明治三十二年二月十五日
文部省檢定濟
尋常中學校數學科用教科書

初等 代數學 教科書

上卷

東京帝國大學理科大學教授　理學博士

藤澤利喜太郎

編纂

第一版

東京　明治三十一年

大日本圖書株式會社

緒　言

本書ハ余ガ明治二十二年ヨリ同二十五年ニ至ル三年間自ラ初等代數學ノ授業ヲ擔當セル當時立案セル舊稿ヲ骨子トシ算術ニ連續スル様ニ編纂セルモノナリ

負數分數ニ係ル計算ノ意義法則ハ全ク規約ヨリ出ヅルモノナルヿ數學者多年ノ研究ニヨリテ既ニ確定シ疑ヲ挾ムノ餘地アルヿナシ,負數分數ヲ說クニ苟安姑息ノ說明ヲ以テシ,却テ初學者ヲシテ無益ノ困難ヲ感セシメ叉代數學初步ト代數學トノ聯絡ヲ全ク中斷スルノ不可ナルハ事新ラシク述ブルマデモナシ,故ニ余ハ本書ニ於テ負數分數ニ係ル計算ノ意義法則ハ總テ負數分數ヲ正ノ整數ト全ク同ジ様ニ取扱フベシトイフ規約ヨリ出ヅルモノナリト斷言セリ,斯ク規約シテ後ニ矛楯撞着スルトコロナキハ即**形式不易ノ大原則**ノ存在スルトコロナリ而シテ本書ニ於テハ唯ニ規約ヲ明言スルニ止メテ形式不易ノ大原則ヲ說カザルモノハ言ノ長キニ失シ初學者ノ倦厭ヲ來タサンヿヲ慮リタレバナリ

明治三十年十月東京ニ於テ　　　編者識ス

初等代數學教科書上卷

目次

第一編　緒論

1. 算術ハ數字ヲ以テ表ハスヿヲ得ベキ格段ナル數ニ就キ計算ノ方法ヲ講ズルモノナルニ對シ，**代數學**ニ於テハ一般ニ任意ノ數ニ就キ相互ノ關係及計算ノ方法ヲ講究スルモノトス，次ニ例ヲ以テ此言ノ意味ヲ説明スベシ

問題　12 ヲ二ツノ部分ニ分チ一部分ガ他ノ部分ノ二倍ニナル樣ニセヨ

答ハ 8 ト 4 トニシテ，8 ト 4 トノ和ハ 12 又 8 ハ 4 ノ二倍ナリ，爰ニ 12 トイヒ又二倍ノ 2 トイヒ何レモ數字ヲ以テ表ハサレタル數ニシテ此問題ハ算術的ノ問題ナリ，今 12 及二倍ノ 2 ニ換フルニ任意ノ數ヲ以テスル𪜈ハ此問題ハ算術ノ範圍ヲ脱シテ代數的ノモノトナル，此塲合ニ於テ問題ハ次ノ如クニ言ヒ表ハサルベシ

問題　任意ノ與ヘラレタル數ヲ二ツノ部分ニ分チ一部分ノ他ノ部分ニ對スル比ガ任意ノ與ヘラレタル比ニ等シクナル樣ニセヨ

此問題ノ中ニハ前ノ問題ノ含マルルヿ明カナリ,前ノ問題ヲ解クニハ數字ヲ以テ表ハサレタル數ニ就キ普通算術上ノ計算ヲ實行スレバ可ナリ而シテ答トシテハ矢張リ數字ヲ以テ表ハサレタル數ヲ得ルニ過ギズ,之ニ對シ後ノ問題ノ解ハ,如何ニシテ之ヲ得ルカハ暫ク措キ,總テ前ノ問題ト同種類ノ問題ヲ解ク一般ノ方法ヲ與フルモノナリ

算術ニ於テ用ヰル數字ノミニテハ到底代數學ニ於テ攷フルガ如キ任意ノ數ニ係ル一般ノ關係ヲ表ハスヿ能ハザルガ故ニ,代數學ニ於テハ數ヲ表ハスニ $a, b, c,$…… ……x, y, z 等ノ文字ヲ以テス,乃此問題ハ次ノ如ク明確ニ言ヒ表ハサルベシ

問題　與ヘラレタル數 a ヲ二ツノ部分ニ分チ一部分ノ他ノ部分ニ對スル比ガ與ヘラレタル比 $m:n$ ニ等シクナル樣ニセヨ

此問題中ノ文字ニ換フルニ數字ヲ以テスル途端ニ問題ハ其一般ナル性質ヲ失フベケレバ,數字ノミヲ以テ此問題ヲ言ヒ表ハスヿ能ハザルヤ明カナリ

2. 算術ニ於テハ數字ヲ以テ表ハサレタル數ニ就キ計算ヲ實行シ其結果トシテ數字ヲ以テ表ハサレタル數ヲ得ルモノナレド代數學ニ於テハ文字ヲ以テ表ハサレ

タル數ニ就キテ計算スルモノナレバ之ヲ實行スル能ハズ唯之ヲ表示スルヲ以テ滿足スルモノトス,例ヘバ算術ニ於テ 5 ニ 7 ヲ加フベキトキハ寄セ算ヲ實行シテ答 12 ヲ得,代數學ニ於テ a ナル數ニ b ナル數ヲ加フベキトキハ符號 $+$ ヲ以テ寄セ算ヲ示スニ止ム而シテ其結果即二ツノ數 a ト b トノ和ハ $a+b$ ナリ

爰ニ注意スベキヿアリ,算術上ノ答 12 ニアツテハ,此 12 ガ如何ニシテ得ラレタルモノナルカ,毫モ途中計算ノ痕跡ヲ留メズ,實際 12 ハ 8 ニ 4 ヲ加ヘ又ハ 9 ニ 3 ヲ加ヘ其他種種ノ數ヲ加フルヿニヨリテ得ラルベシ,之ニ反シ代數學上ノ答 $a+b$ ハ明カニ此結果ガ如何ニシテ得ラレタルモノナルカヲ表示ス,實際他ノ二ツノ數例ヘバ c ト d トノ和ガ a ト b トノ和ニ等シキヿアルベケレド,c ト d トノ和ヲ表ハスニハ $c+d$ ヲ以テシ $a+b$ ヲ以テセザルナリ

3. 前二節ニ於テハ算術ト代數學トガ大本ニ於テ異ナル重モナル點ヲ擧ゲタリ,而シテ算術ト代數學トノ間ニハ互ニ侵スベカラズトイフガ如キ境界アルニアラズ,畢竟算術ヲ一般ニ推シ擴メタルモノハ代數學ニシテ,代數學ハ算術ノ續キナリト看做スヿヲ得ベキモノナリ

算術ニ於ケル計算ノ法則ニシテ其原理ハ代數學ニ於

テ甫メテ之ヲ明カニスルヿヲ得ルモノアリ,代數學ニ於テハ主トシテ文字ヲ用ヰレドモ文字ノ外ニ數字ヲモ併セ用ヰルモノトス,算術ノ問題例ヘバ第一節ノ第一ノ問題ノ如キハ文字ヲ用ヰテ大ヒニ其解法ヲ簡明ニスルヿヲ得ベシ,實際多クノ問題ハ算術ニテモ又代數學ニテモ解クヿヲ得,斯クノ如ク算術ト代數學トハ極メテ親密ナル關係ヲ有スルモノナリ,唯代數學ノ特色トモイフベキハ計算ノ簡明ニシテ結果ノ一般ナルヿナリ

4. 代數學ノ特色ハ數ニ係ル問題ヲ簡明ニ又一般ニ解クニアルヿヲ例ヲ以テ說明スベシ

問題　大小二ツノ數アリ其和ハ 10 ニシテ其差ハ 4 ナリトイフ,此二ツノ數ヲ索メヨ

此問題ノ算術的ノ解ハ次ノ如シ

二數ノ差ハ 4 ナルガ故ニ大ナル數ハ小ナル數ト 4 トノ和ニ等シ,サレバ二數ノ和ハ小ナル數ト 4 トノ和ニ更ニ小ナル數ヲ加ヘタルモノ即小ナル數ノ二倍ト 4 トノ和ニ等シ,然ルニ題意ニヨリ此和ハ 10 ナリ,故ニ小ナル數ノ二倍ハ 10 ヨリ 4 ヲ引キテ得ベキ 6 ニ等シ,仍テ小ナル數ハ 6 ヲ 2 デ割リテ得ベキ 3 ナルヲ知ル,次ニ此 3 ニ二數ノ差 4 ヲ加ヘテ大ナル數 7 ヲ得,乃大ナル數 7 小ナル數 3 ヲ以テ答トス

上ノ解ニ於テ特ニ目ニ着クハ大ナル數小ナル數トイフ辭ノ頻繁ニ出デ來ルヿナリ,今此煩累ヲ避ケンガ爲メニ x ヲ以テ小ナル數 y ヲ以テ大ナル數ヲ代表セシメ且算術ニ於テ用ヰル符號ヲ襲用スルトキハ上ノ解ハ次ノ如クニ書キ下ダスヿヲ得ベシ

$$y-x=4$$

故ニ　$$y=x+4$$

サレバ　$$y+x=x+4+x$$

今 $2x$ ヲ以テ $x+x$ 即 x ノ二倍ヲ表ハセバ

$$y+x=2x+4$$

然ルニ題意ニヨリ　$$y+x=10$$

故ニ　$$2x+4=10$$

$$2x=10-4=6$$

仍テ　$$x=\frac{6}{2}=3$$

次ニ　$$y=3+4=7$$

是レ則代數的ノ解ニシテ,此文字ト符號トヲ用ヰタル解ノ簡短ニシテ明瞭ナルハ何人モ首肯スルトコロナルベシ,嚮キニ簡明トイヘルハ斯クノ如キヿヲイフモノナリ

例題

1. 二ツノ數ノ和ハ 14 ニシテ其差ハ 6 ナリトイフ,此

二ツノ數ヲ索メヨ

2. 二數ノ和ハ 56 ニシテ其差ハ 18 ナリ二數如何

3. 二數ノ和ハ 438 ニシテ其差ハ 192 ナリ,二數ヲ索メ而シテ後驗ヲ行ヘ

5. 前節ノ問題中ノ 10 ト 4 トニ換フルニ他ノ數ヲ以テスルモ全ク同樣ニシテ之ヲ解クコヲ得ベシ,然レ圧前節ノ問題ノ答トシテ得タル 7 ト 3 トハ毫モ此 7 ト 3 トヲ得ル爲メニ施セル計算ノ痕跡ヲ留メザルガ故ニ,此答ハ他ノ同種類ノ問題ヲ解ク上ニ於テ一向ニ用ヲナサザルベシ,他ノ同種類ノ問題ヲ解クニハ,解方ノ筋道ノ全ク同一ナルニモ拘ハラズ,前節ノ問題ヲ解クトキニ行ヒタル手數ト同ジダケノ手數ヲ行ハザルベカラズ,此不便ヲ避クル方法ヲ發見センガ爲メニ更ニ前節ノ解ヲ吟味シ其論法ヲ明カニシ且後ニ示ス解トノ比較ヲ容易ナラシメンガ爲メニ論法ノ筋道ヲ區分シ之ニ附スルニ番號ヲ以テスベシ

[1] 大ナル數ヨリ小ナル數ヲ引キタルモノハ與ヘラレタル差ニ等シ

[2] 故ニ 大ナル數ハ小ナル數ニ與ヘラレタル差ヲ加ヘタルモノニ等シ

[3] 然ルニ 大ナル數ニ小ナル數ヲ加ヘタルモノハ與ヘラレタル和ニ等シ

[4] 故ニ 小ナル數ニ與ヘラレタル差ヲ加ヘ更ニ小ナル數ヲ加ヘタルモノハ與ヘラレタル和ニ等シ

[5] 乃 小ナル數ノ二倍ニ與ヘラレタル差ヲ加ヘタルモノハ與ヘラレタル和ニ等シ

[6] 仍テ 小ナル數ノ二倍ハ與ヘラレタル和ヨリ與ヘラレタル差ヲ引キタルモノニ等シ

[7] サレバ 小ナル數ハ與ヘラレタル和ヲ二デ割リタルモノヨリ與ヘラレタル差ヲ二デ割リタルモノヲ引キタルモノニ等シ

[8] 次ニ 大ナル數ハ與ヘラレタル和ヲ二デ割リタルモノヨリ與ヘラレタル差ヲ二デ割リタルモノヲ引キタルモノニ與ヘラレタル差ヲ加ヘタルモノニ等シ

[9] 結局リ 大ナル數ハ與ヘラレタル和ヲ二デ割リタルモノニ與ヘラレタル差ヲ二デ割リタルモノヲ加ヘタルモノニ等シ

今 a ヲ以テ與ヘラレタル和 b ヲ以テ與ヘラレタル差ヲ代表セシメシ上ニ言葉ニテ言ヒ表ハセルコヲ代數的ニ

即文字ト符號トヲ以テ書キ下ダセバ次ノ如シ

[1] $y-x=b$

[2] 故ニ $y=x+b$

[3] 然ルニ $y+x=a$

[4] 故ニ $x+b+x=a$

[5] 乃 $2x+b=a$

[6] 仍テ $2x=a-b$

[7] サレバ $x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$

[8] 次ニ $y=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$

[9] 結局リ $y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$

茲ニ得タル答[7]ト[9]トハ明カニ索ムルトコロノ數xトyトヲ得ル爲メニ與ヘラレタル數aトbトニ施スベキ計算ヲ示スモノニシテ,實際aトbトガ如何ナル數ヲ代表スルニ拘ハラズ恒ニ眞ナリ,嚮キニ一般トイヘルハ斯クノ如キヿヲイフモノナリ

6. 前節ニ於テaトbトハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得トイヘリ然レドモ相連續セル演算中同ジ文字ハ始終同ジ數ヲ表ハスモノトセザルベカラザルヿ勿論ナリ

文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得ルガ故ニ文字ヲ以テ表ハサレタル數ヲ一般ナル數,之ト區別スルガ爲

メニ數字ヲ以テ表ハサレタル數ヲ格段ナル數ト稱スルヿアリ

嚮キニaヲ以テ與ヘラレタル和ヲ代表セシムトイヘリ,通例ハ畧シテ與ヘラレタル和ヲaトストイフ,又aガ表ハス數ニbガ表ハス數ヲ加ヘルトイフベキヲ畧シテaニbヲ加フルトイフ,其他之ニ準フ

7. 第五節ニ於テ證明セルガ如ク,大小二ツノ數ノ和ト其差トヲ知リテ此二ツノ數ヲ索ムルニハ,和ノ半分ヨリ差ノ半分ヲ引キテ小ナル數ヲ得ベク,和ノ半分ニ差ノ半分ヲ加ヘテ大ナル數ヲ得ベシ,是レ則此種類ノ計算ノ**法則**ナリ,此法則ヲ文字ト符號トヲ用ヰテ書キ下ダセバ

$$x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2} \qquad y=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$$

凡テ文字ト符號トヲ用ヰテ法則ヲ書キ下タセルモノヲ**公式**ト名ヅク,又逆ニ公式ヲ辭ニテ言ヒ表ハストキハ法則ヲ得ベキヤ明カナリ,故ニ法則ト之ニ應ズル公式トハ其實ニ於テ異ナルヿナシ,然レドモ公式ノ法則ニ比シテ一層簡明ナルハ多言ヲ俟タザルベシ

上ノ公式ノ應用ヲ示サンガ爲メニ,之ヲ用ヰテ再ビ第4節ノ問題ヲ解クベシ

$$x=\tfrac{10}{2}-\tfrac{4}{2}=5-2=3$$

$$y=\tfrac{10}{2}+\tfrac{4}{2}=5+2=7$$

凡テ辭ヲ混ゼズニ唯文字數字符號ノミヲ以テ書キ下ダセルモノヲ一般ニ **式** ト名ヅク,サレバ文字ト符號トヲ以テ書キ表ハセトイフ代リニ式ニテ書ケ或ハ式ニ直セトイフヿヲ得

例題

1. 上ノ公式ヲ用ヰテ第4節ノ例題ノ答ヲ算出シ之ヲ前キニ得タルモノト照合セヨ
2. 引キ算ニ於テ差ニ減數ヲ加フルトキハ被減數ヲ得ベシ,今被減數ヲ a 減數ヲ b 差ヲ c トシテ此法則ヲ式ニ直セ
3. 文字ト符號トノミヲ用ヰテ被減數ヨリ減數ヲ引キタルモノハ差ニ等シキヿヲ書キ表ハセ
4. 二ツノ數ヲ a 及 b トシ,二ツノ數ノ和ハ各ノ數ヲ寄セル順序ニ拘ハラザルヿヲ文字ト符號トノミヲ以テ書キ著ハセ
5. x ハ a ト b トノ積ヲ5デ割リタルモノニ等シキヿヲ式ニテ書ケ
6. 文字ト符號トノミヲ以テ二ツノ數ノ積ハ乘數ト被乘數トヲ交換スルモ變ハラザルヿヲ書キ顯ハセ
7. 或ル數ノ半分ト或ル他ノ數ノ半分トノ和ハ二ツノ

數ノ和ノ半分ニ等シキヿヲ式ニテ書ケ

8. 大ナル數ノ半分ヨリ小ナル數ノ半分ヲ引キタルモノハ二數ノ差ノ半分ニ等シキヿヲ式ニテ書ケ
9. $(58796\times58796)-(6784\times6784)$ ヲ計算セヨ
10. 後ニ示ス如ク

$$(a\times a)-(b\times b)=(a+b)\times(a-b)$$

ナリ,此公式ヲ利用シテ前例ノ答ヲ算出セヨ

11. 前例ノ公式ヲ利用シテ 1003×997 ヲ算出セヨ
12. 大ナル數ヲ a 小ナル數ヲ b トシ,大ナル數ノ二倍ハ二數ノ和ニ二數ノ差ヲ加ヘタルモノニ等シク,小ナル數ノ二倍ハ二數ノ和ヨリ二數ノ差ヲ引キタルモノニ等シキヿヲ式ニテ書キ表ハセ

符號

8. 算術ニ於テ用ヰル總テノ符號ハ代數學ニ於テモ矢張リ算術ニ於ケルト同ジ意味ニ用ヰルモノトス

寄セ算ノ符號 $+$, 引キ算ノ符號 $-$, 掛ケ算ノ符號 $\times$, 割リ算ノ符號 $\div$ ヲ略稱シテソレゾレニ加號,減號,乘號,除號トイフ

掛ケ算ノ符號ハ數字ヲ以テ表ハサレタル數ノ間ニアル𪜈ハ決シテ之ヲ省クヿナシ,設シ之ヲ省ク𪜈ハ記數法ト撞着スベシ,例ヘバ 3×4 ニ於テ乘號ヲ省クトキハ三十四ト區別スルヿ能ハザルニ至ルベシ

小數點ト間違フ掛念ナキ𪜈ハ乘號ノ代リニ點ヲ用ヰルヿアルハ亦算術ニ於ケルニ同ジ,而シテ代數學ニ於テハ小數點ト間違フ掛念ハ比較的ニ少ナシ,掛ケ算ノ符號ニ點ヲ用ヰル場合ニ於テモ數字ヲ以テ表ハサレタル數ノ間ニアル𪜈ハ決シテ之ヲ省クヿナシ,例ヘバ2ト3ト4トノ積ヲ 2.3.4 ト書ク,今設シ點ヲ省ク𪜈ハ二百三十四ト識別スルヿ能ハザルニ至ルベシ

文字ト文字又ハ數字ト文字トノ間ニ置クベキ掛ケ算ノ符號ハ通例之ヲ省クモノトス,例ヘバaトbトノ積ヲab, aトbトcトノ積ヲabc, 17トaトノ積ヲ$17a$ト書ク

ガ如シ,更メテ言ヘバ若干ノ文字ノ積ヲ書キ表ハスニハ此レ等ノ文字ヲ唯並ベテ書ケバヨシ,通例ハ後ニ示スガ如ク(第26節)積ノ値ハ因數ノ順序ニ係ハラズトイフヿヲ利用シ羅馬字順ニ書キ並ベルモノトス,又文字ノ外ニ數字ニテ表ハサレタル因數アル𪜈ハ之ヲ眞先キニ即左端ニ置クモノトス例ヘバbトcト3トaトノ積ヲ$3abc$ト書クガ如シ又文字ノ外ニ數字ニテ表ハサレタル因數ガ幾ツモアル𪜈ハ豫ジメ此レ等ノ因數ヲ掛ケ合ハセテ得ベキ數ヲ眞先キニ置クヲ通例トス例ヘバxト3トyト4トノ積ヲ$12xy$ト書クガ如シ

乘號ヲ省クハ積全體ヲ括弧ニテ包ムニ同ジキ効力アルモノトス例ヘバaニbトcトノ積ヲ加ヘタル和ヲ$a+bc$ト書ク,即 $a+bc$ ハ $a+(b\times c)$ ト同意ナリ,又 $3a+5b$ ハ $(3\times a)+(5\times b)$ ニ同ジ

括弧ノ前後ニ置クベキ乘號モ通例ハ之ヲ省クモノトス例ヘバaト$b+c$トノ積ヲ $a(b+c)$, $a+b$ト $a-b$ トノ積ヲ $(a+b)(a-b)$ ト書クガ如シ

代數學ニ於テ割リ算ヲ示スニハ多ク分數ノ形ヲ用ヰ除號$\div$ヲ用ヰルハ比較的ニ稀ナリ,例ヘバaヲbデ割リタルモノヲ通例 $\frac{a}{b}$ ト書クガ如シ

被除數除數ノ數字タリ文字タルニ拘ハラズ割リ算ヲ

示スニ分數ノ形ヲ用ヰルハ商ヲ括弧ニテ包ムニ同ジキ効力アルモノトス,例ヘバ $3+\frac{8}{2}$ ハ $3+(8\div 2)$ ニ同ジク $a+\frac{b}{c}$ ハ $a+(b\div c)$ ニ同ジ

冪ノ書キ方モ算術ニ於ケルト異ナルナシ例ヘバ a ノ平方即 aa ヲ a^2, x ノ立方即 xxx ヲ x^3, a ノ第 m 冪ヲ a^m ト書クガ如シ,又第一冪ノ指數ハ通例之ヲ省クモノトス例ヘバ a ノ第一冪ヲ唯 a ト書クガ如シ

例題

1. a ト b ト c トノ和ヲ書ケ
2. a ト b トノ和ヨリ c ヲ引キタルモノヲ書ケ
3. a ヨリ b ヲ引キタル差ニ c ヲ加ヘタルモノヲ式ニテ書ケ
4. a ヨリ次第ニ b ト c トヲ引キテ得ベキ殘リヲ書ケ
5. x ヨリ 3 ヲ引キタル差ハ y ニ 5 ヲ加ヘタル和ニ等シトイフヿヲ式ニテ書ケ
6. x ト 7 ト y トノ積ヲ書ケ
7. a ト 4 ト x ト 8 トノ積ヲ書ケ
8. 3 ト x ト x トノ積ヲ書ケ
9. a ト a^2 トノ積ヲ書ケ
10. 5 ト a^2 ト b^3 トノ積ヲ書ケ

11. 第11頁例題10ノ公式ヲ書キ直セ
12. a ト x トノ積ヲ b デ割リタル商ヲ書ケ
13. $a+b-c$ ニ m ト n トノ和ヲ加ヘタルモノヲ書ケ
14. $a+b-c$ ト $m-n$ トノ差ヲ書ケ
15. $a+b$ ト m トノ積ヲ書ケ
16. $a+b-m$ ヲ $c-d$ デ割リタル商ヲ書ケ

9. 或ル時ハ括弧ヲ省略スルヿアリ例ヘバ 3 ト 5 トノ和ニ更ニ 4 ヲ加ヘタルモノハ本來ハ $(3+5)+4$ ト書クベキ筈ナレド通例ハ括弧ヲ略シテ $3+5+4$ ト書ク,又 9 ヲ 3 デ割リタル商ト 7 トノ積ハ本來ハ $(9\div 3)\times 7$ ト書クベキ筈ナレド或ル時ハ畧シテ $9\div 3\times 7$ ト書クガ如シ

括弧ヲ省畧スル場合ニ於テ混雜ヲ生ズルヲ避ケンガ爲メニ次ノ規約ヲ設ク

(第一) 加號減號ノミヲ以テ結ビ付ケラレタル式ハ左ヨリ右ヘ順ヲ追フテ計算スベキヲ示ス例ヘバ $a-b+c$ ハ a ヨリ b ヲ引キタル差ニ c ヲ加ヘタルモノヲ表ハス

(第二) 乘號除號ノミヲ以テ結ビ付ケラレタル式ハ左ヨリ右ヘ順ヲ追フテ計算スベキヲ示ス例ヘバ a ヲ b デ割リタル商ト c トノ積ヲ $a\div b\times c$ ト書クガ如シ,又 a ヲ b ト c トノ積デ割リタル商ハ $a\div(b\times c)$ ト書キ此場合ニ

於テハ決シテ括弧ヲ省畧スルヿナシ

(第三) 加號減號乘號除號ヲ以テ結ビ付ケラレタル式ハ(第二)ニ從ヒ乘號除號ニヨリテ示サレタル計算ヲ行フタル後(第一)ニ從ヒ加號減號ニヨリテ示サレタル計算ヲ行フベキヲ示ス,畧言スレバ乘除ヲ前キニシ加減ヲ後チニス例ヘバ $a\times b-c+d\div 2$ ハ $(a\times b)-c+(d\div 2)$ ニ同ジ

注意 乘號ノ代リニ唯並ベテ書キ,除號ノ代リニ分數ノ形ヲ用ヰルトキハ第三ノ規約ハ不用ナリ

10. 或ル數ノ平方ガ與ヘラレタル數ニ等シキトキハ此或ル數ヲ與ヘラレタル數ノ平方根ト稱ス,例ヘバ 5 ノ平方ハ 25 ニシテ 25 ノ平方根ハ 5 ナリ

或ル數ノ平方根ヲ書キ著ハスニハ $\sqrt{\quad}$ 或ハ $\sqrt[2]{\quad}$ ナル符號ヲ此數ニ冠ラセルモノトス,例ヘバ 144 ノ平方根ヲ $\sqrt{144}$ ト書クガ如シ

或ル數ノ立方ガ與ヘラレタル數ニ等シキトキハ此或ル數ヲ與ヘラレタル數ノ立方根ト名ヅク,例ヘバ 3 ノ立方ハ 27 ニシテ 27 ノ立方根ハ 3 ナリ

或ル數ノ立方根ヲ書キ表ハスニハ $\sqrt[3]{\quad}$ ナル符號ヲ此數ニ冠ラセルモノトス,例ヘバ $\sqrt[3]{343}=7$

一般ニ或ル數ノ第 n 冪ガ a ニ等シキトキハ此或ル數ヲ a ノ第 n 乘根ト稱シ之ヲ書キ表ハスニ $\sqrt[n]{a}$ ヲ以テス

符號 $\sqrt{\quad}$ ヲ**根號**ト稱ス

根ノコトハ後ニ論ズベシ唯此處ニテハ根號ト稱スル符號ノアルヿヲ知ルヲ以テ足レリトス

加減乘除ノ符號及根號ヲ**演算ノ符號**ト稱ス

11. 算術ニ於テ普通用ヰル符號ノ外ニ代數學ニ於テハ「ハ……ヨリ大ナリ」トイフ辭ノ代リニ符號 $>$ ヲ用ヰ,「ハ……ヨリ小ナリ」トイフ辭ノ代リニ符號 $<$ ヲ使用ス例ヘバ $\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $a>b$, $c<d$, 此二ツノ符號ヲ**不等號**ト稱ス

注意 不等號ノ角ノ開キタル方ニアル數ガ比較的ニ大ナルヿニ注意スベシ

相等シキヿノ符號 $=$ ヲ**等號**ト稱ス

凡テ等號ヲ用ヰテ書ケルモノヲ**等式**ト名ヅク例ヘバ $3+4=7$, $2x+1=5$, $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ ハ何レモ等式ナリ

總テ不等號ヲ用ヰテ書ケルモノヲ**不等式**ト名ヅク例ヘバ $7^3>341$, $7^3<347$, $a>b$ ハイヅレモ不等式ナリ

例　題

1. 算術ノ引キ算ニ於テ被減數ハ減數ヨリ大ナリ,被減數ヲ a 減數ヲ b トシテ此言ヲ符號ヲ以テ書キ著ハセ

2. 今 $a>b$ ナリトスルトキハ或ル數ヲ a デ割リタル商ハ此數ヲ b デ割リタルモノヨリ小ナリ,或ル數ヲ c トシテ此事ヲ符號ヲ用井テ書キ表ハセ

3. $3^5>242$, $3^5<244$ ヨリシテ 3^5 ノ値ヲ推知スルヿヲ得ベシ, 3^5 ハ幾何ナリヤ

代數式

12. 演算ノ符號ヲ以テ文字及數字ヲ聯結シタルモノヲ**代數式**ト稱ス

根號ヲ含ム代數式ヲ**無理式**ト稱ス,無理式ノヿハ後ニ論ズベシ

根號ヲ含マザル代數式ヲ**有理式**ト稱ス

文字ヲ以テ割ルヿヲ示サザル有理式ヲ**整式**ト稱シ,整式ニアラザル有理式ヲ**分數式**ト稱ス例ヘバ $5a+2bx$ ハ整式ナリ,又 $\frac{2a+3bx}{5y}$ ハ有理式ナルモ整式ナラズ即分數式ナリ

加號減號ヲ含マザル整式ヲ**單項式**ト稱ス例ヘバ $2a$, $3bx$, abc ハ何レモ單項式ニシテ $a+b$ ノ如キハ單項式ニアラズ

多クノ單項式ヲ加號減號ヲ以テ聯結シタル整式ヲ**多項式**ト稱シ,之ニ對シテ此レ等ノ單項式ヲ此多項式ノ**項**トイフ

二項ヨリ成レル多項式ヲ**二項式**,三項ヨリ成レル多項式ヲ**三項式**ト名ヅク,其他之ニ準ヅ,例ヘバ $a+b$ ハ二項式ニシテ $5a+bx+2cy$ ハ三項式ナリ

次ノ圖ハ各種ノ代數式ノ系統ヲ詳カニスルニ便利ナルベシ

- 代數式
  - 有理式
    - 整式
      - 單項式
      - 多項式
    - 分數式
  - 無理式

13. **係數** 積ノ因數ノ中ニ數字ガアルトキハ之ヲ最先キニ置クベキヿハ既ニ前ニ述ベタリ,此數字ヲ殘リノ因數即文字ヲ掛ケ合ハセタルモノノ**係數**ト稱ス例ヘバ $5ab$ ニ於テ 5 ハ ab ノ係數ナリ

文字ノミヨリ成レル單項式ノ係數ハ 1 ナリ,此 1 ハ通例書キ下ダサザルモノトス,コレハ宛モ第一冪ヲ書クニ通例指數 1 ヲ書キ下ダサザルガ如シ例ヘバ ab ノ係數ハ 1 ナリ

注意　初學者ハ係數ト指數トヲ思ヒ違ヒセザル樣ニ心掛クベシ, $3a$ ニ於ケル a ノ係數ハ 3 ナリ, a^3 ノ指數モ 3 ナリ而シテ $3a=a+a+a$, $a^3=a\times a\times a$ ナリ

14. 係數トイフ辭ハ亦一層廣キ意味ニ用ヰラルルコトアリ例ヘバ $3ax^2$ ニ於ケル x^2 ノ係數ハ $3a$ ニシテ $abxy$ ニ於ケル xy ノ係數ハ ab ナリトイフガ如シ,結局リ單項式ニ就キ特ニ或ル文字ニノミ着目シ,他ノ文字及數字ノ因數ヲ掛ケ合ハセタルモノヲ今特ニ着目サレタル文字ノミヲ掛ケ合ハセタルモノノ係數ト稱スルモノニシテ是レ即推シ擴メラレタル意味ニ於ケル係數ナリ

$3abx^2y$ ニ於ケル, x^2y ノ係數ハ $3ab$ ナリ, bx^2y ノ係數ハ $3a$ ナリ, y ノ係數ハ $3abx^2$ ナリ, ax^2 ノ係數ハ $3by$ ナリ abx^2y ノ係數ハ 3 ナリ,サレバ結局リ積ノ因數ヲ二組ニ分チ其一組ヲ掛ケ合ハセタルモノヲ他ノ一組ヲ掛ケ合ハセタルモノノ係數ト稱スルコニ歸ス但數字ノ因數ハ必ズヤ係數ノ中ニ入ルベキモノトス

廣キ意味ニ於ケル係數ト區別スルガ爲メニ本來ノ係數ヲ**數係數**ト稱スルコアリ,然レドモ唯係數トアルモ通例ハ前後ノ關係ヨリシテ容易ニ其如何ナル意味ノ係數ナルカヲ識別シ得ルガ故ニ實際數係數トイフ名稱ヲ用ヰルハ甚ダ稀ナリ

例　　題

1. $5x$, ax, $3abx$ ニ於ケル x ノ係數如何
2. 3 ト b ト a ト 4 ト x トノ積ニ於ケル數係數ハ何ナリヤ
3. $7abxy$ ニ於ケル xy ノ係數, by ノ係數, axy ノ係數ハソレゾレニ何ナルカ

15. 數値　文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得例ヘバ a ハ 3 ニテモ 5 ニテモ 11 ニテモ其他如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得,今設シ a ハ 7 ヲ代表スルモノト定メタリトスルトキハ此 7 ヲ a ノ**數値**ト稱ス

代數式中ニアル各文字ニ換フルニ其數値ヲ以テシ其中ノ符號ノ示ス諸演算ヲ實行シテ得ベキ數ヲ**代數式ノ數値**ト稱ス

數値トイフベキヲ畧シテ唯**値**トイフヿアリ

例(1)　$x=5$, $y=3$ ナルトキハ $4xy^2$ ノ數値如何

$$4xy^2=4\times5\times3^2=20\times9=180$$

例(2)　$a=25$, $b=64$, $c=91$, $m=3$, $n=4$ トシテ $\dfrac{a+b+c}{mn}$ ノ値ヲ索メヨ

$$\frac{a+b+c}{mn}=\frac{25+64+91}{3\times4}=\frac{180}{12}=15$$

例題

$a=7,\ b=2,\ c=1,\ x=5,\ y=3$ ナルトキハ次ノ式ノ値如何

1. $3a$　2. a^3　3. $7x$　4. $5x^3$　5. $5by$　6. b^5

7. $2ax$　8. $6c^4$　9. $7c^5$　10. $9b^4$

$a=8,\ b=5,\ x=1,\ y=7$ ナルトキハ次ノ式ノ値如何

11. $7y^3$　12. $5ab$　13. $9xy$　14. $8b^3$　15. $9b^4$

16. $x=5,\ y=3$ ナルトキハ $4x^2y^3$ ノ値如何

$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=5,\ e=6$ ナルトキハ次ノ式ノ値如何

17. $7a+3b-2d$　18. $2ab+8bc-ae$

19. $\dfrac{4ac}{b}+\dfrac{10be}{cd}-\dfrac{de}{ac}$　20. $\dfrac{4c+5e}{d-b}$

21 $a=2,\ b=3,\ x=\ ,\ y=4$, 又 $a=1,\ b=7,\ x=3,\ y=2$ トスルトキハ $ax+by$ ハ其都度幾何トナルカ

16. 文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得而シテ文字ノ數値ハ零ナルモ可ナリ乃代數學ニ於テハ零ヲモ數ト看做ス例ヘバ $a+b$ ニ於テ $a=3,\ b=0$ トスレバ

$$a+b=3+0=3$$

代數學上ニ於テハ零ハ或ル數ヨリ同ジ數ヲ引キテ得ベキ數ナリト解釋スルモノトス,之ヲ式ニテ書キ表ハ

セバ $0=a-a$

積ノ因數ノ中ニ0ガアルトキハ他ノ因數ノ何タルニ拘ハラズ積ノ値ハ0ナリ例ヘバ $4abc$ ニ於テ $b=0$ トスルトキハ a ト c トノ數値ノ如何ニ拘ハラズ此積ノ値ハ0ナリ

$\dfrac{a}{b}$ ニ於テ $a=3,\ b=0$ トスルトキハ此式ノ値如何ト問フニ,コレハ問フベカラザルヲ問フモノニシテ全ク意味ナキ問ナリ,a ヲ b デ割ルトキニ既ニ已ニ b ノ如何ナル數ナルモ可ナレド唯零ナルベカラズト定メ置カザルベカラズ,サレバ後ニ至リテ b ヲ零ト置クガ如キハ前後矛楯スルモノナリ

コレマデニ屢文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得トイヘリ,然レドモ割リ算ニ於ケル除數ガ0トナルヲ避ケザルベカラズ例ヘバ $\dfrac{a+b+c}{m-n}$ ニ於テ m ト n トニ同一ノ數値ヲ與フベカラザルガ如シ

例題

$a=2,\ b=3,\ c=1,\ p=0,\ q=4,\ r=6$ ナリトシテ次ノ式ノ値ヲ索メヨ

1. $\dfrac{3a^2r}{8b}$　2. $2ab^2cpq$　3. b^a

$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5,\ f=0$ トシテ次ノ式ノ値ヲ索メヨ

4. $9a+2b+3c-2f$　　5. $4e-3a-3b+5c$　　6. $7ae+3bc-af$

7. $8abc-bcd+9cde-def$　　8. $\dfrac{4a}{b}+\dfrac{9b}{c}+\dfrac{8c}{d}-\dfrac{5d}{e}$

9. $a=2,\ b=8,\ c=10$ トスル𪜈ハ $c(a+b)$ ノ値如何

10. $a=126,\ b=42,\ m=5,\ c=3,\ d=9$ ナル𪜈ハ $\dfrac{(a-b)\times m}{c+d}$ ノ値如何

11. $a=64,\ b=75,\ c=41,\ m=24,\ n=14$ トシテ $\dfrac{a+b+c}{m-n}$ ノ數値ヲ算出セヨ

12. $x=\dfrac{(a+b+c)\times d}{p-q}$ ニシテ $a=1,\ b=12,\ c=11,\ d=5,\ p=48,$ $q=18$ ト置ク𪜈ハ x ノ値如何

13. $x=3,\ a=7,\ b=15,\ c=3,\ d=27$ ナル𪜈ハ $ax+b=cx+d,$ 又 $ax-cx+b=d$ 又 $(a-c)x+b=d,$ 又 $(a-c)x=d-b$ 又 $x=\dfrac{d-b}{a-c}$ ナルヿヲ示セ

14. x ガ 1 或ハ 2 ナル𪜈ハ x^2+2-3x ハ 0 ルヿヲ示セ

15. a ト b トノ代リニ任意ノ整數ヲ當テ嵌メテ a^2-b^2 ト $(a+b)(a-b)$ トノ數値ノ相等シキヿヲ驗メセ但任意トイフ中ニモ $a>b$ ナルヿヲ要ス

17. 代數式ノ値ヲ算出センガ爲メニ順次寄セ算引キ算ヲ行フニ當リトキトシテハ演算ヲ實行シ得ザルヿアルベシ例ヘバ $a-b+c$ ニ於テ $a=2, b=5, c=7$ ト置キタリトセンカ, $2-5+7$ ヲ算出セントスルモ 2 ヨリ 5 ヲ引クヿ能ハズ, サレバ文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得トイフ其中ニハ代數式ノ値ヲ索ムルニ當リ引キ算ヲ實行スル上ニ於テ差支ナキ限ハトイフ意味ヲ合マザルベカラズ, 例ヘバ上ノ $a-b+c$ ナル式ニ於テ a, b, c ニ換フルニ如何ナル數ヲ以テスルモ可ナリ但 $a>b$ ナルヲ要ス

此但書ハ甚ダ窮屈ナル制限ナリ, 後ニ數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メテ負數ナルモノヲ數ノ中ニ入レ此制限ヲ撤回スベシ先ヅソレマデハ此制限ハ恒ニ存在スルモノトスベシ

18. 文字ガ表ハス數ハ總テ不名數ナリ

文字ヲ用井テ名數ヲ表ハスニハ文字ノ後ニ名ヲ添ヘルモノトス例ヘバ a 尺, b 圓ナドイフガ如シ, 此場合ニ於テモ a, b ハ勿論不名數ナリ

例(1) 或ル品物ヲ賣買スルニ一貫目ニ付賣價ヲ a 圓, 買價ヲ b 圓トスル𪜈ハ一貫目毎ニ幾圓ノ利益アリヤ又 c 貫目ヲ賣買スル𪜈ハ幾何ノ利益ヲ得ベキカ

一貫目ヲ賣買スル毎ニ a 圓 $-$ b 圓即 $(a-b)$ 圓ノ利益ア

リ,故ニ c 貫目ヲ賣買スルトキハ

$$(a-b)\text{圓}\times c=(a-b)c\text{圓}$$

ノ利益アリ

例 (2) a「キログラム」ノ價 b 圓ナル品物 c「キログラム」ノ價幾何ナルカ

a「キログラム」ノ價 b 圓ナルトキハ一「キログラム」ノ價ハ $\frac{b}{a}$ 圓ナリ故ニ c「キログラム」ノ價ハ

$$\frac{b}{a}\text{圓}\times c=\frac{bc}{a}\text{圓}$$

ナリ

例 (3) 或ル人所有ノ米 a 石ノ中 b 石ダケヲ一石ニ付 c 圓ニテ賣拂ヒ,其後相場ガ一石ニ付 d 圓ダケ下落シタルトキニ殘米ヲ賣拂ヒタリトイフ,此人合計幾何金ヲ得タリヤ

一石ノ價 c 圓ナルトキハ b 石ノ價ハ c 圓 $\times b$ 即 cb 圓ナリ,前ノ相場一石ニ付 c 圓ナリシニ其後 d 圓ダケ下落シタリトスレバ後ノ相場ハ一石ニ付 c圓$-d$圓 即 $(c-d)$ 圓ナリ,又 a 石ノ中ヨリ b 石ダケ賣リ拂ヒタルコトナレバ殘リハ a石$-b$石即 $(a-b)$ 石ナリ,之ヲ一石ニ付 $(c-d)$ 圓ニ賣ルトキハ $(c-d)$圓$\times(a-b)$ 即 $(c-d)(a-b)$ 圓ヲ得ベシ故ニ答ハ cb圓$+(c-d)(a-b)$ 圓 $=\{cb+(c-d)(a-b)\}$ 圓ナリ

例 (4) 幾何學ノ證明スルトコロニ據レバ三角形ノ面積ヲ表ハス數 s ハ底邊ノ長サヲ表ハス數 b ト高サヲ表ハス數 h トノ積ヲ 2 デ割リタルモノニ等シ,三角形ノ面積ノ公式如何

答 $s=\frac{bh}{2}$

但 b ト h トハ同ジ長サノ單位ニテ言ヒ表ハサレタル數ナラザルベカラズ而シテ s ハ此長サノ單位ニ對應スル面積ノ單位ニテ言ヒ表ハサレタル數ナリ例ヘバ b ト h トガ間數ナルトキハ s ハ坪數ナリ

例題

上ノ公式ヲ用ヰテ次ノ例題ヲ解ケ

1. 或ル品物ヲ賣買スルニ一貫目ノ賣價ヲ拾參圓,買價ヲ拾圓トスルトキハ一貫目每ニ幾圓ノ利益アリヤ又十八貫目ヲ賣買スルトキハ幾何ノ利益ヲ得ベキカ
2. 五斤ノ價六拾圓ノ品物拾七斤ノ價幾何ナルカ
3. 或ル人所有ノ米八十石ノ中二十五石ダケヲ一石ニ付拾參圓ニ賣拂ヒ其後相場ガ一石ニ付貳圓ダケ下落シタルトキニ殘米ヲ賣拂ヒタリトイフ此人合計幾何金ヲ得タリヤ

4. 底邊ノ長サ五間高サ八間ノ三角形ノ面積幾何ナリヤ

5. 底邊ノ長サ六米突高サ七米突ノ三角形ノ面積幾平方米突アリヤ

---

6. 一升ノ價a錢ナルトキハb升ノ價幾何ゾ

7. c匁ノ價d錢ナルトキハm匁ノ價如何

8. 或ル人一尺a錢ノ絹ト一尺b錢ノ木綿トヲ各c尺宛買フタリトイフ,此人幾何錢ヲ拂ヒシヤ

9. 或ル人貯藏ノ品物a貫目ノ中b貫目ダケヲ一貫目c錢宛ニ賣リ,殘リヲ一貫目d錢宛ニ賣拂ヘリトイフ此人幾何錢ヲ得タリヤ

10. 或ル人貯藏ノ品物300貫目ノ中180貫目ダケヲ一貫目4錢宛ニ賣リ殘リヲ一貫目3錢宛ニ賣リ拂ヘリトイフ此人幾何金ヲ得タリヤ

11. 或ル人一週間每ニa圓ノ給料ヲ得,平生ノ日ニハb圓宛ヲ費消シ日曜日ニハc圓宛ヲ費消スルトイフ此人一週間每ニ幾何圓宛ヲ餘マスヤ

12. 或ル人一週間每ニ35圓ノ給料ヲ得,平生ノ日ニハ3圓宛ヲ費消シ日曜日ニハ7圓宛ヲ費消スルトイフ此人一週間每ニ幾何圓宛ヲ餘マスヤ

13. 或ル人所有ノ反物a反ノ中b反ダケヲ一反c圓宛ニ賣拂ヒ,殘リヲ一反ニ付d圓宛廉價ニ賣拂ヘリトイフ此人合計幾何金ヲ得タリヤ

14. 一升c錢ノ酒a升ト一升d錢ノ酒b升トヲ混合スルトキハ平均一升幾錢ノ混合酒ヲ得ルカ

15. 一升25錢ノ酒4升ト一升30錢ノ酒6升トヲ混合スルトキハ平均一升幾錢ノ混合酒ヲ得ルカ

第二編 整數ノ加減乘除

19. 原來數トハ整數ノ意ナリシガ,其後割リ算ニ於テ被除數ハ除數ノ倍數ナラザルベカラズトイフ制限ヲ撤回センガ爲メニ,數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ分數ヲモ數ノ中ニ入ルルヿニナレリ,乃數ノ中ニハ整數モアレバ分數モアリ,畢竟數トイフ辭ハ整數分數ヲ併セテ考ヘタルモノノ總名ナリ

文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得トイヘルハ文字ハ如何ナル整數ヲモ又如何ナル分數ヲモ代表スルヿヲ得トイフ意ナリ而シテ文字ガ整數ヲ表ハスモノトシテ得タル諸ノ結果ガ其中ノ文字ガ分數ヲ代表スル場合ニ於テモ眞ナルヿハ第四編ニ到テ論スベシ,先ヅ第一ニ本編ニ於テハ文字ハ整數ノミヲ代表スルモノトシテ整數ノ加減乘除ヲ算術ニ於ケルヨリモ一層一般ニ論ゼントス,乃以下本編全躰ニ通ジテ數トアルハ整數ノヿニシテ文字ハ必ズ整數ヲ代表スルモノトス

寄セ算引キ算

20. 二ツノ數ノ和ハ二ツノ數ヲ如何ナル順序ニ加フルモ異ナルヿナシ例ヘバ $2+5=7$, 同時ニ $5+2=7$, 一般ニ

$$a+b = b+a$$

加號ヲ以テ示サレタル和ハ結局リ一ツノ多項式ナレバ,被加數ヲ其項ト稱スルヲ得ベシ

項數三ツアルトキハ

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a=b+a+c=c+a+b=c+b+a$$

此定理ハ項數ノ如何ニ拘ハラズ恒ニ眞ナリ,辭ニテ言ヘバ,符號ヲ以テ示サレタル和ニ於ケル項ノ位置ヲ隨意ニ轉換スルモ其値ハ變ハルヿナシ

21. 符號ヲ以テ示サレタル和ノ中ニ多クノ項ガアルトキハ此レ等ノ項ヲ任意ノ群ニ分チ,最初ニ各群ノ和ヲ索メ而シテ後此レ等ノ和ヲ加ヘテ以テ全躰ノ和ヲ索ムルヿヲ得ベシ,今群ヲ示スニ括弧ヲ以テシ一例ヲ擧ゲンニ

$$5+3+7+2=(5+3)+(7+2)=8+9=17$$

一般ニ

$$a+b+c+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+c+d)=(a+b+c)+d$$
$$=a+(b+c)+d$$

