初等
幾何學
敎科書

平面幾何學

全

第十版

マストル オヴ アーツ，理學博士，理科大學敎授

菊池大麓 編纂

明治三十一年

大日本圖書株式會社

凡　例

本書 ハ 尋常師範學校 及 尋常中學校 ノ 敎科書 ニ 用ヰルヿ ヲ 目的 トシテ 編纂シタル モノ ナリ. 故ニ 單ニ 初等 幾何學 ノ 大綱 ヲ 述フル ニ 止マリテ, 此レガ 說明 ヲ 加ヘズ, 而シテ 之 ヲ 敷衍シ 或ハ 其ノ 例 ヲ 揭ケ 又ハ 其ノ 實地 應用 ヲ 示シ, 以テ 詳細ノ 說明 ヲ 爲スハ 擧ケテ 之 ヲ 敎師 ニ 委ヌ. 但シ 余 ハ 追テ 本書 ノ 隨伴 トシテ 幾何學 講義 ヲ 編著シテ 之 ヲ 世 ニ 公ニセン ト 欲ス; 是レ 一 ハ 余 ノ 本書 ヲ 編纂シタル 趣旨 ヲ 明ニシ, 一 ハ 獨修者 ノ 便利 ヲ 謀ル ニ 由ル ト 雖, 又 且 敎員 諸君 ノ 參考書 ト ナランヿ ヲ 期望セズンハ アラズ.

本書 ハ 主 トシテ 英國 幾何學 敎授法 改良 協會 ノ 編纂シタル 幾何學書 ニ 據ル モノ ナリ. 該 協會 ハ 一千八百七十一 年 (明治 四 年) ニ 設立シ, 英國 ノ 重ナル 數學 敎員 ハ 皆 其ノ 會員 タリ, 而シテ 該 協會 ニ 於テ 數年間 討議 ヲ 究メ 且 重要ナル 大學校 ヘ 問合セ, 充分 熟議 ノ

上先ツ平面幾何學敎授條目(余ノ先年飜譯シタルモノ)ヲ世ニ公ニシ,尋テ幾何學書ヲ編纂シテ之ヲ印行セリ;是頗ル善良ノ書ト云フ可シト雖,然レ𪜈幾分カ是マデノ慣習ニ束縛セラルヽ所アリテ充分ノ改正ヲ爲ス能ハザリシヿハ其ノ報告書ニ依リテ明ナリ.故ニ余ハ今主トシテ之ニ據ルト雖,尙且他ノ英,佛,獨ノ幾何學書ニ參酌スル所アリ,以テ本書ヲ編成シタルヲ以テ該書ト異ナル所少カラズ;其ノ異同ノ點及其ノ理由ハ他日講義中ニ述フルヿアル可シ.

本書ノ文躰ハ成ルベク其儘之ヲ口述シ得ヘカランヿヲ力メタリ.敎科書ノ文躰直ニ之ヲ口述スヘカラザルモノナル𪜈ハ,授業ノ際,生徒ハ之ヲ更ニ普通ノ言語ニ直シテ述ヘザル可カラズ,而シテ幾何學ニ於テハ論理ノ順序甚タ精密ニシテ,定義,公理,定理,等ヲ述フルニ一言,一句ノ差ノ爲ニ大ナル誤謬ヲ生スルヿアリ:故ニ西洋ニ於テモ幾何學授業ノ際生徒ニ之ヲ述ヘシムル時ニ在リテハ勉メテ敎科書ノ文ニ據ラシムルヲ以テ常トス(但シ圖形ノ文字ヲ變ヘ,或ハ特別ノ塲合ニ就テ之ヲ口述セシメ,又ハ說明ヲ加フル等ノ如キハ此限ニアラズ).是本書ノ文躰,文章上ヨリ論スレハ迂回冗長ニシテ而モ妥當ヲ缺クノ點アルニ拘ハラズ,本文ノ儘之ヲ口述シ得ヘカランヿヲ主トシタル所以ナリ.然レ𪜈漫然文字ヲ誦讀シテ精神ヲ繹子ズ,徒爾原文ヲ口述シテ意義ヲ解セザルガ如キ弊害ナカラシメンヿヲ要ス.

本書ノ躰裁ニ就テ一言セズンハアラザルモノアリ;蓋シ橫書ノ數學書ニ便利ナルハ多數ノ數學者ノ認ムル所ニシテ,或ハ私ニ之ヲ爲シ居ルモノアリ;然レ𪜈其ノ在來ノ慣習ニ戾ルヲ慮ルニ由ルモノカ,印行書ニ於テ未タ此方法ヲ用井タルモノアルヲ見ズ;今本書ニ於テハ文部大臣ノ認可ヲ得テ,斷然橫書スルヿトセリ.讀者最初ハ或ハ見テ以テ奇トナスモノモ有ルヘシト雖,慣讀スルニ於テハ果シテ其ノ便利ヲ知ルニ至ラン.圖形ノ記號ニ羅馬字ヲ用井タルハ日本字ニテハ本文ト混雜スルノ顧慮アリ;而シテ幾何學ヲ修ムル程度ノ生徒ハ已ニ羅馬字ヲ熟知スヘケレハ固ヨリ之ヲ用井テ差支ナキヲ信スレハナリ.又言語ヲ一辭ヅヽ分チタルヿ,西洋ノ句切リ符號ヲ用井タルヿ等モ便宜ノ爲ニシテ本書ヲ熟讀スルモノハ自カラ之ヲ了スヘシ;但シ言語ノ分チ方,符號ノ用井方ノ如キ畢竟創始ヲ試ルモノナレハ,穩當ナラザルモノモ多カル可ク;尙其他ニモ不完全ノ點少カラザル可シ;

讀者冀クハ幸ニ之ヲ指示シ以テ編者ヲシテ本書ヲ改良スルヿヲ得セシメンヿヲ.

余ハ茲ニ特ニ余ノ曩時ノ弟子,現今ノ親友,澤田吾一君ニ向テ謝セザル可カラザルモノアリ:氏ハ編纂中每々有益ナル助言ヲ與ヘラレタルノミナラズ,印刷中モ校正ノ勞ヲ取リ,又問題ニ就テ一々之ヲ試ミラレタリ:氏ノ本書ノ爲ニ盡力サレタル所決シテ尠少ナラザレハナリ.

明治廿一年,九月.　　　　編者識.

本書逐次版ヲ重ネ,每版多少ノ修正ヲ加ヘタリシガ,今般更ニ大ニ訂正シテ,第十版ヲ出版スルヿトナレリ;今其ノ訂正ノ主ナルモノヲ掲クレハ從前ノ第二編定理11ヲ定理6トシテ第三節ノ首ニ出シタルヿト問題ノ凡ソ四分ヲ本文中ヨリ省キ雜問題トシテ卷末附錄ノ前ニ置キタルヿトノ二ツナリ.

余ハ本書ノ隨伴トシテ講義ヲ編著センヿヲ約シ置キタルガ,本年四月ニ至リ僅ニ其ノ第一卷ヲ公ニスルヿヲ得タリ;尙成ル可ク速ニ之ヲ完成シテ本書編纂及訂正ノ趣旨ヲ明ニセンヿヲ期ス.

茲ニ今日マテ本書ニ付キ種々有益ナル注意ヲ與ヘラレタル諸君ニ謝シ,併セテ將來ニ於テモ尙忠告ニ吝ナラザランヿヲ本書ヲ用ヰラルヽ敎員,其他ノ諸君ニ向テ希望ス.

明治三十年,十二月.　　　　編者識.

目 錄.

平面幾何學.

緒論

幾何學 ハ 物ノ 形チ, 大サ 及 位置 ニ 關スル 眞理 ヲ 研究スル 學科 ナリ. 總テノ 物體 ハ 宇宙 間 幾許ノ 場所 ヲ 充タス: 物體 ヲ 組織スル 物質, 及 物質 ニ 屬スル 性質 ニ 關ハラズ, 唯 其ノ 形チ, 大サ 及 位置 ニ 付テ 考フル トキハ, 之 ヲ 立體 ト 名ク. 立體 ノ 境界 ハ 表面 ナリ; 表面 ノ 境界 ハ 線 ナリ; 線 ノ 境界 ハ 點 ナリ.

幾何學 ニ 於テハ, 立體, 表面, 及 表面 ノ 上ニ 畫キタル 圖形 ノ 性質 ヲ 講究ス. 表面 ノ 最單ナル モノ ヲ 平面 トス: 平面幾何學 ニ 於テハ 一ツノ 平面 上ニ 畫キタル 圖形 ヲ 論ス, 而シテ 初等 平面幾何學 ニ 於テハ 點, 直線 及 圓 ヨリ 成ル 圖形 ニ 限リ 之 ヲ 論ス. 立體, 表面, 及 表面 (一般ニ) ノ 上ニ 畫キタル 圖形 ヲ 論スル モノ ヲ 立體幾何學 ト 云フ.

幾何學 ニ 於テ, 吾々 ハ 吾々ノ 經驗 ニ 由リテ 眞ナリ ト 認メタル 若干ノ 事項 ヲ 基礎 トシ 夫 ヨリ 唯 推理 ニ

據リテ以テ他ノ眞理ヲ得ルナリ. 故ニ此學科ハ唯其ノ論スル事項ノ緊要ナルノミナラズ, 又推理法ノ最良キ練習トナル.

然レハ幾何學ヲ修ムルニ少シク論理學ノ言語及關係ヲ知ルコ甚タ便利ナリトス.

命題トハ一ツノ事項ノ陳述ナリ;「甲ハ乙ナリ」ト云フハ一ツノ命題ナリ.

一ツノ語ノ**定義**トハ其ノ意義ヲ定ムルナリ;其語ハ何ヲ指シ,何ヲ表ハスモノナルカヲ陳フルナリ.

推理ノ基礎トスル所ノ事項ヲ**公理**ト稱ス. 公理ハ之ヲ他ニ依リテ説明スル能ハズシテ,吾々ガ吾々ノ經驗ニ據リテ眞ナリト認ムルモノナリ. 公理ヲ別チテ普通公理及幾何學公理トス: 普通公理ハ各種ノ量ニ關スルモノ,幾何學公理ハ特ニ幾何學ノ論スル所ニ關スルモノナリ. 幾何學ニ於テ用ヰル所ノ重ナル普通公理ヲ下ニ掲ク:

公理 甲. 全量ハ其ノ部分ヨリ大ナリ.

公理 乙. 全量ハ其ノ總テノ部分ノ和ニ等シ.

公理 丙. 同シ量ニ等シキ量ハ相等シ.

公理 丁. 相等シキ量ニ相等シキ量ヲ加フレハ,其ノ和ハ相等シ.

公理 戊. 相等シキ量ヨリ相等シキ量ヲ減スレハ,其ノ殘リハ相等シ.

公理 己. 相等シカラザル量ニ相等シキ量ヲ加フレハ,其ノ和ハ相等シカラズ;其ノ大ナル方ヘ加ヘタル和ガ他ヨリ大ナリ.

公理 庚. 相等シカラザル量ヨリ相等シキ量ヲ減スレハ,其ノ殘リハ相等シカラズ;其ノ大ナル方ヨリ減シタル殘リガ他ヨリ大ナリ.

公理 辛. 相等シキ量ノ同シ倍數ノ量ハ相等シ.

公理 壬. 相等シキ量ノ同シ分數ノ量ハ相等シ.

定理トハ已ニ眞ナリト知ル所ノ命題ニ依リテ證明スル所ノ命題ナリ. 其已知ノ命題ハ或ハ公理或ハ已ニ證明シタル定理ナリ.

定理ハ二ツノ部分ヨリ成ル: 第一, **假設**, 即假ニ

然ナリトスル所ノ事; 第二, **終結**, 即假設ヨリ起リ來ル可シト主張スル所ノ事.

定理ノ模範ノ形ハ下ノ如シ:

若シ甲ガ乙ナレハ, 丙ハ丁ナリ. (壹)

「甲ガ乙ナリ」ハ假設ニシテ,「丙ハ丁ナリ」ハ終結ナリ; 若シ假ニ甲ガ乙ナリトセハ, 丙ハ丁ナル可シト云フ意ナリ.

此定理ガ眞ナレハ, 下ノ定理モ亦眞ナラザルヲ得ズ:

若シ丙ガ丁ナラザレハ, 甲ハ乙ナラズ (貳)

(壹) (貳) ノ如キ二ツノ定理ヲ各他ノ**對偶**ト稱ス.

二ツノ定理有リテ, 其ノ假設ガ各他ノ終結ナル時ハ, 各ノ定理ヲ他ノ**逆**ト稱ス. 例ヘハ,

若シ丙ガ丁ナレハ, 甲ハ乙ナリ (參)

ト (壹) トハ互ニ逆ナリ.

(參) ノ對偶ハ

若シ甲ガ乙ナラザレハ, 丙ハ丁ナラズ (肆)

ニシテ, 之ヲ (壹) ノ**裏**ト稱ス. 即裏トハ元ノ定理ノ逆ノ對偶ナリ. (貳) ノ逆ハ (肆) ニシテ, 其ノ裏ハ (參) ナリ.

定理ノ假設ハ時トシテハ複雜ニシテ數多ノ假設ヲ合セタルモノナルコ有リ; 然ルトキハ終結ト假設ノ一ツヲ交換シタル各ノ定理ヲ元ノ定理ノ逆ト云フ.

一ツノ定理ハ眞ナルモ, 其ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ; 其ノ眞ナリヤ否ヤハ別ニ之ヲ討究セザル可カラズ.

故ニ四ツノ相聯屬セル定理 (壹) (貳) (參) (肆) ノ中, 二ツハ眞否獨立ニシテ他ノ二ツハ前者眞ナレハ必ズ眞ナラザルヲ得ズ; 然レハ四ツノ定理中二ツヲ幾何學的ニ證明スレハ足レリ; 但シ其二ツハ互ニ對偶ノ定理ナラザルヲ要ス

各眞ナリト證明シタル定理ノ一群有リテ; 其ノ假設ハ或ル事ニ付テ起リ得可キ總テノ場合ヲ盡シ, 其ノ一ツハ必ズ眞ナラザルヲ得ズ; 又其ノ終結ハ互ニ相容レザルモノナリ: 然ルトキハ此群ノ各ノ定理ノ逆定理モ亦皆眞ナリ. 斯ノ如ク一群ノ定理ノ眞ナルヨリ其ノ逆ノ眞ナルヲ推定スルヲ**轉換法**ト稱ス.

最簡單ナル例ハ一ツノ定理及其ノ裏定理ノ眞ナルヲ證明シタル時ナリ. 二ツノ定理ノ假設「甲ガ乙ナリ」「甲ガ乙ナラズ」ハ總テノ場合ヲ盡セリ; 終結「丙ハ丁ナリ」,「丙ハ丁ナラズ」ハ互ニ相容レズ: 而シテ各ノ定理ノ逆ハ眞ナリ. 又幾何學ニ於テ屢起ル所ノ一例ハ下ノ如シ:

若シ甲ガ乙ヨリ大ナレハ, 丙ハ丁ヨリ大ナリ;
若シ甲ガ乙ニ等シクレハ, 丙ハ丁ニ等シ;
若シ甲ガ乙ヨリ小ナレハ, 丙ハ丁ヨリ小ナリ;

斯ノ如キ三ツノ定理ヲ幾何學的ニ證明シタルトキハ, 各ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ.

若シ唯一ツノ甲有リ又唯一ツノ乙有リ, 而シテ「甲ハ乙ナリ」ト云フ定理ヲ證明シタルトキハ直ニ「乙ハ甲ナリ」ヲ推定スルヲ得. 之ヲ**同一法**ト稱ス.

系トハ定理ヨリ直ニ推定シ得可キ命題ナリ.

作圖題トハ要スル所ノ圖ヲ作ル幾何學的ノ方法ヲ求ムル命題ナリ.

第壹編.

直線.

定義 1. **點**ハ位置有リテ, 大サ無キモノナリ.

定義 2. **線**ハ位置有リ, 又長サ有リ, 然レドモ幅モ, 厚サモ無キモノナリ. 線ノ端ハ點ナリ, 又二ツノ線ノ交リハ點ナリ.

定義 3. **表面**ハ位置有リ, 又長サ及幅有リ, 然レドモ厚サ無キモノナリ. 表面ノ界, 及二ツノ表面ノ交リハ線ナリ.

