明治三十二年十二月十五日
文部省檢定濟
尋常中學校數學科用教科書

初等代數學教科書
下巻

東京帝國大學理科大學教授　理學博士
藤澤利喜太郎
編纂

第一版
東京　明治三十一年
大日本圖書株式會社

緒　　言

本書ヲ編纂スルニ際シテ蒐集セル材料ノ中,其尋常中學程度以上ニ渉ルノ故ヲ以テ,之ヲ本書中ニ收ムルヿ能ハザリシモノアリ,尋常中學ヲ卒業シタル後更ニ進ミテ代數學ヲ修メントスル人ノ爲メニ,余ハ他日此材料ニヨリ直チニ本書ニ接續スル續初等代數學教科書ト題スル一小册子ヲ公ニセンヿヲ期ス

本書ニ於テ余ハ事柄ノ平易ニシテ説明ノ叮嚀ナランヿヲ主眼トセルト同時ニ深ク代數學最近發達ノ眞相ニ參酌セリ,此點ニ於テハ歐洲諸國ニ於ケル初等代數學教授法將來ノ改良發達ヲ豫想シ得タルヿヲ信ズ,乃敢テ慧眼ナル數學者ノ鑑識ヲ仰ガントス

余ハ爰ニ本書ヲ印刷ニ附スルニ際シ校正ノ勞ヲ執ルノ傍種種有益ナル注意ヲ惠マレシ岡幸祐宮崎園次郎三浦畊次郎諸氏ノ厚意ヲ謝ス

本書中改メテ然ルベキ點ニ氣附カレタル人ハ之ヲ編者ニ示サレンヿ余ノ切望スルトコロナリ

明治三十一年九月東京ニ於テ　　編者識ス

初等代數學教科書下卷

目次

第十一編

分數式ヲ含ミタル方程式

131. 方程式ノ兩邊ガ未知數ニ就テ整式ナル場合ニ限リテ方程式ノ次數ナルモノアリ(第95節),乃一次方程式二次方程式トイヘバ,其方程式ノ中ニアル總テノ項ハ必ズヤ未知數ニ就テ整式ナラザルベカラズ,分母ノ中ニ未知數ヲ含ミタル分數式ナル項ヲ有スル方程式ニ就テハ方程式ノ次數ナルモノアルヿナシ

分數式ヲ含ミタル方程式トイフベキヲ畧シテ分數方程式,又此種類ノ方程式ト區別スルガ爲メニ總テノ項ガ整式ナル方程式ヲ整方程式ト稱スルヿアリ

同一ノ數 a ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛ケ或ハ兩邊ヲ割ルモ方程式ノ根ハ變ハルヿナシ,但 a ハ如何ナル數ニテモ可ナリ唯零ナルベカラズ(第96節)

方程式ヲ解カンガ爲メニ未知數ヲ含ミタル式ヲ以テ其兩邊ニ掛ケ或ハ兩邊ヲ割ルベカラズ,如何トナレバ,未知數ノ値ハ方程式ヲ解キタル上ニアラザレバ之ヲ知ル

ニ由ナク從テ此式ノ決シテ零トナルヿ無キヲ確ムルヿ能ハザレバナリ

例ヘバ或ル方程式ヲ解カンガ爲メニ其兩邊ニ $x-1$ ヲ掛クルヿヲ考フルニ,x ノ値ハ方程式ニヨリテ定マレルモノナレドモ方程式ヲ解キタル上ニアラザレバ之ヲ知ルニ由ナク,乃 x ガ 1 ニ等シク從テ $x-1$ ガ零トナルヿナキヲ知ル能ハズ,乃或ハ零トナルヿモアリ得ベキ $x-1$ ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛クルヿノ不都合ナルヤ明カナリ

尤モ x ハ 1 ニ等シカラズト假定シ,$x-1$ ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛ケテ得タル x ノ値ガ幸ニシテ 1 ニアラザリセバ嚮キニ $x-1$ ヲ掛ケタルヿハ正當ニシテ從テ此答ハ正シ,然レドモ萬一斯クシテ得タル x ノ値ガ 1 ナルトキハ解方ノ初メニ遡リ嚮キニ $x-1$ ヲ以テ掛ケタルヿガ不都合トナルガ故ニ此解方ハ全ク無効ニ歸スルモノトス

132. 本編ニ於テハ分數式ヲ含ミタル方程式ノ中,其解方ヲシテ一次方程式ノ解方ニ歸セシムルヿヲ得ルモノニ就キ,例ヲ以テ其解方ヲ示スベシ

例 (1) $\dfrac{x-2}{x-1}+1=\dfrac{1}{x-1}$ ナル方程式ヲ解ク

今此方程式ノ總テノ項ヲ左邊ヘ移ストキハ

$$\frac{x-2}{x-1}+1-\frac{1}{x-1}=0$$

ヲ得,次ニ左邊ノ式ヲ簡單ニスルトキハ

$$\frac{2x-4}{x-1}=0$$

ヲ得,偖テ分數ガ零トナルニハ其分子ガ零トナラザルベカラズ,乃分子ヲ零ニ等シト置キテ

$$2x-4=0 \qquad x=2$$

ヲ得,此レ即與ヘラレタル方程式ノ根ナリ

上ニ示スガ如ク,分數式ヲ含ミタル方程式ヲ解クニハ,方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メ,之ヲ一ッニ纏メテ得ベキ分數式ノ分子ヲ零ニ等シト置キ,斯クノ如クニシテ得ベキ總テノ項ガ整式ナル方程式ヲ解クベシ

上ノ例ニ於テハ總テノ項ヲ左邊ヘ移シ之ヲ一ッニ纏メテ得タル分數式ガ既約分數式ナリシガ故ニ,直チニ其分子ヲ零ニ等シト置キタレド,若シ箇樣ニシテ得タル分數式ガ既約分數式ナラザルトキハ,第126節ニヨリ先ヅ之ヲ既約分數ニ化シテ後其分子ヲ零ニ等シト置クベシ

此方法ハ分數方程式ヲ解ク唯一ノ完全ナル方法ナレドモ,方程式ヲ變形スル毎ニ一一分母ヲ書キ下ダサザルベカラズ,此不便ヲ避ケンガ爲メニ次ニ示スガ如キ解方ヲ試ルモ可ナリ

$x-1$ ハ零ニアラズト假定シ,$x-1$ ヲ以テ直チニ與ヘラレタル方程式ノ兩邊ニ掛ケテ

$$x-2+x-1=1$$

此一次方程式ヲ解キテ $x=2$ ヲ得,乃嚮キニ $x-1$ ハ零ニアラズトセル假定ハ正當ナリ,故ニ $x=2$ ヲ以テ答トス

前ノ解方ハ總テノ場合ニ通ジテ之ヲ適用スルヿヲ得ルトイフ意味ニ於テ完全ナル方法ナリ,然レドモ稍迂遠ナルノ嫌アリ,故ニ通例分數方程式ヲ解クニハ多ク後ノ解方ヲ用ヰルモノトス,爰ニ注意スベキハ,後ノ解方ニ於テハ解方ノ最後ニ至ラザレバ正否ノ判然セザルヿヲ冒頭ニ於テ假定セザルベカラズ從テ萬一假定ノ不都合ナルヿガ發見セラレタルトキハ此解方ハ全ク無効ニ歸シ更ニ前ノ方法ニヨリテ之ヲ解カザルベカラズトイフ一大缺點ノ存在スルヿナリ

凡テ分數式ヲ含ミタル方程式ノ解方ヲシテ他ノ總テノ項ガ整式ナル方程式ノ解方ニ歸セシムルヿヲ稱シテ分母ヲ拂フトイフ,乃此場合ニ於テ拂フトハ單ニ拂ヒ去ルノ意ニアラズ,預リ置ク若シクハ零ニアラズト假定セラレタル分母ヲ掛ケテ以テ拂ヒ去ルノ意ナリ

例(2) $\dfrac{x+3}{2+3x}+\dfrac{1-4x}{4x+1}=\dfrac{1-2x}{2+3x}$ ヲ解ク

x ハ $-\frac{2}{3}$ ニアラズ又 $-\frac{1}{4}$ ニアラズト假定シ $(2+3x)(4x+1)$ ヲ以テ方程式ノ各項ニ掛クレバ

$$(x+3)(4x+1)+(1-4x)(2+3x)=(1-2x)(4x+1)$$

括弧ヲ外ヅセバ

$$4x^2+13x+3+2-5x-12x^2=1+2x-8x^2$$

未知數ヲ含ム項ヲ左邊ニ集メ,未知數ヲ含マザル項ヲ右邊ニ集メテ後之ヲ簡約スレバ

$$6x=-4$$

乃 $x=-\frac{2}{3}$ ヲ得,是レ假定ニ反ス,故ニ此解方ハ無効ニ歸ス

更ニ元ノ方程式ニ就キ總テノ項ヲ左邊ヘ移シテ

$$\frac{x+3}{2+3x}+\frac{1-4x}{4x+1}-\frac{1-2x}{2+3x}=0$$

ヲ得,左邊ノ諸項ヲ一ッニ纒メテ

$$\frac{(x+3)(4x+1)+(1-4x)(2+3x)-(1-2x)(4x+1)}{(2+3x)(4x+1)}=0$$

ヲ得,分子ノ中ニアル括弧ヲ外ヅシ同類項ヲ約スレバ

$$\frac{6x+4}{(2+3x)(4x+1)}=0$$

左邊ノ分數式ヲ既約分數式ニ化シテ

$$\frac{2}{4x+1}=0$$

ヲ得,而シテ分子ハ決シテ零トナラザルガ故ニ此方程式ハ根ヲ有セズ

例題

次ノ方程式ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

1. $\dfrac{12}{x}+\dfrac{1}{12x}=\dfrac{29}{24}$
2. $\dfrac{42}{x-2}=\dfrac{35}{x-3}$
3. $\dfrac{128}{3x-4}=\dfrac{216}{5x-6}$
4. $\dfrac{45}{2x+3}=\dfrac{57}{4x-5}$
5. $\dfrac{1-3x}{2}+\dfrac{3x-1}{2}=\dfrac{2}{1-3x}$

6. $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x-5}{x-2}$ ナル方程式ハ根ヲ有スルヤ否ヤヲ吟味セヨ

7. $\frac{3+4x}{1+x}+\frac{3+2x}{1-x}=\frac{2x+1}{1+x}$ ヲ解ク

133. 分數式ヲ含ミタル方程式ヲ解クニ,或ル特殊ノ場合ニ於テハ,次ニ示スガ如キ簡便法ヲ用ヰルコトヲ得

例 (1) $\frac{x-5}{x-7}=\frac{x+3}{x+9}$ ヲ解ク

分母ヲ拂ヒ,即實際ハ左邊ノ分子ニ右邊ノ分母ヲ乘ジ右邊ノ分子ニ左邊ノ分母ヲ掛ケテ

$$(x-5)(x+9)=(x+3)(x-7)$$

括弧ヲ去リテ $x^2+4x-45=x^2-4x-21$

各邊ヨリ x^2 ヲ減ジ

$$4x-45=-4x-21,\quad 8x=24,\quad x=3$$

例 (2) $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}$ ヲ解ク

各項ニ就キ割リ算ヲ實行シ

$$2+\frac{1}{x+1}=1+\frac{1}{4x+4}+1+\frac{2}{3x+1}$$

左邊ヨリハ2,右邊ヨリハ1ヲ二ツ去リテ

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{4x+4}+\frac{2}{3x+1}$$

$4x+4=4(x+1)$ ナルコトニ注意シ, $4(x+1)(3x+1)$ ヲ掛ケテ

$$4(3x+1)=3x+1+8(x+1)$$

$$12x+4=3x+1+8x+8,\quad x=5$$

例 (3) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}$ ヲ解ク

各項ニ就キ割リ算ヲ實行シテ

$$1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{2}{x+7}=1-\frac{2}{x+3}+1-\frac{2}{x+5}$$

$$-\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+7}=-\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+5}$$

符號ヲ換ヘ且2ヲ以テ割リテ

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}$$

此儘分母ヲ拂ハントスルトキハ計算ハ非常ニ長クナルベキガ故ニ次ノ如キ工夫ヲ施スヲ得策トス

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7}$$

$$\frac{x+3-(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+7-(x+5)}{(x+5)(x+7)}$$

$$\frac{2}{(x+1)(x+3)}=\frac{2}{(x+5)(x+7)}$$

茲ニ至リテ2ヲ以テ割リテ後分母ヲ拂ヘバ

$$(x+5)(x+7)=(x+1)(x+3)$$

$$x^2+12x+35=x^2+4x+3,\quad 8x=-32,\quad x=-4$$

例 (4) $\frac{4x+5}{x+1}+\frac{x+5}{x+4}=\frac{2x+5}{x+2}-\frac{x^2-10}{x+3}+x$ ヲ解ク

$x^2-10=x^2-9-1=(x+3)(x-3)-1$ ナルコトニ留意シ,割リテ

$$4+\frac{1}{x+1}+1+\frac{1}{x+4}=2+\frac{1}{x+2}-\left(x-3-\frac{1}{x+3}\right)+x$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

前例ニ於ケルト同樣ノ工夫ヲ施シ

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4},\quad \frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+3)(x+4)}$$

$$(x+3)(x+4)=(x+1)(x+2),\quad x^2+7x+12=x^2+3x+2$$

$$4x=-10,\quad x=-\frac{5}{2}$$

例 (5) $\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x-c}$ ヲ解ケ

左邊ノ分數式ヲ一ツニ纏メテ

$$\frac{a(x-b)-b(x-a)}{(x-a)(x-b)}=\frac{a-b}{x-c}$$

$$\frac{(a-b)x}{(x-a)(x-b)}=\frac{a-b}{x-c}$$

$a-b$ デ割リテ $\quad \frac{x}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{x-c}$

分母ヲ拂ヒ $\quad x(x-c)=(x-a)(x-b)$

$$x^2-cx=x^2-(a+b)x+ab$$

$$(a+b-c)x=ab,\quad x=\frac{ab}{a+b-c}$$

例　題

次ノ方程式ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

1. $x+1-\frac{x^2+3}{x+2}=2$
2. $\frac{x-1}{x-2}=\frac{7x-21}{7x-26}$
3. $\frac{2x-6}{3x-8}=\frac{2x-5}{3x-7}$
4. $\frac{x+7}{x+3}=\frac{x+3}{x+1}$
5. $\frac{4x+17}{x+3}+\frac{3x-10}{x-4}=7$
6. $\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}$
7. $\frac{1}{x+7}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$
8. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+8}$
9. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$
10. $\frac{x-a}{x-b}=\left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2$

第十八問題集

次ノ方程式ヲ解ケ

1. $\frac{7x-4}{x-1}=\frac{7x-26}{x-3}$
2. $\frac{1}{1-x}-2\frac{x+2}{x-3}=\frac{5-2x}{x-1}$
3. $\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{4x-2}{3x-2}=\frac{1}{6}$
4. $\frac{1}{4x+6}+\frac{1}{6x+4}=\frac{2}{2x+3}$
5. $\frac{1}{3x+9}+\frac{2}{5x+1}=\frac{2}{x+3}$
6. $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$
7. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{8}{x+1}$
8. $\frac{1}{x-5}+\frac{3}{2x-6}=\frac{5}{(x-3)(x-5)}$
9. $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{2x-5}{2x-7}=1-\frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$
10. $5\frac{x-2}{x+2}-2\frac{x-3}{x+3}=3$
11. $\frac{3+x}{3-x}-\frac{2+x}{2-x}-\frac{1+x}{1-x}=1$
12. $\frac{(x-5)(x-1)}{(x-6)(x-10)}=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-9)(x-7)}$
13. $\frac{8x}{x^3-1}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+4}$
14. $\frac{12x}{x^3-9}+\frac{2}{x+3}=\frac{2}{x-3}$
15. $\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}=\frac{2x-1}{1+2x}$
16. $\frac{3x+5}{3x-1}+\frac{5}{1-9x^2}=\frac{8+3x}{1+3x}$
17. $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+1}$
18. $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$
19. $\frac{1}{(1-x)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}+\frac{2}{(3-x)(x-1)}=0$
20. $\frac{x-1}{(4x-1)^2}=\frac{4x-5}{(8x-3)^2}$
21. $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x$
22. $\frac{7}{x-9}-\frac{11}{x-4}=\frac{7}{x+2}-\frac{11}{x+3}$
23. $\frac{16x-13}{4x-3}+\frac{40x-43}{8x-9}=\frac{32x-30}{8x-7}+\frac{20x-24}{4x-5}$
24. $\frac{x^2-a^2}{bx}-\frac{a-x}{b}=\frac{2x}{b}-\frac{a}{x}$
25. $\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-a}=\frac{2}{x}$

26. $\dfrac{x+2a+2b}{x-a-b}=\dfrac{(x+2a)(x+2b)}{(x-a)(x-b)}$ 27. $\dfrac{x-a}{x-a-b}=\dfrac{x-a-b}{x-b}$

28. $\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-a+c}=\dfrac{1}{x-b-c}-\dfrac{1}{x-b}$ 29. $\dfrac{mx-a-b}{nx-c-d}=\dfrac{mx-a-c}{nx-b-d}$

30. $\dfrac{a-b}{(x-a)(x-b)}-\dfrac{b-c}{(x-b)(x-c)}-\dfrac{c-a}{(x-c)(x-a)}=0$

31. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-a-b}$ 32. $\dfrac{a+c}{x+2b}+\dfrac{b+c}{x+2a}=\dfrac{a+b+2c}{x+a+b}$

33. 分母ハ分子ノ二倍ヨリハ3ダケ大ナル分數アリ,分母分子ノ各ヨリ1ヲ減ジテ得ベキ分數ハ,分子ニ1ヲ加ヘ分母ニ5ヲ加ヘテ得ベキ分數ニ等シトイフ,仍テ元ノ分數ヲ索ム

34. 急行列車ノ速度ハ通常列車ノ速度ヨリハ一時間每ニ15哩多シトス,今甲地ヨリ乙地ニ至ル300哩ハ通常列車ニテ乙地ヨリ丙地ニ至ル360哩ハ急行列車ニテ行クト同シ時間ヲ以テ,始終速度ノ變ハラザル列車ニテ甲地ヨリ丙地ニ達スルニハ此列車ノ速度ヲ一時間每ニ通常列車ヨリハ6哩多クセザルベカラズトイフ,通常列車ノ速度幾何ナルカ

35. 上中下三種ノ米アリ,一圓ニ付下米ハ中米ヨリハ一升五合安ク,中米ハ上米ヨリハ六合安ク,上米九升下米五升ノ割リニ混合スルトキハ中米ト同價トナルトイフ,下米ノ相場如何

134. 次ニ分數式ヲ含ミタル聯立方程式ノ例ヲ掲グ

例(1) $\dfrac{5}{x+2y}=\dfrac{7}{2x+y}$, $\dfrac{7}{3x-2}=\dfrac{5}{6-y}$ ヲ解ク

分母ヲ拂ヘバ

$$10x+5y=7x+14y\ ,\quad 42-7y=15x-10$$

$$3x=9y\ ,\ x=3y \qquad 52=15x+7y$$

後ノ方程式ニ於テxノ代リニ$3y$ヲ置クトキハ

$$52=45y+7y\ ,\ 52=52y\ ,\ y=1$$

故ニ $x=3$, 乃 $x=3$, $y=1$ ヲ以テ答トス

例(2) 次ノ聯立方程式ヨリシテxトyトヲa, b, c, d, m, nニテ表ハセ

$$\frac{xy}{ay+bx}=\frac{1}{m}\ ,\quad \frac{xy}{cy+dx}=\frac{1}{n}$$

爰ニ注意スベキハxトyトハ共ニ零ナルベカラザルコトナリ,偖テ分母ヲ拂ヘバ

$$mxy=ay+bx \qquad nxy=cy+dx$$

$$mxy-bx=ay \qquad nxy-dx=cy$$

$$(my-b)x=ay \qquad (ny-d)x=cy$$

$$x=\frac{ay}{my-b} \qquad x=\frac{cy}{ny-d}$$

爰ニ得タルxノ二ツノ値ヲ相等シト置キテ

$$\frac{ay}{my-b}=\frac{cy}{ny-d}$$

ソヲ以テ割リテ後分母ヲ拂ヘバ

$$any-ad=cmy-bc$$

コレヨリシテ

$$y=\frac{ad-bc}{an-cm}$$

ヲ得,此 y ノ値ヲ嚮キニ得タル x ノ値ノ中ニ入レテ

$$x=\frac{a\dfrac{ad-bc}{an-cm}}{m\dfrac{ad-bc}{an-cm}-b}=\frac{a\dfrac{ad-bc}{an-cm}}{\dfrac{adm-bcm-abn+bcm}{an-cm}}$$

$$x=\frac{a(ad-bc)}{adm-abn}=\frac{ad-bc}{dm-bn}$$

即所要ノ x ト y トノ値ハ次ノ如シ

$$x=\frac{ad-bc}{dm-bn}, \quad y=\frac{ad-bc}{an-cm}$$

此類ノ聯立方程式ハ次ノ如キ工夫ヲ用ヰルトキハ一層簡單ニ之ヲ解クコヲ得ベシ

與ヘラレタル方程式ニ就キ各邊ノ逆數ヲ相等シト置キテ

$$\frac{ay+bx}{xy}=m, \quad \frac{cy+dx}{xy}=n$$

即 $$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m, \quad \frac{c}{x}+\frac{d}{y}=n$$

今 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ヲ未知數ト看做シ, $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$ ト置クバ

$$au+bv=m \ , \quad cu+dv=n$$

此方程式ハ第102節ノ方程式ニ同ジク,唯文字ヲ異ニスルニ過ギズ,乃同節ノ公式ニヨリ

$$u=\frac{1}{x}=\frac{dm-bn}{ad-bc} \ , \quad v=\frac{1}{y}=\frac{an-cm}{ad-bc}$$

故ニ $$x=\frac{ad-bc}{dm-bn} \ , \quad y=\frac{ad-bc}{an-cm}$$

例題

次ノ聯立方程式ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

1. $\frac{1}{3x+1}=\frac{2}{5y+4}$, $\frac{1}{4x-3}=\frac{2}{7y-6}$

2. $\frac{x+3y}{x-y}=8$, $\frac{7x-13}{3y-5}=4$

3. $\frac{3x+1}{4-2y}=\frac{4}{3}$, $x+y=1$

4. $\frac{xy}{y+2x}=\frac{1}{10}$, $\frac{xy}{4y+3x}=\frac{1}{20}$

5. $\frac{xy}{y+2x}=\frac{1}{4}$, $\frac{xy}{3y-2x}=\frac{1}{4}$

135. 例(1) 分數アリ,分母分子ノ各ヨリ1ヲ減ズルトキハ $\frac{1}{5}$ トナリ,分母分子ノ各ニ4ヲ加フルトキハ $\frac{2}{5}$ トナルトイフ,此分數ヲ索ム

分子ヲ x,分母ヲ y トスレバ,此分數ハ $\frac{x}{y}$ ナリ,乃題意ニヨリ

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5},\quad \frac{x+4}{y+4}=\frac{2}{5}$$

第一ノ方程式ニ $y-1$ ヲ掛ケ第二ノ方程式ニ $y+4$ ヲ掛クレバ

$$x-1=\frac{y-1}{5},\quad x=\frac{y-1}{5}+1$$

$$x+4=\frac{2y+8}{5},\quad x=\frac{2y+8}{5}-4$$

此 x ノ二ツノ値ヲ相等シト置クバ

$$\frac{2y+8}{5}-4=\frac{y-1}{5}+1$$

此方程式ヲ解キテ $y=16$ ヲ得,仍テ $x=4$,故ニ所要ノ分數 $\frac{x}{y}$ ハ $\frac{4}{16}$ ナリ

注意 上ノ例ニ於テハ x ト y トノ値トシテ整數ヲ得タリ,若シ此種類ノ問題ニ於テ方程式ヲ解キテ x ト y トノ値トシテ分數ヲ得タルトキハ問題ハ不能ナリ

例(2) 規定ノ速度ヲ以テ進行セル列車一時間ヲ經タルトキ線路ノ故障ニ遭ヒ,二十四分間停車セル後規定ノ速度ノ五分ノ六ニ當ル速度ヲ以テ進行ヲ續ケ,定刻ニ後ルルコト十五分ニシテ目的地ニ達セリ若シ線路ノ故障ガ五哩ダケ目的地ノ方ニ近キ所ニテ起リタランニハ,到着時間ハ更ニ二分ダケ後レタルナラントイフ,規定ノ速度及出發地ヨリ到着地ニ到ル距離幾何ナルカ

規定ノ速度ヲ以テ列車ガ一時間ニ行ク哩數ヲ $5x$ トシ,出發地ヨリ到着地ニ至ル哩數ヲ y トス,然ルトキハ $y-5x$ ハ停車後ニ進行セザルベカラザル哩數ヲ表ハス,偖テ此距離ヲ行クニ,規定ノ速度ナレバ $\frac{y-5x}{5x}$ 時間ヲ要シ,增加速度ナレバ $\frac{y-5x}{6x}$ 時間ヲ要ス,然ルニ列車ハ二十四分間停車セルニ拘ハラズ定刻ニ後ルルコト僅カニ十五分ニシテ目的地ニ達セルガ故ニ,此距離ヲ行クニ,規定ノ速度ヲ以テスルト增加速度ヲ以テスルトノ時間ノ差ハ九分即 $\frac{9}{60}$ 時間ナリ,故ニ

$$\frac{y-5x}{6x}=\frac{y-5x}{5x}-\frac{9}{60}\cdots\cdots\cdots(1)$$

次ニ線路ノ故障ガ五哩先キニテ起リタランニハ,停車後ニ列車ガ行カザルベカラザル哩數ハ $y-5x-5$ ナルベシ,乃前ノ方程式ヲ得タルト同一ノ理ニヨリ

$$\frac{y-5x-5}{6x}=\frac{y-5x-5}{5x}-\frac{7}{60}\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリ(2)ヲ減ジテ

$$\frac{5}{6x}=\frac{5}{5x}-\frac{2}{60}$$

故ニ　　$50=60-2x\ ,\ \ 2x=10\ ,\ \ x=5$

此 x ノ値ヲ(1)ニ置キ換ヘ,斯クシテ得ベキ方程式ヲ解キテ $y=47\frac{1}{2}$ ヲ得,乃規定ノ速度ハ一時間毎ニ25哩,出發地ヨリ到着地ニ至ル距離ハ $47\frac{1}{2}$ 哩ナリ

例(3) 三十里ノ河筋ヲ二十四時間ニ往復セル舩アリ,三里流レヲ遡ル時間ハ五里流レヲ下ル時間ニ等シトイフ,往復ノ時間各別ニ幾何ナルカ

靜水ニ於テ一時間毎ニ x 里ヲ行ク舩ガ一時間毎ニ y 里流ルル流水上ニアルトキハ,其速度ハ一時間毎ニ

流レヲ下ルトキハ $(x+y)$ 里

流レヲ遡ルトキハ $(x-y)$ 里

ナルベシ,乃題意ニヨリ

$$\frac{30}{x+y}+\frac{30}{x-y}=24 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5}{x+y}=\frac{3}{x-y} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此方程式ハ,宛モ $\frac{1}{x+y}$ ト $\frac{1}{x-y}$ トガ未知數ナルガ如クニ考ヘテ,之ヲ解クヲ捷徑トス,乃(2)ニ6ヲ掛ケテ

$$\frac{30}{x+y}=\frac{18}{x-y}$$

此方程式ト(1)トヨリシテ

$$\frac{18}{x-y}+\frac{30}{x-y}=24,\ \frac{48}{x-y}=24,\ x-y=2$$

乃(2)ヨリシテ $x+y=\frac{10}{3}$ ヲ得,次ニ $x+y=\frac{10}{3}$, $x-y=2$ ナル聯立方程式ヲ解キテ x ト y トノ値ヲ索ムルヿヲ得ベシ,然

レドモ此問題ニ於テハ x ト y トノ値ハ必ズシモ之ヲ知ルヲ要セズ, $x+y$ ト $x-y$ トノ値ヲ知レバ足レリ,乃30ヲ2デ割リテ流レヲ遡ルトキノ時間15時間, 30ヲ $\frac{10}{3}$ デ割リテ流レヲ下ルトキノ時間9時間ヲ得テ答トス

第十九問題集

次ノ聯立方程式ヲ解ク

1. $\frac{7-2x}{5-3y}=\frac{3}{2},\quad y-x=4$

2. $\frac{x+3y+13}{4x+5y-25}=3,\quad \frac{8x+y+6}{5x+3y-23}=5$

3. $\frac{x-4}{y+4}=\frac{x-3}{y+7},\quad \frac{x+2}{y-2}=\frac{x+5}{y-1}$

4. $x-4y=7,\quad \frac{x}{3y}+\frac{11}{10}=\frac{4x-5y}{5y}$

5. $\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-1}{y}=\frac{6}{y},\quad x-y=1$

6. $4x+y=11,\quad \frac{y}{5x}=\frac{7x-y}{3x}-\frac{23}{15}$

7. $\frac{x+\frac{1}{2}y-3}{x-5}+7=0,\quad \frac{3y-10(x-1)}{6}+\frac{x-y}{4}+1=0$

8. $\frac{13}{x+2y+3}+\frac{3}{4x-5y+6}=0,\quad \frac{3}{6x-5y+4}=\frac{19}{3x+2y+1}$

9. $\frac{x+y}{y-x}=\frac{15}{8},\quad 9x-\frac{3y+\overset{44}{\cancel{4}}}{7}=100$

10. $x-\frac{2y-x}{23-x}=20-\frac{59-2x}{2}$, $y+\frac{y-3}{x-18}=\frac{3y+17}{3}$

11. $\frac{1}{x}=\frac{5y}{3y-4x}$, $\frac{1}{y}=\frac{6x}{4y-5x}$

12. $\frac{xy}{ay+bx}=\frac{b}{a}$, $\frac{xy}{ax+by}=\frac{a}{b}$

13.* 分數アリ,分子ニ2ヲ加フルヰハ$\frac{2}{3}$トナリ,分母ニ4ヲ加フルヰハ$\frac{4}{7}$トナルトイフ,此分數ヲ索ム

14. 分數アリ,分子ニ1ヲ加ヘ分母ヨリ1ヲ減ズルヰハ1トナリ,分子ニ分母ヲ加ヘ分母ヨリ分子ヲ引クヰハ4トナルトイフ,此分數ヲ索ム

15. 2及5ヲ分子トスル二個ノ分數ノ和ハ$1\frac{1}{2}$ニシテ,分母ヲ交換スルヰハ,其和ハ2トナルトイフ,此二個ノ分數ヲ索ム

16. $\frac{2}{3}$ニ等シキ分數アリ,分母分子ノ各ニ或ル數ヲ加フルヰハ$\frac{8}{11}$トナリ,分母分子ノ各ヨリ同ジ數ヲ引キ更ニ1ヲ減ズルヰハ$\frac{5}{9}$トナルトイフ,此分數ヲ索ム

17. 二個ノ有効數字ヨリ成ル數アリ,十位ノ數字ハ一位ノ數字ヨリ大ナリ,此數ヲ數字ノ和ニテ割リタル商ハ7ニシテ,數字ヲ交換シテ得ベキ數ヨリ12ヲ減ジタルモノヲ數字ノ差ニテ割リタル商ハ9ナリトイフ,仍テ此數ヲ索ム

18. 二個ノ有効數字ヨリ成ル或ル數ヲ數字ノ和ニテ割ルヰハ整數商6剩餘3ヲ得,又數字ヲ交換シテ得ベキ數ヲ數字ノ和ニテ割ルヰハ整數商4剩餘9ヲ得ベシトイフ,或ル數トハ如何ナル數ナリヤ

19. 二個ノ有効數字ヨリナル或ル數ヲ數字ノ和ヨリ2ヲ減ジタルモノニテ割ルヰハ整數商5剩餘1ヲ得,數字ヲ交換シテ得ベキ數ヲ數字ノ和ニ2ヲ加ヘタルモノニテ割ルヰハ整數商5剩餘8ヲ得ベシトイフ,或ル數トハ如何ナルカ

20. 或ル川ニ沿ヒ十二里ヲ隔テ甲乙ノ二村アリ,或ル人甲村ヲ發シ半分道ハ徒歩シ殘リ半分道ハ舟ニテ川ヲ遡リ七時間ヲ經テ乙村ニ達セリ,歸路半分道ハ以前ノ速度ノ四分ノ三ノ速度ニテ徒歩シ,後ノ半分道ハ以前ノ速度ノ二倍ノ速度ヲ以テ川ヲ下リ六時間ニテ甲村ニ達セリトイフ,徒歩及舟行ノ速度如何

21. 規定ノ速度ヲ以テ一時間進行セル汽車線路ノ故障ニ遇ヒ十五分間停車セル後以前ノ速度ノ四分ノ三ノ速度ヲ以テ進行ヲ續ケ定刻ニ後ルルヿ二十四

---

*本問題以下ノ問題ヲ解クニハ,必ズシモ未知數二ツノ聯立方程式ヲ以テスルヲ要セズ,便宜未知數一ツノ方程式ニテ解クモ妨ゲナシ

分ニシテ目的地ニ達セリ,若シ線路ノ故障ガ五哩先キニテ起リタランニハ三分ダケ早ク到着シタルナラントイフ,規定ノ速度及出發地ト到着地トノ間ノ距離幾何ナルカ

22. 120哩ヲ行クニ急行列車ガ要スル時間ト通常列車ガ要スル時間トノ比ハ9ノ14ニ於ケルガ如ク,途中停車スルガ爲メニ,通常列車ハ停車セズニ20哩ヲ行クダケノ時間ヲ損シ,急行列車ハ通常列車ノ半分ダケノ時間ヲ損ス,且急行列車ハ通常列車ヨリハ一時間每ニ15哩多ク行クトイフ,兩列車ノ速度各如何

23. 長サ92呎ノ列車ト長サ84呎ノ列車トガ各一定ノ速度ヲ以テ複線ヲ往復スルニ,反對ノ方向ニ行クトキハ$1\frac{1}{2}$秒間ニ馳セ違ヒ,同方向ニ行クトキハ一方ノ列車ハ他ノ列車ヲ6秒間ニ通リ越ストイフ,仍テ問フ,兩列車ノ速度各一時間每ニ幾哩ナルカ,但一哩ハ5280呎ナリ

24. 甲地ヨリ乙地ニ至ル鐵道線路アリ,荷物列車ハ正午十二時ニ,旅客列車ハ午後一時ニ甲地ヲ發セリ,荷物列車ハ全距離ノ三分ノ二ヲ行キタルトキ汽關車ニ些少ノ故障ヲ生ジタルガ爲メニ其後ハ以前ノ四分ノ三ノ速度ヲ以テ進行セリ,斯クテ午後二時四十分

乙地ヲ距ル十哩ノ所ニテ旅客列車ハ荷物列車ニ追及セリ,且旅客列車ノ速度ハ荷物列車ノ後ノ速度ノ二倍ナリトイフ,甲地ヨリ乙地ニ至ル距離及旅客列車ノ速度如何

25. 一時間十二「キロメートル」ノ割ニ流レヲ漕ギ下ルヿヲ得ル端艇乘組ノ水夫ガ流レヲ遡ルニハ流レヲ下ルトキノ二倍ノ時間ヲ要ストイフ,流レノ速度如何

26. 一時間二里ノ割ニ流ルル川アリ,或ル水夫一時間ト四十分ノ間流レヲ漕ギ下リ,引キ返ヘシテ出發點ヨリ一里半手前ノ處ニ達スルニ四時間ト十五分ヲ費セリトイフ,漕ギ下リシ距離及此水夫ガ靜水ニ於テ舟ヲ漕ギ行ル速度幾何ナルカ

27. 或ル人流レヲ十里漕ギ下リテ後直チニ引キ返ヘシ流レヲ漕ギ上リテ出發點ニ達スルニ十時間ヲ要セリ,又三里流レヲ下ル時間ヲ以テ二里流レヲ遡ルヿヲ得ルトイフ,此人ガ十里流レヲ漕ギ下ルニ要セシ時間及流レノ速度幾何ナルカ

第十二編 二次方程式

136. 唯一ッノ未知數xヲ含ム方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メテ得タル式ガxニ就テ二次ノ整式ナル𪜈ハ此方程式ヲ**二次方程式**ト稱ス,例ヘバ $3x^2+2x+5=0$, $x^2=25$, $ax^2+bx+c=0$ ハ何レモ二次方程式ナリ

方程式ノ兩邊ガxニ就テ二次ノ整式ナル𪜈ハ,此方程式ハ一般ニ二次方程式ナリ,然レドモ總テノ項ヲ一邊ニ集メ同類項ヲ約スル𪜈ハ,x^2ノ係數ガ零トナリ,從テ此方程式ハ見懸ケ上x^2ヲ含ムモ其實x^2ヲ含マザルヿモアルベキガ故ニ,方程式ノ兩邊ガxニ就テ二次ノ整式ナレバトテ,一概ニ二次方程式ナリト斷言スルヿ能ハザルヤ明カナリ,其例ノ如キハ既ニ載セテ第六編ニアリ

未知數xヲx^2ナル形チニ於テノミ含ム方程式,例ヘバ$x^2-4=0$, $x^2=5$ノ如キモノヲ純二次方程式,之ニ對シ,x^2ノ外ニxヲモ含ム方程式ヲ雜二次方程式ト稱スルヿアリ

凡テ純二次方程式ハ之ヲ

$$x^2=a$$

ナル形チニ歸セシムルヿヲ得,爰ニaハ既知數ヲ表ハス

モノトス,偖テ此方程式ハxヲ自乘シタルモノハaニ等シトイフヿヲ表ハスモノナルガ故ニ,此方程式ヲ解クトイフヿハ,自乘スレバaトナル數即次ニ論ズルaノ平方根ヲ索ムルヿニ歸スルモノナリ

平方根

137. 一般ノ根ニ就テハ後ニ論ズベシ,此處ニテハ唯二次方程式ヲ解クニ必要ナル限リ平方根ヲ論ズベシ

先ヅ本節ヨリ第140節ノ終リマデハ未ダ負數ヲ知ラザルモノトシテ,即數トイヘバ正ノ整數分數ヲ意味スルモノトシテ,平方根ヲ論ズベシ

或ル數ノ平方ガ與ヘラレタル數ニ等シキ𪜈ハ,此或ル數ヲ與ヘラレタル數ノ**平方根**ト稱ス,例ヘバ3ノ平方ハ9ニシテ9ノ平方根ハ3ナリ

或ル數ノ平方根ヲ索ムルコトヲ,此數ヲ平方ニ開クトイフ

或ル數aノ平方根ヲ書キ表ハスニハ通例符號$\sqrt{}$ヲaニ冠ラセルモノトス,即$\sqrt{a}$ト書クモノトス,然レドモ或ル𪜈ハ此符號ノ横線ノ部分ヲ省キ$\surd$ナル符號ヲaノ左ニ置キテ$\surd a$ト書クヿアリ,此書キ方ニ於テ或ル式ノ平方根ヲ書キ表ハスニハ此式ヲ括弧ニテ括リ其左ニ符號

√ヲ置クモノトス,例ヘバ $a+b$ ノ平方根ヲ $\sqrt{(a+b)}$, $3abc$ ノ平方根ヲ $\sqrt{(3abc)}$ ト書クガ如シ,爰ニ注意スベキハ括弧ノ代リニ括線ヲ用ヰルトキハ此書キ方ト前ノ書キ方トガ相一致スルヿナリ

138. 既ニ算術ニ於テ平方根ヲ索ムル幾多ノ例ニ遭遇セル讀者ハ所謂開キ切レヌ場合ノアルヿヲ知ルナランヽ,唯一例ヲ擧ゲンニ,7ノ平方根ハ整數ニ等シキヿ能ハズ,如何トナレバ2ノ平方ハ4ニシテ7ヨリハ小ニ,3ノ平方ハ9ニシテ7ヨリハ大ナレバナリ,次ニ $\sqrt{7}$ ハ分數ニ等シキヿナキヤ否ヤヲ確ムル爲メニ,$\sqrt{7}$ ハ分數ニ等シト假定シ,此分數ヲ既約分數ニ化シタルモノヲ表ハスニ $\frac{m}{n}$ ヲ以テスベシ,爰ニ m ト n トハ互ニ素ナル即公約數ヲ有セザル整數ニシテ且 n ハ1ニアラズトス,然ルトキハ $\sqrt{7}=\frac{m}{n}$ 從テ $7=\frac{m^2}{n^2}$ ナラザルベカラズ,而シテ分母ガ1ニアラザル既約分數ヲ自乘シタル積ハ矢張リ分母ガ1ニアラザル既約分數ニシテ決シテ整數ニ等シキヿ能ハザルハ幾多ノ例ニ就キテ之ヲ驗スヿヲ得ベク尙ホ整數論*ノ方法ニヨリテ嚴密ニ之ヲ證明スルヿヲ得ベシ,故ニ $\sqrt{7}$ ノ如キハ

*整數論ハ數學中ニ於テ最モ高尙ナル一學科ナリ,然レトモ整數論中此證明ニ必要ナル二三ノ定理ノ如キハ之ヲ證明スル必ズシモ難カラズ,唯初等數學ニ於テ整數論ニ立チ入ルノ不可ナルハ世ニ定論アリ,且言ノ長キニ失スルノ恐レアルガ故ニ此證明ヲ畧セリ

整數ニモアラザレバ亦分數ニモアラザルナリ

丁度或ル整數又ハ分數ノ平方ニ等シキ數ヲ一般ニ完全ナル平方數ト稱シ,整數1, 2, 3, 4, 5,……… ヲソレゾレニ自乘シテ得ベキ1, 4, 9, 16, 25,………… ヲ平方整數ト稱ス

或ル數ノ平方ハ恒ニ之ヲ索ムルヿヲ得ベシ,整數分數ノ平方ハ矢張リ整數分數ナリ,之ニ反シ,或ル數ヲ平方ニ開クヿヲ得ルハ,或ル數ガ整數ナレバ平方整數,分數ナレバ之ヲ既約分數ニ化スルトキハ分母分子ガ雙方トモニ平方整數トナル特別ノ場合ニ限リテ,之ヲ平方ニ開クヿヲ得ベシ,其他ノ場合ニ於テハ之ヲ平方ニ開クヿ能ハズ

此定理ノ證明ハ整數論ニ涉ルガ故ニ此處ニテハ省キアレド此定理ハ嚴密ニ證明シ得ラルルモノナリト知ルベシ

a ハ完全ナル平方數ニアラズトスレバ,a ノ平方根ハ整數ニモアラザレバ分數ニモアラザルガ故ニ,數トイフ辭ノ從來ノ意味ニ於テハ,$\sqrt{a}$ ハ數ニアラズ,然レトモ此事ハ毫モ數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ,適當ナル規約ノ下ニ於テ,$\sqrt{a}$ ヲモ數ト看做スヿヲ妨ゲズ

完全ナル平方數ニアラザル數 a ノ平方根即 $\sqrt{a}$ トハ如何ナル數ナリヤト問フニ,特ニ工夫スルニ及バズ,$\sqrt{a}$ トハ自乘スレバ a トナル數ナリト解釋スレバ可ナリ,且吾人

ハ此新タナル數ハ整數分數ト同ジ規則ニ從フベシト規約ス,而シテ斯ク規約シテ差支ナキヿハ第140節ニ至リテ明カニナルベシ

爰ニ注意スベキハ此解釋及規約ハaガ完全ナル平方數ナル場合ニモ勿論當テ嵌マルヿナリ

aガ完全ナル平方數ニアラザル場合ニ於ケルaノ平方根即$\sqrt{a}$ハ後ニ論ズル丁度或ル整數又ハ分數ノ第n冪ニ等シカラザル數ノn乘根ノ格段ナル場合ニシテ,斯クノ如キ數ヲ一般ニ**無理數**ト稱ス

無理數ニ對シ整數分數ヲ**有理數**ト稱ス

上ノ規約ノ結果トシテ,無理數ハ有理數ト全ク同ジ樣ニ取扱フベキモノトス,即文字ハ有理數ヲ表ハスモノトシテ得タル總テノ結果ハ其儘文字ガ無理數ヲ表ハス場合ニモ當テ嵌マルモノト知ルベシ

139. 既ニ前ニモ言ヘルガ如ク,數ノ發端ハ整數ニアリ,整數ニ加減乘(被減數ガ減數ヨリ小ナル場合ハ暫ク措ク,以下之ニ倣フ)ヲ施シテ得ベキモノハ矢張リ整數ナリ,除法ニ至リテ甫メテ整數ノミニテハ總テノ場合ニ通ジテ割リ算ヲ行フ能ハザルニ遇ヒ,此障碍ヲ去ランガ爲メニ顯ハレ出デタルモノハ分數ニシテ,數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ分數ヲモ數ノ中ニ仲間入セシムルト同時ニ

加減乘除ハ總テノ場合ニ通ジテ行ハルルヿトナレリ,整數分數ニ加減乘除ヲ施シテ得ベキモノハ矢張リ整數分數ナリ,平方根ヲ索ムルニ當リ,整數分數ノミニテハ總テノ場合ニ通ジテ平方根ヲ索ムルヿ能ハザルニ遇ヒ,爰ニ於テ顯ハレ出デタルモノハ無理數ニシテ,數トイフ辭ノ意味ヲ更ニ推シ擴メ無理數ヲモ數ノ中ニ仲間入セシムルト同時ニ總テノ場合ニ通ジテ平方根ヲ索ムルヲ得ルヿトナルナリ

注意 上ニ言ヘルガ如ク,數トイフ辭ノ意味ハ次第次第ニ推シ擴マリ來レルモノナルガ故ニ,初學者ノ數ニ對スル觀念モ數トイフ辭ノ意味ノ擴張ニ伴フテ進化セザルベカラズ,初學者ガ新規ノ數ニ遇フ毎ニ動モスレバ無益ノ困難ヲ感ズルモノハ,知ラズ識ラズ數トイフ辭ノ從來ノ意味ニ拘泥執着シ,未ダ嘗テ知ラザリシ數ヲ新ラシキ數トシテ迎フルヿヲナサザルニ起因スルモノナリ,初學者ガ初メテ分數ニ接シタル當時ノ困難ヲ回想シタランニハ必ズヤ思ヒ當ルヿアラン,分數ハ分數ニシテ決シテ整數ニアラズ,例ヘバ$\frac{2}{3}$トハ3倍スレバ2トナル數ナリ,斯クノ如キ數ハ整數ノ中ニアルヿナシ,初學者ガ當初$\frac{2}{3}$ナル數ヲ考フルニ困難ヲ感ゼシモノハ,結局強ヒテ$\frac{2}{3}$ヲ整數ノ中ニ索メントシタルガ故ナリ,然レドモ最早

今日トナリテハ初學者ガ分數ヲ視ルヿ恰モ整數ヲ視ルニ同ジク毫モ之ヲ怪ムヿナカルベシ,而シテ $\frac{2}{3}$ ハ今モ尙ホ依然3倍シテ2トナル數ナリ,無理數ノ場合ニ於テモ亦然リ,無理數ハ整數ニモアラザレバ分數ニモアラズ,無理數ハ無理數ニシテ新タナル數ナリ,例ヘバ $\sqrt{7}$ ハ自乘スレバ7トナル數ニシテ $\sqrt{7}$ ノ意義ハ此外ニアルヿナシ,初學者ハ此定義ヲ以テ滿足スルヿヲ力ムベシ,决シテ $\sqrt{7}$ ヲ整數分數ノ中ニ索メントスルガ如キ無益ノ考ヲ起スベカラズ,初學者ガ今日 $\sqrt{7}$ ニ對シテ懷クトコロノ奇異ナリトイフ觀念ハ無理數ニ習ヒ慣レルニ從テ次第ニ消ヘ失セテ,遂ニ $\sqrt{7}$ ヲ視ルヿ宛モ $\frac{2}{3}$ ヲ視ルガ如ク,自乘スレバ7トナル數ヲ考フルヲ得ルヿ恰モ三倍スレバ2トナル數ヲ考フルヲ得ルガ如キニ至ラン

140. 無理數ハ之ヲ二ツノ有理數ノ間ニ挾ムヿヲ得,且此二ツノ有理數ノ開キ即差ヲ如何ホドニテモ小サクスルヿヲ得ベシ,例ヘバ $\sqrt{7}$ ハ2ト3トノ間ニアルヤ明カナリ,次ニ

2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.0

ノ平方ヲ索メ, $(2.6)^2=6.76$, $(2.7)^2=7.29$ ナルヲ見テ $\sqrt{7}$ ハ2.6ト2.7トノ間ニアルヲ知ルベシ,而シテ此二數ノ開キハ0.1ナリ,次ニ

2.60, 2.61, 2.62, 2.63, 2.64, 2.65, 2.66, 2.67, 2.68, 2.69, 2.70

ノ平方ヲ索メ $(2.64)^2=6.9696$, $(2.65)^2=7.0225$ ナルヲ見テ $\sqrt{7}$ ハ2.64ト2.65トノ間ニアルヲ知ルベシ而シテ此二數ノ開キハ0.01ナリ,此方法ハ何處マデモ之ヲ續ケ行フヿヲ得ベシ而シテ其度每ニ得ルトコロノ二ツノ數ノ平方ハ一方ハ7ヨリ小ニシテ一方ハ7ヨリ大ナリ,從テ $\sqrt{7}$ ハ此二數ノ間ニアリ且此二數ノ差ハ次第ニ小サクナルヿ勿論ナリ,尤モ如何ホド先キマデ此方法ヲ續ケ行フモ或ル有理數ノ平方ガ丁度7ニ等シク從テ $\sqrt{7}$ ガ此有理數ニ等シキガ如キヿナキハ既ニ前ニ述ベタルガ如シ,此故ニ無理數ハ亦之ヲ**不盡根數**ト稱ス

凡テ無理數ヲ挾ムトコロノ二ツノ有理數ヲ此無理數ノ**近似值**ト稱シ,無理數ヨリ小ナルモノヲ不足ナル近似值,無理數ヨリ大ナルモノヲ過剩ナル近似值ト稱ス,但唯近似值トアルハ通例ハ不足ナル近似值ヲ意味スルモノトス

上ニ例示セル無理數ノ近似值ヲ索ムル方法ハ平方根ニ限ラズ一般ニ n 乘根ノ近似值ヲ索ムル場合ニモ之ヲ適用スルヿヲ得ベシ,然レドモ手數ヲ要スルヿ甚ダ多ク亦極メテ迂遠ナル方法ナリ,此處ニテハ單ニ無理數ノ近似值ハ如何ホドニテモ精密ニ即二ツノ近似值ノ開キヲ如何

ホドニテモ小サクスルヲ得ルコヲ明示スルヲ主眼トセルガ故ニ特ニ此方法ヲ用井タレド,實際或ル數ノ平方根ノ近似値ヲ索ムルニハ初學者ノ既ニ算術ニ於テ學ビタル簡便ナル開平ノ算法ニヨルベキモノトス

吾人ハ第138節ニ於テ無理數ハ有理數ト全ク同ジ樣ニ之ヲ取扱フベシト規約セリ,斯ク規約シテ差支ナキコハ,無理數ハ之ヲ二ツノ有理數ノ間ニ挾ムコヲ得且此二ツノ有理數ノ開キヲ如何ホドニテモ小サクスルヲ得ルコニ鑑ルトキハ,分明ナルベシ

注意 或ル數ノ平方根ハ一般ニ無理數ナリ,或ル數ガ丁度平方數ニシテ其平方根ガ開キ切レル塲合ハ寧ロ特別ナル塲合ナリ

例題

1. 上ニ例示セル方法ニヨリ2ノ平方根ノ近似値ヲ小數第二位マデ索メヨ

2. $(13)^2=169$ ナルヲ知リ,$(a+1)^2=a^2+2a+1$ ナル公式ヲ應用シテ,$(14)^2$ ヲ索メヨ,次ニ $(15)^2$ ヲ索メ,次第ニ斯クノ如クニシテ,50ニ至ルマデ(50ヨリ先キニ至ルモ勿論可ナリ)ノ整數ノ平方ノ表ヲ作リテ,後ノ用ニ備ヘヨ

141. 第137節ヨリ前節ノ終リマデハ未ダ負數ヲ知ラザルモノトシテ平方根ヲ論ゼリ,此レヨリハ舊ニ復シ,數ノ中ニハ負數モアルモノトシテ平方根ヲ論ズベシ

正ニ掛ケル正ハ正ニシテ負ニ掛ケル負モ正ナルガ故ニ,或ル正ノ數ノ平方根ハ恒ニ二ツアリテ一ツハ正ニシテ他ノ一ツハ負ナリ,例ヘバ2ノ平方モ4ナレバ−2ノ平方モ4ナルガ故ニ,2モ4ノ平方根ナレバ −2モ4ノ平方根ナリ

此レマデハ或ル正ノ數 a ノ平方根ヲ表ハスニ $\sqrt{a}$ ヲ以テシタリ,然レドモ或ル正ノ數ノ平方根ハ二ツアルガ故ニ $\sqrt{a}$ ハ唯 a ノ平方根ヲ表ハストノミアリテハ,$\sqrt{a}$ ノ意味ニ二通リアルコトナリ從テ將來非常ナル混雜ヲ生ズベシ,故ニ向後 $\sqrt{a}$ ハ a ノ平方根ハ正負二ツアル其中ノ正ナルモノヲ表ハスモノト規約スベシ*