和ニ於ケル項ノ數ノ如何ニ拘ハラズ之ヲ群ニ分ツ其

仕方ハ全ク隨意ナリ,例ヘバ

$$514+73+2=500+(10+70)+(4+3+2)$$
$$=500+80+9$$
$$=589$$

$$\begin{array}{r}514\\73\\2\\\hline 589\end{array}$$

乃十位ノ數ハ十位ノ數同士,一位ノ數ハ一位ノ數同士ノ群ニ分チテ加ヘタリ,右ニ掲ゲタル普通寄セ算ノ算式ハ全ク此定理ヲ應用セルモノナリ

22. 引キ算ニ於ケル減數ト差トハ之ヲ交換スルヿヲ得例ヘバ $7-5=2$, 同時ニ $7-2=5$, 一般ニ

$$a-b=c \quad 同時ニ \quad a-c=b$$

引キ算ニ於テ減數ト差トノ和ハ被減數ニ等シ,今被減數ヲ a,減數ヲ b トスレバ差ハ $a-b$ ナリ,故ニ

$$(a-b)+b=a$$

一ッノ被減數ヨリ多クノ數ヲ引クニハ順次引キ算ヲ行フモ可ナリ又最初ニ減數同士ヲ加ヘ合ハセ此和ヲ被減數ヨリ引クモ可ナリ,例ヘバ

$13-7-2-1=6-2-1=4-1=3$ 或ハ $13-(7+2+1)=13-10=3$

一般ニ $$a-b-c-d=a-(b+c+d)$$

逆ニ多クノ項ヨリ成ル和ヲ引クハ次第ニ其各項ヲ引クニ同シ

23. $8+(13-5)$ ハ 8 ニ 13 ヨリ 5 ヲ減シタルモノヲ加フベキヲ示ス,今 8 ニ 13 ヲ加フルトキハ 5 ダケ加ヘ過ギルヿトナル,故ニ此和ヨリ 5 ヲ減セザルベカラズ即

$$8+(13-5)=8+13-5=16$$

一般ニ $$a+(b-c)=a+b-c$$

即或ル數ニ二ツノ數ノ差ヲ加フルニハ此數ニ被減數ヲ加ヘタルモノヨリ減數ヲ引ケバヨシ

$a-(b-c)$ ハ a ヨリ b ガ c ヲ超過スルダケヲ減ズベキヲ示ス,今 a ヨリ b ヲ減ズルトキハ $a-b$ ヲ得テ c ダケ減シ過ギルヿトナルガ故ニ,之ニ c ヲ加ヘザルベカラズ

$$a-(b-c)=a-b+c$$

即或ル數ヨリ二ツノ數ノ差ヲ引クニハ此數ヨリ被減數ヲ引キタルモノニ減數ヲ加フレバヨシ

同理ニヨリ

$$a+(b-c+d-f)=a+b-c+d-f$$
$$a-(b-c+d-f)=a-b+c-d+f$$

乃符號 $+$ ヲ前ニ有スル括弧ハ唯之ヲ省クヿヲ得,之ニ反シ,符號 $-$ ヲ前ニ有スル括弧ヲ去ルニハ括弧內ノ符號 $+$ ヲ $-$ ニ,$-$ ヲ $+$ ニ換フベシ

式ノ中ニアル符號 $+$ ヲ $-$ ニ,$-$ ヲ $+$ ニ換ヘルトイフベキヲ畧シテ**項ノ符號ヲ換ヘル**トイフ,サレバ項

ノ符號ヲ換ヘルトイフトキノ符號トハ＋或ハ－ノコトナリト知ルベシ

24. 式ノ中ニ符號＋ヲ前ニ有スル項ガ幾ツモアリテ其後ニ符號－ヲ前ニ有スル項ガ幾ツモ續ヅキ居ルトキハ符號＋ヲ前ニ有スル項ヲ勝手ノ順ニ書キ換ヘ其次ニ符號－ヲ前ニ有スル項ヲ任意ノ順ニ書キ並ベテ差支ナシ

例ヘバ $7+6-2-3=6+7-2-3=7+6-3-2=6+7-3-2$

一般ニ $a+b-p-q=b+a-p-q=a+b-q-p=b+a-q-p$

或ル場合ニ於テハ更ニ一歩ヲ進ミ符號＋ヲ前ニ有スル項ト符號－ヲ前ニ有スル項トヲ混淆シテ項ノ順序ヲ變更スルヿヲ得例ヘバ

$$7+6-2-3=7-2-3+6=7-2+6-3=6-3+7-2$$

何レニシテモ答ハ8ナリ,又 $a>c,\ b>c$ ナルトキハ

$$a+b-c=a-c+b=b-c+a$$

今 $a=7,\ b=8,\ c=3$ トスルトキハ答ハ何レノ式ニヨルモ12ナリ,然レドモ a ト b トノ和ガ c ヨリモ大キクサヘアレバ $a+b-c$ ハ其意味ヲ失フヿナキモ, $a<c$ ナルトキハ $a-c+b$ ハ全ク意味ナキモノトナル,如何トナレバ吾人ハ a ヨリ a ヨリモ大ナル數 c ヲ引クヿ能ハザレバナリ,同樣ニ $b<c$ ナルトキハ $b-c+a$ ハ全ク意味ヲ失フベシ

サレバ減數ガ被減數ヨリ大ナルガ如キ場合ニ立チ至

ラザル限リハ或ル式ノ中ニアル符號＋ヲ前ニ有スル項ト符號－ヲ前ニ有スル項トヲ任意混淆シテ勝手ノ順ニ並ベ換ヘルヿヲ得ベシ

例
$$\begin{aligned}897-652 &= 800+90+7-(600+50+2)\\ &= 800+90+7-600-50-2\\ &= 800-600+90-50+7-2\end{aligned}$$

偖テ第23節ニヨリ

$$(800-600)+(90-50)+(7-2)=800-600+90-50+7-2$$

ナルガ故ニ

$$\begin{aligned}897-652 &= (800-600)+(90-50)+(7-2)\\ &= 200+40+5\\ &= 245\end{aligned}$$

是レ則右ニ掲グル普通引キ算ノ算式 $\begin{array}{r}897\\652\\\hline 245\end{array}$ ノ因ツテ基ヅクトコロナリ

注意 式ノ初項ノ前ニハ符號ナシ,然レドモ此項ハ符號＋ヲ前ニ有スル項トシテ取扱フベキモノトス,更メテ言ヘバ,初項ニ限リ其前ニ置クベキ符號＋ヲ畧スルモノト看做スベシ,乃項ノ順序ヲ換ヘテ初項ヲ他ノ位置ニ移スト同時ニ其前ニ符號＋ヲ書キ下ダスベキモノトス,又符號＋ヲ前ニ有スル項ヲ移シテ初項ニスルト同時ニ符號＋ヲ畧スベキモノトス例ヘバ

$$a+b-c = b+a-c$$

25. 括弧ノ內ニ又括弧ノアルヿアリ,斯クノ如キ場合ニ於テハ混雜ヲ避ケンガ爲メニ異ナリタル形チノ括弧ヲ用ヰルモノトス例ヘバ( ), { }, [ ]ノ如シ,又或ルトキハ括弧ノ代リニ括線ト稱スル橫線ヲ用ヰルヿアリ例ヘバ $a-(b+c)$ ノ代リニ $a-\overline{b+c}$ ト書クガ如シ

幾重ニモアル括弧ヲ去ルニハ通例內ナルモノヨリ始メ第23節ノ法則ニヨリ順次一組宛取外ヅスモノトス例ヘバ

$$\begin{aligned} a-[b+\{c-(d-e)\}+f] &= a-[b+\{c-d+e\}+f] \\ &= a-[b+c-d+e+f] \\ &= a-b-c+d-e-f \end{aligned}$$

注意 括弧ヲ外ヅスニ內ナルモノヨリ始ムルハ全ク便宜上ノヿナリトス勿論外ナルモノヨリ始ムルモ可ナリ其他如何ナル順序ニ取外ヅスモ差支ナシ

例　題

1. $7+3+5$ ニ於テ項ノ順序ヲ變ヘテ之ヲ六通リニ書キ表ハセ
2. $a+b+c$ ト $(a+b)+c$ トハ全ク同ジキヤ否ヤ
3. 29 ニ 17 ヲ加フル普通ノ寄セ算ノ算式ノ因ツテ基ヅクトコロノ筋道ヲ明示セヨ

4. a ニ b ヲ加ヘテ其結果ヲ c ニ等シト置ケ,又之ヨリシテ出ヅル二ツノ等式ヲ書ケ,辭ヲ換ヘテ言ヘバ b ヲ c ト a トニテ表ハス式及 a ヲ c ト b トニテ表ハス式ヲ書ケ
5. $x+y=c$ ヨリ出ヅル二ツノ等式ヲ書ケ
6. $x+3=8$ ヨリシテ x ノ値ヲ索メヨ
7. $8+4-7-2$ ニ於ケル項ノ順序ヲ種種ニ變更セヨ
8. 132 ヨリ 75 ヲ引ク普通ノ引キ算ノ算式ノ因ツテ基ヅクトコロノ筋道ヲ明示セヨ
9. $a+b$ ト $c-d$ トノ和ヲ書キテ後括弧ヲ去レ
10. $a-b$ ト $c-d$ トノ差ヲ書キテ後括弧ヲ去レ
11. $a+\{b+(c-d)\}$, $a+\{b-(c-d)\}$, $a-\{b+(c-d)\}$ $a-\{b-(c-d)\}$ ニ於ケル括弧ヲ去レ
12. $9+5-7-(8-2-3)$ ニ於テ括弧ヲ去リテ後符號+,−ノ入交ジラザル樣ニ項ノ順序ヲ換ヘヨ
13. $a-[b-\{c-(d-e)\}]$ ニ於ケル括弧ヲ外ヅセ
14. 前例ニ於テ $a=13$, $b=10$, $c=8$, $d=9$, $e=5$ トシテ驗ヲ行ヘ
15. $a-[b-\{c-(d-\overline{e-f})\}]$ ニ於ケル括弧及括線ヲ去レ

掛ケ算

26. 掛ケ算ニ於テ被乘數ト乘數トヲ交換スルモ積ノ値ハ變ハルヿナシ

右ニ示スガ如ク1ヲ四ツ横ニ並ベテ書キ箇樣ナル列ヲ三ツ竪ニ並ベテ書キタリトセヨ,然ルトキハ各行ニハ1ガ三ツ並ビ居ルベシ,サテ此圖ノ中ニアル1ノ總數ハ結局リ在ルダケアルヿナレバ數ゾヘ方ニヨリテ變ハラザルヿ勿論ナリ,而シテ各行ニハ1ガ三ツアリテ箇樣ナル行ガ四ツアルヿナレバ,此數ゾヘ方ニ據レバ總數ハ 3×4 ナリ,又各列ニハ1ガ四ツアリテ箇樣ナル列ガ三ツアルヿナレバ,此數ゾヘ方ニ據レバ總數ハ 4×3 ナリ,故ニ $3\times4=4\times3$

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

上ノ如キ圖ハ必ズシモ3ト4トノ場合ニ限ラズ,如何ナル二ツノ數ノ積ニ就キテモ作ルヿヲ得ベキヤ明カナリ,故ニ一般ニ

$$ab=ba \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

被乘數ト乘數トハ之ヲ交換スルモ積ノ値ハ變ハラザルガ故ニ唯積ニノミ着目スル場合ニハ被乘數乘數ノ區別ヲスルノ必要ナシ,サレバコソ雙方ヲ**因數**ト併セ稱スルヿヲ得ルナリ

abc ハ a ニ b ヲ掛ケテ得ベキ積ニ c ヲ掛ケテ得ベキ積ヲ表ハス,$(ab)c$ モ又 a ニ b ヲ掛ケテ得ベキ積ニ c ヲ掛ケテ得ベキ積ヲ表ハス,乃 abc ト $(ab)c$ トハ全ク同ジ,然レドモ $a(bc)$ ハ a ニ b ト c トノ積ヲ掛ケテ得ベキ積ヲ表ハスモノナルガ故ニ abc ト $a(bc)$ トノ相等シキヿハ證明ヲ要ス,之ヲ證明スルニハ上ノ如キ圖ニ於テ1ノ代リニ a ヲ一列ニ b 宛一行ニ c 宛書キ並ベタリトセヨ,偖テ此圖ニ對シテ考フルニ一列ニハ a ガ b ダケアルヿナレバ結局リ ab ダケノ單位アリ而シテ斯クノ如キ列ガ c ダケアルヿナレバ總躰ニテハ abc ダケノ單位アリ,又此圖ノ中ニハ a ガ bc ダケアルガ故ニ總計 $a(bc)$ ダケノ單位アリ,故ニ

$$abc=a(bc) \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

サテ (bc) ヲ一ツノ數ト考ヘ(1)ヲ適用スレバ

$$abc=(bc)a=bca$$

又最初ニ (bc) ニ就キ b ト c トヲ交換シタル後同ジ論法ヲ用ヰルトキハ $abc=cba$ ヲ得ベシ,其他同樣ニシテ

$$abc=bca=cba=acb=bac=cab$$

ナルヿヲ證明スルヿヲ得ベシ,乃三ツノ數ヲ順次掛ケ合ハセテ得ベキ積ハ三個ノ因數ヲ如何ナル順ニ並ベルモ變ハラザルヿヲ知ルヲ得ベシ

爰ニハ繁ヲ避ケテ證明シアラザレド(1)ト(2)トヲ應用シテ因數ガ幾ラ多クアリテモ一般ニ多クノ數ヲ掛ケ合ハセテ得ベキ積ノ値ハ因數ノ順序ニ拘ハラズトイフヿヲ證明スルヲ得ベシ

例　題

1. $abc=acb$ ナルヿヲ證明セヨ
2. $abc=bac$ ナルヿヲ證明セヨ
3. $abc=cab$ ナルヿヲ證明セヨ

27. 多クノ數ノ和ガ因數トシテ現ハルルヿアリ例ヘバ $3(7+2)=3\times 9=27$, 同時ニ $3(7+2)=(3\times 7)+(3\times 2)=21+6=27$

一般ニ
$$(a+b)\times 3=(a+b)+(a+b)+(a+b)$$
$$=a+a+a+b+b+b$$
$$=3a+3b$$

一層一般ニ　$(a+b)c=c(a+b)=ca+cb=ac+bc$

同樣ニシテ次ノ定理ヲ得

(甲) 多クノ數ノ和ニ或ル數ヲ掛ケタルモノハ和ノ各項ニ別別ニ此乘數ヲ掛ケタルモノノ合計ニ等シ

(乙) 或ル數ニ多クノ數ノ和ヲ掛ケタルモノハ此被乘數ニ和ノ各項ヲ別別ニ掛ケタルモノノ合計ニ等シ

乘數ガ一桁ノ數ナル場合ニ於ケル掛ケ算ノ普通算式ハ(甲)ヲ應用セルモノナリ例ヘバ

$$312\times 3=(300+10+2)\times 3$$
$$=(300\times 3)+(10\times 3)+(2\times 3)$$
$$=\quad 900\quad +\quad 30\quad +\quad 6$$
$$=936$$

$$\begin{array}{r} 312 \\ 3 \\ \hline 936 \end{array}$$

又 $ac+bc=c(a+b)$ ナリ, 同樣ニ

(丙) 多クノ積ノ和ニ於ケル各項ガ同ジ因數ヲ有スルトキハ此因數ヲ省キタル跡ニ殘ル數ノ和ニ此因數ヲ掛ケタルモノハ元ノ和ニ等シ

例　題

1. $a(b+c)=ab+ac$ ヨリシテ $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ ナルヿヲ證明セヨ
2. $a(b+c+d)=ab+ac+ad$ ニ於テ $a=13$, $b=325$, $c=162$, $d=513$ ト置キテ驗ヲ行ヘ
3. 97 ニ 8 ヲ掛ケル普通ノ掛ケ算ノ算式ノ因ツテ基ヅクトコロヲ明示セヨ
4. 和ニ於ケル項ノ數五ツアリトシテ(甲)(乙)(丙)ヲ公式ニテ書ケ
5. 758 ニ 6 ヲ掛ケル掛ケ算ノ普通算式ノ因ツテ基

ヅクトコロヲ明カニセヨ

28. 二ッノ因數ノ雙方ガ和ナルコトアリ例ヘバ

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$$

$$(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

此二ッノ結果ガ相等シキハ一目瞭然タリ

例 $312\times21 = (300+10+2)\times20 + (300+10+2)\times1$

$= 6000+200+40 + 300+10+2$

$= 6000+(200+300)+(40+10)+2$

$= 6000+500+50+2$

$= 6552$

$$\begin{array}{r}312\\21\\\hline 312\\624\ \\\hline 6552\end{array}$$

是レ則右ニ掲ゲタル掛ケ算ノ普通算式ノ因ツテ基ヅクトコロナリ

29. 積ノ因數ノ一ッガ二數ノ差ナルコトアリ例ヘバ

$$(a-b)\times3=(a-b)+(a-b)+(a-b)$$

$$=a+a+a-b-b-b$$

$$=3a-3b$$

因數ノ順序ヲ換フレバ

$$3(a-b)=3a-3b$$

一般ニ $(a-b)c=c(a-b)=ac-bc=ca-cb$

(甲) 二ッノ數ノ差ニ或ル數ヲ掛ケタルモノハ被減數ニ此乘數ヲ掛ケタルモノヨリ減數ニ此乘數ヲ掛ケタルモ

ノヲ引キテ得ベキ差ニ等シ

(乙) 或ル數ニ二ッノ數ノ差ヲ掛ケタルモノハ此被乘數ニ被減數ヲ掛ケタルモノヨリ此被乘數ニ減數ヲ掛ケタルモノヲ引キテ得ベキ差ニ等シ

30. 二數ノ積ニ於ケル一ッノ因數ガ和ニシテ他ノ因數ガ差ナルトキハ前節ニヨリ

$$(a+b)(c-d)=(a+b)c-(a+b)d$$

$$=ac+bc-(ad+bd)$$

$$=ac+bc-ad-bd$$

又因數ガ兩方トモ差ナルトキハ

$$(a-b)(c-d)=(a-b)c-(a-b)d$$

$$=ac-bc-(ad-bd)$$

$$=ac-bc-ad+bd$$

第28節及本節ノ公式ハ極メテ重要ナルモノナルガ故ニ太キ字躰ヲ用ヰテ再ビ此處ニ掲グベシ

$$\left\{\begin{array}{ll}\boldsymbol{(a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd} \ldots\ldots\ldots\ldots & (1)\\ \boldsymbol{(a+b)(c-d) = ac+bc-ad-bd} \ldots\ldots\ldots\ldots & (2)\\ \boldsymbol{(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd} \ldots\ldots\ldots\ldots & (3)\end{array}\right.$$

31. 前節ノ公式ノ格段ナル場合

$$(a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb=aa+2ab+bb$$

冪ノ普通ノ書キ方ヲ用ヰルトキハ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

即二數ノ和ノ平方ハ各ノ數ノ平方ノ和ニ二數ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ,同樣ニ

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

即二數ノ差ノ平方ハ各ノ數ノ平方ノ和ヨリ二數ノ積ノ二倍ヲ引キタルモノニ等シ

又　$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ba-b^2$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

即二數ノ和ト同ジ二ツノ數ノ差トノ積ハ各ノ數ノ平方ノ差ニ等シ,通例畧シテ和ト差トノ積ハ平方ノ差ニ等シトイフ

代數學ニ於テハ往往加號ト減號トヲ一處ニシタル符號±ヲ用ヰルヿアリ,之ヲ「プラスマイナス」ト讀ム,此符號ヲ用ヰルトキハ例ヘバ上ノ公式(1)(2)ヲ一處ニ書クヿヲ得ベシ乃次ノ如シ

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

例　　題

1. 第29節ニヨリ $3(100-35)$ ヲ算出セヨ
2. 第30節ニヨリ $(5+2)(7-3)$ ヲ計算セヨ
3. 第30節ニヨリ $(5-2)(7-3)$ ヲ算出セヨ

4. $a=13$, $b=7$, $c=8$, $d=3$ ト置キテ第30節ノ公式(1)(2)(3)ノ驗ヲ行ヘ
5. 符號±ヲ用ヰテ第30節ノ公式(1)ト(2)トヲ一處ニ書ケ
6. $(x+b)(x+d)$, $(x+b)(x-d)$, $(x-b)(x-d)$ ノ括弧ヲ去レ
7. 第31節ノ公式(1)ヲ用ヰテ 1003^2 ヲ計算セヨ
8. 第31節ノ公式(2)ヲ用ヰテ 998^2 ヲ算出セヨ
9. 第31節ノ公式(3)ヲ應用シテ 1003×997 ヲ算出セヨ
10. $(a+b)(x+y)$ ノ括弧ヲ去レ　ax
11. $(p+q)(x-y)$ ノ括弧ヲ去レ
12. $(p-q)(m-n)$ ノ括弧ヲ去レ
13. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ナルヿヲ證明セヨ
14. $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ナルヿヲ證明セヨ
15. $(a+b)(p\pm q)$ ヲ二ツノ塲合ニ區別シテ後括弧ヲ去リテ得ベキ二ツノ公式ヲ一處ニ書ケ
16. $(a+b+c)(r+s)$ ノ括弧ヲ去レ
17. $c(a+b)(a-b)$ ノ括弧ヲ去レ

割リ算

32. 本編ニ於テハ未ダ分數ヲ知ラザルモノトシテ整數ノミノ加減乘除ヲ論ズ,即被除數ハ除數ノ倍數ニシテ割リ算ハ割リ切レル塲合ノミヲ論ズ,但割リ算ヲ示スニハ横線ノ上ニ被除數ヲ書キ其下ニ除數ヲ書クベシ

割リ算ニ於テ

$$\frac{\text{被除數}}{\text{除數}} = \text{商},\quad \text{被除數} = \text{除數} \times \text{商},\quad \frac{\text{被除數}}{\text{商}} = \text{除數}$$

乃被除數ヲa,除數ヲb,商ヲcトスレバ

$$\frac{a}{b} = c,\qquad a = bc,\qquad \frac{a}{c} = b$$

$a = a \times 1$, 故ニ $\frac{a}{1} = a$,乃或ル數ヲ1デ割ルトキハ元ノ數ヲ得

$cb = a$ ニ於テ c ノ代リニ $\frac{a}{b}$ ヲ置クトキハ $\frac{a}{b}b = a$ 乃或ル數ヲ他ノ數デ割リテ後同ジ數ヲ掛ケルトキハ元ノ數ヲ得,掛ケテ後割ルモ亦同ジ,故ニ同一ノ數ヲ以テスル掛ケ算割リ算ハ無効ニ歸ス

33. $\frac{8}{4} \times 3 = 2 \times 3 = 6$, 又 $\frac{8 \times 3}{4} = \frac{24}{4} = 6$ 故ニ $\frac{8 \times 3}{4} = \frac{8}{4} \times 3$

乃8ニ3ヲ掛ケテ後4デ割ルモ8ヲ4デ割リテ後3ヲ掛ケルモ同ジ數ヲ得,一般ニ

$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b}c = c\frac{a}{b}$$

辭ニテ言ヘバ

(甲) 因數ノ孰レカ一ツヲ或ル數デ割ルトキハ積ハ此數ニテ割ラル

(乙) 被除數ニ或ル數ヲ掛ケルトキハ商ハ此數ニテ掛ケラル

(丙) 或ル數ヲ被除數デ掛ケ除數デ割ルトキハ此數ハ商ニテ掛ケラル

34. 30ヲ2デ割リテ後3デ割ル代リニ30ヲ直チニ2ト3トノ積6デ割ルコヲ得乃

$$\frac{\left(\frac{30}{2}\right)}{3} = \frac{30}{2 \times 3} = \frac{\left(\frac{30}{3}\right)}{2} = 5$$

一般ニ a ガ b デ割リ切レテ後更ニ c デ割リ切レルトキハ

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{bc} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{b}$$

此公式ヲ法則ニスレバ

(甲) 除數ニ或ル數ヲ掛ケルトキハ商ハ此數ニテ割ラル

(乙) 或ル數ヲ一ツノ因數デ割リテ得タルモノヲ他ノ因數デ割ルトキハ此數ハ二ツノ因數ノ積デ割ラル

35. 前二節ニヨリ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)c}{d} = \frac{\frac{ac}{b}}{d} = \frac{ac}{bd}$

故ニ

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

例ヘバ $\frac{24}{4} \times \frac{6}{3} = \frac{24 \times 6}{4 \times 3} = 12$, 乃商ト商トヲ掛ケ合ハスニ

ハ被除數同士又除數同士掛ケ合ハスベシ

上ノ公式ノ格段ナル塲合トシテ

$$\frac{a}{b}\times\frac{m}{m}=\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}\times1=\frac{a}{b}$$

ヲ得,故ニ

(甲) 被除數除數ノ雙方ニ同ジ數ヲ掛クルトキハ商ハ變ハラズ

(乙) 被除數除數ノ雙方ガ同ジ因數ヲ有スルトキハ此因數ヲ雙方ヨリ省クモ商ハ變ハラズ

例 (1) $\frac{6}{2}=\frac{6\times3}{2\times3}=\frac{18}{6}$　例 (2) $\frac{60}{15}=\frac{3\times20}{3\times5}=\frac{20}{5}$

36. $a\frac{cb}{bc}=\frac{acb}{bc}=\left(\frac{ac}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right)=a$, 故ニ

$$\frac{ac}{b}=\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}\quad 或ハ\quad \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)}=a\frac{c}{b}$$

乃商デ割ルハ除數ヲ掛ケ被除數デ割ルニ同ジ

又
$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{ad}{bc}$$

乃第一ノ商ヲ第二ノ商デ割ルニハ第一ノ商ニ於ケル被除數ニ第二ノ商ニ於ケル除數ヲ掛ケタルモノヲ第一ノ商ニ於ケル除數ニ第二ノ商ニ於ケル被除數ヲ掛ケタルモノデ割レバヨシ

例 (1) $\frac{18}{\frac{6}{2}}=\frac{18\times2}{6}=6$　例 (2) $\frac{\frac{120}{12}}{\frac{15}{3}}=\frac{120\times3}{12\times15}=2$

37. $\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)c=\frac{a}{c}c+\frac{b}{c}c=a+b$, 今 $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ ヲ k トスレバ

$$kc=a+b,\quad k=\frac{a+b}{c}$$

故ニ
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

(甲) 或ル數ヲ以テ二數ノ和ヲ割ルハ此數ヲ以テ和ノ各項ヲ割ルニ同ジ

(乙) 除數ガ同ジキ二ツノ商ヲ加フルニハ被除數ノ和ヲ除數ニテ割ルベシ

例 $\frac{69}{3}=\frac{60+9}{3}=\frac{60}{3}+\frac{9}{3}$
$=20+3=23$

```
3) 69 (23
   6
   --
    9
    9
   --
```

右ニ掲ゲタル一桁ノ割リ算ノ普通算式ハ此定理ニ基ヅクモノナリ

例　　題

1. $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$ ヲ證明セヨ

2. 前ノ例題ノ公式ヲ二樣ニ辭ニテ言ヒ表ハセ

38. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

乃異ナリタル除數ヲ有スル二ツノ商ヲ加フルニハ一方ノ商ニ於ケル除數ト被除數トノ雙方ニ他ノ商ニ於ケル除數ヲ掛ケ,斯クシテ得タル同ジ除數ヲ有スル二ツノ新タナル商ヲ加フレバヨシ

例　　題

1. 此法則ニヨリ $\frac{8}{4}+\frac{12}{3}$ ヲ算出セヨ

2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ ヲ證明セヨ

3. 前ノ例題ノ公式ヲ法則ニ直セ

39. 例(1) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a+b)}{a+b}=a+b$

此割リ算ノ普通算式ハ次ノ如シ

$$
\begin{array}{rl}
a+b) & a^2+2ab+b^2 \quad (a+b \\
 & \underline{a^2+\ ab\qquad} \\
 & \qquad ab+b^2 \\
 & \qquad \underline{ab+b^2} \\
\end{array}
$$

例(2) $\frac{ac+bc+ad+bd}{c+d}=\frac{c(a+b)+d(a+b)}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{c+d}=a+b$

此割リ算ノ普通算式ハ次ノ如シ

$$
\begin{array}{rl}
c+d) & ac+bc+ad+bd \quad (a+b \\
 & \underline{ac\qquad +ad\qquad} \\
 & \qquad bc\qquad +bd \\
 & \qquad \underline{bc\qquad +bd} \\
\end{array}
$$

例　　題

1. 例(2)ノ算式ニ於テ $a=20,\ b=4,\ c=30,\ d=5$ ト置キ, 之ヲ 840 ヲ 35 デ割ル普通ノ割リ算ノ算式ト比較セヨ

本節ノ例ニ倣ヒ第30節及第31節ノ公式ヲ用ヰテ次ノ式ヲ簡單ニセヨ

2. $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}$ $= a-b$

3. $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ $a+b$, $\frac{a^2-b^2}{a+b}$ $a-b$

4. $\frac{ac+bc-ad-bd}{a+b}$, $c-d$ $\frac{ac+bc-ad-bd}{c-d}$ $a+b$

5. $\frac{ac-bc+ad-bd}{c+d}$, $a-b$ $\frac{ac-bc+ad-bd}{a-b}$ $c+d$

6. $\frac{ac-bc-ad+bd}{a-b}$, $c-d$ $\frac{ac-bc-ad+bd}{c-d}$ $a-b$

7. $\frac{x^2-y^2}{x-y}$ $x+y$

$$
\begin{array}{rl}
c+d) & ac-bc+ad-bd \quad (a-b \\
 & \underline{ac\qquad +ad\qquad} \\
 & \qquad -bc\qquad -bd \\
\end{array}
$$

A

第三編 一次方程式

40. 本編ニ於テモ第二編ニ於ケルガ如ク,凡テ文字ハ整數ヲ代表スルモノト定ム,又引キ算ニアツテハ減數ハ被減數ヨリ小ナル場合,割リ算ニアツテハ割リ切レル場合ノミヲ論ズ

符號 = ヲ用ヰテ二ツノ式ヲ相等シト置キタルモノヲ**等式**ト稱スルヿハ前ニ言ヘリ,而シテ符號=ノ右ニアルモノヲ等式ノ**右邊**,其左ニアルモノヲ等式ノ**左邊**ト稱ス

凡テ等式ニ於テ相等シキヿヲ傷ツクルヿナシニ或ル變更ヲ施スヿヲ得例ヘバ等式 $a+b=c$ ニ於テ其各邊ヨリ b ヲ引キ $a=c-b$ ヲ得,又等式 $a-b=c$ ニ於テ其各邊ニ b ヲ加フルトキハ $a=c+b$ ヲ得,乃等式ニ於テ任意ノ項ノ符號ヲ換ヘテ一邊ヨリ他ノ邊ヘ移ストキハ等式ハ依然成リ立ツ,換言スレバ,等式ニ於ケル或ル項ヲ一邊ヨリ他ノ邊ヘ移スニハ其符號ヲ換ヘレバヨシ

等式ニ於ケル或ル項ノ符號ヲ換ヘテ一邊ヨリ他ノ邊ヘ移ストイフベキヲ通例畧シテ唯此項ヲ**他邊ヘ移ス**,或ハ更ニ畧シテ**移項**ストイフ

同ジ數ヲ以テ等式ノ兩邊ニ掛ケ或ハ兩邊ヲ割ルモ等式ハ依然成リ立ツ例ヘバ $a=b$ ナルトキハ $ac=bc$, 又 $ax=b$ ノ兩邊ヲ a デ割リテ $x=\frac{b}{a}$ ヲ得

或ル數ヲ以テ等式ノ兩邊ニ掛ケ或ハ兩邊ヲ割ルトイフベキヲ通例畧シテ或ル數ヲ以テ等式ニ掛ケ或ハ等式ヲ割ルトイフ

例 題

1. $79+21=64+36$ ニ於テ 21 ヲ右邊ヘ 36 ヲ左邊ヘ移シテ後兩邊ノ値ヲ算出セヨ,又 $a+b=c+d$ ニ於テ a ヲ右邊ヘ d ヲ左邊ヘ移セ

2. $18-4$ ガ $6+3+5$ ニ等シキヿヲ式ニテ書キ,斯クシテ得ベキ等式ニ於テ 4 ヲ右邊ヘ移シテ後右邊ノ値ヲ計算セヨ,又 4 ヲ右邊ヘ 6 ト 3 トヲ左邊ヘ移シテ後其兩邊ノ値ヲ算出セヨ

3. 等式 $6+5-3=10-2$ ノ正否ヲ驗メシテ後,左邊ニハ 5 ノミガ殘ル樣ニ移項シテ後右邊ニ於テ示サレタル寄セ算引キ算ヲ實行セヨ

4. $4+7\times8=60$ ノ正シキヿヲ確カメ,4 ヲ右邊ヘ移シ,兩邊ヲ 7 デ割リテ後右邊ノ値ヲ計算セヨ

5. $\frac{18}{6}+4=7$ ニ於テ 4 ヲ右邊ヘ移シ,兩邊ニ 6 ヲ掛ケテ後右邊ノ値ヲ算出セヨ

6. $6+\frac{4\times10}{5}=14$ ノ正シキヿヲ確カメ,6ヲ右邊ヘ移シ,5ヲ掛ケ,4デ割リテ後右邊ノ値ヲ算出セヨ

7. 等式 $4+3\times5=49-4\times5-2\times5$ ノ正シキヲ確カメ,5ナル因數ヲ有スル項ヲ左邊ニ其他ノ項ヲ右邊ニ集メ第27節ノ(丙)ニヨリ左邊ヲ5ト他ノ數トノ積トシテ表ハシテ後兩邊ヲ9デ割レ

8. $6\times4=9+3\times5$ ニ於テ4ノ代リニ $7-3$, 5ノ代リニ $12-7$ ヲ置キ,括弧ヲ去リテ後兩邊ノ値ヲ算出セヨ

9. 前ノ例題ニ於テ括弧ヲ去リタル後7ナル因數ヲ有スル項ヲ左邊ニ集メ例題7ニ倣ヒ左邊ニハ7ノミガ殘ル樣ニ處分セヨ

10. $2x+7=x+12$ ニ於テ7ヲ右邊ヘ x ヲ左邊ヘ移シテ x ノ値ヲ索メヨ

11. $3x+5=x+9$ ニ於テ5ヲ右邊ヘ x ヲ左邊ヘ移シテ後兩邊ヲ x ノ係數デ割リテ x ノ値ヲ索メヨ

12. $ax+b=cx+d$ ニ於テ cx ヲ左邊ヘ b ヲ右邊ヘ移シテ後兩邊ヲ x ノ係數デ割リテ x ノ値ヲ索メヨ

41. 等式ニ二種アリ,一ツハ式中ノ文字ニ任意ノ値ヲ與フルモ相等シキヿノ恒ニ成リ立ツモノナリ例ヘバ x ト a トガ如何ナル値ヲ有スルモ

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

ハ恒ニ眞ナリ,斯クノ如キ等式ヲ**恒等式**ト稱ス

今一ツハ式中ノ文字ニ或ル格段ナル値ヲ與フルニアラザレバ相等シキヿノ成リ立タザルモノナリ,例ヘバ

$$x+3=7$$

ハ x ガ4ナルトキニ限リテ眞ナリ,斯クノ如キ等式ヲ名ヅケテ**方程式**トイフ

注意 恒等式ニ於テハ符號＝ノ代リニ符號≡ヲ用ヰルヿアリ,然レドモ與ヘラレタル等式ガ恒等式ナルカ將タ方程式ナルカハ通例一目シテ瞭然タリ,サナクモ前後ノ關係ヨリシテ容易ニ知ルヿヲ得ルモノナレバ斯クノ如キ特殊ノ符號ヲ用ヰルノ必要アルヿ極メテ罕ナリ,從テ此符號ハ實際ニ用ヰラルルヿ甚ダ稀ナリ

42. 方程式ノ中ニハ必ズヤ索ムルトコロノ數ヲ代表スル文字アリ,此文字即索ムルトコロノ數ヲ**未知數**ト稱ス例ヘバ方程式 $x+3=7$ ニ於テ x ハ未知數ナリ,又設ヘ文字ヲ以テ表ハサレアルモ與ヘラレタル數ナリト看做スベキモノヲ**既知數**ト稱ス例ヘバ方程式

$$x+b=a$$

ニ於テ a ト b トハ與ヘラレタル數ヲ代表スルモノトスレバ x ハ未知數ニシテ a ト b トハ既知數ナリ

代數學ニ於テ既知數ヲ表ハスニハ通例羅馬字ノ始メノ方ノ文字 a, b, c 等ヲ以テシ,未知數ヲ表ハスニハ終リノ方ノ文字 x, y, z 等ヲ以テス,但コレハ唯一ツノ慣例タルニ過ギズシテ是非トモ斯クノ如クセザルベカラズトイフガ如キ理由アルニアラズ

43. 方程式ノ中ニアル未知數ニ代フルニ或ル數値ヲ以テシテ得ベキ等式ガ成リ立ツトキハ,此數値ハ方程式ヲ**滿足スル**或ハ方程式ニ**適合スル**トイヒ,此數値ヲ方程式ノ**根**ト稱ス

方程式ノ根ヲ索ムルヿヲ方程式ヲ**解ク**トイフ

例　　題

1. $7x=14$ ヲ滿足スル x ノ値ヲ索ム
2. $\frac{x}{2}=3$ ニ適合スル x ノ値ヲ索ム
3. 第40節ノ例題3ニ倣ヒ $6+x-3=10-2$ ナル方程式ヲ滿足スル x ノ値ヲ索メヨ
   x = 10-2+3-6　x=5
4. 第40節例題4ニ倣ヒ $4+7x=60$ ヲ解ク
5. 4ニ或ル數ノ七倍ヲ加ヘタル和ハ60ニ等シトイフ,或ル數トハ如何ナル數ナリヤ
6. 或ル數ノ三倍ニ2ヲ加ヘタル和ハ32ニ等シトイフ,或ル數トハ如何ナル數ナリヤ
7. 第40節ノ例題5ニ倣ヒ $\frac{x}{6}+4=7$ ヲ解ク
8. 第40節ノ例題6ニ倣ヒ $6+\frac{4x}{5}=14$ ヲ解ク
9. 第40節ノ例題7ニ倣ヒ $4+3x=49-4x-2x$ ヲ解ク
10. 第40節ノ例題9ニ倣ヒ $6(x-3)=9+3(12-x)$ ノ根ヲ索メヨ
    6x-18=9+36-3x　x=7
11. $3x+1=13$ ノ根ヲ索ム
    6x+3x=9+36+18
12. 前ノ例題ノ方程式ニ於テ x ヲ4ト置キテ驗ヲ行ヘ
13. $x=10$ ガ方程式 $3x-8=x+12$ ヲ滿足スルヿヲ驗メセ

44. 方程式ノ中ニハ唯一ツノ未知數xアリトシ,此方程式中ニハxノミアリテ,xノ第二冪及第二ヨリモ高キ冪ガ現在セザルトキハ此方程式ヲ**一次方程式**ト稱ス,又x及x^2或ハx^2ノミアルトキハ,辭ヲ換ヘテ言ヘバ,方程式中ニアルxノ最高冪ガ其第二冪ナルトキハ,此方程式ヲ**二次方程式**ト稱ス

一次方程式ヲ解ク方法ハ次ノ例ニ就キテ知レ

例(1) $3x-7=x+19$ ヲ滿足スルxノ値ヲ索ム

$$3x-7=x+19$$

7ヲ加ヘテ $3x=x+26$

xヲ引キテ $2x=26$

2デ割リテ $x=13$

驗 $x=13$ナルトキハ $3x-7=32,\ x+19=32$

例(2) $3x+16=10x+9$ ヲ解ク

$$3x+16=10x+9$$

$3x$ヲ引キテ $16=7x+9$

9ヲ引キテ $7=7x$

7デ割リテ $1=x$

驗 $x=1$ナルトキハ $3x+16=19,\ 10x+9=19$

注意 初學者ハ上ノ二例ノ躰裁ニ倣フテ一次方程式ヲ解クベシ,但充分習熟シタル後ハ次ノ諸例ノ示スガ如

ク直チニ第40節ノ方法ヲ適用シテ途中ノ手數ヲ省畧スルヲ可トス

例(3) $3x-8=x+12$ ニ適合スルxノ値ヲ索ム

右邊ノxヲ左邊ヘ移シ左邊ノ8ヲ右邊ヘ移セバ

$$3x-x=12+8 \quad 即 \quad 2x=20$$

之ヲ2デ割リテ答 $x=10$ ヲ得,此答ノ驗ハ既ニ第43節ノ終リニ例題トシテ掲ゲアリ

例(4) $7x+15=30+4x$ ノ根ヲ索ム

適宜移項セバ $7x-4x=30-15$ 即 $3x=15$

之ヲ3デ割リテ 答 $x=5$ ヲ得

驗 $x=5$ナルトキハ $7x+15=50,\ 30+4x=50$

注意 凡テ方程式ヲ解キテ根ヲ得タルトキハ此根ヲ與ヘラレタル方程式ニ當テ嵌メテ驗ヲ行ヒ依ツテ以テ自信ヲ厚フシ着實ニ計算スルノ習慣ヲ養成スベシ,乃先ヅ手初メニ次ノ諸例ニ就キ驗ヲ行ヘ

例(5) $4(3x-2)-2(4x-3)=3(4-x)$ ヲ解ク

掛ケ算ヲ實行シテ $(12x-8)-(8x-6)=(12-3x)$

括弧ヲ外ヅセバ $12x-8-8x+6=12-3x$

移項スレバ $12x-8x+3x=12+8-6$

即 $7x=14$

7デ割リテ $x=2$

例(6)　$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9$　ヲ解ク

各項ニ　$3\times4\times6$　ヲ掛クレバ

$$4\times6\times x+3\times6\times x+3\times4\times x=3\times4\times6\times9$$

即　$24x+18x+12x=648$

即　$54x=648$

54 デ割レバ　$x=12$

此解方ニ於テ最初ニ$3\times4\times6$ヲ以テ掛ケタルハ割リ算ノ痕跡ヲ去ランガ爲メナリ,此目的ヲ達スルコヲ得サヘスレバ必ズシモ$3\times4\times6$ニ限ラズ他ノ數ヲ以テ掛クルモ可ナリ而シテ此場合ニ於テハ12ヲ以テ掛クレバ可ナリ,爰ニ注意スベキハ12ガ3ト4ト6トノ最小公倍數ナルコナリ,今各項ニ12ヲ掛クレバ

$4x+3x+2x=108$　即　$9x=108$　故ニ　$x=12$

例(7)　$2x+11=5x+2$　ヲ解ケ

此例ニ於テxヲ含ム項ヲ左邊ニ集メントスル片ハ$2x$ヨリ$5x$ヲ引カザルベカラザルガ如キ不都合ヲ生ズベシ,此不都合ヲ避ケンガ爲メニハ例(2)ニ於ケルガ如クxヲ含ム項ヲ右邊ニ集メxヲ含マザル項ヲ左邊ニ集ムレバ可ナリ

或ハ又凡テ等式ニ於テ其右邊ト左邊トヲ交換スルモ勿論差支ナキガ故ニ,强ヒテxヲ含ム項ヲ左邊ニ集メソ

ト欲セバ豫ジメ與ヘラレタル等式ニ就キ右邊ト左邊トヲ交換シテ　$5x+2=2x+11$　ト書キ,ソレヨリ

$$5x-2x=11-2,\quad 3x=9,\quad x=3$$

ヲ得,何レニシテモ結局リ同ジコナリ

上ノ諸例ヲ吟味シテ次ノ法則ヲ得

(第一)　方程式ガ割リ算ノ痕跡ヲ示ス片ハ之ニ適當ナル數(通例ハ除數ノ最小公倍數)ヲ掛ケテ此痕跡ヲ除クベシ,又括弧ノアル場合ニハ之ヲ去ルベシ

(第二)　適宜項ヲ移シテ未知數ヲ含ム項ヲ一邊ニ集メ,未知數ヲ含マザル項ヲ他ノ邊ヘ移シ,斯クシテ得ベキ方程式ノ各邊ニ於テ示サレタル運算ヲ實行スベシ

(第三)　xノ係數ヲ以テ方程式ノ兩邊ヲ割リテ以テxノ値即方程式ノ根ヲ索ムベシ

$\boxed{注意}$　方程式ヲ解ク途中ニ於テ未知數ガ消ヘ失セルコアリ,斯クノ如キ方程式ハ唯見懸ケ上方程式タルニ過ギズシテ其實ハ恒等式ナルカ,然ラザレハ不正ノモノナリ例ヘバ

$2(x+3)=\frac{12+4x}{2}$　ヨリシテ　$4x+12=12+4x$　即　$12=12$

ヲ得,即恒等式ナリ,又

$2(x+3)=7+2x$　ヨリシテ　$2x+6=7+2x$　即　$6=7$

ヲ得,故ニ此方程式ハ不正ナリ

第一問題集

次ノ方程式ヲ解ケ

1. $3x+15=x+25$
2. $21x-49=19x-14$
3. $2x-3=3x-7$
4. $3x+23=78-2x$
5. $3x+4=5(x-2)$
6. $7(x-18)=3(x-14)$
7. $16x=38-3(4-x)$
8. $2x+3=16-(2x-3)$
9. $5(x-7)+87=9x$
10. $72(x-5)=63(5-x)$
11. $59(x-7)=61(9-x)-2$
12. $21(4x-5)=24(3x-5)+51$
13. $7(3x+9)=6(8x+4)+4(6x-3)$
14. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$
15. $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=x-7$
16. $\frac{4x}{3}+24=2x+6$　　$4x+72=6x+18$
17. $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$
18. $2x+\frac{7x}{6}+\frac{2x}{3}-\frac{5x}{4}=62$　　$\cancel{x=27}$

$24x+14x+8x-15x=744$

$31x=744$

$x=24$

45. 一次方程式ニヨリテ解クコヲ得ベキ問題ヲ通例畧シテ一次方程式ノ問題ト稱ス,今此種類ノ問題ノ解方ヲ示スニ先ダチ豫備トシテ問題中ノ事實ヲ文字ト符號トヲ以テ書キ表ハスコヲ講ズベシ(第18節ヲ參照セヨ)

例(1)　x ヨリハ a ダケ大ナル數ヲ書ケ

10ヨリハ3ダケ大ナル數ハ 10+3 (即 13), 21ヨリハ4ダケ大ナル數ハ 21+4 (即 25), 50ヨリハ7ダケ大ナル數ハ 50+7 ナルガ如ク, x ヨリハ a ダケ大ナル數ハ $x+a$ ナリ

例(2)　15ヲ二ツノ部分ニ分チ,一部分ヲ x トスレバ他ノ部分ハ $15-x$ ナリ

例(3)　二ツノ數ノ差ガ7ニシテ小ナル數ガ y ナラバ大ナル數ハ $7+y$ ナリ

例(4)　36ヲ二ツノ因數ニ分解シ一ツノ因數ヲ x トスレバ他ノ因數ハ $\frac{36}{x}$ ナリ

例(5)　相連續セル三ツノ數ヲ書ケ,但眞中ノ數ヲ x トセヨ

眞中ノ數ヲ x トスレバ x ノ直グ前ノ數ハ x ヨリ1ヲ引キテ得ベキ $x-1$ ナリ又 x ノ直グ次ノ數ハ x ニ1ヲ加ヘテ得ベキ $x+1$ ナリ故ニ所要ノ數ハ $x-1$, x, $x+1$ ナリ

例(6) 奇數ノ一般ナルモノハ $2m+1$ ニシテ偶數ノ一般ナルモノハ $2n$ ナリ

例(7) 相連續セル三個ノ偶數ヲ書ケ但眞中ノ偶數ヲ $2n$ トセヨ

$2n$ ノ直グ前ノ偶數ハ $2n$ ヨリ 2 ヲ引キテ得ベキ $2n-2$ ニシテ $2n$ ノ直グ次ノ偶數ハ $2n$ ニ 2 ヲ加ヘテ得ベキ $2n+2$ ナリ故ニ索ムルトコロノ三數ハ $2n-2,\ 2n,\ 2n+2$ ナリ

例(8) 最初ニ甲ハ p 圓乙ハ q 圓ヲ所持セシガ甲ハ其後所持金ノ中ヨリ x 圓ヲ乙ニ與ヘタリトスレバ此時甲ハ $(p-x)$ 圓乙ハ $(q+x)$ 圓ヲ所持ス

例(9) 一噸ノ價ヲ a 圓トスレバ x 噸ノ價ハ ax 圓ナリ

例(10) 甲地ヨリ乙地マデノ距離 a 里 b 町ナリトイフ之ヲ町ニ直セ

一里ハ36町ナルガ故ニ a 里ハ $36a$ 町ナリ,乃 a 里 b 町ハ $(36a+b)$ 町ナリ

例(11) 甲ハ x 圓ヲ有シ乙ハ甲ヨリハ y 圓ダケ多ク所有シ丙ハ甲乙兩人ノ所有金合計ノ n 倍ヲ有ストイフ,丙ノ所有金高幾何ナルカ

乙ノ所有金ハ $(x+y)$ 圓ナリ

甲乙所有金合計ハ x 圓 $+(x+y)$ 圓 $=(2x+y)$ 圓ナリ

故ニ丙ノ所有金ハ $(2x+y)$ 圓 $\times n=n(2x+y)$ 圓ナリ

例(12) 或ル人 m 圓ヲ所持シ,p 圓ヲ他人ニ與ヘ,q 圓ヲ費消シ,x 圓ヲ貰ヒ受ケタリトイフ,此時彼ハ幾圓ヲ所有セシカ

此人ノ所有金ハ次ノ如シ

p 圓ヲ與ヘタル後ハ m 圓 $-p$ 圓 $=(m-p)$ 圓

次ニ q 圓ヲ費消シタル後ハ $(m-p)$ 圓 $-q$ 圓 $=(m-p-q)$ 圓

次ニ x 圓ヲ貰ヒ受ケタル後ハ

$$(m-p-q)\text{圓}+x\text{圓}=(m-p-q+x)\text{圓}$$

例(13) 或ル人現今ノ年齡 n 年ナルトキハ,三年前ニ彼ノ年齡ハ $(n-3)$ 年,十年後ニハ $(n+10)$ 年,x 年ノ後ニハ $(n+x)$ 年ナリ

例(14) $a,\ b,\ c$ ハ基數ナリトス,今三桁ノ數ノ百位ノ數字ハ a,十位ノ數字ハ b,一位ノ數字ハ c ナリトスルトキハ此數ハ $100a+10b+c$ ナリ

