.5616	0.6787	1.4733	0.8274	50	10	0.6713	0.9057	1.1041	0.7412	50
20	0.5640	0.6830	1.4641	0.8258	40	20	0.6734	0.9110	1.0977	0.7392	40
30	0.5664	0.6873	1.4550	0.8241	30	30	0.6756	0.9163	1.0913	0.7373	30
40	0.5688	0.6916	1.4460	0.8225	20	40	0.6777	0.9217	1.0850	0.7353	20
50	0.5712	0.6959	1.4370	0.8208	10	50	0.6799	0.9271	1.0786	0.7333	10
35 0	0.5736	0.7002	1.4281	0.8192	055	43 0	0.6820	0.9325	1.0724	0.7314	047
10	0.5760	0.7046	1.4193	0.8175	50	10	0.6841	0.9380	1.0661	0.7294	50
20	0.5783	0.7089	1.4106	0.8158	40	20	0.6862	0.9435	1.0599	0.7274	40
30	0.5807	0.7133	1.4019	0.8141	30	30	0.6884	0.9490	1.0538	0.7254	30
40	0.5831	0.7177	1.3934	0.8124	20	40	0.6905	0.9545	1.0477	0.7234	20
50	0.5854	0.7221	1.3848	0.8107	10	50	0.6926	0.9601	1.0416	0.7214	10
36 0	0.5878	0.7265	1.3764	0.8090	054	44 0	0.6947	0.9657	1.0355	0.7193	046
10	0.5901	0.7310	1.3680	0.8073	50	10	0.6967	0.9713	1.0295	0.7173	50
20	0.5925	0.7355	1.3597	0.8056	40	20	0.6988	0.9770	1.0235	0.7153	40
30	0.5948	0.7400	1.3514	0.8039	30	30	0.7009	0.9827	1.0176	0.7133	30
40	0.5972	0.7445	1.3432	0.8021	20	40	0.7030	0.9884	1.0117	0.7112	20
50	0.5995	0.7490	1.3351	0.8004	10	50	0.7050	0.9942	1.0058	0.7092	10
37 0	0.6018	0.7536	1.3270	0.7986	053	45 0	0.7071	1.0000	1.0000	0.7071	045
° /	cos.	cot.	tan.	sin.	° /	° /	cos.	cot.	tan.	sin.	° /

° /	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	° /
0 0	—	—	—	—	—	10.00000	—	0 90
10	7.46373	30102	7.46373	30103	12.53627	10.00000	0	50
20	7.76475	17609	7.76476	17610	12.23524	9.99999	1	40
30	7.94084	12494	7.94086	12495	12.05914	9.99998	1	30
40	8.06578	9690	8.06581	9692	11.93419	9.99997	1	20
50	8.16268	6693	8.16273	6692	11.83727	9.99995	2	10
1 0	8.24186	7918	8.24192	7919	11.75808	9.99993	2	0 89
10	8.30879	5799	8.30888	5801	11.69112	9.99991	2	50
20	8.36678	5114	8.36689	5118	11.63311	9.99988	3	40
30	8.41792	4574	8.41807	4578	11.58193	9.99985	3	30
40	8.46366	4138	8.46385	4142	11.53615	9.99982	3	20
50	8.50504	3778	8.50527	3781	11.49473	9.99978	4	10
2 0	8.54282	3475	8.54308	3480	11.45692	9.99974	4	0 88
10	8.57757	3216	8.57788	3221	11.42212	9.99969	5	50
20	8.60973	2995	8.61009	3000	11.38991	9.99964	5	40
30	8.63968	2801	8.64009	2807	11.35991	9.99959	5	30
40	8.66769	2631	8.66816	2637	11.33184	9.99953	6	20
50	8.69400	2480	8.69453	2487	11.30547	9.99947	6	10
3 0	8.71880	2346	8.71940	2352	11.28060	9.99940	7	0 87
10	8.74226	2225	8.74292	2233	11.25708	9.99934	6	50
20	8.76451	2117	8.76525	2124	11.23475	9.99926	6	40
30	8.78568	2017	8.78649	2025	11.21351	9.99919	7	30
40	8.80585	1928	8.80674	1936	11.19326	9.99911	8	20
50	8.82513	1845	8.82610	1854	11.17300	9.99903	8	10
4 0	8.84358	1770	8.84464	1779	11.15336	9.99894	9	0 86
10	8.86128	1701	8.86243	1710	11.13757	9.99885	9	50
20	8.87829	1635	8.87953	1645	11.12047	9.99876	9	40
30	8.89464	1576	8.89598	1587	11.10402	9.99866	10	30
40	8.91040	1521	8.91185	1531	11.08815	9.99856	10	20
50	8.92561	1469	8.92716	1479	11.07284	9.99845	11	10
5 0	8.94030	1420	8.94195	1432	11.05805	9.99834	11	0 85
10	8.95450	1375	8.95627	1386	11.04373	9.99823	11	50
20	8.96825	1332	8.97013	1345	11.02987	9.99812	11	40
30	8.98157	1293	8.98358	1304	11.01642	9.99800	12	30
40	8.99450	1254	8.99662	1268	11.00338	9.99787	13	20
50	9.00704	1219	9.00930	1232	10.99070	9.99775	12	10
6 0	9.01923	1186	9.02162	1199	10.97838	9.99761	14	0 84
10	9.03109	1153	9.03361	1167	10.96639	9.99748	13	50
20	9.04262	1124	9.04528	1138	10.95472	9.99734	14	40
30	9.05386	1095	9.05666	1109	10.94334	9.99720	14	30
40	9.06481	1067	9.06775	1083	10.93225	9.99705	15	20
50	9.07548	1041	9.07858	1056	10.92142	9.99690	15	10
7 0	9.08589	1017	9.08914	1033	10.91086	9.99675	15	0 83
10	9.09606	993	9.09947	1009	10.90053	9.99659	16	50
20	9.10599	971	9.10956	987	10.89044	9.99643	16	40
30	9.11570	949	9.11943	966	10.88057	9.99627	16	30
40	9.12519	928	9.12909	945	10.87091	9.99610	17	20
50	9.13447	909	9.13854	926	10.86146	9.99593	17	10
8 0	9.14356	890	9.14780	909	10.85220	9.99575	18	0 82
° /	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	° /