*從來此事ニ就キ規約ヲ設ケズ或ハ不都合ナル規約例ヘバ數字ヲ以テ表ハサレタル數ニ符號√ヲ冠ラセタルモノハ其數ノ平方根ノ正ナルモノ又代數式ニ符號√ヲ冠ラセタルモノハ其式ノ表ハス數ノ平方根ノ正ナルモノ及負ナルモノノ孰レカ一方ヲ意味スルトイフガ如キ曖昧ナル規約ヲ設ケタルノ結果トシテ非常ナル混雜ヲ生ジ,初學者ヲシテ唯ニ困難ヲ感ゼシメタルノミナラズ其困難ノ要點ノ那邊ニアルカヲ知ルニ困マシメタルガ如キ場合ナキニシモアラズ,此規約ハ極メテ重要ナル規約ナリ

或ル正ノ數 a ノ平方根ハ正負二ツアリ,其正ナルハ $\sqrt{a}$ ニシテ其負ナルハ $-\sqrt{a}$ ナリ,正負二ツノ平方根ヲ一處ニ書ク必要アルトキハ第31節ノ終リニ掲ゲタル符號 $\pm$ ヲ用ヰテ $\pm\sqrt{a}$ ト書ク

純二次方程式 $x^2=a$ ヲ解クトキハ,$x=\sqrt{a}$ 或ハ $-\sqrt{a}$ ヲ得,二ツノ答ヲ一處ニ書ケバ $x=\pm\sqrt{a}$ ナリ

注意　49ノ平方根ハ二ツアリ,7及 -7 即 ±7 ナリ,然レドモ $\sqrt{49}=\pm7$ ト書クベカラズ,如何トナレバ上ノ規約ノ結果トシテ $\sqrt{49}=7$ ニシテ $\sqrt{49}$ ハ -7 ニ等シカラザレバナリ,斯クノ如ク,辭ニテ49ノ平方根トイヘルモノト符號ヲ用ヰテ $\sqrt{49}$ ト書ケルモノトノ間ニハ肝要ナル區別アルヿヲ忘ルベカラズ

142. 代數式ニ符號 $\sqrt{\ }$ ヲ冠ラセタルモノニ就キ前節ノ規約ヲ實行スルニ當リ特ニ注意スベキハ,代數演算ハ單ニ代數式ノ見懸ケニ就キテ行フモノナルヿナリ(第63節),次ニ例ヲ以テ重モナル要點ヲ說明スベシ

例 (1)　a^2 ノ平方根ヲ索ム

a ノ平方根ハ $\sqrt{a}$ 及 $-\sqrt{a}$ ナリ,a ハ其實平方數ナルヿモアルベク,a ガ平方數ナル場合ニハ $\sqrt{a}$ ハ開キ切レルヿナレバ,$\sqrt{a}$ ハ a ノ數値ノ如何ニヨリテ必ズシモ開キ切レヌトハ限ラザレド,$\sqrt{a}$ ハ代數的ニハ開キ切レヌモノトス,之ニ反シ,$\sqrt{a^2}$ ハ代數的ニ開キ切レルモノナリ,乃 a^2 ノ平方根ハ a 及 $-a$ ナリ,爰ニ注意スベキハ a ノ數値ハ或ハ負ナルヿモアルベキニ拘ハラズ $\sqrt{a^2}=a$ ナルヿナリ

例 (2)　$a+b$ ノ平方根ハ $\sqrt{a+b}$ 及 $-\sqrt{a+b}$ ナリ

例 (3)　$a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ヲ索ム

此レハ代數的ニ開キ切レル場合ナリ,所要ノ平方根ハ $a+b$ 及 $-(a+b)$ ナリ,又 $a+b$ ノ或ハ負ナルヿモアルベキニ拘ハラズ $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$ ト置クベキモノトス

例 (4)　$a^2-2ab+b^2$ ノ平方根ヲ索ム

此レモ代數的ニ開キ切レル場合ナリ,乃 $a^2-2ab+b^2$ ノ平方根ハ $a-b$ 及 $-(a-b)$ 即 $b-a$ ナリ,又 a, b ノ實際ノ大小如何ニ拘ハラズ,$a>b$ ナリト假定シ $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b$ ト置クベシ,或ハ $b>a$ ナリト假定シ $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=b-a$ ト置クモ差支ナシ,唯相連續セル演算中ハ恒ニ同一ノ假定ニ據レバ可ナリ

注意　代數的ニ開キ切レル場合ニハ直チニ二ツノ平方根ヲ書キ下ダスヿヲ得ベキガ故ニ符號 $\sqrt{\ }$ ヲ代數式中ニ存在セシメ置クノ必要アルヿ罕ナリ

143. 第138節ノ規約ノ結果トシテ,有理數ノ場合ニ於テ眞ナル,積ノ値ハ因數ヲ掛ケ合ハセル順序ニ拘ハラズトイフヿハ,無理數ノ場合ニモ當テ嵌マルガ故ニ

$$\{\sqrt{a}\sqrt{b}\}^2=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}=\{\sqrt{a}\sqrt{a}\}\{\sqrt{b}\sqrt{b}\}=ab$$

故ニ $$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同様ニ $$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

公式(1)及(2)ノ格段ナル場合トシテ

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}\ ,\quad \sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$$

公式(2)ハ亦次ノ如クニ書キ直スヿヲ得ベシ

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

公式(1)及(2)ヲ應用シテ不盡根數ヲ簡單ナル形ニ化スルヿヲ得ベシ,簡單ナル形トハ根號ガ分子ノ中ニノミ在リテ且根號ノ下ニハ成ルベク小サキ整數ガ殘リ居ルヲイフ,例ヘバ $\sqrt{28}=\sqrt{4\times7}=2\sqrt{7}$, $\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{4\times2\times3}{3\times3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

例 題

次ノ數又ハ式ヲ簡單ニセヨ

1. $\sqrt{8}$ 2. $\sqrt{128}$ 3. $\sqrt{396}$ 4. $\sqrt{507}$

5. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 6. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 7. $2\sqrt{\frac{363}{5}}$ 8. $\sqrt{a^2(b+c)}$

9. $\sqrt{\frac{b+c}{a^2}}$ 10. $\sqrt{a^3+2a^2b+ab^2}$ 11. $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ 12. $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$

144. 此レマデハ正ノ數ノ平方根ヲ論ゼリ,コレヨリハ負數ノ平方根ヲ論ズベシ

吾人ガ此處マデニテ知レル總テノ數ノ平方ハ正ナルガ故ニ,數トイフ辭ノ從來ノ意味ニ於テハ負數ノ平方根ナルモノアルヿナシ,例ヘバ -5 ノ平方根ハ自乘スレバ -5 トナル數ナラザルベカラズシテ斯クノ如キ數ノ無キヤ明カナリ,然レdrawn此事ハ毫モ數トイフ辭ノ意味ヲ推シ擴メ,適當ナル規約ノ下ニ於テ,$\sqrt{-5}$ ヲモ數ト看做スヿヲ妨ゲズ

a ハ正ノ數從テ $-a$ ハ負數ヲ表ハスモノトシ,$\sqrt{-a}$ トハ如何ナル數ナリヤト問フニ,特ラニ工夫スルニ及バズ,$\sqrt{-a}$ トハ自乘スレバ $-a$ トナル數ナリト解釋スレバ可ナリ,且吾人ハ此新タナル數ハ從來ノ數ト同ジ規則ニ從フベシト規約ス

此新タナル數ヲ **虚數** ト稱シ,虚數ニ對シ,從來ノ數ヲ **實數** ト稱ス

各種ノ數ノ關係ハ次ノ圖ノ示スガ如シ

- 數
  - 實數
    - 有理數
      - 正ノ整數分數
      - 負ノ整數分數
    - 無理數(或ハ不盡根數)
      - 正ノ無理數
      - 負ノ無理數
  - 虚數

$-a$ノ平方根ハ$\sqrt{-a}$及$-\sqrt{-a}$ナリ

$-a=-1\times a$ ナルガ故ニ $\sqrt{-a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}$ (第143節),而シテ通例iヲ以テ$\sqrt{-1}$ヲ表ハス,然ルトキハ $\sqrt{-a}=i\sqrt{a}$ ニシテ,$-a$ノ平方根ハ$i\sqrt{a}$及$-i\sqrt{a}$ナリ

恰モ1ガ實數ノ單位ナルガ如クiハ虚數ノ單位ナリ

bガ任意ノ實數ヲ表ハストキハ,ibハ虚數ノ一般ナル形ナリ

aトbトハ實數ヲ表ハストスルトキハ,$a+ib$ナル形ノ數ヲ**複素數**ト稱ス

$a+ib$ニ於テbヲ零ト置ケバ實數aヲ得,aヲ零ト置ケバ虚數ibヲ得ベシ

例題

1. $\sqrt{169}$ヲ索ム
2. 169ノ平方根ヲ索ム
3. $\sqrt{289}=\pm17$ナル等式ノ正否如何
4. iヲ用ヰテ-361ノ平方根ヲ書ケ
5. 此書物ヲ閉ヂテ各種ノ數ノ系圖ヲ書ケ
6. $\sqrt{-4}$ヲ簡單ニセヨ
7. $\sqrt{-\frac{27}{2}}$ヲ簡單ニセヨ

二次方程式

145. 凡テ純二次方程式ハ$x^2=a$ナル形ニ歸セシムルヿヲ得ベク,此方程式ノ解方ハ結局リaノ平方根ヲ索ムルヿニ歸着スルヿ既ニ前ニ述ベタルガ如シ,例ヘバ$x^2=3$ナル方程式ヲ解キテ$x=\pm\sqrt{3}$ヲ得,爰ニ注意スベキハ,代數學ニ於テ方程式ノ根トシテ不盡根數ヲ得タル場合ニ,特別ノ要求ナキ限リハ必ズシモ不盡根數ノ近似値ヲ索ムルヲ要セズ,根號ヲ用ヰテ唯其儘書キ下ダセバ可ナルヿナリ

次ニ一般ナル二次方程式即雜二次方程式ノ解方ヲ論ズベシ

或ル整式ノ平方ヲ完全ナル平方式或ハ畧シテ完全ナル平方ト稱ス

$x+\frac{a}{2}$ヲ自乘スルトキハ

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)=x^2+2\frac{ax}{2}+\frac{a^2}{4}=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$$

斯クノ如ク$x^2+ax+\frac{a^2}{4}$ハ完全ナル平方ナリ,故ニx^2+axニxノ係數ノ半分ノ平方即$\frac{a^2}{4}$ヲ加フルトキハ完全ナル平方ヲ得ベシ,是レ一般ナル二次方程式ヲ解ク秘訣ナリ,次ニ二三ノ例ヲ示スベシ

例 (1) x^2+6x, 爰ニ x ノ係數ノ半分ハ 3 ナリ, 3^2 ヲ加ヘテ x^2+6x+3^2 即 $(x+3)^2$ ヲ得

例 (2) x^2-5x, 爰ニ x ノ係數ノ半分ハ $-\frac{5}{2}$ ナリ, $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$ 即 $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ ヲ加ヘテ $x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2$ 即 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ヲ得

例 (3) $x^2+\frac{4x}{5}$, 爰ニ x ノ係數ノ半分ハ $\frac{2}{5}$ ナリ, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ ヲ加ヘテ $x^2+\frac{4x}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2$ 即 $\left(x+\frac{2}{5}\right)^2$ ヲ得

例 (4) $x^2-\frac{3x}{4}$, 爰ニ x ノ係數ノ半分ハ $-\frac{3}{8}$ ナリ, $\left(-\frac{3}{8}\right)^2$ 即 $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ ヲ加ヘテ $x^2-\frac{3x}{4}+\left(\frac{3}{8}\right)^2$ 即 $\left(x-\frac{3}{8}\right)^2$ ヲ得

上ニ例示セル方法ヲ名ヅケテ平方ヲ完全ニスルトイフ

146. 一般ナル二次方程式ヲ解ク方法ハ次ノ例ニ就キテ知レ

例 (1) $x^2-10x+24=0$ ヲ解ケ

x ヲ含ム項ヲ左邊ニ殘シ置キ, x ヲ含マザル項ヲ右邊ヘ移シテ $x^2-10x=-24$

左邊ヲ完全ナル平方ニスル爲メニ x ノ係數ノ半分 -5 ノ平方即 25 ヲ兩邊ニ加ヘテ

$$x^2-10x+25=-24+25=1$$

左邊ハ $x-5$ ノ平方ナリ, 今 $x-5$ ノ値ヲ知ルヿヲ得バ, ソ

レヨリシテ直チニ x ノ値ヲ索ムルヲ得ベキガ故ニ, $x-5$ ヲ未知數ノ如クニ考フレバ純二次方程式トナル

$$(x-5)^2=1$$

ヲ解キテ $x-5=\pm1$

移項シテ $x=5\pm1$

故ニ $x=5+1=6$ 或ハ $x=5-1=4$, 故ニ $x=6$ 或ハ 4 ナリ

注意 爰ニ $(x-5)^2=1$ ナル方程式ヲ得タル後平方ニ開キテ $x-5=\pm1$ ヲ得タリ, 設シ各邊ニ就キ平方根ヲ索ムルトキハ $\pm(x-5)=\pm1$ ヲ得, コレヨリシテ

$$x-5=1\ ,\ x-5=-1\ ,\ -(x-5)=1\ ,\ -(x-5)=-1$$

ヲ得ベク, 此四ツノ方程式中二ツ宛ハ其實相同ジク結局リ上ノ二ツノ方程式ヲ得ベシト雖モ, 斯クノ如キハ抑モ亦方程式ノ意味ヲ度外視シ, 徒ラニ機械的ニ計算スルヿニ流レ, 符號 ± ヲ濫用スルモノナリ, 元來吾人ハ方程式 $(x-5)^2=1$ ヨリシテ $x-5$ ハ自乘スレバ 1 トナル數ナルヿヲ知リ, 之ヲ式ニ書キ表ハシテ $x-5=\pm1$ ヲ得ルモノナルガ故ニ, 右邊ニノミ符號 ± ヲ前置スベキハ, 方程式ノ意味ニ照ラシテ明カナリ

例 (2) $3x^2-55=4x$ ヲ解ケ

x ヲ含ム項ヲ左邊ニ, x ヲ含マザル項ヲ右邊ニ集メテ

$$3x^2-4x=55$$

3デ割リテ $x^2-\frac{4}{3}x=\frac{55}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2$ヲ加ヘテ $x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{55}{3}+\frac{4}{9}=\frac{169}{9}$

平方ニ開キテ $x-\frac{2}{3}=\pm\frac{13}{3}$

故ニ $x=\frac{2}{3}\pm\frac{13}{3}=5$ 或ハ $-\frac{11}{3}$

例 (3) $35-3x=2x^2$ ノ根ヲ索ム

移項スレバ $-2x^2-3x=-35$

符號ヲ換ヘテ後2デ割リ即 -2 デ割リテ

$$x^2+\frac{3}{2}x=\frac{35}{2}$$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2$ヲ加ヘテ $x^2+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{35}{2}+\frac{9}{16}=\frac{289}{16}$

平方ニ開キテ $x+\frac{3}{4}=\pm\frac{17}{4}$

$$x=-\frac{3}{4}\pm\frac{17}{4}=\frac{7}{2} \text{ 或ハ } -5$$

例 (4) $x^2-4x-1=0$ ヲ解ク

移項スレバ $x^2-4x=1$

2^2ヲ加フレバ $x^2-4x+4=1+4=5$

平方ニ開ケバ $x-2=\pm\sqrt{5}$

$$x=2+\sqrt{5} \text{ 或ハ } 2-\sqrt{5}$$

例 (5) $x^2-7x=7x-49$ ノ根ヲ索ム

移項スレバ $x^2-14x=-49$

7^2ヲ加フレバ $x^2-14x+7^2=-49+49=0$

平方ニ開ケバ $x-7=0$

故ニ $x=7$

注意 (1)ヨリ(4)マデハ二次方程式ヲ解キテ恒ニ二ッノ根ヲ得タリ,然ルニ例(5)ニ於テハ唯一ッノ根ヲ得タリ,而シテ例(5)ノ如キ場合ニ於テモ尚ホ二次方程式ハ二ッノ根ヲ有シ唯此二ッノ根ガ相等シ,辭ヲ換ヘテ言ヘバ,二ッノ相等シキ根ヲ有スト看做スノ便利ナルコ後ニ至リテ明カニナルベシ

例 (6) $x^2-6x+13=0$ ヲ解ク

移項シテ $x^2-6x=-13$

3^2ヲ加ヘテ $x^2-6x+9=-13+9=-4$

$$x-3=\pm\sqrt{-4}$$

故ニ $x=3+\sqrt{-4}$ 或ハ $3-\sqrt{-4}$

xノ値ハ此儘ニ置クモ可ナリ,或ハiヲ用井テ

$$x=3+2i \text{ 或ハ } 3-2i$$

ト書クモ可ナリ

上ノ諸例ノ示スガ如ク,一般ナル二次方程式ヲ解クニハ,未知數xヲ含ム諸項ヲ一邊ニ未知數ヲ含マザル項ヲ他ノ邊ニ集メ同類項ヲ約シテ後x^2ノ係數ヲ以テ兩邊ヲ割リ,而シテ後xノ係數ノ半分ノ平方ヲ兩邊ニ加ヘ,平方

ニ開キテ得ベキ一次方程式ヲ解クベシ

例題

次ノ方程式ヲ解キ且答ヲ保存セヨ

1. $2(x^2-7)+3(x^2-11)=33$
2. $(x-15)(x+15)=400$
3. $\frac{x^2-24}{5}+\frac{x^2-37}{4}=8$
4. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36$
5. $\frac{x^2}{4}+7-\frac{2x^2}{3}=\frac{5x^2}{6}-153$
6. $x^2-3x+2=0$
7. $x^2-5x+6=0$
8. $x^2+10x=24$
9. $2x^2-1=5x+2$
10. $3x^2-4x=39$
11. $x^2+10x+3=2x^2-5x+53$
12. $(x-1)(x-2)=20$
13. $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$
14. $4(x^2-1)=4x-1$
15. $(2x-3)^2=8x$
16. $3x^2-17x+10=0$
17. $x^2-4x+5=0$
18. $x^2+3a^2=4ax$
19. $x^2+2ab=b^2+2ax$
20. $4x^2+4ax=b^2-a^2$

147. 二次方程式ノ根ノ公式

凡テ二次方程式ハ次ノ形チニ變形スルヿヲ得ベシ

$$ax^2+bx+c=0$$

故ニ之ヲ一般ナル形チノ二次方程式ト稱ス,爰ニ a, b, c ハ既知數ヲ表ハスモノトス,且 b ト c トハ或ハ零トナルヿモアリ得ベキニ反シ,a ハ決シテ零ナルベカラズ,如何トナレバ,a 若シ零ナルトキハ,x^2 ヲ含ム項ガ無クナルガ故ニ,方程式ハ二次方程式ニアラザレバナリ

a ガ零ニアラザルヿハ非常ニ肝要ナルヿナルガ故ニ,通例符號 $\neq$ ヲ相等シカラズトイフ辭ノ代リニ用ヰテ此事ヲ方程式ノ傍ニ明記スルモノトス,乃

$$ax^2+bx+c=0\ ,\quad a\neq0$$

c ヲ右邊ヘ移シテ $\quad ax^2+bx=-c$

a ハ零ニアラザルガ故ニ a デ割リテ

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

x ノ係數ノ半分 $\frac{b}{2a}$ ノ平方 $\frac{b^2}{4a^2}$ ヲ兩邊ニ加ヘテ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

平方ニ開キテ $\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

故ニ $\quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

故ニ此方程式ノ根ハ

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ニシテ,此レ即二次方程式ノ根ノ公式ナリ

上ノ公式ヲ用ヰテ二次方程式ノ根ヲ索ムルヿヲ得ベシ,例ヘバ $3x^2-10x+3=0$ ノ根ヲ索メンニ,爰ニ $a=3$, $b=-10$, $c=3$, 故ニ所要ノ根ハ

$$-\frac{-10}{6}\pm\frac{\sqrt{100-36}}{6} \quad 即 \quad \frac{10}{6}\pm\frac{8}{6} \quad 即 \quad 3 \ 及 \ \frac{1}{3} \ ナリ$$

例　題

上ノ公式ヲ用ヰテ前節ノ例題 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16 ヲ解キ嚮キニ得タル答ト照合セヨ

148. 前節ニ於テ吾人ハ二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad , \quad a \neq 0$$

ハ二ッノ根即

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad 及 \quad -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ヲ有スルコヲ發見セリ

$b^2-4ac=0$ ナルトキハ二ッノ根ハ相等シク,雙方共ニ $-\frac{b}{2a}$ トナル,然レトモ此塲合ニ於テモ吾人ハ二次方程式ハ唯一ッノ根ヲ有ストハ言ハズシテ二ッノ相等シキ根ヲ有ストイフ

b^2-4ac ガ零ニアラザルヨリハ二ッノ根ガ相等シクナルコナキヤ明カナリ

故ニ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二ッノ根ガ相等シキ爲メニ必要ニシテ充分ナル要件* ハ b^2-4ac ガ零ニ等シキコナリ

$b^2-4ac=0$ ナルトキハ二次式 ax^2+bx+c ハ其儘 x ニ就テ完

*數學ニ於テハ屢必要ニシテ充分ナル要件トイフ辭ヲ用ヰルコアリ, $b^2-4ac=0$ ナレバ二ッノ根ハ相等シキガ故ニ, $b^2-4ac=0$ ナル要件ハ充分ナル要件ナリ,又二ッノ根ガ相等シキ爲メニハ是非トモ $b^2-4ac=0$ ナラザルベカラズ故ニ此要件ハ必要ナル要件ナリ

全ナル平方式ナリ,如何トナレバ,此塲合ニ於テハ $\frac{c}{a}=\frac{b^2}{4a^2}$ ナルガ故ニ

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

a, b, c ハ有理數ヲ表ハスモノトスベシ

b^2-4ac ノ數値ガ正ニシテ且完全ナル平方數ニアラザルトキハ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ハ無理數ヲ含ムベシ

二次方程式ノ二ッノ根ノ孰レカ一方ガ無理數ヲ含ムトキハ,雙方共ニ無理數ヲ含ムベキヤ明カナリ

b^2-4ac ノ數値ガ負ナルトキハ $\sqrt{b^2-4ac}$ ハ虚數ナリ,故ニ此塲合ニ於テハ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ハ虚數ヲ含ムベシ

二次方程式ノ二ッノ根ノ孰レカ一方ガ虚數ヲ含ムトキハ雙方共ニ虚數ヲ含ムベシ

例　題

1. 次ノ方程式ノ根ノ性質(相等シキカ或ハ無理數ヲ含ムカ或ハ虚數ヲ含ムカトイフコ)ヲ吟味セヨ

$$49x^2+42x+9=0 \ , \ 3x^2-12x+1=0 \ , \ 12x^2-36x+31=0$$

2. 純二次方程式ノ二ッノ根ガ相等シキコアリヤ否ヤ,若シアリトスレバ如何ナル塲合ニ於テ相等シキヤ

3. $3x^2+4x+c=0$ ナル方程式ノ二ッノ根ハ相等シトイフコヨリシテ c ノ値ヲ索メヨ

149. 二次方程式應用問題 次ニ既知數ト未知數トノ關係ヲ代數的ニ書キ表ハストキハ二次方程式ヲ得ベキ二三ノ應用問題ヲ解キテ以テ注意スベキ要點ヲ示スベシ

例 (1) 二桁ノ數アリ,其一位ノ數字ハ十位ノ數字ヨリハ3ダケ大ニシテ,此數ハ數字ノ積ノ二倍ニ等シトイフ,仍テ此數ヲ索ム

十位ノ數字ヲxトスレバ一位ノ數字ハ$x+3$ニシテ所要ノ數ハ$10x+(x+3)$ナリ

題意ニヨリ $10x+(x+3)=2x(x+3)$

$$2x^2-5x=3$$

$$x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}\ ,\quad x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

$$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}\ ,\quad x=\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}=3 \text{ 或ハ } -\frac{1}{2}$$

然ルニ數字ノ表ハス數ハ正ノ整數ナラザルベカラズ,故ニ $-\frac{1}{2}$ ナル値ハ不合理ナリ,乃十位ノ數字ハ3,從テ一位ノ數字ハ6ニシテ,所要ノ數ハ36ナリ

例 (2) 二桁ノ數アリ,其十位ノ數字ハ一位ノ數字ヨリハ5ダケ大ナリ且數字ノ積ハ丁度此數ニ等シトイフ,仍テ此數ヲ索ム

一位ノ數字ヲxトスレバ十位ノ數字ハ$x+5$ニシテ所要ノ數ハ$10(x+5)+x$ナリ,題意ニヨリ

$$x(x+5)=10(x+5)+x\ ,\quad x^2-6x=50$$

$$x^2-6x+9=59\ ,\quad x=3\pm\sqrt{59}$$

故ニ $x=3+\sqrt{59}$ 或ハ $3-\sqrt{59}$

此二ツノ値ハ何レモ題意ニ適ハズ,如何トナレバ此問題ノ性質トシテxハ1ヨリ4マデノ正ノ整數或ハ零ナラザルベカラザレバナリ,故ニ此問題ハ全ク不能ナリ

例 (3) 或ル人ガ所持スル金高ヲ圓ニテ表ハセル數ノ平方ハ此數ノ三十倍ヨリハ1000ダケ大ナリトイフ,此人幾何金ヲ所持スルカ

此人x圓ヲ所持スルトスルトキハ,題意ニヨリ

$$x^2=30x+1000$$

$$x^2-30x=1000\ ,\quad x^2-30x+225=1225\ ,\quad x-15=\pm35$$

故ニ $x=50$ 或ハ -20

此人ノ所持金ハ50圓ニシテ,-20圓ハ不合理ナリ,然レドモ負債ヲ負ノ資産ト考フレバ,此二ツノ値ハ何レモ題意ニ適ヒ,此人50圓ヲ所持セリ,或ハ此人20圓ノ負債ヲ有セリトイフコトヲ得ベシ

例 (4) 或ル一家內中ノ子供ノ人數ノ十一倍ハ此數ノ平方ノ二倍ヨリハ5ダケ大ナリトイフ,子供ノ人數如何

今xヲ以テ所要ノ子供ノ人數ヲ表ハセバ,題意ニヨリ

$$11x=2x^2+5$$

$$2x^2-11x=-5\ ,\ x^2-\frac{11}{2}x+\left(\frac{11}{4}\right)^2=-\frac{5}{2}+\frac{121}{16}=\frac{81}{16}$$

$$x-\frac{11}{4}=\pm\frac{9}{4}\quad ,\ x=5 \text{ 或ハ } \frac{1}{2}$$

爰ニ $\frac{1}{2}$ ナル値ハ題意ニ協ハズ,故ニ子供五人ナリトイフヲ以テ唯一ノ答トス

例 (5) 長サヲ尺ニテ表ハシタル數ノ十一倍ハ此數ノ平方ノ二倍ヨリハ5ダケ大ナル棒ノ長サ如何

此例ニ於テハ前例ニ於ケルト同ジ方程式ヲ得,從テxノ同ジ値即5及$\frac{1}{2}$ヲ得ベシ而シテ此場合ニ於テハ,此二ツノ値ハ雙方倶ニ題意ニ適フ,乃所要ノ棒ノ長サハ5尺或ハ$\frac{1}{2}$尺ナリ

例 (6) 或ル奇人曰ク,余ガ年數ノ53倍ハ年數ノ平方ヲ超過スルヿ696ナリト,此奇人ノ年齡如何

此奇人ノ年齡ヲx年トスレバ,題意ニヨリ

$$53x=696+x^2$$

$$x^2-53x=-696\quad ,\quad x^2-53x+\left(\frac{53}{2}\right)^2=\frac{(53)^2}{4}-696=\frac{25}{4}$$

$$x=\frac{53\pm5}{2}=29 \text{ 或ハ } 24$$

故ニ此奇人ノ年齡ハ29年或ハ24年ナリ

例 (7) 合ハセテ15トナル二ツノ數ノ積ハ54ナリトイフ,仍テ此二ツノ數ヲ索ム

一方ノ數ヲxトスレバ他ノ數ハ$15-x$ナリ,題意ニヨリ

$$x(15-x)=54$$

$$x^2-15x=-54\ ,\ x^2-15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=-54+\frac{225}{4}=\frac{9}{4}$$

$$x=\frac{15}{2}\pm\frac{3}{2}=9 \text{ 或ハ } 6$$

今$x=9$トスレバ$15-x=6$,又$x=6$トスレバ$15-x=9$,故ニ所要ノ二ツノ數ハ6ト9トニシテ,xノ値ガ二ツアルニ拘ハラズ,答ハ唯一通リアルノミナリ

前キニxヲ以テ二ツノ數ノ中ノ何レカ一方ヲ表ハストセリ,故ニxノ値トシテ得タル9ト6トハ雙方倶ニ題意ニ適フ,然レドモ前キニxヲ以テ二ツノ數ノ中ノ大ナル方ヲ表ハストシタランニハ,9ナル値ハ題意ニ適フモ6ナル値ハ題意ニ適ハザルベシ

150. 前節ノ諸例ノ示スガ如ク,問題ノ事實ヲ式ニ書キ表ハストキハ方程式ヲ得ベシ,而シテ此方程式ヲ解キテ得タル未知數ノ値ノ中ニハ題意ニ適ハザルモノモアルヿアリ,初學者ハ往往此事ヲ不思議ニ思フノ餘リ,其源因ハ方法ノ不備ニアルナラント考フルガ如キヿナキニシモアラザルベシト雖モ,其實ハ然ラズ,代數計算ハ總テノ場合ヲ含ムトイフ意味ニ於テ完全ナル方法ナルガ故ニ此事アルナリ,問題ノ事實ヲ代表スル方程式ハ事實其モノヨリモ一層一般ナルモノナリ,例ヘバ或ル數ヲ組織スル數字ヲ索ムル問題アリトセンニ,數字ノ表ハス數ハ1ヨリ9マデノ正ノ整數又ハ零ナラザルベカラズ,然レドモ

其未ダ知レザルニ當リ,之ヲ表ハスニ文字ヲ以テシ,此文字ニ施スニ代數計算ヲ以テスル途端ニ,文字ハ如何ナル數ヲモ代表スルコヲ得ルガ故ニ,前キノ制限ハ自然ニ消滅スルモノナリ,乃代數計算ノ結果トシテ顯ハルル數ノ中ニハ此制限ニ拘ハラザルモノ,換言スレバ,題意ニ適ハザルモノモアリ得ベキハ寧ロ當前ノコナリトス

斯クノ如ク,應用問題ノ解方ハ三段ヨリ成ル

(第一) 問題中ニ與ヘラレタル事實ヲ式ニ書キ表ハシテ方程式ヲ作ルコ

(第二) 此方程式ヲ解キテ未知數ノ値ヲ索ムルコ

(第三) 今得タル値ノ中ノ何レガ,問題中ニ明記シアルト否トニ拘ハラズ,事實ノ實際ニ照ラシテ必要ナル要件ヲ滿足スルカヲ吟味スルコ

第二十問題集

次ノ方程式ヲ解ク

1. $91x^2-2x=45$　**2.** $x^2+2x=1$　**3.** $x^2-2x+2=0$

4. $9x^2-18x-11=0$　**5.** $x^2-10x+32=0$　**6.** $25x^2+2=30x$

7. $6x^2-13x+6=0$　**8.** $3x^2-7x=16$　**9.** $x^2+6.51=5.2x$

10. $x^2+4.3x=27.3$

11. $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=11$

12. $(x-6)(x-5)+(x-7)(x-4)=10$

13. $(2x-5)^2-(x-6)^2=80$

14. $(2x-17)(x-5)-(3x+1)(x-7)=84$

15. $(33+10x)^2+(56+10x)^2=(65+14x)^2$

16. $ax^2-(a^2+1)x+a=0$　**17.** $(a-x)(b-x)=2(a-b)^2$

18. $(3x-5)^2-8(3x-5)+7=0$　**19.** $x^2-(a-m)x=(a-1)(m-1)$

20. $4x^2-4ax+a^2-b^2=0$　**21.** $(a^2-b^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x$

---

22. 或ル數ノ半分ト其三分ノ一トノ積ハ 384 ナリトイフ,仍テ此數ヲ索ム

23. 積ガ 216 ニナル様ニ 30 ヲ二ツノ部分ニ分テ

24. 三個ノ正ノ數アリ,第二ノ數ハ第一ノ數ノ三分ノ二,第三ノ數ハ第一ノ數ノ半分ニシテ,三數ノ平方ノ和ハ 549 ナリトイフ,仍テ此三數ヲ索ム

25. 16ヨリハ大ニシテ25ヨリハ小ナル整數アリ,此數ト16トノ和ノ此數ト25トノ和ニ對スル比ハ,此數ヨリ16ヲ減ジタル差ノ25ヨリ此數ヲ減ジタル差ニ對スル比ニ等シトイフ,仍テ此數ヲ索ム

26. 和ガ60ニシテ平方ノ和ガ1872ナル二ッノ數ヲ索ム

27. 差ガ6ニシテ積ガ720ナル二ッノ正ノ數ヲ索ム

28. 差ハ2,平方ノ和ハ244ナル二ッノ正ノ數ヲ索ム

29. 10ヲ二ッノ部分ニ分チ,其積ヲ平方ノ和ニ加ヘタル總計ガ76トナル樣ニセヨ

30. 36ヨリ或ル數ヲ減ジタル差ト30ヨリ同ジ數ヲ引キタル差トノ積ハ891ナリトイフ,或ル數トハ如何

31. 二數アリ,一方ノ數ガ18ヲ超過スルダケソレダケ他ノ數ハ18ヨリ不足ニシテ,二數ノ平方ノ和ハ698ナリトイフ,仍テ此二數ヲ索ム

32. 和ガ$2c$ニシテ平方ノ和ガ$2a$ナル二數ヲ索ム

33. a^2+b^2ヲ二ッノ部分ニ分チ,其積ガ$\frac{1}{4}(a^4+a^2b^2+b^4)$トナル樣ニセヨ

34. $5a+\frac{b}{5}$ヲ二ッノ部分ニ分チ,其平方ノ和ガ$13\left(a^2+\frac{b^2}{25}\right)$トナル樣ニセヨ

35. 二ッノ正ノ數ノ和ハ$\frac{5}{6}$ニシテ其差ハ其積ニ等シトイフ,此二ッノ數ヲ索ム

36. 坪數千百三十一坪ノ地面ノ間口ハ奥行ヨリハ十間廣シトイフ,間口奥行各如何

37. 一邊ノ長サ110米突ナル平方形ニ比ベテ,周圍ハ4米突ダケ長ク,面積ハ4平方米突ダケ小サキ矩形ノ横竪ヲ索ム

38. 親子ノ年齢ノ和ハ100歳ニシテ,年數ノ積ノ十分ノ一ハ親ノ年數ヲ超過スルヿ180ナリトイフ,親子ノ年齢各如何

39. 横竪ノ差19尺ナル矩形アリ,横ヲ其$\frac{1}{4}$ダケ長クシ,竪ヲ其$\frac{1}{3}$ダケ短クスルトキハ,面積ハ1320平方尺ダケ小サクナルベシトイフ,此矩形ノ横竪各如何

40. 周圍252尺,面積3888平方尺ナル矩形ノ横竪各如何

41. 二個ノ整數アリ,二數ノ比ハ5ノ4ニ於ケルガ如ク,各數ニ15ヲ加ヘタルモノノ平方ノ差ハ999ナリトイフ,仍テ此二數ヲ索ム

42. 十位ノ數字ハ一位ノ數字ヨリハ3ダケ大ナル二桁ノ數アリ,此數ニ數字ノ和ヲ掛クルトキハ814ヲ得ベシトイフ,此數ヲ索ム

43. 二桁ノ數アリ,數字ノ和ハ10ニシテ,此數ト數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ數トノ積ハ2944ナリトイフ,如何ナル數ナリヤ

44. 酒ヲ以テ滿タサレタル八斗一升入ノ樽ヨリ酒若干升ヲ汲出シ,之ヲ補フニ水ヲ以テシタル後,更ニ前ト同容積ノ混合液ヲ汲出シタル跡ニ,純分六斗四升ノ酒ガ殘レリトイフ,最初ニ酒幾何升ヲ汲出セシカ

45. 酒ヲ以テ滿タサレタル六斗入ノ樽ヨリ若干升ノ酒ヲ汲出シ,之ヲ補フニ水ヲ以テシ,更ニ前キニ汲出シタル容積ヨリハ一斗四升多ク混合液ヲ汲出シ,再ビ水ヲ以テ之ヲ補ヒシニ,跡ニハ酒ト水トガ半半ニナリ居レリトイフ,最初ニ汲出セシ酒ノ容積如何

46. 或ル人年利若干ニテ金五千圓ヲ一ヶ年ノ定期預ケトナシ,一年後ニ受取リタル利息ノ中ヨリ金五拾圓ヲ減ジ,殘高ヲ元金ニ加ヘ,更ニ同利率ニテ一ヶ年ノ定期預ケトナシ,期日ニ至リテ元利合計金5778圓ヲ受取レリトイフ,利率如何

47. 金65圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ配分スルニ,甲ノ取リ前ハ乙ノ取リ前ヨリハ5圓多ク,丙ノ取リ前ハ甲ノ取リ前ニ乙ノ取リ前ノ圓數ヲ掛ケタルモノニ等シトイフ,三人ノ取リ前各幾何ゾ

48. 和ガ10ニシテ立方ノ和ガ370ナル二數ヲ索ム

49. 差ガ2,立方ノ差ガ866ナル二ツノ正ノ數ヲ索ム

50. 立方ノ差ガ919ナル相隣レル二ツノ整數ヲ索ム

51. 三ツノ相隣レル正ノ整數アリ,最大ナル數ノ立方ト最小ナル數ノ立方トノ差ガ中央ノ數ノ40倍ヲ超過スルヿ16ナリトイフ,仍テ此三數ヲ索ム

52. 横竪高サヲ各3尺宛增スルトキハ體積ハ4167立方尺ダケ增スベキ正立方體ノ高サ幾何

53. 三間ニ四間ノ矩形ナル花壇ノ周圍ニ幅ノ同ジキ芝生ノ緣アリ,芝生ノ面積ハ花壇ノ面積ノ十倍ナリトイフ,芝生ノ幅幾何

54. 昔時或ル外國ニ於ケル一小隊ノ兵士ハ,之ヲ各行同人數ナル平方形ニ整列セシムルヿヲ得ベク,又斯クノ如キ小隊七個ヨリ成ル一大隊ノ兵士ハ深サ四人ノ中央ノ空キタル平方形ニ整列セシムルヿヲ得ベク,其大キサ後ノ平方形ハ前ノ平方形ノ十六倍ナリトイフ,此一小隊ノ人數如何

55. 一隊ノ兵士ヲ一行ノ人數ハ一列ノ人數ノ二倍ナル行列ニ整列セシムルヿヲ得ベク,今此內ヨリ206人ヲ減ズルトキハ,殘リノ人數ヲ深サ三人ノ中央ノ空キタル平方形ニ整列セシムルヿヲ得ベク,平方形ノ外側ノ一邊ニ於ケル人數ハ前ノ行列ノ一行ノ人數ニ等シカルベシトイフ,此隊ノ人數如何

56. 深サ三人ノ中央ノ空キタル平方形ニ整列セシム

ルヿヲ得ベキ若干人數ノ兵士アリ,九人ヲ增ス𬼀ハ之ヲ充實(中央ノ空カザル)平方形ニ整列セシムルヿヲ得ベク且此充實平方形ノ一邊ノ人數ハ前ノ中央ノ空キタル平方形ノ內側ノ一邊ノ人數ヨリハ32人少ナシトイフ,元ノ人數如何

57. 側面ハ前列ヨリハ14人多キ行列ニテ進軍セル一隊,敵前ニ達スルニ及ビ,展開シテ前列ニ828人ヲ增シタルガ爲メニ,側面ノ人數5人トナレリトイフ,此隊ノ人數如何

58. 或ル人年利若干分ニテ金800圓ヲ銀行ヘ預ケ入レ,每年末ニ其時受取ルベキ利息ノ外ニ金100圓ヲ元金ニ加ヘ行キタルニ,第三年ノ初メニ於テ金1087圓ノ預ケ金ヲ有セリトイフ,利率如何

59. 前問題中ノ格段ナル數ニ代フルニ順次ソレゾレニ一般ナル數a, m, bヲ以テシ,所要ノ利率(年若干分)ノ公式ヲ索メ,且前問題ヲ利用シテ驗ヲ行ヘ

60. 後ニ幾何學ニ於テ證明セラルベキぴたごらすノ定理(上卷第79頁第二問題集第31問ヲ參照セヨ)ニヨリ,二邊ノ長サノ和47「メートル」斜邊ノ長サ37「メートル」ナル直角三角形ノ二邊ノ各別ノ長サヲ索ム

61. 直角ニ交叉スル二直線上ニ動キツツアルA及Bナル二點アリ,Aハ一秒每ニ3米突宛,Bハ一秒每ニ4米突宛動クモノトス,今ヤ交點ヲ距ル9米突ノ所ニアルA點及交點ヲ距ル12米突ノ所ニアルB點ハ雙方俱ニ交點ヨリ遠ザカラントシツツアリ,今ヨリ幾秒ノ後二點ノ間ノ距離ガ40米突トナルカ,又今ヨリ幾秒前ニ二點ノ間ノ距離ガ40米突ナリシカ

62. A及Bナル二點ハ,一秒每ニソレゾレニ4米及3米ノ速度ヲ以テ,直角ニ切リ合フ二直線上ニ動キツツアリ,今ヤAハ交點ヲ距ルヿ300米ノ位置ニアリテ交點ニ近寄ラントシツツアリ,Bハ交點ヲ距ルヿ250米ノ位置ニアリテ交點ヨリ遠ザカラントシツツアリ,二點ノ間ノ距離ガ1825米ナリシハ今ヨリ幾秒前又1825米トナルハ幾秒後ナルカ

63. AトBトハ直角ニ交叉スル直線上ニ於テ兩點トモニ交點ノ方ヘ動キツツアリ,一秒每ニAハ6米宛,Bハ4米宛動クモノトス,今ヤ交點ヲ距ルヿAハ78米,Bハ104米ノ所ニアリ,二點ノ間ノ距離ガ1378米ナリシハ今ヨリ幾秒前又1378米トナルハ今ヨリ幾秒後ナルカ

151. 二次方程式ノ一般ナル形チヘ

$$ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ニシテ,aハ決シテ零ナラザルガ故ニ,aデ割リテ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

ヲ得ベシ,今$\frac{b}{a}=p$,$\frac{c}{a}=q$ト置クトキハ

$$x^2+px+q=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

トナル,又逆ニ,(2)ニ於テpノ代リニ$\frac{b}{a}$,qノ代リニ$\frac{c}{a}$ヲ置キテ後aヲ以テ掛クルトキハ(1)ヲ得ベキガ故ニ,(2)モ亦二次方程式ノ一般ナル形チト看做スヿヲ得ベシ

方程式(2)ヲ解カンニ

$$x^2+px=-q$$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2$ヲ加ヘ　$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2-4q}{4}$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

故ニ　$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

乃方程式(2)ノ根ハ

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\quad 及\quad \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

ナリ,此レ等ノ公式ニ於テpノ代リニ$\frac{b}{a}$,qノ代リニ$\frac{c}{a}$ヲ置キ換フルトキハ,勿論嚮キニ第147節ニ於テ得タル方程式即(1)ノ根ノ公式ヲ得ベク,又逆ニ第147節ノ公式ニ於テ$b=ap$,$c=aq$ト置クトキハ,上ノ公式ヲ得ベシ

152. 二次方程式ノ根ト係數トノ關係

前節ニ於テ得タル方程式$x^2+px+q=0$ノ二ツノ根ヲ表ハスニ希臘(ギリシヤ)文字α(「アルファ」ト讀ム)及β(「ベタ」ト讀ム)ヲ以テシ

$$\alpha=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\ ,\ \beta=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

ト置クベシ,然ルトキハ二ツノ根ノ和ハ$\alpha+\beta$,二ツノ根ノ積ハ$\alpha\beta$ニテ表ハサルベシ,而シテ

$$\alpha+\beta=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=-p$$

$$\alpha\beta=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\times\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}=q$$

即　$$\alpha+\beta=-p\ ,\ \alpha\beta=q$$

故ニx^2ノ係數ガ1ナル方程式$x^2+px+q=0$ニ於テ$-p$即xノ係數ノ符號ヲ換ヘタルモノハ二ツノ根ノ和ニシテ,q即xヲ含マザル項ハ二ツノ根ノ積ナリ

二次方程式ノ一般ナル形チ$x^2+px+q=0$ヨリ$ax^2+bx+c=0$ニ移ルニハ$p=\frac{b}{a}$;$q=\frac{c}{a}$ト置クバ可ナルヿ前節ニ述ベタルガ如シ,故ニ方程式$ax^2+bx+c=0$ノ二ツノ根ヲ矢張リα及βトスレバ,$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$,$\alpha\beta=\frac{c}{a}$ナリ

153. 二次方程式$x^2+px+q=0$ニ於テpノ代リニ$-(\alpha+\beta)$,qノ代リニ$\alpha\beta$ヲ置キ換フレバ

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

左邊ノ二次式$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ハ$(x-\alpha)(x-\beta)$ニ等シキヤ明カナルガ故ニ,方程式$x^2+px+q=0$ハ次ノ形チニ書キ直スヿヲ得

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

爰ニ　$\alpha=\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $\beta=\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$

上ノ形チハ明カニ$x=\alpha$或ハ$x=\beta$ト置クトキハ二次方程式ガ滿足セラルベキヲ示ス,又xニα及β以外ノ値ヲ與フルトキハ,$x-\alpha$モ$x-\beta$モ雙方倶ニ零トナラズシテ,零ニアラザル二ッノ數ノ積ハ决シテ零トナルヿナキガ故ニ,此方程式ガ滿足セラルルヿナキヤ明カナリ,故ニ二次方程式ハ二ッヨリ多クノ根ヲ有セズ,然ラバ二次方程式ハ必ズ二ッノ根ヲ有スルヤ否ヤト問フニ,唯一ッノ特別ナル場合ハαガβニ等シキ場合ナリ,然レ圧此場合ニ於テモ尚ホ二次方程式ハ一ッノ根ヲ有ストハ言ハズシテ,二ッノ相等シキ根ヲ有スト言フヿニ定ムルトキハ,(第146節及第148節)

一般ニ**二次方程式ハ必ズ二ッノ根ヲ有シ决シテ二ッヨリ多クノ根ヲ有セズト**斷言スルヿヲ得ベシ

154. 二次方程式ト二次式トノ關係

二次方程式ニ於テ總テノ項ヲ一邊ニ集ムルトキハ二次式ヲ得ベク,二次式ヲ零ニ等シト置クトキハ二次方程式ヲ得ベシ

二次式ノ一般ナル形チハ$ax^2+bx+c(a\neq0)$ニシテ,之ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ$ax^2+bx+c=0$ハ一般ナル二次方程式ナリ,爰ニ注意スベキハ,此一般ナル二次方程式ヲaデ割リテ後$\dfrac{b}{a}=p$, $\dfrac{c}{a}=q$ト置キテ得ベキ方程式$x^2+px+q=0$モ尚ホ一般ナル二次方程式タルヲ失ハザルニ反シ,二次式ax^2+bx+cニ代フルニ,之ヲaデ割リテ得ベキ$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$ヲ以テスベカラザルコトナリ,尤モ$ax^2+bx+c$ノ代リニ,$a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$,或ハ$\dfrac{b}{a}=p$, $\dfrac{c}{a}=q$ト置キ,$a(x^2+px+q)$ト書クハ差支ナシ

$$ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ナルガ故ニ,二次式ハ恒ニ之ヲ二ッノ一次式ノ積トシテ表ハスヿヲ得ベク,二次式ヲ一次式ナル因數ニ分解スルニハ,此二次式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ方程式ヲ解キテ以テ因數ヲ索ムレバ可ナリ

第112節ヨリ第114節マデニ於テ示セル二次式ノ因數ヲ發見スル方法ハ全ク視察ニ依賴スルモノナルガ故ニ極メテ不完全ナル方法ナリ,之ニ反シ,上ニ與ヘタル方法ハ總テノ場合ニ通ジテ之ヲ適用スルヿヲ得ベシ

例 (1) $x^2-3x-28$ヲ因數ニ分解セヨ

與ヘラレタル式ヲ零ニ等シト置キ

$$x^2-3x-28=0$$

此方程式ヲ解キテ $x=-4$ 或ハ 7 ヲ得ベシ,故ニ

$$x^2-3x-28=(x+4)(x-7)$$

例 (2) x^2+6x+7 ヲ因數ニ分解セヨ

$x^2+6x+7=0$ ヲ解クトキハ $x=-3\pm\sqrt{2}$ ヲ得ベシ,故ニ

$$x^2+6x+7=(x+3-\sqrt{2})(x+3+\sqrt{2})$$

例 (3) $3x^2-10x+3$ ヲ因數ニ分解セヨ

$3x^2-10x+3=0$, 即 $x^2-\frac{10}{3}x+1=0$ ヲ解キテ $x=\frac{1}{3}$ 或ハ 3 ヲ得ベシ,故ニ

$$3x^2-10x+3=3(x-\tfrac{1}{3})(x-3)$$

例題

次ノ二次式ヲ因數ニ分解セヨ

1. $5x^2+32x-21$　2. $36x^2-87x+77$　3. $2x^2-2x-1$

4. $x^2-734x+134520$　5. $x^2-6x+13$

155. 二次方程式解法ノ秘訣ハ平方ヲ完全ニスルコトニアルコト第 145 節ニ於テ述ベタルガ如シ,此秘訣ヲ利用スルトキハ一般ナル二次式ヲ因數ニ分解スルコトヲ得ベシ

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ ノ括弧內ニ於テ, $x^2+\frac{b}{a}x$ ヲ完全ナル平方ニ補充スルガ爲メニ, $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 即 $\frac{b^2}{4a^2}$ ヲ加フ,然レドモ唯加フルコト能ハザルガ故ニ,加フルト同時ニ減ジテ

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

乃公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ニヨリ,

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$=a\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

此因數分解ノ方法ハ其實前節ノ方法ト異ナルトコロナシ,且同樣ノ式ヲ多ク書キ下ダサザルベカラザルノ不便アリ,故ニ實際ハ前節ノ方法ニヨリ,即與ヘラレタル二次式ヲ零ニ等シト置キ,其根ヲ索メテ以テ因數ヲ發見スルノ便利ナルニ若カズ

第八編ニ於テ與ヘタル因數分解法ハ視察ニ依ルモノニシテ僥倖的ノ方法ナルニ反シ,二次方程式ノ解法ヨリ出デタル前節及本節ノ方法ハ確カナル方法ナリ

156. 二次方程式ヲ解キテ以テ二次式ヲ因數ニ分解スルコトヲ得ベシ,逆ニ,二次式ヲ因數ニ分解シテ以テ二次方程式ヲ解クコトヲ得ベシ,然レドモ二次方程式ノ解法ヨリ

出デタルモノヲ外ニシテハ,二次式ヲ因數ニ分解スル確實ナル方法アルコトナシ,故ニ因數分解ニヨリテ二次方程式ヲ解クコトヲ得ルハ視察ニヨリテ因數ヲ知ルコトヲ得ル場合ニ限ルモノトス

例 (1) $x^2-2x=0$ ヲ解ケ

$x^2-2x=x(x-2)$ ナルガ故ニ所要ノ根ハ 0 及 2 ナリ

例 (2) $x^2-7x+12=0$ ヲ解ケ

第112節ニヨリ視察ニテ $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$ ナルヲ知ルベシ,故ニ所要ノ根ハ 3 及 4 ナリ

注意 本節ノ方法ハ視察ニテ容易ニ因數ヲ發見スルコトヲ得ル場合ニ限リテ之ヲ適用スベシ,假令ヘ視察ニヨリテ因數ヲ發見スルコトヲ得ルモ,視察上少シニテモ困難アル場合ニハ,矢張リ正式ノ方法ニヨリテ二次方程式ヲ解クヲ得策トス,例ヘバ $3x^2-16x+5=0$ ヲ解カンニ,左邊ノ式ハ視察ニヨリテ因數ニ分解スルヲ得ルコト既ニ第114節ノ例(1)ニ於テ示セルガ如シ,然レドモ此場合ニ於テ徒ラニ視察ニ苦勞スルヨリハ寧ロ直進正式ノ方法ニヨリテ之ヲ解クノ簡便ナルニ若カズ

例題 視察ニヨリテ次ノ方程式ヲ解ケ

$x^2+4x+3=0$, $x^2-x=0$, $x^2+4x-5=0$, $2x^2-3x=0$

$x^2+x-6=0$, $x^2+5x-14=0$, $x^2+2x=3$

157. 次ニ例ヲ以テ特別ナル二次方程式ヲ解ク簡便法ヲ示スベシ

例 (1) $(x-2)^2+3x-6=5(x-2)$ ヲ解ケ

此方程式ノ兩邊ハ $x-2$ ナル因數ヲ有スルコト明カナリ,從テ此方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メテ得ベキ二次式ノ一ツノ因數ハ $x-2$ ニシテ,此二次式ヲ $x-2$ デ割リテ以テ殘リノ因數ヲ索ムルコトヲ得ベシ,乃實際ハ $x-2$ ヲ預カリ置キ,與ヘラレタル方程式ヲ $x-2$ デ割リテ

$$x-2+3=5$$

ヲ得,此レヨリシテ $x=4$ ヲ得,故ニ與ヘラレタル方程式ノ二ツノ根ハ 2 及 4 ナリ

注意 未知數ヲ含ム式ヲ以テ方程式ヲ割リ或ハ方程式ニ掛クルノ不都合ナルコトハ前編ニ於テ繰返ヘシ注意セシトコロナリ,上ニ $x-2$ ヲ以テ方程式ノ兩邊ヲ割リタルハ,結局リ二次式ノ因數ノ一ツガ $x-2$ ナルヲ知リテ他ノ因數ヲ索ムル爲メニ此二次式ヲ $x-2$ デ割リタルモノニシテ,$x-2$ ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ $x=2$ ハ元ノ方程式ノ根ナルコトヲ忘ルベカラズ