例(15) 今後 a 年ノ後父ノ年齡ハ現今ノ年齡 b 年ナル子ノ其時ノ年齡ノ三倍ニナルトイフ,父ノ現今ノ年齡如何

a 年ノ後子ノ年齡ハ $(a+b)$ 年ナリ其時ノ父ノ年齡ハ題意ニヨリ $3(a+b)$ 年ナリ,故ニ現今ノ父ノ年齡ハ

$3(a+b)$ 年 $-a$ 年 $=(3a+3b-a)$ 年 $=(2a+3b)$ 年ナリ

例題

1. x ヲ y ヨリ減ズルトキハ何ガ殘ルカ

2. $5k$ ハ $3k$ ヲ超過スルコト幾何ナルカ

3. x ヲ y ニ加フルトキハ如何ナル數ヲ得ルカ

4. 一個 m 錢ノ林檎 x 個ノ價幾何ナルカ

5. x ニ如何ナル數ヲ加フルトキハ y ヲ得ルカ

6. 二ツノ數ノ差ガ13ニシテ小ナル數ガ y ナラバ大ナル數如何

7. 87ハ x ヨリハ幾何ダケ大ナルカ

8. 100ノ內ニ x ガ丁度五ツアルナラバ x ノ値如何

9. x ハ3ヨリハ幾ラ大ナルカ

10. 壹圓ノ中ヨリ x 錢ヲ費消シタル跡ニ殘ル金高幾何ナリヤ

11. $x+a$ ヨリ何ヲ引キタラバ $x-a$ ガ殘ルカ

12. 100ヲ二ツノ部分ニ分テ一部分ヲ x トスレバ他ノ部分ハ如何

13. $3x+4y$ ハ $2x+y$ ヨリハドレダケ大ナルカ

14. 二ツノ數ノ差ハ3ニシテ大ナル數ハ x ナリトイフ,小ナル數如何

15. 書物百冊ノ內 x 冊ハ數學書 y 冊ハ法律書ナリトイフ,數學書及法律書以外ノ書物ノ冊數如何

16. 三個ノ數ノ和ハ79ニシテ第一ノ數ハ x,第二ノ數ハ第一ノ數ヨリハ y ダケ小ナリトイフ,第二ノ數及第三ノ數如何

17. 整數ヲ順ニ並ベタル表ニ於テ a ノ直グ前ノ數及其直グ次ノ數如何

18. 五個ノ相連續セル數ノ眞中ノ數ヲ x トシテ此五個ノ數ヲ順ニ書キ並ベヨ

19. 一冊ニ付 x 圓ノ書籍三十冊ノ價幾何ゾ

20. 反 a 圓ノ田地 x 町歩ノ價幾何ナリヤ

21. x 圓ヲ a 人ニ等分スルトキハ各人ノ取前如何

22. 或ル人現今ノ年齡 x 年ナリ,三年ノ後此人ノ年齡如何,又 c 年ノ後幾何ナリヤ

23. 現今ノ年齡甲ハ a 年乙ハ b 年ナリトイフ,乙ガ生レシ時ノ甲ノ年齡如何

24. 小兒アリ,彼ハ五年前ニ x 歲ナリシトイフ,現今彼ハ何歲ナリヤ又 c 年ノ後幾歲ニナルカ

25. 一時間ニ n 里ノ割ニテ m 里ヲ行クニ幾時間ヲ要スルカ

26. 或ル人 m 日間每日 x 圓宛ヲ得タリトイフ此人合計幾何金ヲ得タリヤ

27. m 年前ニ現今ノ年齡 y 年ナル娘ノ年齡ノ n 倍ノ年齡ナリシ父ノ現今ノ年齡幾何ナリヤ

28. 貳拾圓金貨 x 枚,拾圓金貨 $(x+4)$ 枚,五圓金貨 $3x$ 枚,此金高合計幾何ナリヤ

29. 全軍 x 人ノ中其三ッ一ッハ負傷シ a 人ダケハ死亡セリトイフ,殘リノ人數如何

30. 室ノ長サ a 間幅 b 間高サ c 間ナリトスルトキハ天井及四壁ノ面積合計幾何ナリヤ

一次方程式應用問題

46. 應用問題ヲ解クニハ x ヲ以テ未知數卽所要ノ數ヲ表ハシ,問題中ニ與ヘラレタル條件ヲ式ニテ書キ下ダシ,斯クシテ得タル方程式ヲ解キテ未知數ノ値ヲ索メ,之ヲ適當ニ解釋シテ以テ答トス

例(1) 現今親ハ三十七歳子ハ十二歳ナリ,幾年ノ後親ノ年齡ガ子ノ年齡ノ二倍トナルカ

所要ノ年數ヲ x トスベシ

現今三十七歳ノ親ハ x 年後ニハ $(37+x)$ 歳トナリ

現今十二歳ノ子ハ x 年後ニハ $(12+x)$ 歳トナルベシ

然ルニ題意ニヨリ x 年後ニハ親ノ年齡ガ子ノ年齡ノ

二倍トナル卽

$$2(12+x)=37+x$$

之ヨリ $24+2x=37+x,\quad 2x-x=37-24,\quad x=13$

ヲ得,仍テ次ノ答ヲ得

答 現今ヨリ十三年後

驗 現今ヨリ十三年後ニハ子ハ $(12+13)$ 卽 25 歳トナリ親ハ $37+13$ 卽 50 歳トナル而シテ 50 ハ 25 ノ二倍ナリ

例(2) 或ル數ヲ 3 デ割リタル商ハ此數ヲ 5 デ割リタル商ヲ超過スルコト 8 ナリトイフ,或ル數トハ如何ナル數ナリヤ

所要ノ數ヲ x トス

x ヲ 3 デ割リタル商ハ $\frac{x}{3}$, 又 x ヲ 5 デ割リタル商ハ $\frac{x}{5}$ ナリ而シテ題意ニヨリ

$$\frac{x}{3}-\frac{x}{5}=8$$

15 ヲ掛クレバ $$\frac{15x}{3}-\frac{15x}{5}=8\times15$$

卽 $5x-3x=120,\quad 2x=120,\quad x=60$

答 所要ノ數ハ 60 ナリ

例(3) 金五拾圓ヲ甲乙丙ナル三人ニ分ツニ乙ノ取リ前ハ甲ノ取リ前ヨリハ五圓ダケ多ク,丙ノ取リ前ハ甲,乙兩人ノ取リ前ヲ合ハセタルモノニ等シトイフ,甲乙丙ノ取リ前各幾何ナルカ

甲ノ取リ前ヲx圓トス

乙ノ取リ前ハ$(x+5)$圓

丙ノ取リ前ハx圓$+(x+5)$圓$=(2x+5)$圓

甲乙丙三人ノ取リ前ハx圓$+(x+5)$圓$+(2x+5)$圓

乃題意ニヨリ　$x+(x+5)+(2x+5)=50$

即　$x+x+5+2x+5=50,\quad 4x+10=50,\quad 4x=50-10$

$$4x=40,\quad x=10$$

答　三人ノ取リ前ハ甲拾圓,乙拾五圓,丙貳拾五圓ナリ

注意　凡テ代數學ニ於テ用ヰル文字ハ不名數ヲ表ハスヿ既ニ前ニ述ベタルガ如シ,例ヘバ上ノ例ニ於テ甲ノ取リ前ヲx圓トストイヘリ,一層委シクイヘバxハ甲ノ取リ前ニ於ケル圓ノ數ナリ,xハ決シテ甲ノ取リ前ニアラズ,初學者ハ往往此區別ヲ等閑ニシ動モスレバ甲ノ取リ前ヲxトストイフガ如キヿアリ,而シテ唯xトアリテハ此金高ハ如何ナル單位ニテ表ハサレタルモノナルカヲ知ルニ由ナク其意漠然タリ善ク注意シテ混雜ヲ避クベシ

例(4)　二間二尺ノ長サヲ二ツノ部分ニ分チ一部分ノ三倍ガ他ノ部分ノ四倍ニナル樣ニセヨ

二間二尺ハ14尺ナリ

長キ部分ヲx尺トスレバ,短キ部分ハ$(14-x)$尺ナリ

題意ニヨリ　$3x=4(14-x)$

$3x=56-4x,\quad 3x+4x=56,\quad 7x=56,\quad x=8$

答　長キ部分8尺即一間二尺,短キ部分6尺即一間

注意　問題中ニ上ノ例ニ於ケル二間二尺ノ如キ複名數アルトキハ之ヲ單名數ニ化シ,又問題中ニ單位ヲ異ニスル同種類ノ名數ガ幾ツモアルトキハ豫シメ之ヲ單位ヲ同フスル同名數ニ化シテ後式ヲ作ルベシ,又名數ニ關スル問題ヲ解ク爲メニ作リタル方程式ノ兩邊ハ同名數ノ名ヲ省キタルモノナラザルベカラザルヿニ留意スベシ

例(5)　鶴ト龜トノ數合ハセテ五十八アリテ其足ノ數ハ百五十本アリトイフ,鶴ノ數及龜ノ數各幾何

鶴ノ數ヲxトスレバ鶴ノ足ノ數ハ$2x$ナリ

龜ノ數ハ$58-x$ニシテ龜ノ足ノ數ハ$4(58-x)$ナリ

題意ニヨリ　$2x+4(58-x)=150$

$2x+232-4x=150,\quad 232-150=4x-2x$

$$2x=82,\quad x=41$$

答　鶴ノ數四十一龜ノ數十七ナリ

注意　此問題ハ算術ニ揭ゲアリ,又此問題ヲ解クニハ必ズシモ代數學ヲ煩ハスニ及バズ算術ニテ事足レリ,尙ホコレハ此問題ニ限ラズ本節ノ諸例ノ如キハ之ヲ解クニ必ズシモ文字ヲ要セズ何レモ算術ニテ解クヿヲ得ベ

シ,然レモ此事ハ毫モ代數學ノ價値ヲ輕重スルニ足ラズ.初學者ガ此邊ニ拘泥シ未ダ深ク代數學ヲ學バザルニ其効能ヲ疑フガ如キハ大早計ノ甚ダシキモノナリ,算術ニテ解カントスル𪜈ハ複雜難澁ニシテ實際殆ンド解クヿ能ハザルガ如キ問題モ代數學ハ之ヲ解クニ簡明ニシテ正確ナル方法ヲ與フルモノナルヿ漸次明カニナルベシ

例(6) 一升參拾錢ノ酒六斗ニ一升貳拾貳錢ノ酒幾何ヲ混合スル𪜈ハ平均一升貳拾五錢ノ酒ヲ得ベキヤ

所要ノ一升貳拾貳錢ノ酒ノ升數ヲ x トス

一升參拾錢ノ酒六斗即 60 升ノ價ハ 1800 錢

一升貳拾貳錢ノ酒 x 升ノ價ハ $22x$ 錢

一升貳拾五錢ノ混合酒 $(x+60)$ 升ノ價ハ $25(x+60)$ 錢

故ニ $$1800+22x=25(60+x)$$

$$1800+22x=1500+25x, \qquad 1800-1500=25x-22x$$

$$3x=300, \quad x=100$$

答 一升貳拾貳錢ノ酒 100 升即一石ヲ混合スベシ

注意 代數計算ニ於ケル文字及數ハ總テ不名數ナルヿ既ニ幾回モ述ベタルガ如シ,サレバ上ノ例ニ於テ方程式ヲ解キテ得タル $x=100$ ニ於ケル 100 ハ不名數ナリ,初學者ガ動モスレバ問題ヲ解カントシテ此處ニ達シタルヲ以テ滿足スルハ非ナリ,此處マデニテハ問題ハ未ダ完

全ニ解ケタリト看做スヿ能ハズ,方程式ヲ解キテ得タル 100 ヲ解釋シテ一升貳拾貳錢ノ酒一石ヲ混合スベシトイフ答ヲ得テ玆ニ甫メテ完全ニ問題ヲ解キタルモノナリ,方程式ヲ解クヿハ勿論重要ナルヿナレド,方程式ヲ解キテ得タル數ヲ適當ニ解釋スルヿモ亦問題解方ノ重要ナル部分ナルヿヲ忘ルベカラズ

例(7) 一升 a 錢ノ酒 n 升ニ一升 b 錢ノ酒幾何升ヲ混合スル𪜈ハ平均一升 c 錢ノ酒ヲ得ベキヤ

此問題ニ就キ第一ニ注意スベキハ c ガ a ト b トノ間ノ數ナラザルベカラザルヿナリ,今 $a>c$, $c>b$ トシテ解答セバ,解方ノ筋道ハ前例ト異ナルヿナシ

所要ノ一升 b 錢ノ酒ノ升數ヲ x トス

一升 a 錢ノ酒 n 升ノ價ハ an 錢

一升 b 錢ノ酒 x 升ノ價ハ bx 錢

此合計 $(an+bx)$ 錢

一升 c 錢ノ酒ノ升數ハ $(n+x)$

一升 c 錢ノ酒 $(n+x)$ 升ノ價ハ $c(n+x)$ 錢

故ニ
$$an+bx = c(n+x)$$
$$an+bx = cn+cx$$
$$an-cn = cx-bx$$
$$n(a-c) = (c-b)x$$

$$x=\frac{n(a-c)}{c-b}$$

答 一升b錢ノ酒 $\frac{n(a-c)}{c-b}$ 升ヲ混合スベシ

嚮キニ $a>c$, $c>b$ ナリト假定セリ,然レドモ問題ガ成リ立ツ爲メニハcガ唯aトbトノ間ニサヘアレバ可ナリ,故ニ必ズシモ$a>c$, $c>b$ナルヲ要セズ$a<c$, $c<b$ニテモ可ナリ,今$b>c$, $c>a$ナリトシテ方程式ヲ解クトキハ $x=\frac{n(c-a)}{b-c}$ ヲ得ベシ,而シテ後ニ示スガ如ク

$$\frac{n(a-c)}{c-b}=\frac{n(c-a)}{b-c}$$

ナルガ故ニ茲ニ得タル答ハaトbトノ大小如何ニ關ハラズ恒ニ眞ナリ

上ノ公式ハ總テ此類ノ問題ニ適用スルコトヲ得ベシ,之ヲ辭ニテ言ヒ表ハセバ,升數ノ與ヘラレタル液一升ノ價ト混合液一升ノ價トノ差ニ與ヘラレタル升數ヲ掛ケ,之ヲ混合液一升ノ價ト升數ノ索メラレタル液一升ノ價トノ差デ割リテ以テ索ムルトコロノ升數ヲ得ベシ

第二問題集

1. 一部分ノ二倍ガ他ノ部分ノ三倍ニナル様ニ10ヲ二ツノ部分ニ分テ

2. 或ル數ノ二倍ト三倍トノ和ガ36ヨリ此數ノ七倍ヲ引キタル差ニ等シトイフ,或ル數トハ如何ナル數ナリヤ

3. 甲乙丙三人ノ間ニ金參拾六圓ヲ配分セシニ,乙ハ甲ノ二倍丙ハ乙ノ三倍ヲ得タリトイフ,三人ノ取リ前各如何

4. 或ル數ニ56ヲ加フルトキハ元ノ數ノ三倍トナルトイフ,依ツテ此數ヲ索ム

5. 日ニ五里宛行ク人ガ出立シテ後八日ヲ經テ日ニ九里宛行ク人ガ出立シテ前ノ人ノ跡ヲ追ヘリトイフ,幾日ノ後追ヒ付クベキ乎

6. 84ヲ二ツノ部分ニ分チ一部分ノ三倍ガ他ノ部分ノ四倍ニナル様ニセヨ

7. 金六千圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分ツニ乙ノ取リ前ハ甲ノ取リ前ノ三倍ヨリハ貳百圓少ナク,丙ノ取リ前ハ乙ノ取リ前ノ四倍ヨリハ貳百圓多シトイフ,三人

ノ取リ前各如何

8. 一部分ノ三倍ガ他ノ部分ノ七倍ヲ超過スルヿ15ナルガ如クニ75ヲ二ツノ部分ニ分テ

9. 乙ハ甲ヨリハ拾五圓ダケ多ク,丙ハ乙ヨリハ貳拾圓ダケ多ク出シ,甲乙丙三人ニテ合計百五拾五圓醵金セリトイフ,三人ノ出金高各幾何ゾ

10. 二數ノ和ハ20ニシテ,一方ノ數ノ三倍ト他ノ數ノ五倍トノ和ハ84ナリトイフ,二ツノ數トハ如何ナル數ナリヤ

11. 或ル會合ニ於テ最初男ノ數ハ女ノ數ノ三倍ナリシガ八組ノ夫婦連ガ去リタル後ハ男ノ數ハ女ノ數ノ五倍トナレリトイフ,最初ニ男女各幾人居リシ乎

12. 100ヲ二ツノ部分ニ分チ一部分ヲ5デ割リタル商ト他ノ部分ヲ3デ割リタル商トノ和ガ24ニナル樣ニセヨ

13. 一部分ヲ2デ割リタル商ガ他ノ部分ノ二倍ニナル樣ニ45ヲ二ツノ部分ニ分テ

14. 甲乙丙三人ニテ七拾六圓ヲ義捐セリ而シテ乙ハ甲ヨリハ拾圓ダケ多ク丙ハ甲乙兩人分ダケ出セリトイフ,三人ノ義捐高各幾何ゾ

15. 金貳百四拾圓ヲ二十人ニ分配セシニ其内ノ若干

人ハ六圓宛殘リノ人數ハ拾六圓宛貰ヘリトイフ,六圓宛ヲ貰ヒシ人數如何

16. 甲乙丙三人ニテ貳百七拾六圓ヲ出金セリ而シテ乙ハ甲ノ出金高ノ二倍ヨリハ拾貳圓ダケ多ク,丙ハ乙ノ出金高ノ三倍ヨリハ拾貳圓ダケ多ク出セリトイフ,甲乙丙ノ出金高各如何

17. 或ル棟梁一人ノ大工ヲ同居セシメ,彼ガ働キタル日ニハ彼ガ食料ヲ拂フヿヲ要セザルノ外ニ彼ニ五拾錢ヲ給シ,彼ガ働カザル日ニハ彼ヨリ食料トシテ參拾錢ヲ納メシムル約束ヲナセリ,八十日ノ後彼ガ辭シ去ラントスルニ際シ勘定セシニ丁度貸借ナカリシトイフ,大工ガ働キシ日數幾何

18. 或ル人金五百五拾圓ヲ甲乙丙丁ノ四人ニ分與セリ而シテ乙ハ甲ノ二倍丙ハ甲乙兩人分ダケ丁ハ乙丙兩人分ダケ貰ヒ受ケタリトイフ四人ノ貰ヒ高各幾何ナルカ

19. 現今親ハ三十歳子ハ二歳ナリ幾年ノ後親ノ年齡ガ子ノ年齡ノ八倍トナルカ

20. 或ル人ノ年齡ハ娘ノ年齡ノ五倍ナリ,三年前ニハ此人ノ年齡ハ娘ノ年齡ノ八倍ナリシトイフ,此人及娘ノ現今ノ年齡如何

21. 親ノ年齡ハ子ノ年齡ノ三倍ニシテ,四年前ニハ親ノ年齡ハ子ノ年齡ノ四倍ナリシトイフ,親子ノ年齡各幾何ナリヤ

22. 六人兄弟アリ,各ノ年齡ハ其直グ次ノ弟ノ年齡ヨリハ四年ダケ多ク且長男ノ年齡ハ末子ノ年齡ノ三倍ナリトイフ,長男及末子ノ年齡各如何

23. 水ヲ以テ滿タサレタル同容積ノ樽二個アリ,一ツノ樽ヨリハ三升六合今一ツノ樽ヨリハ八升汲ミ出シタル跡ニ一ツノ樽ノ中ニハ他ノ樽ノ中ニ殘レル水ノ五倍ダケノ水ガ殘リ居レリトイフ,樽ノ容積如何

24. 金若干圓ヲ甲乙丙三人ノ間ニ分ケシニ甲ト乙トノ取リ前ハ合ハセテ六拾圓,甲ト丙トノ取リ前ハ合計八拾圓,乙ト丙トノ取リ前ハ都合九拾貳圓ナリトイフ,甲乙丙各ノ取リ前幾何ゾ

25. 某數アリ,其3倍ヨリ11ヲ引キタル差ノ4倍ニ6ヲ加ヘタルモノヲ更ニ5倍スルトキハ50トナルトイフ,某數如何

26. 若干冊ヨリ成ル書物アリ其定價ハ八圓拾錢ニシテ豫約直段ハ六圓八拾錢ナリ但豫約直段ハ定價ヨリハ一冊ニ付拾參錢宛廉價ナリトイフ,此書物ノ冊數如何

27. 一升參拾錢ノ酒ト一升五拾錢ノ酒トヲ混合シテ一升參拾五錢ノ酒一石ヲ造ラントス,各種ノ酒幾何ヲ混合スベキカ

28. 甲ハ百圓乙ハ四拾八圓ヲ所持セシニ兩人共ニ盜難ニ罹リ甲ハ乙ノ二倍ヲ失ヘリ而シテ甲ハ尙ホ乙ニ比ベテ三倍ノ殘金ヲ所持シ居レリトイフ,兩人ノ盜マレシ金高各如何

29. 子供若干人ニ蜜柑ヲ與フルニ各ニ五ツ宛與フルニハ二ツ不足シ,各ニ四ツ宛與フルトキハ三ツ餘マルトイフ,子供ノ人數及蜜柑ノ個數各如何

30. 甲乙兩人ノ所持金合計四拾圓ナリ,甲ガ乙ヨリ拾圓貰ヒ受ケタル後甲ノ所持金ハ乙ノ所持金ヨリハ六圓ダケ多クナレリトイフ最初甲乙ハ各幾何ノ所持金ヲ有セシヤ

31. 昔希臘國ニぴたごらすトイヘル學者(初等幾何學ニ於テ著名ナルぴたごらすノ定理即直角三角形ニ於テ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二ツノ邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シトイフ定理ヲ發見シタル人)アリケリ,或ル人或ル時彼ニ門弟ノ人數ヲ問ヘリ,彼ハ恰モ謎ノ如ク答ヘテ曰ク門弟總數ノ內半分ハ哲學三ツ一ツハ數學ヲ修メ,未ダ專門ヲ定メザル殘リノ人數ト近日ノ

中新タニ入門セントスル三人トヲ加フルトキハ丁度哲學數學ヲ修ムル人數ノ四ツ一ツトナルト,此時彼ハ幾人ノ門弟ヲ有セシヤ

32. 金若干圓ヲ甲乙丙丁戊ノ五人ニ配分スルニ,乙ハ甲ヨリハ拾圓ダケ少ナク,丙ハ乙ヨリハ拾六圓ダケ多ク,丁ハ丙ヨリハ五圓ダケ少ナク,戊ハ丁ヨリハ拾五圓ダケ多ク受取レリ而シテ戊ハ恰モ甲乙兩人分ダケヲ受取リタリトイフ,各人ノ取リ前如何

$\frac{1}{4}(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}) = (x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+3)$

(31) $3x+2x = 24x-12x-8x+72$

$5x-4x=72$

$x=72$

(32) $x + x+10 = x+36$

$x = 26$

回 此ノ父ハ正整數ニノミニツキテ
論ゼラレないモノナリ

第四編 負數及分數

47. 此處マデハ文字ハ總テ尋常ノ整數ヲ代表スルモノトセリ,サレバ a ヨリ b ヲ引クコヲ得ルハ $a>b$ ナル塲合ニ限リ, a ヲ b デ割ルコヲ得ルハ a ガ b ノ倍數ナル塲合ニ限レリ

上ノ二ツノ制限ガ代數計算上ニ及ボセル不便尠カラズ,唯一例ヲ擧ゲンニ,加號減號ヲ以テ結ビ付ケラレタル代數式ニ於テ項ノ順序ヲ變フルニ際シ吾人ハ恒ニ小ナル數ヨリ大ナル數ヲ引クガ如キ塲合ニ立チ至ラザル樣ニ注意セザルベカラザリシ而シテ此困難ハ式中ノ文字ノ數値ヲ知ルコ能ハザル塲合ニ於テ特ニ顯著ナリトス

且ソレ代數計算ニ制限アルトキハ之ニ依テ得ルトコロノ結果モ亦其影響ヲ被ムルベキヤ明カナリ,元來代數學ノ目的トスルトコロハ之ニ依テ得ルトコロノ結果ガ出來得ル限リ廣ク一般ニ通用スルニアルガ故ニ斯クノ如キ制限ノ存在スルハ甚ダ好マシカラザルコナリ,設シ適當ナル方法ニヨリ此制限ヲ撤去スルコヲ得バ其代數計算ヲ自由ニシ,文字ノ効用ヲ擴張スルコ多言ヲ俟タザルベシ

數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ次ニ論ズル負數及分數ナルモノヲ數ノ中ニ仲間入セシムルト同時ニ上ノ制限ハ自然ニ消滅スベシ

負　數

48. 整數ヲ順ニ列ベタル

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,...........

ニ就キテ考フルニ左ヨリ右ヘ進ムニハ, 1ニ1足シテ2, 2ニ1足シテ3, 3ニ1足シテ4, ...次第ニ斯クノ如クシテ1ダケ宛大ナル數ヲ得, 今此中ノ任意ノ數例ヘバ5ヨリ始メテ後戻リスルニハ5ヨリ1引キテ4, 4ヨリ1引キテ3, 3ヨリ1引キテ2, 2ヨリ1引キテ1ヲ得

1ヨリ1引キテ0ヲ得

0ヨリ1引キテ如何ナル數ヲ得ルカト問フニ數トイフ辭ノ從來ノ意味ニ於テハ斯クノ如キ數アルコトナシ, 然レドモ此事ハ毫モ數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ0ヨリ1引キタルモノヲ一ツノ新ラシキ數ト看做スコトヲ妨ゲズ

0ヨリ1引キテ得ベキ新タナル數ヲ表ハスニ −1 ヲ以テシ之ヲ「マイナス」一或ハ負ノ一ト呼ブ, 即

$$0-1 = -1$$

茲ニ特ニ注意スベキハ左邊ニ於テ0ヨリ1ヲ引クベ

キヲ示ス符號一ハ演算ノ符號ニシテ右邊ニ於テ1ノ前ニアル符號一ハ此1ノ尋常ノ1ト異ナル性質ヲ表ハス符號ナルコトナリ

0ヨリ2引キテ −2 ヲ得, 又2ヲ引クハ結局1ヲ二度引クニ同ジキガ故ニ0ヨリ1引キテ −1 ヲ得更ニ −1 ヨリ1引キテモ −2 ヲ得

−2ヨリ1引キテ −3, −3ヨリ1引キテ −4, 次第ニ斯クノ如クシテ1ダケ宛小ナル數ヲ得, 乃推シ擴メラレタル意味ニ於ケル數ヲ順ニ列ベタルモノハ

.......−6, −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

ナリ

上ノ如クニシテ數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴ムルト同時ニ引キ算ニ於テ被減數ハ減數ヨリ大ナラザルベカラズトイフ制限ハ全ク消滅スルモノトス, 例ヘバ5ヨリ8ヲ引カンニ8ヲ引クハ1ヲ8度ビ引クニ同ジ即上ノ表ニ於テ5ヨリ始メテ右ヨリ左ヘ5單位ダケ後戻リシテ0ニ達シ更ニ0ヲ越ヘテ3單位ダケ逆行シテ −3 ニ達ス

即　$5-8=-3,$

或ハ　$5-8=5-(5+3)=5-5-3=0-3=-3$

49. 符號一ヲ前ニ有スル數ヲ凡テ**負數**ト稱シ, 之ニ對シ元ノ數ヲ**正數**ト稱ス

負數ハ被減數ガ0ナル塲合ニ於ケル差ヲ新規ノ數トシテ考ヘタルモノナリトイフヿヲ得ベシ

負數トノ區別ヲ特ニ明示スルノ必要アル塲合ニハ正數ヲ次ノ如ク書ク

$+1,\ +2,\ +3,\ +4, \ldots\ldots$

+4ヲ「プラス」四或ハ正ノ四,−4ヲ「マイナス」四或ハ負ノ四ト呼ブ,正數負數ノ呼ビ聲ハ凡テ之ニ準フ

50. 符號+及−ハ元來演算ノ符號ナレド向後同ジ符號ハ數ノ正數タリ又ハ負數タルヲ示ス爲メニモ用井ラルルヿニナレリ,後ノ塲合ニ於テハ此二ツノ符號ヲ**性質ノ符號**ト稱ス

乃向後符號+及−ハ演算ノ符號ニモ亦性質ノ符號ニモ用井ラルルモノト心得ベシ,例ヘバ5−8=−3ニ於テ左邊ノ符號−ハ演算ノ符號即減號ナリ,右邊ノ符號−ハ性質ノ符號ナリ

性質ノ符號+ヲ**正號**,性質ノ符號−ヲ**負號**ト稱ス,正號ハ屢之ヲ畧スルヿアリ,然レドモ負號ハ決シテ之ヲ畧スルヿナシ

或ル數ノ符號トハ其正號又ハ其負號ノコトナリ

或ル數ヲ其符號ニ拘ハラズニ考ヘタルモノ即或ル數ニ就キ其符號ヲ取リ除キタルモノヲ此數ノ**絶對値**

ト稱ス例ヘバ+5ノ絶對値ハ5ニシテ,−5ノ絶對値モ矢張リ5ナリ

5ト−5,一般ニハaト$-a$トヲ符號ヲ異ニシテ絶對値ヲ同フスル數ナリトイフ

注意 同一ノ符號+,−ヲ或ハ加號減號或ハ正號負號トシテ用井ルヿ一見不都合ナルガ如クナレド其實ニ不都合ナラザルノミナラズ甚ダ便利ナルヿ後ニ至リテ明カニナルベシ

51. 第48節ニ掲ゲタル正數負數ヲ順ニ列ベタル表ニ就キテ考フルトキハ次ノ言ノ眞ナルヲ悟ルヲ得ベシ

(第一) 零ハ正數ト負數トノ境界ニシテ單位ノ存在セザルヿヲ示ス

(第二) 零ハ何レノ負數ヨリモ大ナリ,$-a$ハ0ヨリハa單位ダケ小ナリ

(第三) 凡テ正數ハ何レノ負數ヨリモ大ナリ

(第四) 二ツノ負數ノ大ナル方ガ小ナル絶對値ヲ有ス例ヘバ $-15>-24$

例 題

1. 0ヨリ7ヲ引クトキハ如何ナル數ヲ得ルカ
2. −2ヨリ1ヲ引ケ,又−2ヨリ2ヲ引ケ
3. −5ヨリ2ヲ引ケ,又−5ヨリ3ヲ引ケ

4. −1 ヨリ 6 ヲ減ゼヨ

5. −2 ヨリ 5 ヲ引クトキハ −7 ヲ得ベシ,之ヲ式ニ書ケバ −2−5=−7, 此等式ニ於テ何レノ符號ガ演算ノ符號ニシテ何レノ符號ガ性質ノ符號ナリヤ

6. 0 ト −3 トハ何レカ大ナリヤ

7. −10 ハ −7 ヨリハ幾單位ダケ小ナリヤ

8. 13 ハ 5 ヨリハ幾ツダケ大ナリヤ

9. −13 ハ −5 ヨリハ幾ツダケ小ナリヤ

10. −13 ハ 5 ヨリハ幾ツダケ小ナリヤ

52. 應用上ニ於ケル解釋 金五千圓ヲ所持セル人金貳千圓ノ損失ヲ被レリトスルトキハ此人ノ財産ハ所持金 5000 圓ヨリ損失金 2000 圓ヲ引キテ得ベキ金 3000 圓ナリ,一般ニ金 a 圓ヲ所持セル人金 b 圓ノ損失ヲ被レリトスルトキハ此人ノ財産ハ $(a-b)$ 圓ナリ

次ニ金參千圓ヲ所持セル人金四千圓ノ損失ヲ被レリトスルトキハ,此人ノ財産幾何ナリヤト問フニ,前ト同ジ計算法ニヨルトキハ 3000−4000=−1000 ナルガ故ニ,此人ノ財産ハ −1000 圓ナリ,之ヲ實際ノ事實ニ照ラスニ,此場合ニ於テ損失高ハ所持金高ヨリ大ニシテ損失金四千圓ノ内金參千圓ダケハ所持金ヲ以テ償ヒ得ルモ跡ニ損失金壹

千圓ダケハ負債トシテ存在スルモノナリ,サレバ −1000 圓ノ財産トハ 1000 圓ノ負債ノコトナリト解釋スベキモノトス

注意 世ノ中ノ實際ニ於テハ壹千圓ノ負債トイフベキヲ「マイナス」壹千圓ノ財産トイフガ如キヿナシ,此レハ唯負數ノ効用ヲ完カラシメンガ爲メニ便宜代數學中ニ於テノミ用ヰル言ヒ方ナルヿヲ忘ルベカラズ,元來吾人ガ負數ナルモノヲ代數學中ニ入レタルハ引キ算ニ於ケル制限ヲ撤回センガ爲メナリ,サレバ負數ヲ實際問題ニ應用スル前ニ既ニ負數アリ,乃負數ハ主ニシテ實際問題應用上ニ於ケル負數ノ解釋ノ如キハ抑モ亦從ナリ,初學者ハ能ク注意シテ此區別ヲ混同セザル樣ニスベシ,從來解釋ヲ前キニシ負數ヲ後ニシ,上ノ如キ解釋ニヨリテ負數ヲ説明セントシタルガ如キハ,事ノ本末ヲ辨ゼズ物ノ主從ヲ誤レルモノナリ,徒ラニ簡易即諒ヲ貴ブノ極却ツテ初學者ヲシテ動モスレバ負數ヲ誤解セシムルニ至ル其源因ハ實ニ焉ニ在リテ存ス深ク注意スベキナリ

53. 資産負債,收入支出,損得,或ル時期ノ前後,進退,定點ヨリ反對ノ方向ニ測リタル距離ノ如ク事物ガ反對ノ有樣ニ成リ立ツヿヲ得ル場合ニハ負數ヲ應用スルヿヲ得

事物ノ何タルニ拘ハラズ $+a$ ハ其事物 a 單位ダケヲ表ハシ $-a$ ハソレト反對ノ事物 a 單位ダケヲ表ハス

例(1) 資産ヲ考フル場合ニハ +1000圓ハ千圓ノ資産ヲ意味シ −1000圓ハ千圓ノ負債ヲ意味ス

例(2) 負債ヲ考フルトキニハ +100圓ハ百圓ノ負債ヲ表ハシ −100圓ハ百圓ノ資産ヲ表ハス

例(3) 或ル年ヨリ後ノ年數ヲ表ハスニ正數ヲ以テスルトキハ負數ハ其年ヨリ前ノ年數ヲ表ハス

例題

1. −500圓ノ損失ノ意味如何
2. 「マイナス」壹千萬圓ノ支出ノ解釋如何
3. 得ヲ考フルトキニハ −100圓ハ何ヲ表ハスカ
4. −1000圓ノ利益トアルヲ如何ニ解釋スベキカ
5. 元標ヨリ眞南ニ測リタル距離ヲ正トスルトキハ −3里ハ如何ナル距離ヲ表ハスヤ
6. 「マイナス」千米突退クトイフ意味如何
7. 土地ノ高サヲ言ヒ表ハスニ海面ヲ拔クヿ若干尺ト唱フルヿアリ,海ノ深サ四千八百尺トイフベキヲ海面ヲ拔クヿ幾何ト唱フベキ乎

負數ノ計算ニ係ル規約

54. コレヨリ負數ノ計算法ヲ述ベントス,爰ニ注意スベキハ負數ナルモノハ全ク新タナル數ニシテ結局リ一種ノ符牒ト看做スベキモノナルガ故ニ負數計算ノ法則ハ是非トモ斯クセザルベカラズトイフガ如キ理由ニ基ヅクモノニアラズシテ畢竟隨意ニ定メ得ル事ヲ負數ヲ代數學中ニ入レタル本來ノ目的ニ照ラシテ適當ニ定メタルモノナリ,換言スレバ,負數計算ノ法則ハ之ヲ證明スベキ性質ノモノニアラズシテ單ニ適當ナル規約タルニ過ギザルナリ

既ニ負數トイヒ又數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メテ負數ヲモ數ノ中ニ仲間入セシメタルカラニハ,正數ニ係ル定理公式法則ハ凡テ負數ニモ當テ嵌マル樣ニ負數計算ノ法則ニ係ル規約ヲ定メザルベカラズ,前ニ負數ヲ代數學ニ入レタル本來ノ目的ニ照ラシテ適當ニ定ムルトイヘルハ此意ニ外ナラズ,實ニ負數ノ計算ニ係ル規約ヲ定ムル唯一ノ根據ナリ

注意 負數計算ノ法則ノ基ヅクトコロハ隨意ニ定メテ差支ナキヿヲ適當ニ定ムルトイフニ過ギズシテ極メテ簡單ナリ,吾人ハ唯其規約ノ中ニ矛楯撞着スルトコロ

ナキヲ確ムレバ可ナリ,然レトモ兎角初學者ニアリ勝チナルハ負數計算ノ法則ニ關シ無キ理由ヲ知ラントスルノ結果トシテ動モスレバ負數計算ヲ困難視スルヿナリ,搗テヽ加ヘテ從來應用上ニ於ケル負數ノ解釋ヲ援キ來リテ負數計算ノ根據ヲ曖昧ニ附シ去リ初學者ノ負數ニ係ル理會ヲ五里霧中ニ彷徨セシメタルガ如キハ簡易ナランヿヲ索メテ却ツテ無キ困難ヲ造リ出セルモノナリ

負數ノ寄セ算引キ算

55. 負數ハ小ナル數ヨリ大ナル數ヲ引キテ得タル新タナル數ニシテ結局リ0ヨリ或ル數ヲ引キテ得タル數ナリ

$$5-8=-3=-(8-5),$$

一般ニ $a<b$ ナルトキハ $\qquad a-b=-(b-a)$

負數ニ正數ヲ加ヘ若シクハ負數ヨリ正數ヲ引クニ付テハ特ニ規約ヲ設クルノ必要ナシ

例ヘバ -5 ニ 3 ヲ加フルニハ正數負數ヲ大小ノ順ニ並ベタル表

$$\ldots . -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, \ldots .$$

ニ於テ -5 ヨリ始メテ左ヨリ右ヘ三單位ダケ數ゾヘテ

-2 ニ達ス,乃 $-5+3=-2$, 同様ニ $-5+8=+3$, 一般ニ a ト c トハ正數,從ツテ $-c$ ハ負數ヲ表ハシ且

$a<c$ ナルトキハ $\qquad -c+a=-(c-a)$

$a>c$ ナルトキハ $\qquad -c+a=+(a-c)$

又 -5 ヨリ 3 ヲ引クニハ上ノ表ニ於テ -5 ヨリ始メテ右ヨリ左ヘ三單位ダケ數ゾヘテ -8 ニ達ス,乃 $-5-3=-8$, 一般ニ $-c-a=-(c+a)$

例 題

1. -13 ニ 5 ヲ加ヘヨ　　2. -13 ニ 17 ヲ加ヘヨ

3. -3 ヨリ 8 ヲ引ケ

56. 負數ヲ加フルトイフヿハ未ダ意味ヲ有セズ,仍テ次ノ規約ヲ設ケテ其意味ヲ定ム

負數ヲ加フルニハ其絕對値ヲ引ケ

此規約ノ結果トシテ,或ル數ヲ加ヘテ後同ジ數ヲ引クトキハ寄セ算引キ算ハ無効ニ歸セザルベカラザルガ故ニ

負數ヲ引クニハ其絕對値ヲ加ヘヨ

式ニテ書ケバ $\qquad +(-c)=-c, \qquad -(-c)=+c$

例ヘバ $\qquad 8+(-5)=8-5=3, \qquad 3+(-5)=3-5=-2,$

$$-3+(-5)=-3-5=-8, \quad 8-(-5)=8+5=13,$$

$$-3-(-5)=-3+5=2, \quad -10-(-7)=-10+7=-3$$

例　題

1. 13ニ -6 ヲ加ヘヨ	2. 3ニ -17 ヲ加ヘヨ
3. -7 ニ -3 ヲ加ヘヨ	4. 75ヨリ -25 ヲ引ケ
5. -10 ヨリ -15 ヲ引ケ	6. -72 ヨリ -22 ヲ引ケ

57. 前二節ニヨリ $+a$ ト $+c$ トハ正數,從ツテ $-a$ ト $-c$ トハ負數ヲ表ハストシ次ノ公式ヲ得

寄セ算	引キ算
$(+a)+(+c)=a+c$	$(+a)-(+c)=a-c$
$a>c,\ (+a)+(-c)=a-c$	$(+a)-(-c)=a+c$
$a<c,\ (+a)+(-c)=-(c-a)$	$(-a)-(+c)=-a-c$
$c>a,\ (-a)+(+c)=c-a$	$c>a,\ (-a)-(-c)=c-a$
$c<a,\ (-a)+(+c)=-(a-c)$	$c<a,\ (-a)-(-c)=-(a-c)$
$(-a)+(-c)=-a-c$	

乃數ノ正數タリ負數タルニ拘ハラズ一般ニ

(第一)　符號ノ同ジキ二ツノ數ヲ加フルニハ二ツノ數ノ絕對値ヲ加ヘ其符號ヲ和ノ前ニ置クベシ

(第二)　符號ノ異ナル二ツノ數ヲ加フルニハ絕對値ノ大ナルモノヨリ絕對値ノ小ナルモノヲ引キ,絕對値ノ大ナル方ノ數ノ符號ヲ差ノ前ニ置クベシ

(第三)　二ツノ數ノ差ヲ索ムルニハ減數ノ符號ヲ換ヘタルモノヲ(第一)(第二)ニヨリ被減數ニ加フベシ

58. 元來 $a-c$ ハ a ヨリ c ヲ引キタル差ヲ表ハシ,$a-c$ ニ於ケル符號 $-$ ハ減號ナリ,然レドモ又前節ニヨリ $a-c$ ハ a 即 $+a$ ト $-c$ トノ和ニ等シキガ故ニ $a-c$ ニ於ケル符號 $-$ ヲ負號ト看做スモ差支ナシ

$-c$ ニ於ケル符號 $-$ ハ負號ナリ,然レドモ $-c$ ハ $0-c$ ニ等シク,$0-c$ ニ於ケル符號 $-$ ハ減號ナルガ故ニ $-c$ ニ於ケル符號 $-$ ヲモ減號ト看做シテ差支ナシ

總テノ式ニ於テ符號 $+$ ヲ或ハ加號或ハ正號ト看做シテ差支ナキコハ特ニ之ヲ說明スルノ必要ナカルベシ

斯クノ如ク同一ノ式ニ於テ符號 $+,-$ ヲ或ハ加號減號,或ハ正號負號ト看做シテ更ニ差支ナキガ故ニ同ジ符號ヲ兩樣ニ用ヰルコ一見不都合ナルガ如クナレドモ其實啻ニ不都合ナラザルノミナラズ非常ニ便利ナルコ明カナルベシ

既ニ負數ヲ數ノ中ニ仲間入セシメタルカラニハ,數ハ正數ニアラザレバ負數,負數ニアラザレバ正數,辭ヲ換ヘテ言ヘバ,數ハ凡テ符號ヲ有スルモノト看做スコヲ得ベシ,而シテ符號ヲ有スル數ノ和ヲ書クニハ唯之ヲ列ベテ書クモノトス例ヘバ $+3$ ト -5 ト -4 トノ和ヲ $+3-5-4$,$+a$ ト $-b$ ト $+c$ トノ和ヲ $+a-b+c$ ト書ク,但初項ニ限リ符號 $+$ ハ通例之ヲ省クモノトス,乃 $+3-5-4$ ヲ通例 $3-5-4$,

$+a-b+c$ ヲ通例 $a-b+c$ ト書クガ如シ

符號ヲ有スル數ノ差ヲ書クニハ減數ノ符號ヲ換ヘタルモノヲ被減數ノ次ニ列ベテ書ケバヨシ例ヘバ $+a$ ヨリ $+c$ ヲ引キタル差ヲ $+a-c$ 或ハ $a-c$, $+a$ ヨリ $-c$ ヲ引キタル差ヲ $+a+c$ 或ハ $a+c$ ト書ク

上ノ如クニ定メタル符號ヲ有スル數ノ和ヲ**代數的ノ和**,差ヲ**代數的ノ差**ト稱ス,尤モ算術的ノ和又ハ差ト混淆スルノ恐レナキ場合ニハ畧シテ唯和又ハ差ト稱ス

$a-c$ ハ $+a$ ヨリ $+c$ ヲ引キタル差ニシテ又 $+a$ ト $-c$ トノ代數的ノ和ナリ

$a+c$ ハ $+a$ ト $+c$ トノ和ニシテ又 $+a$ ヨリ $-c$ ヲ引キタル代數的ノ差ナリ

注意　算術ノ寄セ算ニ於テハ和ハ被加數ノ何レヨリモ大ニシテ寄セルトイフヿハ增大ノ意ヲ含ミ,又引キ算ニ於テ差ハ被減數ヨリ小ニシテ引クトイフヿハ減小ノ意ヲ含ムモノナレド,代數的ノ和及差ニアツテハ然ラズ,此場合ニ於テハ寄セル引クトイフヿハ毫モ增減ノ意味ヲ含マズ例ヘバ -3 ト -5 トノ和ハ -8 ニシテ -8 ハ -3 ヨリモ又 -5 ヨリモ小ナリ,8 ヨリ -3 ヲ引キタル差ハ 11 ニシテ 11 ハ 8 ヨリモ大ナリ

59. 符號 $+$, $-$ ハ隨意ニ或ハ加號減號或ハ正號負號ト看做スヲ得ルヿノ大ヒニ便利ナルヿヲ示サンガ爲メニ例ヲ舉ゲンニ, $+8$ ト -3 トノ和ハ $8-3$ ナリ,爰ニ符號 $-$ ハ負號ナリ然レ𪜈此儘之ヲ減號ト看做シテ差支ナキガ故ニ 8 ヨリ 3 ヲ引キテ $+8$ ト -3 トノ和トシテ 5 ヲ得,設シ正號負號ニ他ノ符號ヲ用ヰルトスルトキハ一一書キ直シテ後計算セザルベカラズ其不便ナルヿ多言ヲ俟タザルベシ

五個ノ數 -2, $+5$, -13, -4, $+8$ ノ和ヲ索メンニ -2 ト $+5$ トノ和ハ $+3$, $+3$ ト -13 トノ和ハ -10, -10 ト -4 トノ和ハ -14, -14 ト $+8$ トノ和ハ -6 ニシテ此レ即所要ノ和ナリ

或ハ負數 -2, -13, -4 ヲ加ヘテ -19, 正數 $+5$, $+8$ ヲ寄セテ $+13$ ヲ得而シテ後所要ノ和 $+13-19=-6$ ヲ索ムルヿヲ得ベシ

此外ニ尙ホ五個ノ數ヲ $-2-13+5+8-4$, $8-13-2-4+5$ ノ如ク種種ノ順序ニ加フルモ何時モ -6 ヲ得ベシ

一般ニ代數的ノ和ニ於テ項ノ順序ヲ勝手ニ變更スルモ其値ハ變ハルヿナシ

偖テ正號負號ハ之ヲ加號減號ト看做シテ差支ナキガ故ニ此定理ハ又次ノ如クニ言ヒ表ハスヿヲ得ベシ

加號減號ヲ以テ結ビ付ケラレタル式ニ於テ項ノ順序ヲ勝手ニ變更スルコヲ得

此定理ハ既ニ第24節ニ揭ゲアリ,然レド當時減數ガ被減數ヨリ大ナルガ如キ場合ニ立チ至ラザル限リハトイフ制限ヲ設クルノ必要アリシ,今ヤ此制限ハ負數ノ入來ニヨリテ全ク不必要トナレリ

例　　題

1. 6ト -2 ト7トノ和ヲ索ム
2. -3 ト -2 ト5トノ和ヲ索ム
3. $2a$ ト $-3b$ トノ和ヲ書ケ
4. $-3a$ ト $-2b$ トノ和ヲ書ケ
5. $5a$ ト $-6b$ ト $-2c$ トノ和ヲ書ケ
6. $-3a$ ト $-4b$ ト $7c$ トノ和ヲ書ケ
7. $-2a$ ヨリ $-5a$ ヲ引ケ
8. $8b$ ヨリ $-2c$ ヲ引キタル差ヲ書ケ
9. 3ト -5 トノ和ハ3ヨリハ幾ツダケ小ナリヤ
10. -17 ヨリ -13 ヲ引キタル差ハ被減數ヨリハ幾ツダケ大ナリヤ
11. $-15+9-3+12-2$ ヲ此儘算出シ又項ノ順序ヲ變ヘテ後計算シテ驗ヲ行ヘ

負數ノ掛ケ算割リ算

60. 負數ニ正數ヲ掛クルノ意義ハ既ニ第56節ノ規約ニヨリテ定マリ居ルガ故ニ別ニ規約ヲ設クルノ必要ナシ,例ヘバ $(-4)\times3=-4-4-4=-12$, 一般ニ

$$(-a)\times(+b)=-ab\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

負數ヲ掛クルトイフコハ未ダ意味ヲ有セザルガ故ニ特ニ規約ヲ設クルノ必要アリ

先ヅ第一ニ正數ニ負數ヲ掛ケル場合ヲ考フルニ前ニモ言ヘルガ如ク負數ニ係ル規約ヲ設クルニハ凡テ正數ノ場合ニ於テ眞ナル定理公式ガ正數ニ換フルニ負數ヲ以テスルモ尙ホ眞ナル樣ニ定メザルベカラズ,偖テ正數ノ場合ニ於テ積ノ値ハ被乘數乘數ヲ交換スルモ變ハラザルガ故ニ $(+b)\times(-a)=(-a)\times(+b)=-ab$ トナル樣ニ規定セザルベカラズ,仍テ次ノ規約ヲ設ク

負數ヲ掛クルニハ其絕對値ヲ以テ掛ケテ得タル積ノ符號ヲ換フベシ

此規約ハ負數ニ負數ヲ掛クル場合ニモ適用スルコヲ得,即

$$(+b)\times(-a)=-ab\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$(-a)\times(-b)=+ab\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