° /	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	' °
8 0	9. 14 356		9. 14 780		10. 85 220	9. 99 575		0 82
10	9. 15 245	889	9. 15 688	908	10. 84 312	9. 99 557	18	50
20	9. 16 116	871	9. 16 577	889	10. 83 423	9. 99 539	18	40
30	9. 16 970	854	9. 17 450	873	10. 82 550	9. 99 520	19	30
40	9. 17 807	837	9. 18 306	856	10. 81 694	9. 99 501	19	20
50	9. 18 628	821	9. 19 146	840	10. 80 854	9. 99 482	19	10
9 0	9. 19 433	805	9. 19 971	825	10. 80 029	9. 99 462	20	0 81
10	9. 20 223	790	9. 20 782	811	10. 79 218	9. 99 442	20	50
20	9. 20 999	776	9. 21 578	796	10. 78 422	9. 99 421	21	40
30	9. 21 761	762	9. 22 361	783	10. 77 639	9. 99 400	21	30
40	9. 22 509	748	9. 23 130	769	10. 76 870	9. 99 379	21	20
50	9. 23 244	735	9. 23 887	757	10. 76 113	9. 99 357	22	10
10 0	9. 23 967	723	9. 24 632	745	10. 75 368	9. 99 335	22	0 80
10	9. 24 677	710	9. 25 365	733	10. 74 635	9. 99 313	22	50
20	9. 25 376	699	9. 26 086	721	10. 73 914	9. 99 290	23	40
30	9. 26 063	687	9. 26 797	711	10. 73 203	9. 99 267	23	30
40	9. 26 739	676	9. 27 496	699	10. 72 504	9. 99 243	24	20
50	9. 27 405	666	9. 28 186	690	10. 71 814	9. 99 219	24	10
11 0	9. 28 060	655	9. 28 865	679	10. 71 135	9. 99 195	25	0 79
10	9. 28 705	645	9. 29 535	670	10. 70 465	9. 99 170	25	50
20	9. 29 340	635	9. 30 195	660	10. 69 805	9. 99 145	26	40
30	9. 29 966	626	9. 30 846	651	10. 69 154	9. 99 119	26	30
40	9. 30 582	616	9. 31 489	643	10. 68 511	9. 99 093	26	20
50	9. 31 189	607	9. 32 122	633	10. 67 878	9. 99 067	27	10
12 0	9. 31 788	599	9. 32 747	625	10. 67 253	9. 99 040	27	0 78
10	9. 32 378	590	9. 33 365	618	10. 66 635	9. 99 013	27	50
20	9. 32 960	582	9. 33 974	609	10. 66 026	9. 98 986	28	40
30	9. 33 534	574	9. 34 576	602	10. 65 424	9. 98 958	28	30
40	9. 34 100	566	9. 35 170	594	10. 64 830	9. 98 930	29	20
50	9. 34 658	558	9. 35 757	587	10. 64 243	9. 98 901	29	10
13 0	9. 35 209	551	9. 36 336	579	10. 63 664	9. 98 872	29	0 77
10	9. 35 752	543	9. 36 909	573	10. 63 091	9. 98 843	30	50
20	9. 36 289	537	9. 37 476	567	10. 62 524	9. 98 813	30	40
30	9. 36 819	530	9. 38 035	559	10. 61 965	9. 98 783	30	30
40	9. 37 341	522	9. 38 589	554	10. 61 411	9. 98 753	31	20
50	9. 37 858	517	9. 39 136	547	10. 60 864	9. 98 722	31	10
14 0	9. 38 368	510	9. 39 677	541	10. 60 323	9. 98 690	32	0 76
10	9. 38 871	503	9. 40 212	535	10. 59 788	9. 98 659	32	50
20	9. 39 369	498	9. 40 742	530	10. 59 258	9. 98 627	33	40
30	9. 39 860	491	9. 41 266	524	10. 58 734	9. 98 594	33	30
40	9. 40 346	486	9. 41 784	518	10. 58 216	9. 98 561	33	20
50	9. 40 825	479	9. 42 297	513	10. 57 703	9. 98 528	33	10
15 0	9. 41 300	475	9. 42 805	508	10. 57 195	9. 98 494	34	0 75
10	9. 41 768	468	9. 43 308	503	10. 56 692	9. 98 460	34	50
20	9. 42 232	464	9. 43 806	498	10. 56 194	9. 98 426	34	40
30	9. 42 690	458	9. 44 299	493	10. 55 701	9. 98 391	35	30
40	9. 43 143	453	9. 44 787	488	10. 55 213	9. 98 356	35	20
50	9. 43 591	448	9. 45 271	484	10. 54 729	9. 98 320	36	10
16 0	9. 44 034	443	9. 45 750	479	10. 54 250	9. 98 284	36	0 74
° /	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	' °