例 (2) $3x^2-2x-65=0$ ヲ解ケ

普通ノ方法ニヨリ 3 デ割リテ後方程式ヲ解クトキハ途中ノ計算ニ於テ分數ガ出デ來ルノ不便アリ,此不便ヲ避

ケントト欲セバ,與ヘラレタル方程式ニ3ヲ掛ケ,$3x$ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘ

$$(3x)^2-2(3x)-195=0\ ,\ (3x)^2-2(3x)+1=195+1=196$$

$$3x-1=\pm 14\ ,\quad 3x=15 \text{ 或ハ } -13$$

故ニ $x=5$ 或ハ $-\frac{13}{3}$

例 (3) $\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x=8\frac{1}{5}$ ヲ解ケ

此場合ニ於テハ,$\left(\frac{3x+4}{5}\right)$ ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘ,與ヘラレタル方程式ヲ少シク變形シテ

$$\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-4\left(\frac{3x+4}{5}\right)=5$$

ト書キ直スㇳハ,此方程式ノ二ツノ根ハ 5 ト -1 トナルヿ視察ニテ明カナリ,$\frac{3x+4}{5}=5$ ヨリシテ $x=7$,$\frac{3x+4}{5}=-1$ ヨリシテ $x=-3$ ヲ得,即 $x=7$ 或ハ -3 ヲ以テ答トス

注意 凡テ簡便法ハ簡便ナルダケソレダケ誤リヲ生シ易キモノナルガ故ニ,初學者ハ重キヲ簡便法ニ置クベカラズ,例ヘバ視察ニヨリテ二次式ノ因數ヲ索メ若シクハ二次方程式ノ根ヲ見出スㇳニ,即諒ノ結果往往誤リヲナスハ兎角初學者ニハ有リ勝チナルヿナリ,又簡便法ハ熟練ノ結果トシテ容易ニ簡便法ニ思ヒ當ル人ノ爲メニ簡便ナルモノニシテ,然ラザル人ノ爲メニハ決シテ簡便ナラズ,强ヒテ簡便法ニ思ヒ當ランヿヲ力メ徒ラニ時間ヲ浪費スルガ如キハ決シテ得策ニアラズ,故ニ幸ニシテ

容易ニ簡便法ニ思ヒ當リタルㇳハ,之ヲ適用シテ差支ナシト雖モ,然ラザル場合ニハ矢張リ普通ノ確カナル方法ヲ適用スベシ

158. 與ヘラレタル根ヲ有スル二次方程式

ヲ作ルニハ,二次方程式ノ一般ナル形チ $x^2+px+q=0$ ニ於テ,p ノ代リニ與ヘラレタル二ツノ根ノ和ノ符號ヲ換ヘタルモノヲ置キ,q ノ代リニ與ヘラレタル二ツノ根ノ積ヲ置ケバ可ナリ

或ハ,x ヨリソレゾレニ與ヘラレタル根ヲ減ジテ得ベキ二ツノ一次式ヲ掛ケ合ハセタルモノヲ零ニ等シト置クモ可ナリ

例 (1) 3及 -4 ナル根ヲ有スル二次方程式ヲ作レ

爰ニ $p=-(3-4)=1$, $q=3\times(-4)=-12$, 故ニ所要ノ方程式ハ $x^2+x-12=0$ ナリ

例 (2) $\frac{2}{3}$ 及 $-\frac{1}{2}$ ナル根ヲ有スル二次方程式ヲ作レ

$$p=-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}\ ,\ q=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{3}$$,故ニ所要ノ方程式ハ $x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$ ナリ,此儘ニナシ置クモ可ナレド,或ハ6ヲ掛ケテ,$6x^2-x-2=0$ トスルモ可ナリ

例 (3) $5-\sqrt{7}$ 及 $5+\sqrt{7}$ ナル二ツノ根ヲ有スル二次方程式ヲ作レ

此場合ニ於テモ矢張リ前二例ニ於ケルガ如ク,p 及 q ノ値ヲ索メテ以テ方程式ヲ作ルモ可ナレド,或ハ又

$x=5\pm\sqrt{7}$, $x-5=\pm\sqrt{7}$, $(x-5)^2=7$, $x^2-10x+25=7$

ヨリシテ所要ノ方程式 $x^2-10x+18=0$ ヲ得ルモ可ナリ

例　題

次ノ根ヲ有スル二次方程式ヲ作レ

1. 5 , 6　　2. 7 , -8　　3. $3\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$

4. $4\frac{1}{2}$, $-3\frac{1}{2}$　　5. 0.7 , -0.3　　6. a , b

7. $a+b$, $a-b$　　8. $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$　　9. $2+\sqrt{-1}$, $2-\sqrt{-1}$

10. $a+b\sqrt{2}$, $a-b\sqrt{2}$　　11. $3a+2b\sqrt{5}$, $3a-2b\sqrt{5}$

12. 次ニ揭ゲタル各方程式ノ二ツノ根ノ積如何

$x^2+7x-3=0$, $5x^2-3x=1$, $x^2-ax=0$, $4ax^2+3bx+4c=0$

13. 次ニ揭ゲタル各方程式ノ二ツノ根ノ和如何

$x^2-25=0$, $x^2+5x=6$, $x^2-5x+6=0$, $5ax^2+10bx+c=0$

14. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ二ツノ根ハ實數ナリトシ,雙方俱ニ正ナル,又雙方俱ニ負ナル,又一ツハ正ニシテ他ノ一ツハ負ナル要件各如何

15. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ根ハ實數ナリトシ,二ツノ根ガ異ナリタル符號ヲ有シ,且絕對値上正ノ根ガ負ノ根ヨリモ大ナル要件ヲ索メヨ

159. 例 (1) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二ツノ根ヲ α 及 β トシ, α^2 及 β^2 ヲ根トスル方程式ヲ a, b, c ニテ書キ表ハセ

所要ノ方程式ハ $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$ ナリ,偖テ α 及 β ハ $cx^2+bx+c=0$ ノ根ナルガ故ニ, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$, 故ニ $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}$, $2\alpha\beta=\frac{2c}{a}$, 仍テ $\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

又 $\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}$, 故ニ上ノ方程式ハ

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$$

トナル, a^2 ヲ掛クレバ

$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$$

例 (2) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二ツノ根ヲ α 及 β トシ, $\frac{\alpha}{\beta}$ 及 $\frac{\beta}{\alpha}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

二ツノ根ノ和ハ $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\div\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{ac}$

二ツノ根ノ積ハ $\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$, 故ニ所要ノ方程式ハ

$x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}x+1=0$ 即 $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$

例　題

1. $3x^2+16x+12=0$ ノ根ヲ索メ,之ヲ各別ニ自乘シテ以テ此方程式ノ根ノ平方ヲ根トスル二次方程式ヲ作リテ後,公式ニヨリテ驗ヲ行ヘ

2. 公式ヲ用ヰズシテ $x^2-6x+8=0$ ノ根ノ比ヲ根トスル方程式ヲ作リテ後,公式ニヨリテ驗ヲ行ヘ

第二十一問題集

1. α及β ガ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ナルトキハ

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0 \text{ 及 } \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

ナルヿヲ證明セヨ

2. 方程式 $x^2+4ax+a^2=0$ ノ根ノ平方ノ和ヲ索メヨ

3. 方程式 $x^2-ax+b=0$ ノ根ノ平方ノ和ハ方程式 $x^2-3ax+b+4a^2=0$ ノ根ノ平方ノ和ニ等シキヿヲ證明セヨ

4. a ニ如何ナル値ヲ與フルナラバ, $3x^2+4x+a=0$ ナル方程式ノ二ツノ根ガ相等シクナルカ

5. 方程式 $4x^2+(1+a)x+1=0$ ノ二ツノ根ガ相等シトイフ要件ヨリシテ a ノ値ヲ定メヨ

6. $100x^2+60x+m=0$ ナル方程式ノ一ツノ根ガ他ノ根ノ二倍トナル樣ニ m ノ値ヲ定メヨ

7. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ一ツノ根ガ他ノ根ノ二倍ナル爲メニハ $9q=2p^2$ ナラザルベカラザルヿヲ證明セヨ

8. $2x^2-5x+3=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, $\frac{\alpha}{\beta}$ 及 $\frac{\beta}{\alpha}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

9. $2x^2-15x+4=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, α^2 及 β^2 ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

10. $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, $\alpha+\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

11. $x^2-11x+22=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, $\alpha+\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

12. $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ 及 $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

13. $x^2+7x+9=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ 及 $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

14. $x^2+px+q=0$ ノ根ノ平方ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

15. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ根ガソレゾレニ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ノ平方ニ等シキ爲メニ必要ナル要件ヲ索ム

16. α 及 β ヲ $px^2+qx+r=0$ ノ根トシ, $\alpha+\beta$ 及 $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

17. α 及 β ヲ $ax^2+bx+c=0$ ノ根トシ, $\alpha\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

18. $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ α 及 β トシ, $\alpha+\beta$ 及 $\frac{1}{\alpha+\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ

19. x^2+px+q ヲ $x-\alpha$ デ割リテ剰餘ヲ索メ, x^2+px+q ガ $x-\alpha$ デ割リ切レル即剰餘ガ零トナル爲メニハ, α ガ

方程式 $x^2+px+q=0$ ヲ滿足セザルベカラズトイフヿヲ示セ

20. 二次方程式ハ二ツヨリ多クノ根ヲ有スル能ハズトイフヿヨリシテ,二次式ヲ一次式ナル因數ニ分解スル仕方ハ唯一通リアルノミナルヿヲ證明セヨ

21. $x^2+ax+b=0$ ナル方程式ノ根ノ差ガ $x^2+px+q=0$ ナル方程式ノ根ノ差ニ等シキトキハ, a, b, p, q ノ間ニ $a^2-4b=p^2-4q$ ナル關係アルヿヲ證明セヨ

22. α 及 β ヲ $x^2+px+q=0$ ノ根トシ, $(\alpha+\beta)^2$ 及 $(\alpha-\beta)^2$ ヲ根トスル二次方程式ハ

$$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$$

ナルヿヲ示セ

23. α 及 β ヲ $x^2+fx+g=0$ ノ根トシ, $\alpha+\frac{1}{\beta}$ 及 $\beta+\frac{1}{\alpha}$ ヲ根トスル二次方程式ハ

$$gx^2+f(1+g)x+(1+g)^2=0$$

ナルヿヲ示セ

24. α 及 β ヲ $ax^2+bx+c=0$ ノ根トシ, $\frac{1}{\alpha+2\beta}$ 及 $\frac{1}{\beta+2\alpha}$ ヲ根トスル二次方程式ハ

$$(2b^2+ac)x^2+3abx+a^2=0$$

ナルヿヲ示セ

160.* 極大極小ノ論ハ本來初等代數學ノ範圍外ニ屬スルモノトス,唯二次式ノ極大極小ニ係ル二三ノ簡單ナル例ヲ次ニ揭グベシ

代數學ニ於テ極大極小ヲ論ズルニハ數ノ範圍ヲ實數ニ限ルモノトス

$a+x^2$ ナル式ニ於テ, a ハ定値ヲ有スルモノトシ, x ニ如何ナル値ヲ與フルトキハ,此式ノ數値ガ極小トナル乎即最モ小ナル乎ト問フニ, x ニ正負如何ナル數値ヲ與フルモ, x^2 ハ恒ニ正ナルガ故ニ, x ガ零ニアラザルヨリハ,此式ノ値ハ a ヨリモ大ナルベシ,故ニ x ガ零ナルトキニ此式ノ値ハ極小トナル,而シテ此式ノ極小ナル値ハ a ナリ

爰ニ注意スベキハ,既ニ前ニ斷ハリ置キタルガ如ク,數ノ範圍ヲ實數ニ限ルノ必要ナルヿナリ,設シ x ノ數値ニ虛數ヲモ許ストキハ,例ヘバ $x=\sqrt{-1}$ トスレバ, $x^2=-1$ トナリ, $a+x^2$ ハ a ヨリモ小ナルヿヲ得ベク,上ノ結論ハ無効ニ歸スベシ

同樣ニ $a-x^2$ ノ値ハ x ガ零ナルトキニ極大トナル即最モ大ナリ,而シテ此式ノ極大ナル値ハ a ナリ

例 (1) x^2-4x+5 ナル二次式ノ極小ナル値ヲ索ム

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ ニシテ, $(x-2)^2$ ハ恒ニ正ナルガ故ニ,

*本節及次節ハ便宜之ヲ跡廻ハシニスルモ可ナリ

此式ハ $x-2=0$ 即 $x=2$ ナルトキニ極小トナル,而シテ此式ノ極小ナル値ハ1ナリ

例 (2) 10尺ノ長サヲ二ツノ部分ニ分チ,一部分ヲ横トシ,他ノ部分ヲ縦トスル矩形ノ面積ガ極大トナル樣ニセヨ

一部分ヲ x 尺トスレバ,他ノ一部分ハ $(10-x)$ 尺ニシテ,矩形ノ面積ハ $x(10-x)$ 平方尺ナリ,故ニ $x(10-x)$ ガ極大トナル樣ニ x ノ値ヲ定ムレバ可ナリ,偖テ

$$x(10-x)=10x-x^2=25-25+10x-x^2=25-(5-x)^2$$

故ニ $x(10-x)$ ガ極大トナル爲メニハ $5-x=0$ 即 $x=5$, $x=5$ ナルトキハ, $10-x$ モ5ニ等シ,乃横縦相等シク,各5尺ニシテ,矩形ガ平方形トナルトキニ面積ハ極大トナル

上ノ二例ノ示スガ如ク,二次式ノ極大極小ヲ索ムルニハ,與ヘラレタル二次式ヲ變形シテ,既知數ニ一次式ノ平方ヲ加ヘタル形チ,若シクハ既知數ヨリ一次式ノ平方ヲ減ジタル形チトナシ,此一次式ガ零トナル樣ニ x ノ値ヲ定ムレバ可ナリ

例　題

次ノ式ノ極大又ハ極小ナル値ヲ索ム

1. $1+x-x^2$　2. x^2+3x+4　3. $13-5x+x^2$　4. $10+7x-x^2$

5. $(a+x)(b-x)+(a-x)(b+x)$　6. $(a-x)(x-b)$

7. $(9-2x)^2-(1-3x)^2$

8. 24ヲ二ツノ部分ニ分チ,各部分ノ平方ノ和ガ出來得ル限リ小サクナル樣ニセヨ

9. 周圍ノ長サノ同ジキ矩形ノ中何レカ最大ナル面積ヲ有スルカ

10. $a+bx+x^2$ ハ $x=-\frac{1}{2}b$ ナルトキニ極小トナリ, $a+bx-x^2$ ハ $x=\frac{1}{2}b$ ナルトキニ極大トナルコトヲ示セ

161. 例 (1) x^2-4x+5 ノ極小ナル値ヲ索ム

m ヲ以テ此式ノ値ヲ表ハシ即 $x^2-4x+5=m$ ト置キ,此方程式ヲ解キテ, $x=2\pm\sqrt{m-1}$ ヲ得ベシ,偖テ x ニ正負如何ナル値ヲ與フルモ, $m-1$ ハ負トナル能ハズ即 m ハ1ヨリモ小ナル能ハズ,故ニ $m=1$ ハ此式ノ極小ナル値ニシテ此式ノ値ガ1トナルトキノ x ノ値ハ2ナリ

例 (2) $x(10-x)$ ノ極大ナル値ヲ索ム

$x(10-x)=m$ ト置キ,之ヲ解キテ $x=5\pm\sqrt{25-m}$ ヲ得,故ニ此式ノ極大ナル値ハ25ニシテ,其時ノ x ノ値ハ5ナリ

例　題

1. 本節ノ方法ニヨリ前節ノ例題1, 2, 3, 4, 7ヲ解ケ

2. 二次式ノ極大極小ヲ索ムル本節ノ方法ヲ辭ニテ言ヒ表ハセ

第十三編

分數式ヲ含ミタル方程式

(第十一編ノ續キ)

162. 或ル整式ガ $x-a$ ナル因數ヲ有スルトキハ,此式ハ $x=a$ ナルトキニ零トナルヤ明カナリ,例ヘバ

$$(x-a)(x^2+mx+n)$$

ニ於テ $x=a$ ト置クトキハ,此式ハ勿論零トナル

逆ニ,或ル整式ガ $x=a$ ナルトキニ零トナルトキハ,此式ハ $x-a$ ナル因數ヲ有ス,此レヲ證明センガ爲メニ,P ヲ以テ或ル整式ヲ表ハシ,$x-a$ ヲ以テ P ヲ割リテ得ベキ商ヲ Q,剩餘ヲ R トスベシ,即

$$P=(x-a)Q+R$$

爰ニ代數割リ算ノ性質トシテ,Q ハ整式,R ハ x ヲ含マザルモノナリ,偖テ $x=a$ トスルトキハ,P ハ假定ニヨリ零トナリ,$(x-a)Q$ ハ明ラサマニ零トナルガ故ニ

$$0 = R$$

然ルニ R ハ x ヲ含マズ,從テ x ニ如何ナル値ヲ與フルモ R ニハ關係ナキ筈ナレバ,x ヲ a ト置キタルガ故ニ R ガ

零トナルニアラズシテ,R ハ初メヨリシテ零ナリシナリ,

故ニ

$$P=(x-a)Q$$

乃 P ハ $x-a$ デ割リ切レルヿヲ證明シ得タリ,仍テ次ノ定理ヲ得

定理 或ル整式ガ $x-a$ デ割リ切レル爲メニ必要ニシテ充分ナル要件ハ此式ガ $x=a$ ナルトキニ零トナルコトナリ

例 (1) $x^3-7x^2+17x-15$ ト $x^3-8x^2+19x-12$ トヲ同時ニ零トナラシムル x ノ値ヲ索メヨ

與ヘラレタル二ツノ式ヲ同時ニ零トナラシムル x ノ値ヲ假リニ a ト名ヅクレバ,二ツノ式ハ雙方倶ニ $x-a$ ニテ割リ切レザルベカラズ,即 $x-a$ ハ二ツノ式ノ雙方ニ公通ナル因數ナラザルベカラズ,又二ツノ式ニ公通ナル因數ガ零トナルトキハ二ツノ式ガ同時ニ零トナルハ勿論ナリ,乃二ツノ式ニ公通ナル總テノ因數ヲ索ムレバ可ナリ,然ルニ二ツノ式ニ公通ナル總テノ因數ノ積ハ即二ツノ式ノ最大公約數ナルガ故ニ,結局リ二ツノ式ノ最大公約數ヲ索メ,之ヲ零ニ等シト置キテ以テ x ノ値ヲ索ムレバ可ナリ

第119節ノ方法ニヨリ與ヘラレタル二ツノ式ノ最大公約數ヲ索ムルトキハ $x-3$ ヲ得ベシ,故ニ $x-3=0$, $x=3$, 此レ即所要ノ x ノ値ナリ

$\boxed{\text{注意}}$ 與ヘラレタル二ツノ式ガ公約數ヲ有セザルトキハ此二ツノ式ヲシテ同時ニ零トナラシムルxノ値アルコトナシ

例 (2) $\dfrac{x^3-8x^2+19x-12}{x^3-7x^2+17x-15}=0$ ヲ解ケ

分數ガ零トナルニハ分子ガ零トナラザルベカラズ,爰ニ特別ノ處分ヲ要スルハ分子ト分母トガ同時ニ零トナル場合ナリ,偖テ分子ト分母トガ同時ニ零トナルトキハ,分子ト分母トハ公約數ヲ有ス,乃分子ト分母トニ就キ總テノ公約數ヲ去リ,換言スレバ,與ヘラレタル分數式ヲ既約分數式ニ化シテ後,分子ヲ零ニ等シト置クバ可ナリ

上ノ分數式ノ分子ト分母トノ最大公約數ハ$x-3$ナリ,即$x-3$デ割リテ

$$x^3-8x^2+19x-12=(x-3)(x^2-5x+4)$$

$$x^3-7x^2+17x-15=(x-3)(x^2-4x+5)$$

乃與ヘラレタル分數式ハ $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x+5}$ ニ等シク,此分數式ハ既約分數式ナリ,仍テ此分數式ノ分子ヲ零ニ等シト置キ,$x^2-5x+4=0$, 此方程式ヲ解キテ,$x=1$ 或ハ 4 ヲ得,之ヲ答トス

例 (3) $(2x-a-b)^3-(x-a)^3-(x-b)^3$ ハ $x=a$ ナルトキ又 $x=b$ ナルトキニ零トナルコトヲ知リテ之ヲ因數ニ分解セヨ

與ヘラレタル式ハ $x-a$ 及 $x-b$ デ割リ切レ,從テ $x-a$ ト $x-b$ トノ積 $x^2-(a+b)x+ab$ デ割リ切レザルベカラズ

$$(2x-a-b)^3=8x^3-12(a+b)x^2+6(a+b)^2x-(a+b)^3$$
$$=8x^3-12(a+b)x^2+6(a^2+2ab+b^2)x-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$
$$(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$
$$(x-b)^3=x^3-3bx^2+3b^2x-b^3$$

故ニ與ヘラレタル式ハ

$$6x^3-9(a+b)x^2+(3a^2+12ab+3b^2)x-(3a^2b+3ab^2)$$
$$=3\{2x^3-3(a+b)x^2+(a^2+4ab+b^2)x-(a^2b+ab^2)\}$$

此括弧ノ中ノ式ヲ $x^2-(a+b)x+ab$ デ割リテ $2x-a-b$ ヲ得ベシ,故ニ與ヘラレタル式ハ

$$3(x-a)(x-b)(2x-a-b)$$

ニ等シ

例 題

1. $6x^3-17x^2-31x+12$ ハ $x=\frac{1}{3}$, 又 $x=4$ ナルトキニ零トナルコトヲ知リテ,之ヲ因數ニ分解シテ後驗ヲ行ヘ
2. x^3-x^2-x+1 ハ $x=1$ ナルトキニ零トナルコトヲ知リテ,之ヲ因數ニ分解シテ後驗ヲ行ヘ
3. $2+11x+11x^2+x^3-x^4$ ハ $x=-1$ 又 $x=-2$ ナルトキニ零トナルコトヲ知リテ,之ヲ因數ニ分解セヨ

4. x^3-x^2-2x+2 ト $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ トハ $x=1$ ナル𪜉ニ限リテ同時ニ零トナルヿヲ示セ

5. $2x^2-7x+5$ ト $3x^2-7x+4$ トガ同時ニ零トナル x ノ値ヲ索ム

6. $2x^2-7x+5$ ハ零トナルモ,同時ニ $3x^2-7x+4$ ガ零トナラザル x ノ値ヲ索ム

7. x^2-x+1 ト $3x^2+x+5$ トガ同時ニ零トナル x ノ値アリヤ否ヤ

8. $x^3-41x-30$ ガ零トナルモ,同時ニ $x^3-11x^2+25x+25$ ガ零トナラザル x ノ値ヲ索ム(第十三問題集問題1ヲ見ヨ)

9. 整式 P ヲ $x-a$ デ割リテ得ベキ商ヲ Q,剩餘ヲ R トシ, $P=(x-a)Q+R$ ニ於テ x ヲ a ト置キ, R ハ P ノ中ニ於テ x ノ代リニ a ヲ置キタルモノニ等シキヿヲ證明セヨ

10. 割リ算ヲ行ハズニ $3x^3-4x^2-5x+13$ ヲ $x-1$ デ割リテ得ベキ剩餘ヲ索メヨ

163. 既ニ第132節ニ言ヘルガ如ク,分數式ヲ含ミタル方程式ヲ解クニハ,總テノ項ヲ一邊ニ集メ,之ヲ纒メテ一ッノ分數式トナシ,此分數式ヲ既約分數式ニ化シ,此既約分數式ノ分子ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ總テノ項ガ整式ナル方程式ヲ解クベシ

爰ニ注意スベキハ,既約分數式ノ分子ガ零トナルト同時ニ分母ガ零トナラザルヿ,又既約分數式ノ分子ガ未知數ヲ含マザル𪜉ハ方程式ハ根ヲ有セザルヿナリ

此方法ハ分數方程式ヲ解ク唯一ノ完全ナル方法ナリ,然レ𪜈手數ヲ要スルヿ稍多キガ故ニ,通例ハ矢張リ第132節ニ例示セルガ如ク,分母ヲ拂フテ以テ之ヲ解クモノトス,但分母ヲ拂フ方法ガ無効トナリタル場合ニハ上ノ完全ナル方法ヲ適用スベキモノトス

分母ヲ拂フニハ,方程式中ニアル諸分數式ノ分母ノ最小公倍數ヲ以テ,方程式ニ掛クルヲ便利ナリトス,但此最小公倍數ハ別ニ之ヲ保存シ置キ,斯クシテ得タル方程式ガ滿足サルルト同時ニ,此最小公倍數ガ零トナルガ如キヿナキヲ確ムルヲ要ス

分數方程式ヲ解ク爲メニ,分母ノ最小公倍數ヲ掛クルモ尙ホ元ノ方程式ニ緣ナキ根ヲ得ルヿアルベシ,今其理由ヲ尋ヌルニ,元來分數方程式ニ分母ノ最小公倍數ヲ掛

クルハ,上ノ完全ナル方法ニ於ケル總テノ項ヲ一邊ニ集メ之ヲ纒メテ一ツノ分數式トナス途中ノ手數ヲ省畧シ,且此分數式ヲ既約分數式ナリト看做シ,直テニ此既約分數式ノ分子ヲ得ントスルモノナルガ故ニ,幸ニシテ一ツニ纒メテ得ベキ分數式ガ既約分數式ナル時ハ不都合ナシト雖モ,然ラザル場合ニハ,一ツニ纒メテ得ベキ分數式ノ分子ト分母トニ公通ナル因數ハ尙ホ存在スベク,從テ此因數ヨリ生ズル元ノ方程式ニ緣ナキ根ノ顯ハレ出ヅベキヤ明カナリ

例 (1)　$\frac{3}{x-5}+\frac{2x}{x-3}=5$ ヲ解ケ

分母ノ最小公倍數 $(x-5)(x-3)$ ヲ掛ケテ

$$3(x-3)+2x(x-5)=5(x-5)(x-3)$$

$$x^2-11x+28=0$$

此二次方程式ヲ解キテ $x=4$ 或ハ 7 ヲ得

例 (2)　$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$

分母ノ最小公倍數 x^2-1 ヲ掛ケテ

$$x^2-3x+2(x^2-1)+(x+1)=0$$

$$3x^2-2x-1=0$$

此方程式ヲ解キテ $x=1$ 或ハ $-\frac{1}{3}$ ヲ得,然ルニ $x=1$ ナル時ハ嚮キニ方程式ニ掛ケタル最小公倍數 x^2-1 モ零トナルガ故ニ,此解方ハ無効ニ歸ス,乃更ニ總テノ項ヲ纒メ

テ $\frac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=0$，既約分數式ニ化シテ $\frac{3x+1}{x+1}=0$ ヲ得,分子ヲ零ニ等シト置キテ $3x+1=0$, $x=-\frac{1}{3}$ ヲ得テ答トス

例 (3)　$\frac{x^2-11x}{x^2-1}+2+\frac{5}{x-1}=0$ ヲ解ケ

分母ノ最小公倍數 x^2-1 ヲ以テ掛クレバ

$$x^2-11x+2(x^2-1)+5(x+1)=0\ ,\quad x^3-2x+1=0$$

此方程式ヲ解キテ $x=1$ ヲ得,故ニ此解方ハ無効ニ歸ス。乃更ニ總テノ項ヲ纒メテ一ツノ分數式トナシ

$$\frac{3x^2-6x+3}{x^2-1}=\frac{3(x^2-2x+1)}{x^2-1}=\frac{3(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

ヲ得,之ヲ既約分數式ニ化シテ

$$\frac{3(x-1)}{x+1}=0$$

ヲ得,分子ヲ零ニ等シト置キ, $x=1$ ヲ得,元ノ方程式ニ於テ $x=1$ ト置ク能ハズ,然レモ元ノ方程式ハ其實直グ上ノ方程式ニ同ジク,此方程式ノ根ハ 1 ナリ

例　題

次ノ方程式ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

1. $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}$	2. $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{9}+\frac{9}{x}$
3. $x=2+\frac{5}{4x}$	4. $x+\frac{1}{x-3}=5$
5. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}$	6. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}$
7. $\frac{2}{x+3}+\frac{x+3}{2}=\frac{10}{3}$	8. $\frac{3(x-1)}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x-1}=5$
9. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$	10. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$

164. 未知數ヲ含ム式ヲ以テ濫リニ方程式ニ掛ケ或ハ方程式ヲ割ルベカラザルヿハ既ニ第131節ニ於テ注意セシトコロナリ,其後掛クルヿニ就テハ例ヲ以テ注意スベキ要點ヲ示セリ,本節ニ於テハ未知數ヲ含ム式ヲ以テ方程式ヲ割ルヿヲ考フベシ

方程式ノ兩邊ガ未知數ヲ含ム式例ヘバ $x-a$ デ割リ切レルトイフヿハ,兩邊ガ $x-a$ ナル因數ヲ有スルトイフヿナリ,故ニ $x=a$ ト置クトキハ,兩邊ハ零トナル,即方程式ハ滿足セラル,故ニ a ハ此方程式ノ根ノ一ツナリ,乃此方程式ヲ $x-a$ デ割ルニハ,此方程式ノ根ノ一ツトシテ a ヲ預リ置クヿヲ要ス

一般ニ方程式ノ兩邊ガ未知數ヲ含ム式ニテ割リ切レルトキハ,此未知數ヲ含ム式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ未知數ノ値ハ元ノ方程式ノ根ナリ

割リ切レル割リ切レヌトイフヿハ整式ニ就テノミイフヿナルガ故ニ,分數式ニ就テハ割リ切レル割リ切レヌトイフヿナシ,然レ𪜈分數式ノ分子ガ或ル整式デ割リ切レ且其結果トシテ現ハルル分數式ノ分母ガ此整式ガ零トナルト同時ニ零トナルヿナキトキハ,元ノ分數式ハ此整式デ割リ切レルト稱スレバ,上ニ言ヘルヿハ其儘之ヲ分數方程式ニ當テ嵌ムルヿヲ得ベシ

例 (1) $(x-2)^2+3(x-2)=2(x-2)$ ヲ解ケ

此方程式ノ根ノ一ツトシテ2ヲ預リ置キ,$x-2$ デ割リテ

$$x-2+3=2$$

ヲ得,之ヲ解キテ $x=1$ ヲ得,乃嚮キニ預リ置キタル2ト此1トヲ以テ與ヘラレタル方程式ノ根トス

例 (2) $\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}+\dfrac{c}{x+c}=3$ ヲ解ケ

與ヘラレタル方程式ヲ少シク變形シテ

$$\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1+\frac{c}{x+c}-1=0$$

$$\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}+\frac{x}{x+c}=0$$

$x=0$ ヲ此方程式ノ根ノ一ツトシテ預リ置キ,x デ割リテ

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}=0$$

分母ヲ拂ヘバ

$$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=0$$

$$3x^2+2(a+b+c)x+bc+ca+ab=0$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$x=-\tfrac{1}{3}\{a+b+c\mp\sqrt{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}\}$$

此二ツノ値ト嚮キニ預リ置キタル 0 トヲ以テ答トス

第二十二問題集

1. $\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{11}{12}$

2. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}$

3. $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}$

4. $\frac{x}{x^2-1}=\frac{15-7x}{8(1-x)}$

5. $\frac{x}{x-2}+\frac{4}{x+1}=3$

6. $\frac{1}{3}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+11}=0$

7. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}$

8. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$

9. $\frac{3x}{x-2}-\frac{4}{x+3}+\frac{4}{2-x}=0$

10. $\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{x^2+4x}=\frac{9}{2x^2}$

11. $\frac{3x^2+x}{(3x+1)(x+1)}-1+\frac{x}{1+x}=0$

12. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$

13. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-1}$

14. $x-\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{x^2-3}{x+1}$

15. $\frac{1}{x^2-3x}-\frac{1}{9-x^2}=\frac{13}{16x}$

16. $\frac{1}{x^2-4}-\frac{3}{2-x}=1+\frac{1}{3x+6}$

17. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{2x}{x^2-4}=\frac{3}{(x+1)(x-2)}$

18. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}$

19. $\frac{x}{x-3}-\frac{x-3}{x}+\frac{x}{x+3}-\frac{x+3}{x}=\frac{2}{3}$

20. $\frac{x^2+x+1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{(1-x)(x+2)}=\frac{x}{(x^2-1)(x+2)}$

21. $\frac{x}{x-1}=\frac{3x}{(x-1)(x+2)}+\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}$

22. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$

23. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$

24. $\frac{a}{a+x}+\frac{a}{a-x}=4$

25. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

26. $\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b$

27. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}$

28. $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

29. $\frac{1}{x-a-b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$

30. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}$

31. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}$

165. 例 (1) 金144圓ヲ若干ノ人數ニ同額宛配分セリ,設シ人數ガ二人ダケ寡ナカリシナランニハ,各人ハ一圓宛多ク受取リタルナラントイフ,仍テ此人數ヲ索ム

x ヲ以テ人數ヲ表ハス𪜈ハ,各人ノ取リ前ハ $\frac{144}{x}$ 圓ナリ,又人數ガ $(x-2)$ 人ナル𪜈ハ各人ノ取リ前ハ $\frac{144}{x-2}$ 圓ナルベシ,故ニ題意ニヨリ

$$\frac{144}{x-2}=\frac{144}{x}+1$$

分母ヲ拂ヘバ $144x=144(x-2)+x(x-2)$,即 $x^2-2x=288$,此方程式ヲ解キテ $x=18$ 或ハ -16 ヲ得,然ルニ人數ハ正ノ整數ナラザルベカラズ,故ニ18人ヲ以テ唯一ノ答トス

例 (2) A, B ナル二列車ガ乙地ニ向ヒ甲地ヲ發スルト同時ニ,C, D ナル二列車ハ甲地ニ向ヒ乙地ヲ發セリ,A ト C トハ甲地ヲ距ル120哩ノ所ニテ行キ遇ヒ,A ト D ト

ハ甲地ヲ距ル140哩ノ所ニテ行キ遇ヘリ,又 B ト C トハ乙地ヲ距ル126哩ノ所ニテ行キ遇ヒ, B ト D トハ甲地ト乙地トノ半分路ノ所ニテ行キ遇ヘリトイフ,甲乙兩地間ノ距離幾哩ナルカ

甲乙兩地間ノ距離ヲ x 哩トシ, A, B, C, D ヲ以テ其儘各列車ノ速度(一時間每ニ行ク哩數)ヲ代表セシムベシ

問題ノ事實ヨリシテ直チニ斷定スルヿヲ得ルハ, B 列車ノ速度ハ D 列車ノ速度ニ等シキヿナリ,即 $B=D$

甲地ヨリ120哩ノ所ハ乙地ヨリ $(x-120)$ 哩ノ所ナリ,乃 A 列車ガ120哩ヲ行ク間ニ C 列車ハ $(x-120)$ 哩ヲ行ク,

故ニ　$\dfrac{120}{A}=\dfrac{x-120}{C}$,　$C=\dfrac{x-120}{120}A$

同樣ニ　$\dfrac{140}{A}=\dfrac{x-140}{D}$,　$D=\dfrac{x-140}{140}A$

$\dfrac{126}{C}=\dfrac{x-126}{B}$,　$B=\dfrac{x-126}{126}C$

$B=D$ ナルガ故ニ, $\dfrac{x-126}{126}C=\dfrac{x-140}{140}A$,　$C=\dfrac{126(x-140)}{140(x-126)}A$

仍テ次ノ方程式ヲ得

$$\frac{x-120}{120}=\frac{126(x-140)}{140(x-126)},\quad \frac{x-120}{6}=\frac{18(x-140)}{(x-126)}$$

$$(x-120)(x-126)=108(x-140)\ ,\quad x^2-354x=-30240$$

此方程式ヲ解キテ $x=177\pm33=210$ 或ハ 144 ヲ得,乃210哩或ハ144哩ヲ以テ答トス

第二十三問題集

1. 金144圓ヲ若干ノ人數ニ同額宛配分セリ,設シ人數ガ二人ダケ多カリシナランニハ,各人ハ一圓宛少ナク受取リタルナラントイフ,仍テ此人數ヲ索ム

2. 或ル人數ニテ會食セシ總費用金 $17\frac{1}{2}$ 圓ナリ,此內二人ノ招待客ヨリハ會費ヲ徵收セザリシガ爲メニ,一人分ノ割リ前ガ悉皆ノ人數ニ割リ當ツルヨリハ一圓宛多クナレリトイフ,總人數如何

3. 二個ノ水道管ノ懸リアル水槽アリ,一方ノ管ノ水ノミニテハ他ノ管ノ水ノミニテ滿タスヨリハ六時間早ク之ヲ滿タスヿヲ得,雙方ノ管ノ水ヲ同時ニ注グトキハ四時間ニテ之ヲ滿タスヿヲ得ルトイフ,二個ノ水道管ノ水ガ別別ニ水槽ヲ滿タスニ要スル時間各幾何ナルカ

4. 或ル人絹若干段ヲ金64圓ニテ買ヒ,之ヲ一段9圓ノ割リニ賣リ,總躰ニテ一段ノ元價ニ當ル金高ヲ儲ケタリトイフ,此人ノ買ヒ取リシ段數如何

5. 或ル人金1875圓ヲ以テ鐵道株若干枚ヲ買ヒ,內十五株ヲ所有シ,其餘ヲ一株ニ付元價ヨリハ四圓宛高ク賣リテ金1740圓ヲ得タリトイフ,最初此人ノ買ヒ

取リシ株數如何

6. 靜水ニ於テハ一時間4里ノ割リニ舟ヲ漕ギ行ル一組ノ水夫ガ12里ノ流レヲ上下スルニ8時間ヲ要セリトイフ,流水ノ速度一時間毎ニ幾里ナルカ

7. 甲ガ若干ノ日數ニテ仕上ゲ得ル仕事ヲ乙ガ仕上グルニハ12日ダケ餘計ニ日數ヲ要シ,甲乙兩人ニテ仕上グルニハ$14\frac{2}{5}$日ヲ要スベシトイフ,甲ハ此仕事ヲ仕上グルニ幾日ヲ要スルカ

8. 甲乙兩人ニテ或ル仕事ヲ仕上グルニ若干ノ日數ヲ要ス,各自別別ニ此仕事ノ半分宛ヲ仕上グルニハ甲ハ一日少ナク乙ハ二日多ク要スベシトイフ,兩人ニテ此仕事ヲ仕上グルニ要スル日數ヲ問フ

9. 或ル人米若干俵ヲ金216圓ニテ購買セリ,設シ米ノ相場一俵ニ付一圓方騰貴シタランニハ,同ジ金高ヲ以テ3俵少ナク買ヒ取リタルナラントイフ,此人米幾俵ヲ買ヒ取リタルカ

10. 鷄卵ヲ參拾錢ダケ買フニ,十個ニ付參錢宛廉價ニ買ヒタランニハ,五個多ク買ヒ取リタルナラントイフ,鷄卵十個ノ價如何

11. 甲ハ一錢銅貨ヲ以テ12個ノ林檎ノ代價ヲ仕拂ヒ,乙ハ12錢ダケノ林檎ヲ買ヘリ,而シテ甲ガ仕拂ヒシ一錢銅貨ノ數ハ乙ガ買ヒ取リシ林檎ノ數ノ二倍ヨリハ2ダケ多カリシトイフ,林檎ノ代價トシテ54錢ヲ仕拂ヒシ丙ガ買ヒ取リシ林檎ノ數幾個ナルカ

12. 白砂糖7斤ノ價ハ赤砂糖7斤ノ價ヨリハ貳拾壹錢高ク,白砂糖赤砂糖ヲ各貳圓四拾錢宛買ヒタルニ,白砂糖ハ赤砂糖ヨリハ4斤少ナカリシトイフ,赤砂糖7斤ノ代價何程

13. 或ル人牧草地若干町歩ヲ一ケ年金1400圓ノ借地料ニテ借リ受ケ,内8町歩ダケハ自ラ使用シ,其餘ヲ一町歩ニ付5圓宛利シテ又貸シセシガ爲メニ,總躰ノ借地料ヲ償フタル上ニ金40圓ヲ餘マセリトイフ,此人幾町歩ヲ借リ受ケシ乎

14. 12里ヲ隔テタル地ヘ向ケ甲乙二人ノ傳令使ヲ發セリ,甲ハ乙ヨリハ一時間毎ニ一里宛多ク行キテ乙ヨリハ一時間前ニ目的地ニ達セリトイフ,甲乙兩人ハ一時間毎ニ各幾里ヲ行キシカ

15. 7哩ヲ隔テタル地ヘ到ラントスル人,最初一哩ヲ行キタル後,速度ヲ一時間ニ付一哩早メタルガ爲メニ,速度ヲ變ヘザル積リノ豫定ヨリハ半時間早ク目的地ニ達セリトイフ,此人出發ヨリ到着マデニ幾時間ヲ要セシカ

16. 酒若干升ノ入リタル樽ト二倍ノ水ノ入リタル樽トアリ,各ノ樽ヨリ6升宛汲ミ出シ,酒ハ水樽ヘ水ハ酒樽ヘ注入セシニ,各ノ樽ノ中ニアル酒ト水トノ割合ガ同一トナレリトイフ,最初酒樽ノ中ニハ酒幾升アリシカ

17. 酒ト水トノ混合液一石アリ,之ニ酒一石ヲ加ヘタルトキノ酒ト水トノ割合ハ,之ニ水一石ヲ加ヘタルトキノ酒ト水トノ割合ノ九倍トナルベシトイフ,此混合液ノ中ニアル酒ト水トノ割合如何

18. A, Bナル二列車ガ乙地ニ向ヒ甲地ヲ發スルト同時ニC, Dナル二列車ハ甲地ニ向ヒ乙地ヲ發セリ,AトCトハ甲地ヲ距ル130哩ノ所ニテ行キ遇ヒ,AトDトハ甲地ヲ距ル156哩ノ所ニテ行キ遇ヘリ,又BトCトハ乙地ヲ距ル207哩ノ所ニテ行キ遇ヒ,BトDトハ甲地ト乙地トノ半分路ノ所ニテ行キ遇ヘリトイフ,甲乙兩地間ノ距離幾哩ナルカ

19. 甲ト乙トハ同ジ日數ノ間仕事ニ從事セリ,甲ハ此日數ノ內一日休ミテ金6圓ノ賃錢ヲ得,乙ハ此日數ノ內七日休ミテ金5圓40錢ノ賃錢ヲ得タリ,乙ガ一日休ミテ甲ガ七日休ミタリシナランニハ,乙ハ甲ヨリハ金2圓70錢ダケ多ク賃錢ヲ得タルナラントイ

フ,兩人ガ仕事ニ從事セシ日數如何

20. 甲ガB地ニ向ヒA地ヲ發スルト同時ニ乙ハA地ニ向ヒB地ヲ發セリ,兩人ガ出遇ヒタルマデニ甲ハ乙ヨリハ3里多ク行ケリ,又相會フテヨリ甲ハ4時間乙ハ9時間ヲ經テ各目的地ニ達セリトイフ,A地トB地トノ間ノ距離幾里ナルカ

21. 前問題ニ於テ,格段ナル數9, 4, 3ノ代リニソレゾレa^2, b^2, mヲ置キテ,之ヲ解ケ

22. 甲地ヨリ乙地ヘ向ケ10時間ニテ目的地ニ達スル豫定ヲ以テAナル使者ヲ發セシト同時ニ,甲地ヲ乙地ト反對ノ方向ニ距ル$3\frac{3}{4}$里ノ所ヨリBナル使者ヲ發セリ,BガAト同時ニ乙地ニ達スルニハ,Bガ一里ヲ行クニ要スル時間ハAガ一里ヲ行クニ要スル時間ヨリハ8分時間少ナカラザルベカラズトイフ,甲乙兩地間ノ距離如何

第十四編

無理式ヲ含ミタル方程式

平方根を方程式ニ含まれるもの

166. $x=a$ ナル方程式ノ兩邊ヲ自乘スルトキハ $x^2=a^2$ ヲ得ベシ,如何ニモ $x=a$ ナルトキハ $x^2=a^2$ ナルベシ,然レドモ方程式 $x=a$ ト方程式 $x^2=a^2$ トノ間ニハ肝要ナル區別アリ,$x^2=a^2$ ヲ解クトキハ $x=\pm a$ 即 $x=a$ 或ハ $-a$ ヲ得ベク,此中ニハ $x=a$ モアレドモ,又元ノ方程式ニハ全ク緣ナキ $x=-a$ モアリ,即方程式 $x^2=a^2$ ノ根ノ中ニハ元ノ方程式 $x=a$ ヲ滿足セザルモノモアリ

更ニ次ノ如キ觀察ヲ下ダストキハ此要點ヲ一層明瞭ニ理會スルヿヲ得ベシ

$x=a$ ナルトキハ $x-a=0$, $x^2=a^2$ ナルトキハ $x^2-a^2=0$ 即 $(x+a)(x-a)=0$, 故ニ $x=a$ ノ兩邊ヲ自乘スルトイフヿハ結局リ $x-a=0$ ナル方程式ノ兩邊ニ $x+a$ ヲ掛クルニ同ジ,而シテ漫リニ未知數ヲ含ム式ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛クルヿヲナスベカラザルハ既ニ前ニ繰リ返ヘシ注意セシトコロナリ,未知數ヲ含ム式ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ

掛クルトキハ,其結果トシテ現ハルル方程式ノ根ノ中ニハ,此式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ方程式ノ根即元ノ方程式トハ全ク緣ナキ根モ亦存在スベシ,例ヘバ $x^2+6x=3$ ノ兩邊ニ $x-5$ ヲ掛クルトキハ

$$(x-5)(x^2+6x)=3(x-5)$$

ヲ得ベク,此方程式ハ元ノ方程式トハ全ク緣ナキ5ナル根ヲ有スベキヤ明カナリ,而シテ方程式ノ兩邊ヲ自乘スルトイフヿハ,結局リ未知數ヲ含ム式ヲ以テ方程式ノ兩邊ニ掛クルトイフヿニ歸スルモノナルガ故ニ,漫リニ斯クノ如キヿヲナスベカラザルハ多言ヲ俟タザルベシ

凡テ方程式ヲ解ク途中ノ方法ノ不完全ナルヨリ生ズル,與ヘラレタル方程式ニハ全ク緣ナキ根ヲ **無緣根** ト稱ス

167. 無理式ヲ含ミタル方程式トイフベキヲ畧シテ無理方程式ト稱スルヿアリ

以下本編ニ於テハ未知數ヲ含ム式ノ平方根ヲ含ミタル方程式ノ解方ヲ論ズベシ

漫リニ方程式ノ兩邊ヲ自乘スベカラザルハ前節ニ詳論セルガ如シ,然ルニ無理方程式ヲ解クニハ,是非トモ方程式ノ兩邊ヲ自乘スルヿニヨリテ,之ヲ總テノ項ガ有理式ナル他ノ方程式ニ化セザルベカラズ,故ニ豫ジメ無緣

根ノ現ハレ出ヅルヿヲ覺悟セザルベカラズ,即無理方程式ヲ解クニハ,適宜方程式ノ兩邊ヲ自乘スルヿニヨリテ,之ヲ總テノ項ガ有理式ナル方程式ニ化シ,此方程式ヲ解キテ得タル根ノ中ノ何レガ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スルカヲ吟味スベシ

無理方程式ガ根ヲ有セザルヿモアルハ,分數方程式ガ根ヲ有セザルヿモアルト同樣ナリ,根ヲ有セザル無理方程式ヲ總テノ項ガ有理式ナル方程式ニ化シ,之ヲ解キテ得ベキ根ハ悉ク無緣根ナリ,即上ノ方法ニヨリ無理方程式ヲ解キテ得タル未知數ノ値ガ一ツモ與ヘラレタル方程式ヲ滿足セザルヿモアリト知ルベシ

例 (1) $2x-\sqrt{x^2-3x-3}=9$ ヲ解ケ

移項シテ　$2x-9=\sqrt{x^2-3x-3}$

自乘シテ　$4x^2-36x+81=x^2-3x-3$

移項シテ　$3x^2-33x+84=0$

3デ割リテ　$x^2-11x+28=0$

此方程式ヲ解キテ $x=7$ 或ハ 4 ヲ得,此レ等ノ x ノ値ヲ元ノ方程式ニ入レテ試ミルニ,7 ハ方程式ヲ滿足スルモ,4 ハ此方程式ニ適ハズ,故ニ $x=7$ ヲ以テ唯一ノ答トス

$x=4$ ハ方程式 $2x+\sqrt{x^2-3x-3}=9$ ヲ滿足スレドモ,此方程式ト與ヘラレタル方程式トハ全ク異ナレリ,コレハ恰

モ方程式 $x^2-3x=4$ ト方程式 $x^2+3x=4$ トガ相同ジカラザルガ如シ,故ニ $x=4$ ハ與ヘラレタル方程式ノ根ニアラズ

例 (2) $\sqrt{2x+8}-2\sqrt{x+5}=2$ ヲ解ケ

兩邊ヲ自乘シテ

$$2x+8+4(x+5)-4\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}=4$$

$$6x+24=4\sqrt{2x+8}\sqrt{x+5}$$

$$3x+12=2\sqrt{(2x+8)(x+5)}$$

兩邊ヲ平方ニシテ

$$9x^2+72x+144=4(2x+8)(x+5)$$

$$x^2=16\ ,\qquad x=4 \text{ 或ハ } -4$$

與ヘラレタル方程式ニ於テ,$x=4$ ト置クトキハ,$4-6=2$ トナル,コレ眞ナラズ,更ニ $x=-4$ ト置キテ試ミルニ,$-2=2$ トナル,コレモ亦眞ナラズ,乃與ヘラレタル方程式ハ根ヲ有セズ

例 (3) $x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6$ ヲ解ケ

兩邊ヨリ 2 ヲ減ズレバ

$$x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}=4$$

今 $\sqrt{x^2+3x-2}$ ヲ未知數ノ如クニ考フルトキハ,此方程式ハ二次方程式ト同樣ニ之ヲ取扱フヿヲ得ベシ,乃

$$(\sqrt{x^2+3x-2})^2+3\sqrt{x^2+3x-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\sqrt{x^2+3x-2}+\frac{3}{2}=\pm\frac{5}{2}\ ,\quad \sqrt{x^2+3x-2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}=1 \text{ 或ハ } -4$$

$\sqrt{x^2+3x-2}$ ハ正ナラザルベカラズ(第141節),故ニ -4 ハ之ヲ棄ツベキモノトス,乃 $\sqrt{x^2+3x-2}=1$, $x^2+3x-2=1$, 此二次方程式ヲ解キテ $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ ヲ得, $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ トスルトキハ,勿論 $x^2+3x-2=1$, 從テ $\sqrt{x^2+3x-2}=1$, 乃與ヘラレタル方程式ハ $1+3=4$ トナリ,コノ等式ハ眞ナリ,故ニ

$$x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2} \text{ 或ハ } \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$$

ヲ以テ答トス

例(4) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}+\sqrt{7x+1}=0$ ヲ解ク

此方程式ノ各項ハ何レモ正ニシテ,正ナル數ノ和ガ零トナル爲メニハ,各項ガ零トナラザルベカラズ,然ルニ同ジ x ノ値ニテハ此各項ハ零トナラズ,故ニ此方程式ハ不合理ナルヿ即根ヲ有セザルヿ一目瞭然タリ

$\boxed{\text{注意}}$ 凡テ無理方程式ヲ解キテ x ノ値ヲ索メ得タルトキハ,此レ等ノ x ノ値ノ中ノ何レガ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スルカヲ必ズ吟味スベシ

例題

次ノ方程式ヲ解ク

1. $\sqrt{x+2}=5$　　2. $\sqrt{3x+1}=4$　　3. $3\sqrt{x+3}=2\sqrt{3x+6}$

4. $\sqrt{x^2-9}+x=9$　　5. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=0$

第二十四問題集*

次ノ方程式ヲ解ク

1. $\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6$　　2. $x=7\sqrt{2-x^2}$

3. $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2}{3}$

4. $x-\sqrt{(x+4)(5x-24)}=2$

5. $2\sqrt{5+2x}-\sqrt{13-6x}=\sqrt{37-6x}$

6. $x-5\sqrt{x}=14$　　7. $3x-7\sqrt{x}+2=0$

8. $x+\sqrt{x+5}=7$　　9. $x^2+\sqrt{x^2+9}=21$

10. $2\sqrt{x^2-2x+1}+x^2=23+2x$

11. $\sqrt{x^2-6x+16}+(x-3)^2=13$

12. $9\sqrt{x^2-9x+28}+9x=x^2+36$

13. $2x^2+6x=226-\sqrt{x^2+3x-8}$

14. $x+2\sqrt{x^2+5x+2}=10$　　15. $3x+\sqrt{x^2+7x+5}=19$

16. $\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3$　　17. $\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$

18. $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-3}=6$　　19. $\sqrt{4x-3}-\sqrt{x-4}=4$

20. $5\sqrt{1-x^2}+5x=7$　　21. $a+\sqrt{a^2-x^2}=x$

22. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{2x+8}$

*此集ノ問題ヲ解キテ驗ヲ行フニ當リテハ, a ヲ正ノ數トスレバ, $\sqrt{a^2}$ ハ恒ニ正ナルヿ, 又 $\sqrt{-a}$ ハ $i\sqrt{a}$ ニシテ $-i\sqrt{a}$ ニアラザルヿニ注意セヨ

23. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{8x+9}$

24. $\sqrt{x+20}-\sqrt{x+4}=2\sqrt{x+11}$

25. $\sqrt{5x-1}-\sqrt{8-2x}=\sqrt{x-1}$

26. $\sqrt{x+7-\sqrt{5(x-2)}}=3$ 27. $\sqrt{2x+1-2\sqrt{2x+3}}=1$

28. $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b$ 29. $\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}$

30. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$

31. $2x\sqrt{a+x^2}+2x^2=a^2-a$ 32. $\dfrac{x+\sqrt{12a^2-x}}{x-\sqrt{12a^2-x}}=\dfrac{a+1}{a-1}$

33. $\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$

34. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$

35. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{x}$

36. $\sqrt{a(x-b)}+\sqrt{b(x-a)}=x$

---

37. 直角三角形ニ於テ,直角ヲ挾ム二邊ノ長サノ差ハ1尺ニシテ,周圍ノ長サハ12尺ナリトイフ,此三角形ノ三邊ノ長サ各如何

38. 直角三角形ニ於テ,直角ヲ挾ム長キ方ノ邊ノ長サハ短キ方ノ邊ノ長サノ三倍ヨリハ1尺短ク,長キ方ノ邊ノ長サト斜邊ノ長サトノ和ハ短キ方ノ邊ノ長サノ六倍ニ等シトイフ,斜邊ノ長サ如何

第十五編 高次方程式

168. 二次ヨリ高キ次數ノ方程式ヲ總稱シテ **高次方程式** ト稱ス

高次方程式ノ解法ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルモノトス,本編ニ於テハ,一次及二次ノ方程式ヲ解クニ用ヰタルモノト同一ノ工夫ニヨリテ解クヿヲ得ル特別ニシテ簡單ナル高次方程式ノ解法ヲ論ズベシ

169. 未知數 x ニ就テ整式ナル代數式ガ, $x=a$ ナル𪜈ニ零トナル𪜈ハ,此式ハ $x-a$ ニテ割リ切レルヿ既ニ第162節ニ證明セルガ如シ

例 x^3-3x^2-3x+1 ハ $x=-1$ ナル𪜈ニ零トナル,故ニ此式ハ $x+1$ ニテ割リ切レル,乃此式ヲ $x+1$ デ割リテ商 x^2-4x+1 ヲ得,故ニ

$$x^3-3x^2-3x+1=(x+1)(x^2-4x+1)$$

x^2-4x+1 ノ因數ヲ發見センガ爲メニ, $x^2-4x+1=0$ ト置キ,此方程式ヲ解キテ $x=2+\sqrt{3}$ 或ハ $2-\sqrt{3}$ ヲ得,故ニ

$$x^2-4x+1=(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$$

故ニ $$x^3-3x^2-3x+1=(x+1)(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$$

例　題

次ノ式ガ零トナル x ノ一ッノ値ヲ知リ,之ヲ因數ニ分解シテ後,掛ケ合ハセテ驗ヲ行ヘ

1. x^3-x^2+x-1 $[x=1]$　　2. x^3+2x^2+2x+1 $[x=-1]$
3. x^3-2x^2-x+2 $[x=1]$　　4. x^3-7x+6 $[x=1]$
5. x^3-1 $[x=1]$

170. 若干ノ因數ノ積トシテ表ハサレタル整式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ方程式ノ根ハ,此レ等ノ因數ヲ別別ニ零ニ等シト置キテ得ベキ諸ノ方程式ノ根ナリ,(第164節)例ヘバ

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

ハ $x=a$ 或ハ b 或ハ c ナル値ニヨリテ滿足セラルベシ,又 x ニ a, b, c 以外ノ値ヲ與フル𪜈ハ,左邊ノ因數ハ何レモ零トナラズシテ,零ニアラザル數ノ積ハ決シテ零トナルヿナキガ故ニ,x ニ a, b, c 以外ノ値ヲ與フルモ此方程式ハ決シテ滿足セラルルヿナキヤ明カナリ,同樣ニ

$$(x-a)(x^2+px+q)=0$$

ノ根ハ $x=a$ 及 $x^2+px+q=0$ ナル二次方程式ヲ解キテ得ベキ二ッノ根ナリ

三次方程式ノ一ッノ根ヲ觀察ニテ知ルヿヲ得タル𪜈ハ,此方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ集メテ得ベキ三次ノ整式

ノ一ッノ因數ヲ知ルヿヲ得ベク,此因數ヲ以テ三次式ヲ割リテ以テ他ノ二次式ナル因數ヲ索ムルヿヲ得ベシ,而シテ此二次式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ二次方程式ノ根ハ即與ヘラレタル方程式ノ殘リノ根ナリ

例 (1) $x=1$ ハ方程式 $x^3-6x^2+11x-6=0$ ノ一ッノ根ナルヿヲ知リテ此方程式ヲ解ケ

左邊ノ三次式ヲ $x-1$ デ割リテ x^2-5x+6 ヲ得,此式ヲ零ニ等シト置キテ,即實際ハ與ヘラレタル方程式ノ兩邊ヲ $x-1$ デ割リテ

$$x^2-5x+6=0$$

此二次方程式ヲ解キテ $x=2$ 或ハ 3 ヲ得,故ニ與ヘラレタル方程式ノ三ッノ根ハ $1, 2, 3$ ナリ

例 (2) $x^3=1$ ナル方程式ヲ解ケ

此方程式ノ一ッノ根ハ $x=1$ ナルヿ一目瞭然タリ

此方程式ニ於テ右邊ノ 1 ヲ左邊ヘ移シテ得ベキ三次式 x^3-1 ノ因數分解ハ揭ゲテ前節ノ例題中ニアリ,然レドモ此方程式ハ極メテ重要ナルモノナルガ故ニ,重複ヲ顧ミズ次ニ其解方ヲ揭グベシ

x^3-1 ヲ $x-1$ デ割リテ x^2+x+1 ヲ得,乃

$$x^2+x+1=0$$

$$x+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=-1+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}\ ,\quad x+\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{-3}}{2}=\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

故ニ方程式 $x^2+x+1=0$ ノ根ハ

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ニシテ,與ヘラレタル方程式 $x^3-1=0$ ノ根ハ

$$1,\quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ナリ

例題

次ノ方程式ノ一ッノ根ヲ知リテ他ノ根ヲ索メヨ

1. $x^3-2x+1=0$ [$x=1$]　2. $x^3-5x+4=0$ [$x=1$]

3. $x^3-49x+120=0$ [$x=3$]　4. $x^3-3x^2-7x+21=0$ [$x=3$]

---

5. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 及 $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ノ立方ヲ索ム

6. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ト $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ トノ積ヲ索ム

7. $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ト $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ トノ間ニ如何ナル關係アルカ,又 $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ト $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2$ トノ間ニ如何ナル關係アルカ

171. 立方根 或ル數ノ立方ガ與ヘラレタル數ニ等シキトキハ,此或ル數ヲ與ヘラレタル數ノ立方根ト稱シ,之ヲ書キ表ハスニハ,與ヘラレタル數ニ符號 $\sqrt[3]{}$ ヲ冠ラセルモノトス

與ヘラレタル有理數 a ヲ立方ニ開クコトヲ得ルハ,a ガ丁度或ル有理數ノ立方ナル場合ニ限ル,其他ノ場合ニ於テハ a ノ立方根ハ無理數ナリ(第138節ヲ參照セヨ)

正ノ數ノ立方ハ正ニシテ負數ノ立方ハ負ナルガ故ニ,a ノ或ハ正或ハ負ナルコトニ就テハ,立方根ヲ索ムル上ニ於テ,平方根ヲ索ムル場合ニ於ケルガ如キ困難アルコトナシ,例ヘバ8ノ立方根ハ2ニシテ,-8 ノ立方根ハ -2 ナリ

實數ノ範圍内ニ於テハ或ル數 a ノ立方根ハ唯一ッアリ,此立方根ヲ a ノ實數ノ立方根ト稱ス,a ノ實數ノ立方根及開キ切レザル場合ニ於ケル a ノ實數ノ立方根ノ近似値ハ,讀者ノ既ニ算術ニ於テ學ビタル開立ノ算法ニヨリテ之ヲ索ムベキモノトス

數ノ範圍ヲ虚數ニマデ推シ擴ムルト同時ニ a ノ立方根ハ一ッヨリモ多クアルコトナルハ次ニ示スガ如シ,仍テ混雜ヲ避ケンガ爲メニ,$\sqrt[3]{a}$ ハ a ノ實數ノ立方根ヲ表ハスモノト規約スベシ

或ル數ノ平方根ハ恒ニ二ッアルコトニ鑑ミルトキハ,或ル數ノ立方根モ亦一ッヨリハ多クアランコト必ズシモ之ヲ豫想シ難カラザルベシ

或ル有理數 a ノ立方根ヲ索メンガ爲メニ,之ヲ表ハス

ニxヲ以テスベシ,然ルトキハxノ立方ハaニ等シカラザルベカラズ,式ニテ書キ表ハセバ

$$x^3 = a$$

乃aノ立方根ハ此方程式ノ根ナラザルベカラズ,又此方程式ノ根ハ何レモaノ立方根ナリ

先ヅ第一ニ最モ簡單ナル場合即aガ1ナル場合ヲ論ズベシ,$a=1$トスルトキハ上ノ方程式ハ

$$x^3 = 1$$

トナリ,此方程式ノ根ハ既ニ前節ニ於テ發見セルガ如ク

$$1,\quad \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ニシテ,其數三個アリ,其内ノ一ツハ實數ニシテ他ノ二ツハ虚數ヲ含ミタル數ナリ

1ノ立方根ノ虚數ヲ含ミタルモノハ通例之ヲ表ハスニ希臘文字ω(「ヲメガ」ト讀ム)ヲ以テス,今

$$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\ \text{トスルトキハ}\ \omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$\omega=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\ \text{トスルトキハ}\ \omega^2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

故ニ虚數ヲ含ミタル立方根ノ中ノ何レカ一ツヲ表ハスニωヲ以テスルトキハ,即

$$\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\ \text{或ハ}\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

トスルトキハ,1ノ立方根ハ次ノ如シ

$$1,\quad \omega,\quad \omega^2$$

前ノ方程式$x^3=a$ニ立チ戻リテ考フルニ,此方程式ハ次ノ如クニ書キ直スコトヲ得ベシ

$$\left(\frac{x}{\sqrt[3]{a}}\right)^3 = 1$$

此方程式ヲ滿足スル$\frac{x}{\sqrt[3]{a}}$ノ値ハ$1, \omega, \omega^2$ナルガ故ニ,此方程式ノ根ハ

$$\sqrt[3]{a},\quad \omega\sqrt[3]{a},\quad \omega^2\sqrt[3]{a}$$

ニシテ,コレ即所要ノaノ立方根ナリ

是ニ由テ之ヲ觀レバ,或ル有理數ノ立方根ハ恒ニ三ツアリテ,其中ノ一ツハ實數ニシテ他ノ二ツハ虚數ヲ含ミタル數ナリ

172. 次ニ二次方程式ト同ジ樣ニシテ解クコトヲ得ル高次方程式ノ例ヲ掲グベシ

例 (1) $x^4-7x^2+12=0$ ヲ解ケ

x^2ヲ未知數其モノノ如クニ考フルトキハ,x^4ハx^2ノ平方ナルガ故ニ,此方程式ハ二次方程式ト全ク同ジ樣ニシテ解クコトヲ得ベシ,之ヲ解キテ

$$x^2=4 \quad \text{或ハ} \quad x^2=3$$

更ニ此二ツノ方程式ヲ解キテ$x=\pm2$, $x=\pm\sqrt{3}$ヲ得,故ニ與ヘラレタル方程式ノ根ハ次ノ如シ

$$2,\quad -2,\quad \sqrt{3},\quad -\sqrt{3}$$

例 (2) $x^2(x^2+2x)+4(x^2+x)=12-x^2$ ヲ解ケ

此方程式ハ次ノ如クニ書キ直スコヲ得ベシ

$$(x^2+x)^2+4(x^2+x)=12$$

x^2+x ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘ,之ヲ解キテ

$$x^2+x=2 \quad 或ハ \quad x^2+x=-6$$

ヲ得ベシ,更ニ此レ等ノ方程式ヲ解キテ $x=1$ 或ハ -2 及 $x=\frac{-1\pm i\sqrt{23}}{2}$ ヲ得,故ニ與ヘラレタル方程式ノ根ハ

$$1,\ -2,\ \frac{-1+i\sqrt{23}}{2},\ \frac{-1-i\sqrt{23}}{2}$$

ナリ

二次状方程式

0 例 (3) $x^6-7x^3=8$ ヲ解ケ

x^3 ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘ,之ヲ解キテ

$$x^3=8 \quad 或ハ \quad x^3=-1$$

ヲ得ベシ,更ニ $x^3=8$ ヲ解キテ $x=2$, 或ハ 2ω 或ハ $2\omega^2$ ヲ得,爰ニ ω ハ 1 ノ立方根ノ虚數ヲ含ミタルモノヲ表ハス,次ニ $x^3=-1$ ヲ解キテ $x=-1$ 或ハ $-\omega$ 或ハ $-\omega^2$ ヲ得,故ニ與ヘラレタル方程式ノ根ハ

$$2,\ 2\omega,\ 2\omega^2,\ -1,\ -\omega,\ -\omega^2$$

ナリ

$\boxed{注意}$ 問題ガ $x^6-7x^3=8$ ナル方程式ノ實數根ヲ索ムトイフモノナリシナランニハ,答ハ勿論 2 及 -1 ナリ

173. 例 $\frac{x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=\frac{5}{2}$ ヲ解ケ*

此方程式ヲ解クニハ,$\frac{x^2}{x+1}$ ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘテ之ヲ解クヲ便利ナリトス,借ニ一一 $\frac{x^2}{x+1}$ ト書クトキハ式ノ形チガ大キクナリテ不便ナルガ故ニ,便宜ノ爲メ暫クyヲ以テ $\frac{x^2}{x+1}$ ヲ代表セシムベシ,然ルトキハ與ヘラレタル方程式ハ次ノ如クニ書キ下ダスコヲ得ベシ

$$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$$

分母ヲ拂ヘバ $y^2+1=\frac{5}{2}y$, 此二次方程式ヲ解キテ $y=2$ 或ハ $\frac{1}{2}$ ヲ得,即

$$\frac{x^2}{x+1}=2 \quad 或ハ \quad \frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$$

左ノ方程式ヲ解キテ $x=1\pm\sqrt{3}$, 右ノ方程式ヲ解キテ $x=1$ 或ハ $-\frac{1}{2}$ ヲ得ベシ,故ニ與ヘラレタル方程式ノ根ハ

$$1+\sqrt{3},\quad 1-\sqrt{3},\quad 1,\quad -\frac{1}{2}$$

ナリ

---

*此方程式ハ分數方程式ナリ,分數方程式及無理方程式ニハ次數ナルモノアルコナシ,而シテ本編ハ題シテ高次方程式トイフ,故ニ此例ヲ本編中ニ收メタルハ穩當ナラズ,然レドモ別ニ編ヲ設ルノ繁ヲ避ケ便宜此處ニ掲ゲルコトセリ

第二十五問題集

1. $x^3-2x^2-7x-4=0$ ノ根ノ一ッハ -1 ナルコヲ知リテ殘リノ根ヲ索メヨ

2. $x^3-x^2-22x+40=0$ ノ一ッノ根ハ 2 ナルコヲ知リテ他ノ根ヲ索メヨ

視察ニヨリ根ノ一ッヲ索メ以テ次ノ三次方程式ヲ解ケ

3. $x^3-21x+20=0$

4. $x^3+2x^2-9x-18=0$

5. $x^3-19x+30=0$

6. $2x^3+7x^2-5x-4=0$

7. $4x^3+4x^2-9x-9=0$

8. $x^3-3x^2-60x=100$

9. $x^3+3ax^2=4a^3$

10. $5x^2(a-x)=(a^2-x^2)(x+3a)$

次ノ方程式ヲ解ケ

11. $x^4-13x^2+36=0$

12. $x^4-10x^2+9=0$

13. $x^4-6x^2+8=0$

14. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$

15. $(x^2+x)^2-22(x^2+x)+40=0$

16. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$

17. $x^6-19x^3=216$ ノ實數ナル根ヲ索ム

18. $x^6+7x^3-8=0$ ヲ解ケ

19. $x^4-2x^3+x^2=36$ ヲ解ケ

次ノ分數方程式ヲ解ケ

20. $x^2+\dfrac{100}{x^2}=29$

21. $\dfrac{x^2-1}{9}+\dfrac{1}{x^2}-1=0$

22. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}$

23. $x^2-\dfrac{1}{x^2}=a^2-\dfrac{1}{a^2}$

24. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2$

25. $\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{x^2+1}{x}=\dfrac{5}{2}$

26. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12$

27. $\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{37}{6}$

28. $x^2+x+1=\dfrac{42}{x^2+x}$

29. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$

30. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{3x}{1+x^2}$

31. $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-7}=0$

第十六編 聯立方程式

174. 二ッノ未知數ヲ表ハスニ x ト y トヲ以テシ, x ト y トヲ合ム二ッノ聯立方程式ノ中其解方ヲシテ二次方程式ノ解方ニ歸セシムルヿヲ得ルモノヲ論ズベシ

先ヅ第一ニ,二ッノ聯立方程式ノ一方ハ一次方程式ニシテ他ノ一方ハ二次方程式ナルモノノ解法ヲ例ヲ以テ示スベシ

例 (1) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$2y-3x=1\ ,\quad 13x^2-8xy+3=0$$

第一ノ方程式ヨリシテ

$$y=\frac{3x+1}{2}$$

此 y ノ値ヲ第二ノ方程式ノ中ニ置キ換ヘテ

$$13x^2-8x\left(\frac{3x+1}{2}\right)+3=0$$

$$x^2-4x+3=0$$

此 x ノミヲ含ム二次方程式ヲ解キテ $x=1$ 或ハ 3 ヲ得

$x=1$ ナルトキハ, $y=\dfrac{3x+1}{2}=2$

$x=3$ ナルトキハ, $y=\dfrac{3x+1}{2}=5$

故ニ $x=1$, $y=2$ 或ハ $x=3$, $y=5$ ヲ以テ答トス

注意 $x=1$ ト置クト同時ニ $y=2$ ト置クトキハ,上ノ聯立方程式ハ滿足セラルベシ,故ニ $x=1$, $y=2$ ハ一組ヲ成ス,又 $x=3$, $y=5$ ハ別ノ一組ヲ成ス,然レトモ $x=1$, $y=5$ ハ方程式ヲ滿足セズ,故ニ聯立方程式ノ答ヲ記スルニハ根ノ組ミ合ハセヲ明カニセザルベカラズ,例ヘバ上ノ聯立方程式ノ答ヲ記スルニ, $x=1$ 或ハ 3, $y=2$ 或ハ 5 ト記スルガ如キ曖昧ナル書キ方ヲ用ヰルベカラズ

上ノ例ノ示スガ如ク,一次方程式ト二次方程式トヨリ成ル聯立方程式ヲ解クニハ,一次方程式ヨリシテ二ッノ未知數ノ何レカ一方ヲ他ノ未知數ト既知數トニテ表ハシ,之ヲ二次方程式ニ置キ換ヘテ得ベキ未知數一ッノ二次方程式ヲ解クベシ

例 (2) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$2xy-13x-8y+49=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$3xy-9x-19y+77=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

與ヘラレタル二ッノ方程式ハ何レモ一次方程式ニアラズ,然レトモ吾人ハ此レ等ノ方程式ヨリシテ容易ニ一次方程式ヲ誘出スルヿヲ得ベシ,乃(1)ニ3ヲ掛ケ(2)ニ2ヲ掛ケテ後減ッテ

$$-39x+18x-24y+38y+147-154=0$$

$$3x-2y+1=0$$

此一次方程式ヨリシテ

$$y=\frac{3x+1}{2}\text{..........................}(3)$$

ヲ得,(1)ニyノ此値ヲ置キ換ヘテ

$$x(3x+1)-13x-4(3x+1)+49=0$$

$$3x^2-24x+45=0$$

$$x^2-8x+15=0$$

此二次方程式ヲ解キテ$x=3$或ハ5ヲ得,次ニ(3)ヨリシテ

$x=3$ナルトキハ　$y=5$

$x=5$ナルトキハ　$y=8$

ヲ得,乃$x=3$, $y=5$或ハ$x=5$, $y=8$ヲ以テ答トス

例題

次ノ聯立方程式ヲ解キテ後驗ヲ行ヘ

1. $3x^2-2xy=5$, $x-y=2$
2. $xy+x=25$, $2xy-3y=28$
3. $x+y=6$, $x^2-y^2=24$
4. $x+y=11$, $xy=30$
5. $x-y=4$, $x^2+y^2=40$

175. 一次方程式ト二次方程式トヨリ成ル聯立方程式ヲ解クニ,或ル特別ナル場合ニ於テハ,次ニ例示スルガ如キ方法ヲ用ヰルコヲ得ベシ

例(1)　次ノ聯立方程式ヲ解ク

$$x^2-y^2=24\text{..........................}(1)$$

$$x+y=6\text{..........................}(2)$$

各邊ニ就キ(1)ヲ(2)デ割リテ

$$x-y=4\text{..........................}(3)$$

(2)ト(3)トヲ加ヘテ$2x=10$,故ニ$x=5$,(2)ヨリ(3)ヲ減ジテ$2y=2$,故ニ$y=1$,乃$x=5$, $y=1$ヲ以テ答トス

$\boxed{\text{注意}}$ 一次方程式ト二次方程式トヨリ成ル聯立方程式ノ答ハ通例二組アルモノナレド,上ノ例ノ示スガ如ク,或ル時ハ答ガ一組限リ出ヅルコアリ

例(2)　次ノ聯立方程式ヲ解ク

$$x+y=4\text{..................}(1)$$

$$xy=3\text{..................}(2)$$

(1)ヲ自乘スレバ　$x^2+2xy+y^2=16$

(2)ニ4ヲ乘ズレバ　$4xy\quad=12$

減ジテ　$x^2-2xy+y^2=4$

平方ニ開キテ　$x-y=\pm2\text{..............}(3)$

(1)ト(3)トヲ加ヘテ$2x=6$或ハ2,故ニ$x=3$或ハ1,次ニ

(1) ヨリ (3) ヲ減シテ $2y=2$ 或ハ 6, 故ニ $y=1$ 或ハ 3, 爰ニ注意スベキハ, (3) ニ於テ右邊ヲ $+2$ ト採リテ得ベキ x ト y トノ値ガ一組ヲ成シ, 又 -2 ト採リテ得ベキ x ト y トノ値ガ別ニ一組ヲ成スコナリ, 乃 $x=3$, $y=1$ 或ハ $x=1$ $y=3$ ヲ以テ答トス

$\boxed{\text{注意}}$ 此問題ハ結局リ x ト y トノ和ハ 4 ニシテ, x ト y トノ積ハ 3 ナルヲ知リ, 此二ッノ數ヲ索ムルモノナルガ故ニ, x ハ元ノ方程式中ニアリテ混雜ヲ生ズル恐レアルガ故ニ z ヲ以テ未知數ヲ表ハセバ, 所要ノ數ハ方程式 $z^2-4z+3=0$ ノ二ッノ根ナリ, 此方程式ヲ解キテ以テ x ト y トノ値ヲ索ムルコヲ得ベシ

例 (3) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$x-y=4 \qquad\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$x^2+y^2=40 \qquad\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1) ヲ平方ニスレバ　$x^2-2xy+y^2=16 \cdots\cdots\cdots (3)$

(3) ヨリ (2) ヲ減シテ　$-2xy=-24 \cdots\cdots\cdots (4)$

(2) ヨリ (4) ヲ減シテ　$x^2+2xy+y^2=64$

平方ニ開キテ　$x+y=\pm 8 \cdots\cdots\cdots (5)$

(5) ト (1) トヲ組ミ合ハセテ $x=6$, $y=2$ 或ハ $x=-2$, $y=-6$ ヲ得テ答トス

第二十六問題集

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

1. $x-y=1$,　$x^2-xy+y^2=21$
2. $2x-5y=3$,　$x^2+xy=20$
3. $x+y=7(x-y)$,　$x^2+y^2=100$
4. $x-y=3$,　$x^2+y^2=65$
5. $5(x^2-y^2)=4(x^2+y^2)$,　$x+y=8$
6. $4x-5y=1$,　$2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47$
7. $4x+9y=12$,　$2x^2+xy=6y^2$
8. $(x-6)^2+(y-5)^2+2xy=60$,　$5y-4x=1$
9. $4x^2+2xy+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{5}{12}(4x+y)=41$,　$4x-y=4$
10. $\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{10}=x-y$,　$\dfrac{7xy}{15}-\dfrac{2x}{3}-2y=0$
11. $3x+2y=5xy$,　$15x-4y=4xy$
12. $xy+2=9y$,　$xy+2=x$
13. $8(xy+1)=33y$,　$4(xy+1)=33x$
14. $xy=x+y$,　$ax=by$
15. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$,　$xy=ab$
16. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$,　$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=a+b$
17. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$,　$x^2+y^2=ax+by$
18. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$,　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

176. 二ツノ二次方程式ヨリ成ル聯立方程式ヲ解クニハ,一般ニ論ズルトキハ,未知數一ツノ二次以上ノ方程式ヲ解カザルベカラズ,例ヘバ

$$x^2+x+y=1\ ,\quad 2x^2+y^2=3$$

ナル聯立方程式ヲ解カンガ爲メニ,第一ノ方程式ヨリシテ y ヲ x ト既知數トニテ表ハセバ,$y=1-x-x^2$,之ヲ第二ノ方程式ニ置キ換ヘレバ

$$2x^2+(1-x-x^2)^2=3\ ,\ \text{即}\ x^4+2x^3+x^2-2x-2=0$$

コレ四次ノ方程式ナリ

一般ニ,未知數一ツノ二次以上ノ方程式ヲ解クヿ,從テ二ツノ二次方程式ヨリ成ル聯立方程式ヲ解クヿハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルモノトス

177. 聯立方程式ヲ組成スル二ツノ方程式ノ未知數ヲ含ム各項ガ未知數ニ就テ同次(第84節參照)ニシテ二次ナルトキハ,次ニ例示スル方法ニヨリテ一般ニ之ヲ解クヿヲ得ベシ

例 (1) 次ノ聯立方程式ヲ解ク

$$x^2+xy+2y^2=44 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2x^2-xy+y^2=16 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

此種類ノ聯立方程式ヲ解ク秘訣ハ,與ヘラレタル二ツノ方程式ヲ適宜ニ組ミ合ハセテ,未知數ヲ含マザル項ノ

存在セザル方程式ヲ得ルニアリ,偖テ

$$\frac{x^2+xy+2y^2}{44}=1\ ,\quad \frac{2x^2-xy+y^2}{16}=1$$

故ニ

$$\frac{2x^2-xy+y^2}{16}=\frac{x^2+xy+2y^2}{44}$$

$$11(2x^2-xy+y^2)=4(x^2+xy+2y^2)$$

括弧ヲ外ヅシ,左邊ニ集メ,同類項ヲ約スレバ

$$3y^2-15xy+18x^2=0$$

$$y^2-5xy+6x^2=0 \ldots\ldots\ldots (3)$$

x ハ零ニアラズ,如何トナレバ,x ガ零ナルトキハ(3)ニヨリ y モ零ナラザルベカラズ,而シテ $x=0$, $y=0$ ハ(1),(2)ノ何レヲモ滿足セザルヿ明カナリ,仍テ(3)ヲ x^2 デ割リテ

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2-5\left(\frac{y}{x}\right)+6=0$$

今 $\left(\frac{y}{x}\right)$ ヲ未知數其モノノ如クニ考フレバ,此レ未知數一ツノ二次方程式ナリ,之ヲ解キテ $\frac{y}{x}=2$ 或ハ 3, 乃

$$y=2x\quad \text{或ハ}\quad y=3x$$

ヲ得,$y=2x$ トスルトキハ,(1)ハ $11x^2=44$,(2)ハ $4x^2=16$ トナリ,何レニシテモ $x^2=4$,故ニ $x=\pm2$,從テ $y=\pm4$ ヲ得,又 $y=3x$ トスルトキハ(1)モ(2)モ結局リ $x^2=2$ トナル仍テ $x=\pm\sqrt{2}$,從テ $y=\pm3\sqrt{2}$,乃次ノ四組ノ答ヲ得

$$[2,\ 4]\ ,\quad [-2,\ -4]\ ,\quad [\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}]\ ,\quad [-\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}]$$

上ノ例ノ示スガ如ク,二ッノ二次方程式ヨリ成ル聯立方程式ノ未知數ヲ含ム項ガ同次ニシテ二次ナル𪜈ハ,與ヘラレタル二ッノ方程式ヨリシテ未知數ヲ含マザル項ガ存在セザル方程式ヲ誘出シ,之ヲ未知數ノ何レカ一方ノ平方デ割リテ得ベキ二ッノ未知數ノ比ノミヲ含ム二次方程式ヲ解クベシ

此方法ノ大眼目トスルトコロハ二ッノ未知數ノ比ヲ索ムルニアリ,故ニ初メヨリ其積リニテ未知數ノ比 $\frac{y}{x}$ ヲ一ッノ文字例ヘバ v ヲ以テ表ハシ,即 $y=vx$ ト置キテ,v ノ値ヲ索ムルモ可ナリ

例 (2) $2x^2+3xy+y^2=70$, $6x^2+xy-y^2=50$ ヲ解ク

$y=vx$ ト置ク𪜈ハ,此二ッノ方程式ハ次ノ如クニ書クヿヲ得ベシ

$$x^2(2+3v+v^2)=70,\quad x^2(6+v-v^2)=50$$

$$\frac{x^2(2+3v+v^2)}{70}=1=\frac{x^2(6+v-v^2)}{50}$$

$$5(2+3v+v^2)=7(6+v-v^2)$$

$$12v^2+8v-32=0,\quad 3v^2+2v-8=0$$

此二次方程式ヲ解キテ $v=\frac{4}{3}$ 或ハ -2 ヲ得

方程式 $x^2(2+3v+v^2)=70$ ニ於テ v ノ代リニ $\frac{4}{3}$ ヲ置キ換ヘテ得ベキ方程式ヲ解キテ $x=\pm3$ ヲ得,$y=vx$ ナルガ

故ニ $y=\pm4$ ヲ得

$v=-2$ トスル𪜈ハ,$x^2(2+3v+v^2)=70$ ニ於テ $2+3v+v^2$ ガ零トナルガ故ニ,$v=-2$ ハ不合理ナリ,故ニ $x=3$, $y=4$ 或ハ $x=-3$, $y=-4$ ヲ以テ答トス

注意 與ヘラレタル方程式ハ次ノ如クニ書クヿヲ得

$$(2x+y)(x+y)=70,\quad (2x+y)(3x-y)=50$$

凡テ此二ッノ方程式ノ如ク,未知數ヲ含ム項ヲ一邊ニ集メテ得ベキ二次ノ同次式ガ公約數ヲ有スル𪜈ハ,v ノ不合理ナル値ヲ得ベシ,此塲合ニ於クル適當ナル解釋ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルモノトス,初等代數學ニ於テハ單ニ v ノ不合理ナル値ニ對應スル x ト y トノ値ナシトイフヲ以テ足レリトス

178. 二ッノ二次方程式ヨリ成ル聯立方程式ヲ解クニ,或ル特殊ノ塲合ニ於テハ,次ニ例示スルガ如キ方法ヲ用ヰルヲ得ルヿアリ

例 (1) 次ノ聯立方程式ヲ解ク

$$x^2+y^2=74 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$xy=35 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ニ (2) ノ二倍ヲ加ヘテ

$$x^2+2xy+y^2=144$$

$$x+y=\pm12 \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(1)ヨリ(2)ノ二倍ヲ減ジテ

$$x^2-2xy+y^2=4$$

$$x-y=\pm 2 \quad\cdots\cdots(4)$$

$x+y=12$, $x-y=2$ ヨリシテ $x=7$, $y=5$

$x+y=12$, $x-y=-2$ ヨリシテ $x=5$, $y=7$

$x+y=-12$, $x-y=2$ ヨリシテ $x=-5$, $y=-7$

$x+y=-12$, $x-y=-2$ ヨリシテ $x=-7$, $y=-5$

ヲ得,此 x ト y トノ四組ノ値ヲ以テ答トス

例(2)　次ノ方程式ヲ解ケ

$$x^2+xy+2y^2=44 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-xy+y^2=16 \quad\cdots\cdots(2)$$

此レハ前節ノ例(1)ナリ,次ニ此聯立方程式ヲ解ク別法ヲ示ス

(1)ト(2)トヲ加ヘテ後3デ割リテ

$$x^2+y^2=20 \quad\cdots\cdots(3)$$

(1)ヨリ(3)ヲ減ジテ $xy+y^2=24$, 故ニ $y^2=24-xy$

(2)ヨリ(3)ヲ減ジテ $x^2-xy=-4$, 故ニ $x^2=xy-4$

故ニ

$$x^2y^2=(24-xy)(xy-4)$$

$$2(xy)^2-28(xy)=-96$$

$$(xy)^2-14(xy)=-48$$

此方程式ヲ解キテ $xy=8$ 或ハ 6 ヲ得

$xy=8$ トスレバ $x^2=4$, $y^2=16$

$xy=6$ トスレバ $x^2=2$, $y^2=18$

倘ホ xy ハ正ナルガ故ニ x ト y トハ同ジ符號ヲ有セザルベカラザルヿニ注意シテ,前ニ得タルモノト同ジ四組ノ答ヲ得

第二十七問題集

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

1.　$y^2-3xy=0$,　$3x^2+5y^2=48$

2.　$x^2-2xy=0$,　$4x^2+9y^2=225$

3.　$x^2+xy=28$,　$xy-y^2=3$

4.　$x^2+xy=45$,　$y^2+xy=36$

5.　$2x^2-xy=56$,　$2xy-y^2=48$

6.　$x^2-2xy=15$,　$xy-2y^2=7$

7.　$x^2+3xy=28$,　$xy+4y^2=8$

8.　$x^2+xy-6y^2=21$,　$xy-2y^2=4$

9.　$x^2+3xy=54$,　$xy+4y^2=115$

10.　$x^2+y^2=97$,　$xy=36$

11.　$x(x+y)=40$,　$y(x-y)=6$

12.　$x^2-2xy+5=0$,　$(x-y)^2=4$

13.　$x^2-7xy-9y^2=9$,　$x^2+5xy+11y^2=5$

14. $x^2+3xy=40$, $4y^2+xy=9$

15. $2y^2-4xy+3x^2=17$, $y^2-x^2=16$

16. $x(x+y)+y(x-y)=158$, $7x(x+y)=72y(x-y)$

17. $x^2+xy=a(a+b)$, $x^2+y^2=a^2+b^2$

18. $x^2+2xy-y^2=a^2+2a-1$, $(a-1)x(x+y)=a(a+1)y(x-y)$

---

179. 次ニ熟練ト經驗トニヨリテノミ發見スルコヲ得ル特殊ノ工夫ニヨリテ解クコヲ得ル二三ノ例ヲ掲ク

例 (1) $x+y=5$, $x^3+y^3=65$ ヲ解ク

第二ノ方程式ハ次ノ如クニ書クコヲ得ベシ

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=65$$

第一ノ方程式ニヨリ $x+y$ ノ代リニ 5 ヲ置キテ

$$5(x^2-xy+y^2)=65$$

$$x^2-xy+y^2=13 \text{..........} (1)$$

第一ノ方程式ヲ平方ニスレバ

$$x^2+2xy+y^2=25 \text{..........} (2)$$

(2) ヨリ (1) ヲ減ジテ　$3xy=12$　故ニ

$$xy=4 \text{..........} (3)$$

(1) ヨリ (3) ヲ減ジテ

$$x^2-2xy+y^2=9$$

平方ニ開キテ $x-y=\pm3$, 此方程式ト $x+y=5$ トヨリシテ $x=4$, $y=1$ 或ハ $x=1$, $y=4$ ナル二組ノ答ヲ得

$\boxed{\text{注意}}$ 第二ノ方程式ヲ第一ノ方程式デ割リテ

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{65}{5}, \quad \text{即} \ x^2-xy+y^2=13$$

箇様ニシテ方程式 (1) ヲ得ルモ可ナリ

別法　$x+y=5$ ヨリ $y=5-x$, 之ヲ $x^3+y^3=65$ ニ入レテ

$$x^3+(5-x)^3=65, \quad x^3+125-75x+15x^2-x^3=65$$

$$15x^2-75x+60=0, \quad x^2-5x+4=0$$

ヲ得, 之ヲ解キテ $x=4$ 或ハ 1, コレヨリシテ前ニ得タルモノト同ジ二組ノ答ヲ得ベシ

例 (2) 次ノ聯立方程式ヲ解ク

$$x^2+xy+y^2=19 \text{..............} (1)$$

$$x^4+x^2y^2+y^4=133 \text{............} (2)$$

(2) ノ左邊ノ式ノ分解ニ思ヒ付キタル人ハ容易ニ此聯立方程式ノ解方ヲ工夫スルコヲ得ベシ

$$x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2), \quad 133=19\times7$$

ナルコニ注意シ, (2) ヲ (1) デ割リテ

$$x^2-xy+y^2=7 \text{................} (3)$$

(1) ヨリ (3) ヲ減ジテ　$2xy=12$, 故ニ

$$xy=6 \text{................} (4)$$

(3) ニ (4) ヲ加ヘテ　$x^2+y^2=13 \text{..............} (5)$

(4) ト (5) トヨリシテ次ノ四組ノ答ヲ得

$$[3, 2],\ [-3, -2],\ [2, 3],\ [-2, -3]$$

例 (3)　$x-y=2$, $x^5-y^5=242$ ヲ解ケ

割リテ $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}=\dfrac{242}{2}$，即 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=121$

$$x^4+y^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2=121 \ldots\ldots\ldots (1)$$

又 $x-y=2$ ノ兩邊ヲ自乘スレバ

$$x^2-2xy+y^2=4$$

$$x^2+y^2=2xy+4 \ldots\ldots\ldots (2)$$

此方程式ノ兩邊ヲ自乘スレバ

$$x^4+2x^2y^2+y^4=4x^2y^2+16xy+16$$

$$x^4+y^4=2x^2y^2+16xy+16 \ldots\ldots\ldots (3)$$

(1) ニ於テ x^2+y^2 ノ代リニ (2) ノ右邊, x^4+y^4 ノ代リニ (3) ノ右邊ヲ置キ換フレバ

$$2x^2y^2+16xy+16+xy(2xy+4)+x^2y^2=121$$

$$5x^2y^2+20xy=105\ ,\quad x^2y^2+4xy=21$$

此方程式ヲ解キテ $xy=3$ 或ハ -7 ヲ得ベシ

$x-y=2$, $xy=3$ ヲ解キテ $x=3$, $y=1$ 或ハ $x=-1$, $y=-3$ ヲ得ベシ

$x-y=2$, $xy=-7$ ヲ解キテ $x=1+i\sqrt{6}$, $y=-1+i\sqrt{6}$ 或ハ $x=1-i\sqrt{6}$, $y=-1-i\sqrt{6}$ ヲ得ベシ

別法　$x=z+1$ ト置クトキハ, $x-y=2$ ニヨリ, $y=z-1$, 此レ等ノ x ト y トノ値ヲ $x^5-y^5=242$ ニ入ルレバ

$$(z+1)^5-(z-1)^5=242$$

$$z^5+5z^4+10z^3+10z^2+5z+1-(z^5-5z^4+10z^3-10z^2+5z-1)=242$$

$$10z^4+20z^2+2=242\ ,\quad z^4+2z^2=24$$

此方程式ヲ解キテ $z^2=4$ 或ハ -6, 從テ $z=\pm 2$ 或ハ $\pm i\sqrt{6}$ ヲ得, コレヨリシテ前ニ得タルモノト同ジ四組ノ答ヲ得ベシ

例 (4)　次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$2x^2-xy+y^2=2y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2x^2+4xy=5y \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ノ 5 倍ヨリ (2) ノ 2 倍ヲ減ジテ

$$6x^2-13xy+5y^2=0$$

$x=0$ ナルトキハ $y=0$, 而シテ $x=0$, $y=0$ ハ (1) ト (2) トヲ滿足スルヿヲ確メタル後, 之ヲ預リ置キ, x^2 デ割リテ

$$6-13\left(\frac{y}{x}\right)+5\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$$

此方程式ヲ解キテ, $\dfrac{y}{x}=2$ 或ハ $\dfrac{3}{5}$ ヲ得

$y=2x$ トスルトキハ, (2) ハ $10x^2=10x$, 即 $x=1$ 或ハ 0

$y=\dfrac{3}{5}x$ トスルトキハ, (2) ハ $\dfrac{22}{5}x^2=3x$, 即 $x=\dfrac{15}{22}$ 或ハ 0

仍テ $[0, 0]$, $[1, 2]$, $\left[\dfrac{15}{22}, \dfrac{9}{22}\right]$ ナル三組ノ答ヲ得

例題

1. $x-y=2$, $x^3-y^3=386$ ヲ本節ノ例(1)ニ傚ヒテ解キタル後,例(1)ノ別法ニ準ヒテ解キ,更ニ $x=z+1$, $y=z-1$ ト置キテ解ケ

2. $x^2-9y^2=8$, $x-3y=2$ ナル聯立方程式ヲ,第一ノ方程式ヲ第二ノ方程式デ割リテ,解ケ

3. 本節ノ例(1)ニ於テ $x=z+4$, $y=1-z$ ト置キテ,之ヲ解ケ

180. 本編ノ目的トスルトコロハ,既ニ冒頭ニ於テ言ヘルガ如ク,未知數二ツノ聯立方程式ノ解法ヲ論ズルニアリ,未知數三ツノ聯立方程式ニシテ其中ノ少ナクモ一ツガ一次以上ノ方程式ナルモノノ解法ハ非常ニ複雜ナルガ故ニ,通例之ヲ初等代數學ノ範圍外ニ置クモノトス,唯極メテ簡單ナル一例ヲ次ニ掲グ

例 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$xy+xz=27 \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$yz+xy=32 \quad\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$xz+yz=35 \quad\cdots\cdots\cdots (3)$$

與ヘラレタル方程式ヲ加ヘテ

$$2xy+2xz+2yz=94$$

$$xy+xz+yz=47 \quad\cdots\cdots\cdots (4)$$

(4)ヨリ別別ニ(1),(2),(3)ヲ減ジテ

$$yz=20\cdots\cdots(5) \qquad xz=15\cdots\cdots(6) \qquad xy=12\cdots\cdots(7)$$

ヲ得,(5),(6),(7)ヲ掛ケ合ハセテ

$$x^2y^2z^2=20\times15\times12=3600$$

$$xyz=\pm60 \quad\cdots\cdots\cdots (8)$$

$xyz=60$ ヲ別別ニ(5),(6),(7)デ割リテ

$$x=3, \quad y=4, \quad z=5$$

$xyz=-60$ ヲ別別ニ(5),(6),(7)デ割リテ

$$x=-3, \quad y=-4, \quad z=-5$$

ヲ得,此レ等ノ二組ヲ以テ答トス

181. 聯立方程式ノ中ニ分數式又ハ無理式ガアルトキハ,次ノ例ノ示スガ如クニシテ,之ヲ解クベシ

例(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=25$ ヲ解ケ

此種類ノ聯立方程式ヲ解クニハ, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘ,之ヲ解キテ $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{y}$ ノ値ヲ索メ而シテ後 x 及 y ノ値ヲ索ムベシ,但計算ノ途中ニ於テ混雜ヲ生ズル掛念アルトキハ, $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$ ト置クベシ

例(2) $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}$, $x^2-y^2=3$ ヲ解ケ

第一ノ方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$(x+y)^2+(x-y)^2=\frac{10}{3}(x^2-y^2)$$

$$2x^2+2y^2=\frac{10}{3}(x^2-y^2)$$

然ルニ $x^2-y^2=3$ ナルガ故ニ

$$2x^2+2y^2=10\,,\qquad x^2+y^2=5$$

乃 $x^2+y^2=5$, $x^2-y^2=3$ ヨリシテ x^2 及 y^2, 從テ x 及 y ノ値ヲ索ムルヿヲ得ベシ

例 (3) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ

$$2x+y+6\sqrt{2x+y+4}=23\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$4x^2-6x=y^2+3y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ヲ書キ直シテ

$$2x+y+4+6\sqrt{2x+y+4}=27$$

$\sqrt{2x+y+4}$ ヲ未知數其モノノ如クニ考ヘ,此方程式ヲ解キテ $\sqrt{2x+y+4}=3$ 或ハ -9 ヲ得ベシ,然レ𪜈 -9 ハ不合理ナリ,故ニ $\sqrt{2x+y+4}=3$, 之ヲ自乘シテ

$$2x+y+4=9$$

$$2x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) ト (3) トヨリシテ $x=2$, $y=1$ ヲ得ベシ, $x=2$, $y=1$ トスル𬼀ハ (1) ト (2) トハ滿足セラルルガ故ニ, $x=2$, $y=1$ ヲ以テ答トス

第二十八問題集

次ノ聯立方程式ヲ解ケ

1. $x-y=2$, $x^3-y^3=152$
2. $x+y=9$, $x^3+y^3=189$
3. $x^2+y^2=20$, $xy-x-y=2$
4. $x-y=1$, $x^5-y^5=781$
5. $x+y=3$, $x^5+y^5=33$
6. $x^2+xy+y^2=37$, $x^4+x^2y^2+y^4=481$
7. $x^2-xy+y^2=9$, $x^4+x^2y^2+y^4=243$
8. $x^2-2xy=3y$, $2x^2-9y^2=9y$
9. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=25$
10. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4y^2}=3$, $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{xy}+\frac{1}{4y^2}=9$
11. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}$, $x^2+y^2=90$
12. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{25}{7}$, $xy=48$
13. $\frac{x}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=1$, $2+3xy=3x$
14. $x^2+y^2=34$, $x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20$
15. $x^2y(x+y)=80$, $x^2y(2x-3y)=80$
16. $xy(x-y)=12$, $x^3-y^3=63$

17. $x^2+y^2-1=2xy$,　$xy(xy+1)=6$

18. $4x^2+y^2+2(2x+y)=6$,　$4xy(xy+1)=3$

19. $x^2+xy=8x+3$,　$y^2+xy=8y+6$

20. $x^2-xy=2x+5$,　$xy-y^2=2y+2$

21. $x^3+1=9y$,　$x^2+x=6y$

22. $2x^3-5y^3=115$,　$3x^3-7y^3=186$

23. $2(x+y)^2=9(x+y)+18$,　$(x-y)^2=6-(x-y)$

24. $(x+y)^2+(x+y)-2xy=4$,　$(x+y)^2-3xy=1$

25. $x^2+y^2+x+y=4$,　$x^2+y^2-xy=1$

26. $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13$,　$3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9$

27. $xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}$,　$xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}$

28. $\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{20}{3}$,　$xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3}$

29. $ax=by$,　$(x-a)(y-b)=ab$

30. $a(x-a)=b(y-b)$,　$xy=ax+by$

31. $x^2-xy=a(x+1)+b+1$,　$xy-y^2=ay+b$

32. $yz=4$,　$xz=9$,　$xy=16$

33. $x(x+y+z)=8$,　$y(x+y+z)=12$,　$z(x+y+z)=5$

34. $x(y+z)=6$,　$y(z+x)=12$,　$z(x+y)=10$

35. $(x+y)(x+z)=2$,　$(y+z)(y+x)=3$,　$(z+x)(z+y)=6$

182. 聯立方程式應用問題

例 (1) 二個ノ有効數字ヨリ成ル數アリ,數字ノ平方ノ和ハ此數ニ數字ノ積ヲ加ヘタルモノニ等シク,又此數ニ36ヲ加フルトキハ數字ノ位置ガ交代スルトイフ,仍テ此數ヲ索ム

十位ノ數字ヲ x, 一位ノ數字ヲ y トスレバ,所要ノ數ハ $10x+y$ ニシテ,數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ數ハ $10y+x$ ナリ,故ニ

$$x^2+y^2=10x+y+xy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$10x+y+36=10y+x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)ヨリシテ $9y=9x+36$ ヲ得,故ニ $y=x+4$, 之ヲ(1)ニ置キ換ヘテ

$$x^2+(x+4)^2=10x+x+4+x(x+4)$$

$$x^2-7x+12=0$$

此方程式ヲ解キテ $x=3$ 或ハ 4 ヲ得, $x=3$ ナレバ $y=7$, $x=4$ ナレバ $y=8$, 故ニ所要ノ數ハ 37 或ハ 48 ナラザルベカラズ,而シテ此二ツノ數ハ何レモ題意ニ適フガ故ニ,答ハ 37 或ハ 48 ナリ

例 (2) 山ノ麓ヨリ絶頂マデヲ往復セル人アリ,登リ路ノ後ノ半分ハ前ノ半分ヲ行ク時ヨリハ一時間毎ニ九町ダケ少ナキ速度ニテ登リテ11時間ヲ要シ,下リ路ハ登リ

路ノ前ノ半分ヲ行ク時ヨリハ一時間每ニ半里ダケ多キ速度ニテ下ダリテ $7\frac{1}{2}$ 時間ヲ要セリトイフ,麓ヨリ絶頂ニ至ル距離及登リ路ノ前ノ半分ヲ行キシ速度如何

麓ヨリ絶頂ニ至ル里數ヲ $2x$,登リ路ノ前ノ半分ヲ行キシ速度ヲ一時間每ニ y 里トスレバ,登リ路ノ前ノ半分ヲ行クニ要セシ時間ハ $\frac{x}{y}$ 時間ニシテ,登リ路ノ後ノ半分ヲ行クニ要セシ時間ハ $\frac{x}{y-\frac{1}{4}}$ 時間ナリ,故ニ

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y-\frac{1}{4}}=11 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

同様ニ

$$\frac{2x}{y+\frac{1}{2}}=7\frac{1}{2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)ヨリシテ $2x=\frac{15}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)$, $x=\frac{15}{8}(2y+1)$

又(1)ヨリシテ

$$x\left(2y-\frac{1}{4}\right)=11y\left(y-\frac{1}{4}\right), \quad x(8y-1)=11y(4y-1)$$

x ノ代リニ $\frac{15}{8}(2y+1)$ ヲ置キ換ヘレバ

$$\frac{15}{8}(2y+1)(8y-1)=11y(4y-1)$$

$$112y^2-178y+15=0$$

此方程式ヲ解キテ $y=1\frac{1}{2}$ 或ハ $\frac{5}{56}$ ヲ得,而シテ y ハ $\frac{1}{4}$ ヨリ大ナラザルベカラザルガ故ニ,$\frac{5}{56}$ ナル値ハ題意ニ適ハズ,$y=1\frac{1}{2}$ ナル時ハ,$x=\frac{15}{2}$, $2x=15$,故ニ麓ヨリ絶頂マデノ距離ハ15里,此人ガ登リ路ノ前ノ半分ヲ行キシ速度ハ一時間每ニ $1\frac{1}{2}$ 里ナリ

注意 次ノ第二十九問題集中ニハ,未知數一ツノ方程式ニテモ解クコトヲ得ル問題アリ,又第二十問題集中ニハ未知數二ツノ聯立方程式ニテ解キテモ可ナルモノアリタルナリ

第二十九問題集

1. 二ツノ數*ノ平方ノ和ハ170ニシテ,其平方ノ差ハ72ナリトイフ,仍テ此二ツノ數ヲ索ム
2. 二ツノ數ノ積ハ128ニシテ其平方ノ差ハ192ナリトイフ,仍テ此二ツノ數ヲ索ム
3. 二ツノ數ノ積ハ其和ノ6倍ニ等シク,其平方ノ和ハ325ナリトイフ,仍テ此二ツノ數ヲ索ム
4. 甲數ノ二倍ト乙數ノ三倍トノ和ハ60ニシテ,甲數ノ平方ノ二倍ト乙數ノ平方ノ三倍トノ和ハ840ナリトイフ,甲乙二數各如何
5. 二ツノ數ノ差ニ其平方ノ差ヲ掛ケタル積ハ32ニシテ,同ジ二ツノ數ノ和ニ其平方ノ和ヲ掛ケタル積ハ272ナリトイフ,仍テ此二數ヲ索ム

*1ヨリ10マデノ問題ニ於テ數トアルハ正ノ整數ノ意ナリ

6. 二ツノ數ノ差ト其平方ノ差トノ和ハ14ニシテ,其和ト其平方ノ和トノ和ハ26ナリトイフ,二數如何

7. 二ツノ數ノ積ハ其和ニ等シク,其和ニ其平方ノ和ヲ加ヘタルモノハ12ニ等シトイフ,二ツノ數如何

8. 二數アリ,其和ニ其積ヲ加フルトキハ34ヲ得ベク,其平方ノ和ヨリ其和ヲ減ズルトキハ42ヲ得ベシトイフ,仍テ問フ,二數各如何

9. 差ハ3,立方ノ差ハ279ナル二數ヲ索ム

10. 和ハ20,立方ノ和ハ2240ナル二數ヲ索ム

11. 周圍298間,面積一町歩ノ矩形ノ地面ノ横縱各幾何ナルカ

12. 長サハ幅ヨリハ8尺ダケ長キ敎室ノ四壁ノ面積1120平方尺アリ,若シ高サガ實際ヨリハ四尺ダケ餘計ニ高カリシナランニハ,小サキ方ノ二壁ト大ナル方ノ一壁トニテ丁度1120平方尺ノ面積ヲ有スルナラントイフ,此敎室ノ長サ,幅,高サ各如何

13. 甲乙二種ノ羅紗アリ,甲種ハ乙種ヨリハ一碼ニ付四拾錢ダケ高價ナリトイフ,或ル人甲種ノ羅紗若干碼ヲ購買シ其代價トシテ金36圓ヲ拂ヘリ,此人又乙種ノ羅紗ヲ甲種ノ羅紗ヨリハ10碼ダケ餘計ニ購買シ其代價トシテ金32圓ヲ拂ヘリトイフ,此人ノ買ヒ