定義 4. **立體**ハ位置有リ, 又長サ, 幅及厚サ有ルモノナリ. 立體ノ界ハ表面ナリ.

定義 5. **直線**トハ其ノ中ノ何レノ一部分ヲ取リ, 之ヲ他ノ何レノ一部分ノ上ニ何樣ニ置クモ, 其ノ二點ガ此ノ上ニ落レハ, 全ク相重リ合フ線ナリ.

直線ハ双方ヘ窮リ無キモノトス; 其ノ一部分ヲ考フルトキハ之ヲ**有限直線**ト云フ. 有限直線ヲ其ノ端ヨリ外ニ引キ延シタル部分ヲ其ノ**延長**ト云フ.

定義 6. 平面トハ其ノ上ニ何レノ二ッノ點ヲ取ルモ,之ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ全ク其表面上ニ在ルモノナリ.

定義 7. 立體,表面,線及點,或ハ其等ノ任意ノ集合ヲ圖形ト稱ス. 其ノ平面上ニ在ルモノヲ平面圖形ト稱ス.

幾何學公理.

公理 1. 圖形ハ其ノ大サ及形テヲ變スルヿ無ク其ノ位置ヲ變スルヲ得.

公理 2. 全ク相合セシムル(重リ合ハス)ヲ得ルモノノ大サハ相等シ.

公理 3. 二ッノ點ヲ過リ一ッノ直線ヲ引クヲ得而シテ唯一ッノ直線ニ限ル.

此公理ヨリシテ直ニ下ノ二件ヲ斷定スルヲ得:

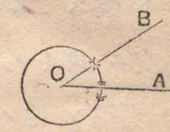
(イ) 一ッノ直線ヲ他ノ一ッノ直線ノ上ニ重テ,其ノ上ノ任意ノ點ヲ他ノ上ノ任意ノ點ノ上ニ落ル樣ニ爲スヿヲ得.

(ロ) 一ッノ點ニ於テ出會フ所ノ二ッノ直線ハ全ク相合スルニ非ザレハ,再ヒ出會フ能ハズ.

第一節.

一ッノ點ニ於テノ角.

定義 8. 同一ノ點ヨリ引クル二ッノ直線ハ平面角ヲ爲スト云フ,又平面角ヲ夾ムト云フ(通常平面角ヲ略シテ單ニ角ト云フ).



其點ヲ角ノ頂點,其直線ヲ其ノ邊ト稱ス. 圖ニ於テOハ頂點; OA, OBハ二邊ナリ.

此角ヲ命名スルニ其ノ頂點ノ文字Oヲ以テシ,之ヲ角Oト呼フ; 或ハ兩邊ノ文字ヲ加ヘテ角AOBト呼フ.

一ッノ角ノ頂點ヨリ引クル直線ガ最初一ッノ邊ト合スル位置(OAノ如シ)ニ在リテ,夫ヨリ頂點ヲ中心トシテ其平面上ニ於テ廻轉シ,他ノ邊ト合スル位置(OBノ如シ)ニ達スル時ハ,其直線ハ此角ダケ廻轉シタリト云フ; 角ノ大小ハ其廻轉ノ多少ニ同シ.

此直線ガ初メノ位置ヨリ後ノ位置マデ廻轉スル方法二ッ有ルヲ以テ(圖ニ於テ矢ヲ以テ示セル

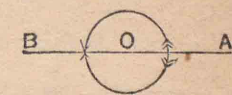
如ク), 一ツノ點ヨリ引クル二ツノ直線ハ必ズ二ツノ角ヲ爲ス. 斯ク頂點及二ツノ邊ガ共同ナル二ツノ角ヲ**共軛角**ト稱ス; 其ノ大ナル者ヲ**優角**, 小ナル者ヲ**劣角**ト云フ: 單ニ二ツノ直線ノ夾ム角ト云ヘハ, 劣角ヲ指スモノト知ル可シ. (優角, 劣角トハ優共軛角, 劣共軛角ノ略ナリ.)

定義 9. 三ツノ直線ヲ一ツノ點ヨリ引キ, 其ノ一ツヲ他ノ二ツノ中間ニ在リト見做ストキハ, 此中線ト各ノ外線ト爲ス二ツノ角ヲ互ニ**接角**ト云フ: 二ツノ外線ノ夾ム角(一ツノ直線ガ一ツノ外線ヨリ中線ヲ經過シテ廻轉シ他ノ外線ニ達スルマデノ角)ハ二ツノ接角ノ**和**ナリ.

圖ニ於テ角 AOB ト角 BOC ハ互ニ接角ニシテ, 角 AOC (矢ヲ以テ示ス) ハ其ノ和ナリ.

定義 10. 平角トハ其ノ二ツノ邊ガ頂點ノ兩

側ニ同一ノ直線上ニ在ルモノナリ.

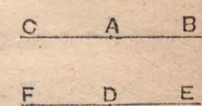


二ツノ共軛角ガ相等シケレハ各平角ナリ.

定理 1. 總テノ平角ハ互ニ相等シ.

AB, AC ヲ一ツノ平角ノ邊, A ヲ其ノ頂點トセヨ, 又 DE, DF ヲ他ノ一ツノ平角ノ邊, D ヲ其ノ頂點トセヨ:

然ルトキハ AB, AC ノ夾ム平角ハ DE, DF ノ夾ム平角ニ等シカル可シ.



AB, AC ノ夾ム角ハ平角ナルヲ以テ, AB ト AC ハ一直線ヲ爲ス; 定義 10.

DE ト DF モ亦然リ;

然レハ直線 BAC ヲ取リテ EDF ノ上ニ重ネ, A 點ヲ D 點ノ上ニ重ナラシムルコトヲ得, 公理 3(イ).

而シテ B ト E ハ D ノ同シ側ニ, C ト F ハ D ノ同シ側ニ在ルカ, 或ハ C ト E ハ D ノ同シ側ニ, B ト F ハ D ノ同シ側ニ在ル;

何レニシテモ AB, AC ノ 夾ム 平角 ト DE, DF ノ 夾ム 平角 ト 全ク 相合ス;

故ニ 此 二ツノ 角 ハ 相等シ.

定義 11. 一ツノ 直線 ガ 他ノ 一ツノ 直線 ノ 上ニ 立チ, 之 ト 相等シキ 二ツノ 接角 ヲ 爲ス トキハ, 各ノ 角 ヲ 直角 ト 稱ス.

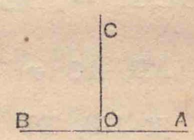


圖 ニ 於テ, 角 AOB ハ 平角 ナリ; 角 AOC ト 角 COB ト 相等シケレバ, 各 直角 ナリ.

系 1. 總テノ 直角 ハ 互 ニ 相等シ.

何トナレバ, 定義 11 ニ 依リテ 一ツノ 平角 ハ 二 直角 ニ 等シク, 各ノ 直角 ハ 平角 ノ 半分 ナルコト 明ナリ, 而シテ 相等シキ 量 ノ 半分 ハ 互ニ 相等シケレバ ナリ. 公理 壬

定義 12. 一ツノ 直線 ニ 垂線ナル 直線 トハ 之 ト 直角 ヲ 爲ス モノ ナリ. 其ノ 出會フ 所ノ 點 ヲ 垂線 ノ 足 ト 云フ.

圖 ニ 於テ, CO, AB ハ 互ニ 垂線ナリ; O ハ 垂線 CO ノ 足 ナリ.

定義 13. 銳角 トハ 一 直角 ヨリ 小ナル 角 ナリ.

定義 14. 鈍角 トハ 一 直角 ヨリ 大ニシテ, 二 直角 ヨリ 小ナル 角 ナリ.

定義 15. 二ツノ 角 ノ 和 ガ 一 直角 ニ 等シキ トキハ 各ノ 角 ヲ 他 ノ 餘角 ト 云フ.

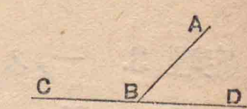
定義 16. 二ツノ 角 ノ 和 ガ 二 直角 ニ 等シキ トキハ, 各ノ 角 ヲ 他 ノ 補角 ト 云フ.

系 2. 與ヘラレタル 一ツノ 直線 上ノ 與ヘラレタル 一ツノ 點 ニ 於テ 其 直線 ニ 唯 一ツノ 垂線 ヲ 引クコト ヲ 得.

系 3. 相等シキ 角 ノ 餘角 ハ 互ニ 相等シ.

系 4. 相等シキ 角 ノ 補角 ハ 互ニ 相等シ.

定理 2. 一ツノ 直線 ガ 他ノ 一ツノ 直線 ノ 上ニ 立ツ トキハ, 其ノ 爲ス 所ノ 二ツノ 接角 ハ 合セテ 二 直角 ニ 等シ.



AB ヲ 直線 CD ノ 上ニ 立ツ 直線 トセヨ: 然ルトキハ 二ツノ 接角 ABC, ABD ハ 合セテ 二 直角 ニ 等シカル 可シ.

二ツノ 接角 ABC, ABD ノ 和 ハ BC ト BD ノ 夾ム 角 ナリ, 定義 9.

而シテ CBD ハ 一 直線 ナル ヲ 以テ, 此 角 ハ 平角 ナリ;

故ニ 二ツノ 角 ABC, ABD ハ 合セテ 一平角 ニ 等シ, 定義 10.

即 二 直角 ニ 等シ. 定義 11.

系. 一ツノ 點 ヨリ 直線 ヲ 幾ツ 引キ テモ 各ノ 直線 ト 其ノ 次ノ 直線 ト 爲ス 總テノ 角 ハ 合セテ 四 直角 ニ 等シ.

問題 1. 二ツノ 直線 ガ 相交リ, 其ノ 爲ス 所ノ 角 ノ 一ツ ガ 直角 ナレハ, 他ノ 三ツノ 角 モ 皆 直角 ナリ.

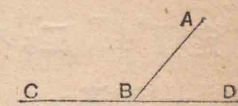
*問題 2. 一ツノ 直線 ガ 他ノ 一ツノ 直線 ト 爲ス 二ツノ 接角 ヲ 二等分スル 二ツノ 直線 ハ 互ニ 垂線ナリ.

問題 3. 書物 ノ 一ページ ノ 隅 ヲ 斜ニ 折リ返セハ, 其ノ 緣ノ 二ツノ 部分 (一ツノ 緣 ガ 二ツ ニ 折レタルモノ) ノ 爲ス 角 ヲ 二等分スル 直線 ハ 折リ目 ト 直角 ヲ 爲ス.

定理 3. 一ツノ 直線 ガ 二ツノ 他ノ 直線 ト 爲ス 所ノ 接角 ガ 合セテ 二 直角 ニ 等シケレハ, 二ツノ 直線 ハ 同一ノ 直線 上 ニ 在リ.

*星 ヲ 付ケタル 問題 ハ 重要ナリ; 後ノ 問題 ノ 解 ヲ 爲ス ニ 引用スルヿ 有リ.

直線 AB ガ 他ノ 二ツノ 直線 BC, BD ト 交リ 二ツノ 接角 ABC, ABD ヲ 爲シ, 此 二ツノ 角 ガ 合セテ 二 直角 ニ 等シ トセヨ:



然ルトキハ BC, BD ハ 一 直線 ノ 上ニ 在ル 可シ.

接角 ABC, ABD ノ 和 ハ BC, BD ノ 夾ム 角 ナリ; 定義 9.

而シテ 其ノ 和ハ 二 直角 ナリ; 假設.

故ニ BC, BD ノ 夾ム 角 ハ 二 直角 ニ 等シ; 公理 丙.

即 平角 ニ 等シ; 定義 11.

故ニ BC, BD ハ 一 直線 ノ 上ニ 在リ.

問題 4. 一ツノ 點 ニ 於テ 出會フ 所ノ 四ツノ 直線 ノ 爲ス 角 ガ 皆 各 直角 ナルトキハ, 四ツノ 直線 ハ 二 直線 ヲ 爲ス.

定義 17. 相交ル 二ツノ 直線 ノ 爲ス 所ノ 向ヒ合ヒノ 角 ヲ 對頂角 ト 稱ス.

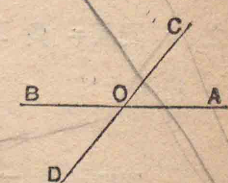
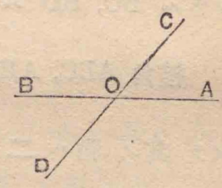


圖 ニ 於テ 二ツノ 直線 AB, CD ガ O 點 ニ 於テ 交ル; 角 AOC ト 角 BOD ハ 對頂角, 又 角 AOD ト

角 BOC モ 對頂角 ナリ.

定理 4. 二ッノ 直線 ガ 相交ル トキハ 對頂角 ハ 相等シ.



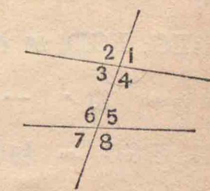
AB, CD ヲ O 點 ニ 於テ 交ル 二ッノ 直線 トセヨ: 然ルトキハ 角 AOC ハ 角 BOD ニ 等シク, 角 BOC ハ 角 AOD ニ 等シカル 可シ.

AO ハ CD ノ 上ニ 立ツ ヲ 以テ,
二ッノ 接角 AOC, AOD ハ 合セテ 二 直角 ニ 等シ, I, 2.
又 DO ハ AB ノ 上ニ 立ツ ヲ 以テ,
二ッノ 接角 AOD, BOD ハ 合セテ 二 直角 ニ 等シ; I, 2.
故ニ 二ッノ 角 AOC, AOD ハ 合セテ 二ッノ 角 AOD, BOD ニ 等シ; 公理 丙.
双方 ヨリ 角 AOD ヲ 引去レハ,
角 AOC ハ 角 BOD ニ 等シ: 公理 戊.
之ト 同様ニ 角 BOC ハ 角 AOD ニ 等シキコト ヲ 證明スル ヲ 得.

問題 5. 二ッノ 直線 OB, OD ハ 一ッノ 直線 AC ト

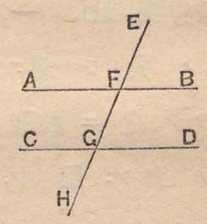
同一ノ 點 O ニ 於テ 出會ヒ, 其ノ 反對ノ 側 ニ 在リテ, 角 AOB ハ 角 COD ニ 等シ; 然ルトキハ BOD ハ 一 直線 ナリ.

定義 18. 一ッノ 直線 ガ 二ッノ 他ノ 直線 ト 交リ 八ッノ 角 ヲ 爲ス; 相互ノ 關係 ニ 由リテ 之 ニ 特別ノ 名 ヲ 命スルコト 下ノ 如シ: 圖 中, 角 1, 2, 7, 8 ヲ 各 外角 ト 名ク; 角 3, 4, 5, 6 ヲ 各 內角 ト 名ク; 4 ト 6 ト, 又 ハ 3 ト 5 ト ヲ 錯角 ト 云フ; 1 ト 5 ト, 2 ト 6 ト, 3 ト 7 ト, 又ハ 4 ト 8 ト ヲ 同位角 ト 云フ.



定理 5. 一ッノ 直線 ガ 二ノ 他ノ 直線 ト 交リ, 其ノ 爲ス 所ノ 一 双 ノ 錯角 ガ 相等シキカ, 若シクハ 一 双 ノ 同位角 ガ 相等シキカ, 若シクハ 一 双 ノ 同シ 側 ニ 在ル 內角 ガ 互ニ 補角 ナルトキハ, 各ノ 場合 ニ 於テ 二 双 ノ 錯角 ハ 各 相等シク, 四 双 ノ 同位角 ハ 各

相等シク, 二双ノ同シ側ニ在ル内角ハ各互ニ補角ナリ.



直線 EFGH ガ二ツノ直線 AB, CD ト交リ, 一双ノ錯角 AFG, FGD ガ相等シトセヨ: 然ルトキハ他ノ一双ノ錯角 BFG, FGC ハ相等シク; 四双ノ同位角 EFB ト FGD, GFB ト HGD, EFA ト FGC, 及 GFA ト HGC ハ各相等シク; 二双ノ同シ側ニ在ル内角 BFG ト FGD, 及 AFG ト FGC ハ各互ニ補角ナル可シ.

角 BFG ハ角 AFG ノ補角ナリ; I, 2.
角 FGC ハ角 FGD ノ補角ナリ; I, 2.
而シテ AFG ハ FGD ニ等シ; 假設.
故ニ角 BFG ハ角 FGC ニ等シ. I, 1, 系 4.