° /	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	' °
16 0	9. 44 034		9. 45 750		10. 54 250	9. 98 284		0 74
10	9. 44 472	438	9. 46 224	474	10. 53 776	9. 98 248	36	50
20	9. 44 905	433	9. 46 694	470	10. 53 306	9. 98 211	37	40
30	9. 45 334	429	9. 47 160	466	10. 52 840	9. 98 174	37	30
40	9. 45 758	424	9. 47 622	462	10. 52 378	9. 98 136	38	20
50	9. 46 178	420	9. 48 080	458	10. 51 920	9. 98 098	38	10
17 0	9. 46 594	416	9. 48 534	454	10. 51 466	9. 98 060	38	0 73
10	9. 47 005	411	9. 48 984	450	10. 51 016	9. 98 021	39	50
20	9. 47 411	406	9. 49 430	446	10. 50 570	9. 97 982	39	40
30	9. 47 814	403	9. 49 872	442	10. 50 128	9. 97 942	40	30
40	9. 48 213	399	9. 50 311	439	10. 49 689	9. 97 902	40	20
50	9. 48 607	394	9. 50 746	435	10. 49 254	9. 97 861	41	10
18 0	9. 48 998	391	9. 51 178	432	10. 48 822	9. 97 821	40	0 72
10	9. 49 385	387	9. 51 606	428	10. 48 394	9. 97 779	42	50
20	9. 49 768	383	9. 52 031	425	10. 47 969	9. 97 738	41	40
30	9. 50 148	380	9. 52 452	421	10. 47 548	9. 97 696	42	30
40	9. 50 523	375	9. 52 870	418	10. 47 130	9. 97 653	43	20
50	9. 50 896	373	9. 53 285	415	10. 46 715	9. 97 610	43	10
19 0	9. 51 264	368	9. 53 697	412	10. 46 303	9. 97 567	43	0 71
10	9. 51 629	365	9. 54 106	409	10. 45 894	9. 97 523	44	50
20	9. 51 991	362	9. 54 512	406	10. 45 488	9. 97 479	44	40
30	9. 52 350	359	9. 54 915	403	10. 45 085	9. 97 435	44	30
40	9. 52 705	355	9. 55 315	400	10. 44 685	9. 97 390	45	20
50	9. 53 056	351	9. 55 712	397	10. 44 288	9. 97 344	46	10
20 0	9. 53 405	349	9. 56 107	395	10. 43 893	9. 97 299	45	0 70
10	9. 53 751	346	9. 56 498	391	10. 43 502	9. 97 252	47	50
20	9. 54 093	342	9. 56 887	389	10. 43 113	9. 97 206	46	40
30	9. 54 433	340	9. 57 274	387	10. 42 726	9. 97 159	47	30
40	9. 54 769	336	9. 57 658	384	10. 42 342	9. 97 111	48	20
50	9. 55 102	333	9. 58 039	381	10. 41 961	9. 97 063	48	10
21 0	9. 55 433	331	9. 58 418	379	10. 41 582	9. 97 015	49	0 69
10	9. 55 761	328	9. 58 794	376	10. 41 206	9. 96 966	49	50
20	9. 56 085	324	9. 59 168	374	10. 40 832	9. 96 917	49	40
30	9. 56 408	323	9. 59 540	372	10. 40 460	9. 96 868	49	30
40	9. 56 727	319	9. 59 909	369	10. 40 091	9. 96 818	50	20
50	9. 57 044	317	9. 60 276	367	10. 39 724	9. 96 767	51	10
22 0	9. 57 358	314	9. 60 641	365	10. 39 359	9. 96 717	50	0 68
10	9. 57 669	311	9. 61 004	363	10. 38 996	9. 96 665	52	50
20	9. 57 978	309	9. 61 364	360	10. 38 636	9. 96 614	51	40
30	9. 58 284	306	9. 61 722	358	10. 38 278	9. 96 562	52	30
40	9. 58 588	304	9. 62 079	357	10. 37 921	9. 96 509	53	20
50	9. 58 889	301	9. 62 433	354	10. 37 567	9. 96 456	53	10
23 0	9. 59 188	299	9. 62 785	352	10. 37 215	9. 96 403	53	0 67
10	9. 59 484	296	9. 63 135	350	10. 36 865	9. 96 349	54	50
20	9. 59 778	294	9. 63 484	349	10. 36 516	9. 96 294	55	40
30	9. 60 070	292	9. 63 830	346	10. 36 170	9. 96 240	54	30
40	9. 60 359	289	9. 64 175	345	10. 35 825	9. 96 185	55	20
50	9. 60 646	287	9. 64 517	342	10. 35 483	9. 96 129	56	10
24 0	9. 60 931	285	9. 64 858	341	10. 35 142	9. 96 073	56	0 66
° /	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	' °