取リシ甲乙兩種ノ羅紗ノ長サ各如何

14. 自轉車ニ乘リ鐵道線路ニ沿ヒ甲地ヨリ乙地ニ至ラントスル人アリ,或ル速度ヲ以テ40哩行キタル後,速度ヲ一時間ニ付2哩宛速ヤメテ目的地ニ達セリ,此人若シ初メヨリシテ後ノ速度ヲ以テ走リタランニハ40分時早ク,又始終初メノ速度ヲ以テ行キタランニハ20分時遲ク到着シタルナラントイフ,甲乙兩地間ノ距離及初メノ速度一時間每ニ幾哩ナルカ

15. 一位ト小數第一位トノ二桁ヨリ成ル帶小數アリ,各數字ノ平方ノ差ハ20ニシテ,此帶小數ト數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ帶小數トノ和ハ11ナリトイフ,仍テ此帶小數ヲ索ム

16. 一組ノ水夫ガ流レヲ或ル距離遡ルニ6時間ヲ要セリ,若シ流レガ無カリセバ同ジ距離ヲ漕ギ行クニ,唯流レニ任カセテ漕ガズニ下ルニ要スル時間ヨリハ8時間ダケ少ナキ時間ヲ要スルナラントイフ,此一組ノ水夫ガ流レヲ漕ギ下ルニ要スル時間幾何

17. 或ル人反物若干反ヲ買價ノ五分増シニ賣リテ金16圓ノ利益ヲ得タリ,若シ一反ニ付貳拾五錢宛利シテ賣リタランニハ,一反ノ買價ニ相當スルダケノ五拾錢銀貨ノ個數ト同數ノ拾圓金貨ニ相當スルダケ

ノ利益ヲ得タルナランノトイフ,此人ノ買賣セシ反數及一反ノ買價幾何ナルカ

18. 甲乙兩人ノ大工同シ日數ノ間或ル仕事ニ從事シ,甲ハ此日數ノ間一日モ休マズシテ金19.20圓ノ賃錢ヲ受取リ,此日數ノ中六日間休ミタル乙ハ金10.80圓ノ賃錢ヲ受取レリ,若シ乙ガ休マズニ甲ガ六日間休ミタリシナランニハ,甲ト乙トハ同額ノ賃錢ヲ受取リタルナランノトイフ,此日數及甲乙兩人一日ノ賃錢各幾何ナルカ

19. 一號列車ガ乙地ニ向ヒ甲地ヲ發セシヨリ一時間ヲ經テ,二號列車ハ一號列車ヨリモ一時間毎ニ10哩宛多キ速度ヲ以テ甲地ニ向ヒ乙地ヲ發シ,兩列車ハ甲乙兩地間丁度半分路ノ所ニテ出會セリ,又二號列車ガ乙地ヲ發セシヨリ一時間後ニ一號列車ガ甲地ヲ發シテ甲乙兩地間丁度半分路ノ所ニテ出遇フニハ一號列車ノ速度ヲ一時間毎ニ28哩増サザルベカラズトイフ,甲乙兩地間ノ距離及一號列車ノ速度一時間毎ニ幾哩ナルカ

20. *A*號列車ガ甲地ニ向ヒ乙地ヲ發スルト同時ニ*B*號列車ハ乙地ニ向ヒ甲地ヲ發シ,一時間ト十五分ノ後兩列車ハ出會セリ,又*A*號列車ハ*B*號列車ヨリハ

一時間ト二十分前ニ目的地ニ達セリトイフ,甲乙兩地間ノ距離100哩ナルトキハ,兩列車ノ速度各一時間毎ニ幾哩ナルカ

21. 一ツノ列車ガ甲地ヲ發スルト同時ニ他ノ列車ハ乙地ヲ發シ,途中ニテ兩列車ガ出會ヒタル時マデニ一方ノ列車ハ他ノ列車ヨリモ108哩ダケ多ク走レリ,而シテ此時ヨリ一方ハ9時間後,又他ノ一方ハ16時間後ニ各目的地ニ達セリトイフ,甲乙兩地間ノ距離及兩列車ノ速度一時間毎ニ各幾哩ナルカ

22. 川ニ沿ヒ18里ヲ隔テタル甲乙ノ二村アリ,或ル人甲村ヲ發シ半分道ハ乘合馬車ニテ又半分道ハ小蒸汽船ニテ乙村ニ達スルニ4時間ヲ費ヤセリ,歸路モ矢張リ半分道ハ馬車ニテ又半分道ハ船ニテ$3\frac{1}{2}$時間ヲ以テ甲村ニ達セリ,馬車ノ速度ハ往復トモニ變ハラザリシモ船ノ速度ハ復リニ川ヲ下リシトキハ往キニ川ヲ遡リシトキヨリモ一時間毎ニ$1\frac{1}{2}$里ダケ速ヤカリシトイフ,馬車ノ速度及往キニ川ヲ遡リシトキノ船ノ速度如何

23. 甲ト乙トニテ二度二哩ノ競走ヲナセリ,第一回ニ於テハ乙ハ甲ヨリモ2分時間前ニ決勝線ニ達セリ,第二回ニ於テハ甲ハ第一回ノ時ヨリモ一時間毎ニ

2哩ダケ增シタル割ニ速度ヲ增シ,乙ハ第一回ノトキヨリモ一時間每ニ2哩ダケ減ジタル割ニ速度ヲ減ジ,斯クテ甲ハ乙ヨリモ2分時間前ニ決勝線ニ達セリトイフ,第一回ノ競走ニ於テ甲乙兩人ノ走リシ速度各如何

24. Aハ午前十時ニ乙地ニ向ヒ甲地ヲ發セリ,又Bハ午前十時二十四分ニ甲地ニ向ヒ乙地ヲ發セリ,而シテ兩人ハ乙地ヲ距ル2里ノ所ニテ出遇ヘリ,Bハ甲地ニテ1時間,Aハ乙地ニテ2時54分時間休息シタル後歸路ニ就キ,兩人ハ午後六時五十四分ニ甲乙兩地間丁度半分路ノ所ニテ再ビ出會セリトイフ,甲乙兩地間ノ距離如何

25. A,Bナル二人ノ旅客アリ,Bガ乙地ヲ發スルト同時ニAハ乙地ヲ經テBト同ジ道ヲ行ク目的ヲ以テ甲地ヲ發セリ,AガBニ追ヒ付キタル時マデニ兩人ガ行キシ道程ハ合計30里ニシテ,Aハ此時ヨリ4時間前ニ乙地ヲ經過セリ,又Bガ甲地ヨリ發シテ此所ニ達スルニハ9時間ヲ要セシナラントイフ,甲乙兩地間ノ距離如何

第十七編 冪及根

冪

183. 既ニ第80節及第88節ニ於テ示シタルガ如ク,m, n, pハ正ノ整數ヲ表ハスモノトスレバ

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{.......}(1)$$

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

因數ノ個數三ツヨリ多クアル場合ニ於テモ同樣ナリ,通例畧シテ,同ジ文字ノ諸ノ冪ヲ掛ケ合ハスニハ指數ヲ加フレバヨシトイヒ,之ヲ指數ノ定則トイフ

又 $m>n$ ナレバ $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ....(2)

$m<n$ ナレバ $a^m \div a^n = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ ....(3)

a^mノ第n冪ヲ表ハスニハ$(a^m)^n$ヲ以テス,偖$(a^m)^n$ハa^mヲn度掛ケ合ハセタルモノナルガ故ニ,指數mヲn度加フ即mニnヲ掛クレバ可ナリ,故ニ

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{.......}(4)$$

即或ル文字ノ冪ノ冪ハ二ツノ指數ノ積ヲ指數トスル同ジ文字ノ冪ナリ

184. $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab)$, 而シテ積ノ値ハ因數ノ順序ニ拘ハラザルガ故ニ, $(ab)^3 = aaabbb = a^3b^3$, 一般ニnヲ以テ任意ノ正ノ整數ヲ表ハス𪜈ハ

$$(ab)^n = a^nb^n$$

同樣ニ

$$(abc)^n = a^nb^nc^n$$

文字ノ數ガ三ツヨリ多クアル場合ニモ同樣ノ公式ヲ得ベキヿ明カナルガ故ニ,積ヲ或ル冪ニ高ムルニハ各因數ヲ同ジ冪ニ高ムレバヨシ

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$, 一般ニ$n$ヲ以テ任意ノ正ノ整數ヲ表ハス𪜈ハ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

故ニ分數ヲ或ル冪ニ高ムルニハ分母分子ヲ各別ニ同ジ冪ニ高ムレバヨシ

185. 正項ノ冪ハ何レモ正ニシテ負項ノ冪ハ,第一冪ハ負,第二冪ハ正,第三冪ハ負,次第ニ斯クノ如ク交番ニ正トナリ負トナル(第60節及第63節ヲ參照セヨ),乃

$$(-a)^2 = (-a)(-a) = a^2$$
$$(-a)^3 = (-a)^2(-a) = a^2(-a) = -a^3$$
$$(-a)^4 = (-a)^3(-a) = (-a^3)(-a) = a^4$$

次第ニ斯クノ如ク,凡テ負項ノ奇數冪ハ負ニシテ偶數冪ハ正ナリ,偖偶數ノ一般ナル形チハ$2n$,奇數ノ一般ナル

形チハ$2n+1$ナリ(第45節例(6)參照),爰ニnハ任意ノ正ノ整數ヲ表ハスモノトス,乃

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$$

更ニ正項負項ヲ概括シテ,凡テ偶數冪ハ正ニシテ奇數冪ハ元ノ項ト同ジ符號ヲ有ストイフヿヲ得ベシ

例　題

次ノ式ノ括弧ヲ去レ

1. $(2x^2y^3z^4)^3$　2. $(-2x^2y^2z^3)^3$　3. $(-3ab^2c)^4$

4. $\left(\frac{2x^2}{3y^2}\right)^2$　5. $\left(-\frac{4x}{3y^2}\right)^3$　6. $\left(-\frac{x^3}{y^2z^2}\right)^4$　7. $(x^ay^bz^c)^n$

186. 二項式ノ冪ヲ索ムルヿハ,勿論代數掛ケ算ノ格段ナル場合ニ過ギザレド,次ニ揭グル諸公式ヲ利用シテ以テ途中ノ計算ヲ省畧スルヿヲ得ベシ

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

讀者ニシテ試ミニ $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ ヲ索メタランニハ,次ノ結果ヲ得ベシ

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

上ノ諸公式ハ何レモ後ニ二項定理ト題スル編ニ揭ゲタル $(a+b)^n$ ノ公式ノ格段ナル場合ナリ

多項式ノ或ル羃ヲ示スニ括弧ヲ用ヰタル式ノ括弧ヲ去ルコヲ稱シテ此式ヲ展開スルトイフ

例 $(2x-3y)^4$ ヲ展開セヨ

$(a+b)^4$ ノ公式ニ於テ $a=2x$, $b=-3y$ ト置キテ

$$(2x-3y)^4=(2x)^4+4(2x)^3(-3y)+6(2x)^2(-3y)^2+4(2x)(-3y)^3+(-3y)^4$$
$$=16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$$

例題

1. $(a+b)^5=(a+b)$ ヲ掛ケ, 又 $(a+b)^2$ ヲ立方ニシ, 又 $(a+b)^4=(a+b)^2$ ヲ掛ケ, 又 $(a+b)^3$ ヲ平方ニシテ, $(a+b)^6$ ノ公式ヲ索メヨ

2. 實際掛ケ合ハセテ $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, $(a-b)^4$, $(a-b)^5$ ノ公式ヲ索メヨ

3. 本節ノ公式ニ於テ b ノ代リニ $-b$ ト置キテ $(a-b)^2$, $(a-b)^3$, $(a-b)^4$, $(a-b)^5$ ノ公式ヲ索メヨ

次ノ式ヲ展開セヨ

4. $(3-2x)^3$ 5. $(a+b)^3(a-b)^3$ 6. $(2x+3)^4$

7. $(ax+by)^3+(ax-by)^3$ 8. $(ax+by)^4+(ax-by)^4$

9. $(1+x)^5-(1-x)^5$ 10. $(1+x)^4(1-x)^4$

187. 多項式ヲ平方ニスル法則ヲ得ンガ爲メニ實際掛ケ合ハセテ五項式 $a+b+c+d+e$ ノ平方ヲ索ムベシ

$$\begin{array}{l}
a+b+c+d+e \\
a+b+c+d+e \\
\hline
a^2+ab+ac+ad+ae \\
ab+b^2+bc+bd+be \\
ac+bc+c^2+cd+ce \\
ad+bd+cd+d^2+de \\
ae+be+ce+de+e^2
\end{array}$$

元來代數掛ケ算ニ於テ部分積ヲ書キ下ダスニハ同類項ガ縱ニ並ブ樣ニ配置スベキ筈ナレド, 上ノ掛ケ算ニ於テハ各部分積ノ出所ヲ明カニスルノ目的ヲ以テ上ノ如クニ各部分積ヲ配置セリ

上ノ積ノ中ニハ各項ノ平方 a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 ノ外ニ二項宛組ミ合ハセタル各對ノ積 ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de ガ二ツ宛アリ, 故ニ

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+e)^2 = & a^2+2ab+2ac+2ad+2ae \\ & +b^2+2bc+2bd+2be \\ & +c^2+2cd+2ce \\ & +d^2+2de \\ & +e^2\end{aligned}$$

上ノ例ニ鑑ミテ多項式ノ平方ヲ索ムル法則ヲ得

多項式ノ平方ハ各項ノ平方ト二項宛組ミ合ハセタル各對ノ積ノ二倍トヲ總テ加ヘ合ハセタル和ニ等シ

此法則ハ又

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2+2a(b+c+d+e)+b^2+2b(c+d+e)$$
$$+c^2+2c(d+e)+d^2+2de+e^2$$

ニ鑑ミテ次ノ如クニ言ヒ直スヿヲ得ベシ

多項式ノ平方ハ各項ノ平方ト各項ニ其項ヨリ後ニアル總テノ項ノ和ヲ掛ケタル積ノ二倍トヲ悉ク加ヘ合ハセタル和ニ等シ

例 (1)　$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

例 (2)　$(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

例 (3)　$(1-2x+3x^2)^2 = 1^2+(-2x)^2+(3x^2)^2+2(1)(-2x)$
$$+2(1)(3x^2)+2(-2x)(3x^2)$$
$$=1+4x^2+9x^4-4x+6x^2-12x^3$$
$$=1-4x+10x^2-12x^3+9x^4$$

例　題

次ノ式ヲ展開セヨ

1. $(1+x+x^2)^2$　**2.** $(1-3x+3x^2)^2$　**3.** $(1+3x+2x^2)^2$

4. $(1+3x+3x^2+x^3)^2$　**5.** $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$

6. $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)$
$$+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc$$

ナルヿヲ示セ

7. 前例ノ公式ニヨリテ $(1+3x-2x^2)^3$ ヲ展開セヨ

根

188. 或ル數ノ平方根ハ恒ニ二ツアリ,a ノ平方根ハ $\sqrt{a}$ 及 $-\sqrt{a}$ ナリ,今其中ノ一方ヲ知ルトキハ,符號ヲ換ヘテ以テ容易ニ他ノ一方ヲ索ムルヿヲ得ベキガ故ニ,以下本編ニ於テ平方根ヲ索ムルニハ,平方根ハ恒ニ二ツアル其中ノ見懸ケ上正ナル一方又開キ切レル場合ニ於ケル多項式ノ平方根ハ其初項ノ正ナル一方(第 142 節例(4)ヲ參照セヨ)ノミヲ索ムベシ

或ル數ノ立方根ハ恒ニ三ツアリ,a ノ立方根ハ $\sqrt[3]{a}$, $\omega\sqrt[3]{a}$, $\omega^2\sqrt[3]{a}$ ナリ (第171節),a ガ有理數ナルトキハ $\sqrt[3]{a}$ ハ實數ニシテ即三ツノ立方根ノ中一ツハ實數ニシテ他ノ二ツハ虛數ヲ合ミタル數ナリ,實數ナル立方根ヲ知ルトキハ,之ニ ω 又ハ ω^2 ヲ掛ケテ以テ容易ニ他ノ二ツヲ索ムルヿヲ得ベキガ故ニ,以下本編ニ於テ立方根ヲ索ムルニハ,實數ナル立方根唯一ツヲ索ムルヿトスベシ

一般ニ或ル數ノ n 乘根ハ n 個アリ,此定理ノ證明ハ初

等代數學ノ範圍外ニ屬スルモノトス,以下本編ニ於テ或ル數ノ n 乘根ヲ索ムルニハ,數ノ範圍ヲ實數ニ限リテ得ベキ n 乘根ノミヲ索ムルコトトスベシ

數ノ範圍ヲ實數ニ限ルトキハ,奇數乘根ハ唯一ツアリ,又正ノ數ノ偶數乘根ハ正負二ツアリ,負ノ數ノ偶數乘根ハ皆無ナリ,例ヘバ a^5 ノ五乘根ハ a ノミ唯一ツアレドモ a^4 ノ四乘根ハ a 及 $-a$ ノ二ツアルガ如シ,故ニ正ノ數ノ偶數乘根ノ場合ニ於テハ尙ホ其中ノ正ノ根ヲ採ルコトトスベシ

189. 第138節ノ規約ニヨリ

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{c}=abc$$

故ニ $$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

同樣ニ $$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$$

根號ノ下ニアル因數ノ數ガ三ツヨリ多クアル場合ニ於テモ同樣ノ公式ガ成リ立ツモノトス

單項式ヲ n 乘スルニハ,各因數ノ指數ヲ n 倍スベキコト第183節ニ於テ述ベタルガ如シ,逆ニ單項式ノ n 乘根ヲ索ムルニハ,各因數ノ指數ヲ n デ割レバヨシ

例 (1) $\sqrt{16a^2b^4}=\sqrt{4^2a^2b^4}=4ab^2$

例 (2) $\sqrt[3]{-8a^6b^9c^{12}}=\sqrt[3]{(-2)^3a^6b^9c^{12}}=-2a^2b^3c^4$

例 (3) $\sqrt[4]{256x^4y^8}=\sqrt[4]{4^4x^4y^8}=4xy^2$

此レ等ノ例ニ於ケルガ如ク,與ヘラレタル式ノ各因數

ノ指數ガ何レモ n ニテ割リ切レル場合ニハ上ノ法則ヲ適用スルニ差支ナシト雖モ,割リ切レザル場合ニハ如何ニスベキカト問フニ,若シ强ヒテ此法則ヲ適用スルトキハ分數ヲ指數トスル因數ヲ得ベシ,而シテ吾人ガ此レマデニ學ビ得タル所ニテハ指數ハ必ズヤ正ノ整數ナラザルベカラズ,故ニ分數ヲ指數トスル式ハ全ク意味ナキモノナリ,次編ニ至リテ此制限ヲ撤回シ分數ヲ指數トスル式ニ適當ナル意味ヲ附スベシ,先ヅソレマデハ,割リ切レザル場合ニハ根號ヲ存シ置クコトトスベシ,例ヘバ a^2 ノ立方根ヲ $\sqrt[3]{a^2}$, $-8x^3y$ ノ立方根ヲ $-2x\sqrt[3]{y}$ ト書クガ如シ

分數ノ根ヲ索ムルニハ分子ノ根ヲ分子トシ分母ノ根ヲ分母トスレバ可ナリ,例ヘバ

$$\sqrt{\frac{4a^2}{9b^4}}=\frac{\sqrt{4a^2}}{\sqrt{9b^4}}=\frac{2a}{3b^2},\qquad \sqrt[3]{-\frac{27a^6}{64b^3}}=\frac{\sqrt[3]{-27a^6}}{\sqrt[3]{64b^3}}=-\frac{3a^2}{4b}$$

例題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

1. $\sqrt{9a^4b^4}$ 2. $\sqrt[3]{8a^3b^3}$ 3. $\sqrt[3]{-64a^3b^5}$

4. $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$ 5. $\sqrt[5]{-a^5b^{10}c^{13}}$

6. $\sqrt{\dfrac{25a^2b^2}{49c^4}}$ 7. $\sqrt[3]{-\dfrac{216a^3b^9}{125c^6}}$

開平

190. 一般ニ平方根ヲ索ムル算法ヲ發見センガ爲メニ,先ヅ $a^2+2ab+b^2$ ヨリシテ其平方根 $a+b$ ヲ得ル方法ヲ講究スベシ

先ヅ第一ニ與ヘラレタル式ノ項ヲ或ル文字ノ降冪ノ順ニ排列スベシ,但此場合ニ於テハ既ニ a ノ降冪ノ順ニ排列シアルガ故ニ更ニ列ベ直スノ必要ナシ

$$
\begin{array}{rl}
 & a^2+2ab+b^2(\ a+b \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b &)2ab+b^2 \\
 & 2ab+b^2 \\
\hline
\end{array}
$$

初項 a^2 ノ平方根ハ a ナリ,之ヲ所要ノ平方根ノ初項トス,與ヘラレタル式ヨリ a^2 ヲ減ジテ剩餘 $2ab+b^2$ ヲ得,次ニ此剩餘ノ初項 $2ab$ ヲ平方根ノ初項ノ二倍 $2a$ デ割リテ b ヲ得,之ヲ平方根ノ第二項トス,根ノ初項ノ二倍ニ第二項ヲ加ヘタルモノ即 $2a+b$ ニ第二項即 b ヲ掛ケテ $2ab+b^2$ ヲ得,之ヲ剩餘 $2ab+b^2$ ヨリ減ジテ演算ヲ結了ス

次ニ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab$ ナルヲ知リ此恒等式ノ右邊ノ式ヨリシテ其平方根 $a+b+c$ ヲ索メンガ爲メニ,此式ノ項ヲ a ノ降冪ノ順ニ排列スルト同時ニ b ノ降冪ノ順ニ列ブ樣ニ項ヲ配置シテ(第92節ヲ參照セヨ)後演算スルヿ次ノ如シ

$$
\begin{array}{rl}
 & a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2(a+b+c \\
 & a^2 \\
\hline
2a+b &)2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 \\
 & 2ab \qquad\quad +b^2 \\
\hline
2a+2b+c) & 2ac \qquad\quad +2bc+c^2 \\
 & 2ac \qquad\quad +2bc+c^2 \\
\hline
\end{array}
$$

此演算ノ初メノ部分ハ少シモ前ノ演算ト異ナルトコロナシ,偖テ第二ノ剩餘トシテ $2ac+2bc+c^2$ ヲ得タル後ハ所要ノ平方根ノ初メノ二項ノ二倍即 $2a+2b$ ヲ以テ $2ac+2bc$ ヲ割リテ c ヲ得,之ヲ根ノ第三項トス,根ノ初メノ二項ノ二倍ニ第三項ヲ加ヘタルモノ即 $2a+2b+c$ ニ第三項即 c ヲ掛ケテ $2ac+2bc+c^2$ ヲ得,之ヲ第二ノ剩餘ヨリ減ジテ演算ヲ結了ス

爰ニ注意スベキハ,$2a+2b$ ヲ得ルニハ $2a+b$ ニ b ヲ加フレバ可ナルヿ,及第二ノ剩餘ハ結局與ヘラレタル式ヨリ $(a+b)^2$ ヲ減ジタル差ナルヿナリ

上ノ例ニ於テハ第三ノ剩餘ハ零ニシテ演算ハ此所ニテ終結スルモノナレド,設シ第三ノ剩餘ガ在ル場合ニハ更ニ $2a+2b+c$ ニ c ヲ加ヘ即 $a+b+c$ ノ二倍 $2a+2b+2c$ ヲ以テ第三ノ剩餘ヲ割リテ根ノ第四項ヲ索メ,今用ヰタル除數ト此第四項トノ和ニ第四項ヲ掛ケタルモノヲ第三ノ剩餘ヨリ減ジ,此算法ヲ續ケ行フベシ

例題 上ノ例ニ倣ヒ

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$

ノ平方根 $a+b+c+d$ ヲ索ムル算式ヲ書ケ

191. 吾人ガ既ニ算術ニ於テ學ビタル開平ノ算法ハ前節ノ算式ニ基ヅクモノナルヿ讀者ノ既ニ氣付キタルトコロナルベシ,次ニ一例ヲ示ス

例 576081 ノ平方根ヲ索ム

$$\begin{array}{rr|l} & 57|60|81 & (700+50+9 \\ & & \;\;\; a \quad\; b \quad c \\ a^2= & \underline{490000} & \\ 2a+b \quad =1450 &)86081 & \\ (2a+b)b= & \underline{72500} & \\ 2a+2b+c=1509 &)13581 & \\ (2a+2b+c)c= & \underline{13581} & \end{array}$$

爰ニ注意スベキハ,數字ノ位置ニ着目スルトキハ,49ノ右ニ0ヲ書キ添ヘル必要ナキヿ,第二ノ剩餘ノ中ヨリ81ヲ省キ之ヲ預リ置キテ差支ナキヿ,$2a+b$ ヲ得ルニハ14ノ右ニ5ヲ書キ添ヘ且5ノ右ニ來ルベキ0ヲ預リ置キテ差支ナキヿ,$2a+2b+c$ ヲ得ルニハ145ニ5ヲ加ヘテ得ベキ150ノ右ニ9ヲ書キ添フレバ可ナルヿ,700+50+9ノ代リニ759ト書クベキヿナリ,然カスルトキハ上ノ算式ハ讀者ノ既ニ算術ニ於テ學ビタルモノト全ク一致スベシ

192. 代數式ハ通例之ヲ平方ニ開クヿ能ハザルモノトス,乃代數式ノ平方根ハ根號ヲ用ヰテ之ヲ表ハス,例ヘバ $4x^2+4xy+9y^2$ ノ平方根ヲ表ハスニ $\sqrt{4x^2+4xy+9y^2}$ ヲ以テスルガ如シ

唯與ヘラレタル式ガ丁度或ル整式ノ平方ニ等シキ極メテ稀ニアル非常ニ特別ナル場合ニ於テハ勿論第190節ノ方法ニヨリテ之ヲ平方ニ開クヿヲ得ベシ,此場合ニハ結局與ヘラレタル式ヲ $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$ 等ノ公式ト對照シテ, a, b, c 等ヲ定ムルヿニ歸着スルモノナリ

例 (1) $4x^2+12xy+9y^2$ ヲ平方ニ開ケ

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+12xy+9y^2 & (2x+3y \\ \underline{4x^2} & \\ 4x+3y)\,12xy+9y^2 & \\ \underline{12xy+9y^2} & \end{array}$$

例 (2) $4x^2+4xy+9y^2$ ヲ平方ニ開ケ

$$\begin{array}{r|l} 4x^2+4xy+9y^2 & (2x+y \\ \underline{4x^2} & \\ 4x+y)\,4xy+9y^2 & \\ \underline{4xy+\;\;y^2} & \\ 8y^2 & \end{array}$$

此レハ開キ切レヌ場合ナリ,然レドモ試ミニ強ヒテ開平ノ算法ヲ施セバ左ノ如シ,偖テ第二ノ剩餘 $8y^2$ ヲ得タル後,根ノ第三項ヲ索メントスルトキハ分數式ヲ得ベキガ故ニ,此處ニテ演算ヲ中止シ,此式ノ開キ切レザルヲ知ル

上ノ演算ハ

$$4x^2+4xy+9y^2=(2x+y)^2+8y^2$$

ナルヿヲ示スニ過ギズ,箇樣ナル塲合ニハ單ニ開キ切レズト答フレバ可ナリ,設シ元ノ問題ガ $4x^2+4xy+9y^2$ ノ平方根ヲ索ムトイフモノナリシナランニハ,所要ノ平方根ハ $\sqrt{4x^2+4xy+9y^2}$ ナリト答フベシ

例 (3)　$4x^4-20x^3+37x^2-30x+9$ ヲ平方ニ開ケ

$$\begin{array}{rl}
 & 4x^4-20x^3+37x^2-30x+9 \quad (2x^2-5x+3 \\
 & \underline{4x^4} \\
4x^2-5x) & -20x^3+37x^2-30x+9 \\
 & \underline{-20x^3+25x^2} \\
4x^2-10x+3\ ) & 12x^2-30x+9 \\
 & \underline{12x^2-30x+9}
\end{array}$$

例 (4)　$x^6+4x^5-10x^3+4x+1$ ヲ平方ニ開ケ

$$\begin{array}{rl}
 & x^6+4x^5\quad-10x^3\quad+4x+1 \quad (x^3+2x^2-2x-1 \\
 & \underline{x^6} \\
2x^3+2x^2\ ) & 4x^5\quad-10x^3\quad+4x+1 \\
 & \underline{4x^5+4x^4} \\
2x^3+4x^2-2x\ ) & -4x^4-10x^3\quad+4x+1 \\
 & \underline{-4x^4-8x^3+4x^2} \\
2x^3+4x^2-4x-1\ ) & -2x^3-4x^2+4x+1 \\
 & \underline{-2x^3-4x^2+4x+1}
\end{array}$$

注意　丁度或ル整式ノ平方ニ等シキ代數式ヲ平方ニ

開クハ,既ニ本節ノ冒頭ニ於テ述ベタルガ如ク,結局リ,與ヘラレタル式ヲ $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$ 等ノ公式ト對照スルニ歸着スルモノナルガ故ニ簡單ナル塲合ニ於テハ,視察ニヨリテ直チニ開平ノ結果ヲ知ルヿヲ得ベシ,例ヘバ本節ノ例(1)ノ如キハ視察ニヨリ直チニ所要ノ平方根ヲ索ムルヿヲ得ベカリシナリ,或ル時ハ亦與ヘラレタル式ヲ少シク書キ直シテ,例ヘバ

$$x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2-6x^2z^2-12y^2z^2$$

ヲ平方ニ開カンニ,之ヲ書キ直シテ

$$x^4+2x^2(2y^2-3z^2)+4y^4-12y^2z^2+9z^4$$

以下視察ニヨリ直チニ所要ノ平方根ノ $x^2+2y^2-3z^2$ ナルヿヲ知ルヲ得ベシ,又斯クノ如ク容易ニ視察シ得ル塲合ニ於テハ視察ヲ利用シテ差支ナシ,然レドモ視察上少シニテモ困難アル塲合ニ於テ,徒ラニ視察ニ苦勞スルハ決シテ得策ニアラズ,矢張リ本節ノ確カナル方法ヲ適用スベシ,特ニ與ヘラレタル式ガ完全ナル平方ナリヤ否ヤ,平方ニ開キタル後ニアラザレバ,之ヲ知ルニ由ナキ塲合ニ於テ此注意ノ適切ナルヿ多言ヲ俟タザルベシ

分數式ノ平方根ヲ索ムルニハ各別ニ分母ト分子トノ平方根ヲ索ムベシ

第三十問題集

次ノ數又ハ式ヲ平方ニ開ケ

1. 104976　　2. 3080.25　　3. 41.2164

4. 0.835396　　5. 1522756　　6. 29376400

7. $16a^2+40ab+25b^2$　　8. $36x^6+12x^3+1$

9. $\dfrac{25a^2+20ab+4b^2}{25a^2+20ac+4c^2}$　　10. $\dfrac{9x^4-24x^2+16}{4x^2-12x+9}$

11. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$　　12. x^4-4x^3+8x+4

13. $4x^8-4x^6-7x^4+4x^2+4$

14. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$

15. $x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4$

16. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$

17. $x^6+4ax^5-10a^3x^3+4a^5x+a^6$

18. $x^8-2x^7+3x^6-4x^5+5x^4-4x^3+3x^2-2x+1$

平方ニ開キテ得タルモノヲ更ニ平方ニ開キテ次ノ數又ハ式ノ四乘根ヲ求メヨ

19. 279841　　20. $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

21. $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$

22. $\sqrt{7}$ ノ近似値ヲ小數第三位マデ索メ,斯クテ最後ニ殘ル剩餘ノ意味ヲ說明セヨ

23. $\sqrt{2}$ ノ近似値ヲ小數第四位マデ索メヨ

24. $\sqrt{14}$ ノ不足ナル近似値ヲ小數第五位マデ索メヨ

25. $\sqrt{35}$ ノ過剩ナル近似値ヲ小數第五位マデ索メヨ

開立

193. 一般ニ立方根ヲ索ムル算法ヲ發見センガ爲メニ,先ヅ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ヨリシテ其立方根 $a+b$ ヲ得ル方法ヲ講究スベシ

$$
\begin{array}{lll}
 & & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \;(\; a+b \\
 & & \underline{a^3\qquad\qquad\qquad\quad} \\
 & 3a^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
3a+b & & \\
 & \underline{(3a+b)b} & \\
 & 3a^2+3ab+b^2 & \underline{3a^2b+3ab^2+b^3}
\end{array}
$$

旣ニ項ガ a ノ降羃ノ順ニ排列サレアル與ヘラレタル式ノ初項 a^3 ノ立方根ハ a ナリ,之ヲ所要ノ根ノ初項トス,與ヘラレタル式ヨリ a^3 ヲ減ジテ剩餘 $3a^2b+3ab^2+b^3$ ヲ書キ下ダス,剩餘ノ初項 $3a^2b$ ヲ根ノ初項 a ノ平方ノ三倍即 $3a^2$ デ割リテ b ヲ得,之ヲ根ノ第二項トス,次ニ $3a^2$ ニ $3a+b$ ト b トノ積 $(3a+b)b$ ヲ加ヘテ $3a^2+3ab+b^2$ ヲ得,此

式ニbヲ掛ケテ得ベキ $3a^2b+3ab^2+b^3$ ヲ剩餘ヨリ引キテ演算ヲ結了ス

二桁ノ數ノ立方ノ立方根ヲ索ムル普通ノ算法ハ上ノ算式ニ基ヅクモノナリ,例ヘバ17576ノ立方根ヲ索メンニ

$$\begin{array}{rrl|l}
 & & 17\ 576 & (\ 20+6 \\
 & a^3= & 8 & \quad\ a \quad b \\
3a^2 & =1200 & 9\ 576 & \\
3a+b=66,\quad (3a+b)b & =\ 396 & & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2 & =1596 & 9\ 576=(3a^2+3ab+b^2)b &
\end{array}$$

例 題

上ノ例ニ倣ヒ次ノ數ノ立方根ヲ索メテ後驗ヲ行ヘ

1. 6859 **2.** 19683 **3.** 42875 **4.** 157464

5. 226981 **6.** 681472 **7.** 778688

194. 第187節ノ例題6ニアルガ如ク

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc$$

ナルヲ知リテ,此恒等式ノ右邊ノ式ヨリシテ,其立方根ナル $a+b+c$ ヲ索メンガ爲メニ,此式ノ項ヲ a ノ降羃ノ順ニ排列スルト同時ニ b ノ降羃ノ順ニ列ブ樣ニ配置シテ後演算スルコト第160頁ニ掲グルガ如シ

此演算ノ初メノ部分ハ少シモ前節ニ於テ示シタル演算ト異ナルトコロナシ,第二ノ剩餘

$$3a^2c+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2+c^3$$

ヲ得タル後ハ,此剩餘ヲ $3(a+b)^2$ 即 $3a^2+6ab+3b^2$ デ割リテ,即剩餘ノ初項 $3a^2c$ ヲ此式ノ初項 $3a^2$ デ割リテ c ヲ得,之ヲ根ノ第三項トス,次ニ $3(a+b)^2$ ニ $\{3(a+b)+c\}c$ ヲ加ヘテ得タル $3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2$ ニ c ヲ掛ケテ得ベキ

$$3a^2c+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2+c^3$$

ヲ上ノ剩餘ヨリ減ジテ演算ヲ結了ス

後ノ計算ノ爲メニ此處ニテ注意シ置クベキハ

$$(3a+b)b\ ,\quad 3a^2+3ab+b^2\ ,\quad b^2$$

ヲ加フルトキハ $3a^2+6ab+3b^2$ 即 $3(a+b)^2$ ヲ得ベキヿナリ

上ノ例ニ於テハ勿論演算ハ此處ニテ終結スルモノナレドモ,設シ第三ノ剩餘ガ在ル場合ニハ,$3(a+b+c)^2$ ヲ以テ剩餘ヲ割リテ根ノ第四項ヲ索メ,嚮キニ第三項ヲ索メタル後ニ行ヒタルモノト同樣ノ手數ヲ行フベキモノトス,尙ホ

$$\{3(a+b)+c\}c\ ,\quad 3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\ ,\quad c$$

ヲ加フルトキハ $3(a+b+c)^2$ ヲ得ベキヿニ注意スベシ

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \quad (a+b+c \\
 & a^3 \\
3a^2 & 3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3 \\
\dfrac{(3a+b)b}{3a^2+3ab+b^2} & 3a^2b \qquad +3ab^2 \qquad\qquad +b^3 \\
\dfrac{b^2}{3(a+b)^2} & 3a^2c \qquad +3ac^2+6abc \qquad +3b^2c+3bc^2+c^3 \\
\dfrac{\{3(a+b)+c\}c}{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2} & 3a^2c \qquad +3ac^2+6abc \qquad +3b^2c+3bc^2+c^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & 100\ 544\ 625 \quad (\ 400+60+5 \\
 & a^3= & 64\ 000\ 000 \qquad a \quad b \quad c \\
3a+b=1260 & 3a^2 \qquad =480000 & 36\ 544\ 625 \\
 & \dfrac{(3a+b)b \ = \ 75600}{3a^2+3ab+b^2=555600} & 33\ 336\ 000 \\
2b=\ 120 & & \\
\dfrac{c=\quad 5}{3(a+b)+c=1385} & \dfrac{b^2=\quad 3600}{3(a+b)^2 \quad =634800} & 3\ 208\ 625 \\
 & \dfrac{\{3(a+b)+c\}c=\quad 6925}{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2=641725} & 3\ 208\ 625
\end{array}
$$

195. 數ノ立方根ヲ索ムル開立ノ算法ハ前節ノ算式ニ基ヅクモノナリ,左ニ一例ヲ示ス

例題

左ノ例ニ倣ヒ次ノ數ヲ立方ニ開ク算式ヲ書ケ

1. 2628072 (答 138)　　2. 3241792 (答 148)

3. 54010152 (答 378)　　4. 60236288 (答 392)

5. 191.102976 (答 5.76)

196. 或ル整式ノ立方ニ等シキ代數式ヲ立方ニ開クニハ,矢張リ第194節ノ算式ニヨルモノトス,例ヘバ

$$x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8$$

ヲ立方ニ開カンニ,其算式ハ次ノ如シ

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x \ -12x+8 \ (\ x^2-x+2 \\
 & x^6 \\
3x^4 & -3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 \\
\dfrac{-x(3x^2-x)}{3x^4-3x^3+x^2} & -3x^5+3x^4-x^3 \\
\dfrac{x^2}{3x^4-6x^3+3x^2} & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 \\
\dfrac{2(3x^2-3x+2)}{3x^4-6x^3+9x^2-6x+4} & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8
\end{array}
$$

$\boxed{\text{注意}}$ 代數式ヲ平方又ハ立方ニ開クニハ,必ズシモ之ヲ或ル文字ノ降羃ノ順ニ排列スルヲ要セズ,之ヲ或ル文字ノ昇羃ノ順ニ排列スルモ可ナリ

第三十一問題集

次ノ數又ハ式ノ立方根ヲ索メヨ

1. 220348864　　2. 1371330631　　3. 20910518875

4. 91398648466125　　5. 5340104393239

6. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

7. $1728x^6+1728x^4y^3+576x^2y^6+64y^9$

8. $x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3$

9. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$

10. $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$

11. $x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$

12. $8x^6+48x^5+60x^4-80x^3-90x^2+108x-27$

13. $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$

---

14. 7ノ立方根ヲ小數第二位マデ算出シ,且最後ニ殘ル剩餘ノ意味ヲ說明セヨ

15. 10ノ立方根ヲ小數第三位マデ算出シテ後驗ヲ行ヘ

16. 5ノ立方根ヲ小數第四位マデ索メヨ

17. $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ ヨリシテ其五乘根 $a+b$ ヲ索ムル算法ヲ考案セヨ

18. 前例ノ算法ニヨリ6436343ノ五乘根ヲ索メヨ

平方ニ開キテ後更ニ立方ニ開キテ次ノ式ノ六乘根ヲ索メヨ

19. $64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1$

20. $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$

第十八編 指數

197. 此レマデハ指數ハ正ノ整數ナリトセリ,乃文字ヲ以テ指數ヲ表ハシ a^n ト書ク場合ニ於テ n ハ必ズ正ノ整數ヲ表ハスモノトセリ,本編ニ於テハ負數又ハ分數ヲ指數トスル數ヲ論ズベシ

此レマデノトコロニテハ負數又ハ分數ヲ指數トスルモノ例ヘバ 3^{-1}, $5^{\frac{1}{2}}$ ノ如キハ全ク意味ナキモノナリ,然レ𪜈此事ハ毫モ斯クノ如キモノニ適當ナル解釋ヲ附スルヿヲ妨ゲズ,偖テ如何ニ解釋セバ適當ナルカト問フニ,特ニ工夫スルニ及バズ,指數ガ正ノ整數ナル場合ニ於テ眞ナル總テノ定理公式ガ,指數ガ負數又ハ分數ナル場合ニ於テモ眞ナル樣ニ解釋スレバ可ナリ

第183節及第189節ニ於テ示セルガ如ク,m ト n トガ正ノ整數ヲ表ハス𪜈ハ

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{............} (1)$$

$$m>n \text{ ナル𪜈ハ } a^m \div a^n = a^{m-n} \quad \text{............} (2)$$

$$m<n \text{ ナル𪜈ハ } a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{............} (3)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{..............} (4)$$

m ガ n デ割リ切レル𪜈ハ

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{..........} (5)$$

$\sqrt[n]{a}$ ヲ表ハスニ b ヲ以テスレバ, $(\sqrt[n]{a})^m = b^m$, 又 $a = b^n$, $a^m = b^{mn}$, $\sqrt[n]{a^m} = b^{\frac{mn}{n}} = b^m$, 故ニ m ガ n デ割リ切レルト否トニ拘ハラズ,一般ニ $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, 即或ル數ノ第 m 羃ノ n 乘根ハ同ジ數ノ n 乘根ノ第 m 羃ニ等シ,而シテ m ガ n デ割リ切レル𪜈ハ

$$(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{...........} (6)$$

負ノ指數

198. m ト n トガ正ノ整數ヲ表ハシ且 $m>n$ ナル𪜈ハ, $a^m \div a^n = a^{m-n}$, 今此公式ヲ $m=n$ ナル場合ニ適用スル𪜈ハ

$$a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0$$

即 0 ヲ指數トスル式ヲ得ベシ,然ルニ a^n ヲ a^n デ割リタル商ハ勿論 1 ナルガ故ニ, a^0 ハ 1 ナリト解釋スベキモノナリトス,且此解釋ハ a ノ値ノ如何ニ拘ハラザルヿ勿論ナルガ故ニ,凡テ 0 ヲ指數トスル數ハ 1 ナリ

ニ $m>n$ ナル場合ニ於テ眞ナル公式 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ヲ $m<n$ ナル場合ニ推シ擴メテ適用スル𪜈ハ負數ヲ指數トスル

式ヲ得ベシ,例ヘバ $a^3\div a^5=a^{-2}$, 然ルニ a^3 ヲ a^5 デ割リタルモノハ $\frac{1}{a^2}$ ナルガ故ニ, a^{-2} ハ $\frac{1}{a^2}$ 即 a^2 ノ逆數ヲ意味スルモノトスレバ可ナリ,一般ニ n ハ正ノ整數從テ $-n$ ハ負ノ整數ヲ表ハストシ, a^{-n} ハ a^n ノ逆數ヲ表ハスモノナリト解釋スレバ可ナリ

此レマデハ, $m>n$ ナレバ $a^m\div a^n=a^{m-n}$, $m<n$ ナレバ $a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}$ ナリトノ二ッノ場合ニ區別シテ論ゼザルベカラザリシモ,負數ヲ指數トスル數ヲ上ノ如クニ解釋セルカラニハ,最早ヤ二ッノ場合ニ區別スルノ必要ナシ,乃 m, n ノ大小如何ニ拘ハラズ

$$a^m\div a^n=a^{m-n}=a^{-(n-m)}$$

偖テ a^m ヲ a^n デ割ルハ a^m ニ a^n ノ逆數 $\frac{1}{a^n}$ 即 a^{-n} ヲ掛クルニ同ヂ,故ニ

$$a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$$

此結果ハ亦前節ノ公式(1)ニ於テ n ノ代リニ $-n$ ト置クヿニヨリテ得ラルベシ,乃負ノ指數ヲ許スト同時ニ,啻ニ前節ノ公式(2)ト(3)トヲ合併シ得タルノミナラズ,(2)ト(3)トハ(1)ノ中ニ合マルルヿトナレルナリ

負ノ指數ヲ有スル數ハ指數ノ符號ヲ換ヘテ得ベキ數ノ逆數ニ外ナラザルガ故ニ, m ト n トガ整數ヲ表ハストキハ其符號ノ正タリ負タルニ拘ハラズ

$$a^m\times a^n=a^{m+n},\quad (a^m)^n=a^{mn}$$

ナリ,又 $(-n)$ 乘根トハ逆數ノ n 乘根ナリト解釋スルトキハ, m ガ n デ割リ切ルレバ矢張リ m, n ノ符號如何ニ拘ハラズ

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

ナルヿ明カナリ

199. $a^n\times a^{-n}=a^{n-n}=a^0=1$ ナルガ故ニ

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\qquad a^n=\frac{1}{a^{-n}}$$

之ヲ應用シテ分數ノ分子ノ中ニアル因數ヲ分母ヘ,分母ノ中ニアル因數ヲ分子ヘ移スヿヲ得ベシ,分數ニ於テ分子ノ中ニアル因數ヲ分母ヘ又ハ分母ノ中ニアル因數ヲ分子ヘ移スニハ,此因數ノ指數ノ符號ヲ換フレバヨシ

例 (1) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$　　例 (2) $\frac{a}{b}=ab^{-1}=\frac{1}{a^{-1}b}$

例 (3) $\frac{a^2x^3}{by^2}=a^2b^{-1}x^3y^{-2}=\frac{1}{a^{-2}bx^{-3}y^2}$

例題

1. m ト n トハ正ノ整數ヲ表ハストシテ

$$a^{-m}\times a^n=a^{-m+n},\quad a^{-m}\times a^{-n}=a^{-(m+n)}$$

ノ意味ヲ説明セヨ

2. m ト n トハ正ノ整數ヲ表ハストシテ

$$(a^{-m})^n=a^{-mn},\quad (a^m)^{-n}=a^{-mn},\quad (a^{-m})^{-n}=a^{mn}$$

ノ意味ヲ説明セヨ

3. m ト n トハ正ノ整數ヲ表ハシ且 m ハ n デ割リ切レルモノトシテ $\sqrt[n]{a^{-m}}=a^{-\frac{m}{n}}$ ノ意味ヲ說明セヨ

4. 3 ノ第 (−2) 羃及 $\frac{1}{2}$ ノ第 (−3) 羃ヲ索ム

5. $\frac{1}{9}$ ノ (−2) 乘根及 8 ノ (−3) 乘根如何

6. 本節ノ例ニ倣ヒ次ノ式ニ於テ分母ノ各因數ヲ悉ク分子ヘ又分子ノ各因數ヲ悉ク分母ヘ移セ

$$\frac{x}{y},\qquad \frac{3ab^2}{4c^3d},\qquad \frac{a^2bx^3}{cy^2z^3}$$

7. $\frac{ax^2}{b^2y}$ ニ於テ a ヲ分母ヘ y ヲ分子ヘ移セ

分數指數

200. 混雜ヲ避クル爲メニ,本節ニ於テハ m ト n トハ正ノ整數ヲ表ハスモノトスベシ

分數ヲ指數トスルモノノ意味ヲ定ムルニハ, m ガ n デ割リ切レル塲合ニ於テ眞ナル公式

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

ガ, m ガ n デ割リ切レザル塲合ニモ當テ嵌マル樣ニスレバ可ナリ,即 m ガ n デ割リ切レルト否トニ拘ハラズ $a^{\frac{m}{n}}$ ハ a ノ第 m 羃ノ n 乘根ナリト解釋スベシ

分數指數ヲ用ヰル塲合ニ於テモ矢張リ根號ヲ用ヰタ

ル塲合ニ於ケルガ如ク,第188節ノ規約ニヨリ,或ル數ノ n 乘根ハ幾ツモアル其中ノ格段ナル一ツヲ表ハスモノトスベシ

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, $(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{1}{n}\times m}=a^{\frac{m}{n}}$, 故ニ $a^{\frac{m}{n}}$ ハ又 a ノ n 乘根ノ第 m 羃ナリト解釋スルコヲ得ベシ,此結果ハ勿論 m ガ n デ割リ切レル塲合ニ於テ眞ナル第197節ノ公式 (6) ヲ m ガ n デ割リ切レザル塲合ニマデ推シ擴ムルコニヨリテ得ラルベシ

一般ニ或ル數ノ第 m 羃ノ n 乘根ハ同ジ數ノ n 乘根ノ第 m 羃ニ等シク,或ル數ヲ表ハスニ a ヲ以テシ分數指數ヲ用ヰルトキハ, m ガ n デ割リ切レルト否トニ拘ハラズ,雙方共ニ $a^{\frac{m}{n}}$ ニテ表ハサルベシ

例 (1) $a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$, 故ニ $a^{\frac{1}{2}}$ ハ自乘スレバ a トナル數即 a ノ平方根ナリ,且分數ヲ指數トスル式ハ,上ノ規約ニヨリ,根號ヲ以テ書キ表ハサレタル式ニ同ジク,平方根ハ恒ニ二ツアル其中ノ正ナルモノヲ表ハスモノナルガ故ニ, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

例 (2) $a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^1=a$, 尙ホ上ノ規約ニヨリ $a^{\frac{1}{3}}$ ハ a ノ立方根ハ三ツアル其中ノ $\sqrt[3]{a}$ ニテ表ハサルルモノニ等シ

例 (3) $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$

201. 負ノ分數ヲ指數トスル式ノ意味ヲ定ムルニハ,新タニ解釋ヲ考案スルニ及バズ第198節及第200節ニ據レバ可ナリ,乃 m ト n トハ正ノ整數ヲ表ハシ,從テ $-\frac{m}{n}$ ハ負ノ分數ヲ表ハストスレバ

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$$

例ヘバ $(25)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(25)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$

例 題

次ノ數又ハ式ヲ簡單ナル形チニ化セ

1. $8^{\frac{2}{3}}$ 2. $4^{-\frac{3}{2}}$ 3. $(16)^{-\frac{1}{2}}$ 4. $(100)^{-\frac{1}{2}}$

5. $(1000)^{\frac{2}{3}}$ 6. $(81)^{-\frac{3}{4}}$ 7. $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ 8. $\left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

9. $(27)^{-\frac{4}{3}}$ 10. $(100)^{-\frac{5}{2}}$ 11. $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{4}{3}}$ 12. $(a^2)^{-3}$

13. $(a^{-2})^{-3}$ 14. $\sqrt{a^{-4}}$ 15. $\sqrt[3]{a^{-3}}$

202. 負ノ整數及正負ノ分數ヲ指數トスル式ヲ前諸節ニ於ケルガ如クニ解釋シタル結果トシテ,指數ガ正ノ整數ナル塲合ニ於テ眞ナル總テノ公式ハ,指數ガ正負ノ整數分數ノ中ノ如何ナル數ナルニ拘ハラズ,恒ニ當テ嵌マルモノトス,乃負數分數ヲ指數トスル式ハ指數ガ正ノ整數ナル式ト全ク同ジ樣ニ之ヲ取扱フコトヲ得ベシ

例 (1) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}$ ニ $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$ ヲ掛ケヨ

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6},\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12},\quad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

故ニ $$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{7}{6}}b^{\frac{13}{12}}c$$

例 (2) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ ヲ平方ニセヨ

$\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}\times 2=1$, 故ニ $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2=a^{\frac{4}{3}}b$

例 (3) $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}$ ヲ $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}$ デ割レ

$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, 故ニ $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$

例 (4) $a^3b^{-3}c^4$ ノ立方根ヲ索ム

$\frac{3}{3}=1$, $\frac{-3}{3}=-1$, $\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$, 故ニ $\sqrt[3]{a^3b^{-3}c^4}=ab^{-1}c^{\frac{4}{3}}$

例 題

次ノ式ヲ簡單ニセヨ

1. $a^{-\frac{2}{3}}\times a$ 2. $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$ 3. $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

4. $\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 5. $\left\{(a^{-2})^2\right\}^{\frac{3}{4}}$ 6. $\left\{\left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{5}}$

7. $a^{\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times a^{\frac{5}{12}}$ 8. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}c\times ab^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{3}}$

9. $(x^{p+q}\times x^{p-q})\div x^{2p}$ 10. $x^{(q-r)p}\times x^{(r-p)q}\times x^{(p-q)r}$

11. $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\div x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)\div\left(x^{\frac{1}{6}}\div y^{\frac{1}{6}}\right)$

分數指數ヲ用ヰテ次ノ式ヲ簡單ニセヨ

12. $\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[6]{a}$ 13. $\sqrt{a^3x}\times\sqrt[3]{a^2x^5}$

14. $\left(\sqrt[3]{a^7}\times\sqrt[5]{a^7}\times a^{-\frac{1}{3}}\right)\div a^{\frac{4}{5}}$ 15. $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}}$

16. $\sqrt{a^3b^{-2}}\div\sqrt[3]{a^{-4}b^5}$ **17.** $\sqrt[3]{a^6b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}}\times\left(a^4bc^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