又角 EFB ハ對頂角 AFG ニ等シ, I, 4.
而シテ角 FGD ハ角 AFG ニ等シ, 假設.
故ニ角 EFB ハ角 FGD ニ等シ,. 公理丙.
其他總テノ同位角ニ付テモ同樣ニ證明スルヲ得.

次ニ, 角 BFG ハ角 AFG ノ補角ナリ, I, 2.
而シテ角 AFG ハ角 FGD ニ等シ; 假設.
故ニ角 BFG ハ角 FGD ノ補角ナリ:
他ノ一双ノ内角ニ付テモ同樣ニ證明スルヲ得.

以上一双ノ錯角ガ相等シキコトヲ假設トシタル場合ニ於テ證明シタレド, 其他ノ場合ニ於テモ同樣ニ證明スルヲ得.

第一節ノ問題

問題 6. 六ツノ直線ガ一ツノ點ニ於テ出會ヒ, 相等シキ六ツノ角ヲ爲ストキハ, 各ノ角ハ一直角ノ三分ノ二ナリ.

問題 7. 互ニ補角ナル二ツノ角ノ中, 小ナルモノガ大ナルモノノ半分ナルトキハ, 小ナル角ハ四直角ノ何分ナリヤ?

問題 8. 二ツノ對頂角ヲ二等分スル直線ハ同一直線上ニ在リ.

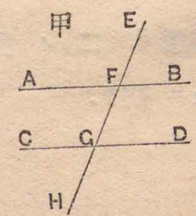
第二節.

平行直線.

定義 19. 平行直線トハ同一ノ平面上ニ在リテ双方ヘ何程延長スルモ相交ラザルモノナリ. 之ヲ略シテ單ニ平行線トモ云フ.

公理 4. 一ツノ點ヲ過リ一ツノ與ヘラレタル直線ニ平行ナル直線ハ一ツ有リ, 而シテ唯一ツニ限ル.

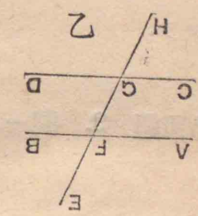
定理 6. 一ノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交リ, 其ノ爲ス所ノ錯角ガ相等シケレハ, 二ツノ直線ハ平行ナリ.



直線 EFGH ガ二ツノ直線 AB, CD ト交リ, 相等シキ錯角 AFG, FGD ヲ爲ストセヨ:

然ルトキハ AB ハ CD ニ平行ナル可シ.

今圖ヲグルリト廻轉シ, 乙ノ如キ位置ニ至ラシメヨ:



而シテ乙圖ヲ甲圖ノ上ニ重ネ, 乙ノ HGFE ハ甲ノ EFGH ノ上ニ重ナリ乙ノ G 點ハ甲ノ F 點ノ上ニ重ナル樣ニ置ク;

然レハ乙ノ F 點ハ甲ノ G 點ノ上ニ重ナル:

角 FGD ハ角 GFA ニ等シキヲ以テ, 假設.

乙ノ直線 GD ハ甲ノ直線 FA ノ上ニ重ナル;

又同シ理ニ由リテ,

乙ノ直線 FA ハ甲ノ直線 GD ノ上ニ重ナル:

斯ク乙ノ DC, BA ハ夫々全ク甲ノ AB, CD ト合スルヲ以テ,

若シ AB, CD ヲ B, D ノ方ヘ延長シテ相交ルトセハ,

A, C ノ方ヘ延長スルモ亦相交ラザルヲ得ズ;

是レ公理 3 ニ戻ル;

故ニ AB, CD ハ何レノ方ヘ延長スルモ交ラズ,

即 AB, CD ハ平行線ナリ.

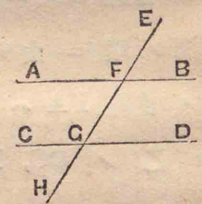
系 1. 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交リ相等シキ同位角ヲ爲ストキハ, 二ツノ直線ハ平行ナリ.

系 2. 一ッノ 直線 ガ 他ノ 二ッノ 直線 ト 交リ, 其ノ 同シ 側 ニ 在ル 內角 ガ 互ニ 補角 ナレハ, 二ッノ 直線 ハ 平行ナリ.

---

*問題 9. 同一ノ 直線 ニ 垂線ナル 直線 ハ 互ニ 平行ナリ.

定理 7. 一ッノ 直線 ガ 二ッノ 平行線 ト 交ル トキハ, 其ノ 爲ス 所ノ 錯角 ハ 相等シ.



直線 EFGH ガ 二ッノ 平行線 AB, CD ト 交ル トセヨ:
然ルトキハ 錯角 AFG, FGD ハ 相等シカル 可シ.

F 點 ヲ 過リ, FGD ニ 等シキ 錯角 ヲ 爲ス 直線 ハ CD ニ 平行ナリ; I, 6.
然ルニ AB ハ CD ニ 平行ナリ, 假設.
而シテ F ヲ 過リ CD ニ 平行ナル 直線 ハ 唯 一ッ 有ルノミ; 公理 4.
故ニ F ヲ 過リ FGD ニ 等シキ 錯角 ヲ 爲ス 直線 ハ AB ナリ;

即 角 AFG, FGD ハ 相等シ.

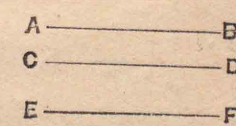
錯角 BFG, FGC ノ 相等シキコ モ 同樣ニ 證明スル ヲ 得.

系. 一ッノ 直線 ガ 二ッノ 平行線 ト 交レハ, 其ノ 爲ス 所ノ 同位角 ハ 相等シク, 同シ 側 ニ 在ル 內角 ハ 互ニ 補角 ナリ.

---

*問題 10. 一ッノ 直線 ガ 他ノ 一ッノ 直線 ニ 垂線ナレハ, 總テ 之 ニ 平行ナル 直線 ニ 垂線ナリ.

定理 8. 同一ノ 直線 ニ 平行ナル 二ッノ 直線 ハ 互ニ 平行ナリ.



二ッノ 直線 AB, CD ヲ 各 EF ニ 平行ナリ トセヨ:
然ルトキハ AB, CD ハ 互ニ 平行ナル 可シ.

若シ AB, CD ガ 平行ナラザレハ, 之 ヲ 延長スレハ 相交ル;
然レハ 其ノ 交點 ヲ 過リ, EF ニ 平行ナル 直線 二ッ 有リ 是レ 公理 4 ニ 戻ル;

故ニ AB, CD ハ何程延長スルモ相交ラズ,

即平行ナリ.

第二節ノ問題.

*問題 11. 二ツノ直線ガ夫々他ノ二ツノ直線ニ平行ナレバ,前者ノ夾ム角ハ夫々後者ノ夾ム角ニ等シ.

問題 12. 一ツノ直線ニ垂線ナル直線ト之ニ斜ナル直線トハ出會フ.

問題 13. 相交ル二ツノ直線ニ夫々垂線ナル二ツノ直線ハ出會フ.

問題 14. 二ツノ角ノ邊ガ夫々互ニ平行ナレバ,之ヲ二等分スル二ツノ直線ハ互ニ平行ナルカ或ハ垂線ナリ.

第三節.

三角形.

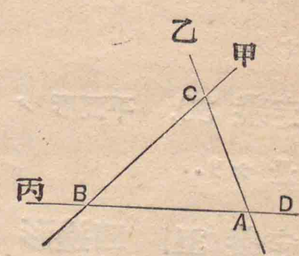
定義 20. 平面形トハ線ヲ以テ圍ミタル平面ノ一部分ナリ. 其ノ直線ヲ以テ圍ミタルモノヲ直線平面形或ハ單ニ直線形ト稱ス.

定義 21. 直線形ハ又多角形トモ云フ.

定義 22. 三角形トハ三ツノ直線ヲ以テ圍ミタル平面形ナリ.

定義 23. 多角形ノ邊トハ之ヲ圍ミタル直線ノ其ノ限界タル部分ナリ.

圖ニ於テ三ツノ直線甲, 乙丙ハ三角形 ABC ヲ成ス; 而シテ BC, CA, AB ハ其三角形ノ邊ナリ.



定義 24. 多角形ノ內角トハ二ツノ邊ノ夾ム形內ノ角ナリ; 單ニ直線形ノ角ト云ヘバ其ノ內角ノ意ナリ.

定義 25. 多角形 ノ 外角 トハ 一ツノ 邊 ト 之 ニ 隣レル 邊 ノ 延長 ト ノ 夾ム 角 ナリ. 三角形 ニ 於テ 一ツ ノ 外角 ニ 接セザル 二ツノ 內角 ヲ 各 其 外角 ノ 內對角 ト 稱ス.

圖 ニ 於テ, 角 CAB ハ 內角, CAD ハ 外角 ナリ. 而シテ 角 ABC, ACB ハ 各 外角 CAD ノ 內對角 ナリ.

定義 26. 多角形 ノ 對角線 トハ 相隣ラザル 二ツノ 角 ノ 頂點 ヲ 結ビ付クル 直線 ナリ.

定義 27. 多角形 ノ 總テノ 邊 及 總テノ 角 ガ 相等シケレバ, 之 ヲ 正多角形 ト 稱ス.

定義 28. 多角形 ノ 內角 ガ 皆 各 二直角 ヨリ 小ナレバ, 之 ヲ 凸多角形 ト 稱ス.

定義 29. 多角形 ノ 周 トハ 總テノ 邊 ノ 長サ ノ 和 ナリ.

定義 30. 平面形 ノ 面積 トハ 其ノ 限界 內ノ 場所 ノ 量 ナリ.

定義 31. 四邊形 トハ 四 邊 ノ 多角形, 五邊形 トハ 五 邊 ノ 多角形 ナリ, 以上 之 ニ 倣ヘ. 或ハ 其ノ 角 ノ 數 ニ 依リテ, 四角形, 五角形, 等 トモ 云フ.

定義 32. 三角形 ノ 何レノ 邊 ニテモ 之 ヲ 其ノ 底邊 ト 稱スル ヲ 得. 之 ニ 對スル 角 ノ 頂點 ヲ 三角形 ノ 頂點 ト 稱ス.

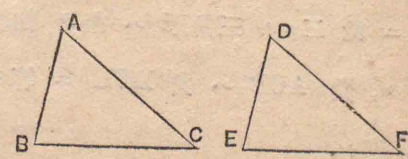
定義 33. 二ツノ 邊 ガ 相等シキ 三角形 ヲ 二等邊三角形 ト 稱ス

二等邊三角形 ニ 於テハ 相等シキ 邊 ノ 夾ム 角 ノ 頂點 ヲ 特ニ 其ノ 頂點 ト 稱シ, 第三 邊 ヲ 底邊 ト 稱ス.

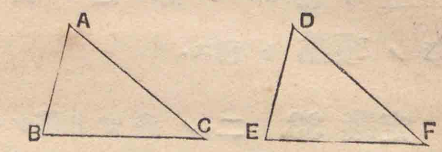
定理 9. 一ツノ 三角形 ノ 二 邊 ガ 夫々 一ツノ 他ノ 三角形 ノ 二 邊 ニ 等シク 又 此 二 邊 ノ 夾ム 角 ガ 相等シケレバ, 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シ, 而シテ 相等シキ 角 ハ 夫々 相等シキ 邊 ニ 對ス.

ABC, DEF ハ 二ツノ 三角形 ニシテ, AB ハ DE ニ 等シク, AC ハ DF ニ 等シク, 夾角 BAC ハ 夾角 EDF ニ 等シ トセヨ:

然ルトキハ 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シクシテ, 第三 邊 BC ハ 第三



邊 EF ニ等シク; 角 ACB ハ角 DFE ニ等シク, 角 ABC ハ角 DEF ニ等シカル可シ.



三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ重テ, A 點ハ D 點ノ上ニ, 邊 AB ハ邊 DE ノ上ニ重ナリ, C 點ト F 點トハ DE ノ同シ側ニ在ル樣ニ置ク;

然レハ AB ハ DE ニ等シキヲ以テ, 假設.

AB ハ DE ト合シ, B 點ハ E 點ノ上ニ重ナル;

又角 BAC ハ角 EDF ニ等シキヲ以テ, 假設.

邊 AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナル;

又 AC ハ DF ニ等シキヲ以テ, 假設.

AC ハ DF ト合シ, C 點ハ F 點ノ上ニ重ナル;

斯ク B ハ E ノ上ニ重ナリ, C ハ F ノ上ニ重ナルヲ以テ, 邊 BC ハ邊 EF ト合ス; 公理 3.

然レハ三角形 ABC ハ三角形 DEF ト合ス;

故ニ此二ツノ三角形ハ全ク相等シク, BC ハ EF ニ等シク, 角 ACB ハ角 DFE ニ等シク, 角 ABC ハ角 DEF ニ等シ.

問題 15. 二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ其ノ底邊ヲ直角ニ二等分ス. (頂角トハ頂點ニ於テノ內角ノ略ナリ.)

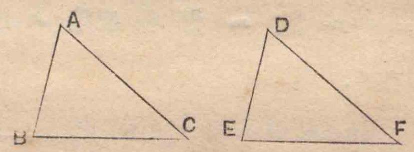
問題 16. 二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ノ上ニ在ル點ハ皆各底邊ノ兩端ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

定理 10. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二角ニ等シク又此二角ノ頂點ノ間ノ邊ガ相等シケレハ, 二ツノ三角形ハ全ク相等シ, 而シテ相等シキ邊ハ夫々相等シキ角ニ對ス.

ABC, DEF ハ二ツノ三角形ニシテ, 角 ABC ハ角 DEF ニ等シク, 角 ACB ハ角 DFE ニ等シク, 邊 BC ハ邊 EF ニ等シトセヨ:

然ルトキハ二ツノ三角形ハ全ク相等シクシテ, 第三角 BAC ハ第三角 EDF ニ等シク, 邊 AB ハ邊 DE ニ, 邊 AC ハ邊 DF ニ等シカル可シ.

三角形 ABC ヲ 三角形 DEF ノ 上ニ 重ネ, B 點 ハ E 點 ノ 上ニ, 邊 BC ハ 邊 EF ノ 上ニ 重ナリ, A 點 ト D 點 ト ハ EF ノ 同シ 側 ニ 在ル 樣ニ 置ク;



然レハ BC ハ EF ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.

BC ハ EF ト 合シ, C 點 ハ F 點 ノ 上ニ 重ナル;

而シテ 角 CBA ハ 角 FED ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.

BA ハ ED ノ 上ニ 重ナル;

又 角 BCA ハ 角 EFD ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.

CA ハ FD ノ 上ニ 重ナル;

故ニ BA ト CA ノ 交點 A ハ ED ト FD ノ 交點 D ノ 上ニ 重ナル:

故ニ 三角形 ABC ハ 三角形 DEF ト 合ス;

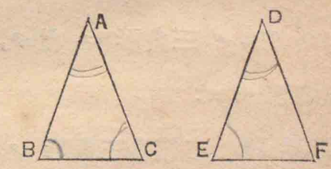
故ニ 此 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シク, 角 BAC ハ 角 EDF ニ 等シク, AB ハ DE ニ 等シク, AC ハ DF ニ 等シ.

問題 17. 三角形 ノ 一ツノ 角 ヲ 二等分スル 直線 ガ 其 角 ニ 對スル 邊 ニ 垂線ナレハ, 三角形 ハ 二等邊ナリ.

定理 11. 一ツノ 三角形 ノ 二ツノ 邊 ガ 相等シケレハ, 之 ニ 對スル 角 モ 亦 相等シ.

三角形 ABC ニ 於テ, 邊 AB ハ 邊 AC ニ 等シ トセヨ:

然ルトキハ 角 ABC ハ 角 ACB ニ 等シカル 可シ.



DEF ハ 全ク ABC ニ 等シキ 三角形 ニシテ, D ハ A ト, E ハ B ト, F ハ C ト 相對應スル モノ トセヨ:

然レハ AB ハ AC ニ 等シク, 假設.

AC ハ DF ニ 等シキ ヲ 以テ,

二ツノ 三角形 ABC, DFE ニ 於テ,

AB ハ DF ニ 等シ; 公理 四.

又 同樣ニ AC ハ DE ニ 等シ;

而シテ 角 BAC ハ 角 FDE ニ 等シ;

故ニ 邊 AB ニ 對スル 角 ACB ハ 邊 DF ニ 對スル 角 DEF ニ 等シ: I, 9.