° /	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	' °
24 0	9.60931		9.64858		10.35142	9.96073		0 66
10	9.61214	283	9.65197	339	10.34803	9.96017	56	50
20	9.61494	280	9.65535	338	10.34465	9.95960	57	40
30	9.61773	279	9.65870	335	10.34130	9.95902	58	30
40	9.62049	276	9.66204	334	10.33796	9.95844	58	20
50	9.62323	274	9.66537	333	10.33463	9.95786	58	10
25 0	9.62595	272	9.66867	330	10.33133	9.95728	58	0 65
10	9.62865	270	9.67196	329	10.32804	9.95668	60	50
20	9.63133	268	9.67524	328	10.32476	9.95609	59	40
30	9.63398	265	9.67850	326	10.32150	9.95549	60	30
40	9.63662	264	9.68174	324	10.31826	9.95488	61	20
50	9.63924	262	9.68497	323	10.31503	9.95427	61	10
26 0	9.64184	260	9.68818	321	10.31182	9.95366	61	0 64
10	9.64442	258	9.69138	320	10.30862	9.95304	62	50
20	9.64698	256	9.69457	319	10.30543	9.95242	62	40
30	9.64953	255	9.69774	317	10.30226	9.95179	63	30
40	9.65205	252	9.70089	315	10.29911	9.95116	63	20
50	9.65456	251	9.70404	315	10.29596	9.95052	64	10
27 0	9.65705	249	9.70717	313	10.29283	9.94988	64	0 63
10	9.65952	247	9.71028	311	10.28972	9.94923	65	50
20	9.66197	245	9.71339	311	10.28661	9.94858	65	40
30	9.66441	244	9.71648	309	10.28352	9.94793	65	30
40	9.66682	241	9.71955	307	10.28045	9.94727	66	20
50	9.66922	240	9.72262	307	10.27738	9.94660	67	10
28 0	9.67161	239	9.72567	305	10.27433	9.94593	67	0 62
10	9.67398	237	9.72872	305	10.27128	9.94526	67	50
20	9.67633	235	9.73175	303	10.26825	9.94458	68	40
30	9.67866	233	9.73476	301	10.26524	9.94390	68	30
40	9.68098	232	9.73777	301	10.26223	9.94321	69	20
50	9.68328	230	9.74077	300	10.25923	9.94252	69	10
29 0	9.68557	229	9.74375	298	10.25625	9.94182	70	0 61
10	9.68784	227	9.74673	298	10.25327	9.94112	70	50
20	9.69010	226	9.74969	296	10.25031	9.94041	71	40
30	9.69234	224	9.75264	295	10.24736	9.93970	71	30
40	9.69456	222	9.75558	294	10.24442	9.93898	72	20
50	9.69677	221	9.75852	294	10.24148	9.93826	72	10
30 0	9.69897	220	9.76144	292	10.23856	9.93753	73	0 60
10	9.70115	218	9.76435	291	10.23565	9.93680	73	50
20	9.70332	217	9.76725	290	10.23275	9.93606	74	40
30	9.70547	215	9.77015	290	10.22985	9.93532	74	30
40	9.70761	214	9.77303	288	10.22697	9.93457	75	20
50	9.70973	212	9.77591	288	10.22409	9.93382	75	10
31 0	9.71184	211	9.77877	286	10.22123	9.93307	75	0 59
10	9.71393	209	9.78163	286	10.21837	9.93230	77	50
20	9.71602	209	9.78448	285	10.21552	9.93154	76	40
30	9.71809	207	9.78732	284	10.21268	9.93077	77	30
40	9.72014	205	9.79015	283	10.20985	9.92999	78	20
50	9.72218	204	9.79297	282	10.20703	9.92921	78	10
32 0	9.72421	203	9.79579	282	10.20421	9.92842	79	0 58
° /	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	' °