次ノ式ヲ書キ直シテ負ノ指數及分數指數ヲ去レ

18. $a^{-3}b^{-\frac{1}{3}}$ **19.** $a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$ **20.** $a^{-2}b^{-\frac{1}{3}}+3^{-1}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$

203. 次ニ負ノ指數及分數指數ヲ含ミタル複雑ナル式ニ係ル二三ノ演算ノ例ヲ示ス

例 (1) $x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$ ニ $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1}$ ヲ掛ケヨ

$$\begin{array}{l}
x+x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\\
\underline{x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{-1}}\\
x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+1\\
\qquad x^{\frac{2}{3}}+1+x^{-\frac{2}{3}}\\
\qquad\qquad \underline{-1-x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}}\\
x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}+1 \qquad -x^{-\frac{4}{3}}
\end{array}$$

左ノ演算ニ於テ $x\times x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}+1}=x^{\frac{4}{3}}$, $x^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{3}}=1$, 以下同樣ニシテ各部分積ヲ索ムルモノトス

例 (2) $a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}$ ヲ $a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}}$ デ割レ

$$\begin{array}{l}
a^{\frac{1}{3}}-2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}+b^{-\frac{1}{3}}\big)\ a^{\frac{1}{2}}-3a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+3a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}\ \big(a^{\frac{1}{6}}-b^{-\frac{1}{6}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+\ a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -\ a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\ a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}+2a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{2}}}
\end{array}$$

例 (3) $x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x$ ヲ平方ニ開ケ

與ヘラレタル式ノ諸項ヲ x ノ指數ノ大小ノ順ニ列ベ變ヘテ後,宛モ整式ノ開平ニ於ケルガ如クニ演算スルコ次ノ如シ

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}\ \big(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\\
\left(x^{\frac{5}{6}}\right)^2=\underline{x^{\frac{5}{3}}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\\
2x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}\big)-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}\\
\qquad\qquad\quad \underline{-4x^{\frac{4}{3}}\qquad\quad +4x\qquad\qquad\qquad}\\
2x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\big)\quad 2x^{\frac{7}{6}}\qquad -4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \underline{2x^{\frac{7}{6}}\qquad -4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}}
\end{array}$$

第三十二問題集

次ノ式ヲ掛ケ合ハセヨ

1. $x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{4}}$, $x^{\frac{3}{4}}-y^{\frac{3}{4}}$ **2.** $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$

3. $x+x^{\frac{1}{2}}+2$, $x+x^{\frac{1}{2}}-2$ **4.** x^4+x^2+1, $x^{-4}-x^{-2}+1$

5. $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1$, $a^{-\frac{1}{3}}-1$ **6.** $a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}$

7. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

8. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$, $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$

次ノ第一式ヲ第二式デ割レ

9. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$　　10. $a-b$, $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$

11. $64x^{-1}+27y^{-2}$, $4x^{-\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{2}{3}}$

12. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$

13. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}$

14. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$

15. $x^{\frac{3}{4}}-2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{8}}+a^{3}$, $x^{\frac{1}{4}}-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{8}}+a$

16. $x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{1}{8}}+6x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{3}{8}}+y^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$

17. $a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$

次ノ式ヲ平方ニ開ケ

18. $x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{1}{2}}$　　19. $(x+x^{-1})^{2}-4(x-x^{-1})$

20. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$

21. $4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$

22. $4a^{-2}x^{2}-12a^{-1}x+25-24ax^{-1}+16a^{2}x^{-2}$

---

23. $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$ ヲ簡單ニセヨ

24. $1-\dfrac{a^{2}+b^{2}-a^{-2}-b^{-2}}{a^{2}b^{2}-a^{-2}b^{-2}}=\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$ ナルヿヲ示セ

25. $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=2+x^{\frac{2}{3}}$ ナルヿヲ示セ

第十九編　不盡根數

204. 或ル數ノ開キ切レザル根ヲ一般ニ**無理數**或ハ**不盡根數**ト稱ス,例ヘバ$\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, $\sqrt[4]{7}$ ハ何レモ不盡根數ナリ

或ル有理式ノ代數的ニ開キ切レザル根ヲモ無理數(又ハ無理式)或ハ不盡根數(又ハ不盡根式)ト稱ス,例ヘバ$\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^{2}}$, $\sqrt[4]{a^{2}+b^{2}}$ ハ何レモ不盡根數ナリ,爰ニ注意スベキハ,此レ等ノ式ハ a, b ノ數値如何ニヨリテ或ハ開キ切レルヿモアルベキニ拘ハラズ,代數的ニハ決シテ開キ切レザルガ故ニ矢張リ不盡根數ト稱スルヿナリ

幾乘根ナルカヲ示ス數即根號ノ角ノ開キタルトコロニ置カレタル數ヲ**根指數**ト稱ス,例ヘバ$\sqrt{3}$即$\sqrt[2]{3}$ノ根指數ハ2, $\sqrt[n]{a}$ ノ根指數ハ n ナリ

根指數ニ對シ罕ニハ從來ノ指數ヲ**羃指數**ト稱スルヿアリ,然レモ唯指數トアルハ恒ニ羃指數ノ意ナリト知ルベシ

205. 見懸ケ上不盡根數ノ形チヲ有スルモ其實不盡根數ナラズシテ開キ切レルモノアリ,例ヘバ$\sqrt[4]{16}$ハ不盡

根數ノ形チヲ有スレドモ其實 $\sqrt[4]{16}=2$ ニシテ不盡根數ニアラズ,又 $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ モ不盡根數ノ形チヲ有スレドモ其實 $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ ハ $a+b$ ニ等シ

或ル時ハ有理數ヲ不盡根數ノ形チニ化スルノ必要アルヿアリ

或ル數ノ第 n 羃ノ n 乘根ハ元ノ數ニ等シ,即式ニテ書ケバ $\sqrt[n]{a^n}=a$ ナルガ故ニ,或ル有理數ヲ n 乘根ノ形チニ化スルニハ,之ヲ n 乘シタルモノニ n ヲ根指數トスル根號ヲ冠ラスレバ可ナリ,例ヘバ $3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$, $4=\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[3]{64}$, $a=\sqrt[4]{a^4}$, $a+b=\sqrt[5]{(a+b)^5}$

206. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ ヲ n 乘スルトキハ ab ヲ得ベシ,又 $\sqrt[n]{ab}$ ヲ n 乘スルモ矢張リ ab ヲ得ベシ,故ニ

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

即同ジ根指數ヲ有スル二ツノ不盡根數ヲ掛ケ合ハスニハ,二ツノ根號ノ下ニアル數ヲ掛ケ合ハセタルモノニ同ジ根指數ヲ有スル根號ヲ冠ラスレバ可ナリ,通例ハ畧シテ,根號ノ下ニテ掛ケ合ハストイフ,因數ノ數二ツヨリ多クアル場合ニ於テモ同樣ナリ

有理數ト不盡根數トノ積ハ之ヲ總テノ因數ガ根號ノ下ニ現ハルル形チニ化スルヿヲ得ベシ,例ヘバ $2\sqrt[3]{4}$ ヲ此形チニ化センニ,前節ニヨリ $2=\sqrt[3]{8}$ 故ニ $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}$,

上ノ算法ニヨリ $\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$, 故ニ $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32}$, 一般ニ

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$$

爰ニ注意スベキハ,$\sqrt[3]{4}$ ガ開キ切レザレバ $2\sqrt[3]{4}$ 即 $\sqrt[3]{32}$ モ勿論開キ切レズ,乃第 204 節ノ定義ニヨリ有理數ト不盡根數トノ積ハ矢張リ不盡根數ナルヿナリ,例ヘバ $2\sqrt{3}$, $5\sqrt[3]{3}$, $a\sqrt[n]{b}$ ハ何レモ不盡根數ナリ

有理數ト不盡根數トノ積トシテ表ハサレタル不盡根數ニ於ケル不盡根數ナル因數ヲ**無理因數**, 有理數ナル因數ヲ其**係數**ト稱ス

或ル數ニ根號ヲ冠ラセタル形チノ不盡根數ノ係數ハ1ナリ,例ヘバ $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[3]{a^2}$ ノ係數ハ何レモ1ナリ

逆ニ,$\sqrt[n]{a^nb}=a\sqrt[n]{b}$ ナル公式ニヨリ,或ル數ニ根號ヲ冠ラセタル形チノ不盡根數ノ根號ノ下ニ開キ切レル因數ガ在ルトキハ,之ヲ開キテ以テ根號ノ外ニ出スヿヲ得,例ヘバ $\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\times4}=\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}$, 又 $\sqrt[3]{a^3b^2}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^2}=a\sqrt[3]{b^2}$

次ノ等式ノ各邊ノ第 n 羃ハ $\frac{a}{b}$ ナルガ故ニ

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

故ニ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{bb^{n-1}}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$

此公式ヲ應用シテ分數ニ根號ヲ冠ラセタル形チノ不盡根數ヲ化シテ,根號ガ分子ニノミ係ル樣ニスルヿヲ得

ベシ,例ヘバ $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times9}{3\times9}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

不盡根數ヲ分母トスル分數モ亦之ヲ化シテ根號ガ分子ニノミ係ル樣ニスルコヲ得ベシ,例ヘバ

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}}=\frac{3\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{7^2}}=\frac{3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{3\sqrt[3]{98}}{7}$$

本節ノ諸算法ヲ應用シテ不盡根數ヲ最モ簡單ナル形チニ化スルコヲ得ベシ,最モ簡單ナル形チトハ根號ノ下ニアル開キ切レル因數ヲ根號ノ外ニ出シ,根號ノ下ニハ成ルベク小サキ數ガ殘リ居ル形チヲイフ,又分數ノ塲合ニ於テハ根號ガ分子ニノミ係リ且根號ノ下ニハ成ルベク小サキ數ガ在ル形チヲイフ

不盡根數ノ最モ簡單ナル形チハ,概シテイヘバ,其近似値ヲ算出スル上ニ於テ最モ便利ナル形チナリ

例　題

次ノ不盡根數ヲ化シテ有理數ナル因數ヲ根號ノ下ニ入レヨ

1 $3\sqrt{5}$　　2. $3\sqrt[3]{21}$　　3. $2\sqrt[4]{7}$　　4. $a^2bc\sqrt{bc}$

5. $x\sqrt[3]{x^2y^2}$　　6. $2x\sqrt[5]{xy}$　　7. $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{91}{8}}$　　8. $4\sqrt[3]{\frac{25}{288}}$

次ノ不盡根數ヲ最モ簡單ナル形チニ化セ

9. $\sqrt{50}$　　10. $\sqrt{24}$　　11. $\sqrt[3]{108}$　　12. $\sqrt[3]{2^4\times3^3\times5^6}$

13. $\sqrt{\frac{7}{12}}$　　14. $\sqrt{\frac{5}{9}}$　　15. $\sqrt{1\frac{11}{16}}$　　16. $\sqrt{3\frac{1}{8}}$

17. $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$　　18. $\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$　　19. $\frac{12}{\sqrt{5}}$　　20. $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$

21. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$　　22. $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$　　23. $\frac{3\sqrt[3]{5}}{2\sqrt[3]{3}}$　　24. $5\sqrt{726}$

25. $\sqrt{8a^3b}$　　26. $\sqrt[3]{1000a}$　　27. $\sqrt[3]{108x^9y^{10}}$

28. $\sqrt[3]{a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3}$　　29. $9\sqrt[3]{81x^2y^3z}$

30. $\sqrt{50a^2+100ab+50b^2}$　　31. $2\sqrt[4]{80a^5b^2c^6}$

32. $\sqrt{\frac{2xy^2}{z}}$　　33. $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b}{2a^3}}$　　34. $\sqrt{\frac{3a^2bx}{4cy^3}}$

$\sqrt{2}=1.41421$, $\sqrt{3}=1.73205$ (勿論近似値ナリ)ナリトシテ次ノ不盡根數ノ値ヲ索メヨ

35. $\sqrt{32}$　　36. $\frac{5}{2}\sqrt{288}$　　37. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

38. $\sqrt{75}$　　39. $\frac{2}{11}\sqrt{363}$　　40. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

207. 不盡根數ヲ同ジ根指數ニ化スルヿ

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}}=\sqrt[nm]{a^m}$$

ナル公式ヲ適用シテ,異ナリタル根指數ヲ有スル不盡根數ヲ同ジ根指數ヲ有スル不盡根數ニ化スルヿヲ得ベシ

例 (1) $\sqrt{5}$ 及 $\sqrt[3]{11}$ ヲ同ジ根指數ニ化セ

$5^3=125$, $5=\sqrt[3]{125}$, 故ニ, $\sqrt{5}=\sqrt{\sqrt[3]{125}}=\sqrt[6]{125}$

$(11)^2=121$, $11=\sqrt{121}$, 故ニ $\sqrt[3]{11}=\sqrt[3]{\sqrt{121}}=\sqrt[6]{121}$

例 (2) $\sqrt[4]{2}$ 及 $\sqrt[6]{3}$ ヲ同ジ根指數ニ化セ

4ト6トノ最小公倍數ハ12ニシテ,$12=4\times3$ 又 $12=6\times2$,乃此レ等ノ不盡根數ヲ12ナル根指數ニ化スレバ可ナリ

$2^3=8$, $2=\sqrt[3]{8}$, 故ニ $\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{8}}=\sqrt[12]{8}$

$3^2=9$, $3=\sqrt{9}$, 故ニ $\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{\sqrt{9}}=\sqrt[12]{9}$

異ナリタル根指數ヲ有スル不盡根數ノ大小ヲ見定ムルニハ,之ヲ同ジ根指數ニ化セバ可ナリ,例ヘバ $\sqrt{5}$ ト $\sqrt[3]{11}$ トハイヅレカ大ナル乎ト問フニ, $\sqrt{5}=\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[3]{11}=\sqrt[6]{121}$ ナルガ故ニ,$\sqrt{5}$ ハ $\sqrt[3]{11}$ ヨリモ大ナリ,同樣ニ $\sqrt[6]{3}$ ハ $\sqrt[4]{2}$ ヨリモ大ナリ

又本節ノ冒頭ニ掲ゲタル公式ヲ逆ニ適用シテ,根指數ヲ小サクスルヲ得ルヿアリ,例ヘバ $\sqrt[6]{125}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt{5}$, $\sqrt[12]{27}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[4]{3}$

例題

1. 次ノ各組ノ不盡根數ヲ同ジ根指數ニ化セ

   $\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$　　$\sqrt[4]{3}, \sqrt[6]{5}$　　$\sqrt[3]{14}, \sqrt{6}$

2. 次ノ不盡根數ヲ化シテ根指數ヲ成ルベク小サクセヨ

   $\sqrt[6]{121}$, $\sqrt[12]{8}$, $\sqrt[12]{9}$, $\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[6]{196}$

3. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ ヲ同ジ根指數ニ化セ
4. $\sqrt[12]{a^3b^6}$ ヲ化シテ根指數ヲ成ルベク小サクセヨ
5. $\sqrt{3}$ ト $\sqrt[3]{5\frac{1}{5}}$ トハ孰レカ大ナルカ
6. $3\sqrt{7}$ ト $2\sqrt[3]{39}$ トハ孰レカ大ナルカ
7. $4\sqrt{2}, 3\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[4]{5}$ ヲ大小ノ順ニ列ベヨ

208. 同類不盡根數

諸ノ不盡根數ガ同ジ無理因數ヲ有スルトキ,或ハ之ヲ化シテ同ジ無理因數ヲ有スルニ至ラシムルヿヲ得ルトキハ,此レ等ノ不盡根數ハ同類ナリトイフ,例ヘバ $4\sqrt{3}$ ト $5\sqrt{3}$ トハ同類不盡根數ナリ,又 $5\sqrt[3]{2}$ ト $4\sqrt[3]{16}$ トモ同類不盡根數ナリ,如何トナレバ,$4\sqrt[3]{16}=8\sqrt[3]{2}$ ナレバナリ

同類不盡根數ヲ加減スルニハ,公通ノ無理因數ニ係數ノ和或ハ差ヲ前置スベシ

例 (1) $2\sqrt{7}+3\sqrt{7}=(2+3)\sqrt{7}=5\sqrt{7}$

例 (2) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

$=(2+5-4)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

例 (3) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{256}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{12}{8}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{64\times4\times3}{9\times3}}$

$=\frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{1}{4}\frac{4\sqrt[3]{12}}{3}=\frac{2\sqrt[3]{12}}{3}$

同類ナラザル不盡根數ヲ加減スルニハ,唯加號減號ヲ以テ寄セ算引キ算ヲ表示スベシ

例 題

次ノモノヲ簡單ニセヨ

1. $\sqrt{50}+\sqrt{98}$　　2. $2\sqrt{28}-\sqrt{63}$

3. $3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{625}$　　4. $3\sqrt[3]{72}-2\sqrt[3]{243}$

5. $\sqrt{512}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$　　6. $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$

7. $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$　　8. $2\sqrt{3}+\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$

9. $5\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{18}}$　　10. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$

209. 同ジ根指數ヲ有スル無理因數ヲ掛ケ合ハスニハ,既ニ第206節ニ於テ示セルガ如ク,根號ノ下ニテ掛ケ合ハセバ可ナリ,乃異ナリタル根指數ヲ有スル不盡根數ヲ掛ケ合ハスニハ,先ヅ其無理因數ヲ同ジ根指數ニ化シ而シテ後係數ハ係數同士無理因數ハ無理因數同士掛ケ合ハスベシ

割リ算モ亦掛ケ算ト同樣ニシテ之ヲ行フモノトス,無理因數ヲ無理因數デ割ルニハ先ヅ之ヲ同ジ根指數ニ化シテ後根號ノ下ニテ割リ算ヲ行ヘバ可ナリ,或ハ又,分數ノ形チヲ用ヰテ割リ算ヲ表示シタル後,既ニ第206節ノ終リニ於テ一二ノ例ヲ示シタルガ如ク,之ヲ最モ簡單ナル形チニ化スルモ可ナリ

凡テ掛ケ算割リ算ノ結果ハ通例之ヲ最モ簡單ナル形チニ化スベキモノトス

例 (1) $2\sqrt[3]{4}\times3\sqrt[3]{2}=(2\times3)(\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2})=6\sqrt[3]{8}=6\times2=12$

例 (2) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{8}\times\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{72}$

例 (3) $3\sqrt{2}\div4\sqrt{3}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

例 (4) $4\sqrt{5}\div2\sqrt[3]{11}=4\sqrt[6]{125}\div2\sqrt[6]{121}=\frac{4}{2}\sqrt[6]{\frac{125}{121}}$

$=2\sqrt{\frac{125\times(11)^4}{121\times(11)^4}}=\frac{2\sqrt[6]{1830125}}{11}$

或ハ $4\sqrt{5}\div2\sqrt[3]{11}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{11}}=\frac{2\sqrt{5}\times\sqrt[3]{(11)^2}}{\sqrt[3]{11}\times\sqrt[3]{(11)^2}}$

$=\frac{2}{11}\sqrt{5}\sqrt[3]{121}=\frac{2}{11}\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{14641}=\frac{2}{11}\sqrt[6]{1830125}$

例　題

次ノ掛ケ算割リ算ヲ行ヘ

1. $4\sqrt{5}\times7\sqrt{6}$　**2.** $\sqrt{12}\times\sqrt{24}$　**3.** $\sqrt[3]{7}\times\sqrt[3]{49}$

4. $3\sqrt{\frac{2}{3}}\times2\sqrt{\frac{3}{2}}$　**5.** $4\sqrt{5}\times\sqrt[3]{11}$　**6.** $\sqrt{10}\times\sqrt[3]{100}$

7. $\sqrt{18}\div\sqrt{50}$　**8.** $\sqrt[3]{7}\div\sqrt{2}$　**9.** $2\sqrt[3]{2}\div\sqrt{6}$

10. $(\sqrt{20}\times\sqrt{96})\div\sqrt{30}$　**11.** $(\sqrt[3]{147}\div\sqrt[3]{35})\times\sqrt[3]{735}$

12. $(\sqrt{10}\times\sqrt{20})^3$

210. 複雜ナル不盡根數ノ掛ケ算ハ,恰モ多項式ノ掛ケ算ト同樣ニシテ,之ヲ行フモノトス

例 (1)　$(6\sqrt{3}-5\sqrt{2})\times(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$

$$=36-10\sqrt{6}+18\sqrt{6}-30=6+8\sqrt{6}$$

複雜ナル不盡根數ノ割リ算ノ中,實際ニ於テ稍肝要ナルハ,除數ガ有理數ト不盡平方根數又ハ不盡平方根數ト不盡平方根數トノ和或ハ差ナル塲合ナリ,此塲合ニ於テハ,一旦分數ノ形チヲ用ヰテ割リ算ヲ表示シタル後,次ニ例示スル方法ニヨリ,之ヲ簡單ナル形チニ化スベシ

例 (2)　7 ヲ $5+2\sqrt{3}$ デ割レ

$$\frac{7}{5+2\sqrt{3}}=\frac{7(5-2\sqrt{3})}{(5+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{35-14\sqrt{3}}{25-12}=\frac{35-14\sqrt{3}}{13}$$

例 (3)　$\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ヲ $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ デ割レ

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{6}+\sqrt{6}+2}{12-2}=\frac{8+3\sqrt{6}}{10}$$

例 (4)　$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ヲ簡單ニセヨ

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{a-\sqrt{ab}}{a-b}$$

上ノ諸例ノ示スガ如クニシテ,分母ノ中ニアル根號ヲ去ルヿヲ名ヅケテ分母ヲ**有理化スル**トイフ

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ヲ有理化スルニハ $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ヲ掛ケ,$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ ヲ有理化スルニハ $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ヲ掛クベシ

211. a, b, c, d ハ有理數,$\sqrt{b}$ ト $\sqrt{d}$ トハ唯見懸ケノミナラズ眞ニ無理數ニシテ,$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ ナル𪜈ハ,$a=c$, $b=d$ ナリ,如何トナレバ

$$a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d}$$

此等式ノ兩邊ヲ自乘スレバ

$$(a-c)^2+2(a-c)\sqrt{b}+b=d$$

移項スレバ

$$2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a-c)^2$$

乃 a ガ c ニ等シカラズトスレバ,左邊ノ無理數ガ右邊ノ

有理數ニ等シトイフヿトナルベシ,此レ不合理ナリ,故ニaハcニ等シカラザルベカラズ,$a=c$ナルトキハ,與ヘラレタル等式ヨリシテ$\sqrt{b}=\sqrt{d}$即$b=d$ヲ得,仍テ次ノ定理ヲ得

有理數ト不盡平方根數トノ和ガ他ノ有理數ト不盡平方根數トノ和ニ等シキトキハ,有理數同士相等シク又無理數同士相等シ

注意 上ノ定理ニ於テ不盡平方根數トアルハ眞ニ開キ切レザル無理數ノ意ナリ,唯見懸上不盡平方根數ノ形チヲ有スルモ其實開キ切レル場合ニハ此定理ハ成リ立タズ,例ヘバ$6+\sqrt{9}=5+\sqrt{16}$ナレドモ,勿論6ハ5ニ等シカラズ,9ハ16ニ等シカラズ

212. aハ有理數,$\sqrt{b}$ハ不盡平方根數ナリトシ,$a+\sqrt{b}$ノ平方根ヲ書キ表ハスニハ$\sqrt{a+\sqrt{b}}$ヲ以テスルモノトス,但特別ナル場合ニ於テハ之ヲ稍簡單ナル形チニ化スルヿヲ得ベシ

二ッノ不盡平方根數ノ和ノ平方ハ有理數ト不盡平方根數トノ和ニ等シキヿニ着目シテ

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

ト置クベシ,但斯ク置クヿニ就テハ,必ズ斯ク置カザルベカラズトイフガ如キ確固タル理由アルニアラズ,唯斯ク

置キテ試ミルトイフニ過ギズ,兩邊ヲ自乘スレバ

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}$$

此方程式ガ成リ立ツ爲メニハ,前節ノ定理ニヨリ

$$x+y=a\ ,\quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$$

ナラザルベカラズ,乃

$$(x+y)^2-4xy=a^2-b\ ,\ (x-y)^2=a^2-b\ ,\ x-y=\pm\sqrt{a^2-b}$$

a^2-bガ完全ナル平方數ニシテ$\sqrt{a^2-b}$ガ開キ切レル特別ナル場合ニ於テハ,xトyトノ値トシテ有理數ヲ得ベク,然ラザル場合ニハ,複雜ナル不盡根數ヲ得ベキヤ明カナリ,又xトyトガ複雜ナル不盡根數ナルトキハ$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ハ元ノ$\sqrt{a+\sqrt{b}}$ヨリモ一層複雜ナルヿ多言ヲ俟タザルベシ,故ニ此方法ノ有効ナルハa^2-bガ完全ナル平方數ナル特別ナル場合ニ限ルモノトス

$a-\sqrt{b}$ノ平方根ヲ索ムルニハ$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ト置キテ後同樣ノ方法ヲ適用スベシ,而シテ此方法ガ有効ナル爲メニハ矢張リa^2-bガ完全ナル平方數ナラザルベカラズ

例 $7+4\sqrt{3}$ノ平方根ヲ索ム

此例ニ於テa^2-bハ$49-48$即1ニシテ完全ナル平方數ナルガ故ニ$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ト置キ,之ヲ自乘シテ,

$7+4\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{xy}$,仍テ

$x+y=7$, $2\sqrt{xy}=4\sqrt{3}$

$(x+y)^2-4xy=49-48$, $(x-y)^2=1$, $x-y=\pm1$

$x+y=7$, $x-y=\pm1$ ヨリシテ $x=4$, $y=3$ 或ハ $x=3$, $y=4$ ヲ得ベシ, 何レニシテモ $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

第三十三問題集

次ノ各組ノ不盡根數ヲ掛ケ合ハセヨ

1. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

2. $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$, $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

3. $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}$, $\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

4. $2\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$

5. $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{54}$

6. $\frac{3}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{3}$ 7. $\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{4}$

8. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

9. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ ヲ自乘セヨ

10. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ ノ連乘積ヲ索ム

次ノ分數ノ分母ヲ有理化セヨ

11. $\frac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ 12. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 13. $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

14. $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$ 15. $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ 16. $\frac{12}{7-3\sqrt{5}}$

17. $\frac{a}{a+\sqrt{a}}$ 18. $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 19. $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

20. $\frac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$ 21. $\frac{3+2\sqrt{x}}{5+3\sqrt{x}}$ 22. $\frac{a+b\sqrt{x}}{c+d\sqrt{x}}$

次ノ不盡根數ノ平方根ヲ索ム

23. $14+6\sqrt{5}$ 24. $16-6\sqrt{7}$ 25. $8+4\sqrt{3}$

26. $4-\sqrt{15}$ 27. $15+2\sqrt{56}$ 28. $6-\sqrt{35}$

次ノ複雜ナル不盡根數ヲ簡單ニセヨ

29. $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}$ 30. $\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ 31. $\frac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$

32. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 33. $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$

34. $\frac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$

35. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ

36. $\frac{11}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ノ分母ヲ有理化セヨ

37. $\sqrt{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$ ト置キテ x ト y トヲ索ムルモ,矢張リ第212節ト同ジ結果ヲ得ベキコトヲ示セ

第二十編　比及比例

比

213. aノbニ對スル**比**トハaノ中ニbガ幾倍合マレ居ルトイフ意味ニ於ケル關係ナリ

爰ニ注意スベキハ,數學上ニ於ケル幾倍或ハ幾ツトイフ辭ノ意味ハ,數ノ範圍ト共ニ次第ニ推シ擴マルヿナリ,整數ノ範圍内ニ於テ幾倍トイヘバ整數倍ノ意ナリ,分數ヲ數ノ中ニ仲間入リセシムルト同時ニ幾倍トイフヿハ分數倍即幾部分トイフ意ヲモ合ムヿトナレルナリ,數ノ範圍ヲ更ニ推シ擴メテ不盡數ヲモ數ノ中ニ仲間入リセシムルト同時ニ幾倍トイフヿハ,最早ヤ普通ノ辭ニテ說明スルヿ能ハザル不盡數倍トイフ意ヲモ合ムヿトナレルナリ

aノbニ對スル比ヲ書キ表ハスニ　$a:b$　ヲ以テス

比$a:b$ニ於テaトbトヲ比ノ**項**ト稱シ,aヲ其**前項**bヲ其**後項**ト稱ス

$a:b$ナル比ノ値ハaヲbデ割リタル商$\frac{a}{b}$ニ等シ

比ト比ノ値トハ異ナレリ,例ヘバ15ノ5ニ對スル比ハ何處マデモ15ノ5ニ對スル比ニシテ之ヲ書キ表ハスニ

ハ15:5ヲ以テス,而シテ其値ハ15ヲ5デ割リテ得ベキ3ニ等シ,然レ𪜈屢比ノ値トイフベキヲ畧シテ單ニ比ト稱スルヿアリ,乃比トイフ辭ハ本來ノ意味ト比ノ値トイフ意味トノ兩樣ニ用ヰラルルヿアリト知ルベシ

又値ガ$\frac{a}{b}$ニ等シキ比$a:b$トイフベキヲ畧シテ比$\frac{a}{b}$ト稱スルヿアリ

214. 比$a:b$ノ値ハ$\frac{a}{b}$ニシテ,比$ma:mb$ノ値モ$\frac{ma}{mb}$即$\frac{a}{b}$ナルガ故ニ,比ノ前項後項ニ同一ノ數ヲ掛クルモ比ノ値ハ變ハラズ,同樣ニ,比ノ前項後項ヲ同一ノ數デ割ルモ比ノ値ハ變ハラズ

二ツノ比ノ大小ヲ比較スルニハ,其値ヲ表ハス分數ヲ通分シテ後,分子ヲ比較スレバ可ナリ,例ヘバa, b, c, dハ正ナリトシ$a:b$ト$c:d$トヲ比較センニ,$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$, $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$ 故ニ　$ad>bc$　ナレバ前ノ比ハ後ノ比ヨリモ大ニシテ,$ad=bc$　ナレバ二ツノ比ハ相等シク,$ad<bc$　ナレバ前ノ比ハ後ノ比ヨリモ小ナリ

215. a, b, xハ何レモ正ナリトシ,$\frac{a}{b}$ノ分母分子ノ雙方ニxヲ加フルトキハ,$\frac{a+x}{b+x}$ヲ得,$\frac{a}{b}$ト$\frac{a+x}{b+x}$トノ大小ヲ比較スルニハ,前節ニヨリ$a(b+x)$ト$b(a+x)$トヲ比較スレバ可ナリ,而シテ

$$a>b \text{ ナレバ}, \ ab+ax>ab+bx, \text{ 故ニ } \frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$$

$$a<b \text{ ナレバ}, \ ab+ax<ab+bx, \text{ 故ニ } \frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$$

偖テ $a>b$ ナレバ $\frac{a}{b}$ ハ1ヨリモ大, $a<b$ ナレバ $\frac{a}{b}$ ハ1ヨリモ小ナリ, 仍テ次ノ定理ヲ得

比ノ前項後項ニ同一ノ數ヲ加フルトキハ, 1ヨリモ大ナル比ハ小サクナリ, 1ヨリモ小ナル比ハ大キクナル

x ノ値ノ如何ニ拘ハラズ, $a>b$ ナレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ恒ニ1ヨリモ大, $a<b$ ナレバ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ恒ニ1ヨリモ小ナルガ故ニ, 上ノ定理ハ亦次ノ如クニ言ヒ換ヘルヿヲ得ベシ

凡テ比ノ前項後項ニ同一ノ數ヲ加フルトキハ, 其値ハ1ニ近寄ル

216. a, b, x ハイヅレモ正ニシテ且 x ハ a, b ノ孰レヨリモ小ナリトシ, $\frac{a}{b}$ ノ分母分子ノ雙方ヨリ x ヲ減ジテ $\frac{a-x}{b-x}$ ヲ得, $\frac{a}{b}$ ト $\frac{a-x}{b-x}$ トノ大小ヲ比較スルニハ $a(b-x)$ ト $b(a-x)$ トヲ比較スレバ可ナリ

$$a>b \text{ ナレバ } \ ab-ax<ab-bx, \text{ 故ニ } \frac{a}{b}<\frac{a-x}{b-x}$$

$$a<b \text{ ナレバ } \ ab-ax>ab-bx, \text{ 故ニ } \frac{a}{b}>\frac{a-x}{b-x}$$

仍テ次ノ定理ヲ得

比ノ前項後項ヨリ其孰レヨリモ小ナル同一ノ數ヲ減ズルトキハ, 1ヨリモ大ナル比ハ大キクナリ, 1ヨリモ小ナル比ハ小サクナル

注意 本節ノ定理ハ前節ノ定理ヨリ出ヅルモノナレド, 初學者ガ此二定理ノ關係ヲ會得スルニ困難ヲ感ゼンヿヲ慮リ, 別ニ證明ヲ與ヘタリ, 然レ𪜈此二定理ノ關係ヲ吟味スルガ如キハ, 數學思想ヲ發達セシムル上ニ於テ有益ナル練習ナルガ故ニ, 讀者ガ之ヲ試ミルハ甚ダ望マシキヿナリ

217. 諸ノ比ノ前項ハ前項同士, 後項ハ後項同士掛ケ合ハセテ新タナル比ヲ作ルヿヲ稱シテ, 與ヘラレタル諸ノ比ヲ組ミ合ハセルトイフ, 例ヘバ二ツノ比 $a:b$ ト $c:d$ トヲ組ミ合ハセテ $ac:bd$ ナル比ヲ得

比 $a:b$ ニ對シ, 比 $a^2:b^2$ ヲ元ノ比 $a:b$ ノ二乘比ト稱ス, 同樣ニ $a^3:b^3$ ヲ $a:b$ ノ三乘比ト稱ス

$a:b$, $b:c$, $a:c$ ト三通リニ書クベキヲ畧シテ $a:b:c$ ト書クヿアリ, 數ガ三ツヨリ多クアル場合ニ於テモ同樣ナリ, 然レ𪜈比ハ二ツノ數ニ就テノミ問フヿヲ得ルモノナルヿヲ忘ルベカラズ

218. $\frac{a}{b}$ ハ比 $a:b$ ノ値トイフ意味ニ於テ比ヲ表ハスモノト看做スヿヲ得ベク, 又初メヨリシテ分數ヲ表ハスモノト考フルヿヲ得ベシ

次ニ揭グルモノハ, 相等シキ比(又相等シキ分數)ニ係ル重要ナル定理ナリ

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ ナリトシ,各ノ比ヲ k ニ等シト置ケバ

$$kb=a\ ,\quad kd=c\ ,\quad kf=e$$

$$k(b+d+f)=a+c+e$$

$$k=\frac{a+c+e}{b+d+f}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$p,\ q,\ r$ ヲ以テ任意ノ數ヲ表ハストスレバ

$$pkb=pa\quad ,\ qkd=qc\quad ,\ rkf=re$$

$$k(pb+qd+rf)=pa+qc+re$$

$$k=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 n ヲ以テ任意ノ數ヲ表ハストスレバ

$$p(kb)^n=pa^n,\ q(kd)^n=qc^n,\ r(kf)^n=re^n$$

$$k^n(pb^n+qd^n+rf^n)=pa^n+qc^n+re^n$$

$$k^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}$$

$$k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}\ \cdots\cdots(3)$$

乃與ヘラレタル比 $\dfrac{a}{b},\ \dfrac{c}{d},\ \dfrac{e}{f}$ ノ各ハ (1), (2), (3) ノ右邊ノ比ノ何レニモ等シ,勿論 (1) ト (2) トハ (3) ノ格段ナル塲合ニシテ,(3) ニ於テ,$n=1$ ト置ケバ (2) ヲ得,$n,\ p,\ q,\ r$ ヲ悉ク 1 ト置ケバ (1) ヲ得ベシ,又相等シキ比ガ三ッヨリモ多クアル塲合ニ於テモ同樣ノ公式ヲ得ベキヤ明カナリ

例題

1. 次ノ比ヲ大小ノ順ニ列ベヨ

   3:4 , 7:12 , 8:9 , 2:3 , 5:8

2. 4:15 ト 25:36 トヲ組ミ合ハセテ得ベキ比ノ値如何

3. 二ッノ數ノ比ハ 2 ノ 3 ニ對スル比ニ等シク,各數ニ 7 ヲ加フルトキハ其比ハ 3 ノ 4 ニ對スル比ニ等シクナルベシトイフ,元ノ二ッノ數如何

4. 比 5:3 ノ各項ニ或ル數ヲ加フルトキハ,同ジ比ノ各項ヨリ此數ヲ減ジテ得ベキ比ノ四分ノ三トナルベシトイフ,或ル數トハ如何ナル數ナルカ

5. 二ッノ數ノ比ハ 2 ノ 3 ニ於ケルガ如ク,其差ノ其平方ノ差ニ對スル比ハ 1 ノ 25 ニ於ケルガ如シトイフ 二ッノ數如何

6. 二ッノ數ノ比ハ 3 ノ 4 ニ於ケルガ如ク,其和ノ其平方ノ和ニ對スル比ハ 7 ノ 50 ニ於ケルガ如シトイフ,二ッノ數如何

7. 二ッノ數ニシテ,其和,其差,其平方ノ差ガ 7:1:21 ノ如クナルモノヲ索メヨ

8. 比 11:13 ヨリモ大ナラシムル爲メニ,比 7:17 ノ各項ニ加フベキ最モ小ナル整數ヲ索ム

9. $x^2+2y^2=3xy$ ヨリシテ $x:y$ ノ値ヲ索メヨ

10. 比 $x:1$ ガ $8:x$ ノ二乘比ニ等シクナル樣ニ x ノ値ヲ定メヨ

11. 比 $a-x:b-x$ ガ $a:b$ ノ二乘比ニ等シクナル樣ニ x ノ値ヲ定メヨ

12. 比 $b-a:b+a$ ガ比 $4a-b:6a-b$ ニ等シキトキハ，比 $a:b$ ノ値如何

13. $\dfrac{l}{a-b}=\dfrac{m}{b-c}=\dfrac{n}{c-a}$ ナルトキハ，$l+m+n=0$ ナルコトヲ證明セヨ

14. 比ノ各項ヨリ他ノ項ノ逆數ヲ減ズルトキハ，元ノ比ニ等シキ比ヲ得ベキコトヲ證明セヨ

15. a ト b トハ正ニシテ $a>b$ ナルトキハ，$a^2-b^2:a^2+b^2$ ハ $a-b:a+b$ ヨリモ大ナルコトヲ證明セヨ

16. b ト d トガ正ナルトキハ，$\dfrac{a+c}{b+d}$ ハ大小ノ關係ニ於テ $\dfrac{a}{b}$ ト $\dfrac{c}{d}$ トノ間ニアルコトヲ證明セヨ

17. b, d, f ガ正ナルトキハ，$\dfrac{a+c+e}{b+d+f}$ ハ $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f}$ ノ中ノ最モ小ナルモノヨリモ大ニシテ，最モ大ナルモノヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ

18. $\dfrac{bz-cy}{b-c}$ ガ $\dfrac{cx-az}{c-a}$ ニ等シキトキハ，各ハ亦 $\dfrac{ay-bx}{a-b}$ ニ等シキコトヲ證明セヨ

比例

219. 二ツノ相等シキ比ヲ相等シト置キタルモノヲ**比例**ト稱ス

a ノ b ニ對スル比ガ c ノ d ニ對スル比ニ等シキトキハ，a, b, c, d ノ間ニハ比例ガ成リ立ツ，或ハ a, b, c, d ハ比例ヲ成ストイヒ，此事ヲ書キ表ハスニ

$$a:b=c:d$$

ヲ以テシ，a ト d トヲ此比例ノ**外項**，b ト c トヲ其**內項**ト稱ス

a, b, c, d ガ比例ヲ成ストキハ，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，故ニ $ad=bc$，即外項ノ積ハ內項ノ積ニ等シ，逆ニ a ト d トノ積ガ b ト c トノ積ニ等シキトキハ，a ト d トヲ外項（又ハ內項）トシ b ト c トヲ內項（又ハ外項）トスル比例ガ成リ立ツコ明カナリ

比例ヲ成ス四ツノ數ノ中其三ツヲ知ルトキハ，殘リノ一ツヲ索ムルコヲ得ベシ

$a:b=b:c$ ナルトキハ，$b^2=ac$ ニシテ，b ヲ a ト c トノ比例中數ト稱ス

$a:b=b:c$ ナルトキハ，a, b, c ハ連比例ヲナスト稱ス，同様ニ $a:b=b:c=c:d$ ナルトキハ，a, b, c, d ハ連比例ヲナストイフ，其他之ニ準フ

220. 既ニ第213節ニ於ケルガ如クニ比ノ定義ヲ下ダセルカラニハ，$a:b=c:d$ ナル比例ニ於テ，a, b, c, d ハ整數分數不盡根數ノ中ノ如何ナル數ヲ表ハスモ可ナリ

a ト b トガ同類ノ不盡根數ナルトキハ，比 $a:b$ ノ値ハ有理數ニ等シ，此場合ヲ外ニシテハ，a ト b トノ中ノ一方又ハ雙方ガ不盡根數ナルトキハ，比 $a:b$ ノ値ハ不盡根數ニ等シ，然ルトキハ比 $c:d$ ノ値モ又不盡根數ニ等シカラザルベカラズ，如何トナレバ，不盡根數ハ決シテ有理數ニ等シキヿ能ハザレバナリ，即 c ト d トノ一方又ハ雙方ガ不盡根數ナラザルベカラズ

相等シキ二ツノ不盡根數ヲ各最モ簡單ナル形チニ化スルトキハ，係數ハ係數ニ等シク，無理因數ハ無理因數ニ等シカラザルベカラズ*

不盡根數ノ最モ簡單ナル形チトハ，既ニ前ニモ言ヘルガ如ク，根號ガ分子ニノミ在リ且根指數ガ成ルベク小サク又根號ノ下ニアル數ガ成ルベク小ナル形チヲイフ

或ハ又二ツノ相等シキ不盡根數ヲ各同ジ根指數ニ化シ，總テノ因數ヲ根號ノ下ニ入ルルトキハ，根號ノ下ニ現ハルル二ツノ數ハ相等シカラザルベカラズ

---

*此定理ノ證明ハ整數論ニ涉ルガ故ニ畧ス

例ヘバ比 $\sqrt{2}:2$ ノ値ハ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又比 $\sqrt[3]{2}:\sqrt[6]{32}$ ノ値ハ

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[6]{32}}=\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{32}}=\sqrt[6]{\frac{4}{32}}=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}，故ニ$$

$$\sqrt{2}:2=\sqrt[3]{2}:\sqrt[6]{32}$$

一般ナル不盡數及不盡數ノ相等シキヿヲ論ズルハ，初等代數學ノ範圍外ニ屬スルモノトス，從テ一般ナル不盡數ヲ項トスル比例ハ初等代數學ニ於テ論ズベキ限リニアラズ

221. a, b, c, d ガ比例ヲ成ストキハ，

$$\begin{array}{ll} a:b=c:d & c:d=a:b \\ a:c=b:d & b:d=a:c \\ d:b=c:a & c:a=d:b \\ b:a=d:c & d:c=b:a \end{array}$$

又 a, b, c, d ガ比例ヲナストキハ，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{p}$，兩邊ニ1ヲ加フレバ $\dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$，即 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$，故ニ

$$a+b:b=c+d:d$$

同樣ニシテ次ノ比例ガ成リ立ツヿヲ證明スルヿヲ得ベシ

$$a-b:b=c-d:d$$

$$a+b:a-b=c+d:c-d$$

斯クノ如ク $a:b=c:d$ ヨリシテ他ノ種種ノ比例ヲ誘導スルヿヲ得ベシ

例　題

1. $a:b=c:d$ ナルトキハ,本節ニ掲ゲタル他ノ諸ノ比例ガ成リ立ツコヲ辭ニテ言ヒ表ハセ

2. $a:b=c:d$ ナルトキハ,$a:a-b=c:c-d$ ナルコヲ證明シ,且此結果ヲ辭ニテ言ヒ表ハセ

222. 例 (1)　$a:b=c:d$ ナルトキハ,

$$a:a+b=a+c:a+b+c+d$$

ナルコヲ證明セヨ

$a:b=c:d$, 故ニ $a:a+b=c:c+d$, 內項ヲ交換スレバ $a:c=a+b:c+d$, 故ニ $a:a+c=a+b:a+b+c+d$, 再ビ內項ヲ交換スレバ,與ヘラレタル比例ヲ得

例 (2)　$a:b=c:d$ ナルトキハ,

$$\sqrt[m]{a^m+b^m}:\sqrt[m]{c^m+d}=\sqrt[n]{a^n-b^n}:\sqrt[n]{c^n-d^n}$$

ナルコヲ證明セヨ

$a:b=c:d$, $a^m:b^m=c^m:d^m$, $a+b^m:b^m=c^m+d^m:d^m$,
$a+b^m:c^m+d^m=b^m:d^m$, $\sqrt[m]{a^m+b^m}:\sqrt[m]{c^m+d^m}=b:d$,

又　$a^n:b^n=c^n:d^n$, $a^n-b^n:b^n=c^n-d^n:d^n$

$a^n-b^n:c^n-d^n=b^n:d^n$, $\sqrt[n]{a^n-b^n}:\sqrt[n]{c^n-d^n}=b:d$,

故ニ　$\sqrt[m]{a^m+b^m}:\sqrt[m]{c^m+d^m}=\sqrt[n]{a^n-b^n}:\sqrt[n]{c^n-d^n}$

或ハ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ ト置ケバ, $a=kb$, $c=kd$, 之ヲ與ヘラレ

タル比例ノ中ニ置キ換ヘレバ

$$\sqrt[m]{k^mb^m+b^m}:\sqrt[m]{k^md^m+d^m}=\sqrt[n]{k^nb^n-b^n}:\sqrt[n]{k^nd^n-d^n}$$

$$b\sqrt[m]{k^m+1}:d\sqrt[m]{k^m+1}=b\sqrt[n]{k^n-1}:d\sqrt[n]{k^n-1}$$

而シテ此比例ガ成リ立ツコハ一目瞭然タリ

例　題

次ノ比例ヨリシテ x ノ値ヲ索メヨ

1. $2:\sqrt{2}=\sqrt{3}:x$　　2. $5:x=x:45$

3. $x+4:x+2=x+8:x+5$

4. $3x+2:x+7=9x-2:5x+8$

5. $x^2+x+1:62(x+1)=x^2-x+1:63(x-1)$

6. $ax+b:bx+a=mx+n:nx+m$

---

7. $pq=rs$, $qt=su$ ナルトキハ, $p:r=t:u$ ナルコヲ證明セヨ

8. $a:b=c:d$, $p:q=r:s$ ナルトキハ, $aq:bp=cs:dr$ ナルコヲ證明セヨ

9. 二ツノ數ノ和ハ125ニシテ其比例中數ハ60ナリトイフ,仍テ此二ツノ數ヲ索ム

10. 連比例ヲ成ス三ツノ數ノ和ハ19ニシテ,其平方ノ和ハ133ナリトイフ,仍テ此三ツノ數ヲ索ム

$a:b=c:d$ ナル𪜈ハ,次ノ比例ガ成リ立ツヿヲ證明セヨ

11. $la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd$

12. $a:\sqrt{a^2+b^2}=c:\sqrt{c^2+d^2}$

13. $a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd$

14. $(a+c)(a^2+c^2):(a-c)(a^2-c^2)=(b+d)(b^2+d^2):(b-d)(b^2-d^2)$

15. $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$

16. $pa^2+qab+rb^2:la^2+mab+nb^2=pc^2+qcd+rd^2:lc^2+mcd+nd^2$

17. $a:b=\sqrt[n]{pa^n+qc^n}:\sqrt[n]{pb^n+qd^n}$

---

18. $a:b=b:c$ ナル𪜈ハ, $a^2+b^2:ab+bc=ab+bc:b^2+c^2$ ナルヿヲ證明セヨ

19. $a:b=c:d$ ナル𪜈ハ,

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}=\frac{1}{ad}\left\{\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d\right\}$$

ナルヿヲ證明セヨ

20. $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ ナル𪜈ハ, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

ナルヿヲ證明セヨ

21. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ ナル𪜈ハ,

$$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=o$$

ナルヿヲ證明セヨ

第二十一編 級數

等差級數

223. 若干ノ數ヲ或ル順序ニ列ベタルモノニ於テ,一ツノ數ト其次ノ數トノ差ガ何レモ相等シキトキハ,此差ヲ**通差**トイヒ,此レ等ノ數ヲ此順ニ列ベタルモノヲ**等差級數**ト稱ス,又各ノ數ヲ等差級數ノ**項**,左端ノ項ヲ其**初項**,右端ノ項ヲ其**末項**ト稱ス,例ヘバ

$$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19$$

ハ等差級數ニシテ,通差ハ 2,初項ハ 5,末項ハ 19 ナリ,而シテ項ノ數8アリ

等差級數ノ初項ヲ a,末項ヲ l,通差ヲ d,項ノ數ヲ n,和ヲ s ニテ表ハスベシ,然ル𪜈ハ,等差級數ハ

$$a,\ a+d\ ,\ a+2d,\ldots\ldots\ldots a+(n-2)d,\ a+(n-1)d$$

ナリ,故ニ

$$l=a+(n-1)d\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

此級數ハ又次ノ如クニ書キ下ダスヿヲ得ベシ

$$l-(n-1)d\ ,\ l-(n-2)d\ ,\ l-(n-3)d\ ,\ \ldots\ldots\ldots l-d\ ,\ l$$

次ニ此等差級數ノ和 s ヲ索メンガ爲メニ,各項ヲ元ノ順ニ又逆ノ順ニ加ヘタルモノヲ上下ニ書キ列ベ

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-d)+l$$

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+d)+a$$

左邊ト左邊ト,右邊ト右邊トヲ加フレバ

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$

右邊ニ於テ $a+l$ ガ n 個アルガ故ニ, $2s=n(a+l)$,故ニ

$$s=\frac{n(a+l)}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此公式ハ亦次ノ如クニ變形スルヿヲ得

$$s=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{n}{2}\left\{a+a+(n-1)d\right\}=\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)d\right\}$$

$$s=na+\frac{n(n-1)}{2}d\cdots\cdots\cdots(3)$$

等差級數ニ關シ最モ重要ナルハ,上ニ示シタル其和ヲ索ムル方法ナリ

例　題

1. a, b, c, d ガ等差級數ナルトキハ,此レ等ノ數ノ間ニ如何ナル關係アルカ

2. a, b, c ガ等差級數ナルトキハ, b ハ a ト c トノ平均ニ等シキヿヲ證明セヨ

3. 等差級數ノ各項ニ同一ノ數ヲ加フルトキハ,矢張リ等差級數ヲ得ベキヿヲ示セ

4. 等差級數ノ各項ニ同一ノ數ヲ掛クルトキハ,矢張リ等差級數ヲ得ベキヿヲ示セ

5. 等差級數ニ於テ,一ッ置キニ其項ヲ取リ去ルトキハ,殘ル諸項ハ矢張リ等差級數ヲ成スヿヲ示セ

6. 等差級數ニ於テ,相隣レル項ノ間ニ其平均ヲ挿入スルトキハ,再ビ等差級數ヲ得ベキヿヲ示セ

7. a, b, c, d ガ等差級數ナルトキハ, ad ハ bc ヨリモ小ナルヿヲ示セ

224. 次ニ二三ノ例ヲ掲ゲテ之ヲ解答スベシ

例 (1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\cdots$ 第 n 項ニ至ル等差級數ノ和ヲ索ム

公差 $d=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2+\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=1$, 乃前節ノ公式(3)ニヨリ,所要ノ和 $s=\frac{n}{\sqrt{2}+1}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(\sqrt{2}-1)}{1}+\frac{n^2-n}{2}$

$$=n\sqrt{2}+\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}=n\sqrt{2}+\frac{n(n-3)}{2}$$

例 (2) 等差級數トナル樣ニ a ト b トノ間ニ m 個ノ內項ヲ挿入セヨ

此場合ニ於テハ,項ノ數 $n=m+2$, 末項 $l=b$, 故ニ前節ノ公式(1)ニヨリ, $b=a+(m+1)d$, 之ヨリシテ $d=\frac{b-a}{m+1}$ ヲ得,乃所要ノ級數ハ次ノ如シ

$$a,\ a+\frac{b-a}{m+1},\ a+2\frac{b-a}{m+1},\cdots\cdots\cdots\cdots a+m\frac{b-a}{m+1},\ b$$

即 $$a,\ \frac{ma+b}{m+1},\ \frac{(m-1)a+2b}{m+1},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{a+mb}{m+1},\ b$$

例 (3) 等差級數 15, 12, 9,………… ノ項ヲ幾ツ採ラバ其

和ガ42トナルカ

爰ニ $s=42$, $a=15$, $d=-3$, 故ニ

$$42=\frac{n}{2}\{30-3(n-1)\}=\frac{n}{2}(33-3n)$$

此レnニ就テノ二次方程式ナリ,之ヲ解キテ$n=4$或ハ7ヲ得,實際15, 12, 9, 6, 3, 0, -3ヲ總計スルモ,又其初メノ四項ヲ加フルモ42ヲ得ベシ

注意 項ノ數nハ必ズヤ正ノ整數ナラザルベカラズ,故ニ例(3)ノ類ノ問題ヲ解キテ得ルヿモアルベキnノ負ナル値或ハ分數ナル値ハ之ヲ棄テ去ルベシ

第三十四問題集

次ノ等差級數ノ和ヲ索ム

1. 101, 102, 103, ... 200
2. 2, $3\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$, ... 第十二項ニ至ル
3. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1, ... 第十八項ニ至ル
4. $\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{11}{6}$, ... 第十五項ニ至ル
5. $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$, ... 第n項ニ至ル
6. $n+1$, $2n+3$, $3n+5$, ... 第n項ニ至ル
7. $(a+b)^2$, a^2+b^2, $(a-b)^2$, ... 第n項ニ至ル
8. 等差級數ニナル樣ニ,14ト16トノ間ヘ5個ノ內項ヲ挿入セヨ,又-1ト5トノ間ヘ8項ヲ挿入セヨ