然ルニ 角 DEF ハ 角 ABC ニ 等シ;

故ニ 角 ACB ハ 角 ABC ニ 等シ.

系. 一ツノ三角形ノ三ツノ邊ガ相等シケレハ, 其ノ三ツノ角モ亦相等シ.

問題 18. 角 A ヲ二等分スル直線ヲ引キ, 三角形 ABC ヲ二ツノ三角形ニ分チ, 之ヲ比較シテ以テ此定理ヲ證明セヨ.

問題 19. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過リ底邊ニ平行ナル直線ハ頂點ニ於テノ外角ヲ二等分ス.

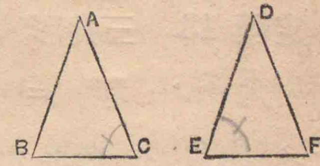
問題 20. 同シ底邊ノ上ニ立ツ所ノ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ヒ付クル直線或ハ其ノ延長ハ底邊ヲ直角ニ二等分ス.

定理 12. 一ツノ三角形ノ二ツノ角ガ相等シケレハ, 之ニ對スル邊モ亦相等シ.

三角形 ABC ニ於テ角 ABC ハ角 ACB ニ等シトセヨ:

然ルトキハ AC ハ AB ニ等シカル可シ.

三角形 DEF ハ全ク ABC ニ等シキ三角形ニシテ,



D, E, F ハ夫々 A, B, C ト相對應スルモノトセヨ;

角 ABC ハ角ACB ニ等シク, 假設.

角 ACB ハ角 DFE ニ等シキヲ以テ,

二ツノ三角形 ABC, DFE ニ於テ,

角 ABC 角ハ DFE ニ等シ; 公理丙.

又同樣ニ角 ACB ハ角 DEF ニ等シ,

而シテ邊 BC ハ邊 FE ニ等シ;

故ニ角 ABC ニ對スル邊 AC ハ角 DFE ニ對スル邊 DE ニ等シ; I, 10.

而シテ DE ハ AB ニ等シ,

故ニ AC ハ AB ニ等シ.

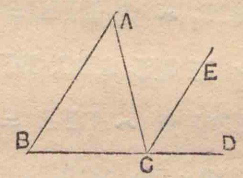
系. 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ相等シケレハ, 其ノ三ツノ邊モ亦相等シ.

三ツノ邊及三ツノ角ガ相等シキ三角形ヲ正三角形ト云フ (定義 27 ヲ見ヨ), 又ハ等邊三角形トモ云フ.

問題 21. 二等邊三角形ノ底邊ニ隣レル角ヲ二等分スル二ツノ直線ト底邊トハ一ツノ二等邊三角形ヲ成ス.

定理 13. 三角形ノ外角ハ其ノ二ツノ內對角ノ和ニ等シ;而シテ三角形ノ三ノ內角ハ合セテ二直角ニ等シ.

三角形 ABC ノ一邊 BC ヲ延長シタリトセヨ:



然ルトキハ外角 ACD ハ其ノ二ツノ內對角 CAB, ABC ノ和ニ等シカル可シ:

又三ツノ內角 CAB, ABC, BCA ハ合セテ二直角ニ等シカル可シ.

C ヲ過リ直線 CE ヲ BA ニ平行ニ引ク;
然レハ錯角 ACE, CAB ハ相等シ; I, 7.
又同位角 ECD, ABC ハ相等シ; I, 7, 系.
今外角 ACD ハ角 ACE, ECD ノ和ニ等シ, I, 定義 9.
故ニ角 CAB, ABC ノ和ニ等シ. 公理 丁.
又双方ヘ角 BCA ヲ加ヘヨ;
然レハ角 CAB, ABC, BCA ノ和ハ ACD ト BCA ノ和ニ等シ; 公理 丁.
而シテ ACD ト BCA ノ和ハ二直角ニ等シ; I, 2.
故ニ角 CAB, ABC, BCA ノ和ハ二直角ニ等シ.

系 1. 三角形ノ一ツノ角ガ鈍角ナレハ, 他ノ二ツノ角ハ各鋭角ナリ.

系 2. 三角形ノ一ツノ角ガ直角ナレハ, 他ノ二ツノ角ハ各鋭角ニシテ互ニ餘角ナリ.

系 3. 一ツノ與ヘラレタル直線外ノ一ツノ與ヘラレタル點ヨリ之ニ唯一ツノ垂線ヲ引クヲ得.

系 4. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二角ニ等シケレハ, 第三角モ亦相等シ.

定義 34. 直角三角形トハ其ノ一ツノ角ガ直角ナルモノナリ. 直角三角形ノ直角ニ對スル邊ヲ斜邊ト稱ス.

定義 35. 鈍角三角形トハ其ノ一ツノ角ガ鈍角ナルモノナリ.

定義 36. 鋭角三角形トハ其ノ三ツノ角ガ皆各鋭角ナルモノナリ.

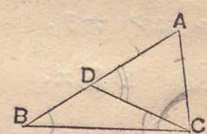
---

*問題 22. 一ツノ角ノ邊ガ夫々他ノ一ツノ角ノ邊ニ垂線ナルトキハ, 二ツノ角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ.

*問題 23. 一ツノ三角形ノ二角ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ二角ニ等シク, 又一双ノ相等シキ角ニ對スル邊ガ相等シケレハ, 二ツノ三角形ハ全ク相等シ, 而シテ相等シキ邊ハ夫々相等シキ角ニ對ス.

定理 14. 三角形ノ二ツノ邊ガ相等シカラザルトキハ, 大ナル邊ニ對スル角ガ他ノ邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.

三角形 ABC ノ邊 AB ヲ邊 AC ヨリ大ナリトセヨ:



然ルトキハ AB ニ對スル角 ACB ガ AC ニ對スル角 ABC ヨリ大ナル可シ.

AB ノ上ニ AD ヲ AC ニ等シク取リ, CD ヲ結ビ付ケヨ;

然レハ AD ハ AC ニ等シキヲ以テ, 作圖.

角 ADC ハ角 ACD ニ等シ; I, 11.

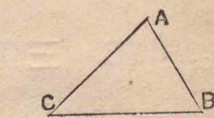
然ルニ角 ADC ハ三角形 BDC ノ外角ナルヲ以テ, 一ツノ内對角 ABC ヨリ大ナリ; I, 13.

故ニ又角 ACD モ角 ABC ヨリ大ナリ;

然レハ勿論角 ACB ハ角 ABC ヨリ大ナリ. 公理 甲.

定理 15. 三角形ノ二ツノ角ガ相等シカラザルトキハ, 大ナル角ニ對スル邊ガ他ノ角ニ對スル邊ヨリ大ナリ.

三角形 ABC ノ角 ABC ヲ角 ACB ヨリ大ナリトセヨ:



然ルトキハ AC ハ AB ヨリ大ナル可シ.

若シ AC ガ AB ヨリ大ナラザレハ, AC ハ AB ニ等シキカ或ハ之ヨリ小ナラザル可カラズ:

然ルニ AC ハ AB ニ等シカラズ;

何トナレハ, 若シ等シケレハ, 角 ABC ガ角 ACB ニ等シカル可ケレハナリ: I, 11.

又 AC ハ AB ヨリ小ナラズ;

何トナレハ, 若シ小ナレハ, 角 ABC ガ角 ACB ヨリ小ナル可ケレハナリ: I, 14.

然レハ AC ハ AB ニ等シカラズ, 又之ヨリ小ナラズ;

故ニ AC ハ AB ヨリ大ナリ.

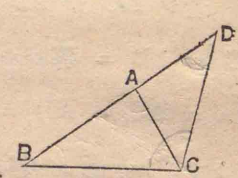
問題 24. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ邊ヨリ大ナリ.

問題 25. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ邊ヨリ大ナリ.

問題 26. 三角形 ABC ノ角 A ヲ二等分スル直線ガ邊 BC トD點ニ於テ出會フトキハ, BA ハ BD ヨリ大ナリ又 CA ハ CD ヨリ大ナリ.

定理 16. 三角形ノ二ツノ邊ハ合セテ他ノ一ツノ邊ヨリ大ナリ.

ABC ヲ三角形トセヨ:



然ルトキハ二ツノ邊 BA 及 AC ハ合セテ邊 CB ヨリ; AC 及 CB ハ合セテ BA ヨリ; CB 及 BA ハ合セテ AC ヨリ大ナル可シ.

BA ヲ D マデ延長シ, AD ヲ AC ニ等シクシ, DC ヲ結ヒ付ケヨ;

然レハ AD ハ AC ニ等シキヲ以テ. 作圖.

角 ACD ハ角 ADC ニ等シ; I, 11.

然ルニ角 BCD ハ角 ACD ヨリ大ナリ; 公理甲.

故ニ角 BCD ハ角 ADC ヨリ大ナリ.

三角形 BCD ニ於テ,

角 BCD ハ角 BDC ヨリ大ナルヲ以テ,

BD ハ CB ヨリ大ナリ; I, 15.

然ルニ BD ハ BA, AC ノ和ニ等シ:

故ニ BA, AC ハ合セテ CB ヨリ大ナリ.

同様ニ AC, CB ハ合セテ BA ヨリ; CB, BA ハ合セテ AC ヨリ大ナルコトヲ證明スルヲ得.

系 三角形ノ二ツノ邊ノ差ハ他ノ一ツノ邊ヨリ小ナリ.

---

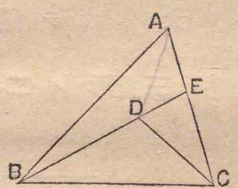
*問題 27. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ノ中點ヘ引クル直線ハ他ノ二ツノ邊ノ和ノ半分ヨリ小ナリ.

問題 28. 三角形 ABC ノ頂點ヨリ其ノ内ノ一ツノ點 O ヘ引クル三ツノ直線 AO, BO, CO ノ和ハ三角形ノ周ノ半分ヨリ大ナリ.

問題 29. 四邊形ノ周ハ二ツノ對角線ノ和ヨリ大ナリ; 又和ノ二倍ヨリ小ナリ.

定理 17. 三角形ノ一ツノ邊ノ兩端ヨリ三角形ノ内ノ一ツノ點ヘ直線ヲ引ケバ, 此二ツノ直線ハ合セテ三角形ノ他ノ二ツノ邊ヨリ小ナリ, 而シテ之ヨリ大ナル角ヲ夾ム.

三角形 ABC ノ一ツノ邊 BC ノ兩端ヨリ其ノ内ノ點 D ヘ二ツノ直線 BD, CD ヲ引キタリトセヨ:



然ルトキハ BD, DC ノ和ハ BA, AC ノ和ヨリ小ナル可シ,
又角 BDC ハ角 BAC ヨリ大ナル可シ.

BD ヲ延長シテ, AC ト E 點ニ於テ出會ハシメヨ;
然レバ BA, AE ハ合セテ BE ヨリ大ナリ; I, 16
双方ヘ EC ヲ加ヘヨ,
然レバ BA, AC ハ合セテ BE, CE ノ和ヨリ大ナリ; 公理 巳.
又 DE, EC ノ和ハ DC ヨリ大ナリ; I, 16.
双方ヘ BD ヲ加ヘヨ;
然レバ BE, EC ハ合セテ BD, DC ノ和ヨリ大ナリ;

然ルニ BA, AC ハ合セテ BE, EC ノ和ヨリ大ナリ;
故ニ勿論 BA, AC ハ合セテ BD, DC ノ和ヨリ大ナリ.

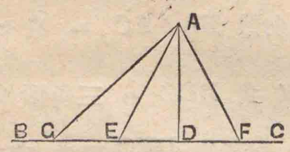
又角 BDC ハ三角形 CED ノ外角ナルヲ以テ,
一ツノ内對角 DEC ヨリ大ナリ; I, 13.
又角 DEC ハ三角形 BAE ノ外角ナルヲ以テ.
一ツノ内對角 BAC ヨリ大ナリ: I, 13.
故ニ角 BDC ハ角 BAC ヨリ大ナリ.

問題 30. 三角形 ABC ノ内ノ一ツノ點 O ヨリ頂點ヘ引ケル直線 OA, OB, OC ノ和ハ三角形ノ周ヨリ小ナリ.

定理 18. 直線外ノ一ツノ點ヨリ之ヘ引ケル總テノ直線ノ中, (甲) 垂線ハ最短シ; (乙) 其他ノ直線ノ中, 垂線ト相等シキ角ヲ爲スモノハ互ニ相等シ; (丙) 垂線ト大ナル角ヲ爲スモノハ之ト小ナル角ヲ爲スモノヨリ大ナリ.

A ヲ與ヘラレタル點; BC ヲ與ヘラレタル直線; AD ヲ A ヨリ BC ヘ引ケル垂線; AE, AF ヲ AD ト相

等シキ 角 EAD, FAD ヲ
爲ス 二ツノ 直線: AG ヲ
AD ト 角 EAD 或ハ FAD
ヨリ 大ナル 角 ヲ 爲ス
直線 ナリ トセヨ;



然ルトキハ (甲) AD ハ AE ヨリ 小ナル 可シ;
(乙) AF ハ AE ニ 等シカル 可シ;
(丙) AG ハ AE 或ハ AF ヨリ 大ナル 可シ.

(甲) 三角形 ADE ニ 於テ,
角 ADE ハ 直角 ナル ヲ 以テ, 假設.
角 AED ハ 直角 ヨリ 小ナリ, I, 13, 系 2.
即 ADE ヨリ 小ナリ;
故ニ AD ハ AE ヨリ 小ナリ. I, 15.

(乙) 三角形 ADE, ADF ニ 於テ,
角 ADE ハ 角 ADF ニ 等シ;
角 EAD ハ 角 FAD ニ 等シ; 假設.
邊 AD ハ 兩形 ニ 通ズ;
故ニ AE ハ AF ニ 等シ. I, 10.

(丙) 三角形 AGE ニ 於テ,
角 AEG ハ 鋭角 AED ノ 補角 ナル ヲ 以テ 鈍角 ナリ;

故ニ 角 AGE ハ 鋭角 ナリ; I, 13, 系 1.
故ニ AG ハ AE 或ハ AF ヨリ 大ナリ I, 15.

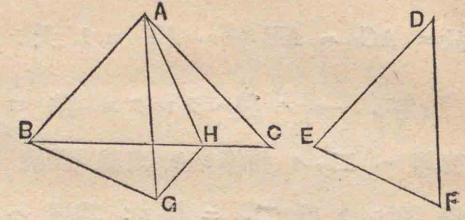
系. 一ツノ 與ヘラレタル 點 ヨリ 一ツノ 與ヘラレタル 直線 ヘ 二ツノ 相等シキ 直線 (垂線 ヨリ 長キ) ヲ 引ク ヲ 得, 而シテ 唯 二ツ ニ 限ル: 垂線 ハ 其 二 直線 ノ 夾ム 角 ヲ 二等分ス.

定義 37. 一ツノ 直線 外ノ 一ツノ 點 ヨリ 之 ヘ 引ケル 垂線 ノ 長サ ヲ 其 點 ノ 其 直線 ヨリノ **距離** ト 云フ.

問題 31. 三角形 ノ 一ツノ 頂點 ヨリ 之 ニ 對スル 邊 ヘ 引ケル 直線 ハ 其 頂點 ニ 於テ 出會フ 所ノ 二ツノ 邊 ノ 中ノ 大ナル モノ ヨリ 小ナリ; 若シ 此 二ツノ 邊 ガ 相等シクレバ, 其ノ 何レ ヨリモ 小ナリ.

定理 19. 一ツノ 三角形 ノ 二 邊 ガ 夫々 一ツノ 他ノ 三角形 ノ 二 邊 ニ 等シク 而シテ 此 二 邊 ノ 夾ム 角 ガ 相等シカラザレバ, 其ノ 第三 邊 ハ 相等シカラズ; 角 ノ 大ナル モノ ノ 第三 邊 ガ 他 ヨリ 大ナリ.

二ッノ 三角形



ABC, DEF ニ 於テ,
AB ハ DE ニ 等シ
ク; AC ハ DF ニ
等シク; AB, AC ノ
夾ム 角 BAC ハ DE, DF ノ 夾ム 角 EDF ヨリ 大ナリ トセヨ:

然ルドハ BC ハ EF ヨリ 大ナル 可シ.