序ハ乗ノ通法

乃掛ケ算ニ於ケル符號ノ定メ方ハ次ノ如シ

$(+)\times(+)=+$	正ニ掛クル正ハ正
$(-)\times(+)=-$	負ニ掛クル正ハ負
$(+)\times(-)=-$	正ニ掛クル負ハ負
$(-)\times(-)=+$	負ニ掛クル負ハ正

更ニ概括シテ言ヘバ被乘數ノ符號ト乘數ノ符號トガ同ジクレバ積ノ符號ハ正ニシテ被乘數ノ符號ト乘數ノ符號トガ異ナレバ積ノ符號ハ負ナリ

畧シテ,同號ハ正異號ハ負ト唱フルコトハ之ヲ記臆スルニ便利ナルベシ*

61. 割リ算ハ掛ケ算ノ逆ナルガ故ニ割リ算ニ關シテハ新タニ規約ヲ設クルヲ要セズ,乃符號ニ拘ハラズニ割リテ得タルモノニ適當ノ符號ヲ前置スレバヨシ

割リ算ニ於ケル符號ノ定メ方ハ次ノ如シ

---

*掛クルトイフコノ意義ヲ推シ擴メ,掛クルトイフコハ乘數ヲ得ル爲メニ1ニ施スベキコヲ被乘數ニ施スコナリトスルトキハ見懸ケ上負數ノ掛ケ算ノ場合ヲ覆フガ如キ觀ヲナスガ故ニ古キ書物例ヘバちばうノ算術書こうしいノ解析講義ナドニハ之ニ依ツテ負數ヲ掛クルコヲ說明シアレド,斯クノ如キハ負數ニ係ル規約ノ規約タル性質ヲ曖昧ニ附シ去ルモノナルコ代數學近年ノ發達ニヨリテ漸ク明カニナリタル今日ニ於テハ最早其跡ヲ絕ツニ至レリ,又初學者ノ爲メニ謀ルモ唯淡泊ニ斯ク規定ストイヘバ可ナルコヲ强ヒテ說明セントシ徒ラニ困難ヲ感ゼシムルガ如キハ決シテ得策ニアラザルベシ

$(+)\div(+)=+$	正ヲ正デ割レバ正
$(-)\div(+)=-$	負ヲ正デ割レバ負
$(+)\div(-)=-$	正ヲ負デ割レバ負
$(-)\div(-)=+$	負ヲ負デ割レバ正

即被除數ノ符號ト除數ノ符號トガ同ジクレバ商ノ符號ハ正ニシテ被除數ノ符號ト除數ノ符號トガ異ナレバ商ノ符號ハ負ナリ

割リ算ニ於テモ掛ケ算ニ於ケルガ如ク同號ハ正異號ハ負ト誦スルコヲ得ベシ

乃 $\dfrac{+a}{+b}=\dfrac{a}{b},\quad \dfrac{-a}{+b}=-\dfrac{a}{b},\quad \dfrac{+a}{-b}=-\dfrac{a}{b},\quad \dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$

例　題

1. -3 ニ 4 ヲ掛ケヨ
2. 3 ニ -4 ヲ掛ケヨ
3. -3 ニ -4 ヲ掛ケヨ
4. -18 ヲ 6 デ割レ
5. 24 ヲ -6 デ割レ
6. -75 ヲ -5 デ割レ
7. 第 30 節ノ公式ニ準ヒ $(c-a)(d+b)$, $(d+b)(c-a)$, $(c-a)(d-b)$ ノ括弧ヲ去レ
8. 上ノ公式ニ於テ $c=0$, $d=0$ ト置キテ得ベキ結果ガ第 60 節ノ公式ト符合スルヲ見ヨ
9. 等式ノ兩邊ニ -1 ヲ掛ケテ得ベキ結果ヲ法則トシテ言ヒ表ハセ

10. 上ノ法則ハ又項ヲ移スヿニヨリテ得ラルベシ其方法如何

62. 代數計算ハ文字ガ正數負數ノ孰レヲ表ハスニ關ハラザルヿ

此レマデハ文字ハ必ズ正數ヲ表ハスモノトセリ,乃負數ヲ表ハスニハ文字ノ前ニ負號ヲ添ヘタリ例ヘバ a ハ正數ヲ表ハストシテ負數ヲ表ハスニ $-a$ ヲ以テシタルガ如シ

既ニ正數ニ係ル定理公式ガ負數ニモ當テ嵌マル樣ニ負數ニ係ル計算ノ法則ヲ規定セルカラニハ,文字ハ必ズ正數ヲ表ハストスルノ必要ナシ,文字ソレ自身ガ其儘負數ヲ代表スルモノトスルモ差支ナシ

試ミニ一二ノ場合ニ就キ驗ヲ行ハンニ b ガ正數ヲ表ハストキニ眞ナル

$$+(+b)=+b,\quad +(-b)=-b,\quad -(+b)=-b,\quad -(-b)=+b$$

ニ於テ b ヲ負數トシ卽 b ニ代フルニ $-c$ ヲ以テスルトキハ $+(-c)=-c$, $-(-c)=+c$ ナルガ故ニ

$$+(-c)=-c,\quad +(+c)=+c,\quad -(-c)=+c,\quad -(+c)=-c$$

ヲ得而シテ此結果ノ眞ナルハ一目瞭然タリ,乃文字ガ正數負數ノ孰レヲ表ハスモ全ク同ジ樣ニシテ加減スルヲ

得ルヿヲ驗メシ得タリ

又 $(+a)\times(+b)=+ab$, $(-a)\times(+b)=-ab$, $(+a)\times(-b)=-ab$, $(-a)\times(-b)=+ab$ ニ於テ b ヲ負數トシ卽 b ニ代フルニ $-c$ ヲ以テスルトキハ

$$(+a)\times(-c)=-ac,\quad (-a)\times(-c)=+ac,\quad (+a)\times(+c)=+ac,$$

$(-a)\times(+c)=-ac$ ヲ得,其眞ナルヤ明カナリ,a ト b トノ雙方ヲ負數トスルモ又然リ,割リ算ニ於テモ同ジク眞ナリ,乃文字ガ正數負數ノ何レヲ表ハスモ全ク同ジ樣ニシテ乘除スルヲ得ルヿヲ驗メシ得タリ

仍テ向後ハ文字ハ正數負數ヲ包括スルトイフ意味ニ於テ一般ナル數,換言スレバ,正數ヲモ又負數ヲモ表ハスモノトスベシ

實ニ代數計算ノ一大特色ハ文字ガ正數ヲ表ハスト負數ヲ表ハストニ關ハラズニ之ヲ行フヿヲ得ルニアリ

$a+b$ ニ於テ b ニ代フルニ $-c$ ヲ以テスルトキハ $a-c$ ヲ得,次ニ $a-c$ ニ於テ c ニ代フルニ b ヲ以テスルトキハ $a-b$ トナル,通例ハ畧シテ,$a+b$ ニ於テ b ヲ $-b$ ト置キテ $a-b$ ヲ得,或ハ $a+b$ ニ於テ b ノ符號ヲ換ヘテ $a-b$ ヲ得ルトイフ

文字ガ正數ヲモ又負數ヲモ表ハスヲ得ルヿノ非常ニ便利ナルヿヲ示サンガ爲メニ一例ヲ擧ゲンニ,斯ク定メ

タル結果トシテ第30節ノ三ツノ公式ハ結局リ一ツノ公式トナル而シテ其一ツハ三公式中ノ何レニテモ可ナリ例ヘバ

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

ヲ採ランニ,此公式ニ於テ d ノ符號ヲ換フレバ

$$(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$$

ヲ得, b ト d トノ符號ヲ換フレバ

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

ヲ得

既ニ文字ソレ自身ガ負數ヲモ代表スルヿヲ得ルト定メタルカラニハ,向後和トイヘバ代數的ノ和,差トイヘバ代數的ノ差ノヿナリト知ルベシ,例ヘバ a ト b ト c トノ和ハ $a+b+c$ ニシテ $a=2,\ b=-3,\ c=-5$ トスレバ此和ハ $2-3-5=-6$ ナリ,又 a ヨリ c ヲ引キタル差ハ $a-c$ ニシテ $a=7,\ c=-5$ トスル片ハ此差ハ $7+5=12$ ナリ

63. 正項負項 符號 $+$ ヲ前ニ有スル項ヲ**正項**,符號 $-$ ヲ前ニ有スル項ヲ**負項**ト稱ス

項トハ元來(第12節)多項式ヲ組織スル單項式ノ意ナルガ,既ニ正項負項トイフカラニハ,單項式ノ前ニ置カレタル符號ハ此單項式ニ屬スルモノト看做サザルベカラズ,即單項式ト其前ニ置カレタル符號トヲ併セテ項ト稱スルコトニナレルナリ

文字ハ正數負數ノ何レヲモ代表スルヿヲ得ルガ故ニ正項ハ正數ナルヿモアレド亦必ズシモ正數ナラズ,負項ハ負數ナルヿモアレド亦必ズシモ負數ナラズ,例ヘバ $+a$ ハ正項ナリ而シテ a ノ數値ヲ -5 トスレバ $+a=-5$ ナリ,又 $-a$ ハ負項ナリ而シテ a ノ數値ヲ -3 トスレバ $-a=+3$ ナリ,サレバ正項負項ト名ヅクルハ唯其見懸ケニヨルモノニシテ深ク其數値ニマデ立チ入リテ考ヘタルモノニアラズ

代數計算ニ於テハ唯其見懸ケニノミ着目スルヲ以テ足レリ深ク其數値ニマデ立チ入リテ考フルノ必要ナキハ既ニ前節ニ於テ述ベタルガ如シ

正項ハ必ズシモ正數ナラズ負項ハ必ズシモ負數ナラザルニ拘ハラズ正項ハ恰モ正數ノ如ク負項ハ宛モ負數ノ如ク取扱フベキヿハ,文字ハ正數負數ノ何レヲモ代表スルヲ得ルヿヨリ自然ニ出デ來ルトコロノ結果ナリ

例題

1. $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$ ニ於テ d ノ代リニ $-d$ ト置ク,又 b ニ代フルニ $-b$ ヲ以テセヨ

2. $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$ ニ於テ b ノ符號ヲ換ヘヨ,又 b ト d トノ符號ヲ換ヘヨ

3. $a=-7$, $b=-3$ トシテ $(a+b)(a-b)$ 及 a^2-b^2 ノ數値ヲ計算セヨ

4. $a=2$, $b=-3$, $c=-1$ トシテ $6ab$, $4abc$ $2b^2$, $5ab^2c$, $8a^2b^2c^2$ ノ値ヲ索メヨ

5. $bc+ca+ab$ ニ於テ $a=-7$, $b=-2$, $c=5$ ト置キテ其値ヲ算出セヨ

6. $40+\quad=2(25+x)$ ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

7. 上ノ方程式ニ於テ x ニ代フルニ $-x$ ヲ以テシテ得ベキ方程式ヲ解ケ

8. $4x+2(58-x)=102$ ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

9. $3x-5(8+3x)-5=2(x-7)+11$ ヲ解キテ後驗メセ

10. 文字ハ正數負數ノ何レヲモ代表スルモノトシ a ガ b ヨリ大ナリトイフコトハ

$$\ldots\ldots-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ldots\ \ldots\ldots$$

ニ於テ a ガ b ノ右ニアルトイフコトナリ, a ガ b ヨリ大ナルトキハ $a-b$ ノ値ハ正ナリヤ將タ負ナリヤ, 或ハ又正負何レトモ定マラザルカ

64. 應用上ニ於ケル負數計算ノ解釋

凡テ負數ヲ實際問題ニ應用スルコトヲ得ル場合ニ於テ負數計算ノ法則及之ニヨリテ得ベキ結果ヲ適當ニ解釋

シ得ルコト次ノ例ノ示スガ如シ

例 (1) 或ル人參圓ト五圓トヲ受取ルベキ權利ヲ有スルトキハ, 3 ト 5 トノ和 8 ハ此人ガ都合八圓ヲ受取ルベキ權利ヲ有スルコトヲ示ス, 若シ又此人ガ參圓ト五圓トヲ支拂フベキ義務ヲ有スルトキハ, -3 ト -5 トノ和 -8 ハ此人ガ都合八圓ヲ支拂フベキ義務ヲ有スルコトヲ示スモノト解釋スベシ, 次ニ此人參圓ヲ受取リ五圓ヲ支拂ハザルベカラズトスルトキハ, 3 ト -5 トノ和 -2 ハ此人ガ差引キ貳圓ヲ支拂フベキコトヲ示スモノト解釋スベシ, 又此人ガ參圓ヲ支拂ヒ五圓ヲ受取ラザルベカラズトスルトキハ, -3 ト 5 トノ和 2 ハ此人ガ差引貳圓ヲ受取ルベキコトヲ示スモノト解釋スベシ

或ル人 a 圓ト b 圓トヲ受取ルベキ權利ヲ有スルトキハ此人都合 $(a+b)$ 圓ヲ受取ルベキ權利ヲ有ス, 而シテ a ト b トハ或ハ正數或ハ負數ヲ表ハスモノトスルトキハ, 實際ハ或ハ受取リ或ハ支拂フニヨリテ生ズベキ四ツノ場合ノ總テニ通ジテ此人都合 $(a+b)$ 圓ヲ受取ルベキ權利ヲ有スト唱フルコトヲ得ベシ

例 (2) 或ル人八圓ヲ得タル外ニ六圓ノ負債ヲ返濟セリトスルトキハ, 此人都合幾何ノ利益ヲ得タリヤト問フニ

$8-(-6)=8+6=14$, 乃拾四圓ノ利益ヲ得タリ, 而シテ此答

ハ六圓ノ負債ヲ返濟スルハ結局リ六圓ダケ利益ヲ增スヿニナルトイフ事實ト符合ス

例 (3)　或ル人三人ノ債主ヨリ各七圓宛ノ借財ヲ爲シタリトスル𪜈ハ此人ノ負債高ハ貳拾壹圓ナリ，今資產ヲ表ハスニ正數ヲ以テスル𪜈ハ七圓ノ負債ハ -7 ニテ表ハサルベシ，偖テ $(-7)\times3=-21$ ニシテ -21 ハ貳拾壹圓ノ負債ヲ表ハス

例 (4)　或ル船ガ或ル所ヨリ眞南ニ 200 海里進行シタル𪜈突然眞南ヨリ吹キ來レル暴風ニ遇ヒ 60 海里逆行セリトスル𪜈ハ，$200+60=260$ ナルガ故ニ，此船ノ實際行キシ距離ハ 260 海里ナリ，然レ𪜀 $200-60=140$ ナルガ故ニ，其初メノ位置ヨリノ距離ハ 140 海里ナリ，偖テ $200-60$ ガ 200 海里ヨリ 60 海里ヲ引クトイフ意味ニテ書キ下ダサレタルモノナラシメバ符號一ハ減號ニシテ毫モ負數ニ關係ナシ，設シ又暴風ノ起ル前ニ 200 海里進ミ暴風ノ爲メニ -60 海里進ミタリトイフ解釋ノ下ニ於テ本來ハ $200+(-60)$ ト書クベキヲ畧シテ $200-60$ ト書キタルモノナリトスレバ此塲合ニ於ケル符號一ハ負號ナリ，サレバ符號一ヲ減號ト看做スベキカ將タ負號ト看做スベキカハ $200-60$ ヲ書キ下ダス𪜈ノ意味ニヨリテ分カル，何レニシテモ見懸ケハ勿論結果モ亦異ナルトコロナシ，同樣

ニ $a+b$ ニ於ケル符號＋ハ加號正號ノ何レト看做スモ見懸ケハ勿論結果モ異ナルヿナシ

例 (5)　或ル人或ル位置ヨリ東ノ方向ニ百二十歩前進シタル後二百歩背進シ更ニ三十歩前進シテ佇立セリ，此人此時ノ位置如何

東ノ方向ニ進ム歩數ヲ正トスレバ，此人ノ行キシ距離ハソレゾレニ 120, -200, 30 ヲ以テ表ハスヿヲ得ベシ，故ニ此人ノ最初ノ位置ヲ距ル歩數ハ上ノ諸數ノ代數的ノ和即 $120-200+30=-50$ ナリ，即最初ノ位置ヨリ西ノ方五十歩ノ所ナリトイフヲ以テ答トス

例　題

負數ヲ用ヰテ次ノ例題ヲ解ケ

1.　或ル日ノ夕刻ノ溫度二度ナリシニ夜ノ中ニ五度ダケ降ダレリトイフ翌朝ノ溫度如何

2.　風船ガ 230 米突昇リタル上ニ尙ホ 120 米突昇リタル後 160 米突降リ，更ニ 85 米突昇リ再ビ 115 米突降レリトイフ，此時ノ風船ノ高サ幾何ナリヤ

3.　三十五段アル階段ノ眞中ノ段ニ立テル子供ガ七段昇リテ後十六段降リ，更ニ十二段昇リテ後十五段降レリトイフ，此時彼ハ何レノ段ニ立テルカ

65. 負數ノ應用ヲ示ス爲メニ一二ノ例題ヲ設ケテ之ヲ解答スベシ

例 (1) 明治三十年ニ甲ハ四十歳乙ハ二十五歳ナリ,幾年後ニ甲ノ年齡ガ乙ノ年齡ノ二倍トナルカ

所要ノ年數ヲxトスレバ,x年後ノ甲ノ年齡ハ$40+x$,乙ノ年齡ハ$25+x$ヲ以テ表ハサルベシ,乃題意ニヨリ

$$2(25+x)=40+x$$
$$50+2x=40+x$$
$$2x-x=40-50$$
$$x=40-50$$

未ダ負數ヲ知ラザルモノト假定スルトキハ40ヨリ50ヲ引ク能ハズ,故ニ題意ニ適フ答ナシ,倘ホ遡ツテ考フルニ,此結果ヲ得ル爲メニ行ヒタル計算モ亦正當ナラズトイハザルベカラズ,結局リ此問題ハ不都合ナル問題ナリトイハザルベカラズ

例 (2) 明治三十年ニ甲ハ四十歳乙ハ二十五歳ナリ,幾年前ニ甲ノ年齡ガ乙ノ年齡ノ二倍ナリシカ

所要ノ年數ヲxトスレバ,x年前ノ甲ノ年齡ハ$40-x$,乙ノ年齡ハ$25-x$ヲ以テ表ハサルベシ,乃題意ニヨリ

$$2(25-x)=40-x$$
$$50-2x=40-x$$

$$2x-x=50-40$$
$$x=10$$

乃十年前ナリトイフヲ以テ答トス,實際十年前ニハ甲ハ30歳乙ハ15歳ニシテ甲ノ年齡ハ乙ノ年齡ノ二倍ナリシ

負數ヲ用ヰルトキハ例 (1) ノ最後ノ方程式ニ於テ40ヨリ50ヲ引キテ-10ヲ得,此-10ハ明治三十年ヨリ十年前ノコトナリト解釋スレバ足レリ,此問題ヲ例(2)ノ如クニ言ヒ變ヘ更ニ方程式ヲ作リ之ヲ解クガ如キ幾多ノ徒勞ヲ省クコトヲ得ベシ,爰ニ注意スベキハ例(1)ノ方程式ニ於テxノ代リニ$-x$ト置クトキハ例 (2) ノ方程式ヲ得ベキコトナリ

例 (1) 例 (2) ニ於ケルガ如ク幾年前或ハ後ト指定セズシテ前後ニ關ハラズニ唯甲ノ年齡ガ乙ノ年齡ノ二倍トナル年ヲ問フトイフ問題ヲ解クニハ負數ノ重寶ナルコト多言ヲ俟タザルベシ,乃前ナリ後ナリ勝手ニ定メ方程式ヲ作レバヨシ,例ヘバ後ナリト假定シテ方程式ヲ作リ之ヲ解キテ負數ヲ得タルトキハ事實前ナリト解釋スレバ可ナリ

例 (1) 例 (2) ノ如ク甲ノ年齡ト乙ノ年齡トガ數字ヲ以テ與ヘラレアル場合ニハ實際視察ニヨリテ所要ノ年ハ

前ナルカ將後ナルカヲ判斷スルヿ必ズシモ難カラザルベシト雖モ,年齢ガ文字ヲ以テ與ヘラレアル場合ニハ到底前後ヲ知ルニ由ナク,其實文字ノ數値次第ニテ前ナルヿモアレバ後ナルヿモアル種種ノ場合ヲ含ムモノナリ,斯クノ如キ場合ニ於テハ負數ハ啻ニ重寶ナルノミナラズ實ニ缺クベカラザルモノナルヿ明カナリ

例 (3) 明治三十年ニ甲ハ a 歳乙ハ b 歳ナリ,甲ノ年齢ガ乙ノ年齢ノ二倍トナル年ヲ問フ

所要ノ年ハ明治三十年前ナリト假定シ事實後ナラバ負數ノ答ヲ得ベシ,又後ナリト看做シテ事實前ナラバ負數ノ答ヲ得ベシ,今後ナリト假定シテ解答スベシ

x 年後ノ甲ノ年齢ハ $a+x$, 乙ノ年齢ハ $b+x$ ヲ以テ表ハサルベシ,故ニ題意ニヨリ

$$2(b+x) = a+x$$

$$2b+2x = a+x$$

$$2x-x = a-2b$$

$$x = a-2b = -(2b-a)$$

即 $a>2b$ ナレバ $(a-2b)$ 年後, $a<2b$ ナレバ $(2b-a)$ 年前ナリトイフヲ以テ答トス

例 (4) 鶴ト龜トノ數合ハセテ五十八アリ,其足ノ數ハ百二本アリトイフ,鶴ノ數及龜ノ數各幾何

龜ノ數ヲ x トスレバ鶴ノ數ハ $58-x$ ナリ而シテ龜ノ足ノ數ハ $4x$ 鶴ノ足ノ數ハ $2(58-x)$ ナリ,故ニ

$$4x+2(58-x)=102$$

$$4x+116-2x=102$$

$$4x-2x=102-116$$

$$2x=102-116=-14 \qquad x=-7$$

乃龜ノ數 -7 ヲ得タリ,然レドモ龜ノ數 -7 ナリトイフヿハ如何ニシテモ之ガ解釋ヲ下ダスヿ能ハズ,本來龜ノ數ナドハ所謂反對ノ有樣ニ成リ立ツヿ能ハザルモノナリ,龜ガ居ラザレバ龜ノ數ハ 0 ニシテ此レヨリモ龜ノ數ヲ減ズルハ到底出來ヌヿナリ,乃此場合ニ於テ負數ノ答ヲ得タルハ問題ノ不合理ナルヿヲ示スモノナリ,實際鶴 58 羽ノミ居リテモ足ノ數ハ 116 本アルベキ筈ナルガ故ニ此問題ノ不合理ナルヿ明カナリ

上ノ如キ場合ニ於テハ問題ハ不能ナリトイフ

凡テ反對ノ有樣ニ成リ立ツヿ能ハザル事物ニ就キ,即結局リ負數ノ答ヲ適當ニ解釋スルヿ能ハザル場合ニ於テ得タル負數ノ答ハ問題ノ不能ナルヿヲ示スモノナリ

例題

1. 母ノ年齡ハ三十五ニシテ子ノ年齡ハ十三ナリ,今ヨリ幾年後ニ母ノ年齡ガ子ノ年齡ノ三倍トナルカ

2. 母ノ年齡ハ三十五ニシテ子ノ年齡ハ十三ナリ,今ヨリ幾年前ニ母ノ年齡ガ子ノ年齡ノ三倍ナリシカ

3. 母ハa歲ニシテ子ハb歲ナリ,何レノ時カ母ノ年齡ガ子ノ年齡ノ三倍ニ等シキヤ

4. 拾圓金貨貳拾圓金貨兩種ノ金貨七十六個ヲ以テ金壹千六百圓ノ支拂ヲ爲サントス,各種ノ金貨幾個宛ヲ要スルカ

5. 甲乙ノ間ニ金若干圓ノ貸借アリ,今他ヨリ甲ニ五百圓乙ニ百圓ヲ與ヘ,甲乙ハ此金ノ中ヲ以テ貸借ヲ濟マシタル後甲ノ所持金ハ乙ノ所持金ノ二倍トナレリトイフ,貸借ノ金高如何,又孰レガ貸方ニテ孰レガ借方ナリヤ

[illegible]ノ解釋

分數

66. 減數ハ被減數ヨリ大ナルベカラズトイフ制限ハ負數ノ入來ニヨリテ全ク消滅セリ,唯殘ルハ,割リ算ニ於テ被除數ハ必ズ除數ノ倍數ニシテ割リ算ハ割リ切レル塲合ニ限ルトイフ制限ナリ,此制限ハ初學者ノ既ニ算術ニ於テ知レルガ如ク數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ分數ナルモノヲ數ノ中ニ入ルルヿニヨリテ撤去スルヿヲ得ベシ

aガbノ倍數ナルト否トニ拘ハラズ$\frac{a}{b}$ヲ以テaヲbデ割リタル商ヲ表ハス,若シaガbデ割リ切ルレバ$\frac{a}{b}$ハ或ル整數ニ等シ,aガbデ割リ切レザル塲合ニハ$\frac{a}{b}$ハ其儘**分數**ト稱スル新タナル數ヲ表ハス,之ヲb分ノaト呼ブ而シテb分ノaナルモノハb倍シテaニナル數ナリト解釋スベキモノトス,乃一般ニ

$$\frac{a}{b}\times b=a$$

爰ニbハaヨリモ或ハ大或ハ小或ハaニ等シキヿヲ得但aガbニ等シキトキハ$\frac{a}{b}$ハ勿論1ニ等シ

分數$\frac{a}{b}$ニ於テbヲ其**分母**,aヲ其**分子**ト稱ス

67. 吾人ハ分數ハ整數ト全ク同ジ様ニシテ取扱フベシト規約ス,而シテ初學者ガ既ニ算術ニ於テ學ビタル分數計算ノ意義及法則ハ總テ前節ノ公式ト此規約トヨリ出ヅルモノナリ,乃第二編(第32節ヨリ第39節ニ至ル)ニ於テ,aハbデ割リ切レ,cモdデ割リ切レ,從ツテ$\frac{a}{b}$ト$\frac{c}{d}$トハ各整數ヲ表ハスモノトシテ證明セル總テノ公式ハ$\frac{a}{b}$ト$\frac{c}{d}$トガ分數ヲ表ハス場合ニモ其儘當テ嵌マル,唯之ヲ法則ニ直スニハ除數ノ代リニ分母,被除數ノ代リニ分子ナル辭ヲ用ヰルヲ要ス

68. 多クノ數ノ和ヲ或ル數デ割リタルモノハ和ノ各項ヲ此數デ割リタルモノノ和ニ等シ(第37節參照),今bヲ以テ或ル數ヲ表ハシ和ニ於ケル各項ヲ1トシ,項ノ數aアリトスルトキハ

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\times a$$

故ニ分數$\frac{a}{b}$ハ又1ヲbデ割リタルモノノa倍ナリト解釋スルヿヲ得ベシ

上ノ公式ニ於テ被乘數ト乘數トヲ交換スルトキハ

$$a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

故ニ$\frac{1}{b}$ヲ以テ掛クルトハbヲ以テ割ルヿナリト解釋スベシ

$b\times\frac{1}{b}=1$, cヲ掛クレバ$b\times\frac{1}{b}\times c=c$, 因數ノ順序ヲ變フレバ$c\times b\times\frac{1}{b}=c$, $\frac{1}{b}$デ割レバ

$$\frac{c}{\frac{1}{b}}=c\times b$$

故ニ$\frac{1}{b}$ヲ以テ割ルトハbヲ以テ掛クルヿナリト解釋スベシ

$\frac{a}{b}\times b=a$, cヲ掛クレバ$\frac{a}{b}\times b\times c=a\times c$, 因數ノ順序ヲ變フレバ$c\times\frac{a}{b}\times b=c\times a$, bデ割レバ

$$c\times\frac{a}{b}=\frac{c\times a}{b}$$

故ニ$\frac{a}{b}$ヲ以テ掛クルトハaヲ掛ケテbデ割ルヿナリト解釋スベシ,同様ニ$\frac{a}{b}$ヲ以テ割ルトハaデ割リテbデ掛クルヿナリト解釋スベシ

注意 數トイヘバ正ノ整數ニ限レル時ニ於テ掛クルトイヘバ增大,割ルトイヘバ減小ノ意ヲ含ミタレド,恰モ負數ノ入來ニヨリテ加減ハ增減ノ意味ヲ含マザルヿトナレルガ如ク,分數ヲ入ルルト同時ニ乘除ハ增減ノ意ヲ含マザルヿトナレリ

注意 凡テ整數ノ場合ニ於テ證明スルヿヲ得ル定理ハ第67節ノ結果トシテ分數ノ場合ニ於テモ眞ナリ,乃特ニ分數ノ場合ニ就キ之ヲ證明スルノ必要アルヿナシ,一例ヲ擧ゲンニ$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}=\frac{ca}{db}$, 而シテ$\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}$

ナルガ故ニ $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}$, 即被乘數乘數ヲ交換スルモ積ノ値ノ變ハラザルヿハ分數ノ場合ニ於テモ眞ナリ, 但コレハ證明ニアラズ, 唯第 67 節ノ結果トシテ必ズ斯クアルベキヿヲ驗シ得タルニ過ギズ

69. 恰モ 0 ヨリ 2 ヲ引キテ -2 ヲ得ルガ如ク, 0 ヨリ $\frac{2}{3}$ ヲ引キテ $-\frac{2}{3}$ ヲ得, 一般ニ 0 ヨリ分數 $\frac{a}{b}$ ヲ引キテ負ノ分數 $-\frac{a}{b}$ ヲ得

算術ニ於テ數トイフハ整數分數ノ意ナリ, 一層悉シクイヘバ正ノ整數正ノ分數ノ意ナリ, 然ルニ代數學ニ於テ計算上ノ制限ヲ撤回スル毎ニ數トイフ辭ノ意味ハ次第ニ推シ擴マリ, 最早此處ニ至リテハ數トイヘバ正ノ整數分數負ノ整數分數ヲ意味スルヿトナレリ

或ル時ハ算術上ノ數ト區別スルガ爲メニ正數負數ヲ總稱シテ代數的ノ數ト稱スルヿアリ

70. 此レマデハ文字ハ整數ヲ表ハスモノトセリ, サレバ分數ヲ表ハスニハ或ル文字ヲ他ノ文字デ割リタル形例ヘバ $\frac{a}{b}$ ヲ以テセリ, 然レドモ既ニ分數ハ整數ト全ク同様ニシテ計算スルヿヲ得ルモノトセルカラニハ必ズシモ斯クノ如キ書キ方ヲ用ヰルヲ要セズ, 唯一ツノ文字ヲ以テ分數ヲ代表セシムルモ可ナリ, 又文字ハ負ノ分數ヲモ代表スルヿヲ得

例題

1. $b=3,\ a=6$ ナルトキハ $\frac{b^a}{a^b}$ ノ値如何

2. $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{5}{7}$ ナルトキハ $7a^2b$ ノ數値如何

3. $a=-\frac{1}{5},\ x=-\frac{5}{12}$ ナルトキハ $3a^2x$ ノ値如何

4. $a=5,\ b=4,\ x=2,\ y=\frac{1}{2}$ ナルトキハ $\frac{3}{10}ab-7x^2-\frac{9}{4}ay^2$ ノ値幾何ナルカ

5. $a=5,\ b=0,\ x=7,\ y=1$ トシテ $\frac{3}{5}x^2-a^2y+abx-\frac{5}{2}xy$ ノ値ヲ計算セヨ

6. $a=\frac{5}{7},\ b=\frac{2}{3}$ トスルトキハ $(a+b)(a-b)$ 及 a^2-b^2 ノ數値各幾何トナルカ

7. $a=\frac{3}{5},\ b=2,\ c=\frac{5}{12},\ d=\frac{1}{2}$ トスルトキハ $(a+b)(c+d)$ 及 $ac+bc+ad+bd$ ノ數値各如何

8. $a=-4,\ b=\frac{2}{7},\ c=\frac{4}{11},\ d=-\frac{2}{3}$ トシテ $(a+b)(c-d)$ ト $ac+bc-ad-bd$ トガ相等シキヿヲ驗セ

9. $a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{2}{3},\ d=5$ ナルトキハ $(a-b)(c-d)$ 及 $ac-bc-ad+bd$ ノ數値各如何

10. $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{2}{5},\ d=\frac{3}{4}$ トシテ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ト $\frac{ad+bc}{bd}$ トガ相等シキヿヲ驗セ

11. $8x+7=x+12$ ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

12. $x-2-(2x-3)=\frac{3x+1}{2}$ ノ根ヲ索メテ後驗ヲ行ヘ

13. $\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}+1=\frac{x}{4}+\frac{7}{18}$ ニ適合スル x ノ値ヲ見出シ其果シテ此方程式ヲ滿足スルヤ否ヲ驗セ

71. 應用問題ニ係ル方程式ヲ解キ答トシテ分數ヲ得タルトキハ之ヲ適當ニ解釋シ得ルヤ否ヤヲ吟味スルヿヲ要ス,若シ之ヲ適當ニ解釋スルヿヲ得レバ可ナレドモ,然ラザル場合ニ於テハ分數ナル答ハ問題ノ不能ナルヿヲ示ス,尚ホ詳カナルハ次ノ例ニ就キテ知レ

例 (1) 甲乙同額ノ金ヲ所持セシニ乙ガ甲ニ金五圓ヲ與ヘタル後甲ノ所持金ノ三倍ハ乙ノ所持金ノ十一倍トナレリトイフ,甲乙各ガ最初所持セシ金高幾何ゾ

甲乙各ガ最初ニ所持セシ金高ノ圓數ヲ x トスレバ,乙ヨリ五圓貰ヒ受ケタル後ノ甲ノ所持金ノ圓數ハ $x+5$ ニシテ,乙ガ甲ニ五圓與ヘタル後ノ乙ノ所持金ノ圓數ハ $x-5$ ナリ,乃題意ニヨリ

$$3(x+5)=11(x-5)$$

此方程式ヲ解クトキハ $x=8\frac{3}{4}$ ヲ得ベシ,此場合ニ於ケル $8\frac{3}{4}$ ハ八圓ト一圓ノ四分ノ三即八圓七拾五錢ナリト解釋スルヲ得ベシ,之ヲ答トス

例 (2) 二ツノ有效數字ヨリ成ル二桁ノ數アリ,二ツノ數字ガ別別ニ表ハス數ノ和ハ10ニシテ,數字ノ位置ヲ轉換スルトキハ元ノ數ノ二倍ノ數ヲ得ルトイフ,元ノ數幾何ナリヤ

一位ノ數字ヲ x トスレバ十位ノ數字ハ $10-x$ ナリ而シテ x 及 $10-x$ ハ共ニ正ノ基數ナラザルベカラズ,偖テ元ノ數ハ $10(10-x)+x$ ニシテ數字ヲ轉換シテ得ベキ數ハ $10x+(10-x)$ ナリ,乃題意ニヨリ

$$10x+(10-x)=2\{10(10-x)+x\}$$

此方程式ヲ解クトキハ $x=\frac{190}{27}=7\frac{1}{27}$ ヲ得ベシ,乃 x ハ必ズ整數ナラザルベカラザルニ答トシテ分數ヲ得タルハ問題ノ不能ナルヿヲ示スモノナリ,實際總テノ基數ニ就キテ試ミルニ 91 ハ 19 ノ二倍ナラズ, 82 モ 28 ノ二倍ナラズ, 73 モ 37 ノ二倍ナラズ, 64 モ 46 ノ二倍ナラズ,題意ニ適フ數ノ無キヤ明カナリ

第三問題集

1. $a=-5,\ b=-7$ トスル片ハ $(a+b)^2+(a-b)^2$ 及 $2(a^2+b^2)$ ノ値各幾何トナルカ

2. $a=-3,\ b=-7$ トシテ $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 及 $(a-b)^3$ ノ値ヲ算出セヨ

3. $a=\frac{2}{3},\ b=\frac{3}{5},\ c=\frac{2}{5}$ ナル片ハ

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc \text{ 及 } (a-b-c)^2$$

ノ値各如何

4. $a=\frac{4}{5},\ b=-\frac{7}{10}$ トスル片ハ

$$(a^2+ab+b^2)(a-b) \text{ 及 } a^3-b^3$$

ノ値各如何

5. $a=7,\ b=-3,\ c=\frac{11}{4},\ d=-\frac{1}{2}$ トスル片ハ

$$\frac{c(a-b)+d(a+b)}{a^2-b^2} \text{ 及 } \frac{c}{a+b}+\frac{d}{a-b}$$

ノ値各幾何トナルカ

6. 二ッノ數ノ差ハ5ニシテ一ッノ數ノ三分ノ一ハ他ノ數ノ七分ノ一ニ等シトイフ,二ッノ數各如何

7. 五間ノ長サヲ二ッノ部分ニ分チ一部分ガ他ノ部分ノ二倍ニナル樣ニセリトイフ,各部分ノ長サ幾何ナルカ

8. 親ハ五十八歲ニシテ子ハ十八歲ナリ,今後幾年ノ後親ノ年齡ガ子ノ年齡ノ三倍半トナルカ

9. 一ヶ年ノ給料百參拾五圓ノ外ニ被服ヲ與フル約束ニテ雇入レタル人ヲ七ヶ月ノ後解雇シ被服ノ外ニ六拾七圓ヲ與ヘタリトイフ,被服ハ幾何ニ積リアリシヤ

10. 農夫ノ賃錢一日ニ付夏日ハ冬日ヨリ貳錢ダケ多シトイフ,或ル夏一人ノ農夫ヲ十三日間使用シ彼ノ失策ヨリ生ジタル損害ヲ辨償セシメンガ爲メニ貳拾貳錢ヲ差引シテ賃錢ヲ拂ヘリ,此人冬同ジ農夫ヲ十七日間使用シ彼ガ非常ニ勉强セシ慰勞トシテ賃錢ノ外ニ貳拾八錢ヲ與ヘタリ而シテ此人ガ支拂ヒタル金高ハ夏冬トモニ同額ナリシトイフ,農夫夏日一日ノ賃錢幾何ナリヤ

第五編 代數四則

72. 本編以下文字ヲシテ或ル一種ノ數例ヘバ正ノ整數ヲ代表セシムル塲合ニハ特ニ此事ヲ明言スベシ,乃特ニ斷リナキ限リハ文字ハ正數負數整數分數如何ナル數ヲモ表ハスモノトス

文字ガ正ノ整數ヲ表ハスモノトシテ行フタル計算ハ文字ガ正負ノ整數分數如何ナル數ヲモ代表スル塲合ニ於テモ其儘當テ嵌マルコ既ニ前編ニ於テ詳論セルガ如シ

代數式ヲ類別シテ或ハ有理式トイヒ,或ハ整式トイヒ,或ハ分數式トイフハ唯式ノ中ニアル文字ニノミ着目シテ言フモノニシテ,數字ハ之ヲ眼中ニ置カザルモノトス,根號ヲ含マザル代數式ヲ有理式ト稱ス(第12節)而シテ有理式ノ中ニハ數字ヲ以テ表ハサレタル數ノ根ガ存在スルモ其式ハ有理式タルヲ失ハズ,例ヘバ $\frac{2a+\sqrt{3}b}{\sqrt{5}x}$ ノ如キモ矢張リ有理式ナリ,文字ヲ以テ割ルコヲ示サザル有理式ヲ整式ト稱ス而シテ數字ヲ以テ表ハサレタル分數ノ有無ノ如キハ毫モ或ル式ノ整式タルト否トニ關ハラズ例ヘバ $\frac{1}{2}a+\sqrt{2}b+\frac{2}{5}$ ノ如キハ整式ナリ

代數演算ハ單ニ代數式ノ見懸ケニ就キテ行フモノニシテ,ソレヨリモ深ク立チ入ルモノニアラズ而シテ唯見懸ケニノミ着目シテ演算スルコヲ得ルハ代數演算ノ特色ニシテ,之ニヨリテ得タル結果ノ一般ナル其源因ハ實ニ焉ニ在リテ存ス

代數式ノ各項ノ前ニアル符號ハ其項ニ屬スルモノトス,乃項ハ正項ナラザレバ負項,負項ナラザレバ正項ナリ而シテ正項ハ必ズシモ正數ナラズ負項ハ必ズシモ負數ナラザルニ拘ハラズ,正項ハ正數ノ如ク負項ハ負數ノ如ク取扱フベキハ既ニ第63節ニ述ベタルガ如シ

本編ニ於テハ整式ノ加減乘除ヲ論ズベシ

同類項

73. 唯符號ト係數トニヨリテノミ異ナル諸ノ項ヲ**同類項**ト稱ス,即同類項ノ中ニハ同ジ指數ヲ有スル同ジ文字ガ必ズ在ルモノトス,例ヘバ $2a$ ト $5a$ トハ同類項ナリ,$-3a^2b$ ト $-a^2b$ トモ同類項ナリ,$-7ab^2x$ ト $+2ab^2x$ トモ矢張リ同類項ナリ

同類項ニアラザル項ヲ異類項ト稱ス例ヘバ $3ax$ ト $6by$ トハ同類項ニアラズ即異類項ナリ,又 $3a^2bx$ ト $-7ab^2x$ トハ同ジ文字ヲ含メドモ a ト b トノ指數ガ異ナルガ故ニ

矢張リ異類項ナリ

多項式 $3a^2+5a^2b-a^2+x^2y-a^2b+xy$ ニ於テ $3a^2$ ト $-a^2$ トハ同類項ナリ, 又 $+5a^2b$ ト $-a^2b$ トモ同類項ナリ, 之ニ反シ x^2y ト xy トハ異類項ナリ

74. 多項式ニ於ケル同類項ヲ集メテ一ツノ項トナスヿヲ稱シテ**同類項ヲ約ス**或ハ**集メル**トイフ

同シ符號ヲ有スル同類項ヲ約スルニハ係數ノ和ニ共通ノ符號ヲ前置シ其後ヘ共通ノ文字ヲ添ヘレバヨシ, 例ヘバ

$$+a+2a+3a=+6a$$

$$-3a^2b-2a^2b-a^2b=-6a^2b$$

此際全て約スト云フ

符號ガ悉ク同シカラザル同類項ヲ約スルニハ正項ノ係數ノ和ヲ算出シ, 別ニ負項ノ係數ノ和ヲ索メ, 大ナル方ノ和ヨリ小ナル方ノ和ヲ引キテ得タル差ニ和ノ大ナル方ノ符號ヲ前置シ其後ヘ共通ノ文字ヲ添ヘレバヨシ, 例ヘバ

$$7a-3a+11a+a-5a-2a=19a-10a=9a$$

$$2bc-7bc-3bc+4bc+5bc-6bc=11bc-16bc=-5bc$$

例 (1)　$2a-5bc+8a+9bc-4a=+6a+4bc$

例 (2)　$-7m-5m+6ab-m-2ab+8m+6=-5m+4ab+6$

例　題

次ノ多項式ニ於ケル同類項ヲ約セ

1. $-3a+7a-2a-8a+16a$
2. $3a+7a+2a+8a+10a$, $3c+2c-c$
3. $-3x-7x-2x-8x-10x$, $-4c+9c-2c$
4. $m-3m-2m$, $2b-3b+4b-b$
5. $3ab-7ab+4ab$, $-2bc+8bc+4bc-bc$
6. $-4bm-3bm+4bm+bm+bm-10bm+2bm$
7. $7a-5a+6b-2a+3b+4a-2b$
8. $4ab+7ab-m+ab+6m-4ab$
9. $9am-5bm+6m-3am-6m+10$
10. $4bm-3y+6m+3y-bm+3m$
11. $3abc+4bc-2abc-4bc+4abc+bc$
12. $5a^2b-3ab^2+7abm-9a^2b+abm+3ab^2$
13. $2mx+3m^2y+mx-m^2y+6m^2y-5mx+2m^2y$
14. $3xy-6xy+x^2y-12+8x^2y-xy-3x^2y+3$
15. $2my-3a^2b+my-a^2b+24-3ab^2+4my$
16. $3ab-my+6ab+3my-2ab$
17. $2a^2b-3ab^2+a^3-a^2b+2a^3+ab^2$

代數寄セ算引キ算

75. 本編ニ於テハ整式ノ加減乘除ヲ論ズルモノニシテ本編ニ於テ代數式トアルハ單項式及多項式ノコトナリ

代數計算ニ於テハ單ニ計算ヲ表示スルニ止ム,乃代數寄セ算ニ於テハ加ヘ合ハスベキ諸ノ代數式ヲ次次ニ列ベテ書キ加號ヲ以テ之ヲ聯結スベシ,斯クノ如クニシテ得タル多項式ハ即所要ノ和ナリ

和トシテ得タル多項式ノ中ニ同類項ガアルトキハ之ヲ約スベシ

例 (1) a ト b ト c トノ和ハ $a+b+c$ ナリ

例 (2) a ト b ト $-c$ トノ和ハ $a+b+(-c)=a+b-c$ ナリ

例 (3) $a+b$ ト $2a-b$ トノ和ハ

$$(a+b)+(2a-b)=a+b+2a-b=3a \text{ ナリ}$$

例 (4) $2a^2-4b^2,\ 5c+b^2,\ 5a^2-c$ ヲ加フレバ

$$(2a^2-4b^2)+(5c+b^2)+(5a^2-c)$$

括弧ヲ外ヅセバ

$$2a^2-4b^2+5c+b^2+5a^2-c$$

但加號ノ後ニアル括弧ハ唯之ヲ省クヿヲ得ルガ故ニ實際ハ始メヨリシテ括弧ヲ省キ直チニ此式ヲ書クベシ,次

ニ同類項ヲ約スレバ

$$7a^2-3b^2+4c$$

ヲ得

括弧ハ始メヨリシテ省クモノトスレバ結局多クノ代數式ヲ加ヘ合ハスニハ此レ等ノ式ノ諸項ヲ其儘即符號ヲ有スル儘列ベテ書クベシトイフヿニ歸ス,且同類項ヲ約スル上ノ便利ヲ謀ル爲メニ同類項ガ竪ニ並ブ樣ニ書キ列ベルヲ可トス,尙詳ナルハ次ノ例ニ就キテ知レ

例 (5) $4a+5b-7c+3d,\ 3a+2c-b+5d,\ 9a-2b-c-d,$ $4c-3d+e-a+3b$ ヲ加ヘヨ

$$\begin{array}{r}
4a+5b-7c+3d \phantom{{}+e} \\
3a-b+2c+5d \phantom{{}+e} \\
9a-2b-c-d \phantom{{}+e} \\
-a+3b+4c-3d+e \\
\hline
15a+5b-2c+4d+e
\end{array}$$

爰ニ第一行ノ $4a,\ 3a,\ 9a,\ -a$ ハ同類項ナリ,而シテ正項ノ係數ノ和ハ 16,唯一ツアル負項ノ係數ハ 1, 16 ヨリ 1 引キテ (或ハ 4, 3, 9, −1 ヲ加ヘテ) 15 ヲ得,乃此レ等ノ同類項ヲ約シテ (結局加ヘテ) $+15a$ ヲ得,初項ナルガ故ニ符號 + ヲ省畧ス,同樣ニ $5b-b-2b+3b=+5b$, 其他之ニ準フ

例 (6)	例 (7)
x^3+2x^2-3x+1	a^2+ab+b^2-c
$4x^3+7x^2+x-9$	$3a^2-3ab-7b^2$
$-2x^3+x^2-9x+8$	$4a^2+5ab+9b^2$
$-3x^3-x^2+10x-1$	$a^2-3ab-3b^2$
$9x^2-x-1$	$9a^2-c$

例 (6) ノ第一行ニアル $x^3+4x^3-2x^3-3x^3$ ハ $5x^3-5x^3$ ニ等シク即零ナリ,此場合ニ於テハ x^3 ヲ合ム項ハ互ニ消シ合フトイフ,同樣ニ例 (7) ニ於テハ ab ヲ合ム項ハ互ニ消シ合ヒ,又 b^2 ヲ合ム項モ互ニ消シ合フ

例題

次ノ式ヲ加ヘ合セヨ

1. $m^2-xy^2+2m-3xy,\ xy^2-6xy-4z$
2. $m^2+xy,\ m^3+2m^2-4m^2y-xy$
3. $a^2b^2+4a^2b+5a^2c,\ -m^2x+4m^2x^2-10$
4. $a+b,\ a-4b,\ -a+3b+12$
5. $a+b+c,\ 2a-3b+c,\ 5a-7b+c$
6. $2m-y+10,\ 2y-m-9$
7. $3a-2b,\ 4a-5b,\ 7a-11b,\ a+9b$
8. $4x^2-3y^2,\ 2x^2-5y^2,\ -x^2+y^2,\ -2x^2+4y^2$
9. $5a+3b+c,\ 3a+3c+3b,\ a+3b+5c$

10. $3x+2y-z,\ 2x-2y+2z,\ 2y-x+3z$
11. $7a-4b+c,\ 6a+3b-5c,\ -12a+c$
12. $x-4a+b,\ 3x+2b,\ a-x-5b$
13. $a+b+c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c$
14. $5x^2+7x-1,\ -2x^2-3x+8,\ x^2+1$
15. $x^3-4x^2+5x-3,\ 2x^3-7x^2-14x+5,\ 8+x+9x^2-x^3$

76. 代數引キ算ニ於テ或ル式ヨリ他ノ式ヲ引クニハ減號ヲ以テ被減數ヘ減數ヲ聯結スベシ,斯クシテ得タル多項式ニ於テ,括弧ガアルトキハ之ヲ省キ,同類項ガアルトキハ之ヲ約スベシ