9. 等差級數ノ初項13,第二項11,和40ナリ,仍テ項數ヲ索ム
10. 初項5,第五項11ナル等差級數8項ノ和ヲ索ム
11. 等差級數4項ノ和ハ44,末項17ナリ,各項如何
12. 等差級數5項ノ和ハ15,各項ノ平方ノ和ハ55ナリ,仍テ各項ヲ索ム
13. 等差級數ノ第七項ハ12,第十二項ハ7ニシテ,級數ノ和ハ171ナリ,項ノ數如何
14. 一時間ニ$2\frac{1}{2}$里宛行ク甲ガ出立セシヨリ三時間ヲ經テ,乙ハ同ジ場所ヲ出發シ甲ト同ジ路ヲ行ケリ,乙ハ最初ノ一時間ニハ3里,次ノ一時間ニハ$3\frac{1}{2}$里,其又次ノ一時間ニハ4里,次第ニ斯クノ如ク速度ヲ速メタリトイフ,幾時間ノ後乙ハ甲ニ追ヒ付キシカ
15. 1ヨリ起リ$2n+1$ニ至ル奇數ノ和ハ必ズ平方數ナルヿヲ證明セヨ
16. 等差級數8, 16, 24, ...ナル若干項ノ和ハ,恒ニ或ル奇數ノ平方ヨリ1ヲ減ジタルモノニ等シキヿヲ示セ
17. 100ヨリ1000マデノ中ニテ7デ割リ切レル整數ノ和ハ70336ナルヿヲ示セ
18. $2n+1$項ヨリ成ル等差級數ニ於テ,奇數番目ノ項ノ和ノ偶數番目ノ項ノ和ニ對スル比ハ,$n+1$ノnニ

對スル比ニ等シキコトヲ證明セヨ

19. a, b, c ノ逆數即 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ガ等差級數ナルトキハ, a, b, c ハ調和級數ナリトイフ, a, b, c ガ調和級數ナルトキハ, $a:c=a-b:b-c$ ナルコトヲ證明セヨ

20. a, b, c ガ調和級數ナルトキハ, $(s-a)^2$, $(s-b)^2$, $(s-c)^2$ ハ等差級數ナルコトヲ證明セヨ, 爰ニ $2s=a+b+c$

等比級數

225. 幾ツカノ數ヲ或ル順序ニ列ベタルモノニ於テ, 其中ノ一ツノ數ト其直グ前ノ數トノ比ガ何レモ相等シキトキハ, 此比ヲ **通比** トイヒ, 此レ等ノ數ヲ此順ニ列ベタルモノヲ **等比級數** ト稱ス, 又各ノ數ヲ其 **項**, 左端ノ項ヲ **初項**, 右端ノ項ヲ **末項** ト稱ス, 例ヘバ

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768$$

ハ等比級數ニシテ, 初項ハ3, 通比ハ2, 末項ハ768ナリ, 且項ノ數9アリ, 又

$$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\ldots$$

モ矢張リ等比級數ニシテ, 初項ハ9, 通比ハ $\frac{1}{3}$ ナリ, 即或ル項ニ通比 $\frac{1}{3}$ ヲ掛ケテ其次ノ項ヲ得ベキモノナリ

等比級數ノ初項ヲ a, 通比ヲ r, 末項ヲ l, 項ノ數ヲ n, 和ヲ s ニテ表ハスベシ, 然ルトキハ, 等比級數ハ

$$a, ar, ar^2, \ldots\ldots, ar^{n-2}, ar^{n-1}$$

ナリ, 故ニ

$$l=ar^{n-1} \ldots\ldots (1)$$

又 $$s=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

故ニ $$rs=ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n$$

rs ヨリ s ヲ減ズレバ $rs-s=ar^n-a$, 故ニ

$$s=a\frac{r^n-1}{r-1}=a\frac{1-r^n}{1-r} \ldots\ldots (2)$$

或ハ $$s=\frac{rl-a}{r-1}=\frac{a-rl}{1-r} \ldots\ldots (3)$$

注意 等比級數ノ和 $a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$ ヲ等比級數ト稱スルコトアリ, 等差級數ノ場合ニ於テモ同樣ナリ

例題

1. a, b, c ガ等比級數ナルトキハ, b ハ a ト c トノ相乘平均*即比例中數ナルコトヲ示セ
2. a, b, c, d ガ等比級數ナルトキハ, 此レ等ノ數ノ間ニ如何ナル關係アルカ
3. 等比級數ノ各項ノ逆數ヲ同ジ順ニ列ベタルモノハ矢張リ等比級數ナルコトヲ證明セヨ
4. 等比級數ニ於テ相隣レル項ノ間ニ其相乘平均即

* 一般ニ n 個ノ數ノ連乘積ノ n 乘根ヲ此レ等ノ數ノ相乘平均ト稱ス

比例中數ヲ挿入スルトキハ,再ビ等比級數ヲ得ベキヿヲ證明セヨ

5. 等比級數ノ起首ヨリ數ヘ又結尾ヨリ數ヘテ同ジ番目ノ項ノ積ハ恒ニ初項ト末項トノ積ニ等シキヿヲ示セ

226. 前節ニ於テ等比級數ノ和 s ヲ索ムルニ當リ

$$a+ar+ar^2+\dots\dots+ar^{n-2}+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

ナル公式ヲ得タリ,a ヲ以テ兩邊ヲ割レバ

$$1+r+r^2+\dots\dots+r^{n-2}+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

此公式ノ眞ナルヿハ,亦實際兩邊ニ $1-r$ ヲ掛ケテ,或ハ實際 $1-r^n$ ヲ $1-r$ デ割リテ,以テ之ヲ證明スルヿヲ得ベシ

此公式ハ極メテ重要ナルモノナルガ故ニ,次ニ此公式ノ應用ニ係ル二三ノ例ヲ示スベシ

$r=\frac{y}{x}$ トスレバ $\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{x^n-y^n}{x^{n-1}(x-y)}$, 故ニ

$$\frac{x^n-y^n}{x^{n-1}(x-y)}=1+\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}+\dots\dots+\frac{y^{n-2}}{x^{n-2}}+\frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}$$

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\dots\dots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

n ハ偶數ナリトシ,y ノ代リニ $-y$ ト置ケバ,$(-y)^n=y^n$ ナルガ故ニ

$$\frac{x^n-y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots\dots+xy^{n-2}-y^{n-1}$$

n ハ奇數ナリトシ,y ノ代リニ $-y$ ト置ケバ,$(-y)^n=-y^n$ ナルガ故ニ

$$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots\dots-xy^{n-2}+y^{n-1}$$

乃 n ガ正ノ整數ナルトキハ,n ノ偶數タリ奇數タルニ拘ハラズ x^n-y^n ハ $x-y$ デ割リ切レ,

n ガ偶數ナレバ, x^n-y^n ハ $x+y$ デ割リ切レ,

n ガ奇數ナレバ, x^n+y^n ハ $x+y$ デ割リ切レル

又 n ガ偶數ナルトキハ, $x^n+y^n=x^n-y^n+2y^n$ ニシテ, x^n-y^n ハ $x+y$ デ割リ切レルガ故ニ, x^n+y^n ヲ $x+y$ デ割ルトキハ剩餘 $2y^n$ ヲ得ベシ,故ニ n ガ偶數ナルトキハ x^n+y^n ハ $x+y$ デ割リ切レズ

同樣ニ $x^n+y^n=x^n-y^n+2y^n$ ヲ $x-y$ デ割ルトキハ剩餘 $2y^n$ ヲ得ベシ,故ニ n ノ偶數タリ奇數タルニ拘ハラズ x^n+y^n ハ $x-y$ デ割リ切レズ

例題

1. 上ノ公式ニヨリ次ノ割リ算ヲ行ヘ

$$\frac{x^3-y^3}{x-y},\quad \frac{x^4-y^4}{x-y},\quad \frac{x^3+y^3}{x+y},\quad \frac{x^4-y^4}{x+y},\quad \frac{x^5+y^5}{x+y}$$

2. n ガ奇數ナルトキハ, x^n-y^n ハ $x+y$ デ割リ切レザルヿヲ證明セヨ

227. r ノ絶對値ガ1ヨリ小ナル場合ニ於テ,n ガ次第次第ニ大キクナルトキハ,r^n ハ次第次第ニ小サクナルベシ,唯一例ヲ擧ゲンニ,$r=\dfrac{1}{10}$ トスレバ

$$r=0.1,\ r^2=0.01,\ r^3=0.001,\ \ldots\ldots\ldots\ldots r^{10}=0.0000000001$$

r^{10} ニテスラ吾人ガ想像スル能ハザル程ニ小サキ數ナリ,矧ヤ r^{100}, r^{1000}, r^{10000} ナドニ至テハ其小サキヿ到底名狀スベキ限リニアラズ,更ニ進ンデ n ヲ際限モナク大キクスルトキハ,r^n ハ際限モナク小サクナルヿナレバ,斯クノ如キ場合ニ於テハ,r^n ハ遂ニ無クナルト看做スヿヲ得ベシ

等比級數ノ和 s 即

$$a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1}=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\left(\frac{a}{1-r}\right)r^n$$

ニ於テ,通比 r ノ絶對値ガ1ヨリモ小サキトキハ,項數 n ガ增セバ增スホド,$\dfrac{a}{1-r}$ ト s トノ差即 $\left(\dfrac{a}{1-r}\right)r^n$ ハ次第次第ニ小サクナルガ故ニ,項ノ數ヲ充分ニ多ク採ルコトニヨリテ $\dfrac{a}{1-r}$ ト s トノ差ヲ如何ホドニテモ小サクスルヿヲ得ベク,項數 n ガ限リ無ク增ストキハ,此差ハ遂ニ無クナルト看做スヿヲ得ベシ,故ニ通比 r ノ絶對値ガ1ヨリモ小ナルトキハ,

$$a+ar+ar^2+\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{無限})=\frac{a}{1-r}$$

ナリトイフ

爰ニ注意スベキハ,r ノ絶對値ガ1ヨリモ大ナル場合

ニ於テ誤テ上ノ公式ヲ用ヰルガ如キ粗忽ナルヿヲ爲スベカラザルヿナリ

項ノ數ガ限リ無ク多キ等比級數ヲ**無限等比級數**ト稱ス

循環小數ハ次ニ例示スルガ如ク無限等比級數ノ格段ナル場合ナリ

例 (1)　$1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \ldots\ldots\ldots\ldots$(無限) ノ和ヲ索ム

爰ニ　$a=1,\ r=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{1-r}=2$, 偖テコノ等比級數5項ノ和ハ $2-\dfrac{1}{16}$, 6項ノ和ハ $2-\dfrac{1}{32}$, 7項ノ和ハ $2-\dfrac{1}{64}$, 次第ニ斯クノ如ク,項ヲ多ク採レバ採ルホド,其和ハ2ニ近ヅキ,項數ガ限リ無ク增加スルニ至テ遂ニ2トナル*

例 (2)　循環小數 $0.3242424\ldots\ldots\ldots\ldots$ ヲ分數ニ化セ

$$0.3242424\ldots\ldots\ldots=\frac{3}{10}+\frac{24}{10^3}+\frac{24}{10^5}+\frac{24}{10^7}+\ldots\ldots\ldots$$

$\dfrac{3}{10}$ ヨリ後ハ等比級數ニシテ,初項ハ $\dfrac{24}{10^3}$, 通比ハ $\dfrac{1}{10^2}$

---

* 此例ハ亦次ノ如クニ之ヲ考フルヿヲ得ベシ,乃2ヲ表ハス長サヨリ其一半ヲ切リ取リ,殘リノ1ヲ表ハス長サヨリ其一半即 $\dfrac{1}{2}$ ヲ表ハス長サヲ切リ取リ,殘リノ $\dfrac{1}{2}$ ヲ表ハス長サヨリ其一半即 $\dfrac{1}{4}$ ヲ表ハス長サヲ切リ取リ,次第ニ斯クノ如ク殘リヲ半分宛切リ取リ行クトキハ,殘リハ如何ホドニテモ小サクスルヿヲ得ベク,切リ取リタル各片ヲ再ビ接ギ合ハスレバ元ノ長サ2ヲ得ベシ

ナリ,乃此等比級數ノ無限ニ至ル和ハ $\frac{24}{10^3}\div\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$ 即 $\frac{24}{990}$ ナリ,故ニ與ヘラレタル循環小數ハ $\frac{3}{10}+\frac{24}{990}=\frac{321}{990}$ ニ等シ

循環小數ノ値ハ實際次ノ如クニシテ索ムルヲ便利ナリトス

$$s = 0.32424\ldots\ldots$$
$$10s = 3.2424\ldots\ldots$$
$$1000s = 324.2424\ldots\ldots$$

引キ算ニヨリ $(1000-10)s=324-3=321$, 故ニ $s=\frac{321}{990}$

例 (3) 金利ヲ年五分トシ,今後滿一年每ニ金100圓ヲ受取ルベキ永續年金ノ現價ヲ問フ

一ケ年後ニ受取ル金100圓ノ現價ハ $100\left(\frac{1}{1.05}\right)$ 圓,

二ケ年後ニ受取ル金100圓ノ現價ハ $100\left(\frac{1}{1.05}\right)^2$ 圓,

三ケ年後ニ受取ル金100圓ノ現價ハ $100\left(\frac{1}{1.05}\right)^3$ 圓

ニシテ,次第ニ斯クノ如シ,故ニ所要ノ現價ノ圓數ハ

$$100\left(\frac{1}{1.05}\right)+100\left(\frac{1}{1.05}\right)^2+100\left(\frac{1}{1.05}\right)^3+\ldots\ldots(\text{無限})$$

乃初項 $100\left(\frac{1}{1.05}\right)$,通比 $\frac{1}{1.05}$ ナリ,故ニ此級數ノ和ハ $100\left(\frac{1}{1.05}\right)$ ヲ $1-\frac{1}{1.05}$ デ割リテ得ベキ 2000 ナリ,仍テ所要ノ現價金2000圓ヲ得,而シテ實際金貳千圓ヲ年五分ニ永久預ケルトキハ,滿一年每ニ百圓宛ノ利息ヲ得ベキヤ明カナリ

例 題

次ノ等比級數ノ和ヲ索ム

1. $1,\ 4,\ 16,\ \ldots\ldots$(項數6)　2. $9,\ 3,\ 1,\ \ldots\ldots$(項數5)

3. $\frac{3}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6}\ \ldots\ldots$(項數6)　4. $\frac{2}{3},\ -1,\ \frac{3}{2},\ \ldots$(項數7)

5. $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \ldots\ldots$(無限)　6. $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \ldots\ldots$(無限)

次ノ循環小數ヲ分數ニ化セ

7. $0.151515\ldots\ldots$　8. $0.123123123\ldots\ldots$

9. $0.4282828\ldots\ldots$　10. $0.28131313\ldots\ldots$

228. 次ニ一二ノ例ヲ揭ゲテ其解法ヲ示スベシ

例 (1) a ト b トノ間ヘ m 個ノ等比內項ヲ挿入セヨ

通比ヲ r トスレバ, $ar^{m+1}=b$, $r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$. 而シテ所要ノ內項ハ $ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots\ldots ar^m$ ナリ

例 (2) 等比級數ノ第二項 $1\frac{1}{4}$, 無限ニ至ル和 $5\frac{5}{24}$, 仍テ通比ヲ索ム

$ar=\frac{5}{4}$, $\frac{a}{1-r}=\frac{125}{24}$, 故ニ $r(1-r)=\frac{6}{25}$, 此二次方程式ヲ解キテ $r=\frac{3}{5}$ 或ハ $\frac{2}{5}$ ヲ得テ答トス

注意 例 (2) ノ類ノ問題ヲ解キテ得ルコトモアルベキ r ノ絕對値上1叉ハ1ヨリモ大ナル値ハ,勿論之ヲ棄テ去ルベシ

第三十五問題集

1. $25,\ 10,\ 4,$……………第 7 項ニ至ル和ヲ索ム

2. $1,\ \sqrt{2},\ 2,$……………第12項ニ至ル和ヲ索ム

3. $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$ ……………無限ニ至ル和ヲ索ム

4. $6,\ -2,\ \frac{2}{3},$ ……………無限ニ至ル和ヲ索ム

5. 1 ト 256 トノ間ヘ 3 個ノ等比內項ヲ插入セヨ

6. $5\frac{1}{3}$ ト $40\frac{1}{2}$ トノ間ヘ 4 個ノ等比內項ヲ插入セヨ

7. 3 ト -729 トノ間ヘ 4 個ノ等比內項ヲ插入セヨ

8. 等比級數 3 項ノ和ハ 63 ニシテ,第三項ヨリ第一項ヲ減ジタル差ハ 45 ナリトイフ,仍テ各項ヲ索ム

9. 等比級數ノ第 4 項マデノ和 40, 第八項マデノ和 3280 ナリ,仍テ此等比級數ヲ索ム

10. 等比級數 3 項ノ和 21, 各項ノ平方ノ和 189 ナリ,仍テ各項ヲ索ム

11. 等比級數ノ第 2 項 -8, 無限ニ至ル和 18 ナリ,仍テ通比ヲ索ム

12. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots$(無限)ヲ小數第三位マデ索メヨ

13. 等比級數ノ項ヲ奇數 $2m+1$ ダケ採リテ,之ヲ連乘シタル積ハ其中央即第 $m+1$ 番目ノ項ノ第 $2m+1$ 冪ニ等シキヿヲ證明セヨ

14. 等比級數ノ通比ガ正ニシテ且 $\frac{1}{2}$ ヨリモ小ナルトキハ,各項ハ其跡ニ續ク諸項ノ和ヨリモ大ナルヿヲ證明セヨ

15. $a,\ b,\ c,\ d$ ガ等比級數ヲ成ストキハ, $a+b,\ b+c,\ c+d$ モ亦等比級數ヲ成スヿヲ證明セヨ

16. 等比級數 n 項ノ連乘積ノ平方ハ初項ト末項トノ積ノ第 n 冪ニ等シキヿヲ證明セヨ

17. 2ト9トノ間ヘ二ツノ數ヲ插入シ,初メノ三數ハ等差級數,後ノ三數ハ等比級數トナル樣ニセヨ

18. 一ケ年ノ金利ノ步合ヲ小數ニテ書キ表ハシタルモノヲ i トスルトキハ,每年末金 a 圓宛ヲ n 年間即 n 回預ケルトキハ, n 年後ニ元利合計幾何トナルカ

19. 年利率ヲ i トスルトキハ,今後滿一年每ニ金 a 圓宛 n 年間即 n 回受取ルベキ年金ノ現價如何

20. 年利率ヲ i トシ,金 b 圓ヲ預ケ,更ニ今後滿一年每ニ金 a 圓宛ヲ n 回預ケルトキハ, n 年後ニ元利總計幾何トナルカ

21. 年利率ヲ i トシ,今後 m 年間ハ据置キ,其後 n 年間每年末ニ(即今後 $m+1$ 年ノ末ニ受取ル第一回ヲ初メトシ都合 n 回)金 a 圓ヲ受取ル年金ノ現價幾何

第二十二編 順列及組合

順列

229. 相異レルn個ノ物ヲr個宛種種ニ採リテ種種ノ順序ニ列ベタル諸ノ配置ヲn個ノ物ヲr個宛採リタル**順列**ト稱ス

二ツノ順列ガ相等シキ爲メニハ,同ジ物ヲ同ジ順ニ列ベタルモノナラザルベカラズ

例 三ツノ文字 a_1, a_2, a_3 ヲ二ツ宛採リタル順列ハ

$$a_1a_2,\quad a_2a_1,\quad a_1a_3,\quad a_3a_1,\quad a_2a_3,\quad a_3a_2$$

ニシテ,其數六ツアリ

n個ノ物ヲr個宛採リタル順列ノ數ヲ表ハスニ ${}_nP_r$ ヲ以テスレバ,${}_nP_r$ ノ値ハ次ノ如シ

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

此公式ヲ證明センガ爲メニ,先ヅn個ノ文字$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots, a_n$ヲ二ツ宛採リタル順列ヲ索ムベシ

a_1ヨリ外ノ$n-1$文字ノ各ニa_1ヲ前置シテ,a_1ヲ頭トスル$n-1$個ノ二ツ宛ノ順列ヲ得ベシ,a_2ヨリ外ノ文字ノ各ニa_2ヲ前置シテ,a_2ヲ頭トスル$n-1$個ノ二ツ宛ノ順列ヲ得

ベク,次第ニ斯クノ如ク,總躰ニテハn個ノ文字ヲ二ツ宛採リタル順列$n(n-1)$個アリ

次ニn個ノ文字ヲ三ツ宛採リタル順列ノ數ヲ索メンニ,今シモ證明セルガ如ク,n個ノ文字ヲ2個宛採リタル順列ノ數ハ$n(n-1)$ナルガ故ニ,$n-1$個ノ文字$a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ヲ2個宛採リタル順列ノ數ハ$(n-1)(n-2)$ナリ,此レ等ノ順列ノ各ニ$a_1$ヲ前置スル𪜈ハ,$a_1$ヲ頭トスル三ツ宛ノ順列$(n-1)(n-2)$個ヲ得ベシ,同樣ニ$a_2$ヲ頭トスル三ツ宛ノ順列$(n-1)(n-2)$個ヲ得ベシ,同樣ニ又$a_3$ヲ頭トスル三ツ宛ノ順列$(n-1)(n-2)$個ヲ得ベク,次第ニ斯クノ如ク,總躰ニテハ$n$個ノ文字ヲ3個宛採リタル順列$n(n-1)(n-2)$個アリ

上ノ格段ナル場合ヨリ推シテ,n個ノ文字ヲr個宛採リタル順列ノ數ハ$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)$ナランヿヲ豫想スルヿヲ得ベシ,此豫想ノ果シテ眞ナルヿ,次ノ如クニシテ,之ヲ證明スルヿヲ得ベシ

先ヅn個ノ文字ヲ$r-1$個ヅツ採リタル順列ノ數ハ$n(n-1)(n-2)\ldots\{n-(r-1)+1\}$ナリト假定スベシ,然ル𪜈ハ$n-1$個ノ文字$a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$ヲ$r-1$個宛採リタル順列ノ數ハ$(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{(n-1)-(r-1)+1\}$ 即 $(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ナリ,此レ等ノ順列ノ各ニ$a_1$ヲ前置スレバ,$a_1$ヲ頭トスル$r$個宛採リタル同數ノ順列ヲ得ベシ,同樣ニ$a_2$ヲ頭トス

ル r 個宛採リタル同數ノ順列ヲ得ベシ,同樣ニ又 a_3 ヲ頭トスル r 個宛採リタル同數ノ順列ヲ得ベク,次第ニ斯クノ如ク,總躰ニテハ n 個ノ文字ヲ r 個宛採リタル順列 $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ 個ヲ得ベシ

乃此公式ガ文字ヲ $r-1$ 個宛採リタル場合ニ於テ眞ナルトキハ,此公式ハ亦文字ヲ r 個宛採リタル場合ニ於テモ眞ナラザルベカラザルヿヲ證明シ得タリ

然ルニ此公式ハ文字ヲ三ッ宛採リタル場合ニ於テ眞ナルヿ既ニ前ニ證明セルガ如シ,故ニ此公式ハ文字ヲ四ッ宛採リタル場合ニ於テモ眞ナリ,從テ文字ヲ五ッ宛採リタル場合ニ於テモ眞ニシテ,次第ニ斯クノ如シ,故ニ此公式ハ一般ニ眞ナリ

上ニ用ヰタル證明ノ方法即或ル公式ガ一二ノ簡單ナル場合ニ於テ眞ナルヿヲ證明シ,又此公式ガ一般ナル場合ニ於テ眞ナリト假定スルトキハ,此公式ハ亦次ノ場合ニ於テモ眞ナラザルベカラザルヿヲ證明シ,仍テ以テ此公式ガ一般ニ眞ナルコトヲ證明スル方法ヲ**數學的歸納法**ト稱ス,此證明法ハ數學全躰ニ通ジテ廣ク用ヰラルル證明ノ方法ナリ

n 個ノ物ヲ n 個宛即悉ク採リタル順列ノ數ハ

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1 \quad 即 \quad 1.2.3.\ldots\ldots n$$

$1.2.3.\ldots\ldots n$ 即 1 ヨリ n マデノ整數ヲ悉ク掛ケ合ハセタル連乘積ヲ **n ノ階乘** ト稱シ,之ヲ書キ表ハスニ通例 $n!$ ヲ以テス,爰ニ n ハ必ズヤ零ニアラザル正ノ整數ナラザルベカラズ,負數又ハ分數又ハ零ノ階乘トイフガ如キハ全ク意味ナキモノナリ

古キ書物ノ中ニハ,$n!$ ノ代リニ $\underline{|n}$ ナル書キ方ヲ用ヰタルモノアリ

例題

1. 三ッノ文字 a, b, c ヲ一ッ宛,又二ッ宛,又三ッ宛採リタル順列ヲ書キ下ダセ
2. 四ッノ文字 a, b, c, d ヲ二ッ宛採リタル順列ヲ書ケ
3. 三ッノ數字 1, 2, 3 ヲ三ッ宛採リタル順列ノ表ハス數ノ合計如何
4. 異リタル有効數字ヨリ成ル二桁ノ數ハ幾ツアルカ
5. 十人ノ子供ヲ一列ニ列ベル仕方ハ幾通リアルカ
6. 五ッノ數字 1, 2, 3, 4, 5 ノ中ノ三數字ヨリ成ル三桁ノ數ハ幾ツアルカ
7. n 個ノ物ヲ $r-1$ 個宛採リタル順列ノ中ノ一ッヲ採リ,此格段ナル順列ノ中ニ含マレザル $n-(r-1)$ 即

$n-r+1$個ノ物ヲ一ツ宛前置スルトキハ, n個ノ物ヲr箇宛採リタル順列$n-r+1$個ヲ得ベシ, 故ニn個ノ物ヲ$r-1$個宛採リタル順列ハ$_nP_{r-1}$ダケアル其中ノ各ヨリシテ, n個ノ物ヲr個宛採リタル順列$n-r+1$個ヲ得ベク, 斯クノ如クニシテ, n個ノ物ヲr個宛採リタル順列ヲ重複ナク, 又遺漏ナク得ベキガ故ニ

$$_nP_r=(n-r+1)_nP_{r-1}$$

此公式ニ於テrノ代リニ次第ニ$r-1$, $r-2$, ..., 2ト置キテ得ベキ公式ヲ竪ニ並ブ様ニ書キ下ダシテ後, 邊邊掛ケ合ハセテ以テ

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$$

ナルヿヲ證明セヨ

230. n個ノ物ガ悉クハ異リ居ラザル塲合ニ於ケルn個ノ物ヲ悉ク採リタル順列ノ數ヲ索メンガ爲メニ, n個ノ文字ノ内, aガp個, bガq個, cガr個アリテ, 其餘ノ文字ハ何レモ單獨ニ存在スルモノトシ, Nヲ以テ所要ノ數ヲ表ハスベシ

N個ノ順列ノ中ノ一ツヲ採リテ考フルニ, 其中ノ種種ノ位置ニアルp個ノaノ代リニ, p個ノ新タニシテ異ナリタル文字$a_1, a_2, ..., a_p$ヲ置クトキハ, aヨリ外ノ文字ノ位置ヲ元ノ儘ニナシ置キ, 唯$a_1, a_2, ..., a_p$ノ位置ヲ變ヘルヿ

ニヨリテ$p!$個ノ順列ヲ得ベシ, 乃p個ノaノ代リニp個ノ異リタル文字ヲ置キ換フルトキハ, 順列ノ數ハNヨリシテ$N\times p!$ニ増加スルヲ知ルベシ

更ニq個ノbノ代リニq個ノ新タニシテ異リタル文字ヲ置キ換フルトキハ, 前ト同様ニ, 順列ノ數ハ$N\times p!$ヨリシテ$N\times p!\times q!$ニ増加スベシ

更ニr個ノcノ代リニr個ノ新タニシテ異リタル文字ヲ置キ換フルトキハ, 順列ノ數ハ$N\times p!\times q!$ヨリシテ$N\times p!\times q!\times r!$ニ増加スベシ

翻テ考フルニ, 此數ハn個ノ悉ク異リタル文字ヲn個宛採リタル順列ノ數即$n!$ニ等シカラザルベカラズ,

乃

$$N\times p!\times q!\times r!=n!$$

故ニ

$$N=\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

重複セル文字ガ三ツヨリ多ク在ル塲合ニモ同様ノ公式ヲ得ベキヤ明カナリ

例題

1. 三個ノ林檎ト二個ノ蜜柑ト一個ノ梨トヲ一列ニ並ベル仕方ハ幾通リアルカ

2. 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4ナル七ツノ數ヲ以テ造ルヿヲ得ル七桁ノ數ハ幾ツアルカ

組合

231. 相異レル n 個ノ物ヲ r 個宛其順序ニ拘ハラズニ種種ニ採リタル諸ノ簇ヲ n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル組合ト稱ス,例ヘバ三個ノ文字 a_1, a_2, a_3 ヲ二ツ宛採リタル組合ハ a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 ニシテ,其數三ツアリ

n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル組合ノ數ヲ表ハスニ ${}_nC_r$ ヲ以テスレバ,${}_nC_r$ ノ値ハ次ノ如シ

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}$$

n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル組合ノ一ツヲ採リテ考フルニ,此組合ノ中ニアル物ヲ變ヘズニ唯其順序ヲ變ヘルヿニヨリ $r!$ 個ノ順列ヲ得ベシ,故ニ n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル組合ト n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル順列トヲ比較スルトキハ,組合一ツニ付順列 $r!$ 個アルヿ明カナルガ故ニ

$$r!\times{}_nC_r={}_nP_r=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

仍テ上ノ公式ヲ得

例題

1. 十人ノ子供ノ中ヨリ三人ノ子供ヲ撰抜スル仕方ハ幾通リアルカ

2. a, b, c, d ナル四ツノ文字ヲ一ツ宛,又二ツ宛,又三ツ宛,又四ツ宛採リタル組合ヲ造レ

232. 前節ニ於テ得タル ${}_nC_r$ ノ公式ノ分母ト分子トニ $(n-r)!$ 即 $(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots2.1$ ヲ掛ケテ以テ ${}_nC_r$ ノ公式ニ次ノ形チヲ與フルヿヲ得ベシ

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

${}_nC_{n-r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$ ナルガ故ニ,${}_nC_r={}_nC_{n-r}$,即 n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル組合ノ數ハ n 個ノ物ヲ $n-r$ 個宛採リタル組合ノ數ニ等シ,此定理ノ眞ナルヿハ亦 n 個ノ物ヲ r 個宛採リタル組合ノ一ツ毎ニ此格段ナル組合ノ中ニ無キ $n-r$ 個ノ物ヨリ成ル n 個ノ物ヲ $n-r$ 個宛採リタル組合ノ一ツヲ得ベク,箇樣ニシテ n 個ノ物ヲ $n-r$ 個宛採リタル組合ヲ重複ナク又遺漏ナク得ベキヿニ鑑ミテ明カナリ

前節ノ ${}_nC_r$ ノ公式ハ r ノ 1 ヨリ n マデノ總テノ整數値ニ就テ眞ナリ,然ルニ本節ノ ${}_nC_r$ ノ公式ハ r ノ 1 ヨリ $n-1$ マデノ整數値ニ就テノミ眞ナリ,上ノ公式ニ於テ強ヒテ $r=n$ ト置クトキハ,$(n-r)!$ ハ $0!$ トナル(第229節ノ終リヲ參照セヨ),偖テ $0!$ ハ全ク意味ナキモノニシテ結局リ一ツノ符牒ニ過ギザルガ故ニ,吾人ハ $0!$ ニ任意ノ意味ヲ與フルヿヲ得ベシ,仍テ上ノ公式ガ $r=n$ ナル場合ニ於テモ當テ嵌マル樣ニスル爲メニ,吾人ハ $0!=1$ ナル意味ヲ與フベシ,而シテ一旦斯ク定メタルカラニハ,向後ハ恒ニ $0!$ ハ 1 ニ等シト規約スベシ

第三十六問題集

1. イロハ 47 文字ヲ五ッ宛採リタル順列ノ數ト abc 26 文字ヲ六ッ宛採リタル順列ノ數トハ孰レカ大ナルカ

2. 三人ノ議員ヲ擇ムニ, 五人ノ候補者アリ, 各撰擧人ハ, 1 人, 又ハ 2 人, 又ハ 3 人ヲ投票スルヿヲ得ルトスル𪜊ハ, 投票スル仕方ハ幾通リアルカ

3. 1, 2, 3, 4, 5 ナル五數字ヲ少ナクモ一ッ多クモ五ッ採リテ作ルヿヲ得ル數ハ幾ツアルカ

4. 若干ノ物ヲ四ッ宛採リタル組合ノ數ハ, 三ッ宛採リタル組合ノ數ノ二倍ナリトイフ, 仍テ物ノ數ヲ索ム

5. 20 人ノ中ヨリ抽籤ニテ 5 人ヲ採ラントス, 其仕方ハ幾通リアルカ, 又此内一人ノ格段ナル人ガ採ラルル塲合ハ幾ツアルカ

6. 太郎, 次郎, ……, 八郎ノ 8 人ヲ一列ニ並ベントス, 太郎ト次郎トガ相隣ラザル列ベ方ハ幾通リアルカ

7. ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$ ナルヿヲ證明セヨ

8. $r\times{}_nC_r=n\times{}_{n-1}C_{r-1}$ ナルヿヲ證明セヨ

第二十三編　二項定理

233. 本編ニ於テハ前約(第 186 節)ヲ履ミ, n ハ正ノ整數ヲ表ハスモノトシテ, $(a+b)^n$ ノ公式ヲ索メントス

先ヅ手始メニ, 次ニ用ヰントスル證明法ノ節道ヲ例示センガ爲メニ, $(a+b)^4$ ノ公式ヲ索ムベシ

前ニハ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ノ兩邊ニ $a+b$ ヲ掛ケテ後, 更ニ $a+b$ ヲ掛ケテ以テ $(a+b)^4$ ノ公式ヲ索メタレ𪜈, 此處ニテハ $a+b$ ナル因數四個

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

ヲ一處ニ掛ケ合ハセテ以テ之ヲ索ムベシ

上ノ連乘積ニ於ケル各部分積ハ 4 個ノ因數ノ各ヨリ a, b ノ中ノ孰レカ一方ヲ採リテ得ベキ若干ノ a ト若干ノ b トヨリ成ル 4 個ノ文字ノ積ナラザルベカラズ, 故ニ暫ク數係數ヲ度外ニ措ク𪜊ハ, 所要ノ連乘積ハ次ノ諸項ヨリ成ラザルベカラズ

$$a^4,\quad a^3b,\quad a^2b^2,\quad ab^3,\quad b^4$$

爰ニ注意スベキハ, 上ノ諸項ニ於ケル a ノ指數ト b ノ指數トノ和ハ恒ニ 4 ニシテ, b ノ指數ヲ r トスレバ a ノ指數ハ $4-r$ ナルヿナリ, 爰ニ r ハ 0, 1, 2, 3, 4 ノ中ノ一ッヲ表

ハス,次ニ數係數ヲ索メンニ,4個ノ因數ノ各ヨリ a ヲ採ル其仕方ハ唯一通リアルノミナルガ故ニ, a^4 ノ係數ハ1ナラザルベカラズ,4個ノ因數ノ1個ヨリハ b, 殘リノ3個ヨリハ a ヲ採ル仕方ハ,4個ノ物ヲ1個宛採リタル組合ノ數即 $_4C_1$ 通リアルガ故ニ, a^3b ハ $_4C_2$ 度ビ連乘積ノ中ニ現ハルル,從テ連乘積ニ於ケル a^3b ノ數係數ハ $_4C_1$ ナラザルベカラズ,次ニ4個ノ因數ノ2個ヨリハ b, 殘リノ2個ヨリハ a ヲ採ル仕方ハ,4個ノ物ヲ2個宛採リタル組合ノ數即 $_4C_2$ 通リアルガ故ニ, a^2b^2 ハ $_4C_2$ 度ビ連乘積ノ中ニ現ハルル,從テ連乘積ニ於ケル a^2b^2 ノ數係數ハ $_4C_2$ ナラザルベカラズ,同ジ理由ニヨリ, ab^3 ノ數係數ハ $_4C_3$, b^4 ノ數係數ハ $_4C_4$ 即1ナラザルベカラズ,且箇樣ニシテ得タル部分積ニ重複ナク又遺漏ナキコ明カナルガ故ニ

$$(a+b)^4=1.a^4+{}_4C_1a^3b+{}_4C_2a^2b^2+{}_4C_3ab^3+1.b^4$$

$_4C_1$, $_4C_2$, $_4C_3$ ノ代リニ其數値ヲ置キ換フルトキハ,此公式ハ讀者ノ既ニ知レル

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

ト全ク一致スベシ

例題 本節ノ方法ニヨリ $(a+b)^3$ 及 $(a+b)^5$ ノ公式ヲ索メヨ

234. $a+b$ ナル因數 n 個アリトシ

$$(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\dots\dots\dots\dots(a+b)(a+b)(a+b)$$

ナル連乘積ヲ索メンニ,各部分積ハ n 個ノ因數ノ各ヨリ a, b ノ中ノ孰レカ一方ヲ採リテ得ベキ若干ノ a ト若干ノ b トヨリ成ル n 個ノ文字ノ積ナラザルベカラズ,故ニ數係數ハ暫ク措キ,所要ノ連乘積ハ次ノ諸項ヨリ成ラザルベカラズ

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ a^{n-}b^3,\dots\dots\dots,\ a^{n-r}b^r,\dots\dots\dots,\ a^2b^{n-2},\ ab^{n-1},\ b^n$$

次ニ數係數ヲ索メンニ, n 個ノ因數ノ各ヨリ a ヲ採ル仕方ハ唯一通リアルノミナルガ故ニ,連乘積ニ於ケル a^n ノ數係數ハ1ナリ,次ニ n 個ノ因數ノ中其1個ヨリハ b ヲ採リ,從テ殘リノ $n-1$ 個ヨリハ a ヲ採ル仕方ハ n 個ノ物ヲ1個宛採リタル組合ノ數即 $_nC_1$ 通リアルガ故ニ, $a^{n-1}b$ ハ $_nC_1$ 度ビ連乘積ノ中ニ現ハルル,從テ連乘積ニ於ケル $a^{n-1}b$ ノ數係數ハ $_nC_1$ ナラザルベカラズ,次ニ n 個ノ因數ノ2個ヨリハ b, 殘リノ $n-2$ 個ヨリハ a ヲ採ル仕方ハ $_nC_2$ 通リアルガ故ニ,連乘積ニ於ケル $a^{n-2}b^2$ ノ數係數ハ $_nC_2$ ナラザルベカラズ,次第ニ斯クノ如ク,一般ニ $a^{n-r}b^r$ ノ數係數ヲ索メンニ, n 個ノ因數ノ中其 r 個ヨリハ b, 殘リノ $n-r$ 個ヨリハ a ヲ採ル仕方ハ $_nC_r$ 通リアルガ故ニ,連乘積ニ於ケル $a^{n-r}b^r$ ノ數係數ハ $_nC_r$ ナラザルベカラズ,尙ホ次第ニ

斯クノ如ク,最後ニn個ノ因數ノ各ヨリbヲ採ル仕方ハ唯一通リアルノミナルガ故ニ,連乘積ニ於ケルb^nノ數係數ハ1ナリ,且箇樣ニシテ得タル部分積ニ重複ナク又遺漏ナキヿ明カナルガ故ニ

$$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1\, a^{n-1}b + {}_nC_2 a^{n-2}b^2 + {}_nC_3 a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + {}_nC_r a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_3$, ……, ${}_nC_r$, ……, ${}_nC_{n-1}$ノ代リニ其數値ヲ置キ換フレバ

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{1.2.3.\ldots..r}a^{n-r}b^r + \ldots. + b^n$$

此公式ヲ**二項定理***ト稱シ,右邊ノ級數ヲ$(a+b)^n$ノ**展開**ト稱ス,又$(a+b)^n$ノ代リニ右邊ノ級數ヲ置キ換フルヿヲ稱シテ,$(a+b)^n$ヲ**展開**スルトイフ

爰ニ注意スベキハ,右邊ニ於ケル項ノ數ハ$n+1$ニシテ,

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots r}a^{n-r}b^r$$

ハ第$r+1$番目ノ項ナルヿナリ,又此$r+1$番目ノ項ニ於テ,rヲ1ト置クトキハ第二番目ノ項$na^{n-1}b$ヲ得ベク,rヲ2ト置クトキハ第三番目ノ項$\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2$ヲ得ベク,次第ニ

*組合ノ公式ヲ用井ズ又數學的歸納法ニ頼ラザル二項定理ノ證明ハ續初等代數學教科書(近刊)中ニ揭載スベシ

斯クノ如ク,rヲnト置クトキハ$n+1$番目即最後ノ項b^nヲ得ベシ,故ニ此$r+1$番目ノ項ヲ名ヅケテ$(a+b)^n$ノ展開ノ一般項トイフ

例　題

1. $(a+b)^5$及$(a+b)^7$ヲ展開セヨ
2. $(a+b)^6$ノ展開ニ$a+b$ヲ掛ケテ以テ$(a+b)^7$ノ展開ヲ索メヨ
3. $$(a+b)^n = a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots\cdots + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + b^n$$
ナリト假定シ,兩邊ニ$a+b$ヲ掛ケ,且${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r$(第三十六問題集7)ニ注意シ,數學的歸納法ニヨリテ二項定理ヲ證明セヨ

235. $(a+b)^n$ノ展開ニ於ケル起頭ヨリ數ヘテ第$r+1$番目ノ項ハ

$${}_nC_ra^{n-r}b^r \text{ 即 } \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots r}a^{n-r}b^r \text{ 即 } \frac{n!}{r!\,(n-r)!}a^{n-r}b^r$$

ニシテ,又結尾ヨリ第$r+1$番目即起頭ヨリ第$n-r+1$番目ノ項ハ(第232節ヲ參照セヨ)

$${}_nC_{n-r}a^rb^{n-r} \text{ 即 } \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots(n-r)}a^rb^{n-r} \text{ 即 } \frac{n!}{(n-r)!\,r!}a^rb^{n-r}$$

ナリ,故ニ,一目シテ明カナルガ如ク, $(a+b)^n$ ノ展開ニ於ケル起頭ヨリ數ゾヘ又結尾ヨリ數ゾヘ同シ番目ノ項ノ數係數ハ相等シ,蓋シ此事ハ讀者ノ既ニ已ニ前節ノ例題ヲ解クニ當リ自ラ勘付キシトコロナルベシ

サレバ二項定理ヲ用ヰテ展開ヲナスニ, n ガ奇數ナレバ項ノ數ハ偶數 $n+1$ ダケアル其中ノ半分ダケノ數係數ヲ索ムレバ可ナリ,又 n ガ偶數ナレバ項ノ數ハ奇數 $n+1$ ダケアル其中ノ丁度眞中ノ項マデノ數係數ヲ索ムレバ可ナリ

236. 第234節ノ公式ニ於テ b ノ代リニ $-b$ ト置クトキハ

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ \ldots\ldots r}a^{n-r}b^r+\ldots+(-1)^nb^n$$

ヲ得ベシ,又 a ノ代リニ 1, b ノ代リニ x ト置クトキハ

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots r}x^r+\ldots\ldots+x^n$$

ヲ得ベク,逆ニ此公式ニ於テ x ノ代リニ $\frac{b}{a}$ ト置キテ後,兩邊ニ a^n ヲ掛クルトキハ,元ノ第234節ノ公式ヲ得ベキガ故ニ,此公式ヲモ亦第234節ノ公式ト同樣ニ二項定理ノ一般ナル形チト看做スヿヲ得ベシ*

237. 例 (1) $(b^2+2cx)^5$ ヲ展開セヨ

$$(b^2+2cx)^5=(b^2)^5+5(b^2)^4(2cx)+10(b^2)^3(2cx)^2+10(b^2)^2(2cx)^3$$

$$+5b^2(2cx)^4+(2cx)^5$$

$$=b^{10}+10b^8cx+40b^6c^2x^2+80b^4c^3x^3+80b^2c^4x^4+32c^5x^5$$

例 (2) $(1+2x-x^2)^4$ ヲ展開セヨ

$$(1+2x-x^2)^4=\{1+(2x-x^2)\}^4$$

$$=1+4(2x-x^2)+6(2x-x^2)^2+4(2x-x^2)^3+(2x-x^2)^4$$

$$(2x-x^2)^2=(2x)^2-2(2x)x^2+(x^2)^2=4x^2-4x^3+x^4$$

$$(2x-x^2)^3=(2x)^3-3(2x)^2x^2+3(2x)(x^2)^2-(x^2)^3$$

$$=8x^3-12x^4+6x^5-x^6$$

$$(2x-x^2)^4=(2x)^4-4(2x)^3x^2+6(2x)^2(x^2)^2-4(2x)(x^2)^3+(x^2)^4$$

$$=16x^4-32x^5+24x^6-8x^7+x^8$$

同類項ヲ集ムレバ,

$$(1+2x-x^2)^4=1+8x+20x^2+8x^3-26x^4-8x^5+20x^6-8x^7+x^8$$

---

*本書ニ於テハ始終 n ハ正ノ整數ナリトシテ二項定理ヲ證明セリ, n ガ負數又ハ分數ナル場合ニ於テモ, x 及 n ニ關シ或ル要件ガ滿足サルルトキハ $(1+x)^n$ ヲ x ノ昇羃ノ順ニ從テ進ム級數ニ展開スルコトヲ得ベク,其一般項ハ n ガ正ノ整數ナル場合ニ於ケルモノト異ナルナシ,但 n ガ負數又ハ分數ナルトキハ,項ノ數ハ限リ無ク多クナリテ,展開ハ所謂無限級數トナルベシ,然レ圧其證明ハ本書ノ範圍外ニ屬スルモノトス

第三十七問題集

1. $(a-x)^{11}$ ノ展開ニ於ケル起頭ヨリ三番目マデ及結尾ヨリ三番目マデノ項ヲ書ケ

2. $(3-2x^2)^5$ ノ展開ヲ書ケ

3. $(1-2y)^7$ ヲ展開セヨ

4. $(x+6y)^n$ ノ展開ヲ第四項マデ書ケ

5. $(1+x-x^2)^4$ ヲ展開セヨ

6. $(1+x+x^2)^5$ ヲ展開セヨ

7. $(1-2x+x^2)^4$ ヲ展開セヨ

8. $(1+3x+3x^2+x^3)^8$ ノ展開ニ於ケル x^4 ノ數係數ヲ索ム

9. $(1+2x+3x^2)^7$ ノ展開ニ於ケル x^5 ノ數係數ヲ索ム

10. $(1-2x+3x^2)^5$ ノ展開ニ於ケル x^6 ノ數係數ヲ索ム

11. $(x+y)^n$ ノ展開ニ於ケル第二項 240, 第三項 720, 第四項 1080 ナリトイフ,仍テ x,y 及 n ノ値ヲ索ム

12. $(x+y)^n$ ノ展開ニ於ケル第六項 112, 第七項 7, 第八項 $\frac{1}{4}$ ナリトイフ,仍テ x,y 及 n ノ値ヲ索ム

13. 二項定理ヲ用ヰテ $(99)^4$ ヲ計算セヨ

14. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ ノ展開ニ於ケル丁度眞中ノ項ヲ索メヨ

15. $(1+x)^{p+q}$ ニ於テ x^p ノ數係數ト x^q ノ數係數トガ相等シキヿヲ證明セヨ

第二十四編　對數及年金算

對　數

238. $a=b^m$ ニ於テ, a ト m トヲ知ルトキハ, b ヲ索ムルヿヲ得ベシ,乃 $b=a^{\frac{1}{m}}$ ナリ,次ニ a ト b トヲ知リテ m ヲ索ムルヿヲ攷フベシ

本書ニ於テハ b ガ 10 ニシテ a ガ正ナル場合ノミヲ論ズベシ

$10^x=a$ ナルトキハ, x ヲ a ノ **常用對數** ト稱シ,之ヲ書キ表ハスニ $\log a$ (「ロッグ」a ト讀ム)ヲ以テス,即

$$10^x=a \text{ ナルトキハ, } x=\log a$$

又 10 ヲ常用對數ノ **底數**, a ヲ對數 x ニ對スル數ト稱ス

以下本編ニ於テ唯對數トアルハ總テ常用對數ノ意ナリト知ルベシ

或ル數ノ對數トハ,此數ヲ得ル爲メニ, 10 ヲ或ル羃ニ高メザルベカラザル其羃ノ指數ナリ

239. 正負ノ整數ヲ指數トスル 10 ノ羃ノ對數ハ,容易ニ之ヲ索ムルヿヲ得ベシ,例ヘバ

$10^0=1$　　故ニ　　$0=\log 1$

$10^1=10$　　故ニ　　$1=\log 10$

$10^2=100$　　故ニ　　$2=\log 100$

$10^3=1000$　　故ニ　　$3=\log 1000$

以上之ニ準フ,同様ニ

$10^{-1}=.1$　　故ニ　　$-1=\log .1$

$10^{-2}=.01$　　故ニ　　$-2=\log .01$

$10^{-3}=.001$　　故ニ　　$-3=\log .001$

以下之ニ準フ

$10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3.1622..$　　故ニ　　$\frac{1}{2}=.5=\log 3.1622...$

$10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}=31.622..$　　故ニ　　$\frac{3}{2}=1.5=\log 31.622...$

$10^{\frac{5}{2}}=100\sqrt{10}=316.22...$　　故ニ　　$\frac{5}{2}=2.5=\log 316.22...$

又 $10^{-\frac{1}{2}}=10^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{10}\sqrt{10}=.31622..........$

故ニ　　$-\frac{1}{2}=-.5=\log .31622....$

$10^{-\frac{3}{2}}=10^{\frac{1}{2}-2}=\frac{1}{100}\sqrt{10}=.031622.....$

故ニ　　$-\frac{3}{2}=-1.5=\log .031622...$

例　　題

1. $\log 1000000$ ヲ索ム　　2. $\log .00001$ ヲ索ム

3. $10^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{10}=2.1544.......$ ヨリシテ $\log 21.544.......$, $\log 215.44......$, $\log .21514.....$, $\log .021514.....$ ヲ索メヨ

240. 前節ノ諸例ニ照ラシテ考フルトキハ,次ノ言ノ眞ナルヲ悟ルコヲ得ベシ

1桁ノ數ノ對數ハ0ト1トノ間ニアリ

2桁ノ數ノ對數ハ1ト2トノ間ニアリ

3桁ノ數ノ對數ハ2ト3トノ間ニアリ

一般ニ n 桁ノ數ノ對數ハ $n-1$ ト n トノ間ニアリ

又1ト.1トノ間ノ數ノ對數ハ0ト -1 トノ間ニアリ

.1ト.01トノ間ノ數ノ對數ハ -1 ト -2 トノ間ニアリ

.01ト.001トノ間ノ數ノ對數ハ -2 ト -3 トノ間ニアリ

其他之ニ準フ

241. 或ル數ノ對數ヲ索ムル方法ヲ例示スル爲メニ,次ニ2ノ對數即 $\log 2$ ヲ索ムベシ

$\log 2$ ヲ索ムルトイフコハ,$10^x=2$ ヨリシテ x ヲ索ムルトイフコナリ

$10^x=2$,　　$10^0<10^x<10^1$　　故ニ　　$0<x<1$

$10^{2x}=4$,　　$10^0<10^{2x}<10^1$　　故ニ　$0<2x<1$,　$0<x<\frac{1}{2}$

$10^{4x}=16$,　　$10^1<10^{4x}<10^2$　　故ニ　$1<4x<2$,　$\frac{1}{4}<x<\frac{2}{4}$

$10^{8x}=256$,　　$10^2<10^{8x}<10^3$　　故ニ　$2<8x<3$,　$\frac{2}{8}<x<\frac{3}{8}$

$10^{16x}=65536$　　$10^4<10^{16x}<10^5$　　故ニ　$4<16x<5$,　$\frac{4}{16}<x<\frac{5}{16}$

斯クノ如クニシテ,x ヲ次第次第ニ狹クナル限界ノ間ニ挾ムコヲ得ベシ,尤モ $\log 2$ ノ小數第五位マデノ近似値ハ

.30103 ニシテ,上ニハ僅カニ $\log 2$ ガ .25 ト .3125 トノ間ニアルヿヲ示シタルニ過ギズ,此レヨリシテ進ンデ $\log 2$ ノ小數第五位マデ正シキ近似値ヲ得ルマデニハ,尚ホ多クノ手數ヲ要スベシ,又實際或ル數ノ對數ヲ計算スルニハ,上ノ如キ迂遠ナル方法ニ依ラズ,本書ノ範圍外ニ屬スル簡便ナル方法ニヨリテ之ヲ算出スルモノトス,乃本節ノ主眼トスルトコロハ,或ル數ノ對數ハ之ヲ索ムルヲ得ルモノナルヿヲ示スニアリテ,實際或ル數ノ對數ヲ算出スル最モ簡便ナル方法ヲ與フルニアラズト知ルベシ

注意 本書ニ於テハ證明シアラザレドモ,10 ノ整數冪ニ等シカラザル數ノ對數ハ決シテ有理數ニ等シカラザルヿヲ證明スルヿヲ得ベシ,乃極メテ罕ニアル,或ル數ガ丁度 10 ノ整數冪ニ等シキ非常ニ特別ナル場合ノ外ハ,或ル數ノ對數ハ不盡數ナリ,乃通例畧シテ或ル數ノ對數ト稱スルモノハ其近似値ノ意ナリト知ルベシ