三角形 DEF ヲ 三角形 ABC ノ 上 ニ 重テ, D 點 ハ A 點 ノ 上ニ, 邊 DE ハ 邊 AB ノ 上ニ 重ナリ, F 點 ト C 點 ハ AB ノ 同シ 側 ニ 在ル 樣ニ 置ク;

然レハ DE ハ AB ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.

E 點 ハ B 點 ノ 上ニ 重ナル,

而シテ 角 BAC ハ 角 EDF ヨリ 大ナル ヲ 以テ, 假設.

邊 DF ハ 角 BAC ノ 內ニ 落チ, AG ノ 位置 ヲ 取ル;

F 點 ハ G 點 ノ 上ニ 落ル トセヨ:

今 若シ G 點 ガ 直線 BC ノ 上ニ 在レハ,

BC ハ BG 即 EF ヨリ 大ナルコ 無論 ナリ: 公理 甲.

若シ G 點 ガ 直線 BC ノ 上ニ 在ラザレハ,

角 CAG ヲ 二等分スル 直線 AH ヲ 引キ, BC ト H 點 ニ 於テ 交ラシメヨ;

HG ヲ 結ヒ付クヨ;

然レハ 三角形 CAH, GAH ニ 於テ,

CA ハ GA ニ 等シク, 假設.

邊 AH ハ 兩 形 ニ 通シ,

角 CAH ハ 角 GAH ニ 等シ; 作圖.

故ニ HC ハ HG ニ 等シ; I, 9

而シテ BH, HG ノ 和 ハ BH, HC ノ 和 即 BC ニ 等シ;

然ルニ BH, HG ノ 和 ハ BG ヨリ 大ナリ; I, 16

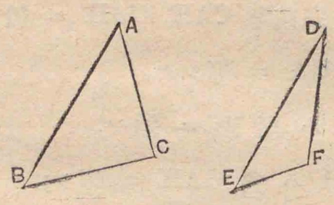
故ニ BC ハ BG 即 EF ヨリ 大ナリ.

問題 32. 上ノ 圖 ニ 於テ, CG ヲ 結ヒ付ケ, 三角形 BCG ヲ 作リ, 定理 15 ヲ 用ヰテ 此 定理 ヲ 證明セヨ.

問題 33. D ハ 三角形 ABC ノ 邊 BC ノ 中點 ニシテ, 角 ADB ハ 鈍角 ナリ トセヨ: 然ルドハ 邊 AB ハ 邊 AC ヨリ 大ナル 可シ.

定理 20. 一ッノ 三角形 ノ 二 邊 ガ 夫々 一ッノ 他ノ 三角形 ノ 二 邊 ニ 等シク, 其ノ 第三 邊 ガ 相等シカラザレハ, 此 二 邊 ノ 夾ム 角 ハ 相等シカラズ; 第三 邊 ノ 大ナル モノ ノ 夾角 ガ 他 ヨリ 大ナリ.

二ツノ 三角形
ABC, DEF ニ於テ,
AB ハ DE ニ等シ
ク, AC ハ DF ニ
等シク, BC ハ EF
ヨリ大ナリ トセヨ:



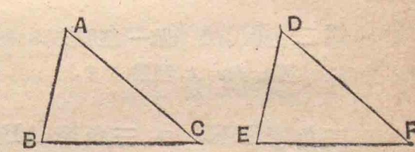
然ルトキハ 角 BAC ハ 角 EDF ヨリ 大ナル 可シ.

若シ 角 BAC ガ 角 EDF ヨリ 大ナラザレバ, 之ニ 等シキカ 或ハ 之ヨリ 小ナラザル 可カラズ:
若シ 角 BAC ガ 角 EDF ニ 等シクレバ,
邊 BC ガ 邊 EF ニ 等シカル 可シ; I, 9.
然ルニ BC ハ EF ヨリ 大ナリ; 假設
故ニ 角 BAC ハ 角 EDF ニ 等シカラズ:
若シ 又 角 BAC ガ 角 EDF ヨリ 小ナレバ,
邊 BC ガ 邊 EF ヨリ 小ナル 可シ; I, 10.
然ルニ BC ハ EF ヨリ 大ナリ; 假設.
故ニ 角 BAC ハ 角 EDF ヨリ 小ナラズ:
然レバ 角 BAC ハ 角 EDF ニ 等シカラズ, 又之ヨリ 小ナラズ,
故ニ 角 BAC ハ 角 EDF ヨリ 大ナリ.

問題 34. D ハ 三角形 ABC ノ 邊 BC ノ 中點 ナリ; 邊 AB ガ 邊 AC ヨリ 小ナレバ, 角 ADC ハ 鈍角 ナリ.

定理 21. 一ツノ 三角形 ノ 三邊 ガ 夫々 一ツノ 他ノ 三角形 ノ 三邊 ニ 等シクレバ, 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シ; 而シテ 相等シキ 角 ハ 夫々 相等シキ 邊 ニ 對ス.

二ツノ 三角形
ABC, DEF ニ於テ,
BC ハ EF ニ等シク,
CA ハ FD ニ等シク,
AB ハ DE ニ 等シ
トセヨ:

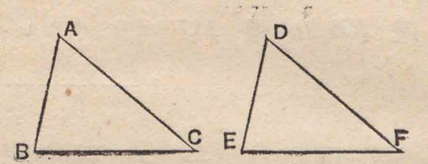


然ルトキハ 三角形 ABC, DEF ハ 全ク 相等シク,
角 CAB ハ 角 FDE ニ 等シク, 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 BCA ハ 角 EFD ニ 等シカル 可シ.

第一 證明法.

二ツノ 三角形 ABC, DEF ニ於テ 二邊 BA, AC ハ 各 二邊 ED, DF ニ 等シ; 假設.

今若シ角 BAC ガ角 EDF ニ等シカラザレハ, 第三邊 BC ハ第三邊 EF ニ等シカラズ; I, 19.



然ルニ BC ハ EF ニ等シ; 假設.

故ニ角 BAC ハ角 EDF ニ等シカラザルヲ得ズ;

即角 BAC ハ角 EDF ニ等シ;

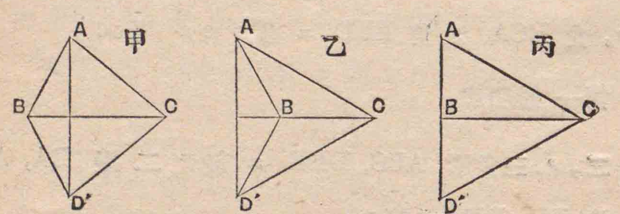
故ニ三角形 ABC, DEF ハ全ク相等シク; I, 9.

角 ABC ハ角 DEF ニ等シク, 角 BCA ハ角 EFD ニ等シ.

第二證明法 (第一證明法ノ如ク簡單ナラズト雖定理 11 ヨリ後ノ定理ヲ要セザルノ利益アリ.)

三角形 DEF ヲ三角形 ABC ノ上ニ重テ; E 點ハ B 點ノ上ニ, 邊 EF ハ邊 BC ノ上ニ重ナリ; A 點ト D 點トハ BC ノ反對ノ側ニ在ル様ニ置ク;

BC ハ EF ニ等シキヲ以テ, 假設.



F 點ハ C 點ノ上ニ重ナル;

D′ ヲ D ノ落ル點トセヨ:

若シ ABD′ ガ一直線ナルトキハ, (丙圖ノ如シ),

角 BAC ハ角 BD′C ニ等シ, I, 11.

即角 EDF ニ等シ:

若シ ABD′ ガ一直線ナラザルトキハ, AD′ ヲ結ビ付ケヨ;

然レハ BA ハ BD′ ニ等シキヲ以テ, 假設.

角 BAD′ ハ角 BD′A ニ等シ; I, 11.

又 CA ハ CD′ ニ等シキヲ以テ, 假設.

角 CAD′ ハ角 CD′A ニ等シ: I, 11.

故ニ二ツノ角 BAD′, CAD′ ノ和 (甲圖ノ場合) 或ハ差 (乙圖ノ場合) ナル角 BAC ハ二ツノ角 BD′A, CD′A ノ和或ハ差ナル角 BD′C ニ等シ: 公理丁或ハ戊.

故ニ (甲, 乙, 丙,) 何レノ場合ニ於テモ,

二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ,

AB ハ DE ニ等シク, AC ハ DF ニ等シク,

角 BAC ハ角 EDF ニ等シ:

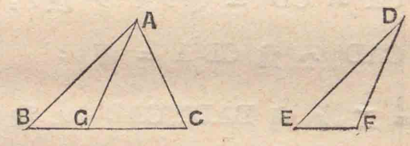
故ニ二ツノ三角形ハ全ク相等シク; I, 9.

角 ABC ハ角 DEF ニ等シク,

角 ACB ハ角 DFE ニ等シ.

定理 22. 一ツノ 三角形 ノ 二 邊 ガ 夫々 一ツノ 他ノ 三角形 ノ 二 邊 ニ 等シク, 又 一 双 ノ 相等シキ 邊 ニ 對スル 角 ガ 相等シケレハ, 他ノ 相等シキ 邊 ニ 對スル 角 ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角 ナリ; 若シ 相等シケレハ, 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シ.

ABC, DEF ハ 二ツノ 三角形 ニシテ, AB ハ DE ニ 等シク, AC ハ DF ニ 等シク, 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シトセヨ:



然ルトキハ 角 ACB 及 角 DFE ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角 ナル 可シ;

若シ 相等シケレハ, 二ツノ 三角形 ABC, DEF ハ 全ク 相等シカル 可シ.

三角形 DEF ヲ 三角形 ABC ノ 上ニ 重テ, D 點 ハ A 點 ノ 上ニ, 邊 DE ハ 邊 AB ノ 上ニ 重ナリ, F ト C ハ AB ノ 同シ 側 ニ 在ル 様ニ 置ケ;

然レハ DE ハ AB ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.
E 點 ハ B 點 ノ 上ニ 重ナル;
角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.
直線 EF ハ 直線 BC ノ 上ニ 重ナル;
故ニ F 點 ハ C 點 ノ 上ニ 重ナルカ, 然ラザレハ 直線 BC 或ハ 其ノ 延長 ノ 上ノ 點 G ノ 上ニ 重ナル;
若シ C 點 ノ 上ニ 重ナレハ, 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シ:
若シ G 點 ノ 上ニ 重ナレハ,
AG ハ AC ニ 等シキ ヲ 以テ, 假設.
角 AGC ハ 角 ACG ニ 等シ; I, 11.
然ルニ 角 AGC ト 角 AGB ト ハ 補角 ナリ;
故ニ 角 ACB ト 角 AGB ト ハ 補角 ナリ;
即 角 ACB ト 角 DFE ト ハ 補角 ナリ.

系. 斯ノ如キ 二ツノ 三角形 ハ 下ノ 場合 ニ 於テハ 必ズ 全ク 相等シ:

(甲) 相等シキ 二ツノ 角 ガ 直角 或ハ 鈍角 ナル 時;

(乙) 他ノ 一 双 ノ 相等シキ 邊 ニ 對スル 角 ガ 兩 三角形 ニ 於テ 鋭角, 或ハ 鈍角 ナル 時, 或ハ 一ツノ 三角形 ニ 於テ 直角 ナル 時;

(丙) 各ノ 三角形 ニ 於テ, 相等シキ 角 ニ對スル 邊

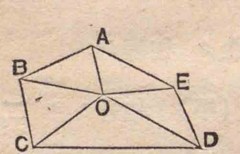
ガ他ノ相等シキ邊ヨリ小ナラザル時.

問題 35. O點ハ角 BAC ノ二邊ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ナリトセヨ: 然ルトキハ OA ハ角 BAC ヲ二等分ス.

定理 23. 凸多角形ノ總テノ內角ノ和ハ之ニ四直角ヲ加ヘテ多角形ノ邊ノ數ノ二倍ノ直角ニ等シ.

多角形ガ三角形ナル場合ハ定理 13 ニ於テ證明シタルヲ以テ此ニハ三ツヨリ多クノ邊ヲ有スル多角形ニ付テ證明ス.

ABCDE ヲ凸多角形ナリトセヨ:



然ルトキハ其ノ總テノ內角ノ和ハ之ニ四直角ヲ加ヘテ多角形ノ邊ノ數ノ二倍ノ直角ニ等シカル可シ.

多角形ノ內ニ一ツノ任意ノ點 O ヲ取リ之ヲ總テ

ノ頂點ニ結ビ付ケヨ;

多角形ハ之ニ由リテ其ノ邊ノ數ト同シ數ノ三角形ニ分タル;

而シテ各ノ三角形ニ於テ, 總テノ內角ハ合セテ二直角ニ等シ; I, 13.

故ニ總テノ三角形ノ總テノ內角ハ合セテ多角形ノ邊ノ數ノ二倍ノ直角ニ等シ;

然ルニ總テノ三角形ノ通シタル頂點 O ニ於テノ角ハ合セテ四直角ナリ,

而シテ三角形ノ他ノ角ハ合セテ多角形ノ總テノ內角ヲ成ス;

故ニ多角形ノ總テノ內角ハ之ニ四直角ヲ加ヘテ其ノ邊ノ數ノ二倍ノ直角ニ等シ.

問題 36. 四邊形ノ內角ハ合セテ四直角ニ等シ.

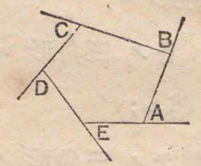
問題 37. 正六邊形ノ各ノ角ハ四直角ノ三分ノ一ナリ.

定理 24. 凸多角形ノ各ノ邊ヲ順次ニ延長シテ得ル所ノ外角ハ合セテ四

直角 ニ 等シ.

ABCDE ヲ 凸多角形 トシ,

其ノ 各ノ 邊 ヲ 順次ニ 延長シタリ トセヨ:



然ルトキハ 總テノ 外角 ハ 合セテ 四 直角 ニ 等シカル 可シ.

各ノ 頂點 ニ 於テ, 內角 及 外角 ハ 合セテ 二 直角 ニ 等シ: Ⅰ, 2.

故ニ 總テノ 內角 及 外角 ハ 合セテ 多角形 ノ 頂點 ノ 數 即 其ノ 邊 ノ 數 ノ 二倍ノ 直角 ニ 等シ:

然ルニ 總テノ 內角 ハ 之 ニ 四 直角 ヲ 加ヘテ 邊 ノ 數 ノ 二倍ノ 直角 ニ 等シ;

故ニ 總テノ 外角 ハ 合セテ 四 直角 ニ 等シ. Ⅱ, 23.

第三 節 ノ 問題.

問題 38. 三角形 ノ 各ノ 頂點 ヲ 過リ, 之 ニ 對スル 邊 ニ 平行ナル 直線 ヲ 引クハ, 元ノ 三角形 ト 共ニ 四ツノ 全ク 相等シキ 三角形 ヲ 得.

問題 39. 二等邊三角形 ノ 底邊 ノ 端 ヨリ 之 ニ 對スル 邊 ヘ 引ケル 垂線 ガ 底邊 ト 爲ス 所ノ 角 ハ 頂角 ノ 半分 ニ 等シ.

問題 40. 三角形 ABC ノ 各ノ 邊 ノ 上ニ 其ノ 外側 ニ 正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ 書クハ, 直線 AD, BE, CF ハ 相等シ.

問題 41. 三角形 ABC ノ B 及 C ニ 於テノ 外角 ヲ 二等分スル 二ツノ 直線 ノ 夾ム 角 ハ A ニ 於テノ 外角 ノ 半分 ニ 等シ.

問題 42. 四邊形 ABCD ニ 於テ 邊 AD ハ 最大ニシテ, 邊 BC ハ 最小ナリ: 然ルトキハ 角 ABC ハ 角 ADC ヨリ 大ニシテ, 角 BCD ハ 角 BAD ヨリ 大ナル 可シ.

問題 43. A, B ハ 直線 CD ノ 同シ 側 ニ 在ル 二ツノ 點 ナリ; P ハ CD 上ノ 點 ニシテ, AP, BP ハ CD ト 相等シキ 角 ヲ 爲ス; Q ハ CD 上ノ 他ノ 任意ノ 點 ナリ トセヨ; 然ルトキハ AP, BP ノ 和 ハ AQ, BQ ノ 和 ヨリ 小ナル 可シ.

問題 44. 或ル 正多角形 ノ 外角 ハ 各 正三角形 ノ 內角 ニ 等シ ト 云フ; 此 正多角形 ハ 何 邊 ナリヤ?