° /	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	' °
32 0	9.72421		9.79579		10.20421	9.92842		0 58
10	9.72622	201	9.79860	281	10.20140	9.92763	79	50
20	9.72823	201	9.80140	280	10.19860	9.92683	80	40
30	9.73022	199	9.80419	279	10.19581	9.92603	80	30
40	9.73219	197	9.80697	278	10.19303	9.92522	81	20
50	9.73416	197	9.80975	278	10.19025	9.92441	81	10
33 0	9.73611	195	9.81252	277	10.18748	9.92359	82	0 57
10	9.73805	194	9.81528	276	10.18472	9.92277	82	50
20	9.73997	192	9.81803	275	10.18197	9.92194	83	40
30	9.74189	192	9.82078	275	10.17922	9.92111	83	30
40	9.74379	190	9.82352	274	10.17648	9.92027	84	20
50	9.74568	189	9.82626	274	10.17374	9.91942	85	10
34 0	9.74756	188	9.82899	273	10.17101	9.91857	85	0 56
10	9.74943	187	9.83171	272	10.16829	9.91772	85	50
20	9.75128	185	9.83442	271	10.16558	9.91686	86	40
30	9.75313	185	9.83713	271	10.16287	9.91599	87	30
40	9.75496	183	9.83984	271	10.16016	9.91512	87	20
50	9.75678	182	9.84254	270	10.15746	9.91425	87	10
35 0	9.75859	181	9.84523	269	10.15477	9.91336	88	0 55
10	9.76039	180	9.84791	268	10.15209	9.91248	89	50
20	9.76218	179	9.85059	268	10.14941	9.91158	90	40
30	9.76395	177	9.85327	268	10.14673	9.91069	89	30
40	9.76572	177	9.85594	267	10.14406	9.90978	91	20
50	9.76747	175	9.85860	266	10.14140	9.90887	91	10
36 0	9.76922	175	9.86126	266	10.13874	9.90796	91	0 54
10	9.77095	173	9.86392	266	10.13608	9.90704	92	50
20	9.77268	173	9.86656	264	10.13344	9.90611	93	40
30	9.77439	171	9.86921	265	10.13079	9.90518	93	30
40	9.77609	170	9.87185	264	10.12815	9.90424	94	20
50	9.77778	169	9.87448	263	10.12552	9.90330	94	10
37 0	9.77946	168	9.87711	263	10.12289	9.90235	95	0 53
10	9.78113	167	9.87974	263	10.12026	9.90139	96	50
20	9.78280	167	9.88236	262	10.11764	9.90043	96	40
30	9.78445	165	9.88498	262	10.11502	9.89947	96	30
40	9.78609	164	9.88759	261	10.11241	9.89849	98	20
50	9.78772	163	9.89020	261	10.10980	9.89752	97	10
38 0	9.78934	162	9.89281	261	10.10719	9.89653	99	0 52
10	9.79095	161	9.89541	260	10.10459	9.89554	99	50
20	9.79256	159	9.89801	260	10.10199	9.89455	99	40
30	9.79415	158	9.90061	259	10.09939	9.89354	101	30
40	9.79573	158	9.90320	259	10.09680	9.89254	100	20
50	9.79731	156	9.90578	258	10.09422	9.89152	102	10
39 0	9.79887	156	9.90837	259	10.09163	9.89050	102	0 51
10	9.80043	154	9.91095	258	10.08905	9.88948	102	50
20	9.80197	154	9.91353	257	10.08647	9.88844	104	40
30	9.80351	153	9.91610	258	10.08390	9.88741	103	30
40	9.80504	152	9.91868	257	10.08132	9.88636	105	20
50	9.80656	151	9.92125	256	10.07875	9.88531	105	10
40 0	9.80807	151	9.92381	256	10.07619	9.88425	106	0 50
° /	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	' °