242. 對數ハ矢張リ指數ナルガ故ニ,對數ニ係ル計算法ハ指數ニ係ル計算法ト異ルトコロナシ

$p=\log a$ ナルトキハ, $10^p=a$, $q=\log b$ ナルトキハ, $10^q=b$,
故ニ $10^p10^q=ab$ 即 $10^{p+q}=ab$, 故ニ $p+q=\log ab$ 即

$$\log(ab)=\log a+\log b$$

同様ニ $\log(abc\ldots\ldots)=\log a+\log b+\log c+\ldots\ldots$

即積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シ

$\frac{10^p}{10^q}=\frac{a}{b}$, $10^{p-q}=\frac{a}{b}$, $p-q=\log\frac{a}{b}$, 故ニ

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$$

即商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタル差ニ等シ

$(10^p)^n=a^n$, $10^{np}=a^n$, $np=\log a^n$, 故ニ

$$\log a^n=n\log a$$

即冪ノ對數ハ指數ト元ノ數ノ對數トノ積ニ等シ

$\sqrt[n]{10^p}=\sqrt[n]{a}$, $10^{\frac{p}{n}}=\sqrt[n]{a}$, $\frac{p}{n}=\log\sqrt[n]{a}$, 故ニ

$$\log\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}\log a$$

即根ノ對數ハ元ノ數ノ對數ヲ根指數デ割リタル商ニ等シ

243. 二ツノ數ガ同ジ數字ヲ同ジ順ニ列ベタルモノニシテ唯小數點ノ位置ヲ異ニスルノミナルトキハ,大ナル方ノ數ハ小ナル方ノ數ト 10 ノ或ル整數冪トノ積ニ等シク,小ナル方ノ數ハ大ナル方ノ數ヲ 10 ノ或ル整數冪デ割リタル商ニ等シ,故ニ此二數ノ對數ノ差ハ整數ナリ,例ヘバ

$$\log 243.5=\log 100+\log 2.435=2+\log 2.435,$$

$$\log .8234=-\log 1000+\log 823.4=-3+\log 823.4$$

1ヨリ小ナル數ノ對數ハ負ナリ,例ヘバ $\log 2=.30103$ ニシテ,$\log .2=\log 2-\log 10=0.30103-1=-.69897$ ナリ,然レ𪜈實際ハ決シテ $\log .2=-.69897$ ト書クヿナシ,矢張リ元ノ儘ニ,$\log .2=.30103-1$ トイフ意味ニ於テ

$$\log .2=\bar{1}.30103$$

ト書クモノトス,即小數點ノ左ニアル $\bar{1}$ ハ -1 ヲ表ハシ,小數點ノ右ニアル .30103 ハ正ナリトス

上ノ如キ書キ方ヲ用ヰル理由ハ,斯ク定ムルトキハ,同ジ數字ヲ同ジ順ニ列ベタル數ノ對數ノ小數ナル部分ハ,元ノ數ニ於ケル小數點ノ位置ニ拘ハラズ,恒ニ同一ナリトイフ便利アレバナリ

1ヨリ大ナル數ノ對數ハ勿論全部正ナリ,故ニ元ノ數ノ1ヨリ大ナルト1ヨリ小ナルトニ拘ハラズ,凡テ對數ノ小數ナル部分ハ正ナリ

對數ノ小數ナル部分ヲ**假數**,其整數ナル部分ヲ**指標**ト稱ス,例ヘバ $\log 372=2.57054$ ニ於テ,指標ハ 2,假數ハ .57054 ナリ,又 $\log .372=\bar{1}.57054$ ニ於テ,指標ハ $\bar{1}$ 即 -1,假數ハ .57054 ナリ

例題 次ノ對數ヲ普通ノ書キ方ニ改メヨ

$\log .9=-(.04576)$, $\log .003=-(2.52288)$, $\log .0458=-(1.33913)$

244. 或ル數ノ對數ノ指標ハ容易ニ之ヲ發見スルヿヲ得ベシ

1ヨリ大ナル數ノ整數ナル部分ガ n 桁ノ數ナルトキハ其對數ノ指標ハ $n-1$ ナリ(第240節參照),例ヘバ 4135 ノ對數ヲ索メンニ,其假數ハ既成ノ對數表ニ就テ索ムルモノナレド,指標ノ 3 ナルヿハ一目シテ明カナリ

1ヨリ小ナル小數ノ小數點ト初メテノ有効數字トノ間ニアル 0 ノ數ガ n 個アルトキハ,此小數ノ對數ノ指標ハ $\overline{(n+1)}$ 即 $-(n+1)$ ナリ,例ヘバ $\log .000435=\bar{4}+$ (小數) ニシテ,此小數ナル部分ノミヲ表ニヨリテ索ムベキモノトス

世ニ既成ノ對數表アリ,多クハ1ヨリ 11000 邊マデノ整數ノ對數ヲ小數第五位マデ與フルモノニシテ,之ヲ五桁ノ對數表トイフ,七桁ノ對數表モアレド,大抵ノ計算ニハ五桁ノ對數表ニテ充分足レリトス

指標ハ視察ニテ容易ニ之ヲ發見スルヿヲ得ルガ故ニ,對數表ニハ假數ノミヲ載セテ指標ヲ揭ゲズ

注意 10ヲ對數ノ底數トスルトキハ,假數ハ或ル數ヲ組成スル數字ト其順トノミニ,又指標ハ小數點ノ位置ニノミ關係スルガ故ニ,種種ノ便利アリ,特ニ對數表ヲ編成スル上ニ於ケル便益尠ナカラザルハ讀者ノ既ニ自ラ悟レルトコロナランﾞ

245. 次ニ1ヨリ10909又ハ11000邊マデノ數ノ對數ヲ與フル五桁ノ對數表ヲ用ヰルモノトシテ,對數計算法ヲ例示スベシ

例 (1) 7962ノ對數ヲ索ム

指標ハ3ナリ,次ニ表ニヨリテ直チニ假數ノ.90102ナルヲ知リ, $\log 7962 = 3.90102$ ヲ得

或ル數ノ對數ヲ索ムルヿニ就テ,特ニ説明ヲ要スルハ,對數表中ニ於テ *P.P.* ト題スル欄ニ載セタル數ノ使用法ナリ,此行ノ數ハ原來二ツノ殆ンド相等シキ數ノ差ハ其對數ノ差ニ比例ストイフ定理ニ基ヅキテ算出セラレタルモノナレド,此定理ヲ證明スルガ如キハ本書ノ範圍外ニ屬スルモノトス,本書ニ於テハ唯一例ヲ揭ゲテ其用法ヲ示スベシ

例 (2) 212.57ノ對數ヲ索ム

指標ハ2ナリ,次ニ假數ヲ索メンニ,21257ハ表中ノ數ニアラズ,表ニヨリ $\log 2125$ ノ假數ハ.32736, $\log 2126$ ノ假數ハ.32756ニシテ其差.00020ナリ,乃元ノ數ニ於ケル差1ニ對シ對數上ノ差.00020アルガ故ニ,比例配分ニヨリ元ノ數ニ於ケル差.7ニ對シ對數上ノ差 $.00020 \times .7$ 即.00014ナリトシ, $\log 2125$ ノ假數.32736ニ此.00014ヲ加ヘテ以テ $\log 21257$ ノ假數.32750ヲ得,對數表中 *P.P.* ノ欄內20ト

題スル行ノ7ノ右ニ14トアルハ此.00014ノ意ナリ,仍テ $\log 212.57 = 2.32750$ ヲ得

例 (3) 對數 $\bar{1}.38279$ ニ對スル數ヲ索ム

表ニヨルニ, $\log 2414$ ノ假數ハ.38274, $\log 2415$ ノ假數ハ.38292,而シテ與ヘラレタル對數ノ假數ハ此二數ノ間ニアリテ前者ニ近ク,且指標ハ $\bar{1}$ ナルガ故ニ,所要ノ數ハ.2414ナリ,又所要ノ數ヲ小數第五位マデ索メントスルニハ, $\log 2414$ ノ假數ト $\log 2415$ ノ假數トノ差.00018ヲ索メ, *P.P.* ノ欄18ト題スル行ニ就キ,與ヘラレタル對數ノ假數ト $\log 2414$ ノ假數トノ差5 (實ハ.00005) ハ,2ニ對スル3.6ト3ニ對スル5.4トノ間ニアリ且5.4ノ方ニ近キヲ見,小數第五位マデノ數ノ中ニテハ.24143ガ所要ノ數ニ最モ近キヲ知ル

246. 第242節ノ諸公式ノ示スガ如ク,吾人ハ對數ニヨリテ以テ,掛ケ算ヲ寄セ算ニ,割リ算ヲ引キ算ニ,羃ニ高ムルヿヲ掛ケ算ニ,根ヲ索ムルヿヲ割リ算ニ歸セシムルヿヲ得,計算ヲ簡便ニスル上ニ於ケル對數ノ効能ノ如何ニ偉大ナルカハ蓋シ未ダ嘗テ之ヲ試ミザル人ノ豫想ノ外ニ出ヅルナラン,次ニ一例ヲ示ス

例 $\dfrac{4821.6\sqrt{781.45}}{(15.823)^3(7.3482)^2}$ $\left[=\dfrac{a\sqrt{b}}{c^3d^2}\right]$ ヲ計算セヨ

$$\log\frac{a\sqrt{b}}{c^3d^2}=\{\log a+\tfrac{1}{2}\log b\}-\{3\log c+2\log d\}$$

$$\begin{array}{ll} \log a=3.68319 & \log a=3.68319 \\ \log b=2.89290 & \tfrac{1}{2}\log b=1.44645 \\ \hline & \text{分子ノ對數}=5.12964 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log c=1.19929 & 3\log c=3.59787 \\ \log d=0.86618 & 2\log d=1.73236 \\ \hline & \text{分母ノ對數}=5.33023 \end{array}$$

分子ノ對數ヨリ分母ノ對數ヲ減ジテ $\bar{1}.79941$ ヲ得,此對數ニ對スル數ヲ搜索シ,0.63010 ヲ得テ答トス

$\boxed{\text{注意}}$ 凡テ對數計算ニ於テハ四捨五入スルモノトス

例　題

五桁ノ對數表ヲ用ヰテ次ノ計算ヲ行ヘ

1. 948.76×0.043875　　2. 830.75×0.0003796

3. 3.1416×0.0087634　　4. 2.1415×3.1416

5. $7064\div8929$　　6. $8.3215\div0.7892$

7. $0.6782\div0.04382$　　8. $7.8247\div3.1416$

9. $\dfrac{0.07452}{73.487\times0.8375}$　　10. $\dfrac{7514\times0.07439}{7935\times0.09837}$

11. $\dfrac{79\times837\times0.00972}{48009\times0.04902}$　　12. $\dfrac{341\times7.87\times3.141}{753\times9.18\times2.141}$

13. $(1.31)^2$　14. $(0.491)^3$　15. $(8.172)^4$　16. $(7.8134)^5$

17. $(0.87231)^6$　18. $\left(1\frac{7}{9}\right)^8$　19. $\left(\frac{14}{51}\right)^{10}$

20. $\sqrt{3.14}$　21. $\sqrt{82.75}$　22. $\sqrt{0.07893}$

23. $\sqrt{3.1416}$　24. $\sqrt[3]{793}$　25. $\sqrt[3]{2}$　26. $\sqrt[3]{582}$

27. $\sqrt[3]{71.896}$　28. $\sqrt[4]{793}$　29. $\sqrt[7]{453}$　30. $\sqrt[8]{4.83}$

31. $\sqrt[9]{8.964}$　32. $\dfrac{(48.239)^2\,(7.8245)^3}{(41.389)^2\sqrt{58927}}$　33. $\dfrac{\sqrt{48143}\,(4.8156)^2}{37587\,\sqrt[3]{823.95}}$

次ノ方程式ヲ滿足スル x ノ値ヲ索メヨ

34. $10^x=3$　35. $2^x=10$　36. $a^x=b$　37. $52^x=2$

年　金　算

247. 年金算ニ入ルノ豫備トシテ,利息ニ關スル二三ノ公式ヲ索ムベシ

次下本編ノ終リマデ恒ニ一ケ年利息ノ步合ヲ小數ニテ表ハシタルモノヲ表ハスニ i ヲ以テスベシ,乃例ヘバ年利率ヲ五分トスレバ $i=0.05$ ナリ

凡テ複利ノ計算ニ於テ特別ノ斷リナキ限リハ利息ハ滿一年每ニ元金ニ繰リ込ムモノト假定ス

元金*1ノ一ケ年後ノ元利合計ハ $1+i$,二年後ノ元利

* 本編ニ於テ元金トアルハ元金ノ圓數ノ意ナリ,其他元利合計,現價,年金額等ノ場合ニ於テモ之ニ倣フ

合計ハ $(1+i)^2$, ..., 一般ニ n 年後ノ元利合計ハ $(1+i)^n$ ナリ,故ニ元金 P ノ n 年後ノ元利合計 A ハ

$$A=P(1+i)^n$$

ナリ,此レヨリシテ次ノ公式ヲ得ベシ

$$i=\sqrt[n]{\frac{A}{P}}-1\quad,\ n=\frac{\log A-\log P}{\log(1+i)}$$

$\boxed{\text{注意}}$ 半年即六ヶ月毎ニ利息ヲ元金ヘ繰リ込ム場合ニハ, $A=P\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}$ ニシテ,毎月利息ヲ元金ヘ繰リ込ム場合ニハ, $A=P\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n}$ ナリ,又上ノ最後ノ式ニ於テ實際 n ハ整數ナラザルベカラザルヿニ注意セヨ

248. 一ヶ年後ニ仕拂ハルベキ元金1ノ現價ハ $\frac{1}{1+i}$ ナリ,二ヶ年後ニ仕拂ハルベキ元金1ノ現價ハ $\frac{1}{(1+i)^2}$ ナリ,一般ニ n 年後ニ仕拂ハルベキ元金1ノ現價ハ $\frac{1}{(1+i)^n}$ ナリ,故ニ n 年後ニ仕拂ハルベキ金高 B ノ現價 Q ハ

$$Q=\frac{B}{(1+i)^n}$$

ナリ,結局リ元金 Q ノ n 年後ノ元利合計ガ B トナル理ナレバ,前節ノ公式ニヨリ $B=Q(1+i)^n$, 故ニ $Q=B(1+i)^{-n}$, 乃本節ノ公式ハ亦前節ノ公式ヨリシテ之ヲ誘出スルヿヲ得ベシ

249. 年金ヲ大別シテ確實年金及生命年金ノ二種トス,本書ニ於テハ確實年金ノミヲ論ズ

確實年金 トハ永久又ハ豫ツメ定メタル期限ノ間一定ノ金額ヲ受取ル榛ヲイフ

每年受取ル一定ノ金額ヲ年金額ト稱ス,以下年金額ヲ表ハスニハ恒ニ a ヲ以テスベシ

凡テ年金ノ現價即價格ヲ算出スルニハ,現時ヨリ滿一年後ニ第一回ノ年金額ヲ受取ルモノト假定ス,又 m 年間据置ノ場合ニ於テハ,現時ヨリ滿 $m+1$ 年後ニ第一回ノ年金額ヲ受取ルモノト看做ス

年金ニ關スル計算ハ前二節,第225節及第227節ノ簡單ナル應用ニ過ギザルガ故ニ,以下單ニ公式ノミヲ掲ゲテ其證明ヲ畧ス(第227節例○及第三十五問題集ノ終リノ四問ヲ參照セヨ),讀者自ラ之ヲ證明スベシ

永續年金 トハ年金ノ永續スルモノヲイフ

$$[\text{永續年金ノ現價}]=\frac{a}{i}$$

$$[m\text{年間据置永續年金ノ現價}]=\frac{a}{i(1+i)^m}$$

定期年金或ハ**有期年金** トハ年數ニ限リアル年金ヲイフ

$$[n\text{年間ノ定期年金ノ現價}]=\frac{a}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$$

$$[n\text{年間ノ定期年金ノ}n\text{年後ノ蓄積高}]=\frac{a}{i}\left\{(1+i)^n-1\right\}$$

$$\left[\begin{array}{l}m\text{年間据置其後}n\text{年間繼}\\ \text{續スル据置定期年金ノ現價}\end{array}\right]=\frac{a\{(1+i)^n-1\}}{i(1+i)^{m+n}}$$

250. 例 (1) 年利四分,元金625圓十二年後ノ元利合計幾何トナルカ

所要ノ元利合計ヲ x トスレバ,第 247 節ノ公式ニヨリ

$$x = 625\,(1+.04)^{12} = 625\,(1.04)^{12}$$

$\log 1.04 = .01703$, $\log (1.04)^{12} = .01703 \times 12 = .20436$

$\log 625 = 2.79588$, $\log x = 2.79588 + .20436 = 3.00024$

$x = 1000.6$

乃答ハ金壹千圓六拾錢ナリ

注意 實際ハ元金ノ壹圓未滿ノ端數ニ對シテハ利息ヲ附セズ,又勘定ヲ錢位ニ止メ以下切リ捨ツル等ノコトアリ,加之ノミナラズ對數表ニ揭ゲアル對數ハ勿論其近似値ニ過ギザルガ故ニ,此レヨリ生ズル誤差モアリ,上ノ答ハ全クハ實際ト符合セズト知ルベシ

例 (2) 年利五分,年金額 180 圓,五年間据置十年間ノ据置定期年金ノ現價幾何ナルカ

所要ノ現價ヲ x トスレバ,前節ノ公式ニヨリ

$$x = \frac{180\{(1.05)^{10}-1\}}{0.05(1.05)^{15}}$$

對數計算ニヨリテ $x = 1089$ ヲ得,乃答ハ金壹千零八拾九圓ナリ

第三十八問題集*

1. 年利五分,元金 100 圓,百年後ノ元利合計如何
2. 前問題ニ於テ利子ヲ半年毎ニ元金ヘ繰リ込ムトキハ如何
3. 年利六分,元金壹圓,毎月利子ヲ元金ヘ繰リ込ムトキハ,百年後ニハ元利合計幾何トナルカ
4. 元金 100 圓,二十五年後ノ元利合計 265.05 圓ナリトイフ,年利率幾何ナルカ
5. 年利五分,元金 100 圓,若干年後ノ元利合計 1147 圓トナレリトイフ,年數幾何
6. 年利率ヲ七分トスルトキハ,今ヨリ百年後ニ受取ルベキ金壹萬圓ノ現價如何
7. 利率ヲ年七分五厘トスルトキハ,年金額 2504 圓ノ永續年金ノ現價幾何ナルカ
8. 利率ヲ年六分五厘トスルトキハ,五年間据置年金額 75 圓ノ据置永續年金ノ現價如何

* 五桁ノ對數表ノ終リニハ,通例 10000 ヨリ 11000 邊マデノ數ノ七桁ノ對數ガ揭ゲアリ,然レトモ本書ノ卷末ニ載セタル此集ノ問題ノ答ハ對數表ノ此部分ヲ用ヰズシテ即恒ニ五桁ノ對數ヲ用ヰテ得ベキモノナリ

9. 利率ヲ年六分トスルトキハ,年金額貳圓,十八年間ノ定期年金ノ現價如何

10. 利率ヲ年四分八厘トシ,今ヨリ滿一年每ニ金 50 圓ヲ銀行ヘ預ケルトキハ,二十年ノ後即第二十回目ノ預ケ金ヲナシタル曉ニハ,蓄積高幾何トナルカ

11. 年利四分五厘,年金額 180 圓,五年間据置,十五年間ノ据置定期年金ノ現價如何

12. 即金ニテ仕拂フベキ金壹萬圓ノ負債ヲ今後滿一年每ニ若干圓宛十回ニ濟崩サントス,利率ヲ年八分トスルトキハ,滿一年每ニ仕拂フベキ金高如何

初等代數學教科書終

初等代数學教科書下卷

答

第十八問題集

1. $\frac{7}{4}$　2. $1\frac{4}{7}$　3. 2　4. $-\frac{3}{7}$　5. $\frac{13}{19}$　6. 7　7. -4　8. $\frac{31}{5}$

9. -1　10. $-\frac{9}{2}$　11. $\frac{3}{2}$　12. $5\frac{1}{2}$　13. $\frac{1}{16}$　14. 1　15. 1

16. $\frac{8}{3}$　17. $\frac{3}{2}$　18. 4　19. 根ヲ有セズ　20. $\frac{4}{13}$

21. 0　22. -1　23. 1　24. $b-a$　25. $\frac{2ab}{a+b}$　26. $2(a+b)$

27. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$　28. $\frac{a+b}{2}$　29. $\frac{a+b+c+d}{m+n}$　30. 根ヲ有セズ

31. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$　32. $-2(a+b+c)$　33. $\frac{5}{13}$　34. 一時間毎ニ $18\frac{3}{4}$ 哩

35. 一圓ニ付 7 升 5 合

第十九問題集

1. $-7, -3$　2. 4.4, 3.3　3. 7, 5　4. 63, 14　5. 3, 2　6. 2, 3

7. 4, 12　8. 7, 8　9. 14, 46　10. 21, 20　11. $-1, -\frac{1}{2}$

12. $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}, -(a+b)$　13. $\frac{28}{45}$　14. $\frac{3}{5}$　15. $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}$　16. $\frac{24}{36}$

17. 84　18. 75　19. 36　20. 往時ノ速度一時間毎ニ徒歩ハ 2 里, 舟行ハ $1\frac{1}{2}$ 里　21. 速度一時間毎ニ $33\frac{1}{3}$ 哩, 距離 $48\frac{1}{3}$ 哩

22. 一時間毎ニ急行ハ 45 哩, 通常ハ 30 哩　23. 一時間毎ニ 30 哩及 50 哩　24. 距離 60 哩, 旅客列車ノ速度一時間毎ニ 30 哩

25. 一時間毎ニ 3「キロメートル」　26. 距離 10 里, 速度一時間毎ニ 4 里　27. 4 時間, 速度一時間毎ニ $\frac{5}{12}$ 里

第二十問題集

1. $\frac{5}{7}, -\frac{9}{13}$ **2.** $-1 \pm \sqrt{2}$ **3.** $1 \pm i$ **4.** $1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}$ **5.** $5 \pm i\sqrt{7}$
6. $\frac{3 \pm \sqrt{7}}{5}$ **7.** $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$ **8.** $\frac{7 \pm \sqrt{241}}{6}$ **9.** 3.1, 2.1 **10.** 3.5, −7.8
11. 0, 4 **12.** 8, 3 **13.** $7, -4\frac{1}{3}$ **14.** 1, −8 **15.** 0, 10 **16.** $a, \frac{1}{a}$
17. $2a-b, 2b-a$ **18.** 4, 2 **19.** $a-1, 1-m$ **20.** $\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a-b)$
21. $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$ **22.** ±48 **23.** 18, 12 **24.** 18, 12, 9 **25.** 20
26. 36, 24 **27.** 30, 24 **28.** 12, 10 **29.** 4, 6 **30.** 3 或ハ 63
31. 23, 13 **32.** $c+\sqrt{a-c^2}, c-\sqrt{a-c^2}$ **33.** $\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)$, $\frac{1}{2}(a^2-ab+b^2)$ **34.** $3a-\frac{2b}{5}, 2a+\frac{3b}{5}$ **35.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ **36.** 39間, 29間
37. 126米, 96米 **38.** 60歳, 40歳 **39.** 80尺, 99尺 **40.** 72尺, 54尺 **41.** 45, 36 **42.** 74 **43.** 46 或ハ 64 **44.** 9升 **45.** 1斗
46. 年8分 **47.** 甲10圓, 乙5圓, 丙50圓 **48.** 7, 3 **49.** 13, 11
50. 17, 18 或ハ −18, −17 **51.** 6, 7, 8 **52.** 20尺 **53.** 4間
54. 64人 **55.** 578人 **56.** 720人 **57.** 4440人 **58.** 年5分
59. $\frac{100(-m+\sqrt{m^2+4a(b-m)})}{2a}-100$ **60.** 35米, 12米 **61.** 5秒後, 11秒前 **62.** 339秒前, 375秒後 **63.** 174秒前, 208秒後

第二十一問題集

2. $14a^2$ **4.** $a=\frac{4}{3}$ **5.** 3 或ハ −5 **6.** 8 **8.** $6x^2-13x+6=0$
9. $4x^2-209x+16=0$ **10.** $qx^2+p(1+q)x+p^2=0$
11. $2x^2-23x+11=0$ **12.** $qx^2-p^2x+p^2=0$
13. $9x^2-49x+49=0$ **14.** $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$

15. $ac=b^2$ **16.** $pqx^2+(pr+q^2)x+qr=0$ **17.** $acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0$
18. $abx^2+(a^2+b^2)x+ab=0$ **19.** 剰餘ハ $\alpha^2+p\alpha+q$ ニシテ, 割リ切レル爲メニハ $\alpha^2+p\alpha+q=0$ ナラザルベカラズ, 即 α ハ $x^2+px+q=0$ ノ根ナラザルベカラズ **20.** ax^2+bx+c ハ $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ニ等シトスレバ, α 及 β ハ $ax^2+bx+c=0$ ナル二次方程式ノ根ナリ, 今設シ ax^2+bx+c ハ $a(x-m)(x-n)$ ニモ等シトスレバ, m 及 n モ亦同ジ二次方程式ノ根ナラザルベカラズ, 然ルトキハ, 此二次方程式ハ α 及 β ノ外ニ倘ホ根ヲ有スルコトナルベシ, 是レ不合理ナリ, 故ニ所題ノ如シ

第二十二問題集

1. $8, 2\frac{4}{11}$ **2.** $3, -4\frac{2}{3}$ **3.** 3, −5 **4.** $3, -\frac{5}{7}$ **5.** $2 \pm \sqrt{3}$
6. −5, −15 **7.** $3, -1\frac{1}{3}$ **8.** 4, 0 **9.** $1, -\frac{4}{3}$ **10.** $4, -\frac{27}{5}$ **11.** 1
12. $5, 1\frac{1}{5}$ **13.** $5, -1\frac{1}{4}$ **14.** $2\frac{2}{3}, 0$ **15.** $5, -\frac{33}{13}$ **16.** $5, -\frac{7}{3}$
17. 根ヲ有セズ **18.** $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$ **19.** ±6 **20.** 1
21. $\pm i$ **22.** $\pm\sqrt{ab}$ **23.** $a, -\frac{b(a+b)}{2a+b}$ **24.** $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ **25.** $a+b, \frac{2ab}{a+b}$ **26.** $a+b, \frac{a^2+b^2}{a+b}$ **27.** $c, -\frac{a^2+b^2+ac+bc}{a+b+2c}$ **28.** $-a, -b$
29. a, b **30.** $0, \pm\sqrt{ab}$ **31.** $0, -\frac{1}{2}(a+b)$

第二十三問題集

1. 16人 **2.** 7人 **3.** 6時間, 12時間 **4.** 8段 **5.** 75株

6. 2里 **7.** 24日 **8.** 4日 **9.** 27俵 **10.** 15錢 **11.** 36個
12. 84錢 **13.** 56町歩 **14.** 甲4里, 乙3里 **15.** $1\frac{5}{6}$時間
16. 9升 **17.** 半半 **18.** 360哩 **19.** 25日 **20.** 15里
21. $m\frac{a+b}{a-b}$里 **22.** 15里

第二十四問題集

1. ± 12 **2.** $\frac{7}{5}$ **3.** 3 **4.** 5 **5.** 2 **6.** 49 **7.** $4, \frac{1}{9}$ **8.** 4
9. ± 4 **10.** $5, -3$ **11.** $0, 6$ **12.** $12, -3, \frac{9 \pm i3\sqrt{3}}{2}$ **13.** $9, -12$
14. $2, -15\frac{1}{3}$ **15.** 4 **16.** 16 **17.** $-\frac{25}{3}$ **18.** 根ヲ有セズ
19. 13 **20.** $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ **21.** a **22.** 4 **23.** 5 **24.** 根ヲ有セズ
25. 2 **26.** $7, 2$ **27.** 3 **28.** $0, a^2-b^2$ **29.** a, b **30.** $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
31. $\frac{a-1}{2}$ **32.** $3a^2$ **33.** $0, \pm\sqrt{2}$ **34.** $2, \pm 1$ **35.** $\pm a$
36. $a+b$ **37.** 3尺, 4尺, 5尺 **38.** 37尺

第二十五問題集

1. $4, -1$ **2.** $4, -5$ **3.** $1, 4, -5$ **4.** $3, -3, -2$ **5.** $2, 3, -5$
6. $1, -4, -\frac{1}{2}$ **7.** $-1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$ **8.** $10, -2, -5$ **9.** $a, -2a, -2a$
10. $a, \frac{3}{2}a, -\frac{1}{2}a$ **11.** $\pm 2, \pm 3$ **12.** $\pm 1, \pm 3$ **13.** $\pm 2, \pm\sqrt{2}$
14. $2, -1, 3, -2$ **15.** $1, -2, 4, -5$ **16.** $1, -2, \frac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$
17. $3, -2$ **18.** $1, \omega, \omega^2, -2, -2\omega, -2\omega^2$ **19.** $3, -2, \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}$
20. $\pm 2, \pm 5$ **21.** $\pm 1, \pm 3$ **22.** $\pm a, \pm\frac{1}{a}$ **23.** $\pm a, \pm\frac{i}{a}$

24. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **25.** $1, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$ **26.** $1, 1, -3 \pm 2\sqrt{2}$
27. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 3 \pm \sqrt{21}$ **28.** $-3, 2, \frac{-1 \pm i3\sqrt{3}}{2}$ **29.** $0, -8, 1, 3$
30. $0, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ **31.** $0, \pm 5$

第二十六問題集

1. [5, 4][−4, −5] **2.** $[4, 1]\left[-\frac{25}{7}, -\frac{71}{35}\right]$ **3.** [8, 6][−8, −6]
4. [7, 4] [−4, −7] **5.** [6, 2][12, −4] **6.** $[4, 3]\left[-\frac{48}{13}, -\frac{41}{13}\right]$
7. $[-24, 12]\left[\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right]$ **8.** $[6, 5]\left[-\frac{4}{81}, \frac{13}{81}\right]$ **9.** $[2, 4]\left[-\frac{29}{24}, -\frac{53}{6}\right]$
10. [0, 0][6, 5] **11.** $[0, 0]\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ **12.** $\left[3, \frac{1}{3}\right]\left[6, \frac{2}{3}\right]$ **13.** $[4, 8]\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ **14.** $[0, 0]\left[\frac{a+b}{a}, \frac{a+b}{b}\right]$ **15.** $[a, b]\,[a, b]$ **16.** $[a, b]\left[\frac{(3b-a)a}{a+b}, \frac{(3a-b)b}{a+b}\right]$ **17.** $[a, b]\left[\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2a^2b}{a^2+b^2}\right]$ **18.** $[0, b]\,[a, 0]$

第二十七問題集

1. [4, 0][−4, 0][1, 3][−1, −3] **2.** [0, 5][0, −5][6, 3][−6, −3]
3. $[4, 3][-4, -3]\left[\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{7}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ **4.** [5, 4][−5, −4]
5. [7, 6][−7, −6] **6.** [15, 7][−15, −7] **7.** [4, 1][−4, −1] [−14, 4][14, −4] **8.** [9, 4][−9, −4] **9.** $[3, 5][-3, -5]\left[36, -\frac{23}{2}\right]\left[-36, \frac{23}{2}\right]$ **10.** [9, 4][−9, −4][4, 9][−4, −9] **11.** $[5, 3][-5, -3][4\sqrt{2}, \sqrt{2}][-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ **12.** [1, 3][−1, −3][5, 3][−5, −3]
13. $[2, -1]\,[-2, 1]\left[\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}\right]\left[-\frac{18}{7}, \frac{1}{7}\right]$ **14.** [5, 1][−5, −1]

$\left[16,-\frac{9}{2}\right]\left[-16,\frac{9}{2}\right]$ **15.** $[3,5][-3,-5]\left[\frac{5}{3},\frac{13}{3}\right]\left[-\frac{5}{3},-\frac{13}{3}\right]$ **16.** $[9,7]\,[-9,-7]\,[8\sqrt{2},\sqrt{2}]\,[-8\sqrt{2},-\sqrt{2}]$ **17.** $[a,b]$ $[-a,-b]\left[\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{a+b}{\sqrt{2}},-\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right]$ **18.** $[a,1][-a,-1]$ $\left[\frac{a+1}{\sqrt{2}},\frac{a-1}{\sqrt{2}}\right]\left[-\frac{a+1}{\sqrt{2}},-\frac{a-1}{\sqrt{2}}\right]$

第二十八問題集*

1. $[6,4][-4,-6]$ **2.** $[5,4][4,5]$ **3.** $[4,2][2,4][-2+\sqrt{6},-2-\sqrt{6}]\,[-2-\sqrt{6},-2+\sqrt{6}]$ **4.** $[4,3][-3,-4]\left[\frac{1+i\sqrt{51}}{2},\frac{-1+i\sqrt{51}}{2}\right]\left[\frac{1-i\sqrt{51}}{2},\frac{-1-i\sqrt{51}}{2}\right]$ **5.** $[1,2][2,1]\left[\frac{3+i\sqrt{19}}{2},\frac{3-i\sqrt{19}}{2}\right]\left[\frac{3-i\sqrt{19}}{2},\frac{3+i\sqrt{19}}{2}\right]$ **6.** $[4,3][-4,-3][3,4]$ $[-3,-4]$ **7.** $[3,3][-3,-3]$ **8.** $[0,0][3,1]$ **9.** $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]\left[\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right]$ **10.** $\left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right]\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **11.** $[9,3]\,[-9,-3]\,[-9,3][9,-3]$ **12.** $[8,6][-8,-6]$ **13.** $\left[1,\frac{1}{3}\right]\left[2,\frac{2}{3}\right]$ **14.** $[5,3][-5,-3][5,-3]$ $[-5,3]$ **15.** $[4,1][-4,-1]$ **16.** $[4,1][-1,-4]$ **17.** $[2,1][1,2]$ $[-1,-2][-2,-1]\left[\frac{1+i\sqrt{11}}{2},\frac{-1+i\sqrt{11}}{2}\right]\left[\frac{1-i\sqrt{11}}{2},\frac{-1-i\sqrt{11}}{2}\right]$ $\left[\frac{-1+i\sqrt{11}}{2},\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right]\left[\frac{-1-i\sqrt{11}}{2},\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right]$ **18.** $\left[\frac{1}{2},1\right]\left[\frac{1}{2},1\right]$ $\left[\frac{-2+\sqrt{3}}{2},-2-\sqrt{3}\right]\left[\frac{-2-\sqrt{3}}{2},-2+\sqrt{3}\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{2},-\sqrt{3}\right]$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]\left[\frac{1}{2},-3\right]\left[-\frac{3}{2},1\right]$ **19.** $[3,6]\left[-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right]$ **20.** $[5,2]$ $\left[-\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right]$ **21.** $[-1,0][2,1]\left[\frac{1}{2},\frac{1}{8}\right]$ **22.** $[5,3][5,3\omega][5,3\omega^2]$

* 此集ノ答ノ中7,8ハ等根ナリ,又12,15,16ニハ此外ニ虛數根アリ

$[5\omega,3]\,[5\omega,3\omega]\,[5\omega,3\omega^2]\,[5\omega^2,3]\,[5\omega^2,3\omega]\,[5\omega^2,3\omega^2]$ **23.** $[4,2]$ $\left[\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]\left[\frac{1}{4},-\frac{7}{4}\right]\left[-\frac{9}{4},\frac{3}{4}\right]$ **24.** $[1,1]\left[\frac{-5+i\sqrt{7}}{2},\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\right]$ $\left[\frac{-5-i\sqrt{7}}{2},\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\right][1,1]$ **25.** 前ニ同ジ **26.** 前ニ同ジ **27.** $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]\left[\frac{i\sqrt{14}}{3},\frac{-i\sqrt{14}}{2}\right]\left[\frac{-i\sqrt{14}}{3},\frac{i\sqrt{14}}{2}\right]$ **28.** $\left[\frac{1}{2},3\right]\left[-\frac{1}{2},-3\right]\left[\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right]$ **29.** $[0,0]\left[\frac{a^2+b^2}{a},\frac{a^2+b^2}{b}\right]$ **30.** $[a+b,a+b]\left[\frac{b(a-b)}{a},\frac{a(b-a)}{b}\right]$ **31.** $[a+b+1,b]$ $\left[-\frac{a+b+1}{a+1},-\frac{b}{a+1}\right]$ **32.** $\left[6,\frac{8}{3},\frac{3}{2}\right]\left[-6,-\frac{8}{3},-\frac{3}{2}\right]$ **33.** $\left[\frac{8}{5},\frac{12}{5},1\right]\left[-\frac{8}{5},-\frac{12}{5},-1\right]$ **34.** $[1,4,2][-1,-4,-2]$ **35.** $[0,1,2]\,[0,-1,-2]$

第二十九問題集

1. 11, 7 **2.** 8, 16 **3.** 10, 15 **4.** 18, 8 或ハ 6, 16 **5.** 5, 3 **6.** 4, 2 **7.** 2, 2 **8.** 4, 6 **9.** 7, 4 **10.** 12, 8 **11.** 24 間, 125 間 **12.** 長サ 32 尺, 幅 24 尺, 高サ 10 尺 **13.** 甲種 30 碼, 乙種 40 碼 **14.** 距離 60 哩, 速度一時間毎ニ 10 哩 **15.** 6.4 或ハ 4.6 **16.** 3 時間 **17.** 160 反, 2 圓 **18.** 24 日, 甲 80 錢, 乙 60 錢 **19.** 距離 315 哩, 速度一時間毎ニ 35 哩 **20.** A 50 哩, B 30 哩 **21.** 距離 756 哩, 速度一時間毎ニ 36 哩及 27 哩 **22.** 一時間毎ニ馬車ハ $4\frac{1}{2}$ 里, 船モ $4\frac{1}{2}$ 里 **23.** 一時間毎ニ甲ハ 10 哩, 乙ハ 12 哩 **24.** 5 里 **25.** 6 里

第三十問題集

1. 324 **2.** 55.5 **3.** 6.42 **4.** 0.914 **5.** 1234 **6.** 5420

7. $4a+5b$ **8.** $6x^3+1$ **9.** $\dfrac{5a+2b}{5a+2c}$ **10.** $\dfrac{3x^2-4}{2x-3}$ **11.** x^2+x+1

12. x^2-2x-2 **13.** $2x^4-x^2-2$ **14.** $x^2-ax+2a^2$ **15.** $x^2-2xy+3y^2$

16. $x^3-6x^2+12x-8$ **17.** $x^3+2ax^2-2a^2x-a^3$ **18.** $x^4-x^3+x^2-x+1$

19. 23 **20.** $x+1$ **21.** $2x-3y$ **22.** $7=(2.645)^2+0.003975$

23. 1.4142 **24.** 3.74165 **25.** 5.91608

第三十一問題集

1. 604 **2.** 1111 **3.** 2755 **4.** 45045 **5.** 17479 **6.** $2x+3y$

7. $12x^2+4y^3$ **8.** $x-a-b$ **9.** x^2+x+1 **10.** $2x^2-3x+4$

11. x^2-ax-a^2 **12.** $2x^2+4x-3$ **13.** $1-3x+4x^2$

14. $7=(1.91)^3+0.032129$ **15.** $10=(2.154)^3+0.006051736$

16. 1.7099 **18.** 23 **19.** $2x+1$ **20.** $3x-1$

第三十二問題集

1. $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ **2.** $a-b$ **3.** $x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x-4$ **4.** x^4+1+x^{-4}

5. $a^{-1}-1$ **6.** $a^2-3a^{\frac{2}{3}}+3a^{-\frac{2}{3}}-a^{-2}$ **7.** $a^2+2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+ab-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}$

8. $x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y-xy^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{5}{2}}$ **9.** $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$ **10.** $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$

11. $16x^{-\frac{2}{3}}-12x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+9y^{-\frac{4}{3}}$ **12.** $x+y$ **13.** $a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}$

14. $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}$ **15.** $x^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{8}}+3ax^{\frac{1}{4}}+2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{8}}+a^2$

16. $x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$ **17.** $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ **18.** $x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}}$ **19.** $x-2-x^{-1}$

20. $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$ **21.** $2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}}$ **22.** $2a^{-1}x-3+4ax^{-1}$

23. $\dfrac{8}{1-x^2}$

第三十三問題集

1. 2 **2.** $12+5\sqrt{15}$ **3.** $8\sqrt{3}-4\sqrt{6}$ **4.** $2\sqrt[3]{18}-3\sqrt[3]{12}$

5. $6\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{36}$ **6.** $\dfrac{17\sqrt{15}}{10}$ **7.** $\dfrac{5\sqrt[3]{2}}{2}$ **8.** $2+\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

9. $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ **10.** 24 **11.** $4+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

12. $5+2\sqrt{6}$ **13.** $\dfrac{24-\sqrt{15}}{33}$ **14.** $\dfrac{1}{7}\{18+9\sqrt{6}+4\sqrt{15}+6\sqrt{10}\}$

15. $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ **16.** $21+9\sqrt{5}$ **17.** $\dfrac{a-\sqrt{a}}{a-1}$ **18.** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$

19. $\dfrac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$ **20.** $\dfrac{25+x+10\sqrt{x}}{25-x}$ **21.** $\dfrac{15-6x+\sqrt{x}}{25-9x}$

22. $\dfrac{ac-bdx-(ad-bc)\sqrt{x}}{c^2-d^2x}$ **23.** $3+\sqrt{5}$ **24.** $3-\sqrt{7}$

25. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ **26.** $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$ **27.** $\sqrt{7}+\sqrt{8}$ **28.** $\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$

29. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **30.** $2+\sqrt{3}$ **31.** $\sqrt{3}$ **32.** $\sqrt{10}$ **33.** 14

34. $\dfrac{29}{2}$ **35.** $\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **36.** $\dfrac{4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{2}$

第三十四問題集

1. 15050 **2.** $139\frac{1}{2}$ **3.** $37\frac{1}{2}$ **4.** -115 **5.** $\dfrac{n-1}{2}$ **6.** $\dfrac{n^3+3n^2}{2}$

7. $n(a+b)^2-n(n-1)ab$ **8.** 通差 $\frac{1}{3}$, 通差 $\frac{2}{3}$ **9.** 10或ハ4 **10.** 82

11. 5, 9, 13, 17 **12.** 1, 2, 3, 4, 5 **13.** 18 或ハ 19 **14.** 5 時間

第三十五問題集

1. $41\frac{374}{625}$ **2.** $63(\sqrt{2}+1)$ **3.** $\dfrac{2}{3}$ **4.** $4\frac{1}{2}$ **5.** 通比 ±4

6. 8, 12, 18, 27 **7.** $-9, 27, -81, 243$ **8.** 3, 12, 48或ハ36, -54, 81

9. 1, 3, 9,…或ハ −2, 6, −18,… **10.** 3, 6, 12 **11.** $-\frac{1}{3}$ **12.** 3.414

17. 2, 4, 6, 9 或ハ 2, $\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{2}$, 9 **18.** $\frac{a}{i}\left\{(1+i)^n-1\right\}$

19. $\frac{a}{i}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$ **20.** $(1+i)^n\left(b+\frac{a}{i}\right)-\frac{a}{i}$

21. $\frac{a}{i(1+i)^m}\left\{1-\frac{1}{(1+i)^n}\right\}$

第三十六問題集

1. イロハノ方ガ大ナリ **2.** 25 **3.** 325 **4.** 11 **5.** 15504, 3876 **6.** 7!×6 即 30240

第三十七問題集

1. $a^{11}-11a^{10}x+55a^9x^2-\ldots\ldots-55a^2x^9+11ax^{10}-x^{11}$ **2.** $243-810x^2+1080x^4-720x^6+240x^8-32x^{10}$ **3.** $1-14y+84y^2-280y^3+560y^4-672y^5+448y^6-128y^7$ **4.** $x^n+6nx^{n-1}y+18n(n-1)x^{n-2}y^2+36n(n-1)(n-2)x^{n-3}y^3+\ldots\ldots\ldots\ldots$ **5.** $1+4x+2x^2-8x^3-5x^4+8x^5+2x^6-4x^7+x^8$ **6.** $1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$ **7.** $1-8x+28x^2-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$ **8.** 126 **9.** 5922 **10.** 1590 **11.** $x=2$, $y=3$, $n=5$ **12.** $x=4$, $y=\frac{1}{2}$, $n=8$ **13.** 96059601 **14.** 70

第三十八問題集

1. 13152圓 **2.** 13932圓 **3.** 401.79圓 **4.** 0.0398丸ムレバ0.04 **5.** 50年 **6.** 11.53圓 **7.** 33386圓 **8.** 842.17圓 **9.** 21.66圓 **10.** 1618.6圓 **11.** 1551.3圓 **12.** 1490.4圓

術語ノ英譯*

第一編　緒論

代數學 Algebra　一般ナル數 Allgemeine Zahl (獨)　格段ナル數 Besondere Zahl (獨)　法則 Rule　公式 Formula　式 Expression　符號 Sign　冪 Power　根號 Radical sign　演算 Operation　等式 Egalité (佛)　不等式 Inequality　代數式 Algebraical expression　無理式 Irrational expression　有理式 Rational expression　整式 Integral expression　分數式 Fractional expression　單項 Monomial　多項 Multinomial　二項 Binomial　三項 Trinomial　項 Term　係數 Coefficient　指數 Exponent　數係數 Numerical coefficient　値 Value　數値 Numerical value

第二編　整數ノ加減乘除

整數 Integer　分數 Fraction　寄セ算 Addition　引キ算 Subtraction　被加數 Summand (獨)　和 Sum　被減數 Minuend　減數 Subtrahend　差 Difference　括弧 Bracket　掛ケ算 Multiplication　被乘數 Multiplicand　乘數 Multiplier　積 Product　因數 Factor　割リ算 Division　被除數 Dividend　除數 Divisor　商 Quotient

---

* 簡單ニシテ恰好ナル英譯ナキモノニハ佛譯又ハ獨譯ヲ附セリ，又英佛獨譯ナキモノハ無譯ノママ揭ゲアリ

第三編　一次方程式

邊 Side　移項スル Transpose　恒等式 Identity　方程式 Equation　未知 Unknown　既知 Known　滿足スル Satisfy　根 Root　解ク Solve　次數 Degree

第四編　負數及分數

負 Negative　正 Positive　性質ノ符號 Sign of affection　絕對値 Absolute value　代數的 Algebraical

第五編　代數四則

同類 Like　約ス Reduce　指數ノ定則 Index law　降冪 Descending powers　昇冪 Ascending powers　排列スル Arrange　同次 Homogeneous　分母 Denominator　分子 Numerator

第七編　聯立一次方程式

聯立 Simultaneous　置換 Substitution　置キ換ヘル Substitute

第九編　最大公約數及最小公倍數

公約數 Common divisor　最大公約數 Greatest common divisor　公倍數 Common multiple　最小公倍數 Least common multiple

第十編　分數式

既約(　)　通分(　)　複雜 Complex

第十二編　二次方程式

二次方程式 Quadratic equation　平方根 Square root　無理數 Irrational number　有理數 Rational number　不盡根數 Incommensurable root　近似値 Approximate value　虛數 Imaginary number　實數 Real number　複素數 Complex number　關係 Relation　平方ヲ完全ニスルコ Completing the square　完全ナル平方 Perfect square　極大 Maximum　極小 Minimum

第十四編第十五編第十七編第十九編

無緣根(　)　三次方程式 Cubic equation　立方根 Cube root　開平(　)　開立(　)　根指數 Indice du radical (佛)　同類 Similar　有理化スル Rationalise

第二十編　比及比例

比 Ratio　比例 Proportion　前項 Antecedent　後項 Consequent　外項 Extremes　內項 Means　比例中數 Mean proportional　連比例 Continued proportion　不盡 Incommensurable

第二十一編　級數

級數 Progression 或ハ Series　等差級數 Arithmetical Progression　平均 Mean 或ハ Arithmetical mean　調和級數 Harmonical progression　等比級數 Geometrical progression　無限級數 Infinite series　循環小數 Recurring decimal

第二十二編　順列及組合

順列 Permutation　組合（クミアハセ） Combination　數學的歸納法 Mathematical induction　階乘 Factorial

第二十三編　二項定理

二項定理 Binomial theorem　展開スル Expand　展開 Expansion　一般項 General term

第二十四編　對數及年金算

對數 Logarithm　常用 Common　底數 Base　假數 Mantissa　指標 Characteristic　年金算（　）　利息 Interest　利息ノ歩合 Rate of interest　元利合計 Amount　現價 Present value　年金 Annuity　生命年金 Life annuity　確實年金 Annuity certain　年金額（　）　永續年金 Perpetuity　据置 Deferred　定期年金（　）

發賣所
同支社　大阪市東區北久太郎町四丁目十七番屋敷
大日本圖書株式會社　東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地

發行兼印刷者　大日本圖書株式會社　東京市京橋區銀座壹丁目廿二番地
編纂者　藤澤利喜太郎　東京市小石川區諏訪町廿六番地

明治三十一年九月三十日發行
明治三十一年九月廿七日印刷

初等代數學教科書　上卷　下卷　各　定價金六拾五錢

理科大學教授　理學博士

藤澤利喜太郎先生

著　述

以上二種は中學校、師範學校其他諸學校に於ける教師の參考書なり

●數學教授法講義筆記　全一冊　近刊

●算術條目及教授法　全一冊　郵稅六　定價金六拾五錢

以上四種は中學校、師範學校、高等女學校其他之れと同程度なる諸學校に於ける教科用書なり

●續初等代數學教科書　全一冊　郵稅八　定價金七拾五錢

●初等代數學教科書　文部省檢定濟　全二冊　郵稅每冊六　定價上下各冊金六拾五錢

●算術教科書　文部省檢定濟　全二冊　郵稅每冊八　定價上下各冊金七拾五錢

●算術小教科書　文部省檢定濟　全二冊　郵稅每冊六　定價上下各冊金五拾五錢

大日本圖書株式會社

大日本圖書株式會社出版圖書特約販賣所

●清國上海、ランプス
津野、松村、河野、●佐賀縣、河内、●鹿兒島縣、吉田、●沖繩縣、豐見城、有馬、仲井、●臺北縣、三省堂、
積善館、森岡、●熊本縣　長崎、●長崎縣、鶴野、小野、安中、●大分縣、甲斐、守田、●宮崎縣、松井、秋澤、
土肥、●高知縣、澤本、片桐、●廣島縣、鈴木、●岡山縣、武内、●島根縣、川岡、園山、大薗、●福岡縣、菊竹、
●和歌山縣、平井、宮井、●岐阜縣、成美堂、郁文堂　●香川縣、宮脇、箸方、●德島縣、坂井、●愛媛縣、向井、
●福井縣、大北、品川、西村、●石川縣、近田、宇都宮、●兵庫縣、熊谷、中井、福浦、石田、●奈良縣、卸賣社、
川南、池田、魁文舍、山本、最上谷、山崎、●新潟縣、村上、覺張、目黑、西村、室、中山、●富山縣、中田、
西田、●秋田縣、土屋、成見、東海林、大澤、●青森縣、鎌田、伊藤、浦山、今泉、●北海道、小鹽、萱間、白鳥、
●岩手縣、佐藤、高橋、●山形縣、牧野、八文字屋、素月、地主、日向、伊藤、鈴木、白崎、西谷、山本、富樫、
水村、田沼、●千葉縣、多田屋、朝野、堤、吉田、平野、中村、高寺、●宮城縣、高藤、伊勢、●福島縣、田中、
文弘堂、廣文堂、新井、●群馬縣、煥乎堂、文心堂、高橋、文江堂、木田、塚田、中村、●埼玉縣、長島、水野、
岩田、安屋、●長野縣、西澤、朝陽館、水學堂、柏原、丸山、南川、小林、奥村、皆川、今村、日新堂、
菅沼、齋藤、鈴木、●山梨縣、五明堂、柳正堂、清水、●愛知縣、川瀨　片野、●三重縣、柴田、關西圖書會社、
田中、北村、●京都府、村上、藤井、松田、●神奈川縣、田沼、丸屋、弘集堂、●靜岡縣、川上、廣瀨、杉本、
前川、岡島、寶文館、丸善支店、吉岡、金川　岡本、花井、金尾、中井、小谷、中村、中川、吉東、松村、此村、
播磨屋、芳流堂、目黑、共益商社、東海堂、北隆館、松村、宍山、二見、●大阪府、三木、梅原、柳原、石井、鹿田、
●東京府、丸善、集英堂、嵩山房、水野、林、鶴喜、内田、大倉、長島、石川、青野、中央堂、中西屋、東京堂、

理科大學教授　理學博士

菊池大麓先生

著述

以上幾何學講義は中等教育に於ける教師の參考書に資し近世平面幾何は高等幾何學を修めんとするの階梯に供するものなり

◉近世平面幾何學　全一冊　郵税六錢　定價金七拾錢

◉幾何學講義　全三冊　第二卷以下近刊　第一卷定價金七拾五錢　郵税六錢

以上四種は中學校、師範學校、高等女學校其他之れと同程度なる諸學校に於ける教科用書なり

◉初等平面三角法教科書　文部省檢定濟　全一冊　郵税八錢　定價金七拾五錢

◉英文幾何學　全三冊　平面部(第一卷第二卷)立體部(第三卷)各卷定價四拾錢郵税四錢宛

◉初等幾何學教科書　文部省認可　全二冊　立体部定價金六拾錢　郵税六錢　平面部定價金八拾五錢　郵税八錢

◉幾何學小教科書　文部省檢定濟　全二冊　立體部近刊　平面部定價金八拾錢　郵税八錢

大日本圖書株式會社