例 (1) a ヨリ b ヲ引キテ $a-b$ ヲ得

例 (2) a ヨリ $-b$ ヲ引クトキハ $a-(-b)=a+b$ ヲ得

例 (3) $a-b$ ヨリ $c-d-e$ ヲ引ケバ $a-b-(c-d-e)$ ヲ得,括弧ヲ外ヅセバ $a-b-c+d+e$ ヲ得

減號ノ後ニアル括弧ヲ省クニハ括弧ノ中ニアル總テノ項ノ符號ヲ換ヘレバヨキガ故ニ,始メヨリシテ括弧ヲ省キ減數ノ總テノ項ノ符號ヲ換ヘテ之ヲ被減數ニ書キ足セバ可ナリ,倘ホ同類項ヲ約スル上ノ便利ヲ謀ルガ爲メニ項ヲ適當ニ配列スベキハ寄セ算ノ場合ニ同シ

例 (4) $4x-3y+2z$ ヨリ $3x-y+z$ ヲ引ケ

減數ノ各項ノ符號ヲ換ヘテ $-3x+y-z$ ヲ得，コレヨリ先キハ全ク寄セ算ニ於ケルガ如クニシテ答 $x-2y+z$ ヲ得

$$\begin{array}{r} 4x-3y+2z \\ -3x+y-z \\ \hline x-2y+z \end{array}$$

例 (5) $3x^4+5x^3-6x^2-7x+5$ ヨリ $2x^4-2x^3+5x^2-6x-7$ ヲ引ケ

$$\begin{array}{r} 3x^4+5x^3-6x^2-7x+5 \\ -2x^4+2x^3-5x^2+6x+7 \\ \hline x^4+7x^3-11x^2-x+12 \end{array}$$

注意　初學者ガ誤ヲナサザルガ爲メニハ爰ニ示シアル躰裁ニ倣ヒ實際減數ノ各項ノ符號ヲ換ヘテ計算スルヲ安全ナリトス，然レドモ充分ニ熟習シタル曉ニハ實際符號ヲ換フルヿヲ爲サズニ唯心ノ裏ニ符號ヲ換フルヿヲ思ヒツツ計算スルモ可ナリ

例題

1. $7a+14b$ ヨリ $4a+10b$ ヲ引ケ
2. $6a-2b-c$ ヨリ $2a-2b-3c$ ヲ引ケ
3. $3a-2b+3c$ ヨリ $2a-7b-c-d$ ヲ減ゼヨ
4. $7x^2-8x-1$ ヨリ $5x^2-6x+3$ ヲ引ケ
5. $4x^4-3x^3-2x^2-7x+9$ ヨリ $x^4-2x^3-2x^2+7x-9$ ヲ引ケ

77. 括弧ハ代數學ニ於テ廣ク用ヰルモノナルガ故ニ初學者ガ括弧ノ嵌メ外ヅシニ係ル法則ノ適用ニ習熟スルヿ甚ダ肝要ナリ

括弧ヲ外ヅス法則(第 23 節)ハ次ノ如シ

符號＋ヲ前ニ有スル括弧ハ唯之ヲ省クヿヲ得，之ニ反シ符號−ヲ前ニ有スル括弧ヲ省クニハ括弧內ニアル總テノ項ノ符號ヲ換フベシ

或ル時ハ又二ツ或ハ二ツヨリ多クノ項ヲ括弧ニテ包ムノ必要アルヿアリ，括弧ヲ嵌メル法則ハ上ノ括弧ヲ外ヅス法則ヨリ直チニ出ヅルモノニシテ乃次ノ如シ

或ル式ニ於テ次次ニ並ビ居ル若干ノ項ハ之ヲ其儘括弧ニテ包ムヿヲ得，此場合ニ於テハ符號＋ヲ括弧ノ前ニ置クベシ

或ル式ニ於テ次次ニ並ビ居ル若干ノ項ヲ括弧ニテ包ミ括弧ノ前ニ符號−ヲ置クニハ括弧ニテ包マルベキ總テノ項ノ符號ヲ換フベシ

例ヘバ $a-b+c-d+e$ ハ $a-b+(c-d+e)$, $a-b+c+(-d+e)$, $a-(b-c+d-e)$, $a-b-(-c+d-e)$ ノ何レトモ相等シ

同樣ニ一ツヨリ多クノ括弧ヲ嵌メルヿヲ得例ヘバ

$$a-b+c-d+e=a-\{b-c+d-e\}=a-\{b-(c-d+e)\}$$

第四問題集

次ノ式ヲ加ヘ合ハセヨ

1. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, $2a^3 + 5a^2b - 6ab^2 - 7b^2$,

$a^3 - ab^2 + 2b^3$

2. $2ab - 3ax^2 + 2a^2x$, $12ab + 10ax^2 - 6a^2x$,

$-8ab + ax^3 - 5a^2x$

3. $x^3 - 2ax^2 + a^2x + a^3$, $x^3 + 3ax^2$, $2a^3 - ax^2 - 2x^3$

4. $x^2 + y^4 + z^3$, $-4x^2 - 5z^3$, $8x^2 - 7y^4 + 10z^3$, $6y^4 - 6z^3$

5. $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 3y - 7$, $2x^2 - 4y^2 + 3x - 5y + 8$,

$10xy + 8y^2 + 9y$, $5x^2 - 6xy + 3y^2 + 7x - 7y + 11$

6. $x^2 - 3xy - y^2 + yz - 2z^2$ ヨリ $x^2 + 2xy + 5xz - 3y^2 - 2z^2$

ヲ引ケ

7. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$, $4x^3y - 12x^2y^2 + 12xy^3 - 4y^4$,

$6x^2y^2 - 12xy^3 + 6y^4$, $4xy^3 - 4y^4$, y^4 ヲ加ヘヨ

8. $5x^2 + 6xy - 12xz - 4y^2 - 7yz - 5z^2$ ヨリ

$2x^2 - 7xy + 4xz - 3y^2 + 6yz - 5z^2$ ヲ引ケ

9. 次ノ式ヲ加ヘ合ハセヨ

$x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z$

$x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz$

$x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

10. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ヨリ $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$ ヲ引ケ

11. 次ノ式ヲ加ヘ合ハセヨ

$3a^4 + 7a^3 - a^2 + 2a - 2$, $-5a^4 - 3a^3 + 5a^2 - a + 5$

$2a^4 + a^3 - 2a^2 + 5a - 10$, $a^4 + 2a^3 - 2a^2 + 6a + 6$

12. $7x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ ヨリ $4x^3 - 2x^2 - 2x - 14$ ヲ引キテ得ベキ差ヨリ更ニ $2x^3 - 8x^2 + 4x + 16$ ヲ引ケ

13. $7x^2 - 3xy + x$, $3x^2 - y^2 + 3x - y$, $-2x^2 + 4xy + 5y^2 - x - 2y$,

$-7xy - y^2 + 9x - 5y$, $4x^2 + 4y^2 - 2x$ ヲ加ヘヨ

括弧ヲ外ヅシ同類項ヲ集メテ次ノ式ヲ簡單ニセヨ

14. $1 - (1 - a) + (1 - a + a^2) - (1 - a + a^2 - a^3)$

15. $2a - (2b - d) - \{a - b - (2c - 2d)\}$

16. $a - [2b + \{3c - 3a - (a + b)\} + \{2a - (b + c)\}]$

17. $15x - \{4 - [3 - 5x - (3x - 7)]\}$

18. $16 - x - [7x - \{8x - (9x - \overline{3x - 6x})\}]$

19. $2a - [3b + (2b - c) - 4c + \{2a - (3b - \overline{c - 2b})\}]$

20. $x^4 - [4x^3 - \{6x^2 - (4x - 1)\}] - (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$

代數掛ケ算

78. 多クノ文字ノ積ヲ書クニハ此レ等ノ文字ヲ唯列ベテ(通例ハ羅馬字順ニ)書ケバヨシ,但文字ノ外ニ數字ノ因數ガアル𪜈ハ之ヲ眞先キニ置クモノトス,又數字ノ因數ガ幾ツモアル𪜈ハ豫シメ此レ等ノ因數ヲ掛ケ合ハセテ得タル數ヲ眞先キニ置クベシ(第 8 節)

今 $3a = 4b$ ヲ掛ケンニ,所要ノ積ハ

$$3a\times 4b=3\times a\times 4\times b=3\times 4\times a\times b=12ab$$

ナリ,一般ニ多クノ單項式ヲ掛ケ合ハスニハ此レ等ノ式ノ數係數ヲ悉ク掛ケ合ハセテ得タル數ノ右ニ此レ等ノ式ノ中ニアル總テノ文字ヲ(通例ハ羅馬字順ニ)書キ添フベシ

例 (1) $7a \times 3bc = 21abc$

例 (2) $4a \times 5b \times 3c = 60abc$

79. 正項ハ正數ノ如ク負項ハ負數ノ如ク取扱フベキヿ第 63 節ニ述ベタリ,乃

$$(+a)\times(+b)=+ab \qquad (+)\times(+)=+$$
$$(-a)\times(+b)=-ab \qquad (-)\times(+)=-$$
$$(+a)\times(-b)=-ab \qquad (+)\times(-)=-$$
$$(-a)\times(-b)=+ab \qquad (-)\times(-)=+$$

之ヲ符號ノ定則ト稱ス,此定則ハ a ト b トノ何タルニ拘ハラズ恒ニ眞ナルガ故ニ,上ノ右ノ方ニ示セル如クニ書キ表ハスヿヲ得ベシ,通例畧シテ同號ハ＋異號ハ－ト唱フ

例 (1) $a\times(-b)=-ab$

例 (2) $a\times(-b)\times(-c)=(-ab)\times(-c)=+abc$

例 (3) $(-a)\times(-b)\times(-c)=ab\times(-c)=-abc$

例 (4) $(-a)\times(-b)\times(-c)\times(-d)=ab\times(-c)\times(-d)$

$$=(-abc)\times(-d)=+abcd$$

上ノ諸例ノ示スガ如ク積ノ符號ハ其中ニアル正ノ因數ニ關ハラズ,積ノ符號ハ唯其中ニ負ノ因數ガ幾ツアルカニヨリテ定マルモノトス而シテ積ノ符號ハ,其中ニ負ノ因數ガ奇數ダケアレバ負,偶數ダケアレバ正ナリ

若干ノ項ヲ掛ケ合ハスニハ符號ニ拘ハラズニ掛ケ合ハセテ得タル積ニ符號ノ定則ニヨリテ定マレル適當ナル符號ヲ前置スベシ

例 (5) $4ax\times(-7bc)=-28abcx$

例 (6) $(-dm)\times(-ay)=admy$

例 (7) $3a\times(-5m)\times(-xy)=15amxy$

例 (8) $(-5a)\times(-b)\times(-4c)\times(-7)=140abc$

例　題

次ノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

1. $5a, b$　2. $a, -2b$　3. $-a, -b, c$
4. $-m, -n, y$　5. $3a, 5b$　6. $5a, -7b$
7. $7ab, -3m$　8. $3am, 8yz$　9. $3a, -4b, 7c$
10. $9a, -3b, -c$　11. $12a, -7b, -8c$　12. $-m, -2n, -9x$
13. $5abm, -4cy, -12$　14. $-4ac, -3m, yx$
15. $3cd, -4m, -yx$　16. $-am, 3y, -bx, -6z$
17. a, a, a　18. $m, -m, -m$
19. $a, a, a, -a$　20. $y, -y, -y, -y$

80. 冪ノ掛ケ算ニ於テ注意スベキハ文字ノ第一冪ノ指數ハ之ヲ省ク〻即指數ヲ陽ハニ有セザル文字ノ指數ハ1ナル〻ナリ,サテ $a^1=a$, $a^2=aa$, $a^3,=aaa$,..........ナルガ故ニ

$$a^2\times a^3=aa\times aaa=aaaaa=a^5=a^{2+3}$$

$$a^3\times a^5=aaa\times aaaaa=aaaaaaaa=a^8=a^{3+5}$$

$$a\times a^4=a\times aaaa=aaaaa=a^5=a^{1+4}$$

是レニ由テ之ヲ觀レバ同文字ノ二ツノ冪ノ積ノ指數ハ各因數ノ指數ノ和ニ等シ,一般ニ a ノ第 m 冪即 a^m ト a ノ第 n 冪即 a^n トノ積ヲ索メンニ a ナル因數ガ a^m ノ中ニハ m 個 a^n ノ中ニハ n 個アル〻ナレバ a^m ト a^n トノ積ノ中ニハ $(m+n)$ 個アルヤ明カナリ故ニ

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

即同文字ノ二ツノ冪ノ積ハ二ツノ冪ノ指數ノ和ヲ指數トスル同文字ノ冪ナリ

一層一般ニ同文字ノ多クノ冪ノ積ハ各因數ノ指數ノ和ヲ指數トスル同文字ノ冪ナリ,之ヲ指數ノ定則ト稱ス

異ナリタル文字ノ冪ヲ掛ケ合ハスニハ唯其儘列ベテ書クモノトス例ヘバ $a^3\times b^2=a^3b^2$, $-4ab^3\times 5m^2=-20ab^3m^2$

例 (1)　$3a^2b^2$ ニ $6a^2b^3$ ヲ掛ケヨ

$$3a^2b^2\times 6a^2b^3=3\times 6\times a^2\times a^2\times b^2\times b^3=18a^{2+2}b^{2+3}=18a^4b^5$$

例 (2)　$(-3a^2b)\times(-5ab^5)=15a^3b^6$

例 (3)　$2a^2b$ ノ立方ヲ索メヨ

$$2a^2b\times 2a^2b\times 2a^2b=8a^6b^3$$

例　題

次ノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

1. $2x^3, 4x^2$　2. $-3a^4, 4a^5$　3. $-2a^2b, -2ab^2$
4. $3x^3y^2z, 3x^4y^3z^2$　5. $7x^4y^2, 7y^2z^4$
6. ab, bm, cm　7. $a^2y, -3az, -a^3$
8. $15c^2, 3a^4c, -7ac^3$　9. $-2ab, 5a^2y, 3a^4y$

10. $-3a^2b^2,\ -4ab^4m,\ 6bm^4y$

11. $3ac,\ 5a^2c,\ -7ac^2m,\ -9a^5cd^2m$

12. $7x^2y,\ -2x^3y^2,\ -9xy,\ 2y^2z,\ 10$

81. 多項式ト單項式トノ掛ケ算

$(a+b)m=am+bm$ (第 27 節), 今 $a+b+c$ ヲ a ト $b+c$ トノ和ト看做セバ

$$\{a+(b+c)\}m=am+(b+c)m=am+bm+cm$$

項ノ數ガ幾ラ多クアリテモ同様ニシテ計算スルコヲ得ベキヤ明カナルガ故ニ多項式ニ單項式ヲ掛ケルニハ別別ニ多項式ノ各項ニ單項式ヲ掛ケテ得タル部分積ヲ加フベシ

例 (1) $(2a+5bc-4)\times(-3y)=2a(-3y)+5bc(-3y)+(-4)(-3y)$

$$=-6ay-15bcy+12y$$

例 (2) $5a^2b(3a-2a^2b+4b^3-y)$

$$=15a^3b-10a^4b^2+20a^2b^4-5a^2by$$

例 (3) $-2ay(a+b)+3a(ay-4by)-a(a-b)y$

$$=-2a^2y-2aby+3a^2y-12aby-a^2y+aby=-13aby$$

例 題

1. $a+2b+c+1$ ニ d ヲ掛ケヨ

2. $2a$ ニ $4a-3b+2c$ ヲ乘ゼヨ

次ノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

3. $1+2x-4x^2+x^3,\ -3x$ 4. $x^2-xy^2+2y,\ -xy$

5. $2x^3-3x^2+5x-4,\ -5x^2$ 6. $3a^2y,\ a^4y-a^3y^2-y$

7. $-5ab,\ 3a^2-2ab+7b^2$ 8. $-6a^3b^4,\ 2a^3-3a^2b-5b^2$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

9. $\frac{1}{2}(b-2c)-\frac{3}{2}(c-2b)$ 10. $7a(b-c)-2a(a-c)$

11. $2x(3a+2a^2x-5a^3x^2)+5x^2(a^2-a^3x)$

12. $a^2b^2(c^2-d^2)+c^2d^2(a^2-b^2)+b^2c^2(d^2-a^2)$

13. $3ab(1-5by+b^2y)-by(2ab-3b)$

14. $[(4a^2-3ab-b^2)\times 3ax+(2x+5)\times(-a^2b)]\times(-2ab)$

15. $4a^3-[(2b^3-3c^3)-6bc(b+c)+3c(c^2+2b^2)]$

82. 二ツノ多項式ノ掛ケ算

今 $a+b-c$ ニ $p+q$ ヲ掛ケンガ爲メニ假リニ $p+q$ ヲ s ト置ケバ

$$(a+b-c)s=as+bs-cs$$

s ノ代リニ $p+q$ ヲ復スレバ

$$(a+b-c)(p+q)=a(p+q)+b(p+q)-c(p+q)$$

$$=ap+aq+bp+bq-cp-cq$$

偖テ $a+b-c$ ノ中ニハ $+a,\ +b,\ -c$ ナル三項アリ, $p+q$ ノ中ニハ $+p,\ +q$ ナル二項アリ, 今 $a+b-c$ ノ各項ニ $p+q$ ノ各項ヲ掛ケルトキハ $+ap,\ +aq,\ +bp,\ +bq,\ -cp,\ -cq$ ヲ

得,次ニ此レ等ノ部分積ヲ加フルトキハ $ap+aq+bp+bq-cp-cq$ ヲ得,是レ即所要ノ積ナリ,項ノ數ガ此例ニ於ケルヨリモ多クアル場合ニモ同様ニシテ掛ケルコトヲ得ベシ,故ニ一般ニ二ツノ多項式ヲ掛ケ合ハスニハ一方ノ式ノ各項ニ他ノ式ノ各項ヲ掛ケテ得タル部分積ヲ加フベシ

例 (1) $(a-b)(c-d)$ ニ於ケル部分積ハ ac, $(-b)c$ 即 $-bc$, $a(-d)$ 即 $-ad$; $(-b)(-d)$ 即 $+bd$ ナリ,之ヲ加ヘテ

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

ヲ得,此公式ハ初學者ノ既ニ屢遭遇セルトコロノモノナリ

例 (2) $(4a+3b)(2a-5b)=8a^2+6ab-20ab-15b^2$, 爰ニ $6ab$ ト $-20ab$ トハ同類項ナリ,乃 $6ab-20ab$ ヲ約シテ $-14ab$ ヲ得,故ニ $(4a+3b)(2a-5b)=8a^2-14ab-15b^2$

通例ハ同類項ヲ約スル上ノ便利ヲ謀ルガ爲メニ次ノ如キ算式ヲ用ヰルモノトス

$$\begin{array}{lll}
4a & +3b & \\
2a & -5b & \\
\hline
8a^2 & +6ab & \\
 & -20ab & -15b^2 \\
\hline
8a^2 & -14ab & -15b^2
\end{array}$$

乃被乘數ノ下ニ乘數ヲ書キ其下ニ横線ヲヒキ其下ニ乘數ノ第一項 $2a$ ヲ以テ被乘數ノ各項ニ掛ケテ得タル

部分積ヲ書キ,其下ニ乘數ノ第二項 $-5b$ ヲ以テ被乘數ノ各項ニ掛ケテ得タル部分積ヲ同類項ガ竪ニ並ブ樣ニ書キ再ビ横線ヲヒキ,各行ニ就キ部分積ヲ加ヘテ以テ全体ノ積ヲ得タリ

此例ニ於テハ同類項ハ唯二ツアルノミナルガ故ニ此算式ノ簡便ナルコト充分ニ明カナラザルノ恐レアリ,仍テ更ニ一例ヲ設ケテ此算式ノ簡便ナルコトヲ示スベシ

例 (3)

$$\begin{array}{lllll}
a^2 & +2ab & -b^2 & & \\
a^2 & -2ab & +b^2 & & \\
\hline
a^4 & +2a^3b & -a^2b^2 & & \\
 & -2a^3b & -4a^2b^2 & +2ab^3 & \\
 & & a^2b^2 & +2ab^3 & -b^4 \\
\hline
a^4 & & -4a^2b^2 & +4ab^3 & -b^4
\end{array}$$

例題

次ノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

1. $-a+b$, $-a-b$ **2.** $-a-b$, $-a-b$

3. $2x+3y$, $3x-2y$ **4.** $5a+4b$, $a-b$

5. $x+7$, $x+6$ **6.** $x-7$, $x-6$

7. $2m^2+5n^2$, $2m^2-5n^2$ **8.** $a+\frac{1}{2}b$, $a-\frac{1}{2}b$

9. $3a^2+2ab+b^2$, $a-b$ **10.** x^2+x+1, $x-1$

11. x^2+3x+2, $x+3$ **12.** $x+1$, $x+2$, $x+3$

13. $x^3-3ax^2+2a^2x,\ x+3a$

14. $x^3-3x^2+2x+1,\ x^2+3x+2$

15. $x^3-x^2-2x+1,\ x^2-x+2$

83. $3x^4-2x^3+5x^2-x+1$ ニ $2x^2+6x-3$ ヲ掛ケルニハ次ノ如クニ演算スルモノトス

$$
\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 3x^4 & -\ 2x^3 & +\ 5x^2 & -\ x & +\ 1 \\
 & & & & 2x^2 & +\ 6x & -\ 3 \\
\hline
6x^6 & -\ 4x^5 & +\ 10x^4 & -\ 2x^3 & +\ 2x^2 & & \\
 & +\ 18x^5 & -\ 12x^4 & +\ 30x^3 & -\ 6x^2 & +\ 6x & \\
 & & -\ 9x^4 & +\ 6x^3 & -\ 15x^2 & +\ 3x & -\ 3 \\
\hline
6x^6 & +\ 14x^5 & -\ 11x^4 & +\ 34x^3 & -\ 19x^2 & +\ 9x & -\ 3
\end{array}
$$

上ノ演算ニ於テ特ニ注意スベキハ被乘數乘數ノ雙方ニ於ケルxノ諸冪ガ左ヨリ右ヘ進ムニ從ヒ次第ニ指數ガ小サクナル樣ニ列ベアリ且右端ノ項ハxヲ含マズ從ツテ積ニ於ケルxノ諸冪ガ同樣ノ順ニ並ビ居ルヿナリ，而シテ被乘數乘數ノ諸項ガ斯クノ如ク一定ノ順ニ列ベアルヿガ部分積中ノ同類項ヲ竪ニ並ベル上ニ於テ尠カラザル便利ヲ與フルヿ明カナルベシ

多項式 $3x^4-2x^3+5x^2-x+1$ ニ於ケルガ如ク，同ジ文字(此例ニ於テハx)ノ種種ノ冪ヲ含ム多クノ項ヨリナル式ニ於テ此文字ノ最モ高キ即指數ノ最モ大ナル冪ヲ含ム項

ガ左端ニ居リ，其右隣ニ其次ニ最モ高キ冪ヲ含ム項ガ居リ，次第ニ斯クノ如ク，終ニxヲ含マザル項ガ右端ニ在ルトキハ(但xヲ含マザル項ガ無キヿモアリ)，此式ハ該文字ノ**降冪ノ順ニ排列サレアル**トイフ

前ノ式ニ於テ項ノ順ヲ逆ニスルトキハ $1-x+5x^2-2x^3+3x^4$ ヲ得，此式ハxノ**昇冪ノ順ニ排列サレアル**トイフ

同ジ文字ノ諸ノ冪ヲ含ム多クノ項ヨリナル式ヲ掛ケ合ハスニハ先ヅ之ヲ降冪又ハ昇冪ノ順ニ排列スルモノトス，但降冪昇冪ノ何レヲ擇ムカハ全ク隨意ナリ唯被乘數乘數ヲ同ジ順ニ排列スルヲ要ス

例題

1. $2a+3a^2-a-5$ ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列セヨ

2. $x^5+4x-2x^3$ ヲ x ノ降冪ノ順ニ排列セヨ

3. $a^2b^2+a^3+ab^5+b^3$ ヲ a ノ降冪ノ順又 b ノ昇冪ノ順ニ排列セヨ

4. $a^2b+ab^2+a^3+b^3$ ヲ a ノ降冪ノ順又 b ノ昇冪ノ順ニ排列セヨ

5. $3x^4-2x^3+5x^2-x+1$ 及 $2x^2+6x-3$ ノ雙方ヲ x ノ昇冪ノ順ニ書キ直シテ後掛ケ合ハセヨ

6.　$5x+x^2+1$ ニ $3x--1+2x^2$ ヲ掛ケヨ

7.　b^2+3a^2+2ab ニ $a-b$ ヲ乘ゼヨ

8.　$a^2+2ab+b^2$ ニ $b^2-2ab+a^2$ ヲ掛ケヨ

84. n 個ノ文字ノ積ナル項ヲ **n 次**ノ項ト稱ス

項ノ次數ヲ數フルドニハ數係數ハ之ヲ勘定ニ入レザルモノトス,乃 abc ハ三次ノ項ニシテ $5abc$ モ三次ノ項ナリ

$3a^2b^3c$ ハ $3aabbbc$ ヲ略記シタルモノニシテ $3aabbbc$ ノ中ニハ文字ノ數六ッアルガ故ニ $3a^2b^3c$ ハ六次ノ項ナリ,サレバ項ノ次數トハ結局リ其中ニアル文字ノ指數ノ和ニ等シ,爰ニ注意スベキハ陽ハニ指數ヲ有セザル文字ノ指數1ヲ數ゾヘ遺サザル樣ニスルヿナリ

整式ノ次數トハ式中ニアル項ノ中ニテ最モ高キ次數ヲ有スル項ノ次數ノコトナリ

整式ノ次數ヲ考フルニ屢或ル特別ナル一ッ或ハ多クノ文字ニノミ着目シ其他ノ文字ハ數係數ト共ニ之ヲ度外視シ全ク眼中ニ置カザルヿアリ,此場合ニ於テハ今特ニ着目サレタル文字ニ就テ某次ノ式ナリトイフ,例ヘバ ax^2+bx+c ハ x ニ就テ二次ノ式ナリ又 ax^2y+bxy^2 ハ x ニ就テ二次ノ式ナリ,又 y ニ就テモ二次ノ式ナリ,而シテ x 及

y ニ就テハ三次ノ式ナリ

整式ノ總テノ項ガ同次ナルドハ此式ヲ**同次式**ト稱ス而シテ同次式ノ次數トハ勿論其各項ノ次數ノコトナリ,例ヘバ $a^2+2ab+b^2$ ハ二次ノ同次式ナリ,$x^3-3xy^2+y^3$,$a^3+b^3+c^3-3abc$ ハ何レモ三次ノ同次式ナリ

同次式ト同次式トヲ掛ケ合ハセタルモノハ矢張リ同次式ナリ,如何トナレバ各部分積ハ何レモ被乘數ノ或ル項ト乘數ノ或ル項トヲ掛ケ合ハセテ得タルモノナルガ故ニ其次數ハ兩式ノ次數ノ和ニ等シクレバナリ

$\boxed{\text{注意}}$代數掛ケ算ニ於テハ屢同次式ニ同次式ヲ掛ケルヿアリ,同次式ニ同次式ヲ掛ケテ得タル積ガ同次式ナラザルドハ演算ニ誤アリシヿ確カナリ

85. 或ル特別ナル文字ニノミ着目シテ代數式ヲ考フル場合ニ於テ括弧ヲ用ヰテ此文字ノ同一羃ヲ含ム項ヲ集ムルヿアリ例ヘバ

$$x^3+ax^2+bx^2+cx^2+bcx+cax+abx+abc$$

ニ於テ特ニ x ニノミ着目シテ

$$x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc$$

ト書キ又 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ ニ於テ特ニ a ニノミ着目シテ $a^2-(b+c)a+(b^2-bc+c^2)$ ト書クガ如シ

例　　題

上ノ例ニ倣ヒ x ニノミ着目シテ次ノ式ヲ處分セヨ

1. $x^2+ax+bx+ab$　　　2. $x^2-ax-bx-ab$

3. $ax^2-bx^2+cx^2-bcx-cax+abx+abc$

4. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

5. $(b+c-a)x+(c+a-b)x+(a+b-c)x$

6. $(b-c)x+(c-a)x+(a-b)x$

7. $\{(b-a)x+(c-d)y\}+\{(a+b)x+(c+d)y\}$

86. 例 (1) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ ニ $a+b+c$ ヲ掛ケヨ

a ノ降冪ノ順ニ排列シテ演算スル丁次ノ如シ

$$\begin{array}{l}
a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
a+b+c \\
\hline
a^3-a^2b-a^2c+ab^2-abc+ac^2 \\
\quad +a^2b \qquad -ab^2-abc \qquad +b^3-b^2c+bc^2 \\
\qquad\quad +a^2c \qquad -abc-ac^2 \qquad +b^2c-bc^2+c^3 \\
\hline
a^3 \qquad\qquad -3abc \qquad +b^3 \qquad\qquad +c^3
\end{array}$$

即答ハ $a^3+b^3+c^3-3abc$ ナリ，或ハ又括弧ヲ用井次ノ如クニシテ演算スル丁ヲ得

$$\begin{array}{l}
a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
a+(b+c) \\
\hline
a^3-a^2(b+c)+a(b^2-bc+c^2) \\
\quad +a^2(b+c)-a(b+c)^2+(b+c)(b^2-bc+c^2) \\
\hline
\end{array}$$

爰ニ　$a(b^2-bc+c^2)-a(b+c)^2=a\{(b^2-bc+c^2)-(b+c)^2\}$

$$=a\{b^2-bc+c^2-(b^2+2bc+c^2)\}$$

$$=a\{b^2-bc+c^2-b^2-2bc-c^2\}$$

$$=-3abc$$

又　$(b+c)(b^2-bc+c^2)=b^3+c^3$

故ニ答ハ矢張リ前ノ通リ $a^3+b^3+c^3-3abc$ ナリ

例 (2) $x-a$, $x-b$, $x-c$ ヲ掛ケ合ハセヨ

$$\begin{array}{l}
x-a \\
x-b \\
\hline
x^2-ax \\
\quad -bx+ab \\
\hline
x^2-(a+b)x+ab \\
x-c \\
\hline
x^3-(a+b)x^2+abx \\
\quad -cx^2+(a+b)cx-abc \\
\hline
x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc
\end{array}$$

第五問題集

次ノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

1. $x^3+4x^2+5x-24$,　$x^2-4x+11$
2. x^3-7x^2+5x+1,　$2x^2-4x+1$
3. $x^3+6x^2+24x+60$,　$x^3-6x^2+12x+12$
4. x^3-2x^2+3x-4,　$4x^3+3x^2+2x+1$
5. $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$,　$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$
6. x^2-3ax,　$x+3a$
7. $a^2+2ax-x^2$,　$a^2+2ax+x^2$
8. $2b^2+3ab-a^2$,　$7a-5b$
9. $a^2-ab+2b^2$,　$a^2+ab+2b^2$
10. $a^2+b^2+c^2+bc+ca-ab$,　$a+b-c$
11. $4x^2-3xy-y^2$,　$3x-2y$
12. $x^5-x^4y+xy^4-y^5$,　$x+y$
13. $2x^2+3xy+4y^2$,　$3x^2+4xy+y^2$
14. $x^2+y^2-xy+x+y-1$,　$x+y-1$
15. $x^4+2x^3y+4x^2y^2+8xy^3+16y^4$,　$x-2y$
16. $81x^4+27x^3y+9x^2y^2+3xy^3+y^4$,　$3x-y$
17. $x+2y-3z$,　$x-2y+3z$
18. $a^2-ax+bx+b^2$,　$a+b+x$

19. $4a^2+9b^2+c^2-3bc-2ca-6ab$,　$2a+3b+c$
20. $a^2+4bx+4b^2x^2$,　$a^2-4bx+4b^2x^2$
21. $a^2-2ab+b^2+c^2$,　$a^2+2ab+b^2-c^2$
22. $x-a$,　$x+a$,　x^2+a^2
23. $x+a$,　$x+b$,　$x+c$
24. x^2-ax+a^2,　x^2+ax+a^2,　$x^4-a^2x^2+a^4$
25. $x-2a$,　$x-a$,　$x+a$,　$x+2a$
26. $(x+y+z)^2$ ヲ索メヨ
27. $(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)-(x+y+z)^2$ ハ $yz+zx+xy$ ニ等シキヿヲ示セ
28. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3-3(b-c)(c-a)(a-b)=0$ ナルヿヲ示セ
29. $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$ ヲ簡單ニセヨ
30. $x=y+z$ ナル𪜈ハ $x^3=y^3+3xyz+z^3$ ナルヿヲ示セ

代數割リ算

87. 代數割リ算ニ於テハ單ニ分數ノ形ヲ用ヰテ割リ算ヲ表示スルモノトス例ヘバ a ヲ b デ割ルトキハ $\frac{a}{b}$ ヲ得

$\frac{a}{b}$ ニ於テ b ヲ其分母 a ヲ其分子ト稱ス

分母分子ガ同ジ因數ヲ有スルトキハ此因數ヲ分母分子ノ雙方ヨリ省キテ(第35節)以テ之ヲ約スベシ例ヘバ $15a^2b$ ヲ $6bc$ デ割リテ $\frac{15a^2b}{6bc}$ ヲ得,而シテ此式ノ分母分子ハ倶ニ $3b$ ナル因數ヲ有スルガ故ニ之ヲ約シテ $\frac{5a^2}{2c}$ ヲ得

或ル項ヲ他ノ項デ割ルトキノ符號ノ定メ方ハ(第61節)掛ケ算ニ於ケル符號ノ定メ方ヨリ出ヅルモノニシテ即被除數除數ノ符號ガ同ジケレバ商ノ符號ハ＋,又異ナレバ商ノ符號ハ－ナリ例ヘバ

$$\frac{12abc}{4ab}=3c,\quad \frac{-12abc}{4ab}=-3c,\quad \frac{12abc}{-4ab}=-3c,\quad \frac{-12abc}{-4ab}=3c$$

88. 同ジ文字ノ一ツノ冪ヲ他ノ冪デ割ル方法ヲ示ス爲メニ a^5 ヲ a^3 デ割ランニ, $a^5=aaaaa$, $a^3=aaa$

故ニ $\quad \frac{a^5}{a^3}=\frac{aaaaa}{aaa}=aa=a^2=a^{5-3}$

同樣ニ $\quad \frac{c^7}{c^4}=\frac{ccccccc}{cccc}=ccc=c^3=c^{7-4}$

或ハ $c^4\times c^3=c^7$ ナルガ故ニ $\frac{c^7}{c^4}=c^3=c^{7-4}$, $\frac{c^7}{c^3}=c^4=c^{7-3}$

乃同ジ文字ノ一ツノ冪ヲ他ノ冪デ割リタル商ハ,被除數ノ方ガ除數ノ方ヨリハ高次ノ冪ナレバ,被除數ノ指數ヨリ除數ノ指數ヲ引キタル差ヲ指數トスル同ジ文字ノ冪ニ等シ,又被除數ノ指數ガ除數ノ指數ニ等シキトキハ商ハ勿論1ニ等シ

被除數ノ指數ガ除數ノ指數ヨリ小ナル場合ニ於テモ尙ホ强ヒテ上ノ法則ヲ適用スルトキハ負數ヲ指數トスル冪ヲ得ベシ,負數ヲ指數トスル冪トハ今ノトコロニテハ全ク意味ナキモノナリ,コレハ後ニ論ズベシ,先ヅソレマデハ次ノ例ノ示スガ如クニシテ演算スベシ

例 (1) $\frac{a^3}{a^7}=\frac{a^3}{a^4a^3}=\frac{1}{a^4}$ 　　例 (2) $\frac{4ab^2}{3cb^5}=\frac{4ab^2}{3cb^3b^2}=\frac{4a}{3cb^3}$

結局リ分母分子ニ同ジ文字ノ冪ガアリテ分母ノ方ノ指數ガ分子ノ方ノ指數ヨリモ大ナルトキハ分子ニ於ケル此文字ヲ省クト同時ニ分母ニ於ケル此文字ノ冪ノ指數ヲ分子ノ方ノ指數ダケ減ズレバヨシ

例 (3) $42c^3x^4y$ ヲ $7c^3x^5$ デ割レ

$$\frac{42c^3x^4y}{7c^3x^5}=\frac{(6\times7)c^3x^4y}{7c^3x^4x}=\frac{6y}{x}$$

例 (4) $-2a^5bmx$ ヲ $3a^3b^2m$ デ割レ

$$\frac{-2a^5bmx}{3a^3b^2m}=-\frac{2a^3a^2bmx}{3a^3bbm}=-\frac{2a^2x}{3b}$$

注意 充分ニ習熟シタル後ハ途中ノ式ヲ書キ下ダスニ及バズ,商ノ符號及分子分母ヨリ消シ去ルヿヲ得ベキ因數ヲ視察シテ直チニ最後ノ式ヲ書キ下ダスベシ

例 (5) $-7ac^2m^4y$ ヲ $-4ac^5my^5$ デ割レ

$$\frac{-7ac^2m^4y}{-4ac^5my^5}=\frac{7m^3}{4c^3y^4}$$

例題

次ノ第一ノ式ヲ第二ノ式デ割レ

1. $24aby,\ -3ay$ 2. $38a^4bx^3,\ 19a^3bx$ 3. $18m^2x^3y,\ -6mx^2$

4. $-64ab^4m,\ 8ab^2$ 5. $-15a^5b^4c,\ -3a^2c$ 6. $7axy,\ -5amy$

7. $-yz,\ 5ax$ 8. $15m^4xy^5,\ -3m^6y$ 9. $-16p^2qy,\ 2ap^3y^2$

10. $35x^2y^3z^5$ ヲ $5xy^2$ デ割リテ後 $-3a^2x^2y$ ヲ掛ケヨ

11. $35x^2y^3z^5$ ニ $-3a^2x^2y$ ヲ掛ケテ後 $5xy^2$ デ割レ

12. $28a^6b^2c^4$ ヲ $7a^2bc^3$ デ割リテ後更ニ $2ab^2c^3$ デ割レ

89. 多項式ト單項式トノ割リ算

多項式ヲ單項式デ割ルニハ多項式ノ各項ヲ單項式デ割レバヨシ

例 (1) $\dfrac{4a^3-3abc+a^2c}{a}=4a^2-3bc+ac$

例 (2) $\dfrac{12x^3-5ax^2-2a^2x}{3x}=4x^2-\frac{5}{3}ax-\frac{2}{3}a^2$

例 (3) $\dfrac{5a^2by-3ay^2+ayz}{5axy}=\dfrac{5a^2by}{5axy}-\dfrac{3ay^2}{5axy}+\dfrac{ayz}{5axy}=\dfrac{ab}{x}-\dfrac{3y}{5x}+\dfrac{z}{5x}$

單項式ヲ多項式デ割ルニハ單ニ分數ノ形ヲ用ヰテ之ヲ表示スルモノトス但分母分子ニ公通ノ因數アルトキハ之ヲ省クモノトス例ヘバ x ヲ $b-c$ デ割ルトキハ $\dfrac{x}{b-c}$ ヲ得,$-cm$ ヲ $am+bm$ デ割ルトキハ $\dfrac{-cm}{am+bm}=-\dfrac{c}{a+b}$ ヲ得

例題

次ノ第一式ヲ第二式デ割レ

1. $3x^2-5ax,\ x$ 2. $5y^4-6y^3,\ -y^2$ 3. $4a^6-5a^5+2a^4,\ a^4$

4. $4x^3-8x^2+16x,\ 4x$ 5. $3a^4-12a^3+15a^2,\ -3a^4$

6. $x^3y-3x^2y^2+4xy^3,\ xy$ 7. $12abx-16a^3bm+8a^2b^2,\ 4ab$

8. $60a^3b^3c^2-48a^2b^4c^2+36a^2b^2c^4-20abc^6,\ 4abc^2$

9. $-12a^3bm+16a^2by-a^2b^3z+xy,\ -4a^2bm$

10. $8a^2by,\ 2ab(p+q-5)$

11. $3x(x+2)+4(x+2),\ x+2$

12. $8a^2(2a+b)+2ab(2a+b)+b^2(2a+b),\ 2a+b$

90. 多項式ヲ多項式デ割ルヿ (第39節ヲ見ヨ)

多項式ヲ多項式デ割ルニハ先ヅ第一ニ被除數除數ノ雙方ヲ或ル公通ノ文字ノ降羃或ハ昇羃ノ順ニ排列スルヿヲ要ス

今 $8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3$ ヲ $2a+b$ デ割ランニ,此兩式ハ既ニ a ノ降羃ノ順ニ排列シアルガ故ニ之ヲ列ベ變ヘルノ必

要ナシ,偖テ被除數ニ於ケル a ノ最高冪ヲ含ム初項 $8a^3$ ヲ除數ノ初項 $2a$ デ割リテ $4a^2$ ヲ得,之ヲ商ノ初項トス,次ニ除數ニ此 $4a^2$ ヲ掛ケテ $8a^3+4a^2b$ ヲ得之ヲ被除數ヨリ引キテ $4a^2b+4ab^2+b^3$ ヲ得之ヲ第一ノ剩餘ト名ヅク,次ニ此式ノ初項 $4a^2b$ ヲ除數ノ初項 $2a$ デ割リテ $2ab$ ヲ得,之ヲ商ノ第二項トス,除數ニ此 $2ab$ ヲ掛ケテ $4a^2b+2ab^2$ ヲ得之ヲ第一ノ剩餘ヨリ引キテ $2ab^2+b^3$ ヲ得之ヲ第二ノ剩餘ト名ヅク,次ニ此式ノ初項 $2ab^2$ ヲ除數ノ初項 $2a$ デ割リテ b^2 ヲ得,之ヲ商ノ第三項トス,次ニ除數ニ此 b^2 ヲ掛ケテ $2ab^2+b^3$ ヲ得之ヲ第二ノ剩餘ヨリ引キテ零ヲ得,乃所要ノ商ハ $4a^2+2ab+b^2$ ナリ

上ノ計算ノ意味ハ次ノ如シ

$$\begin{aligned}8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3&=(8a^3+4a^2b)+4a^2b+4ab^2+b^3\\&=(8a^3+4a^2b)+(4a^2b+2ab^2)+(2ab^2+b^3)\\&=4a^2(2a+b)+2ab(2a+b)+b^2(2a+b)\end{aligned}$$

實際ハ次ノ如キ算式ヲ用ヰルモノトス

$$\begin{array}{l}2a+b)\ 8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3\ (4a^2+2ab+b^2\\ \qquad\ \ \underline{8a^3+4a^2b\qquad\qquad\qquad}\\ \qquad\qquad\quad 4a^2b+4ab^2+b^3\\ \qquad\qquad\quad \underline{4a^2b+2ab^2\qquad}\\ \qquad\qquad\qquad\quad 2ab^2+b^3\\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{2ab^2+b^3}\end{array}$$

仍テ多項式ヲ多項式デ割ル法則ヲ得ルコト次ノ如シ

(第一)　被除數除數ノ雙方ヲ或ル公通ノ文字ノ降冪(或ハ昇冪)ノ順ニ排列スベシ

(第二)　被除數ノ初項ヲ除數ノ初項デ割リテ商ノ初項ヲ索ムベシ

(第三)　除數ニ商ノ初項ヲ掛ケテ得タル積ヲ被除數ヨリ減ズベシ

(第四)　(第三)ニ於テ得タル剩餘ヲ恰モ新タナル被除數ノ如クニ看做シテ前ト同様ノ算法ヲ續ケ行フベシ

91. 例 (1)　$3x^3-4x^2+2x-1$ ヲ $1-x$ デ割レ

除數ヲ x ノ降冪ノ順ニ列ベ變ヘテ $-x+1$ ヲ得

$$\begin{array}{l}-x+1)\ 3x^3-4x^2+2x-1\ (-3x^2+x-1\\ \qquad\quad\ \ \underline{3x^3-3x^2\qquad\qquad}\\ \qquad\qquad\quad -x^2+2x-1\\ \qquad\qquad\quad \underline{-x^2+x\qquad\ \ }\\ \qquad\qquad\qquad\qquad x-1\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x-1}\end{array}$$

例 (2)　$a^2-b^2+2bc-c^2$ ヲ $a+b-c$ デ割レ

$$\begin{array}{l}a+b-c)\ a^2-b^2+2bc-c^2\ (a-b+c\\ \qquad\qquad\ \underline{a^2+ab-ac\qquad\qquad\qquad}\\ \qquad\qquad\quad -ab+ac-b^2+2bc-c^2\\ \qquad\qquad\quad \underline{-ab\qquad\ -b^2+bc\qquad}\\ \qquad\qquad\qquad\quad ac\qquad +bc-c^2\\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{ac\qquad +bc-c^2}\end{array}$$

例 (3)　$a^4+a^2b^2+b^4$ ヲ a^2-ab+b^2 デ割レ

此場合ニ於テハ次ニ示スガ如ク同類項ヲ竪ニ並ベル上ノ便宜ノ爲メニ被除數ヲ書キ下ダスニ項ト項トノ間ヲ適宜明ケ置クモ可ナリ

$$
\begin{array}{r|l}
a^2-ab+b^2 & a^4 \qquad +a^2b^2 \qquad +b^4 \;(a^2+ab+b^2 \\
 & a^4-a^3b+a^2b^2 \\
\hline
 & \quad +a^3b \qquad\qquad +b^4 \\
 & \quad +a^3b-a^2b^2+ab^3 \\
\hline
 & \qquad a^2b^2-ab^3+b^4 \\
 & \qquad a^2b^2-ab^3+b^4 \\
\hline
\end{array}
$$

例　題

次ノ第一式ヲ第二式デ割レ

1. $x^2+2ax+a^2,\ x+a$　　2. $x^2-2ax+a^2,\ x-a$

3. $x^3-a^3,\ x-a$　　4. $x^3+a^3,\ x+a$

5. $x^2-23x+132,\ x-11$　　6. $3x^2-11x+10,\ 3x-5$

7. $a^3-b^3,\ a-b$　　8. $8a^3+27b^3,\ 2a+3b$

9. $a^3x^3+b^3y^3,\ ax+by$　　10. $8a^6x^6-125y^6,\ 2a^2x^2-5y^2$

11. $x^3-8x-3,\ 3-x$　　12. $2x^3-5x^2+4,\ 2-x$

13. $x^4+2x^2-x+2,\ 1-x+x^2$

14. $a^2-b^2-2bc-c^2,\ a-b-c$

15. $1-6x^2y+12x^4y^2-8x^6y^3,\ 1-4x^2y+4x^4y^2$

92.　$a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ $a+b+c$ デ割レ

a ノ降冪ノ順ニ排列シテ演算スルヿ次ノ如シ

$$
\begin{array}{r|l}
a+b+c & a^3-3abc+b^3+c^3 \;(a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
 & a^3+a^2b+a^2c \\
\hline
 & -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
 & -a^2b-ab^2-abc \\
\hline
 & \quad -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
 & \quad -a^2c \qquad -abc-ac^2 \\
\hline
 & \qquad ab^2-abc+ac^2+b^3+c^3 \\
 & \qquad ab^2 \qquad\qquad +b^3+b^2c \\
\hline
 & \qquad\quad -abc+ac^2-b^2c+c^3 \\
 & \qquad\quad -abc \qquad -b^2c-bc^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad ac^2+bc^2+c^3 \\
 & \qquad\qquad ac^2+bc^2+c^3 \\
\hline
\end{array}
$$

茲ニ注意スベキヿアリ,即此場合ニ於テハ文字ガ三ツアルガ故ニ a ノ外ニ尙ホ b ト c トノ中ノ何レカ一ツヲ撰ミ,例ヘバ b ヲ採リ,a ノ降冪ノ順ニ排列スルト同時ニ又 b ノ降冪ノ順ニ列ブ樣ニ項ヲ配置スルヿナリ

括弧ヲ用ヰテ上ノ演算ヲ簡單ニスルヿヲ得ベシ,即

$$
\begin{array}{r|l}
a+(b+c) & a^3-3abc+b^3+c^3 \;(a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
 & a^3+a^2(b+c) \\
\hline
 & -a^2(b+c)-3abc+b^3+c^3 \\
 & -a^2(b+c)-a(b+c)^2 \\
\hline
 & \qquad a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 \\
 & \qquad a(b^2-bc+c^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2) \\
\hline
\end{array}
$$

93. 前二節ニ掲ゲタル例ハ何レモ割リ切レル場合ナリ,而シテ或ル場合ニ於テハ此レ等ノ例ニ於ケルガ如ク丁度割リ切レザルヿアリ例ヘバ x^2-ax+a^2 ヲ $x+a$ デ割ラントスルニ,右ニ示スガ如ク第二ノ剰餘 $3a^2$ ニ達シテ最早前ト同ジ方法ヲ續ケ行フヿ能ハズ,此 $3a^2$ ヲ如何ニ處分スベキカト問フニ,之ヲ $x+a$ デ割リタルモノ即 $\dfrac{3a^2}{x+a}$ ヲ商ニ足セバ可ナリ,結局リ此演算ハ $x^2-ax+a^2=(x-2a)(x+a)+3a^2$ ナルヿヲ示スモノニシテ答ハ $x-2a+\dfrac{3a^2}{x+a}$ ナリ

$$
\begin{array}{r|l}
x+a) & x^2-ax+a^2\ (x-2a \\
 & \underline{x^2+ax} \\
 & -2ax+a^2 \\
 & \underline{-2ax-2a^2} \\
 & 3a^2
\end{array}
$$

或ハ又剰餘 $3a^2$ ハ其儘ニナシ置キ答ハ商 $x-2a$ ト剰餘 $3a^2$ トナリトイフモ可ナリ,此場合ニ於テハ割リ算ノ意義ハ狹メラレタルモノトス

乃割リ切レザル場合ニ狹キ意味ニ於テ多項式 A ヲ多項式 B デ割ルトハ A ト $B\times C$ トノ差ガ或ル文字ニ就テ B ヨリモ低次ノ式トナル樣ニ C ヲ索ムルトイフヿナリ