° /	L. sin.	差	L. tan.	通差	L. cot.	L. cos.	差	' °
40 0	9. 80 807		9. 92 381		10. 07 619	9. 88 425		0 50
10	9. 80 957	150	9. 92 638	257	10. 07 362	9. 88 319	106	50
20	9. 81 106	149	9. 92 894	256	10. 07 106	9. 88 212	107	40
30	9. 81 254	148	9. 93 150	256	10. 06 850	9. 88 105	107	30
40	9. 81 402	148	9. 93 406	256	10. 06 594	9. 87 996	109	20
50	9. 81 549	147	9. 93 661	255	10. 06 339	9. 87 887	109	10
41 0	9. 81 694	145	9. 93 916	255	10. 06 084	9. 87 778	109	0 49
10	9. 81 839	145	9. 94 171	255	10. 05 829	9. 87 668	110	50
20	9. 81 983	144	9. 94 426	255	10. 05 574	9. 87 557	111	40
30	9. 82 126	143	9. 94 681	255	10. 05 319	9. 87 446	111	30
40	9. 82 269	143	9. 94 935	254	10. 05 065	9. 87 334	112	20
50	9. 82 410	141	9. 95 190	255	10. 04 810	9. 87 221	113	10
42 0	9. 82 551	141	9. 95 444	254	10. 04 556	9. 87 107	114	0 48
10	9. 82 691	140	9. 95 698	254	10. 04 302	9. 86 993	114	50
20	9. 82 830	139	9. 95 952	254	10. 04 048	9. 86 879	114	40
30	9. 82 968	138	9. 96 205	253	10. 03 795	9. 86 763	116	30
40	9. 83 106	138	9. 96 459	254	10. 03 541	9. 86 647	116	20
50	9. 83 242	136	9. 96 712	253	10. 03 288	9. 86 530	117	10
43 0	9. 83 378	136	9. 96 966	254	10. 03 034	9. 86 413	117	0 47
10	9. 83 513	135	9. 97 219	253	10. 02 781	9. 86 295	118	50
20	9. 83 648	135	9. 97 472	253	10. 02 528	9. 86 176	119	40
30	9. 83 781	133	9. 97 725	253	10. 02 275	9. 86 056	120	30
40	9. 83 914	133	9. 97 978	253	10. 02 022	9. 85 936	120	20
50	9. 84 046	132	9. 98 231	253	10. 01 769	9. 85 815	121	10
44 0	9. 84 177	131	9. 98 484	253	10. 01 516	9. 85 693	122	0 46
10	9. 84 308	131	9. 98 737	253	10. 01 263	9. 85 571	122	50
20	9. 84 437	129	9. 98 989	252	10. 01 011	9. 85 448	123	40
30	9. 84 566	129	9. 99 242	253	10. 00 758	9. 85 324	124	30
40	9. 84 694	128	9. 99 495	253	10. 00 505	9. 85 200	124	20
50	9. 84 822	128	9. 99 747	252	10. 00 253	9. 85 074	126	10
45 0	9. 84 949	127	10. 00 000	253	10. 00 000	9. 84 949	125	0 45
° /	L. cos.	差	L. cot.	通差	L. tan.	L. sin.	差	' °



明治廿六年十月廿九日印
 明治廿六年一月五日訂正再版發行
 明治廿六年十月二十日修正三版發行
 明治四十年十二月十五日訂正四版印刷
 明治四十年十二月二十日訂正四版發行