第四節.

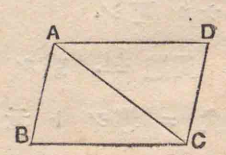
平行四邊形.

定義 38. 平行四邊形 トハ 二双ノ相對スル邊ガ互ニ平行ナル四邊形ナリ.

定義 39. 梯形 トハ 一双ノ相對スル邊ガ互ニ平行ナル四邊形ナリ.

定理 25. 一ツノ平行四邊形ニ於テ, (甲) 各ノ對角線ハ之ヲ全ク相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ; (乙) 相對スル邊ハ相等シ; (丙) 相對スル角ハ相等シ.

ABCD ヲ平行四邊形, AC ヲ其ノ對角線トセヨ:



然ルトキハ, (甲) AC ハ之ヲ全ク相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ可シ:

(乙) AB ハ DC ニ等シク, BC ハ AD ニ等シカル可シ:
(丙) 角 ABC ハ角 CDA ニ等シク, 角 BCD ハ角 DAB ニ等シカル可シ.

直線 AC ガ平行線 BA, CD ニ出會フヲ以テ,
錯角 BAC, ACD ハ相等シ: I, 7.
又直線 AC ガ平行線 BC, AD ニ出會フヲ以テ,
錯角 BCA, CAD ハ相等シ: I, 7.
然レハ二ツノ三角形 ABC, CDA ニ於テ, 二ツノ角ハ夫々相等シク; 其ノ間ニ在ル邊 AC ハ兩形ニ通ス:
故ニ (甲) 二ツノ三角形ハ全ク相等シク; I, 10.
(乙) AB ハ CD ニ, BC ハ DA ニ等シ;
(丙) 角 ABC ハ角 CDA ニ等シ:
又角 BCD ハ BCA, ACD ノ和ナルヲ以テ,
角 CAD, BAC ノ和ニ等シ,
即角 DAB ニ等シ.

(對角線 BD ヲ引クモ, 亦同様ナリ.)

系 1. 平行四邊形ノ相隣レル二ツノ角ハ互ニ補角ナリ.

系 2. 平行四邊形ノ一ツノ角ガ直角ナレハ, 總テノ角ガ直角ナリ.

系 3. 平行四邊形ノ相隣レル二ツノ邊ガ相等シケレバ,其ノ總テノ邊ガ相等シ.

系 4. 平行四邊形ノ各ノ對角線ハ他ヲ二等分ス.

定義 40. 平行四邊形ノ角ガ各直角ナルモノヲ矩形(サシガタ)ト稱ス.

定義 41. 平行四邊形ノ總テノ邊ガ相等シキモノヲ菱形(ヒシガタ)ト稱ス.

定義 42. 總テノ邊ガ相等シキ矩形ヲ正方形ト稱ス.

定義 43. 二ツノ平行線ノ距離トハ之ニ垂線ナル直線ノ其平行線ノ間ニ在ル部分ノ長サナリ.

定義 44. 一ツノ直線上ノ一ツノ點ヨリ反對ノ側ニ相等シキ距離ニ其直線上ニ在ル二ツノ點ハ其點ニ付テ對稱ナリト云フ. 一ツノ平面圖形ニ於テ,其ノ各ノ點ニ對シテ,必ズ或ル一ツノ點ニ付テ之ニ對稱ナル點有ルトキハ,此圖形ハ其點ニ付テ對稱ナリ或ハ點對稱ヲ有ツト云フ: 其點ヲ對稱ノ中心或ハ單ニ中心ト云フ.

定義 45. 一ツノ直線ガ一ツノ平面圖形ヲ二ツノ部分ニ分チ,此直線ヲ折リ目トシテ一ツノ部分ヲ折リ返セバ全ク他ノ部分ノ上ニ重リ合フ樣ナルトキハ,其平面圖形ハ其直線ニ付テ對稱ナリ或ハ線對稱ヲ有ツト云フ. 其直線ヲ對稱ノ軸ト稱ス; 又其直線ハ圖形ヲ對稱ニ分ツト云フ.

問題 45. 平行四邊形ノ對角線ガ相等シケレバ,其平行四邊形ハ矩形ナリ.

問題 46. 平行四邊形ノ對角線ガ互ニ垂線ナレバ,其平行四邊形ハ菱形ナリ.

問題 47. 平行四邊形ハ其ノ對角線ノ交點ニ付テ點對稱ヲ有ツ.

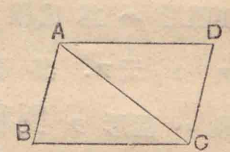
問題 48. 二等邊三角形ノ頂角ヲ二等分スル直線ハ其ノ對稱ノ軸ナリ.

定理 26. 一ツノ四邊形ニ於テ,(甲)相對スル邊ガ各相等シキ時; 或ハ(乙)相對スル角ガ各相等シキ時; 或ハ(丙)相對スル一双ノ邊ガ相等シク且平行

ナル時ハ;其四邊形ハ平行四邊形ナリ.

四邊形ABCDニ於テ,(甲) ABハDCニ等シク,BCハADニ等シトセヨ;

或ハ(乙)角ABCハ角CDAニ等シク,角BCDハ角DABニ等シトセヨ;



或ハ(丙) ABハDCニ等シク且之ニ平行ナリトセヨ:
然ルトキハ(甲)(乙)(丙)何レノ場合ニ於テモ,ABCDハ平行四邊形ナル可シ.

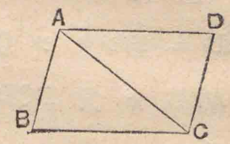
(甲) ACヲ結ヒ付ケヨ;
三角形ABC, CDAニ於テ,
ABハCDニ等シク,BCハDAニ等シク, 假設.
邊ACハ兩形ニ通ス;
故ニ角BACハ角DCAニ等シク;角BCAハ角DACニ等シ: I, 21.
然レハ直線ACハ二ツノ直線BA, CDニ出會ヒ,錯角BAC, ACDガ相等シキヲ以テ,
BAハCDニ平行ナリ; I, 6.
同樣ニBCハADニ平行ナリ;

故ニABCDハ平行四邊形ナリ.

(乙)角ABCハ角CDAニ等シク,角BCDハ角DABニ等シキヲ以テ, 假設.
角ABCト角BCDノ和ハ角CDAト角DABノ和ニ等シ; 公理丁.
故ニ各ノ和ハ四邊形ノ總テノ角ノ半分ニ等シ;
而シテ四邊形ノ總テノ角ハ四直角ニ等シ; I, 23.
故ニ二ツノ角ABC, BCDノ和ハ二直角ニ等シ;
直線BCハ二ツノ直線BA, CDニ出會ヒ,同シ側ニ在ル內角ABC, BCDガ互ニ補角ナルヲ以テ,
BA, CDハ平行ナリ: I, 6, 系2.
同樣ニBC, ADガ平行ナルヿヲ證明スルヲ得:
故ニABCDハ平行四邊形ナリ.

(丙)直線ACハ二ツノ平行線BA, CDニ出會フヲ以テ,
錯角BAC, ACDハ相等シ; I, 7.
然レハ三角形ABC, CDAニ於テ,
角BACハ角DCAニ等シク,
ABハCDニ等シク, 假設.
ACハ兩形ニ通ス;

故ニ角 BCA ハ角 DAC ニ等シ; I, 9.



此二ツノ角ハ直線 AC ガ二ツノ直線 AD, BC ト出會ヒテ爲ス所ノ錯角ナリ;
故ニ BC ハ AD ニ平行ナリ; I, 6.
故ニ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

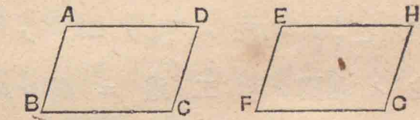
系. 四邊形ノ二ツノ對角線ガ各他ヲ二等分スレハ, 其四邊形ハ平行四邊形ナリ.

問題 49. 四邊形ガ其ノ對角線ノ交點ニ付テ對稱ナレハ, 其四邊形ハ平行四邊形ナリ.

定理 27. 一ツノ平行四邊形ノ相隣レル二邊ガ夫々一ツノ他ノ平行四邊形ノ相隣レル二邊ニ等シク, 且一ツノ角ガ相等シケレハ, 二ツノ平行四邊形ハ全ク相等シ.

二ツノ平行四邊形 ABCD, EFGH ニ於テ, AB ハ EF

ニ等シク, BC ハ FG ニ等シク, 角 ABC ハ角 EFG ニ等シトセヨ:
然ルトキハ ABCD, EFGH ハ全ク相等シカル可シ.



平行四邊形 EFGH ヲ平行四邊形 ABCD ノ上ニ重テ, F 點ハ B 點ノ上ニ, FE ハ BA ノ上ニ重ナリ, CD ト GH ハ BA ノ同シ側ニ在ル樣ニ置ク;
然レハ FE ハ BA ニ等シキヲ以テ, 假設.
E 點ハ A 點ノ上ニ重ナル;
又角 EFG ハ角 ABC ニ等シキヲ以テ, 假設.
FG ハ BC ノ上ニ重ナル;
而シテ FG ハ BC ニ等シキヲ以テ, 假設.
G 點ハ C 點ト合ス;
E 點ハ A 點ト合シ, EH モ AD モ兩ナガラ BC ニ平行ナルヲ以テ,
EH ハ AD ノ上ニ重ナル: 公理 4.
又 G 點ハ C 點ト合シ, GH モ CD モ兩ナガラ AB ニ平行ナルヲ以テ,

GH ハ CD ノ 上ニ 重ナル: 公理 4.

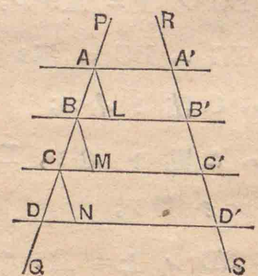
故ニ H 點 ハ D 點 ト 合シ;

二ツノ 平行四邊形 ハ 相合シ, 全ク 相等シ.

系. 二ツノ 矩形 ハ, 其ノ 一ツ ノ 相隣レル 二 邊 ガ 夫々 他 ノ 相隣レル 二 邊 ニ 等シクレハ, 全ク 相等シ: 二ツノ 正方形 ハ, 其ノ 一ツノ 一 邊 ガ 他 ノ 一 邊 ニ 等シクレハ, 全ク 相等シ.

定理 28. 數多ノ 平行線 ガ 一ツノ 直線 ト 交リ, 之 ヲ 相等シキ 部分 ニ 切斷スレハ, 何レノ 直線 ト 交ルモ, 之 ヲ 相等シキ 部分 ニ 切斷ス.

AA′, BB′, CC′, DD′, 等 ハ 平行線 ニシテ, 一ツノ 直線 PQ ト A, B, C, D, 等 ノ 點 ニ 於テ 交リ, AB, BC, CD, 等 ハ 相等シク; 又 他ノ 直線 RS ト A′, B′, C′, D′, 等 ニ 於テ 交ル トセヨ:



然ルトキハ A′B′, B′C′, C′D′, 等 モ 亦 相等シカル 可シ.

若シ PQ, RS ガ 平行ナレハ, A′B′ ハ AB ニ 等シク, B′C′ ハ BC ニ, C′D′ ハ CD ニ 等シキコ 明ナリ, I, 25.

故ニ A′B′, B′C′, C′D′, 等 ハ 相等シ:

若シ PQ, RS ガ 平行ナラザレハ, A ヲ 過リ AL ヲ A′B′ ニ 平行ニ 引ク; B ヲ 過リ, BM ヲ B′C′ ニ 平行ニ 引ク; 其他 C, D, 等 ニ 於テモ 同樣ニ RS ニ 平行ナル 直線 ヲ 引ク;

然レハ AL ハ A′B′ ニ 等シク, BM ハ B′C′ ニ 等シク, CN ハ C′D′ ニ 等シ; I, 25.

二ツノ 三角形 ABL, BCM ニ 於テ,

邊 AB ハ 邊 BC ニ 等シク, 假設.

角 BAL ハ 角 CBM ニ 等シク, I, 7, 系.

角 ABL ハ 角 BCM ニ 等シ; I, 7, 系.

故ニ 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シク,

AL ハ BM ニ 等シ;

即 A′B′ ハ B′C′ ニ 等シ:

同樣ニ C′D′ 等モ A′B′, B′C′ ニ 等シキコ ヲ 證明スル ヲ 得.

系 1. 三角形 ノ 一ツノ 邊 ノ 中點 ヲ 過リ, 他ノ 一ツ ノ 邊 ニ 平行ニ 引クル 直線 ハ 第三 邊 ノ 中點 ヲ 過ル.

系 2. 三角形 ノ 二ツノ 邊 ノ 中點 ヲ 過ル 直線 ハ

他ノ邊ニ平行ナリ.

問題 50. 系 1 ヲ直ニ定理 25 ニ依リテ證明セヨ.

問題 51. 系 2 ヲ直ニ定理 26 ニ依リテ證明セヨ.

*問題 52. 三角形ノ二ツノ邊ノ中點ヲ結ヒ付クル直線ハ第三邊ノ半分ニ等シ.

定義 46. 一ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ノ上ニ投スル **正射影** トハ前者ノ兩端ヨリ後者ヘ引クル垂線ノ足ノ間ニ在ル所ノ後者ノ部分ナリ.

第四節ノ問題.

問題 53. 相等シク且平行ナル二ツノ直線ハ他ノ任意ノ直線ノ上ニ相等シキ正射影ヲ投ス.

問題 54. 三角形ノ邊ノ中點ヲ結ヒ付クル直線ハ之ヲ四ツノ全ク相等シキ三角形ニ分ツ.

問題 55. 菱形ノ對角線ハ互ニ垂線ナリ.

問題 56. 一ツノ與ヘラレタル四邊形ノ相隣レル邊ノ中點ヲ結ヒ付クル直線ハ一ツノ平行四邊形ヲナス.

問題 57. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三ツノ頂點ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

第五節.

軌跡.

定義 47. 某ノ要件有リ; 一ツノ線, 或ハ線ノ一部分, 或ハ線ノ一群 (如何ナル線ニテモ) ノ上ニ在ル各ノ點ハ何レモ皆此要件ニ適シ, 其他ニハ曾テ之ニ適スル點無ケレハ, 其線或ハ線ノ部分或ハ線ノ群ヲ其要件ニ適スル點ノ **軌跡** ト稱ス. (本書ニ於テハ勿論一ツノ平面上ノモノニ限リ之ヲ論ス.)

故ニ一ツノ線或ハ線ノ一部分或ハ線ノ一群 (假ニ X ヲ以テ之ヲ表ハス) ガ一ツノ要件 (假ニ A ヲ以テ之ヲ表ハス) ニ適スル點ノ軌跡ナルヿヲ確定スルニハ, 下ニ記セル二ツノ聯屬シタル定理ヲ證明スルヿ必要ナリ且充分ナリ:

(i) 若シ一ツノ點ガ要件 A ニ適スレハ, X ノ上ニ在リ;

(ii) 若シ一ツノ點ガ X ノ上ニ在レハ, 要件 A ニ適ス.

或ハ i ノ代リニ其ノ對偶命題, 即

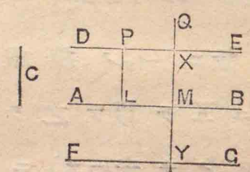
若シ一ツノ點ガ X ノ上ニ在ラザレハ, 要件 A ニ適セズ

ヲ證明スルモ可ナリ: 又 ii ノ代リニ其ノ對偶命題, 即

若シ一ツノ點ガ要件 A ニ適セザレバ, X ノ上ニ在ラズヲ證明スルモ可ナリ.

軌跡 1. 一ツノ與ヘラレタル直線ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其直線ノ兩側ニ於テ之ニ平行ニシテ, 之ヨリ與ヘラレタル距離ニ等シキ距離ニ在ル二ツノ直線ナリ.

AB ヲ與ヘラレタル直線; C ヲ與ヘラレタル距離; DE, FG ヲ AB ノ兩側ニ於テ之ニ平行ニシテ, 之ヨリ C ニ等シキ距離ニ在ル所ノ二ツノ直線ナリトセヨ:



然ルトキハ AB ヨリ C ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ DE, FG ナル可シ.

DE (或ハ FG) ノ上ニ任意ノ一點 P ヲ取レ;
P ヨリ AB ヘ垂線 PL ヲ引ク;
然レバ PL ハ C ニ等シ; 定義 43 及 假設.