$\boxed{\text{注意}}$　狹キ意味ノ割リ算ニ於テハ式ノ列ベ方ニヨリテ異ナリタル答ヲ得例ヘバ上ノ例ニ於テ a ノ降冪ノ順ニ列ベテ演算スルトキハ商 $a-2x$ ト剰餘 $3x^2$ トヲ得ベシ

第六問題集

次ノ第一式ヲ第二式デ割レ

1. $x^4-81y^4,\ x-3y$　　2. $x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3,\ x-y$

3. $x^5-y^5,\ x-y$　　4. $a^5+32b^5,\ a+2b$

5. $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5,\quad x^3+y^3$

6. $x^4-5x^3+11x^2-12x+6,\quad x^2-3x+3$

7. $x^4+x^3-9x^2-16x-4,\quad x^2+4x+4$

8. $x^4-13x^2+36,\quad x^2+5x+6$

9. $x+x-24x^2-35x+57,\quad x^2+2x-3$

10. $1-x-3x^2-x^5,\quad 1+2x+x^2$

11. $x^6-2x^3+1,\quad x^2-2x+1$

12. $a^4+2a^2b^2+9b^4,\quad a^2-2ab+3b^2$

13. $a^6-b^6,\quad a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$

14. $x^6+2x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x-1,\quad x^2+2x-1$

15. $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1,\quad x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

16. $x^{12}+x^6-2,\quad x^4+x^2+1$

17. $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc,\quad x^2-(a+b)x+ab$

18 $a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2,\quad ax^2-bx+c$

19. $x^4-x^3y-xy^3+y^4,\quad x^2+xy+y^2$

20. $x^3-3xy-y^3-1,\quad x-y-1$

21. $49x^2+21xy+12yz-16z^2,\quad 7x+3y-4z$

22. $2a^2-3ab-5ac-2b^2-5bc-3c^2,\quad a-2b-3c$

23. $a^3+8b^3+c^3-6abc,\quad a^2+4b^2+c^2-ac-2ab-2bc$

24. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3,\quad a+b+c$

25. $a^2(b+c)+b^2(a-c)+c^2(a-b)+abc,\quad a+b+c$

26. $x^3-2ax^2+(a^2+ab-b^2)x-a^2b+ab^2,\quad x-a+b$

27. $(x+y)^2-2(x+y)z+z^2,\quad x+y-z$

28. $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3,\quad (x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

29. x^4+1 ヲ $x+1$ デ割リテ商ガ $x^3-x^2+x-1+\dfrac{2}{x+1}$ ナルヿヲ示セ

30. 1 ヲ $1+a$ デ割リテ $\dfrac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\dfrac{a^4}{1+a}$ ナルヿヲ示セ

第六編　一次方程式

(第三編ノ續キ)

94. 代數式ヲ無理式有理式ノ二種類ニ大別シテ根號ヲ含ム式ヲ無理式根號ヲ含マザル式ヲ有理式ト稱スルヿハ既ニ第12節ニ述ベタリ

代數式ヲ類別スルニハ數字ヲ以テ表ハサレタル數ハ之ヲ眼中ニ置カザルモノトス,サレバ代數式ノ中ニ數字ヲ以テ表ハサレタル數ニノミ係ル根號ガ存在スルモ其式ハ有理式タルヲ失ハズ例ヘバ $\dfrac{\sqrt{2}x+ay}{x+\sqrt{3}}$ ノ如キハ有理式ナリ

代數式ヲ類別スルニ多クノ場合ニ於テハ或ル格段ナル文字ニノミ着目シ其他ノ文字ハ數字ト共ニ之ヲ眼中ニ置カザルヿアリ,例ヘバ $\dfrac{\sqrt{a}+x}{y}$ ハ總テノ文字ニ着目スル場合ニハ無理式ナルモ x ト y トニノミ着目スル場合ニハ有理式ナリ

又一般ニ文字ヲ以テ割ルヿヲ示サザル有理式ヲ整式ト稱シ文字ヲ以テ割ルヿヲ示ス式ヲ分數式ト稱ス,サレバ $\dfrac{ax+b}{c}$ ハ總テノ文字ニ着目スル場合ニハ分數式ナリ然

レモ x ニノミ着目スル場合ニハ整式ナリ

乃代數式ヲ區別シテ或ハ無理式或ハ有理式或ハ分數式或ハ整式トスルニハ先ヅ式ノ中ノ何レノ文字ニ着目シ何レノ文字ヲ度外視スルカヲ定メザルベカラズ

或ル式ガ x ニ就テ有理式ナリトハ其中ニ x ニ係ル根號ノ無キヲイヒ,或ル式ガ x ニ就テ整式ナリトハ其式ガ x ヲ含ム除數ヲ有セザルヲイフ例ヘバ $\dfrac{x^2+ax}{b+c}$ ハ x ニ就テ整式ナリ, $\dfrac{ax+b}{x+1}$ ハ x ニ就テ整式ナラズ

x ト y トニノミ着目スル場合ニ於テハ $\dfrac{ax^2+2xy+y}{c+d}$ ハ整式ナリ, $\dfrac{ax+by}{x+y}$ ハ整式ナラズ,二ツヨリ多クノ文字ニ着目スル場合ニモ同様ナリ

95. 第84節ニ説明セル次數トイフヿハ整式ニ就テノミイフモノニシテ吾人ハ整式ニ就テノミ其次數ヲ問フヿヲ得,無理式ハ勿論分數式ニ就テハ次數ナルモノアルヿナシ

次數ハ數字ヲ以テ表ハサルルト文字ヲ以テ表ハサルルトニ拘ハラズ必ズ正ノ整數ナリトス

方程式ヲ類別シ又ハ其次數ヲ考フルニハ,其中ノ未知數ニノミ着目スルモノトス,即既知數ハ數字ヲ以テ表ハサレアルト文字ヲ以テ表ハサレアルトニ拘ハラズ之ヲ眼中ニ置カザルモノトス

方程式ノ兩邊ガ未知數ニ就テ整式ナル場合ニ限リテ方程式ノ次數ナルモノアリ,未知數ニ就テ整式ナラザル二ツノ式ヲ相等シト置キテ得タル方程式ニアツテハ次數ナルモノアルヿナシ

方程式ノ中ニハ唯一ツノ未知數 x アリテ,其總テノ項ヲ一邊ニ集メテ得タル式ガ x ニ就テ一次ノ整式ナルトキハ之ヲ一次方程式トイフ例ヘバ $3x+4=0$, $\dfrac{a+b}{c}x+d=0$, $\sqrt{2}x+\dfrac{\sqrt{a}}{3}=0$ ナドハ何レモ一次方程式ナリ,又

$$3x^2+5x+3=x^2+2x+1+2x^2$$

ハ見懸ケ上 x^2 ヲ含ムモ總テノ項ヲ一邊ニ集メ同類項ヲ約スルトキハ x^2 ヲ含ム項ハ消ヘ失セテ跡ニハ x ニ就テ一次ノ整式ガ殘ルガ故ニ矢張リ一次方程式ナリ,之ニ反シ $\dfrac{5x+3}{x+1}=2$ ハ x ノ第一羃ノミヲ含ムモ其左邊ハ x ニ就テ整式ナラザルガ故ニ一次方程式ニアラズ,此方程式ノ次數ナルモノアルヿナシ,但後ニ示スガ如ク此方程式ノ解方ヲシテ一次方程式ノ解方ニ歸セシムルヿヲ得ルハ全ク別事ナリトス

唯一ツノ未知數 x ヲ含ム方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メテ得タル式ガ x ニ就テ二次ノ整式ナルトキハ之ヲ二次方程式,三次ノ整式ナルトキハ三次方程式ト稱シ其他之ニ準フ

96. 第三編ニ於テハ文字ハ必ズ正ノ整數ヲ表ハスモノトシテ一次方程式ヲ論ゼリ而シテ文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルヿヲ得ルトスルモ一次方程式ヲ解ク方法ハ前ト異ナルヿナシ

同一ノ數 a ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛ケ或ハ兩邊ヲ割ルヿヲ得,但 a ハ如何ナル數ニテモ可ナリ唯零ナルベカラズ

未知數ヲ含ム式ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛ケ或ハ兩邊ヲ割ルベカラズ,如何トナレバ,斯クスルトキハ後ニ論ズルガ如ク全ク方程式ノ性質ヲ變ズルモノナレバナリ

第43節ニ於テ方程式中ニアル未知數ニ代フルニ或ル數値ヲ以テシテ得ベキ等式ガ成リ立ツトキハ此數値ヲ方程式ノ根ト稱ストイヘリ,而シテ方程式ノ根ハ必ズシモ數値ニ限ラズ既知數タル文字ヲ以テ表ハサレタル値ニテモ可ナリ例ヘバ $ax=b$ ヲ解キテ $x=\frac{b}{a}$ ヲ得,此 $\frac{b}{a}$ ヲ矢張リ方程式 $ax=b$ ノ根ト稱ス

97. 本節ニ於テハ x ハ恒ニ未知數ヲ表ハシ,其他ノ文字 a, b, c 等ハ既知數ヲ表ハスモノトス

例 (1) $(x-1)(x-2)+5=(x+1)^2$ ヲ解ケ

括弧ヲ去レバ $x^2-3x+2+5=x^2+2x+1$

移項スレバ $x^2-3x-x^2-2x=1-2-5$

故ニ $-5x=-6$, -5 デ割リテ $x=\frac{6}{5}$ ヲ得

例 (2) $0.375x-1.875=0.12x+1.185$ ヲ解ケ

移項シテ $0.375x-0.12x=1.875+1.185$

$$0.255x=3.06,\quad x=\frac{3.06}{0.255}=12$$

例 (3) $3x^2-1=(3x+2)(x-5)$

括弧ヲ去リテ $3x^2-1=3x^2-13x-10$

$$3x^2-3x^2+13x=-10+1,\quad 13x=-9,\quad x=-\frac{9}{13}$$

例 (4) $a(x-a)+b(x-b)=2ab$ ヲ解ケ

括弧ヲ去リテ $ax-a^2+bx-b^2=2ab$

移項シテ $ax+bx=a^2+b^2+2ab$

即 $(a+b)x=(a+b)^2$

$a+b$ デ割リテ $x=\frac{(a+b)^2}{a+b}=a+b$

第七問題集

次ノ方程式ヲ解ケ

1. $3(x-1)-\{3x-(2-x)\}=5$
2. $x-(4-2x)=7(x-1)$
3. $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=1$
4. $5(4-3x)=7(3-4x)$
5. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-3}{3}=3$
6. $\frac{1}{4}(x+1)-\frac{2}{3}(x-1)=3$
7. $x+\frac{5x-8}{3}=6-\frac{3x-8}{5}$
8. $\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}=x-\frac{2x-1}{3}$
9. $1-2\{x-3(1+x)\}=0$
10. $(x+1)(x+2)=(x-2)(x-4)$

11. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+4}{4}+8=0$　　12. $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{x+1}{2}-x$

13. $\frac{1}{2}(x-2)+\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=10$

14. $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$　　15. $2x^2=(x+1)^2+(x+3)^2$

16. $(x-1)(x-4)=2x+(x-2)(x-3)$

17. $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$

18. $\frac{x+\frac{1}{2}}{2}-\frac{2x-\frac{1}{2}}{5}+1\frac{1}{4}=0$　　19. $\frac{3x+5}{8}-\frac{21+x}{2}=5x-15$

20. $0.5x+3.75=5.25x-1$　　21. $0.25x+4-0.375x=0.2x-9$

22. $0.15x+1.2-0.875x+0.375=0.0625x$

23. $1.2x-\frac{1}{5}(0.18x-0.05)=0.4x+8.9$

24. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c$　　25. $2(x-a)+3(x-2a)=2a$

26. $\frac{1}{2}(a+x)+\frac{1}{3}(2a+x)+\frac{1}{4}(3a+x)=3a$

27. $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+b^2$　　28. $(a+bx)(b+ax)=ab(x^2-1)$

29. $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$　　30. $a(x+a)+b(b-x)=2ab$

31. $(x+a+b)^2+(x+a-b)^2=2x^2$

32. $(x-a)(x-b)+(a+b)^2=(x+a)(x+b)$

33. $(x+a+b+c)(x+a-b-c)=(x-a-b+c)(x-a+b-c)$

34. $ax(x+a)+bx(x+b)=(a+b)(x+a)(x+b)$

35. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$

98. 次ニ二三ノ一次方程式應用問題ヲ解クベシ

例 (1)　或ル仕事ヲ甲ハ十八時間,乙ハ二十四時間,丙ハ三十六時間働キテ仕上ゲ得ルトイフ,甲乙丙ガ共同シテ働クトキハ此仕事ヲ幾時間ニ仕上ゲ得ルカ

所要ノ時間數ヲxトス,今1ヲ以テ此仕事ノ全躰ヲ表ハストキハ甲ハ一時間ニ$\frac{1}{18}$ダケノ仕事ヲ成スガ故ニx時間ニハ$\frac{x}{18}$ダケノ仕事ヲ成ス,同樣ニ乙ハx時間ニハ$\frac{x}{24}$,丙ハ$\frac{x}{36}$ダケノ仕事ヲ成シ此合計ハ仕事全躰即1ニ等シ,

故ニ
$$\frac{x}{18}+\frac{x}{24}+\frac{x}{36}=1$$

之ヲ解キテ$x=8$ヲ得,八時間ヲ以テ答トス

例 (2) 或ル人金壹千圓ノ中若干圓ヲ年四分殘額ヲ年五分ニ貸シテ一ケ年ノ利息合計金四拾四圓ヲ受取レリトイフ,年利四分ニ貸シタル金高幾何ナルカ

年利四分ニテ貸シタル金高ヲx圓トスレバ年利五分ニテ貸シタル金高ハ$(1000-x)$圓ナリ而シテ前者ヨリ生ズル一ケ年ノ利息ハ$\frac{4x}{100}$圓,後者ヨリ生ズル一ケ年ノ利息ハ$\frac{5(1000-x)}{100}$圓ナリ,故ニ
$$44=\frac{4x}{100}+\frac{5(1000-x)}{100}$$

之ヲ解キテ$x=600$ヲ得即年利四分ニテ貸シタル金高ハ金六百圓ナリ

例 (3) 時計ノ短針ハVIノトコロ長針ハXIIノトコロ

ニアリ,此時ヨリ幾何時ノ後短針長針ガ重ナリ合フカ

一時間ヲ單位トシテ所要ノ時間ヲ表ハス數ヲ x トスレバ,長針ハ一時間ニ 60 分畫回ハルガ故ニ x 時間ニハ $60x$ 分畫回ハリ,短針ハ一時間ニ 5 分畫回ハルガ故ニ x 時間ニハ $5x$ 分畫回ハル,偖テ兩針ガ重ナリ合フトイフヿハ兩針ガ XII ノトコロヨリ同數ノ分畫ダケ隔タリ居ルトイフヿナリ又短針ハ始メニ長針ヨリハ 30 分畫進ミ居リシガ故ニ次ノ方程式ヲ得

$$60x=30+5x$$

乃 $x=\frac{6}{11}$ ヲ得,仍テ $\frac{6}{11}$ 時間即 $32\frac{8}{11}$ 分時間ヲ以テ答トス

注意 應用問題ヲ解クニ通例ハ所要ノ數ヲ x トスルモノナレド或ル時ハ他ノ數ヲ x トシテ方程式ヲ作リ之ヲ解キテ x ノ値ヲ索メ而シテ後此値ヲ用ヰテ所要ノ數ヲ算出スル方ガ簡便ナルヿアリ,例ヘバ次ノ問題集ノ第 7 ニ於テハ家出セシ時ニ荷ヒシ梨子ノ個數ヲ x トシ,x ノ値ヲ索メテ後賣リタル梨子ノ總數ヲ索ムル方ガ簡便ナルガ如シ

注意 方程式ヲ作ルニ際シ,問題中ニ直接ニ明言サレアル事實ヲ唯其儘式ニ直ス時ノ外ハ濫リニ題意ニヨリトイフ辭ヲ用ヰルベカラズ,必ズヤ方程式ノ因ツテ出ヅルトコロヲ叮嚀ニ説明スベシ

第八問題集

1. 相連續セル四ツノ數ノ和ハ 34 ナリトイフ,此四ツノ數ノ中ノ最小ナルモノ如何
2. 相連續セル三個ノ偶數ノ和ハ 1122 ナリトイフ,其中ノ眞中ノ數如何
3. 相連續セル三個ノ奇數ノ和ハ 27 ナリトイフ,此三個ノ奇數如何
4. 三里十三町ヲ 11 : 19 ナル比ニ分テ
5. 三個ノ有効數字ヨリ成ル三桁ノ數アリ,十位ノ數字ハ百位ノ數字ヨリハ 2 ダケ小ニ,一位ノ數字ハ十位ノ數字ヨリハ 8 ダケ大ナリトイフ,又數字ノ順ヲ逆ニシテ得タル數ハ元ノ數ノ三倍ヨリハ 44 ダケ小ナリトイフ,元ノ數如何
6. 兎ノ百飛ニ當ル距離ヲ隔テタル兎ヲ追フ犬アリ,兎ガ六飛スル間ニ犬ハ五飛スル代リニ兎ガ九飛デ行ク距離ヲ犬ハ七飛デ行クトイフ,犬ガ兎ニ追着クマデニ兎ハ幾飛スルカ
7. 梨子ヲ賣リ歩ク人アリ,或ル日ノ朝若干ノ梨子ヲ荷フテ家ヲ出デ或ル所ニテ其半分ヨリハ一ツダケ少ナク賣リ,次ノ所ニテ殘リノ半分ヨリハ一ツダケ少ナ

ク賣リ,其又次ノ所ニテ此時ノ殘リノ半分ヨリハ一ッダケ少ナク賣リテ歸宅セシニ此時尙ホ二十四個殘リ居レリトイフ,彼ガ賣リタル梨子ノ總數如何

8. 乙ガ四時間デ仕上ゲル仕事ヲ甲ハ十二時間デ仕上ゲルトイフ,甲ガ此仕事ニ取リ掛リタル後中途ニテ乙ガ甲ニ代リテ之ヲ仕上ゲタリ而シテ甲ガ取リ掛リタル時ヨリ乙ガ仕上ゲタルマデノ時間ハ六時間ナリシトイフ,甲ハ幾時間仕事ニ從事セシカ

9. 金六百參拾五圓ガ年四分ノ單利ニテ七ケ年間ニ生ム利息ト同額ノ利息ヲ年五分ノ單利ニテ四ケ年間ニ生ム元金幾何

10. 年四分ノ單利ニテ五年間ニ元利合計ガ六百圓ニナル元金高ヲ問フ

11. 時間ヲ問ハレタル人答ヘテ曰ク長針短針ガXトXIトノ間ニ於テ丁度重ナリ合ヒ居ルト,何時ナルカ

12. 80ヲ四ッノ部分ニ分チ,第一ノ部分ニ3ヲ加ヘタル和ト,第二ノ部分ヨリ3ヲ引キタル差ト,第三ノ部分ニ3ヲ掛ケタル積ト,第四ノ部分ヲ3デ割リタル商トガ總テ相等シクナル樣ニセヨ

13. 二ッノ數ノ差ハ4ニシテ其平方ノ差ハ112ナリトイフ,二ッノ數如何

14. 一隊ノ兵士ヲ方形ニ各行各列同人數宛整列セシムルトキハ三十一人餘リ各行各列ニ一人宛增スニハ二十四人不足ストイフ,此一隊ノ人數如何

15. 二個ノ水道管ヨリ流出スル水ヲ以テ滿タスヿヲ得ル水槽アリ,一方ノ管ノミニテハ六時間ニ,他ノ管ノミニテハ八時間ニ之ヲ滿タスヿヲ得,又一旦水ヲ以テ滿タシタル後水道管ヲ閉ヂ底ノ栓ヲ拔クトキハ水ハ十二時間ニ流出シ盡クルトイフ,水ナキ槽ノ栓ヲ拔キタル儘兩水道管ヨリ同時ニ水ヲ送ルトキハ水槽ハ幾時間ノ後丁度水ヲ以テ滿タサルルカ

16. 五時間七里ノ割ニ行ク甲ガ出立シタルヨリ八時間ノ後三時間五里ノ割ニ行ク乙ガ同出發點ヨリ同方向ニ出立セリトイフ,乙ニ追及サルルマデニ甲ハ幾里ヲ行クカ

17. 酒一石二斗ト水一石八斗トヲ混合シタルモノヲ甲液,酒九斗水三斗トヲ混合シタルモノヲ乙液ト名ヅク,今酒七斗水七斗ヨリナル混合液ヲ造ルニハ甲液乙液各幾何ヲ要スルカ

18. 一升四拾五錢ノ酒一石五斗ト一升參拾錢ノ酒若干トヲ購買シ之ヲ混合シテ一升四拾錢ニ賣リテ購買費ノ三割ヲ利スルニハ一升參拾錢ノ酒幾何ヲ購

買セザルベカラザルカ

19. 金若干圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ配分セシニ,甲ノ取リ前ハ全額ノ三分ノ一ヨリハ拾圓ダケ多ク,乙ノ取リ前ハ甲ノ取リ前ヲ引キタル殘額ノ半分ヨリハ拾五圓ダケ多ク,而シテ丙ノ取リ前ハ七拾圓ナリシトイフ,元ノ金高幾何ナルカ

20. 乙ガ三十日間ニ仕上ゲ得ル或ル仕事ヲ甲ハ二十日間ニ仕上ゲ得ルトイフ,甲ガ此仕事ニ取リ掛リタル後中途ニテ乙ガ甲ニ代リテ之ヲ仕上ゲタリ而シテ乙ハ甲ヨリハ十日ダケ多ク働キシトイフ,甲ガ働キシ日數如何

21. 年利若干ノ單利ニテ金ヲ貸シタルニ三ケ年ノ後ニハ元利合計參百四拾五圓トナリ,又最初ヨリ七ケ年ノ後ニハ元利合計四百五圓トナレリトイフ,元金高幾何ナリヤ

22. 時計ノ短針長針ハ三時ニ互ニ直角ヲナス,兩針ガ次ニ直角ヲナス時ノ時刻ヲ索ム

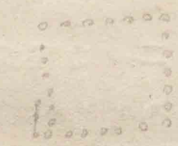
23. 甲乙兩人ニテ金五百圓出金シテ或ル事業ヲ營ミ百六拾圓ノ利益ヲ得タリ,今此利益ヲ各ノ出資高ニ比例スル樣ニ兩人ノ間ニ配分セシニ甲ノ取リ前ハ乙ノ取リ前ヨリハ參拾貳圓ダケ多カリシトイフ,兩

人ノ出資高各幾何ナルカ

24. 十一時後十二時前ニ於テ時計ノ短針ト長針トノ間ノ分畫ノ數ガ今ヨリ十分前ノ兩針間ノ分畫ノ數ノ三分ノ二ナリトイフ,何時ナルカ

25. 若干ノ碁石アリ,之ヲ碁石二ツ宛ノ厚サノ桝形(正方形ノ中ノ空キタル形)ニ並ベルコトモ出來レバ又碁石四ツ宛ノ厚サノ桝形ニモ並ベルコトヲ得ルトイフ,而シテ外側ノ列ニアル碁石ノ數ハ二ツ宛ノ厚サニ並ベタルトキハ四ツ宛ニ並ベタルトキヨリハ八ツダケ多シトイフ,碁石ノ數幾何

$(x+x-2+x-4+x-6)4=(x+8+x+6)4$



第七編 聯立一次方程式

99. 二ツノ未知數xトyトヲ含ム方程式例ヘバ

$$3x-7y=8\text{..........................}(1)$$

ヲ考フルニ,一方ノ未知數ニ任意ノ値ヲ與ヘ,斯クシテ得タル方程式ヲ解キテ他ノ未知數ノ値ヲ索ムルヿヲ得ベキガ故ニ此方程式ヲ滿足スルxトyトノ値ハ幾通リモアリ,例ヘバ$y=1$トスレバ$3x=15$故ニ$x=5$,又$y=2$トスレバ$3x=22$故ニ$x=7\frac{1}{3}$,$y=-1$トスレバ$3x=1$故ニ$x=\frac{1}{3}$

別ニ
$$2x+5y=44\text{..........................}(2)$$

ナル方程式アリトセンニ,此方程式ヲ滿足スルxトyトノ値モ又幾通リモアリ

然ルニ今若シ上ノ二ツノ方程式ヲ同時ニ滿足スルxトyトノ値ヲ索メントスルトキハ,次ニ示スガ如ク,xノ唯一ツノ値トyノ唯一ツノ値トヲ得ベシ

(1)ニ5ヲ掛ケテ　$15x-35y=40$

(2)ニ7ヲ掛ケテ　$14x+35y=308$

加ヘテ　$15x-35y+14x+35y=40+308$

即　$29x=348,\ x=12$

故ニ二ツノ方程式ノ雙方ヲ滿足スルxノ値ハ12ナラザ

ルベカラズ,次ニxノ此値ヲ與ヘラレタル方程式ノ何レカ一方ニ,例ヘバ(2)ニ入レテ　$24+5y=44,\ 5y=20,\ y=4$ヲ得,乃$x=12,\ y=4$ヲ以テ答トス

一ツヨリ多クノ未知數ヲ含ム二ツ或ハ二ツヨリ多クノ方程式ガ未知數ノ同ジ値ニヨッテ滿足サルベキモノナルトキハ此レ等ノ方程式ヲ**聯立方程式**ト名ヅク

本編ニ於テハ最初ニ二ツノ未知數ヲ含ム一次ノ聯立方程式ヲ論ジ後ニ三ツノ未知數ヲ含ム一次ノ聯立方程式ヲ論ズベシ

爰ニ一次トアルハ總テノ未知數ニ就テ一次ナリトイフヿナリ,元來總テノ文字ニ就テ一次ナリトイフヿト各文字ニ就テ一次ナリトイフヿトハ異ナレリ,例ヘバ$3xy+2x+5y+7$ハxニ就テハ一次yニ就テモ一次ナリ然レ𪜈xトyトニ就テハ二次ナリ

100. 聯立一次方程式ヲ解ク普通ノ方法ニ三通リアリ

第一ノ方法(加減法)　方程式ニ各適當ナル數ヲ掛ケ,斯クシテ得タル方程式ニ於ケル未知數ノ孰レカ一ツノ係數ガ相等シクナル樣ニシ而シテ後加ヘ或ハ引キテ此未知數ヲ逐出シ此未知數ヲ含マザル方程式ヲ作ルベシ

此方法ハ既ニ前節ニ於テ用ヰタルモノナリ

例ヘバ
$$8x+7y=37$$
$$2x+3y=13$$

yヲ逐出サントスルモxヲ逐去ラントスルモ隨意ナリ,今若シyヲ去ラント欲セバ第一ノ方程式ニ3(第二ノ方程式ニ於ケルyノ係數)ヲ掛ケ第二ノ方程式ニ7(第一ノ方程式ニ於ケルyノ係數)ヲ掛ケ
$$24x+21y=111$$
$$14x+21y=91$$
ヲ得,引キテ
$$10x=20,\quad x=2$$
ヲ得,xノ此値ヲ與ヘラレタル方程式ノ何レカ一方例ヘバ第二ノ方程式ニ入レテ $4+3y=13,\quad 3y=9,\quad y=3$ ヲ得

或ハxヲ逐出サンガ爲メニ第二ノ方程式ニ4ヲ掛ケテ
$$8x+12y=52$$
ヲ得,第一ノ方程式 $8x+7y=37$ ヲ引キテ
$$5y=15,\quad y=3$$
ヲ得而シテ後xノ値ヲ索ムルモ可ナリ

第二ノ方法(置換法) 一方ノ方程式ヨリシテ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ニテ表ハシ此値ヲ以テ他ノ方程式ニ於ケル此未知數ニ代フベシ

此方法ニヨリテ前ノ聯立方程式ヲ解カンニ,第二ノ方

程式ヨリシテ $x=\frac{13-3y}{2}$ ヲ得,之ヲ第一ノ方程式ニ入レテ
$$8\frac{(13-3y)}{2}+7y=37$$
即
$$4(13-3y)+7y=37$$
$$52-12y+7y=37,\quad 15=5y,\quad y=3$$
此yノ値ヲ與ヘラレタル方程式ノ何レカ一方ニ入レテ $x=2$ ヲ得

或ハ與ヘラレタル方程式ノ孰レカ一方例ヘバ第二ノ方程式ヨリシテ $y=\frac{13-2x}{3}$ ヲ得,之ヲ第一ノ方程式ニ入レテxノミヲ含ム方程式ヲ作リ以下前ト同樣ニシテ最初ニx次ニyノ値ヲ索ムルモ可ナリ

第三ノ方法(等置法) 各ノ方程式ヨリシテ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ニテ表ハシ,斯クシテ得タル二ツノ式ヲ相等シト置クベシ

此方法ニヨリテ上ノ聯立一次方程式ヲ解カンニ,第一ノ方程式ヨリシテ $x=\frac{37-7y}{8}$,第二ノ方程式ヨリシテ $x=\frac{13-3y}{2}$ ヲ得,之ヲ相等シト置キテ
$$\frac{37-7y}{8}=\frac{13-3y}{2}$$
分母ヲ拂フ爲メニ8ヲ掛クレバ
$$37-7y=4(13-3y)$$
$$37-7y=52-12y,\quad y-7y=52-37,\quad 5y=15,\quad y=3$$

一旦 $y=3$ ヲ索メタル後ハ前ノ方法ニ於ケルト全ク同シ樣ニシテ $x=2$ ヲ得ベシ

或ハ第一ノ方程式ヨリシテ $y=\frac{37-8x}{7}$, 第二ノ方程式ヨリシテ $y=\frac{13-2x}{3}$ ヲ得,之ヲ相等シト置キテ

$$\frac{37-8x}{7}=\frac{13-2x}{3}$$

之ヲ解キテ $x=2$ ヲ得而シテ後 $y=3$ ヲ得ベシ

101. 例 (1) $2x-3y+14=0$, $5y-4x=26$ ヲ解ケ

與ヘラレタル方程式ヲ少シク書キ直シテ

$$2x-3y=-14$$
$$-4x+5y=26$$

第一ノ方程式ニ 2 ヲ掛クレバ

$$4x-6y=-28$$

之ヲ直グ前ノ方程式ト加ヘ合ハセテ

$$-y=-2,\quad y=2$$

此 y ノ値ヲ第一ノ方程式ニ當テ嵌メテ

$$2x-6=-14$$

之ヲ解キテ $x=-4$ ヲ得ベシ,乃所要ノ x ト y トノ値ハ

$$x=-4,\quad y=2$$

ナリ

例 (2) $19x-21y=100$, $21x-19y=140$ ヲ解ケ

此例ニ於テハ次ノ如クニシテ幾分カ手數ヲ省クヿヲ得ベシ

$$\begin{array}{lll}
 & 19x-21y=100 & \\
 & 21x-19y=140 & \\
\text{相加ヘ} & 40x-40y=240 & \\
\text{故ニ} & x-y=6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & 19x-21y=100 \\
 & 21x-19y=140 \\
\text{引キテ} & -2x-2y=-40 \\
 & x+y=20
\end{array}$$

更ニ $x-y=6$, $x+y=20$ ヲ加ヘテ $2x=26$, 引キテ $2y=14$ ヲ得,故ニ $x=13$, $y=7$ ヲ答トス

注意 上ノ例ノ示スガ如ク格段ナル例ニ就キテハ或ル工夫ヲ施コシテ,一般ノ方法ヲ適用スルニ比ベテ幾分カ手數ヲ省クヿヲ得ベシ然レ圧工夫ヲ思ヒ付クトイフヿハ經驗ト習熟トノ結果ナルガ故ニ之ヲ初學者ニ要ムルハ無理ナリ,初學者ハ幸ニシテ工夫ヲ思ヒ付キタル圧ハ勿論之ヲ施コシテ差支ナケレド强ヒテ工夫ヲ索メ徒ラニ時間ヲ浪費スベカラズ矢張リ一般ノ方法ヲ適用スベシ

例 (3) 次ノ方程式ヲ解ケ

$$(x-1)(y-2)-(x-2)(y-1)=-2,\quad (x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)=32$$

此レ等ノ方程式ハ見懸ケ上一次方程式ナラズ,然レ圧次ニ示スガ如ク其實ハ一次方程式ナリ

$$xy-y-2x+2-xy+2y+x-2=-2,\ \text{即}\ -x+y=-2 \ldots\ldots(1)$$
$$xy+2x+2y+4-xy+2x+2y-4=32,\ \text{即}\ 4x+4y=32 \ldots\ldots(2)$$

乃與ヘラレタル方程式ハ(1)ト(2)トニ同ジ,此(2)ナル方程式ヲ4デ割リテ $x+y=8$ ヲ得,仍テ聯立一次方程式

$$-x+y=-2,\quad x+y=8$$

ヲ解キテ $x=5,\ y=3$ ヲ得

驗 $(5-1)(3-2)-(5-2)(3-1)=-2 \qquad 4\times1-3\times2=-2$

$(5+2)(3+2)-(5-2)(3-2)=32 \qquad 7\times5-3\times1=32$

例(4) $\dfrac{12}{x}+\dfrac{8}{y}=8,\quad \dfrac{27}{x}-\dfrac{12}{y}=3$ ヲ解ケ

與ヘラレタル方程式ノ左邊ハ何レモ x ト y トニ就テ整式ニアラズ,然レドモ今設シ $\dfrac{1}{x}$ ト $\dfrac{1}{y}$ トヲ未知數ト看做ストキハ,一次方程式ト全ク同ジ樣ニシテ之ヲ解クヿヲ得ベシ,乃第一ノ方程式ニ3ヲ掛ケ第二ノ方程式ニ2ヲ掛ケテ後加フレバ

$$\frac{36}{x}+\frac{24}{y}+\frac{54}{x}-\frac{24}{y}=24+6 \quad 即 \quad \frac{36}{x}+\frac{54}{x}=30$$

$$\frac{90}{x}=30,\quad \frac{1}{x}=\frac{30}{90},\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{3}$$

故ニ $x=3$, 此 x ノ値ヲ第一ノ方程式ニ入ルレバ

$$\frac{12}{3}+\frac{8}{y}=8,\quad \frac{8}{y}=8-4=4,\quad \frac{1}{y}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

故ニ $y=2$, 即 $x=3,\ y=2$ ヲ以テ答トス

例(5) $ax+by=2ab,\ bx-ay=b^2-a^2$ ヲ解ケ

第一ノ方程式ニ a ヲ掛ケ第二ノ方程式ニ b ヲ掛ケ

$$a^2x+aby=2a^2b$$

$$b^2x-aby=b^3-a^2b$$

而シテ後加フレバ

$$a^2x+b^2x=a^2b+b^3,\quad (a^2+b^2)x=b(a^2+b^2),\quad x=b$$

此 x ノ値ヲ第一ノ方程式ニ入ルレバ

$$ab+by=2ab,\quad 故ニ,\ by=ab,\ y=a$$

乃 $x=b,\ y=a$ ヲ以テ答トス

注意 一般ニ二ツノ未知數ヲ含ム二ツノ聯立方程式ヨリシテ未知數ノ値ヲ索ムルヿヲ得ベシ,然レドモコレニハ除外例アリ,例ヘバ

$$4x+6y=12,\quad 2x+3y=6$$

ナル二ツノ方程式ヲ考フルニ,x ヲ逐出サンガ爲メニ第二ノ方程式ニ2ヲ掛クルトキハ $4x+6y=12$ 即第一ノ方程式ト同ジ方程式ヲ得ベシ故ニ x ヲ逐出スト同時ニ y モ逐出サレ跡ニハ $0=0$ ナル恒等式ガ殘ルベシ,結局リ此二ツノ方程式ハ見懸ケ上二ツアルニ過ギズシテ其實ハ一ツノ方程式ナルガ故ニコレヨリシテ x ト y トノ値ヲ定ムルヿ能ハザルヤ明カナリ,又

$$4x+6y=12,\quad 2x+3y=7$$

ヲ考フルニ,第二ノ方程式ニ2ヲ掛クルトキハ $4x+6y=14$ ヲ得ベク從テ $12=14$ ヲ得ベシ而シテコレハ眞ナラザルガ故ニ此ノ二ツノ方程式ハ相矛盾スルモノナリ

一般ニ二ツノ未知數ヲ含ム二ツノ聯立一次方程式ヲ解カ

ソガ爲メニ一方ノ未知數ヲ逐出スト同時ニ他ノ未知數モ逐去ラルルトキハ此二ツノ方程式ハ其實一ツノ方程式ナルカ,サナクバ相矛楯スル即聯立スルヿ能ハザルモノナリ

例　題

次ノ方程式ヲ解ケ

1. $5x+7y=31,\quad 2x+3y=13$
2. $15x+21y=93,\quad 14x+21y=91$
3. $x+y=a,\quad x-y=b$
4. $3x+5y=22,\quad 7x-4y=20$
5. $3x+2y=13,\quad 7x+3y=27$
6. $\frac{5x}{3}-\frac{y}{4}=9,\quad 6x-\frac{7y}{4}=29$
7. $3x-5y=2,\quad 5x-2y=16$
8. $57x+25y=3772,\quad 25x+57y=1148$
9. $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8,\quad \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13$
10. $8x+7y=100,\quad 12x-5y=88$
11. $\frac{2x+3y}{5}+\frac{y+6}{7}=2,\quad \frac{2x-5y}{3}+\frac{x+7}{4}=1$
12. $4x-\frac{1}{3}(y-3)=5x-3,\quad 2y+\frac{1}{3}(2x-5)=\frac{1}{6}(21y+37)$
13. $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y-2)-\frac{1}{4}(x-3)=0,\quad x-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{3}(x-2)=0$
14. $\frac{x-2}{3}-\frac{y+2}{4}=0,\quad \frac{2x-5}{5}-\frac{11-2y}{7}=0$
15. $\frac{x-2}{3}-\frac{y+5}{2}=0,\quad \frac{2x-7}{3}-\frac{13-y}{16}=0$

102. 代數學ニ於テハ普通ノ文字ノ外ニ文字ノ右肩ニ(′)ヲ打チタルモノ例ヘバ a', b' ノ如キモノ,又文字ノ右脇ニ數字ヲ添ヘタルモノ例ヘバ a_1, c_2 ノ如キモノヲ用ヰルヿアリ

x ト y トヲ含ム二ツノ聯立一次方程式ノ一般ナルモノハ次ノ如クニ書キ下ダスヿヲ得ベシ

$$a_1x+b_1y=c_1,\quad a_2x+b_2y=c_2$$

上ノ書キ方ハ此二ツノ方程式ヲ記臆スルニ便利ナルヿ多言ヲ俟タザルベシ

第一ノ方程式ニ b_2 ヲ掛ケ第二ノ方程式ニ b_1 ヲ掛ケテ

$$a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1$$

$$a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2$$

引キテ　$(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

故ニ　$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$

此 x ノ値ヲ第一ノ方程式ニ入ルレバ

$$a_1\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}+b_1y=c_1$$

分母ヲ拂ヘバ　$a_1(b_2c_1-b_1c_2)+b_1(a_1b_2-a_2b_1)y=c_1(a_1b_2-a_2b_1)$

即　$a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+b_1(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1b_2c_1-a_2b_1c_1$

仍テ　$b_1(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_1b_2c_1+a_1b_1c_2=a_1b_1c_2-a_2b_1c_1$

故ニ　$y=\frac{a_1b_1c_2-a_2b_1c_1}{b_1(a_1b_2-a_2b_1)}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

仍テ $x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$, $y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ ヲ得テ答トス,是レ則二ツノ未知數ヲ含ム一般ナル聯立一次方程式ノ根ノ公式ナリ

例題

上ノ公式ヲ用ヰテ次ノ方程式ヲ解ケ

1. $3x-4y=2$, $7x-9y=7$
2. $7x+5y=60$, $13x-11y=10$
3. $3x-4y=18$, $3x+2y=0$
4. $\frac{x}{3}+3y=7$, $\frac{4x-2}{5}=3y-4$
5. 本節ノ一般ナル聯立一次方程式ヲ解クニ最初ニxノ値ヲ索メテ後此xノ値ヲ第一ノ方程式ニ入レテyノ値ヲ索ムル代リニ,則ニ第一ノ方程式ニa_2,第二ノ方程式ニa_1ヲ掛ケテ後引キテyノ値ヲ索メヨ
6. 第二ノ方法(置換法)ニヨリテ本節ノ方程式ヲ解ケ
7. 第三ノ方法(等置法)ニヨリテ本節ノ方程式ヲ解ケ

注意 次ノ第九問題集ノ方程式ヲ解クニハ本節ノ公式ヲ用ヰズシテ前節ノ諸例ニ傚フベシ,尤モ一旦前節ノ方法ニヨリテ答ヲ得タル後驗ニ本節ノ公式ヲ適用スルハ妨ナシ

第九問題集

次ノ方程式ヲ解ケ

1. $\frac{3x}{19}+5y=13$, $2x+\frac{4-7y}{2}=33$
2. $\frac{x+y}{3}+\frac{y-x}{2}=9$, $\frac{x}{2}+\frac{x+y}{9}=5$
3. $\frac{7x}{6}+\frac{5y}{3}=34$, $\frac{7x}{8}+\frac{3y}{4}=\frac{5y}{8}+12$
4. $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5$, $\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$
5. $\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}=16\frac{1}{6}$, $\frac{3x}{2}-\frac{2y}{3}=16\frac{1}{6}$
6. $\frac{x-1}{8}+\frac{y-2}{5}=2$, $2x+\frac{2y-5}{3}=21$
7. $\frac{2x+3y}{5}=10-\frac{y}{3}$, $\frac{4y-3x}{6}=\frac{3x}{4}+1$
8. $\frac{1-3x}{7}+\frac{3y-1}{5}=2$, $\frac{3x+y}{11}+y=9$
9. $2(2x+3y)=3(2x-3y)+10$, $4x-3y=4(6y-2x)+3$
10. $3x+9y=2.4$, $0.21x-0.06y=0.03$
11. $0.3x+0.125y=x-6$, $3x-0.5y=28-0.25y$
12. $0.08x-0.21y=0.33$, $0.12x+0.7y=3.54$
13. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=1$, $\frac{18}{x}+\frac{20}{y}=16$
14. $(x+1)(y+5)=(x+5)(y+1)$, $xy+x+y=(x+2)(y+2)$
15. $xy-(x-1)(y-1)=6(y-1)$, $x-y=1$
16. $\frac{3}{x}-3y=8$, $\frac{7}{x}+y=5$

17.　$2x-\frac{3}{y}=3,\qquad 8x+\frac{15}{y}+6=0$

18.　$x+y=a+b,\qquad bx+ay=2ab$

19.　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\qquad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$

20.　$(a+c)x-by=bc,\qquad x+y=a+b$

21.　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=c,\qquad \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$

22.　$x+y=c,\qquad ax-by=c(a-b)$

23.　$a(x+y)+b(x-y)=1,\qquad a(x-y)+b(x+y)=1$

24.　$\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}=0,\qquad \frac{x+y-b}{a}+\frac{x-y-a}{b}=0$

25.　$(a+b)x-(a-b)y=4ab,\qquad (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$

26.　$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a,\qquad \frac{x-y}{2ab}=\frac{x+y}{a^2+b^2}$

27.　$(a+h)x+(b-h)y=c,\qquad (b+k)x+(a-k)y=c$

103. 三ツノ未知數 x, y, z ヲ合ム三ツノ聯立一次方程式ヲ解クニハ第一及第二ノ方程式ニ適當ナル數ヲ掛ケ,斯クシテ得タル二ツノ方程式ニ於テ未知數ノ何レカ一ツ例ヘバ z ノ係數ガ相等シクナル樣ニナシ而シテ後或ハ加ヘ或ハ引キテ z ヲ逐出シ,更ニ第一及第三ノ方程式又ハ第二及第三ノ方程式ヲ採リ前ト同樣ニシテ z ヲ逐出シ,箇樣ニシテ二ツノ未知數 x, y ヲ合ム二ツノ聯立一次方程式ヲ得ベシ,之ヲ解キテ x ト y トノ値ヲ索メ,此 x ト y トノ値ヲ與ヘラレタル方程式ノ何レカ一ツニ入レテ z ノ値ヲ索ムベシ

例 (1) 次ノ方程式ヲ解ク

$$7x+3y-2z=16 \cdots\cdots (1)$$
$$2x+5y+3z=39 \cdots\cdots (2)$$
$$5x-y+5z=31 \cdots\cdots (3)$$

(1) ニ 3 ヲ掛ケ　$21x+9y-6z=48$

(2) ニ 2 ヲ掛ケ　$4x+10y+6z=78$

加ヘテ　$25x+19y=126 \cdots\cdots (4)$

(1) ニ 5 ヲ掛ケ　$35x+15y-10z=80$

(3) ニ 2 ヲ掛ケ　$10x-2y+10z=62$

加ヘテ　$45x+13y=142 \cdots\cdots (5)$

次ニ (4) ト (5) トヨリシテ x ト y トノ値ヲ索ムベシ

(4) ニ 9 ヲ掛ケ　　$225x+171y=1134$

(5) ニ 5 ヲ掛ケ　　$225x+65y=710$

引キテ　　$106y=424$

故ニ　$y=4$, 此 y ノ値ヲ (4) ニ入レテ $25x+76=126$ ヲ得,
之ヨリシテ $x=2$ ヲ得

次ニ (1) ニ於テ $x=2$, $y=4$ ト置キテ

$$14+12-2z=16$$

之ヨリシテ $z=5$ ヲ得, 仍テ次ノ答ヲ得

$$x=2,\quad y=4,\quad z=5$$

例 (2) 次ノ方程式ヲ解ケ

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1 \quad\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=24 \quad\cdots\cdots(2)$$
$$\frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=14 \quad\cdots\cdots(3)$$

此レ等ノ方程式ノ左邊ハ整式ニアラザルニ拘ハラズ, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ ヲ未知數ト看做スドキハ一次方程式ト全ク同様ニシテ之ヲ解クコヲ得ベシ

(1) ニ 2 ヲ掛ケテ後 (2) ヲ加ヘ　$\frac{7}{x}+\frac{8}{y}=26 \cdots\cdots(4)$

(1) ニ 3 ヲ掛ケテ後 (3) ヲ加ヘ　$\frac{10}{x}-\frac{2}{y}=17 \cdots\cdots(5)$

(4) ト (5) トヨリシテ $\frac{1}{x}=2$, $\frac{1}{y}=\frac{3}{2}$ ヲ得, 之ヲ (1) ニ入レテ $\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$ ヲ得, 故ニ答ハ $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{3}{4}$ ナリ

第十問題集

次ノ方程式ヲ解ケ

1. $x+y+z=14$, $2x+5y-4z=1$, $7x-2y+3z=25$
2. $x+3y-2z=11$, $2x+y+3z=14$, $3x+2y+z=11$
3. $5x-6y+4z=15$, $7x+4y-3z=19$, $2x+y+6z=46$
4. $7x-3y=30$, $9y-5z=34$, $x+y+z=33$
5. $x+y+z=5$, $3x-5y+7z=75$, $9x-11z+10=0$
6. $2x+4y+z=7$, $3x+2y+2z=8$, $5x-4y+4z=9$
7. $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=5$, $\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=1$
8. $y+z=2a$, $z+x=2b$, $x+y=2c$
9. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\frac{5}{6}$, $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4}{7}$
10. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3$, $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=5$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=4$
11. $y+z-x=a$, $z+x-y=b$, $x+y-z=c$
12. $cy+bz=bc$　$az+cx=ca$, $bx+ay=ab$

104. 聯立一次方程式應用問題

例　甲乙二數アリ,甲數ヨリ乙數ノ二倍ヲ引キタル差ハ5ニシテ,乙數ニ3ヲ加ヘタル和ノ三倍ハ甲數ヨリ5ヲ引キタル差ノ二倍ヨリハ2ダケ大ナリトイフ,甲乙二數如何

甲數ヲx,乙數ヲyトスレバ

$$x-2y=5,\quad 3(y+3)-2(x-5)=2$$

第二ノ方程式ノ括弧ヲ外ヅセバ

$$3y+9-2x+10=2,\quad 即\quad -2x+3y=-17$$

此方程式ト第一ノ方程式ニ2ヲ掛ケタルモノトヲ加ヘテ$-y=-7$即$y=7$ヲ得,此yノ値ヲ第一ノ方程式ニ入レテ$x=19$ヲ得ベシ,乃甲數19乙數7ヲ以テ答トス

注意　未知數二ツノ聯立一次方程式ニテ解クコトヲ得ル應用問題ハ又未知數一ツノ一次方程式ニテモ解クコトヲ得ベシ,例ヘバ上ノ問題ノ如キ甲數ヲxトスレバ甲數ヨリ乙數ノ二倍ヲ引キタル差ハ5ニシテ從テ甲數ヨリ5ヲ引キタルモノハ乙數ノ二倍ニ等シキガ故ニ乙數ハ$\frac{x-5}{2}$ニテ表ハサルベシ,仍テ

$$3\left(\frac{x-5}{2}+3\right)-2(x-5)=2$$

此未知數一ツノ一次方程式ヲ解キテ矢張リ前ト同ジ答甲數19乙數7ヲ得ベシ,爰ニ注意スベキハ上ノ方程式ハ前ノ解ニ於ケル第一ノ方程式ヨリシテyヲxニテ表ハシタルモノヲ第二ノ方程式ニ入レタルモノ(置換法)ナルコトナリ

次ニ掲グル第十一問題集ノ問題ノ多クハ未知數一ツノ一次方程式ニテモ之ヲ解クコトヲ得,又第二及第八問題集ノ問題中ニハ未知數二ツノ聯立一次方程式ニテ解クコトヲ得ルモノアリ,一般ニ論ズルトキハ未知數一ツニテモ又二ツニテモ解クコトヲ得ル問題ヲ未知數二ツニテ解クトキハ演算ハ稍長クナル代リニ演算ノ筋道ヲ明カニスルニ便利ナリ