編纂者 發行所 發行所 印刷者 發賣者 發行者

林 鶴 一
 東京市小石川區小日向水道町七十三番地
 西 野 虎 吉
 大阪市東區北久寶寺町四丁目百六番邸
 三 木 佐 助
 東京市京橋區築地三丁目十一番地
 野 村 宗 十 郎
 東京市小石川區小日向水道町七十三番地
 東 京 開 成 館
 【振替貯金口座】東京第五參貳貳番
 大阪市心齋橋通北久寶寺町角
 大 阪 開 成 館
 【振替貯金口座】大阪第七九番

新平面三角法教科書
 定價金五拾五錢

新 撰
統 合 數 學 教 科 書

東京高等師範學校教授 理學士 林 鶴一 編纂

新 撰 算 術 教 科 書

東京高等師範學校教授 理學士 林 鶴一 編纂

新 撰 代 數 學 教 科 書

東京高等師範學校教授 理學士 林 鶴一 編纂

新 撰 幾 何 學 教 科 書

東京高等師範學校教授 理學士 林 鶴一 編纂

新 撰 平 面 三 角 法 教 科 書

〔分本〕

上卷定價六拾錢
下卷定價五拾錢
定價九拾錢

〔合本〕

〔分本〕

上卷定價六拾錢
下卷定價六拾錢
定價壹圓

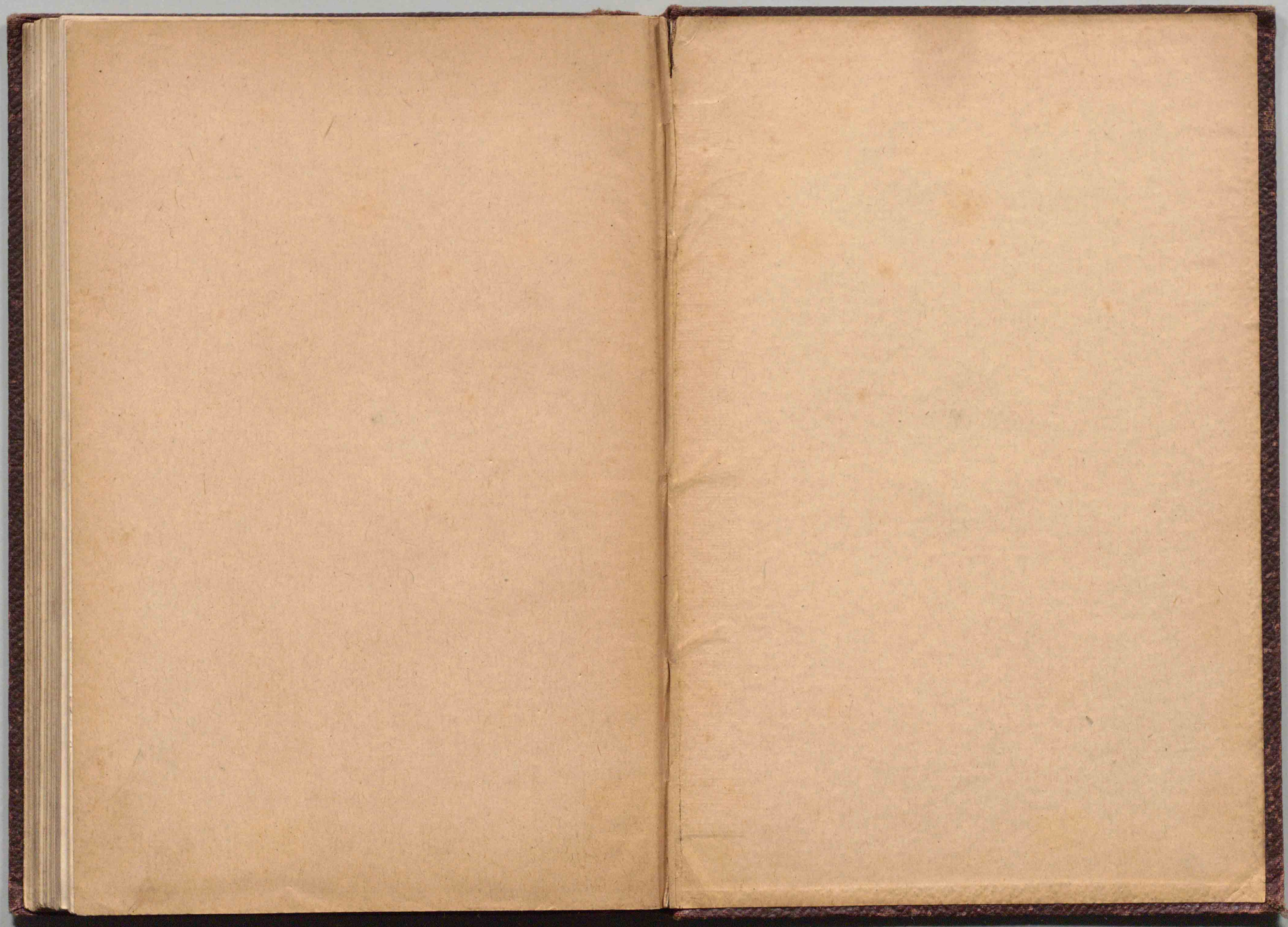
〔合本〕

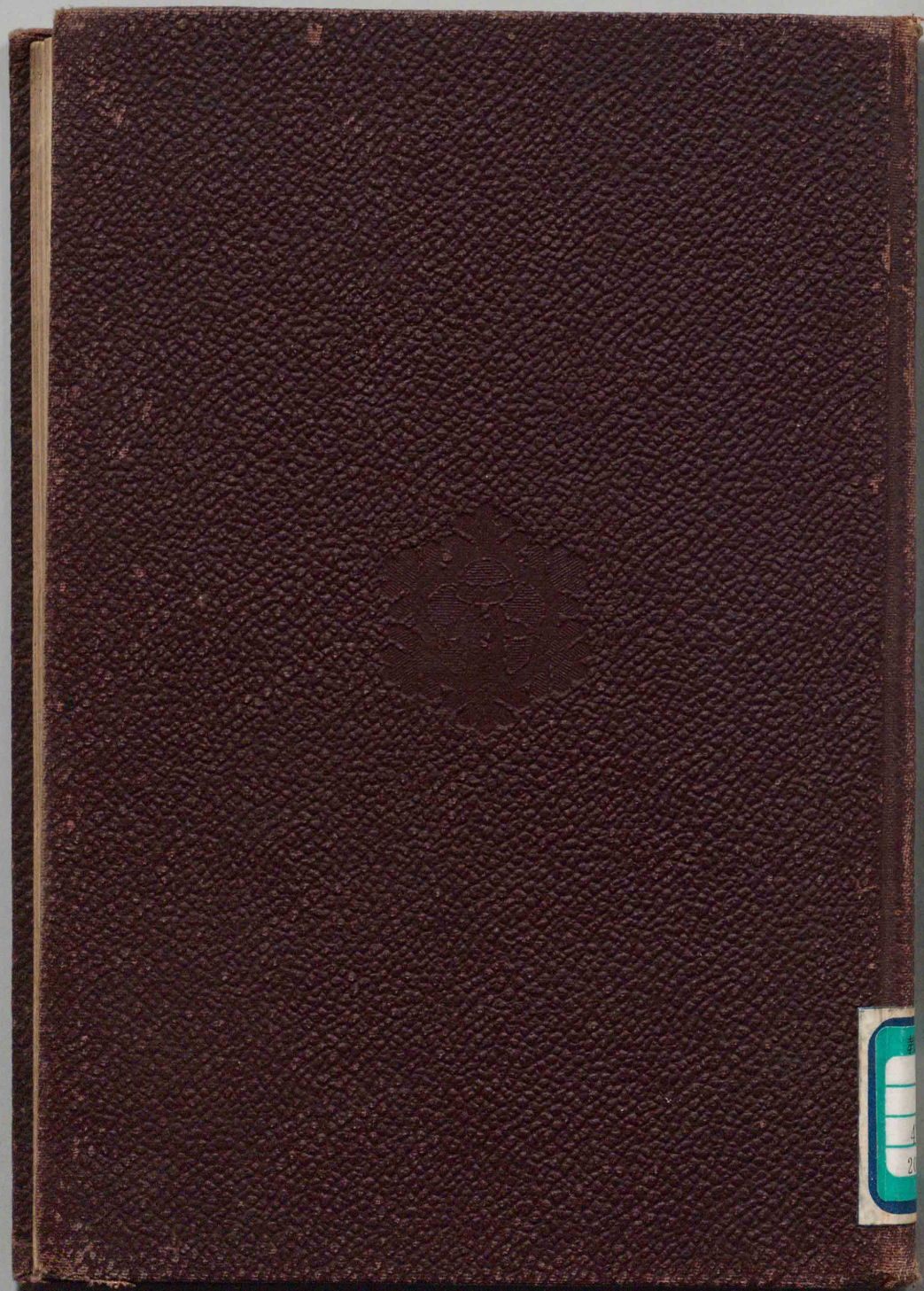
全二冊

平面定價七拾錢
立體定價五拾錢

全一冊

定價五拾五錢





Small white label with a blue border, containing illegible text.