故ニ P 點ハ AB ヨリ C ニ等シキ距離ニ在リ. 定義 37.
(是レ上ニ述ヘタル命題 ii ニ當ル.)

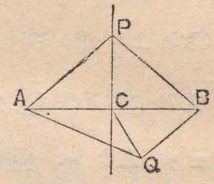
DE 及 FG 線外ニ任意ノ一點 Q ヲ取レ;
Q ヨリ AB ヘ垂線 QM ヲ引キ, 此垂線或ハ其ノ延長ヲ DE 及 FG ト夫々 X, Y ニ於テ交ラシメヨ:
然ルトキハ MX 及 MY ハ各 C ニ等シ; 定義 43 及 假設.
故ニ QM ハ C ニ等シカラズ;
即 Q 點ハ AB ヨリ C ニ等シキ距離ニ在ラズ. 定義 37.
(是レ上ニ述ヘタル命題 i ノ對偶ニ當ル.)

故ニ AB ヨリ C ニ等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ二ツノ直線 DE, FG ナリ.

軌跡 2. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其二ツノ點ヲ結ビ付クル直線ヲ直角ニ二等分スル直線ナリ.

A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル點, C ヲ AB ノ中點トセヨ:
A, B ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ C ヲ過リ AB ニ垂線ナル直線ナル可シ.

P ヲ A, B ヨリ 相等シキ距離 ニ 在ル 點 トセヨ;



PA, PB, PC ヲ 結ヒ付クヨ;
然レハ 二ツノ 三角形 PAC, PBC ニ 於テ,
PA ハ PB ニ 等シク, PC ハ 兩 形 ニ 通シ,
AC ハ BC ニ 等シ: 假設.
故ニ 角 ACP ハ 角 BCP ニ 等シクシテ, I, 21.
各 直角 ナリ;
故ニ P ハ C ヲ 過リ AB ニ 垂線ナル 直線 ノ 上ニ 在リ.
(是レ 命題 i ニ 當ル.)

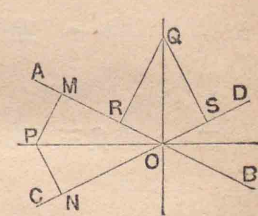
又 Q ヲ A, B ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ラザル 點 トセヨ;
QA, QB, QC ヲ 結ヒ付クヨ;
然レハ 二ツノ 三角形 QAC, QBC ニ 於テ,
AC ハ BC ニ 等シク, CQ ハ 兩 形 ニ 通シ,
AQ ハ BQ ニ 等シカラズ; 假設.
故ニ 角 ACQ ハ 角 BCQ ニ 等シカラズ; I, 20.
故ニ 何レモ 直角 ナラズ;
即 Q ハ C ヲ 過リ AB ニ 垂線ナル 直線 ノ 上ニ 在ラズ.
(是レ 命題 ii ノ 對偶 ニ 當ル.)

故ニ A, B ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ノ 軌跡 ハ

AB ノ 中點 C ヲ 過リ 之 ニ 垂線ナル 直線 ナリ.

軌跡 3. 相交ル 二ツノ 與ヘラレタル 直線 ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ノ 軌跡 ハ 二ツノ 直線 ノ 爲ス 角 ヲ 二等分スル 一双 ノ 直線 ナリ.

AB, CD ヲ O ニ 於テ 交ル 二ツノ 直線 トセヨ:
AB, CD ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ノ 軌跡 ハ 何ナル カ ヲ 見出スコ 下ノ 如シ.



P ヲ AB, CD ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ナリ トセヨ; 即 P ヨリ AB, CD ヘ 引ケル 垂線 PM, PN ハ 相等シ トセヨ;
PO ヲ 結ヒ付クヨ;
然レハ 二ツノ 直角三角形 POM, PON ニ 於テ,
PM ハ PN ニ 等シク,
PO ハ 兩 形 ニ 通ス;
故ニ 角 POM ハ 角 PON ニ 等シ; I, 22, 系 (甲).

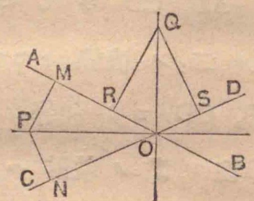
故ニ P ハ AB ト CD ノ爲ス角ヲ二等分スル二ツノ直線ノ中一ツノ上ニ在リ.

(是レ命題 i ニ當ル.)

又此二ツノ直線ノ中一ツノ上ニ在ル點ハ AB, CD ヨリ相等シキ距離ニ在リ;

何トナレハ, Q ヲ二ツノ二等分線ノ中何レニテモ一ツノ上ニ在ル點トセヨ;

Q ヨリ AB, CD ヘ垂線 QR, QS ヲ引ク;



然レハ二ツノ直角三角形 QRO, QSO ニ於テ,

角 QOR ハ角 QOS ニ等シク,

邊 QO ハ兩形ニ通ス;

故ニ QR ハ QS ニ等シ: I, 13, 系 4; 及 I, 10.

即 Q ハ AB, CD ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

(是レ命題 ii ニ當ル.)

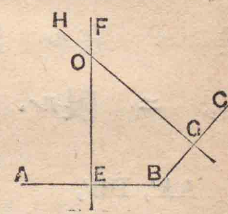
故ニ AB, CD ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ其ノ夾ム所ノ角ヲ二等分スル一双ノ直線ナリ.

(以上軌跡ニ關スル三ツノ命題ニ於テ故サラニ各異ナリタル方法ヲ用井タリ. 何レノ方法ヲ以テ證明スルモ可ナリ.)

軌跡ノ交リ. 今 X ハ要件 A ニ適スル點ノ軌跡, Y ハ要件 B ニ適スル點ノ軌跡ナリトセハ, A, B ノ兩要件ニ適スル點ハ X, Y ノ交リニ限ル.

(甲) 同一ノ直線ノ上ニ在ラザル三ツノ與ヘラレタル點ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ一ツ有リ, 而シテ唯一ツニ限ル.

A, B, C ヲ同一ノ直線ノ上ニ在ラザル三ツノ點トセヨ.



A, B ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ AB ノ中點 E ヲ過リ之ニ垂線ナル直線 EF ナリ; 軌跡 2.

又 B, C ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ハ BC ノ中點 G ヲ過リ之ニ垂線ナル直線 GH ナリ: 軌跡 2.

EF, GH ハ一ツノ點 O ニ於テ交ル;

何トナレハ, 若シ EF, GH ガ平行ナレハ, 之ニ垂線ナル AB, BC ハ同一ノ直線ト成ルヿハ容易ニ證明スルヲ得;

然ルニ AB, BC ハ (假設ニ依リテ) 同一ノ直線ナラズ;

故ニ EF, GH ハ平行ナラズ;

故ニ EF, GH ハ相交リ,

其ノ交點 O ハ A, B, C ヨリ相等シキ距離ニ在リ:

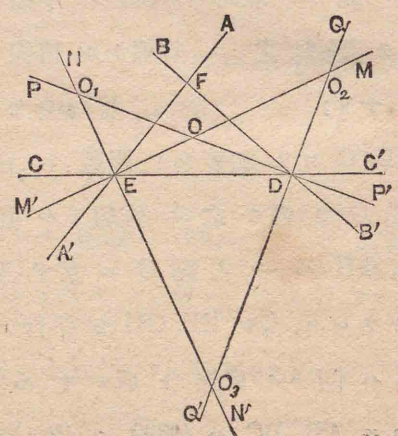
又 EF, GH ハ一ツヨリ多クノ點ニ於テ交ルヿナシ:

公理 3 (ロ).

故ニ A, B, C ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ O 一ツニ限ル.

(乙) 同一ノ點ヲ過ラズ又平行ナラザル三ツノ與ヘラレタル直線ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ四ツ有リ, 而シテ唯四ツニ限ル.

AA', BB', CC' ヲ三ツノ與ヘラレタル直線トセヨ.



此三ツノ直線ハ同一ノ點ヲ過ラズ又平行ニモアラザルヲ以テ,

一ツノ三角形 DEF ヲ成ス;

MM', NN' ヲ AA' ト CC' ノ爲ス角ヲ二等分スル二ツノ直線トセヨ;

PP', QQ' ヲ BB' ト CC' ノ爲ス角ヲ二等分スル二ツノ直線トセヨ;

然レハ AA' 及 CC' ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ皆 MM' 或ハ NN' ノ上ニ在リ; 軌跡 3.

又 BB' 及 CC' ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ皆 PP' 或ハ QQ' ノ上ニ在リ: 軌跡 3.

故ニ AA', BB' 及 CC' ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ MM' 或ハ NN' ノ上ニ在リテ, 且 PP' 或ハ QQ' ノ上ニ在リ:

今若シ MM' ト PP' ト平行ナレハ, 同シ側ニ在ル內角 MED, PDE ノ和ハ二直角ニ等シカラン;

然ルニ角 MED, PDE ハ夫々三角形 DEF ノ角 DEF, EDF ノ半分ナルヲ以テ合セテ二直角ニ等シカラズ,

故ニ MM' ト PP' ハ平行ナラズ, 唯一ツノ點 O ニ於テ交ル:

又 MM' ト QQ' ト平行ナレハ, 同位角 MED, QDC' ハ相等シカラン;

然ルニ角 QDC' ハ三角形 DEF ノ外角 FDC' ノ半分ナルヲ以テ內對角 FED ノ半分ナル角 MED ニ等シカラズ;

故ニ MM′ ト QQ′ モ平行ナラズ, 唯一ッノ點 O_2 ニ於テ交ル:

同樣ニ NN′ モ PP′ 及 QQ′ ニ平行ナラズ, 之ト各唯一ッノ點 O_1, O_3 ニ於テ交ル:

然レハ四ッノ點 O, O_1, O_2, O_3 ハ AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在リ, 而シテ此四ッノ點ノ外ニハ AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ナシ.

第五節ノ問題.

問題 58. 與ヘラレタル底邊ノ上ニ立ツ二等邊三角形ノ頂點ノ軌跡ハ何ナリヤ?

問題 59. 一ッノ與ヘラレタル直線外ノ一ッノ與ヘラレタル點ヨリ其直線ヘ引クル直線ノ中點ノ軌跡ハ何ナリヤ?

* 問題 60. 一ッノ與ヘラレタル直線ノ上ニ, 一ッノ他ノ與ヘラレタル直線ヨリ與ヘラレタル距離ニ在ル點ヲ求ム.

第一編ノ問題.

*問題 61. 三角形ノ邊ノ中點ヲ過リ之ニ垂線ナル三ッノ直線ハ同一ノ點ヲ過リ; 此交點ハ三角形ノ三ッノ頂點ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

此點ヲ三角形ノ外心ト稱ス.

*問題 62. 三角形ノ角ヲ二等分スル三ッノ直線ハ同一ノ點ヲ過リ; 此交點ハ三ッノ邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

此點ヲ三角形ノ內心ト稱ス.

*問題 63. 三角形ノ一ッノ角ヲ二等分スル直線, 及他ノ二ッノ頂點ニ於テノ外角ヲ二等分スル二ッノ直線ハ同一ノ點ヲ過リ; 此交點ハ三ッノ邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

此點ヲ三角形ノ傍心ト稱ス: 各ノ三角形ニ三ッノ傍心有リ.

*問題 64. 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引クル三ッノ垂線ハ同一ノ點ヲ過ル.

此點ヲ三角形ノ垂心ト稱ス.

三角形ノ頂點ヲ之ニ對スル邊ノ中點ニ結ビ付クル直線ヲ其ノ中線ト稱ス.

*問題 65. 三角形ノ三ツノ中線ハ同一ノ點ヲ過リ; 其交點ト各ノ頂點トノ距離ハ其中線ノ三分ノ二ナリ.

此點ヲ三角形ノ重心ト稱ス.

問題 66. 三角形ノ二ツノ邊ガ相等シカラザレバ, 小ナル邊ノ中點ヲ過ル中線ガ大ナル邊ノ中點ヲ過ル中線ヨリ大ナリ.

問題 67. 二等邊三角形ノ底邊ノ上ニ在ル點ノ他ノ二ツノ邊ヨリノ距離ノ和ハ一定ノ長サナリ. 點ガ底邊ノ延長ノ上ニ在ルトキハ如何?

第二編.

圓.

第一節.

本原ノ性質.

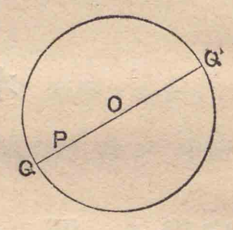
定義 1. 圓トハ一ツノ線ヲ以テ圍ミタル平面形ニシテ, 其ノ内ノ或ル一ツノ點ヨリ此線上ノ何レノ點マデ引クル直線モ皆相等シキモノナリ. 此線ヲ圓周或ハ單ニ周ト稱シ; 此點ヲ圓ノ中心又ハ圓心ト稱ス.

定義 2. 圓ノ直徑トハ中心ヲ過リ, 双方周ニ於テ終レル直線ナリ.

定義 3. 圓ノ半徑トハ中心ヨリ周マデ引クル直線ナリ. 半徑ハ直徑ノ半分ナリ.

定理 1. 圓 ノ 中心 ヨリ 一ツノ 點 ノ 距離 ハ, 其 點 ガ 圓周 ノ 內ニ 在ルカ, 或ハ 其ノ 上ニ 在ルカ, 或ハ 其ノ 外ニ 在ルカ ニ 從テ 半徑 ヨリ 小ナリ 或ハ 之 ニ 等シ, 或ハ 之 ヨリ 大ナリ.

O ヲ 圓 ノ 中心, P ヲ 任意ノ 點 トセヨ: 然ルトキハ P 點 ガ 圓周ノ 內ニ, 或ハ 其ノ 上ニ, 或ハ 外ニ 在レカ ニ 從テ, OP ハ 半徑 ヨリ 小ナリ, 或ハ 之 ニ 等シ, 或ハ 之 ヨリ 大ナル 可シ



O ト P トヲ 過ル 直線 ハ 圓周 ト 二ツノ 點 Q, Q′ ニ 於テ 交リ, 其他ノ 點 ニ 於テハ 交ラズ;
何トナレハ, 此 直線 ノ 上ニ O 點 ヨリ 半徑 ニ 等シキ 距離 ニ 在ル 點 ハ 唯 二ツ ニ 限レハ ナリ;
今 若シ P 點 ガ Q ト Q′ トノ 間ニ 在レハ, P 點 ハ 圓周 ノ 內ニ 在リ; 而シテ OP ハ OQ 或ハ OQ′ ヨリ 小ナリ, 即 半徑 ヨリ 小ナリ:
若シ P 點 ガ Q 或ハ Q′ ト 合スレハ, P ハ 圓周 ノ 上ニ

在リ; 而シテ OP ハ OQ 或ハ OQ′ ニ 等シ, 即 半徑 ニ 等シ:
若シ P 點 ガ OQ 或ハ OQ′ ノ 延長 ノ 上ニ 在レハ, P ハ 圓周 ノ 外ニ 在リ; 而シテ OP ハ OQ 或ハ OQ′ ヨリ 大ナリ, 即 半徑 ヨリ 大ナリ.

系 1. 一ツノ 點 ハ, 一ツノ 圓 ノ 中心 ヨリ ノ 距離 ガ 半徑 ヨリ 小ナルカ, 或ハ 之 ニ 等シキカ, 或ハ 之 ヨリ 大ナルカ ニ 從テ, 其 圓 ノ 周 ノ 內ニ, 或ハ 上ニ, 或ハ 外 ニ 在リ.

系 2. 圓 ハ 其ノ 中心 ニ 付テ 對稱ナリ; 即 圓 ノ 中心 ハ 其ノ 對稱 ノ 中心 ナリ.

系 3. 圓周 ハ 中心 ヨリ 一定ノ 距離 ニ 在ル 點 ノ 軌跡 ナリ.

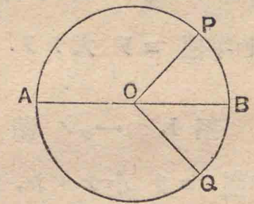
---

*問題 68. 一ツノ 圓 ニハ 中心 ハ 唯 一ツ 有ル ノミ.

問題 69. 一ツノ 與ヘラレタル 點 ヲ 過リ, 中心 ガ 一ツノ 與ヘラレタル 直線 ノ 上ニ 在ル 圓周 ハ 皆 他ノ 一ツノ 定マレル 點 ヲ 過ル.