105. 例(1)　或ル金高ヲ若干人ニ等分セリ,設シ六人ダケ多カランニハ各貳圓宛少ナク,三人ダケ少ナカランニハ各貳圓宛多ク受取リタラントイフ.人數如何又各ノ受領セシ金高幾何ナルカ

人數ヲxトシ此x人ガ各y圓ヲ受取リタリトスレバ總金高ハxy圓ナリ,仍テ次ノ方程式ヲ得

$$(x+6)(y-2)=xy$$

$$(x-3)(y+2)=xy$$

括弧ヲ去ルトキハxyナル項ハ消ヘ失セテ

$$6y-2x=12,\quad 2x-3y=6$$

ナル二ツノ方程式ガ出デ來ルベシ,之ヲ解キテ$x=12$, $y=6$ヲ得,故ニ十二人ノ人ガ各六圓宛ノ配分ヲ受ケタリ

例(2) 二ツノ有効數字ヨリ成ル二桁ノ數ハ數字ノ和ノ五倍ニ等シク,又此數ニ9ヲ加フルトキハ數字ガ入代ルトイフ,如何ナル數ナリヤ

十位ノ數字ヲx一位ノ數字ヲyトスレバ此數ハ$10x+y$ニシテ,數字ノ和$x+y$ノ五倍即$5(x+y)$ニ等シ,故ニ

$$10x+y=5(x+y)$$

此數ニ9ヲ加フルトキハ數字ガ入代ル卽$10y+x$トナル,故ニ

$$10x+y+9=10y+x$$

此二ツノ方程式ヲ解キテ$x=4$, $y=5$ヲ得卽答ハ45ナリ

例(3) 甲乙丙三人ニテハ30日間ニ,甲乙兩人ニテハ32日間ニ,乙丙兩人ニテハ120日間ニ仕上グルコトノ出來ル仕事ヲ甲,乙,丙ハ單獨ニ各幾日間ニ仕上ゲ得ルカ

x, y, zヲ以テソレゾレニ甲,乙,丙ガ各單獨ニ此仕事ヲ仕上グル日數ヲ表ハシ又1ヲ以テ此仕事ノ全躰ヲ表ハセバ$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ハ甲,乙,丙各ガナス一日分ノ仕事ヲ表ハスベシ故ニ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{32}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120}$$

此三ツノ方程式ヲ解キテ$x=40$, $y=160$, $z=480$ヲ得,乃單獨ニテハ甲ハ40日,乙ハ160日,丙ハ480日ヲ要ス

第十一問題集

1. 乙ガ甲ニ拾五圓ヲ與フレバ兩人ノ所持金高ハ相等シクナルベク又甲ガ乙ニ五拾八圓ヲ與フレバ乙ノ所持金ハ甲ノ所持金ノ三倍トナルベシトイフ,甲乙兩人ノ所持金高如何

2. 甲乙二數アリ,甲數ノ半分ト乙數ノ三分ノ一トノ和ハ32,又甲數ノ四分ノ一ト乙數ノ五分ノ一トノ和ハ18ナリトイフ,二數各如何

3. 或ル人牛八頭馬三十頭ヲ貳千四百六拾圓ニ買ヒ,牛ヲ賣リテ二割ノ利益,馬ヲ賣リテ一割ノ利益ヲ得テ都合貳千八百零貳圓ヲ受取レリトイフ,牛一頭馬一頭ノ買價各幾何ナルカ

4. 參百八拾五貫目ノ荷物ヲ馬五頭人足十四人ニテモ又ハ馬八頭人足七人ニテモ運搬スルコトヲ得ルトイフ,馬一頭人足一人ノ運搬スル重量各如何

5. 七年前ニハ甲ノ年齡ハ乙ノ年齡ノ三倍ナリシ,七年後ニハ甲ノ年齡ハ乙ノ年齡ノ二倍トナルベシトイフ,兩人現今ノ年齡各如何

6. 上下二卷ヨリ成ル或ル書物初版ノ頁數六百ナリシガ第二版ニ於テハ下卷ノ四分ノ一ヲ減ジ,上卷ニ

三十頁ヲ增シタルガ爲メニ上下二卷ノ頁數相同ジクナレリトイフ,初版上下二卷ノ頁數各如何

7. 上下二種ノ酒アリ,上酒2下酒3ノ割合ニ混合スルトキハ平均一升參拾參錢ノ酒ヲ得,上酒3下酒7ノ割合ニ混合スルトキハ平均一升參拾壹錢ノ酒ヲ得ベシトイフ,上酒下酒一升ノ價各幾何ナルカ

8. 一ケ年ニ貳百零七圓ノ收入アル軍事公債證書(五分利)ト東京市公債(六分利)トヲ額面百圓ニ付軍事ハ九拾壹圓參拾錢ニ,市公債ハ九拾參圓八拾錢ニ賣リテ參千四百參拾參圓拾錢ヲ得タリトスルトキハ兩種ノ公債證書額面高各如何

9. 或ル人金若干圓ヲ若干人ノ貧民ニ配分セントシ,各ニ五圓宛與フルニハ拾圓不足ナルヿヲ發見シタルガ爲メニ各ニ四圓宛與ヘテ五圓餘マセリトイフ,總金高及貧民ノ人數如何

10. 矩形ノ地面アリ,間口ヲ二間奧行ヲ三間ダケ廣ゲルトキハ坪數ハ六拾四坪增シ,間口ヲ三間奧行ヲ二間ダケ廣ゲルトキハ坪數ハ六拾八坪增ストイフ,此地面ノ間口及奧行如何

11. 二ツノ有効數字ヨリ成ル或ル數ハ數字ノ和ノ四倍ニ等シク,之ニ18ヲ加フルトキハ數字ガ入代ルトイフ,

或ル數トハ如何ナル數ナルカ

12. 二ツノ有効數字ヨリ成ル或ル數ハ數字ノ和ノ四倍ト3トノ和ニ等シ,又此數ノ二倍ニ36ヲ加ヘタルモノハ數字ヲ入代ヘテ得ル數ノ二倍ヨリ36ヲ引キタルモノニ等シトイフ,或ル數トハ如何

13. 或ル鐵道線ニ於テ手荷物若干英斤マデハ無賃ナリ,旅客二人ニテ五百六十英斤ノ手荷物ヲ預ケ一人ハ參圓拾錢他ノ一人ハ五圓九拾錢ヲ拂ヘリ,設シ此レダケノ荷物ガ一人ノ手荷物ナランニハ此人ハ拾壹圓五拾錢ヲ拂ハザルベカラザリシナラントイフ,手荷物幾斤マデハ無賃ナルカ

人賃ノ如何ハ題中ニ表ハレズ

14. 甲乙各若干ノ碁子ヲ所持セリ,甲ハ乙ニ乙ガ所持セルダケヲ與ヘ,乙ハ甲ニ甲ガ尙ホ餘マセルダケヲ返戾セリ,次ニ甲ハ乙ニ此時乙ガ所持セルダケヲ與ヘ,乙ハ甲ニ甲ガ此時尙ホ餘マセルダケヲ返戾セリ,而シテ最後ニ甲乙ハ各十六個ヲ所持シ居レリトイフ,甲乙ガ最初ニ所持セシ碁子ノ數各如何

15. 甲乙兩人ニテ或ル仕事ヲ三十日間ニ仕上ゲ得ルトイフ,兩人ニテ此仕事ニ取掛リタルヨリ十八日ノ後乙去リ甲ハ一人ニテ殘餘ノ仕事ヲ二十日間ニ仕上ゲタリトイフ,甲乙各ハ單獨ニテ此仕事ヲ幾日間

ニ仕上ゲ得ルカ

16. 甲乙丙ナル三個ノ管ノ水ヲ以テ滿タスヿヲ得ル水槽アリ,甲ト乙トニテハ十二分時間ニ,乙ト丙トニテハ二十分時間ニ,丙ト甲トニテハ十五分時間ニ之ヲ滿タストイフ,同時ニ三個ノ管ノ水ヲ送ル𪜈ハ幾分時間ニ之ヲ滿タスカ

17. 甲乙兩人ニテ二回八百八十碼ノ競爭ヲ爲セリ,第一回ニ於テハ甲ハ乙ニ十碼ノ「ハンヂカップ」ヲ與ヘテ(競走ヲ始ムル前ニ豫ツメ乙ヲシテ十碼進マシメ置クヿ)十五秒ノ勝ヲ制セリ,第二回目ニ於テハ甲ハ乙ニ十六秒ノ「ハンヂカップ」ヲ與ヘテ(乙ガ走リ出シテヨリ十六秒ヲ經テ甲ガ走リ出スヿ)四ト十一分ノ八碼ノ勝ヲ制セリトイフ,甲ガ一分時間ニ走ル距離如何

18. 金壹千圓ヲ甲乙丙丁ノ四人ノ間ニ分テリ,甲ノ取リ前ハ乙ノ取リ前ノ二倍,丙ノ取リ前ノ丁ノ取リ前ヲ超過スル高ハ甲ノ取リ前ノ三分ノ一,乙ノ取リ前ニ百圓ヲ加フル𪜈ハ丁度丙丁兩人ノ取リ前ニ等シクナルトイフ,甲乙丙丁ノ取リ前各幾何ゾ

19. 五拾錢銀貨貳拾錢銀貨拾錢銀貨取リ交セテ三十一個ノ銀貨アリ,此金高合計七圓五拾錢ナリ,今五拾錢銀貨ヲ貳拾錢銀貨ニ,貳拾錢銀貨ヲ拾錢銀貨ニ交換スル𪜈ハ銀貨ノ個數五十五トナルベシトイフ,各種ノ銀貨幾個アルカ

20. 或ル金高ヲ甲乙丙ノ間ニ分テリ,甲ノ取リ前ヨリ參拾圓ヲ引ク𪜈ハ乙丙兩人ノ取リ前ノ七分ノ四トナリ,乙ノ取リ前ヨリ參拾圓ヲ引ク𪜈ハ丙甲兩人ノ取リ前ノ八分ノ三トナリ,丙ノ取リ前ヨリ參拾圓ヲ引ク𪜈ハ甲乙兩人ノ取リ前ノ九分ノ二トナルトイフ,甲乙丙各ノ取リ前如何

21. 甲乙兩人ハ六日間ニ六圓,乙丙兩人ハ九日間ニ七圓貳拾錢,丙甲兩人ハ十二日間ニ拾圓八拾錢ノ賃錢ヲ得ルトイフ,甲乙丙各ノ一日ノ賃錢幾何ナルカ

22. 或ル試驗ニ於テ受驗者總數ノ四分ノ一ハ落第セリ,及第點數ハ總受驗者ノ平均點數ヨリハ貳點ダケ少ナク,及第者ノ平均點數ヨリハ拾壹點ダケ少ナク,又落第者ノ平均點數ノ二倍ニ等シトイフ,及第點幾何ナルカ

23. 或ル人貳拾圓金貨拾圓金貨五圓金貨三種ノ金貨ヲ以テ貳百貳拾五圓ノ仕拂ヲナセリ,貳拾圓金貨ノ金高ハ拾圓金貨ノ金高ヨリハ參拾圓ダケ多ク,又五圓金貨ノ金高ノ二倍ヨリハ拾圓ダケ少ナシトイフ,三種ノ金貨各幾個アリシカ

24. 三個ノ有効數字ヨリ成ル三桁ノ數ハ其數字ノ和ノ48倍ニ等シク,此數ヨリ198ヲ引クトキハ同ジ數字ヲ逆ノ順ニ列ベタル數ヲ得ベシ,且兩端ノ數字ノ和ハ中央ノ數字ノ二倍ニ等シトイフ,此數ハ如何ナル數ナリヤ

25. 東海道線路鐵道哩數東京神戸間參百七拾六哩,靜岡濱松間ハ京都神戸間ニ等シク,名古屋京都間ハ京都神戸間ノ二倍ニ等シク,東京名古屋間ヲ二度往復スルダケノ哩數ハ名古屋神戸間ヲ三度往復シ更ニ名古屋ヨリ京都ニ至ルダケノ哩數ニ等シク,東京ヨリ靜岡マデハ靜岡ヨリ名古屋マデヨリハ五哩ダケ遠シトイフ,東京靜岡間,靜岡濱松間,濱松名古屋間ノ哩數各幾何ナルカ

第八編　公式及因數

106. 實際掛ケ合ハセテ次ノ公式ヲ證明スルヿヲ得ベシ

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

此レ等ノ公式ヲ適用シテ直チニ掛ケ算ノ結果ヲ書キ下ダスヿヲ得ルヿアリ例ヘバ

$$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$$

$$(2x+1)(5x+3)=10x^2+11x+3$$

例　題

上ノ公式又ハ第31節ノ公式ヲ適用シテ次ノ掛ケ算ノ結果ヲ直チニ書キ下ダセ

1. $(x+8)(x+7)$	2. $(x+8)(x-5)$	3. $(x-3)(x+10)$
4. $(x-10)(x-8)$	5. $(x+7)(x-9)$	6. $(x-11)(x+2)$
7. $(x+2)(x+2)$	8. $(a+5)(a+3)$	9. $(b-3)(b+5)$
10. $(x+8a)(x+7a)$	11. $(x-3a)(x+2a)$	12. $(x+6a)(x-5a)$
13. $(x+3a)(x-3a)$	14. $(x+4y)(x-2y)$	15. $(x-3y)(x-3y)$
16. $(2x-5)(x-2)$	17. $(2x+3)(x-3)$	18. $(3x-1)(x+1)$
19. $(2x+5)(2x-1)$	20. $(3x+7)(2x-3)$	21. $(4x-3)(2x+3)$
22. $(3x+8)(3x-8)$	23. $(2x-5)(2x-5)$	24. $(2x+7a)(2x-5a)$

107. 掛ケ算上ニ於ケル第31節ノ公式ノ應用ヲ示サンガ爲メニ一二ノ例ヲ掲グベシ

例 (1)　$x+y+z$ ヲ自乘セヨ

暫ク a ヲ以テ $x+y$ ニ代ラシムレバ $x+y+z=a+z$

$$(a+z)^2=a^2+2az+z^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$$

$$(x+y+z)^2=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$$

例 (2)　$p-q+r-s$ ニ $p-q-r+s$ ヲ掛ケヨ

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=\{(p-q)+(r-s)\}\{(p-q)-(r-s)\}$$
$$=(p-q)^2-(r-s)^2$$
$$=p^2-2pq+q^2-r^2+2rs-s^2$$

例 (3)　次ノ四ツノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

$a+b+c,\ -a+b+c,\ a-b+c,\ a+b-c$

第一ノ式ト第四ノ式トヲ掛ケ合ハセテ

$$(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2$$

第二ノ式ト第三ノ式トヲ掛ケ合ハセテ

$$(-a+b+c)(a-b+c)=\{c-(a-b)\}\{c+(a-b)\}$$
$$=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2+2ab-b^2$$

次ニ　$a^2+2ab+b^2-c^2$ ト $c^2-a^2+2ab-b^2$ トヲ掛クレバ

$$(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)$$
$$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}$$
$$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$

然ルニ　$(a^2+b^2-c^2)^2=(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+c^4$

$$=a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2c^2-2b^2c^2+c^4$$

故ニ所要ノ積ハ

$$4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4$$

即　$2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$　ナリ

例　題

上ノ例ニ傚ヒ第31節ノ公式ヲ應用シテ次ノ掛ケ算ヲ行ヘ

1. $(7x^2-5y^2)^2$　　2. $(x^2+2x-2)^2$　　3. $(x^2-5x+7)^2$
4. $(2x^2-3x-4)^2$　　5. $(x+2y+3z)^2$
6. $(x^2+xy+y^2)(x^2+xy-y^2)$　　7. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
8. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy-y^2)$　　9. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2)$
10. $(x^3+2x^2+3x+1)(x^3-2x^2+3x-1)$
11. $(x-3)^2(x^2+6x+9)$　　12. $(a+b)^2(a^2-2ab-b^2)$
13. $(2x+3y)^2(4x^2+12xy-9y^2)$
14. $(ax+by)(ax-by)(a^2x^2+b^2y^2)$　　15. $(ax+by)^2(ax-by)^2$

$(a^2x^2-b^2y^2)$　$a^4x^4-b^4y^4$

108. 實際掛ケ合ハセテ次ノ公式ヲ證明スルコヲ得ベシ

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc$$

例　　題

實際掛ケ合ハセ又ハ便宜公式ヲ應用シテ次ノ公式ヲ證明セヨ

1. $(a-b)(b-c)(c-a)=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$
2. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$
3. $(a-b)(b-c)(c-a)=bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$
4. $(a-b)^3+b^3-a^3=3ab(b-a)$
5. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$
6. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a)$
7. $(a+b+c)(ab+bc+ca)=(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
8. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2=(2a)^2$
9. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$
10. $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$+(c-a)(x-c)(x-a)=(a-b)(b-c)(a-c)$

因　　數

109. 第一ノ整式ガ第二ノ整式デ割リ切レルトキハ第二ノ整式ヲ第一ノ整式ノ**因數**ト稱ス,例ヘバ a ト $(b+c)$ トハ $ab+ac$ ノ因數ナリ,又 $a+b$ ト $a-b$ トハ a^2-b^2 ノ因數ナリ

多項式ノ總テノ項ニ公通ナル因數ハ多項式ノ因數ナリ,例ヘバ $a^2b+ab^2=ab(a+b)$, $3xy^3+6x^2y=3xy(y^2+2x)$

例　　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $2x^2+3x$　2. $ab-bc$　3. x^3-3ax^2　4. $2ax+\frac{1}{2}x^2$
5. $x^3y+3x^2y^2+5x^2y^3$　6. $a^2b^3c+\frac{1}{2}ab^2c^3$　7. $x^2y^3z^4-2x^4y^3z^2$

110. 或ル式ヲ公式ト比較シテ其因數ヲ發見スルヲ得ルヿアリ,次ニ第31節ノ公式ト比較シテ發見スルヿヲ得ル因數ノ例ヲ掲グベシ

例 (1)　$a^2+6ab+9b^2=a^2+2a(3b)+(3b)^2=(a+3b)^2$

例 (2)　$4x^2+4x+1=(2x)^2+2(2x)+1=(2x+1)^2$

例 (3)　$a^3-4a^2b^2+4ab^4=a(a^2-4ab^2+4b^4)$
$$=a\{a^2-2a(2b^2)+(2b^2)^2\}=a(a-2b^2)^2$$

$\boxed{\text{注意}}$ 一般ニ $(a-b)^2=(b-a)^2$ ナルガ故ニ此式ハ又 $a(2b^2-a)^2$ ニ等シ

例題

上ノ例ニ倣ヒ次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $16x^2+8x+1$　2. $9x^2-6x+1$　3. $1-8x^2+16x^4$

4. $4a^2-12ab+9b^2$　5. $9a^4+24a^2b^2+16b^4$　6. $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$

7. $25a^2x^2-30axy+9y^2$　8. $3a^2+6ab+3b^2$　9. $a^3-6a^2b+9ab^2$

10. $3a^5-30a^4b^3+75a^3b^6$　11. $4x^2y^2-x^4-4y^4$　12. $8x^2-4x^4-4$

13. $4x^2y^2+4(a+b)xy+(a+b)^2$　14. $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

15. $9(a+b)^2-6c(a+b)+c^2$

111. 例 (1) $a^2-4b^2=a^2-(2b)^2=(a+2b)(a-2b)$

例 (2) $9x^3-4xy^2=x\{(3x)^2-(2y)^2\}=x(3x+2y)(3x-2y)$

例 (3) $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

例 (4) $(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$

注意　一般ニ $(a-b)(c-d)=(b-a)(d-c)$ 即二ツノ因數ノ積ハ因數ノ雙方ノ符號ヲ換フルモ變ハラザルガ故ニ上ノ式ハ又 $(b-a-c)(b+c-a)$ ニ等シ

例題

上ノ例ニ倣ヒ次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $64a^2-49b^2$　2. $4x^2-9y^4$　3. $4a^2b^2-9c^2$

4. $25a^2b^2-4x^2y^2$　5. $9xy^2-x^3$　6. $8ab^2-18a^3$

7. $7abc^2-7a^3b^3$　8. a^4-16b^4　9. $81x^4-16y^4$

10. $x^4y^4-a^4b^4$　11. $81x^4-1$　12. $1-16a^4b^4$

13. x^8-y^8　14. $a^{10}-a^2$　15. $(x+y)^2-z^2$

16. $(x+y)^2-(x-y)^2$　17. $(2a+b)^2-(2b+a)^2$　18. $x^2-(x-y)^2$

19. $a^2-(2b-a)^2$　20. $9(x+y)^2-4(x-y)^2$　21. $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$

22. $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$　23. $(3a+b-2c)^2-(a+3b-c)^2$

24. $(a-2b+3c)^2-(a-c)^2$　25. $(3x^2+x-2)^2-(x^2-x-2)^2$

112. 第106節ニ於テハ公式

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

ヲ應用シテ掛ケ算ヲ行ヘリ,逆ニ此公式ト比較スルヿニヨリテ因數ヲ發見スルヲ得ルヿアリ

例 (1) $x^2+7x+12$ ヲ因數ニ分解セヨ

此式ニシテ設シ上ノ公式ト比較スルヿニヨリ因數ヲ發見スルヿヲ得ルモノナラシメバ12ハ或ル二ツノ數ノ積ニシテ7ハ其二ツノ數ノ和ナラザルベカラズ,偖テ12ハ1ト12トノ積ナレド1ト12トノ和ハ13ニシテ7ニアラズ,又12ハ2ト6トノ積ナレド2ト6トノ和ハ8ニシテ7ニアラズ,尙ホ又12ハ3ト4トノ積ニシテ3ト4トノ和ハ丁度7ナルガ故ニ, $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$ ナリ

例 (2) $x^2-7x+10$ ヲ因數ニ分解セヨ

10ハ1ト10又2ト5トノ積ナリ,而シテ2ト5トノ

和ハ7ナリ,然ルニ上ノ式ニ於ケルxノ係數ハ7ニアラズシテ-7ナリ,仍テ更ニ考フルニ10ハ又-2ト-5トノ積ニシテ-2ト-5トノ和ハ-7ナリ,故ニ$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

例(3) $x^2+3x-18$ヲ因數ニ分解セヨ

-18ハ次ノ如ク種種ニ二ツノ因數ニ分解スルヿヲ得

$(-1, 18), (1, -18), (-2, 9), (2, -9), (-3, 6), (3, -6)$

此中-3ト6トノ和ガ丁度3ナルガ故ニ

$$x^2+3x-18=(x-3)(x+6)$$

例題

上ノ例ニ倣ヒ次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. x^2+4x+3	2. x^2-4x+3	3. x^2-6x+8
4. $x^2-8x+15$	5. $x^2-11x+18$	6. $x^2+9x+20$
7. x^2+2x-3	8. x^2+4x-5	9. x^2+x-6
10. x^2-x-6	11. $x^2+2x-35$	12. $x^2-3x-10$
13. $x^2+5x-14$	14. $x^2-x-132$	15. $x^2+18x+72$
16. $x^2-5x-84$	17. $x^2-25x+150$	18. $x^2+5x-150$
19. $x^2+11x-180$	20. $x^2-x-156$	21. $x^2-31x+240$

113. $x^2-5ax+6a^2$ノ因數ハx^2-5x+6ノ因數ヲ發見スルト同様ニシテ之ヲ發見スルヿヲ得ベシ,即

$$x^2-5ax+6a^2=(x-2a)(x-3a)$$

例題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $x^2-5ax+4a^2$	2. $x^2+4xy+3y^2$	3. $x^2-6xy+8y^2$
4. $x^2-11xy+18y^2$	5. $x^2+5bx-14b^2$	6. $x^2-25xy+150y^2$
7. $x^2-35xy-200y^2$	8. x^4-13x^2+36	9. $x^4-25x^2y^2+144y^4$
10. x^3-3x^2-18x	11. $x^3y-x^2y^2-2xy^3$	12. $a^2-25ab+154b^2$

114. 或ル時ハ第106節ノ第二ノ公式

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

ト比較スルヿニヨリテ因數ヲ發見スルヲ得ルヿアリ,然レドモ此場合ニ於テ視察ニテa, b, c, dノ値ヲ發見スルハ中中ニ困難ナルガ故ニ實際ハ三項式 px^2+qx+r ニ於テp, q, rガ小サキ數ナルトキニ限リ此方法ニヨリテ因數ヲ發見スルヿヲ得

又或ル時ハ上ノ公式ヨリハ上ノ公式ノ格段ナル場合即上ノ公式ニ於テcヲ1ト置キテ得ベキ公式

$$(ax+b)(x+d)=ax^2+(ad+b)x+bd$$

ト比較スル方ガ便利ナルヿアリ

例(1) $3x^2-16x+5$ヲ因數ニ分解セヨ

第一ニ着目スベキハx^2ノ係數トxヲ含マザル項トナリ,此例ニ於ケルx^2ノ係數3ハ3ト1トノ積ナリ,xヲ含

マザル項5ハ1ト5或ハ-1ト-5トノ積ナリ,而シテxノ係數ハ負ナルガ故ニ後ノ組合セヲ採ラザルベカラズ,借テ$a=3$, $b=-5$, $d=-1$トスレバ$ad+b=-8$, $a=3$, $b=-1$, $d=-5$トスレバ$ad+b=-16$ニシテ丁度xノ係數ト符合ス故ニ

$$3x^2-16x+5=(3x-1)(x-5)$$

例 (2)　$6x^2-x-35$ヲ因數ニ分解セヨ

x^2ノ係數6ハ1ト6ト又ハ2ト3トノ積ナリ,xヲ含マザル項-35ヲ分解シテ$(-1, 35)$, $(1, -35)$, $(-5, 7)$, $(5, -7)$ヲ得ベシ,乃$a=2$, $c=3$トシテ試ソニ, $b=5$, $d=-7$トスレバ$ad+bc=1$, $b=-5$, $d=7$トスレバ$ad+bc=-1$ニシテ與ヘラレタル式ノxノ係數ト符合ス,仍テ次ノ答ヲ得

$$6x^2-x-35=(2x-5)(3x+7)$$

例 (3)　$3x^2-16xy+5y^2$ヲ因數ニ分解セヨ

此式ハ$3x^2-16x+5$ト全ク同様ニシテ分解スルコトヲ得

即　$$3x^2-16xy+5y^2=(3x-y)(x-5y)$$

例　　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $3x^2-10x+3$	**2.** $3x^2-17x+10$	**3.** $2x^2+11x+12$
4. $2x^2+3x-2$	**5.** $3x^2+7x-6$	**6.** $4x^2+x-3$
7. $5x^2-38x+21$	**8.** $3x^2+11x-20$	**9.** $7x^2-33x-54$
10. $5x^2-38x+48$	**11.** $7x^2+75x-108$	**12.** $9x^2+130x-75$

13. $4x^2+21x-18$	**14.** $4x^2+4x-15$	**15.** $6x^2+55x-50$
16. $10x^2+3x-1$	**17.** $132x^2+x-1$	**18.** $4x^2-5x+1$
19. $12x^2+50x-50$	**20.** $7x^2+123x-54$	**21.** $24x^2-30x-75$

22. $3x^2-17xy+10y^2$　　**23.** $7x^2-33xy-54y^2$

24. $24x^2-70xy-75y^2$　　**25.** $2x^4+7a^2x^2+3a^4$

26. $15x^4y-4x^3y^2-4x^2y^3$　　12巾 $75y^3-130xy^4-9x^2y^5$

115. 或ル式ヲ因數ニ分解セントスルニ,直チニ公式ヲ應用スルコト能ハザルモ與ヘラレタル式ヲ少シク變化シテ後公式ヲ應用シテ以テ其因數ヲ發見スルヲ得ルコトアリ而シテ此方法ヲ適用スルニ特ニ都合宜シキハ公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ニ歸セシムルコトヲ得ル場合ナリ

例 (1)　$$x^2+4x+3=x^2+4x+4-4+3=x^2+4x+4-1$$
$$=(x+2)^2-1=(x+2+1)(x+2-1)$$
$$x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$$

例 (2)　$$2x^2+3x-2=\tfrac{1}{2}\{4x^2+6x-4\}=\tfrac{1}{2}\{(2x)^2+3(2x)-4\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(2x)^2+3(2x)+\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{4}-4\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\{(2x+\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{25}{4}\}=\tfrac{1}{2}\{(2x+\tfrac{3}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(2x+\tfrac{3}{2}+\tfrac{5}{2})(2x+\tfrac{3}{2}-\tfrac{5}{2})$$
$$=\tfrac{1}{2}(2x+4)(2x-1)$$
$$=(x+2)(2x-1)$$

例 (3) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$$

例　　題

1. 本節ノ方法ニヨリ第 112 節ノ例題ヲ解ケ

2. 本節ノ方法ニヨリ第 114 節ノ例題中第一番ヨリ第十二番マデノ諸例題ヲ解ケ

上ノ例(3)ニ倣ヒ次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

3. x^4-3x^2+1　　4. x^4-23x^2+1　　5. $x^4+x^2y^2+y^4$

$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

116. 或ル時ハ第 108 節ノ公式ヲ應用シテ因數ヲ發見スルヲ得ルヿアリ

例 (1) $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3=(2x+3y)\{(2x)^2-(2x)(3y)+(3y)^2\}$

$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$$

例 (2) $125x^3-27=(5x)^3-3^3=(5x-3)\{(5x)^2+(5x)\times3+3^2\}$

$$=(5x-3)(25x^2+15x+9)$$

例 (3) $(a+b)^3-c^3=\{(a+b)-c\}\{(a+b)^2+(a+b)c+c^2\}$

又或ル時ハ次ノ例ノ示スガ如ク與ヘラレタル式ノ項ヲ適當ナル順ニ列ベ變ヘテ後之ヲ群ニ分ツヿニヨリテ因數ヲ發見スルヲ得ルヿアリ

例 (4) $x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+(x-3)=(x^2+1)(x-3)$

例 (5) $ax+by+bx+ay=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b)$

例 (6) $ax^3-x+a-1$ ノ項ノ順序ヲ換ヘテ $ax^3+a-x-1$ ト書キ適宜括弧ニテ括リテ $a(x^3+1)-(x+1)$ ト書クトキハ此式ガ $x+1$ ナル因數ヲ有スルヿ明カナリ

例 (7) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ノ因數ヲ索メンニ之ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列スレバ

$$a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

トナリ其 $(b-c)$ ナル因數ヲ有スルヤ明カニシテ

(此式)$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$

注意 因數分解ノ結果ニ疑アルトキハ因數ヲ掛ケ合ハセ,斯クシテ得タル式ガ元ノ式ト符合スルヤ否ヤヲ吟味スレバ可ナリ

例　　題

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $8a^3+b^3$　　2. a^3-125x^3　　3. $4x^3+32a^3$

4. $27x^3-\frac{1}{8}y^3$　　5. $3a^4b+24ab^4$　　6. $40a^3bc-5b^4c^4$

7. a^6-64　　8. $(x+2y)^3-y^3$　　9. $(2y-x)^3+(2x-y)^3$

10. x^3+x^2-4x-4　　11. $ax^3+bx+a+b$

12. $x^2-y^2+xz-yz$　　13. $a^2-b^2-(a-b)^2$

14. $a^2-b^2+bc-ca$　　15. a^2-a-c^2+c

第十二問題集

次ノ式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $81a^4-16b^4$　2. x^5-81x　3. $27x^4+8x$

4. $(x+y)^4-(x-y)^4$　5. $(a+b-3c)^2-9c^2$

6. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$　7. $(x^3+3x)^2-(3x^2+1)^2$

8. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$　9. $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$

10. $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$　11. $x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{4}y^2$

12. $x^2+(m+\dfrac{1}{m})xy+y^2$　13. $72(x^2-1)-17x$

14. x^4-5x^2+4　15. $x^4-13x^2y^2+36y^4$

16. $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$　17. $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$

18. $(x+y)^2-7z(x+y)+10z^2$　19. $x(x+4)-y(y+4)$

20. x^3+x^2-4x-4　21. $2x^3-3x^2-2x+3$　22. $ax^3+bx+a+b$

23. $x^3+bx^2-a^2x-a^2b$　24. bx^3+ax^2+bx+a

25. $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3$　26. $a(a-2b)^3-b(b-2a)^3$

27. $ax^2+by^2+(a+b)xy$　28. $ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$

29. $a^4+a^2b^2-b^2c^2-c^4$　30. $1+bx-(a^2+ab)x^2$

31. $1-abx^3+(b-a^2)x^2$　32. $a^2-b^2+c^2-d^2-2(ac-bd)$

33. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$　34. $(a^2-b^2+c^2-d^2)^2-(2ac-2bd)^2$

35. $x^4-7x^2y^2+y^4$　36. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$

37. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$

第九編

最大公約數及最小公倍數

最大公約數

117. 二ッ或ハ二ッヨリ多クノ整式ヲ割リ切ル整式ヲ此レ等ノ式ノ**公約數**ト稱ス例ヘバ $3xy$ ハ $12x^2y$ ト $15xy^2$ トノ公約數ナリ

多クノ整式ノ公約數ハ通例幾ツモアル其中ニテ次數ノ最モ大ナルモノヲ**最大公約數**ト稱ス例ヘバ二ッノ整式 a^2bc, a^3b^2 ヲ考フルニ, a, a^2, b, ab, a^2b ハ何レモ其公約數ナリ,而シテ此中 a^2b ノ次數ガ最大ナルガ故ニ之ヲ與ヘラレタル二式ノ最大公約數トス

多クノ式ノ公約數ガ唯一ッアルトキハ此公約數ガ即其最大公約數ナリ

118. 單項式及因數ノ明カナル多項式ノ最大公約數ハ視察ニテ之ヲ發見スルコヲ得ベシ

例 (1) a^4b^2c ト a^3b^3d トノ最大公約數ヲ索ム

此二ッノ式ニ公通ナル文字ハ a ト b トナリ而シテ二ッノ式ノ雙方ヲ割リ切ル a ノ最高冪ハ a^3, b ノ最高冪ハ b^2 ナリ即所要ノ最大公約數ハ a^3b^2 ナリ

例 (2) $a^2b^3c^2x^5y$, $a^4bd^2x^2y^3$, $a^3b^2c^2x^3y^2$ ノ最大公約數如何

所要ノ最大公約數ハ a^2bx^2y ナリ

上ノ二例ノ示スガ如ク多クノ式ノ最大公約數ハ總テノ式ニ公通ナル文字ノ,此レ等總テノ式ヲ割リ切ル最高(即指數ノ最大ナル)冪ノ積ナリ

爰ニ注意スベキハ或ル文字ノ總テノ式ヲ割リ切ル最高冪ハ此レ等ノ式ノ中ニアル此文字ノ諸ノ冪ノ中ニテ指數ノ最モ小ナルモノナルコナリ例ヘバ例(2)ノ諸式ニ於ケル a ノ冪ハソレゾレニ a^2, a^4, a^3 ニシテ此中指數ノ最モ小ナルハ a^2 ナリ,乃 a^2 ハ此レ等ノ總テノ式ヲ割リ切ル a ノ最高冪ナリ

與ヘラレタル式ガ數係數ヲ有スルトキハ此レ等ノ數係數ノ最大公約數ヲ以テ所要ノ最大公約數ノ數係數トナスベシ

例 (3) $42a^3b^2x$ ト $21a^2b^3x^2$ トノ最大公約數ヲ索ム

數係數 42 ト 21 トノ最大公約數ハ 21 ナリ,仍テ所要ノ最大公約數 $21a^2b^2x$ ヲ得

例 (4) $2a^2x+2ax^2$ ト $3abxy+3bx^2y$ トノ最大公約數如何

$$2a^2x+2ax^2=2ax(a+x)$$

$$3abxy+3bx^2y=3bxy(a+x)$$

故ニ所要ノ最大公約數ハ $x(a+x)$ ナリ

例 (5) $8a^2x^2-24a^2x+16a^2$ ト $12ax^2y-12axy-24ay$ トノ最大公約數ヲ索ム

$$8a^2x^2-24a^2x+16a^2=8a^2(x^2-3x+2)=8a^2(x-1)(x-2)$$

$$12ax^2y-12axy-24ay=12ay(x^2-x-2)=12ay(x+1)(x-2)$$

故ニ所要ノ最大公約數ハ $4a(x-2)$ ナリ

例題

次ノ各組ノ式ノ最大公約數ヲ索メヨ

1. ab^2c^2d, a^2bcd^2 2. $24a^3b^3x^4$, $60a^2b^4x^6$ 3. ab^3, a^2bc, abc^2

4. $17pq^2$, $34p^2q$, $51p^3q^3$ 5. $8x^2y^3z^4$, $12x^3y^2z^3$, $20x^4y^3z^2$

6. x^2-y^2, x^3-y^3, 7. a^3+b^3, $(a+b)^3$ 8. $9x^2-1$, $(3x+1)^2$

9. $(x-a)^3(x+b)^2$, $(x-a)^2(x+b)$ 10. $7x^2-4x$, $7a^2x-4a^2$

11. $8a^3b^2c-12a^2bc^3$, $6ab^4c+4ab^3c^2$ 12. x^2-2x-3, x^2+x-12

13. $3x^3+6x^2-24x$, $6x^3-96x$ 14. $ac(a-b)(a-c)$, $bc(b-a)(b-c)$

15. x^2+3x+2, x^2+6x+8 16. $3a^3+2a^2-a$, $5a^4+3a^3-2a^2$

17. $a^3+3a^2b+2ab^2$, $a^4+4a^3b+3a^2b^2$

18. $x^3+3x^2y+2xy^2$, $x^4+6x^3y+8x^2y^2$

19. $3x^2-4x+1$, $4x^2-5x+1$

20. $3x^2-6x+3$, $6x^2+6x-12$, $12x^2-12$

21. x^2-y^2, x^3-y^3, $x^2-7xy+6y^2$

119. 多クノ多項式ノ最大公約數ヲ索メントスルニ,設シ幸ニシテ此レ等ノ式ヲ因數ニ分解スルヿヲ得バ,直チニ所要ノ最大公約數ヲ發見スルヿヲ得ベシト雖モ,多項式ヲ因數ニ分解スルヿハ,前編ニ掲ゲタルガ如キ簡單ナル場合ノ外ハ,非常ニ困難ナリ

多項式ヲ因數ニ分解スルヿノ非常ニ困難ナルニ拘ハラズ,多クノ多項式ノ最大公約數ハ次ノ方法ニヨリ恒ニ之ヲ發見スルヿヲ得ベシ

多クノ多項式ノ最大公約數ヲ索ムルニ當リテハ通例此レ等ノ式ニ公通ナル或ル一ツノ文字ニノミ着目スルモノトス,此場合ニ於テ,此文字ノ諸ノ冪ヲ含ム多クノ多項式ノ最大公約數トハ此レ等ノ式ノ何レヲモ割リ切ル此文字ニ就テ最高次ノ式ナリ,次ニ二ツノ多項式ノ最大公約數ヲ索ムル法則ヲ掲ゲン

AトBトヲ以テ二ツノ多項式ヲ代表セシメ,AトBトヲ或ル公通文字ノ降冪ノ順ニ排列シ且Aノ次數(公通文字ニ就テ以下之ニ準フ)ハBノ次數ヨリハ或ハ大ナルカ或ハ等シク然レドモ決シテ小ナラズトスベシ,偖テAヲBデ割リ,若シ割リ切ルレバBソレ自身ハAトBトノ最大公約數ナルヤ明カナリ,若シ又割リ切レザレバ必ズヤ剩餘Cヲ得ベシ而シテCノ次數ハBノ次數ヨリハ必ズ小ナリ,次ニCヲ以テBヲ割リ,箇樣ニシテ遂ニ剩餘ナキニ至ルマデ此方法ヲ續ケ行フベシ,最後ニ用ヰタル除數ガ即所要ノ最大公約數ナリ

上ノ方法ヲ續ケ行フニ各次ノ除數ノ次數ハ次第ニ小サクナルヿナレバ必ズヤ剩餘ナキニ達スルカ,サナクバ公通文字ヲ含マザル剩餘ヲ得ルニ至ルベシ,後ノ場合ニ於テハAトBトハ公通文字ヲ含ム公約數ヲ有セズ

例ヘバ x^2-4x+3 ト $4x^3-9x^2-15x+18$ トノ最大公約數ヲ索メンニ

$$
\begin{array}{rl}
x^2-4x+3\,) & 4x^3-9x^2-15x+18\ (4x+7 \\
 & \underline{4x^3-16x^2+12x} \\
 & \quad 7x^2-27x+18 \\
 & \quad \underline{7x^2-28x+21} \\
 & \qquad x-3\,)\ x^2-4x+3\ (x-1 \\
 & \qquad\qquad \underline{x^2-3x} \\
 & \qquad\qquad\quad -x+3 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-x+3}
\end{array}
$$

乃所要ノ最大公約數ハ $x-3$ ナリ

上ノ法則ヲ證明センガ爲メニAヲBデ割リタル商ヲpトスベシ然ルトキハ

$$A=Bp+C \qquad A-Bp=C$$

第一ノ恒等式ハ明カニBトCトノ雙方ヲ割リ切ル式ハ必ズAヲ割リ切リ,從テ,BトCトノ公約數ハ必ズヤAトBトノ公約數ナルヿヲ示ス

又AトBトノ公約數ハ$A-Bp$即第二ノ恒等式ニヨリCノ約數ナルガ故ニAトBトノ公約數ハ必ズヤBトCトノ公約數ナリ

故ニAトBトノ公約數ハ全然BトCトノ公約數ニ同ジ,從テAトBトノ最大公約數ハBトCトノ最大公約數ナリ

更ニBヲCデ割リテ商q剩餘Dヲ得タリトスレバ前ト同ジ道理ニテCトDトノ最大公約數ハBトCトノ最大公約數ニシテ,從テ所要ノAトBトノ最大公約數ナリ

此方法ヲ續ケ行フ途中ノ割リ算ニ於ケル被除數ト除數トノ最大公約數ハ何レモ所要ノ最大公約數ナリ

此方法ヲ續ケ行フテ遂ニ剩餘ナキ割リ算ニ達シタリトセンニ,剩餘ナキ割リ算ニ於ケル除數ハ被除數ノ約數ニシテ又除數ソレ自身ト被除數トノ最大公約數ナルヤ明カナリ,故ニ此除數ハ即所要ノAトBトノ最大公約數ナリ

120. 最大公約數ヲ索メンガ爲メニ與ヘラレタル式ガ數字ノ因數又ハ單項式ナル因數ヲ有スルトキハ暫ク此レ等ノ因數ヲ預リ置キ此レ等ノ因數ヲ省キテ得タル多項式ニ就テ前節ノ方法ヲ適用シ以テ大ヒニ最大公約數ヲ索ムル計算ヲ簡便ニスルヿヲ得ベシ

例ヘバ $2a^2x^4+2a^2x^3-4a^2x$ ト $4abx^5+8abx^4-12abx^2$ トノ最大公約數ヲ索メンニ

$$2a^2x^4+2a^2x^3-4a^2x=2a^2x(x^3+x^2-2)$$

$$4abx^5+8abx^4-12abx^2=4abx^2(x^3+2x^2-3)$$

x^3+x^2-2 ト x^3+2x^2-3 トノ最大公約數ヲ索メンニ

$$\begin{array}{lll}
x^3+x^2-2) & x^3+2x^2-3 & (1 \\
 & \underline{x^3+x^2-2} & \\
 & x^2-1)\ x^3+x^2-2 & (x+1 \\
 & \qquad \underline{x^3-x} & \\
 & \qquad x^2+x-2 & \\
 & \qquad \underline{x^2\quad -1} & \\
 & \qquad \quad x-1 &
\end{array}$$

此レヨリ更ニ進ンデ$x-1$ヲ以テx^2-1ヲ割ルベキ筈ナレドx^2-1ハ$x-1$デ割リ切レルヿ明カナルガ故ニ直チニx^3+x^2-2トx^3+2x^2-3トノ最大公約數ハ$x-1$ナルヿヲ知ル而シテ與ヘラレタル二式ノ最大公約數ハ$2ax(x-1)$ナリ

121. 第119節ノ方法ヲ實行スル途中ニ於ケル計算ヲ簡便ニスル方法ヲ講ゼンガ爲メニPトQトヲ以テxニ就テ整式ナル二ツノ式ヲ代表セシムベシ

今PトQトノ何レカ一方例ヘバPニ或ル數m(一般ニハ單項式)ヲ掛ケタリトセンニmガQノ約數ニアラザル限リハPトQトノ最大公約數ハmPトQトノ最大公約數ナルヤ明カナリ

又 P ガ m デ割リ切レ Q ガ m デ割リ切レザルトキハ P ト Q トノ最大公約數ハ $(P\div m)$ ト Q トノ最大公約數ナルコト明瞭ナリ

例 (1) $2x^2-7x+5$ ト $3x^2-7x+4$ トノ最大公約數ヲ索ム

$2x^2-7x+5$ ヲ除數トスルトキハ $3x^2$ ヲ $2x^2$ デ割リテ $\frac{3}{2}$ ナル分數ヲ得ベキガ故ニ此不便ヲ避クルガ爲メニ被除數ニ 2 ヲ掛ケテ後割ル, 爰ニ 2 ハ除數ノ約數ナラザルコト明カナリ

$$\begin{array}{l} 2x^2-7x+5)\ 6x^2-14x+8\ (3 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{6x^2-21x+15} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 7x-7 \end{array}$$

剩餘 $7x-7$ ヲ 7 デ割リテ $x-1$ ヲ得, 爰ニ 7 ハ $2x^2-7x+5$ ヲ割リ切ラズ

$$\begin{array}{l} x-1)\ 2x^2-7x+5\ (2x-5 \\ \qquad\quad \underline{2x^2-2x} \\ \qquad\qquad\ -5x+5 \\ \qquad\qquad\ \underline{-5x+5} \end{array}$$

乃 $x-1$ ガ所要ノ最大公約數ナリ

例 (2) $2x^4-7x^3-4x^2+x-4$ ト $3x^4-11x^3-2x^2-4x-16$ トノ最大公約數ヲ索ム

第二ノ式ニ 2 ヲ掛ケテ之ヲ被除數トスベシ

$$\begin{array}{l} 2x^4-7x^3-4x^2+x-4)\ 6x^4-22x^3-4x^2-8x-32\ (3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{6x^4-21x^3-12x^2+3x-12} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -x^3+8x^2-11x-20 \end{array}$$

此剩餘ニ -1 ヲ掛ケテ即結局リ此式ノ符號ヲ換ヘテ之ヲ次ノ除數トスベシ

$$\begin{array}{l} x^3-8x^2+11x+20)\ 2x^4-7x^3-4x^2+x-4\ (2x+9 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{2x^4-16x^3+22x^2+40x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 9x^3-26x^2-39x-4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{9x^3-72x^2+99x+180} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 46x^2-138x-184 \end{array}$$

此剩餘ハ 46 デ割リ切レル, 仍テ

$$\begin{array}{l} x^2-3x-4)\ x^3-8x^2+11x+20\ (x-5 \\ \qquad\qquad\quad \underline{x^3-3x^2-4x} \\ \qquad\qquad\quad -5x^2+15x+20 \\ \qquad\qquad\quad \underline{-5x^2+15x+20} \end{array}$$

乃所要ノ最大公約數ハ x^2-3x-4 ナリ

例 (3) $x^3-4a^2x+15a^3$ ト $x^4+a^2x^2+25a^4$ トノ最大公約數ヲ索ム

$$\begin{array}{l} x^3-4a^2x+15a^3)\ x^4+a^2x^2+25a^4\ (x \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^4-4a^2x^2+15a^3x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 5a^2x^2-15a^3x+25a^4 \end{array}$$

剩餘ニ就テ $5a^2$ ナル約數ヲ去リ

$$\begin{array}{l} x^2-3ax+5a^2)\ x^3-4a^2x+15a^3\ (x+3a \\ \qquad\qquad\qquad \underline{x^3-3ax^2+5a^2x} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3ax^2-9a^2x+15a^3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{3ax^2-9a^2x+15a^3} \end{array}$$

乃所要ノ最大公約數ハ $x^2-3ax+5a^2$ ナリ

122. 三ツノ整式 A, B, C ノ最大公約數ヲ索ムルニハ最初ニ此レ等ノ式ノ何レニテモ二ツ例ヘバAトBトノ最大公約數ヲ索メ之ヲDト名ヅケソニDトCトノ最大公約數ハ即所要ノ A, B, C ノ最大公約數ナリ

DトCトノ公約數ハ何レモA, B, Cノ公約數ニシテ，A, B, Cノ公約數ハ何レモDトCトノ公約數ナルガ故ニ上ノ言ノ眞ナルヤ明カナリ

例ヘバ次ノ三式

$$x^3+x^2-x-1,\quad x^3+3x^2-x-3,\quad x^3+x^2-2$$

ノ最大公約數ヲ索メンニ初メノ二ツノ式ノ最大公約數ハx^2-1ニシテ，x^2-1ト第三ノ式トノ最大公約數ハ$x-1$ナリ，故ニ所要ノ最大公約數ハ$x-1$ナリ

三ツヨリ多クノ整式ノ最大公約數ヲ索ムル方法モ同樣ナリ

第十三問題集

次ノ各組ノ式ノ最大公約數ヲ索ム

1. $x^3-41x-30$, $x^3-11x^2+25x+25$
2. $x^3+7x^2+17x+15$, $x^3+8x^2+19x+12$
3. $x^3-10x^2+26x-8$, $x^3-9x^2+23x-12$
4. $4(x^2-x+1)$, $3(x^4+x^2+1)$

5. $5(x^2-x+1)$, $4(x^6-1)$
6. $6x^2+x-2$, $9x^3+48x^2+52x+16$
7. x^3-4x^2+2x+3, $2x^4-9x^3+12x^2-7$
8. x^4+x^2-6, x^4-3x^2+2
9. x^3-2x^2+3x-6, $x^4-x^3-x^2-2x$
10. x^4-1, $3x^5+2x^4+4x^3+2x^2+x$
11. $x^4-9x^2-30x-25$, $x^5+x^4-7x^2+5x$
12. $35x^3+47x^2+13x+1$, $42x^4+41x^3-9x^2-9x-1$
13. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$,
    $x^6-x^5+2x^4-x^3+2x^2-x+1$
14. $2x^4-6x^3+3x^2-3x+1$, $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$
15. x^9-1, $x^{10}+x^9+x^8+2x^7+2x^4+2x^3+x^2+x+1$
16. $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$, $x^3-48x+7$
17. $x^2-xy-12y^2$, $x^2+5xy+6y^2$
18. $2x^2+3ax+a^2$, $3x^2+2ax-a$
19. $x^3-3a^2x-2a^3$, $x^3-ax^2-4a^3$
20. $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$, $4x^2y-5xy^2+y^3$

最小公倍數

123. 二ッ或ハ二ッヨリ多クノ整式ニテ割リ切ラルル整式ヲ此レ等ノ式ノ**公倍數**ト稱ス

多クノ整式ノ公倍數ハ幾ツモアル其中ニテ次數ノ最モ小ナルモノヲ與ヘラレタル多クノ式ノ**最小公倍數**ト稱ス

與ヘラレタル式ガ數係數ヲ有スルトキハ此レ等ノ數係數ノ最小公倍數ヲ以テ所要ノ最小公倍數ノ數係數トナスベシ

單項式及因數ノ明カナル多項式ノ最小公倍數ハ視察ニテ之ヲ索ムルヿヲ得ベシ

例 (1)　$12a^2c,\ 14b^3c^2,\ 36ab^2$ ノ最小公倍數ヲ索ム

此レ等ノ式ノ中ニアル文字ハ $a,\ b,\ c$ ニシテ其最高冪ハソレゾレニ $a^2,\ b^3,\ c^2$ ナリ,之ト數係數ノ最小公倍數 252 トヲ掛ケ合ハセテ答 $252a^2b^3c^2$ ヲ得

例 (2)　$2a^2+2ax,\ 6a^2-6x^2,\ 3a^2-6ax+3x^2$ ノ最小公倍數ヲ索ム

$$2a^2+2ax=2a(a+x),\quad 6a^2-6x^2=6(a-x)(a+x)$$

$$3a^2-6ax+3x^2=3(a-x)^2$$

故ニ所要ノ最小公倍數ハ $6a(x+a)(a-x)^2$ ナリ

上ノ例ノ示スガ如ク因數ノ明カナル多クノ整式ノ最小公倍數ヲ索ムルニハ,此レ等ノ式ノ中ニアル總テノ因數ニ就キ,此レ等ノ式ノ中ニ顯ハルル各因數ノ最高冪ヲ採リ,之ヲ悉ク掛ケ合ハセテ得タル積ニ與ヘラレタル式ノ數係數ノ最小公倍數ヲ前置スレバヨシ

例　題

次ノ各組ノ式ノ最小公倍數ヲ索ム

1. $abc^2,\ a^2bc^3$　**2.** $4x^3y,\ 10xy^3$　**3.** $24a^3b^3x^4,\ 60a^2b^4x^5$

4. $4a^3x,\ 6a^2x^2,\ 2ax^2$　**5.** $18ax^2,\ 72ay^2,\ 12xy$

6. $3x^2yz^3,\ 15xy^3z^2,\ 5x^2y^2z^2$　**7.** $ab^2c^3x^4,\ a^4bc^2x^3,\ a^3b^2cx$

8. $x^2-1,\ x^2-x$　**9.** $a^2-b^2,\ a^2+ab$　**10.** $2x-1,\ 4x^2-1$

11. $(x+a)(x-b)^2(x-c)^2,\ (x-a)^4(x-b)(x-c)$　**12.** $a^4b^2-a^2b^4,\ a^4b^3+a^3b^4$

13. $x^2+3x+2,\ x^2+5x+4$　**14.** $x^2+3xy+2y^2,\ x^2+5xy+4y^2$

15. $x^2-1,\ x^2-x,\ x^3-1$　**16.** $x^2-y^2,\ (x+y)^2,\ (x-y)^2$

17. $(a-b)(b-c),\ (b-c)(c-a),\ (c-a)(a-b)$

18. $(a+b)^2-(c+d)^2,\ (a+c)^2-(b+d)^2,\ (a+d)^2-(b+c)^2$

19. $x^2+7x+12,\ x^2+6x+8,\ x^2+5x+6$

20. $x^2-7xy+12y^2,\ x^2-6xy+8y^2,\ x^2-5xy+6y^2$

21. 若干ノ整式ノ最小公倍數ヲ各ノ式ニテ割リタル商ハ公約數ヲ有セザルヿヲ $a^4b^2,\ b^2c,\ a^2c^3$ ナル三ッノ式ニ就テ驗セ

22. 三ッノ式ノ最小公倍數ハ其中何レカ二ッノ式ノ最小公倍數ト殘リノ式トノ最小公倍數ニ等シキヿヲ前例題ノ三式ニ就テ驗セ,又此言ハ一般ニ眞ナリトイフ,其理如何

23. 公約數ヲ有セザル二ッノ式ノ最小公倍數如何

24. a^2bc^3 ト ab^2c^2 トノ最大公約數及最小公倍數ヲ索メ,其積ト元ノ二ッノ式ノ積トノ關係ヲ吟味セヨ

25. 二ッノ式ノ積ハ $a^3b^3c^5$ ニシテ其最大公約數ハ abc^2 ナリトイフ,此二ッノ式ノ最小公倍數如何

124. 因數ノ明カナラザル二ッノ式ノ最小公倍數ヲ索ムルニハ先ヅ其最大公約數ヲ索ムベシ,例ヘバ x^3+x^2-2 ト x^3+2x^2-3 トノ最小公倍數ヲ索メンニ,先ヅ第 119 節ニヨリ其最大公約數 $x-1$ ヲ索メ而シテ後割リテ

$$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$$

$$x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$$

且 x^2+2x+2 ト x^2+3x+3 トハ公約數ヲ有セザルヲ知リ,所要ノ最小公倍數 $(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$ ヲ得

一般ニ A ト B トヲ以テ二ッノ整式ヲ代表セシメ其最大公約數ヲ G 其最小公倍數ヲ L トスベシ

今 A ヲ G デ割リタル商ヲ a, B ヲ G デ割リタル商ヲ b

トスレバ

$$A=G\times a$$

$$B=G\times b$$

偖テ G ハ A ト B トノ最大公約數ナルガ故ニ a ト b トハ公約數ヲ有セズ故ニ A ト B トノ最小公倍數ハ G ト a ト b トノ連乘積ナリ即

$$L=G\times a\times b$$

或ハ　$$L=\frac{Ga\times Gb}{G}=\frac{A\times B}{G}=A\times\frac{B}{G}=\frac{A}{G}\times B$$

又　$$L\times G=A\times B$$

乃二ッノ整式ノ最小公倍數ヲ索ムルニハ先ヅ其最大公約數ヲ索メ二ッノ式ノ何レカ一方ヲ此最大公約數デ割リテ得タル商ニ他ノ式ヲ掛クベシ

一般ニ二ッノ整式ノ最小公倍數ト最大公約數トノ積ハ此二ッノ式ノ積ニ等シ

因數ノ明カナラザル三ッノ整式ノ最小公倍數ヲ索ムルニハ先ヅ其中ノ二ッノ式ノ最小公倍數ヲ索メ,次ニ此最小公倍數ト第三ノ式トノ最小公倍數ヲ索ムベシ

式ノ數三ッヨリ多クアル場合ニモ同様ニシテ其最小公倍數ヲ索ムルヿヲ得ベシ

第十四問題集

次ノ各組ノ式ノ最小公倍數ヲ索ム

1. $x^3-6x^2+11x-6,\quad x^3-9x^2+26x-24$
2. $x^3-7x-6,\quad x^3+8x^2+17x+10$
3. $x^4+x^3+2x^2+x+1,\quad x^4-1$
4. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4,\quad x^4-5x^3+20x-16$
5. $x^4+a^2x^2+a^4,\quad x^4-ax^3-a^3x+a^4$
6. $x^4-x^3+8x-8,\quad x^3+4x^2-8x+24$
7. $x^3+6x^2+11x+6,\quad x^3+8x^2+19x+12$
8. $4(a+b),\quad 6(a^2-b^2),\quad 8(a^3+b^3)$
9. $15(a^2b-ab^2),\quad 21(a^3-ab^2),\quad 35(ab^2+b^3)$
10. $x^2-1,\quad x^3+1,\quad x^3-1$
11. $x^2-1,\quad x^2+1,\quad x^4+1,\quad x^8-1$
12. $x^2-1,\quad x^3+1,\quad x^3-1,\quad x^6+1$
13. $x^2+3x+2,\quad x^2+4x+3,\quad x^2+5x+6$
14. $x^2+2x-3,\quad x^3+3x^2-x-3,\quad x^3+4x^2+x-6$
15. $x^2+5x+10,\quad x^3-19x-30,\quad x^3-15x-50$

第十編 分數式

125. 第32節ヨリ第38節ニ至ルマデニ於テa,b,c,dハ何レモ正ノ整數ヲ表ハシ且aハbデ割リ切レcモdデ割リ切レルモノトシテ得タル整數ナル商$\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ニ係ル定理公式ハaガbデ割リ切レズcモdデ割リ切レザル場合即$\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ガ分數ヲ表ハス場合ニモ眞ナリ,實ニ吾人ハ第66節ヨリ第68節ニ至ルマデニ於テ此言ノ眞ナル樣ニ分數計算ノ意義ヲ定メタリ,其結果トシテ,既ニ第70節ニ言ヘルガ如ク,此レ等ノ定理公式ハa,b等ノ文字ソレ自身ガ正負ノ整數分數如何ナル數ヲモ表ハス場合ニ於テモ眞ナリ,從テa,b等ノ文字ソレ自身ガ式ヲ表ハス場合即$\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ガ分數式ヲ代表スル場合ニ於テモ眞ナリ

分數式ノ分母分子ニ同一ノ數ヲ掛ケ或ハ同一ノ數デ割ルモ其値ハ變ハラズ,爰ニ同一ノ數トアル數トハ勿論數字ニテ表ハサレタル數ニ限ラズ文字及式ヲモ意味スルモノナリ

126. 約分 分數式ノ兩項ガ公約數ヲ有セザルトキハ之ヲ既約分數式ト稱ス

與ヘラレタル分數式ヲ既約分數式ニ化スルコヲ稱シテ之ヲ最モ簡單ナル形ニ直ストモイフ

與ヘラレタル分數式ヲ最モ簡單ナル形ニ化スルニハ其兩項ヲ兩項ノ最大公約數ニテ割ルベシ

例 (1) $\dfrac{16a^4b^2c}{20a^3b^3d}$ ヲ既約分數式ニ直サンニ,此分數式ノ分母分子ノ最大公約數ハ $4a^3b^2$ ナリ,乃分母分子ヲ $4a^3b^2$ デ割リテ $\dfrac{4ac}{5bd}$ ヲ得

注意 實際ハ分母分子ヲ任意ノ公約數デ割リ,更ニ他ノ任意ノ公約數デ割リ,次第ニ斯クノ如クニシテ遂ニ分母分子ガ公約數ヲ有セザルニ至リテ止ムヲ便利ナリトス,例ヘバ上ノ例ニ於テ16ト20トヲ4デ割リ即16ヲ消シテ其上ニ4ヲ書キ20ヲ消シテ其下ニ5ヲ書キ,a^4ヲ消シテ其上ニaヲ書クト同時ニa^3ヲ消シ,b^2ヲ唯消ス代リニb^3ヲ消シテ其下ニbヲ書キ,斯クシタル後尙ホ跡ニ殘ルモノヲ集メテ$\dfrac{4ac}{5bd}$ヲ得ルガ如シ

例 (2) $\dfrac{x^4-x^2}{x^4-1}=\dfrac{x^2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

例 (3) $\dfrac{x^2-4x+3}{4x^3-9x^2-15x+18}$ ヲ最モ簡單ナル形ニ直サンニ,最初ニ兩項ノ最大公約數 $x-3$ ヲ索メ,分母分子ヲ $x-3$ デ割リテ $\dfrac{x-1}{4x^2+3x-6}$ ヲ得

例　題

次ノ式ヲ最モ簡單ナル形ニ化セ

1. $\dfrac{3ax^2y}{6a^2xy}$　2. $\dfrac{a^2b^3c}{a^4b^4c^2}$　3. $\dfrac{2a^3b^2xy^4}{3ab^3x^3y^2}$　4. $\dfrac{a^2-ax}{a^2-x^2}$

5. $\dfrac{10a^2x}{5a^2x-15ay^2}$　6. $\dfrac{x^2-ax}{a^2-x^2}$　7. $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$　8. $\dfrac{x^4-1}{x^6-1}$

9. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$　10. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$　11. $\dfrac{1+3x+2x^2}{1+5x+6x^2}$

12. $\dfrac{x^2+3xy+2y^2}{x^2+5xy+6y^2}$　13. $\dfrac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$　14. $\dfrac{(a^3-x^3)(a+x)}{(a^3+x^3)(a-x)}$

15. $\dfrac{(a^3-b^3)(a^2-ab+b^2)}{(a^3+b^3)(a^2+ab+b^2)}$　16. $\dfrac{a^4-b^4}{(a^3-b^3)(a+b)}$　17. $\dfrac{(a^6-b^6)(a-b)}{(a^3-b^3)(a^4-b^4)}$

18. $\dfrac{x^{m-1}y^{2n}}{x^{2m}y^{n+1}}$　19. $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^6-a^6}$　20. $\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}$

第十五問題集

次ノ式ヲ既約分數式ニ直セ

1. $\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}$　2. $\dfrac{3x^2-8x+5}{x^3-4x^2+5x-2}$

3. $\dfrac{x^3+3x^2-20}{x^4-x^2-12}$　4. $\dfrac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3+5x^2+6x}$

5. $\dfrac{2x^3+ax^2+4a^2x-7a^3}{x^3-7ax^2+8a^2x-2a^3}$　6. $\dfrac{2x^3+3x^2+4x-3}{6x^3+x^2-1}$

7. $\dfrac{x^3-3x-2}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}$　8. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4-2x^3-x^2-2x+1}$

9. $\dfrac{x^4+2x^3-3x^2-7x-2}{2x^4+x^3-6x^2-5x-1}$　10. $\dfrac{x^4-20x^2-15x+4}{x^4+9x^3+19x^2-9x-20}$

127. 通分　多クノ分數式ヲ通分スルニハ總テノ分數式ノ分母ノ或ル公倍數ヲ採リ,之ヲ各ノ分數式ノ分母デ割リテ得タル商ヲ以テ其分子ニ掛ケタルモノヲ各分數式ノ分子トシ,今用ヰタル公倍數ヲ此レ等ノ分數式ノ公分母トナスベシ

多クノ分數式ヲ最小公分母ニ通分スルニハ上ノ法則ニ於テ或ル公倍數トアルヲ改メテ最小公倍數トスレバヨシ

與ヘラレタル分數式ノ分母ガ公約數ヲ有セザル時ハ此レ等ノ總テノ分母ヲ掛ケ合ハセタルモノガ其最小公倍數即最小公分母ナリ,此場合ニ於テ通分スルニハ各分數式ノ兩項ニ其他ノ諸ノ分數式ノ分母ノ連乘積ヲ掛クベシ

例 (1)　$\frac{a}{yz}$, $\frac{b}{zx}$, $\frac{c}{xy}$ ヲ最小公分母ニ通分セヨ

諸分母ノ最小公倍數ハ xyz ナリ,乃

$$\frac{a}{yz}=\frac{ax}{xyz},\qquad \frac{b}{zx}=\frac{by}{xyz},\qquad \frac{c}{xy}=\frac{cz}{xyz}.$$

例 (2)　$\frac{x}{a^2b(x+a)}$, $\frac{1}{ab^2(x-a)}$, $\frac{1+x}{ab(x^2-a^2)}$ ヲ通分セヨ

唯通分セヨトアルモ通例ハ最小公分母ニ通分スベシ

諸分母ノ最小公倍數ハ $a^2b^2(a^2-a^2)$ ニシテ之ヲ各分母デ割リタル商ハソレゾレニ次ノ如シ

$$b(x-a),\qquad a(x+a),\qquad ab$$

乃

$$\frac{x}{a^2b(x+a)}=\frac{x\times b(x-a)}{a^2b(x+a)\times b(x-a)}=\frac{bx(x-a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

$$\frac{1}{ab^2(x-a)}=\frac{1\times a(x+a)}{ab^2(x-a)\times a(x+a)}=\frac{a(x+a)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

$$\frac{1+x}{ab(x^2-a^2)}=\frac{(1+x)\times ab}{ab(x^2-a^2)\times ab}=\frac{ab(1+x)}{a^2b^2(x^2-a^2)}$$

例　題

次ノ分數式ヲ最小公分母ニ通分セヨ

1. $\frac{3}{4x}$, $\frac{4}{6x^2}$, $\frac{5}{12x^3}$

2. $\frac{1}{x+1}$, $\frac{3}{4x+4}$, $\frac{}{x^2-1}$

3. $\frac{a}{x-a}$, $\frac{x}{a-x}$, $\frac{a^2}{x^2-a^2}$, $\frac{ax}{a^2-x^2}$

4. $\frac{a}{a-b}$, $\frac{b}{a+b}$, $\frac{ab}{a^2-b^2}$, $\frac{b^2}{a^2+b^2}$

5. $\frac{1}{x-1}$, $\frac{x}{(x-1)^2}$, $\frac{3}{x+1}$, $\frac{4}{(x+1)^2}$, $\frac{5}{x^2-1}$

6. $\frac{a}{x-a}$, $\frac{a+x}{x^2+ax+a^2}$, $\frac{ax}{x^3-a^3}$

7. $\frac{1}{x^2-ax+a^2}$, $\frac{1}{x^2+ax+a^2}$, $\frac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$

8. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}$, $\frac{1}{x^2-(a+c)x+ac}$, $\frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$

128. 分數式ノ寄セ算引キ算

同一ノ分母ヲ有スル二ッノ分數式ノ和或ハ差ハソレゾレニ分子ノ和或ハ差ヲ分子トシ公分母ヲ分母トスル分數式ニ等シ例ヘバ$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

二ッノ分數式ガ同一ノ分母ヲ有セザルトキハ先ヅ之ヲ通分シテ後上ノ法則ヲ適用スベシ例ヘバ

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}=\frac{ay+bx}{xy}$$

全ク同樣ニシテ二ッヨリ多クノ分數式ヲ或ハ加ヘ或ハ引クヿヲ得例ヘバ

$$\frac{a}{yz}+\frac{b}{zx}-\frac{c}{xy}=\frac{ax}{xyz}+\frac{by}{xyz}-\frac{cz}{xyz}=\frac{ax+by-cz}{xyz}$$

多クノ分數式ヲ加號減號ヲ以テ聯結シタルモノヲ簡單ニセヨトハ之ヲ一ッノ分數式ニ纒メテ後既約分數式ニ化スベシトイフ意ナリ

例 (1)　$\frac{c}{a+b}$ ニ $\frac{c}{a-b}$ ヲ加ヘヨ

爰ニ最小公分母ハ $(a+b)(a-b)$ 即 a^2-b^2 ナリ而シテ

$$\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{c(a-b)+c(a+b)}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{ca-cb+ca+cb}{a^2-b^2}=\frac{2ac}{a^2-b^2}$$

例 (2)　$\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ ヨリ $\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}$ ヲ引ケ

爰ニ最小公分母ハ $(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)$ ナリ

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{(x+1)(4x^2+3x-6)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}=\frac{(4x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$

故ニ所要ノ差ハ

$$\frac{(x+1)(4x^2+3x-6)-(4x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$
$$=\frac{4x^3+7x^2-3x-6-(4x^3-7x^2+5x-2)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$
$$=\frac{14x^2-8x-4}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$

例 (3)　$x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}$ ヲ一ッノ分數式ニ纒メヨ

此式ハ

$$\frac{x+3}{1}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=\frac{(x+3)(x^2-3x+4)}{x^2-3x+4}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}$$
$$=\frac{x^3-5x+12-(x-2)}{x^2-3x+4}=\frac{x^3-6x+14}{x^2-3x+4}$$

例 (4)　$\frac{a}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2}$ ヲ簡單ニセヨ

爰ニ最小公分母ハ $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ 即 a^4-b^4 ナリ

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a(a-b)(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3}{a^4-b^4}$$
$$\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{ab(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^3b+ab^3}{a^4-b^4}$$
$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^4-a^2b^2}{a^4-b^4}$$

故ニ此式ハ

$$\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b+ab^3-(a^4-a^2b^2)}{a^4-b^4}=\frac{2a^2b^2}{a^4-b^4}$$

例 (5)　$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$ ヲ簡單ニセヨ

此場合ニ於テハ總テノ分數式ヲ通分シテ後加フルヨ

リハ或ル適當ナル順序ニ從ヒ順繰リニ加ヘ行クコト次ノ如クニスル方ガ簡便ナリ

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{(1+x)+(1-x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{2}{1-x^2}$$

$$\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2(1+x^2)+2(1-x^2)}{1-x^4}=\frac{4}{1-x^4}$$

$$\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{4(1+x^4)+4(1-x^4)}{1-x^8}=\frac{8}{1-x^8}$$

例 (6) $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ

此場合ニ於テ總テノ分數式ノ分母ヲ掛ケ合ハセタルモノヲ公分母トスルトキハ計算ハ非常ニ複雜トナルベシ,今此レ等ノ分數式ヲ吟味スルニ第二ノ分數式ノ分母ノ中ニアル因數 $b-a$ ト第一ノ分數式ノ分母ノ中ニアル因數 $a-b$ トハ唯其符號ヲ異ニスルニ過ギズ故ニ第二ノ分數式ハ $\frac{-b}{(b-c)(a-b)}$ ト書クコトヲ得ベク又斯クノ如クニ書キ直ス方ガ後ノ計算ノ爲メニ便利ナリ,次ニ第三ノ分數式ノ分母 $(c-a)(c-b)$ ハ $(a-c)(b-c)$ ニ等シ,故ニ上ノ式ハ次ノ如クニ書キ直スコトヲ得ベシ

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{-b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

此形ニ就テ觀察スルトキハ最小公分母ノ $(a-b)(a-c)(b-c)$ ナルヤ明カナリ即上ノ式ハ

$$\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{ab-ac-ba+bc+ca-cb}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$ ナリ

例 題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

1. $\frac{3a-5b}{4}+\frac{2a-b-c}{3}+\frac{a+b+c}{12}$ 2. $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$

3. $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}$ 4. $\frac{1}{x+y}+\frac{2y}{x^2-y^2}$ 5. $\frac{1+3x}{1-3x}+\frac{1-3x}{1+3x}$

6. $\frac{a}{x(a-x)}-\frac{x}{a(a-x)}$ 7. $\frac{a}{2a-2b}-\frac{b}{2b-2a}$

8. $\frac{a}{a-x}+\frac{3a}{a+x}-\frac{2ax}{a^2-x^2}$ 9. $\frac{a-b}{b}+\frac{2a}{a-b}-\frac{a^3+a^2b}{a^2b-b^3}$

10. $\frac{2b-a}{x-b}+\frac{b-2a}{x+b}+\frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$ 11. $\frac{3}{x}-\frac{5}{2x-1}-\frac{2x-7}{4x^2-1}$

12. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}-\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ 13. $\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-2}$

14. $\frac{4x}{y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}$ 15. $x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

16. $x-\frac{x^2}{x+1}+\frac{x}{x-1}$ 17. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{x}$

18. $\frac{3}{2x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2+8}$ 19. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

20. $\frac{1}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x^2-7x+12}$

第十六問題集

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

1. $\frac{2}{x+4}-\frac{x-3}{x^2-4x+16}+\frac{x^2}{x^3+64}$ 2. $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy+y^2}-\frac{y^2}{x^2+xy}$

3. $\frac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}$

4. $\frac{1}{(x-3)(x-4)}-\frac{2}{(x-2)(x-4)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$

5. $\frac{1-2x}{3(x^2-x+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{6(x+1)}$

6. $\dfrac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{xy}{x^3+y^3}$

7. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}+\dfrac{xy-2x^2}{x^3-y^3}$

8. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x^4+x^2+1}$

9. $\dfrac{a+b}{ax+by}+\dfrac{a-b}{ax-by}+\dfrac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}$

10. $\dfrac{2x}{x^4-x^2+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{x^2+x+1}$

11. $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}-\dfrac{3}{x^2-5x+4}$

12. $\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{4a}{x^2-a^2}-\dfrac{2a}{x^2+a^2}$

13. $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{2b}{a^2+b^2}-\dfrac{4b^3}{a^4+b^4}$

14. $\dfrac{1}{x-3a}-\dfrac{1}{x+3a}+\dfrac{3}{x+a}-\dfrac{3}{x-a}$

15. $\dfrac{c}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{c}{(x-b)(b-a)}$　　16. $\dfrac{a}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{b}{(x-b)(b-a)}$

17. $\dfrac{a^2}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{b^2}{(x-b)(b-a)}$　　18. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

19. $\dfrac{b}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{a}{(b-a)(b-c)}$

20. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

21. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-a)(b-c)}-\dfrac{1}{abc}$

22. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

23. $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{1}{x^2-(a+c)x+ac}+\dfrac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$

24. $\dfrac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{x+b}{x^2-(a+c)x+ac}+\dfrac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$

25. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

129. 分數式ノ掛ケ算割リ算

二ッ或ハ二ッヨリ多クノ分數式ノ積ハ分子同士掛ケ合ハセタルモノヲ分子トシ分母同士掛ケ合ハセタルモノヲ分母トスル分數式ニ等シ，例ヘバ $a\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{1}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\times b}{1\times c}=\dfrac{ab}{c}$，

$$\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{3a\times 8c}{4b\times 9a}=\frac{2c}{3b}$$

例 (1)　$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1$ ニ $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1$ ヲ掛ケヨ

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}-\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2-ab}{ab}$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\frac{(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)}{a^2b^2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{a^2b^2}=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2b^2}$$

或ハ又次ノ如クニシテ計算スルモ可ナリ

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1=\frac{a^2}{b^2}+2\frac{a}{b}\,\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-1$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}-1=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2b^2}$$

例 (2)　$\dfrac{1-a^2}{b+b^2}$，$\dfrac{1-b^2}{a+a^2}$，$b+\dfrac{ab}{1-a}$ ヲ掛ケ合ハセヨ

爰ニ　$b+\dfrac{ab}{1-a}=\dfrac{b(1-a)+ab}{1-a}=\dfrac{b}{1-a}$

$$\frac{1-a^2}{b+b^2}\times\frac{1-b^2}{a+a^2}\times\frac{b}{1-a}=\frac{(1-a^2)(1-b^2)b}{b(1+b)a(1+a)(1-a)}=\frac{1-b}{a}$$

一ッノ分數式ヲ他ノ分數式デ割ルニハ除數ニ就キ分母ト分子トヲ交換シテ得タル分數式ヲ以テ掛クレバヨシ

例ヘバ　$a\div\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$，　$\frac{x^2}{y^2}\div\frac{x}{y}=\frac{x^2}{y^2}\times\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$

例 (3)　$\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}$ ヲ $\frac{b^2}{a^2-b^2}$ デ割レ

$$\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\div\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{b(a-b)^2(a+b)}{(a+b)^2b^2}=\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}$$

例　題

次ノ式ニ於ケル掛ケ算割リ算ヲ行ヘ

1. $\frac{2a}{3b}\times\frac{6bc}{5a^2}$　**2.** $\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ac}\times\frac{c^2}{ab}$　**3.** $\frac{a^2b}{x^2y}\times\frac{b^2c}{y^2z}\times\frac{c^2a}{z^2x}$

4. $\frac{4a^2b}{5x^2y}\div\frac{2ab^2}{15xy^2}$　**5.** $\frac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4}\div\frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$　**6.** $\frac{1}{x^2-y^2}\div\frac{1}{x-y}$

7. $\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x^2-1}\times\frac{x-1}{(x+2)^2}$　**8.** $\frac{6(ab-b^2)}{a(a+b)^2}\div\frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$

9. $\frac{xa}{x+a}\times\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)$　**10.** $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)$

11. $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}\times\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$

12. $\frac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\times\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\times\frac{x+y}{x^3-y^3}$　**13.** $\frac{8x^3}{x^3-y^3}\div\frac{4x^2}{x^2+xy+y^2}$

14. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}\times\frac{x^2-c^2}{x^2-b^2}$　**15.** $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\times\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

16. $\frac{x^2+(a+c)x+ac}{x^2+(b+c)x+bc}\div\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$　**17.** $\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{c^2-a^2-b^2+2ab}\div\frac{a+b+c}{b+c-a}$

18. $\left(\frac{a}{bc}-\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}-\frac{2}{a}\right)\times\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)$

19. $\frac{(a-b)^2-c^2}{(a-c)^2-b^2}\times\frac{b^2-(c-a)^2}{c^2-(a-b)^2}$　**20.** $\frac{x+1}{(x+2)^2}\times\frac{x+2}{(x+3)^2}\div\frac{(x+1)^2}{x+3}$

130. 次ニ分數式ノ形ヲ有スル複雜ナル式ヲ簡單ニスル二三ノ例ヲ揭グベシ

例 (1)　$\dfrac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$ ヲ簡單ニセヨ

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

故ニ與ヘラレタル式ハ

$$\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

例 (2)　$\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\frac{x-1}{x}}}$ ヲ簡單ニセヨ

$$\frac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\frac{x-1}{x}}}=\frac{x}{x-\dfrac{x(x+2)}{x(x+2)-(x-1)}}=\frac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)-(x^2+2x)}=\frac{x(x^2+x+1)}{x^3-x}=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

或ハ第二番目ノ式ニ就キ分母分子ヲ x デ割リテ

$$\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{x(x+2)-(x-1)}}=\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{x^2+x+1}}=\frac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)-(x+2)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

例 (3)　$x=\frac{ab}{a+b}$ トシテ $\left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2-\left(\frac{a-x}{b-x}\right)$ ノ値ヲ算出セヨ

$$2x-a=\frac{2ab}{a+b}-\frac{a}{1}=\frac{2ab-a(a+b)}{a+b}=\frac{ab-a^2}{a+b}$$

$$2x-b=\frac{2ab}{a+b}-b=\frac{2ab-b(a+b)}{a+b}=\frac{ab-b^2}{a+b}$$

故ニ $$\frac{2x-a}{2x-b}=\frac{ab-a^2}{a+b}\div\frac{ab-b^2}{a+b}=\frac{ab-a^2}{ab-b^2}=\frac{a(b-a)}{b(a-b)}=-\frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2=\left(-\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$$

又 $$a-x=a-\frac{ab}{a+b}=\frac{a(a+b)-ab}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}$$

$$b-x=b-\frac{ab}{a+b}=\frac{b(a+b)-ab}{a+b}=\frac{b^2}{a+b}$$

故ニ $$\frac{a-x}{b-x}=\frac{a^2}{a+b}\div\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2}{b^2}$$

故ニ $\left(\dfrac{2x-a}{2x-b}\right)^2-\dfrac{a-x}{b-x}=\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{a^2}{b^2}=0$ ナリ

例題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

1. $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ 　2. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 　3. $\dfrac{\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{1-x}{x}}{\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{1-x}{x}}$

4. 一次方程式 $a(x-1)+b(x+2)=cx$ ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

5. $x=\dfrac{a^2}{a-b}$ トシテ $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}$ ノ値ヲ算出セヨ

6. $a=\dfrac{2}{3}$, $b=\dfrac{3}{2}$ ナルトキノ $\dfrac{a^2x+b^2y}{x+y}$ ノ値ヲ索ム

7. $x=\dfrac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$ トシテ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b-a}-\dfrac{a}{a+b}$ ヲ算出セヨ

8. $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$ ニ於テ $y=\dfrac{3x}{4}$ ト置キテ後之ヲ簡單ニセヨ

第十七問題集

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}+1$ ニ $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}$ ヲ掛ケヨ

2. $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{y}{b}-\dfrac{b}{y}$ ニ $\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}-\dfrac{y}{b}+\dfrac{b}{y}$ ヲ掛ケヨ

3. $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}\times\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$ ヲ算出セヨ

4. $\dfrac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3+y^3}$ ヲ $\dfrac{(a+x)^2}{x^2-xy+y^2}$ デ割レ

次ノ第一ノ式ヲ第二ノ式デ割レ

5. $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^3+y^3}$, $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2}$ 　6. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9}$, $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$

7. $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}$ 　8. $\dfrac{x^3}{a^3}+\dfrac{a^3}{x^3}-3\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{x^2}\right)+\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}$, $\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}$

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

9. $\dfrac{\dfrac{3x}{2}+\dfrac{x-1}{3}}{\dfrac{13}{6}(x+1)-\dfrac{x}{3}-2\dfrac{1}{2}}$ 　10. $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}$ 　11. $\dfrac{x-a}{x-\dfrac{(x-b)(x-c)}{x+a}}$

12. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2x-1}{x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}}$ 　13. $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$ 　14. $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$

15. $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}}$ 　16. $\dfrac{\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}}{\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}}$

17. $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$ 　18. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}}{\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$

19. $\left\{1-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1+2x^2}{1-x^2}\right\}\times\frac{x+1}{2x+1}$　20. $\dfrac{x-2-\frac{1}{x-2}}{x-2-\frac{4}{x-5}}\times\dfrac{x-4-\frac{4}{x-4}}{x-4-\frac{1}{x-4}}$

21. $\frac{6}{x^2+2x-8}-\frac{7}{x^2+x-12}+\frac{1}{x^2-5x+6}$

22. $\left\{\frac{1}{3x^2-14xy+15y^2}+\frac{2}{3x^2-2xy-5y^2}\right\}\div\left\{\frac{x+y}{x-3y}-\frac{x-y}{x+3y}\right\}$

23. $\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\frac{a+y}{y(y-z)(y-x)}+\frac{a+z}{z(z-x)(z-y)}$

次ノ式ノ値ヲ索ム

24. $\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}-\frac{4ab}{4b^2-x^2}$，但ニ　$x=\frac{ab}{a+b}$

25. $\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^3-\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$，但ニ　$x=\frac{a+b}{2}$

26. $\frac{x+y-1}{x-y+1}$，但ニ　$x=\frac{a+1}{ab+1}$，$y=\frac{ab+a}{ab+1}$

27. $\frac{a+b+2c}{a+b-2c}+\frac{a+b+2d}{a+b-2d}$，但ニ　$a+b=\frac{4cd}{c+d}$

初等代數學教科書上卷

答

第一問題集

1. 5	2. 7	3. 4	4. 11	5. 7	6. 21
7. 2	8. 4	9. 13	10. 5	11. 8	12. 3
13. 1	14. 6	15. 15	16. 27	17. 60	18. 24

第二問題集

1. 4,6　2. 3　3. 甲4圓,乙8圓,丙24圓　4. 28　5. 10日
6. 48,36　7. 甲425圓,乙1075圓,丙4500圓　8. 54,21
9. 甲35圓,乙50圓,丙70圓　10. 8,12　11. 女16人,男48人
12. 70,30　13. 36,9　14. 甲14圓,乙24圓,丙38圓　15. 8人
16. 甲24圓,乙60圓,丙192圓　17. 30日　18. 甲50圓,乙100圓,丙150圓,丁250圓　19. 今ヨリ2年後
20. 親ハ35歲,娘ハ7歲　21. 現今親ハ36年子ハ12年
22. 長男30歲,末子10歲　23. 9升1合　24. 甲24圓,乙36圓,丙56圓　25. 4　26. 10册　27. 一升五拾錢ノ酒2斗5升,一升參拾錢ノ酒7斗5升　28. 甲88圓,乙44圓　29. 子供5人密柑23個　30. 甲13圓,乙27圓
31. 72人　32. 甲26圓,乙16圓,丙32圓,丁27圓,戊42圓

第三問題集

1. 148　2. 64　3. $\frac{1}{9}$　4. $\frac{171}{200}$　5. $\frac{51}{80}$

6. $8\frac{3}{4}$, $3\frac{3}{4}$　7. 1間4尺，3間2尺　8. 不能或ハ今ヨリ二年前

9. 28圓20錢　10. 全ク不能ナリ

第四問題集

1. $4a^3+2a^2b-4ab^2+b^3-7b^2$　2. $6ab-9a^2x+7ax^2+ax^3$

3. a^2x+3a^3　4. $5x^2$　5. $10x^2+8y^2+12x+12$

6. $-5xy-5xz+2y^2+yz$　7. x^4　8. $3x^2+13xy-16xz-y^2-13yz$

9. $x^3+y^3+z^3-3xyz$　10. $2a^3-6a^2b+6ab^2-2b^3$

11. $a^4+7a^3+12a-1$　12. x^3+8x^2　13. $12x^2-6xy+7y^2+10x-8y$

14. $a+a^3$　15. $a-b+2c-d$　16. $3a-2c$　17. $7x+6$

18. $16-12x$　19. $4c$　20. $-8x^3-8x$

第五問題集

1. $x^5+151x-264$　2. $2x^5-18x^4+39x^3-25x^2+x+1$

3. $x^6+1008x+720$　4. $4x^6-5x^5+8x^4-10x^3-8x^2-5x-4$

5. $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$　6. x^3-9a^2x

7. $a^4+4a^3x+4a^2x^2-x^4$　8. $-10b^3-ab^2+26a^2b-7a^3$

9. $a^4+3a^2b^2+4b^4$　10. $a^3+3abc+b^3-c^3$

11. $12x^3-17x^2y+3xy^2+2y^3$　12. $x^6-x^4y^2+x^2y^4-y^6$

13. $6x^4+17x^3y+26x^2y^2+19xy^3+4y^4$

14. $x^3+y^3+3xy-2x-2y+1$　15. x^5-32y^5

16. $243x^5-y^5$　17. $x^2-4y^2+12yz-9z^2$

18. $a^3+a^2b+ab^2+b^3+2b^2x-(a-b)x^2$

19. $8a^3-18abc+27b^3+c^3$　20. $a^4+8a^2b^2x^2-16b^2x^2+16b^4x^4$

21. $a^4-2a^2b^2+b^4+4abc^2-c^4$　22. x^4-a^4

23. $x^3+x^2(a+b+c)+x(ab+ac+bc)+abc$

24. $x^8+a^4x^4+a^8$　25. $x^4-5a^2x^2+4a^4$

26. $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$　29. $8xz$

第六問題集

1. $x^3+3x^2y+9xy^2+27y^3$　2. $x^3-x^2y+xy^2$

3. $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$　4. $a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4$

5. x^2+xy+y^2　6. x^2-2x+2　7. x^2-3x-1

8. x^2-5x+6　9. x^2-x-19　10. $1-3x+2x^2-x^3$

11. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$　12. $a^2+2ab+3b^2$

13. $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$　14. x^4-3x^2+4x+1

15. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$　16. $x^8-x^6+2x^2-2$

17. $x-c$　18. ax^2+bx+c　19. $x^2-2xy+y^2$

20. $x^2+x(y+1)+y^2-y+1$　21. $7x+4z$　22. $2a+b+c$

23. $a+2b+c$　24. $a^2+a(2b-c)+b^2-bc+c^2$　25. $a(b+c)-bc$

26. $x^2-x(a+b)+ab$　27. $x+y-z$　28. $x+y+z$

第七問題集

1. -6 2. $\frac{3}{4}$ 3. -20 4. $\frac{1}{13}$ 5. $5\frac{3}{5}$ 6. -5 7. $3\frac{1}{7}$

8. -6 9. $-1\frac{3}{4}$ 10. $\frac{2}{3}$ 11. $-9\frac{5}{13}$ 12. $2\frac{1}{2}$ 13. 12

14. $2\frac{1}{2}$ 15. $-1\frac{1}{4}$ 16. -1 17. 2 18. -16 19. 1

20. 1 21. 40 22. 2 23. 11.64弱 24. $\frac{abc}{a+b}$ 25. $2a$ 26. a

27. ab 28. $-\frac{2ab}{a^2+b^2}$ 29. 0 30. $b-a$ 31. $-\frac{a^2+b^2}{2a}$

32. $\frac{1}{2}(a+b)$ 33. $\frac{bc}{a}$ 34. $-\frac{1}{2}(a+b)$ 35. $\frac{1}{3}(a+b+c)$

第八問題集

1. 7 2. 374 3. 7, 9, 11 4. 1里8町22間, 2里4町38間

5. 319 6. 1400飛 7. 154個 8. 3時間 9. 889圓

10. 500圓 11. 10時$54\frac{6}{11}$分 12. 12, 18, 5, 45 13. 12, 16

14. 760人 15. 4時間ト48分 16. 70里 17. 甲1石, 乙4斗

18. 27石7斗5升 19. 270圓 20. 8日 21. 300圓

22. 3時$32\frac{8}{11}$分 23. 甲300圓, 乙200圓 24. 11時40分 25. 160

第九問題集

1. 19, 2 2. 6, 12 3. 12, 12 4. 20, 20 5. 13, 5

6. 9, 7 7. 4, 9 8. 5, 7 9. $2\frac{1}{2}$, 1 10. 0.2, 0.2

11. 10, 8 12. 12, 3 13. 3, 2 14. -2, -2 15. $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$

16. $\frac{24}{23}$, $-\frac{41}{24}$ 17. $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$ 18. a, b 19. $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$

20. b, a 21. $\frac{ab^2c}{a^2+b^2}$, $\frac{a^2bc}{a^2+b^2}$ 22. $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{bc}{a+b}$ 23. $\frac{1}{a+b}$, 0

24. a, b 25. $a+b$, $a-b$ 26. $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ 27. $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+b}$

第十問題集

1. 2, 5, 7 2. 2, 1, 3 3. 3, 4, 6 4. 9, 11, 13

5. 5, -5, 5 6. 3, $\frac{1}{2}$, -1 7. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$

8. $b+c-a$, $c+a-b$, $a+b-c$ 9. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ 10. a, $2b$, $3c$

11. $\frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{1}{2}(a+b)$ 12. $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$

第十一問題集

1. 甲131圓, 乙161圓 2. 24, 60 3. 牛120圓, 馬50圓

4. 馬35貫, 人足15貫 5. 甲49歲, 乙21歲

6. 上卷240頁, 下卷360頁 7. 上45錢, 下25錢

8. 軍事1500圓, 市公債2200圓 9. 65圓, 15人

10. 間口10間, 奥行14間 11. 24 12. 59 13. 100英斤

14. 甲21, 乙11 15. 甲50日, 乙75日 16. 10分時間

17. 352碼 18. 甲450圓, 乙225圓, 丙237圓50錢, 丁87圓50錢

19. 五拾錢銀貨8, 貳拾錢銀貨12, 拾錢銀貨11

20. 甲150圓, 乙120圓, 丙90圓 21. 甲55錢, 乙45錢, 丙35錢

22. 50點 23. 貳拾圓金貨5, 拾圓金貨7, 五圓金貨11 24. 432

25. 東京靜岡間120哩, 靜岡濱松間47哩, 濱松名古屋間68哩

第十二問題集

1. $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$ 2. $x(x-3)(x+3)(x^2+9)$

3. $x(3x+2)(9x^2-6x+4)$ 4. $8xy(x^2+y^2)$ 5. $(a+b)(a+b-6c)$

6. $ab(a+2b)(2a+b)$ 7. $(x+1)^3(x-1)^3$ 8. $4ab(a^2+b^2)$

9. $4(a+c)(b+d)$ **10.** $5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2)$ **11.** $(x-y)(x+\frac{1}{4}y)$

12. $(x+my)(x+\frac{1}{m}y)$ **13.** $(9x+8)(8x-9)$

14. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ **15.** $(x-2y)(x+2y)(x-3y)(x+3y)$

16. $(ax+by)(bx+ay)$ **17.** $(ax-by)(bx+ay)$

18. $(x+y-5z)(x+y-2z)$ **19.** $(x-y)(x+y+4)$

20. $(x+1)(x-2)(x+2)$ **21.** $(x-1)(x+1)(2x-3)$

22. $(x+1)\{a(x^2-x+1)+b\}$ **23.** $(x+b)(x-a)(x+a)$

24. $(bx+a)(x^2+1)$ **25.** $(a-b)(a+b)^3$ **26.** $(a-b)(a+b)^3$

27. $(x+y)(ax+by)$ **28.** $(a-b)(c-d)(c+d)$

29. $(a-c)(a+c)(a^2+b^2+c^2)$ **30.** $(1-ax)(1+ax+bx)$

31. $(1-ax)(1+ax+bx^2)$ **32.** $(a-c+b-d)(a-c-b+d)$

33. $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$

34. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a-b-c+d)$

35. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$ **36.** $(x+1)(x+3)(x+5)(x-1)$

37. $(x^2+7x+26)(x^2+7x-8)=(x^2+7x+26)(x-1)(x+8)$

第十三問題集

1. x^2-6x-5 **2.** $x+3$ **3.** $x-4$ **4.** x^2-x+1 **5.** x^2-x+1

6. $3x+2$ **7.** x^2-x-1 **8.** x^2-2 **9.** $x-2$ **10.** x^2+1

11. x^2+3x+5 **12.** $7x^2+8x+1$ **13.** $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

14. x^2-3x+1 **15.** $x+1$ **16.** $x+7$ **17.** $x+3y$ **18.** $x+a$

19. $x-2a$ **20.** $x-y$

第十四問題集

1. $(x-1)(x-4)(x^2-5x+6)$ **2.** $(x-3)(x+5)(x^2+3x+2)$

3. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)$ **4.** $(x-1)(x-4)(x^3-x^2-4x+4)$

5. $(x-a)^2(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

6. $(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$

7. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ **8.** $24(a-b)(a^3+b^3)$

9. $105ab^2(a^2-b^2)$ **10.** x^6-1 **11.** x^8-1 **12.** $x^{12}-1$

13. $(x+1)(x+2)(x+3)$ **14.** $(x+1)(x+2)(x^2+2x-3)$

15. $(x^2+5x+10)(x^3-19x-30)$

第十五問題集

1. $\dfrac{x+2}{2x+1}$ **2.** $\dfrac{3x-5}{x^2-3x+2}$ **3.** $\dfrac{x^2+5x+10}{x^3+2x^2+3x+6}$ **4.** $\dfrac{x+1}{x}$

5. $\dfrac{2x^2+3ax+7a^2}{x^2-6ax+2a^2}$ **6.** $\dfrac{x^2+2x+3}{3x^2+2x+1}$ **7.** $\dfrac{x-2}{x^2+1}$ **8.** $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+1}$

9. $\dfrac{x+2}{2x+1}$ **10.** $\dfrac{x^2-5x+1}{x^2+4x-5}$

第十六問題集

1. $\dfrac{2x^2-9x+44}{x^3+64}$ **2.** 1 **3.** $\dfrac{x^2-2x}{x^3+1}$ **4.** 0 **5.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^3+1)}$

6. $\dfrac{2x^2}{x^3+y^3}$ **7.** $\dfrac{2y^2}{x^3-y^3}$ **8.** $\dfrac{2x^3+2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{2(x+1)}{x^2+x+1}$

9. $\dfrac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$ **10.** $\dfrac{4x^3}{x^8+x^4+1}$ **11.** 0 **12.** $\dfrac{4a^3}{x^4-a^4}$

13. $\dfrac{8b^7}{a^8-b^8}$ 14. $\dfrac{48a^3}{(x^2-a^2)(x^2-9a^2)}$ 15. $\dfrac{c}{(x-a)(x-b)}$

16. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ 17. $\dfrac{x(a+b)-ab}{(x-a)(x-b)}$ 18. $\dfrac{1}{(a-c)(c-b)}$

19. $\dfrac{c-a-b}{(c-a)(c-b)}$ 20. 0 21. $\dfrac{1}{c(c-a)(b-c)}$ 22. 1

23. $\dfrac{3x-a-b-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 24. $\dfrac{3x^2-a^2-b^2-c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ 25. $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

第十七問題集

1. $\dfrac{x^6-ax^5+a^5x-a^6}{a^3x^3}$ 2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{x^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{y^2}$ 3. 1

4. $\dfrac{a+x}{x+y}$ 5. $\dfrac{1}{x^2-y^2}$ 6. $\left(\dfrac{x-1}{x-3}\right)^3$ 7. $\dfrac{x-y}{y}$

8. $\dfrac{x^4-3x^3a+3a^3x+a^4}{a^2x^2}$ 9. 1 10. $\dfrac{x-4}{x-5}$ 11. $\dfrac{x^2-a^2}{x(a+b+c)-bc}$

12. $\dfrac{1}{x+1}$ 13. $\dfrac{1+x}{1+x^2}$ 14. $\dfrac{1+x^2}{1+x}$ 15. $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}$ 16. x

17. 1 18. $\dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$ 19. $\dfrac{1}{1-x}$ 20. 1 21. 0

22. $\dfrac{x+3y}{8xy(x+y)}$ 23. $\dfrac{a}{xyz}$ 24. 0 25. 0 26. a

27. 2

専務取締役 佐久間貞一
左ノ代表者
東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地
印刷發行者 大日本圖書株式會社
東京市小石川區諏訪町卅六番地
編纂者 藤澤利喜太郎

代數學教科書 上卷
定價金六拾五錢

明治三十一年三月十六日發行
明治三十一年三月十三日印刷

各府縣下　賣捌所

同　支社
大阪市東區北久太郎町四丁目十七番屋敷

大日本圖書株式會社
東京市京橋區銀座一丁目二十二番地

發行所