定理 2. 圓ノ直徑ハ之ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ.

O ヲ圓 APBQ ノ中心,
AOB ハ其ノ直徑ニシテ之
ヲ二ツノ部分 APB, AQB ニ
分ツトセヨ:



然ルトキハ APB ハ全ク AQB ニ
等シカル可シ.

APB ノ上ニ任意ノ點 P ヲ取リ OP ヲ結ビ付ケヨ;
OQ ヲ AB ノ OP ニ反對ノ側ニ於テ角 BOP ニ等シキ
角 BOQ ヲ爲ス所ノ半徑トセヨ;
直徑 AOB ヲ折リ目トシテ APB ヲ AQB ノ上ニ折リ返セ;
然レバ角 BOP, BOQ ハ相等シキヲ以テ,
OP ハ OQ ノ上ニ重ナル;
又 OP ハ OQ ニ等シキヲ以テ,
P 點ハ Q 點ノ上ニ重ナル;
故ニ APB 上ノ點ハ皆夫々 AQB 上ノ或ル點ノ上ニ
重ナル:
同樣ニ AQB 上ノ點ハ皆夫々 APB 上ノ或ル點ノ上ニ

重ナル:
故ニ APB ト AQB ハ相合シ, 全ク相等シ;
故ニ直徑ハ圓ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ.

系 1. 互ニ垂線ナル二ツノ直徑ハ圓ヲ全ク相等シキ四ツノ部分ニ分ツ.

定義 4. 直徑ガ一ツノ圓ヲ分ツ所ノ各ノ部分ヲ**半圓**ト稱ス. 互ニ垂線ナル二ツノ直徑ガ一ツノ圓ヲ分ツ所ノ各ノ部分ヲ**四分圓**ト稱ス; 或ハ之ヲ**象限**トモ云フ.

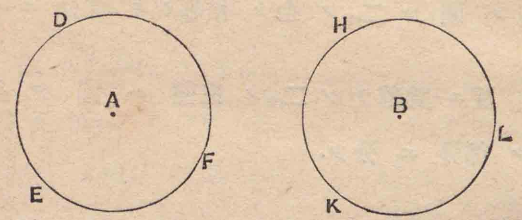
系 2. 圓ハ其ノ何レノ直徑ニ付テモ對稱ナリ, 即圓ノ直徑ハ何レモ圓ノ對稱ノ軸ナリ.

---

*問題 70. 圓內ノ一ツノ點ヨリ其點ヲ過ル直徑ト其ノ兩側ニ於テ相等シキ角ヲ爲ス所ノ二ツノ直線ヲ引キ周ニ於テ終ラシムルトキハ, 此直線ハ相等シ.

定理 3. 半徑ガ相等シキ圓ハ全ク相等シ.

DEF, HKL ヲ半徑ガ相等シキ二ツノ圓トセヨ:
然ルトキハ圓 DEF ハ全ク圓 HKL ニ等シカル可シ.



圓 DEF ヲ圓 HKL ノ上ニ置キ,
DEF ノ中心 A ハ HKL ノ中心 B ノ上ニ重ナル樣ニセヨ:
然レバ圓周 DEF 上ノ總テノ點ハ斯ク相合シタル中心ヨリノ距離ガ DEF ノ半徑即 HKL ノ半徑ニ等シキヲ以テ,皆夫々圓周 HKL ノ上ニ重ナル: II, 1, 系 1.
同樣ニ圓周 HKL 上ノ各ノ點ハ皆夫々圓周 DEF ノ上ニ重ナル:
故ニ二ツノ圓周ハ相合ス;
故ニ二ツノ圓ハ相合シ,全ク相等シ.

定義 5. 同シ中心ノ圓ヲ**同心圓**ト稱ス.

系 1. 相合スル二ツノ圓ノ半徑ハ相等シ.

系 2. 二ツノ圓ガ相合シタルトキハ,中心ヲ心トシ

テ其ノ一ツヲ回轉セシムルモ,二ツノ圓ハ常ニ相合ス.

系 3. 半徑ガ相等シカラザル同心圓ハ出會フ能ハズ.

系 4. 周ガ出會フ所ノ二ツノ圓ハ同心ナル能ハズ.

第一節ノ問題.

問題 71. 正方形ノ對角線上ノ任意ノ點ヲ過リ邊ニ平行ナル直線ヲ引クハ,此線ガ邊ト交ル所ノ點ハ皆對角線ノ交點ヲ中心トセル一ツノ圓ノ周ノ上ニ在リ.

第二節.

中心ニ於テノ角.

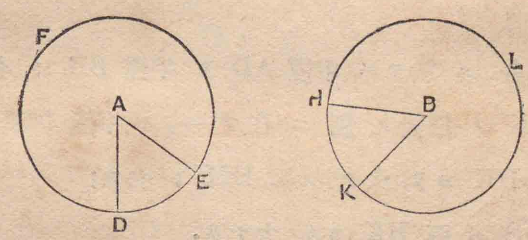
定義 6. **弧** トハ圓周ノ一部分ナリ. 合セテ全周ヲ成ス二ツノ弧ヲ互ニ**共軛ナリ**ト云フ; 其ノ大ナルモノヲ**優弧**, 小ナルモノヲ**劣弧**ト稱ス. (蓋シ優共軛弧, 劣共軛弧ト云フ可キヲ略セルナリ.)

定義 7. 圓ノ二ツノ半徑ガ其ノ中心ニ於テ成ス所ノ共軛角ノ中, 優角ハ此二ツノ半徑ノ端ノ間ニ在ル所ノ優弧ニ**對シ**, 其ノ上ニ**立ツ**ト云フ; 劣角ハ劣弧ニ**對シ**, 其ノ上ニ**立ツ**ト云フ.

定義 8. **扇形**トハ弧及其ノ兩端ヘ引ケル半徑ヲ以テ圍ミタル形ナリ. 扇形ノ角トハ其ノ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角ナリ.

定理 4. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 中心ニ於テノ相等シキ角ハ相等シキ弧ノ上ニ立ツ; 中心ニ於テノ相等シカラザル二ツノ角ノ中, 大ナル角ガ大ナル弧ノ上ニ立ツ.

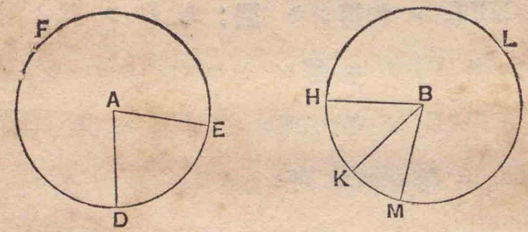
DEF, HKL ヲ相等シキ圓; A, B ヲ其ノ中心トシ;
角 DAE ヲ角 HBK ニ等シトセヨ:
然ルトキハ角 DAE ガ立ツ所ノ弧 DE ハ角 HBK ガ立ツ所ノ弧 HK ニ等シカル可シ



圓 DEF ヲ圓 HKL ノ上ニ置キ, 中心 A ガ中心 B ノ上ニ重ナル樣ニセヨ;
然レハ二ツノ圓ハ相等シキヲ以テ, 其ノ周ハ相合ス:
今 AD ガ BH ノ上ニ重ナルマデ圓 DEF ヲ廻轉セヨ;
二ツノ圓周ハ矢張相合シ, II, 3, 系 2.

D點ハH點ノ上ニ重ナル;
然レバ角DAEハ角HBKニ等シキヲ以テ,
AEハBKノ上ニ重ナリ, E點ハK點ノ上ニ重ナル;
故ニ弧DEハ弧HKト合シ; 之ニ等シ.

若シ角DAEガ角HBKヨリ大ナレバ, 弧DEハ弧HKヨリ大ナル可シ.



此場合ニ於テハ半徑ADト半徑BHト合スレバ, AEハBKノ反對ノ側ニ在ル一ツノ半徑BMト合シ, 弧DEハHKヨリ大ナル弧HMト合ス;
故ニ弧DEハ弧HKヨリ大ナリ.

問題72. 相等シキ圓ニ於テ, 中心ニ於テノ一ツノ角ガ他ノ角ノ二倍ナレバ, 第一ノ角ニ對スル弧モ第二ノ角ニ對スル弧ノ二倍ナリ.

定理5. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弧ハ中心ニ於テ相等シキ角ニ對ス; 相等シカラザル弧ノ中, 大ナル弧ガ中心ニ於テ大ナル角ニ對ス.

DEF, HKLヲ相等シキ圓; A, Bヲ其ノ中心トシ, DE, HKヲ夫々中心ニ於テ角DAE, HBKニ對スル弧トセヨ: (定理4ノ圖ヲ用ヰル.)
然ルトキハ弧DEガ弧HKヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 角DAEハ角HBKヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナル可シ.

定理4ニ依リテ,
若シ角DAEガ角HBKヨリ大ナレバ,
弧DEハ弧HKヨリ大ナル可シ;
若シ角DAEガ角HBKニ等シケレバ,
弧DEハ弧HKニ等シカル可シ;
若シ角DAEガ角HBKヨリ小ナレバ,
弧DEハ弧HKヨリ小ナル可シ:
今此三ツノ假設ノ中, 一ツハ必ズ眞ナリ;

又終結ハ互ニ相容レザルモノナリ;

故ニ轉換法ニ依リテ,上ノ定理ノ逆ハ皆各眞ナリ.

問題 73. 此定理ヲ直接ニ幾何學的ニ證明セヨ.

問題 74. 二ツノ共軛弧ガ相等シケレバ,各ノ弧ハ圓周ノ何分ナリヤ?

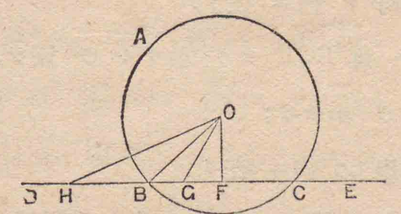
第三節.

弦.

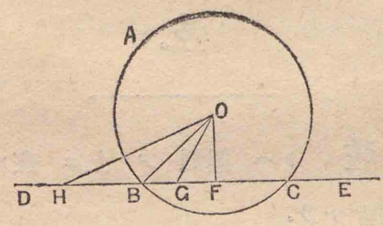
定義 9. 弦トハ圓周ノ上ニ在ル二ツノ點ヲ結ビ付クル直線ナリ.

定理 6. 圓ノ弦ノ上ニ在ル總テノ點ハ圓周ノ内ニ在リ: 而シテ其ノ双方ヘノ延長ノ上ニ在ル點ハ圓周ノ外ニ在リ.

ABC ヲ圓, BC ヲ其ノ一ツノ弦トシ; 之ヲ双方ヘ延長シタリトセヨ:



然ルトキハ BC 上ニ B ト C ノ間ニ在ル總テノ點ハ圓周內ニ在リ；其ノ延長 BD 或ハ CE 上ニ在ル總テノ點ハ(B ト C ヲ除クノ外ハ)圓周外ニ在ル可シ.



O ヲ中心, OF ヲ O ヨリ BC ヘ引クル垂線トセヨ；

然レハ F ハ B ト C ノ間ニ在リ； I, 18, 系.

G ヲ F ト B ノ間ノ任意ノ點, H ヲ BD 上ノ任意ノ點トセヨ；

OG, OB, OH ヲ結ヒ付ケヨ；

OF ハ BC ニ垂線ナルヲ以テ,

OF ハ OB ヨリ小ナリ； I, 18.

故ニ F ハ圓周ノ內ニ在リ： II, 1, 系 1.

又角 GOF ハ角 BOF ヨリ小ナルヲ以テ,

OG ハ OB ヨリ小ナリ； I, 18.

故ニ G ハ圓周ノ內ニ在リ； II, 1, 系 1.

同樣ニ F ト C ノ間ノ任意ノ點モ圓周ノ內ニ在ルコ

ヲ證明スルヲ得：

又角 HOF ハ角 BOF ヨリ大ナルヲ以テ,

OH ハ OB ヨリ大ナリ； I, 18.

故ニ H ハ圓周ノ外ニ在リ： II, 1, 系 1.

同樣ニ CE 上ノ任意ノ點モ C ヲ除クノ外ハ皆圓周ノ外ニ在リ.

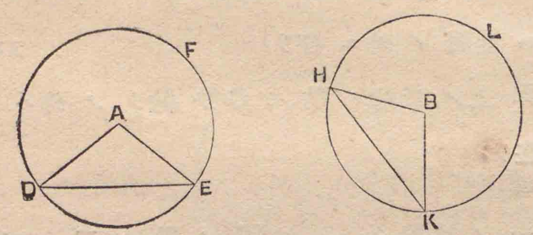
系. 一ツノ直線ハ一ツノ圓ノ周ト二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フ能ハズ.

定義 10. 割線トハ圓周ト二ツノ點ニ於テ交ル限リ無キ直線ナリ.

問題 75. I, 18 ニ依ラズ, I, 11, 13, 15, 及 II, 1, 系 1 ヲ用非テ此定理ヲ證明セヨ.

定理 7. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弧ニ對スル弦ハ相等シ; 相等シカラザル劣弧ノ中, 大ナル劣弧ニ對スル弦ガ他ヨリ大ナリ.

相等シキ圓 DEF, HKL ニ於テ, 弧 DE ヲ弧 HK ニ等シトセヨ:



然ルトキハ弦 DE ハ弦 HK ニ等シカル可シ.

トセヨ, AD, AE, BH, BK ヲ結ヒ付ケヨ:

然レハ弧 DE ハ弧 HK ニ等シキヲ以テ,

其ガ劣弧ナル時モ, 優弧ナル時モ,

三角形 ADE ノ角 DAE ハ三角形 BHK ノ角 HBK ニ等シ;　　II, 5 (劣弧ノ場合); 或ハ II, 5, 及公理戊(優弧ノ場合

故ニ二ツノ三角形 ADE, BHK ニ於テ,

邊 AD ハ邊 BH ニ等シク, 邊 AE ハ邊 BK ニ等シク,　　假設

角 DAE ハ角 HBK ニ等シ,

故ニ邊 DE ハ邊 HK ニ等シ.　　I, 9.

次ニ, 劣弧 DE ヲ劣弧 HK ヨリ大ナリトセヨ;

然ルトキハ弦 DE ハ弦 HK ヨリ大ナル可シ.

劣弧 DE ハ劣弧 HK ヨリ大ナルヲ以テ,

三角形 ADE ノ角 DAE ハ三角形 BHK ノ角 HBK ヨリ大ナリ;　　II, 5.

故ニ三角形 ADE, BHK ニ於テ,

邊 AD ハ邊 BH ニ等シク, 邊 AE ハ邊 BK ニ等シク,　　假設.

角 DAE ハ角 HBK ヨリ大ナリ;

故ニ第三邊 DE ハ第三邊 HK ヨリ大ナリ.　　I, 19.

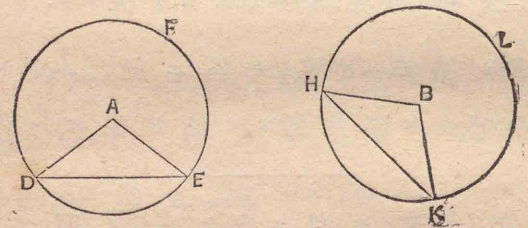
系. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シカラザル優弧ノ中, 大ナル弧ニ對スル弦ガ他ヨリ小ナリ.

問題 76. 相等シキ圓ニ於テ, 一ツノ弧ガ一ツノ他ノ弧ノ二倍ナルトキハ, 前者ニ對スル弦ハ後者ニ對スル弦ノ二倍ヨリ小ナリ.

定理 8. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弦ハ相等シキ優弧及相等シキ劣弧ニ對ス; 相等シカラザル弦ノ中, 大ナル弦ガ大ナル劣弧及小

ナル 優弧 ニ 對ス.

DE, HK ヲ相等シキ圓 DEF, HKL ノ弦トセヨ:
然ルトキハ弦 DE ガ弦 HK ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 劣弧 DE ハ劣弧 HK ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナル可シ;
又優弧 DE ハ優弧 HK ヨリ小ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ大ナル可シ.



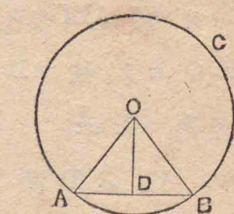
定理 7 ニ依リテ,
若シ劣弧 DE ガ劣弧 HK ヨリ大ナレバ,
弦 DE ハ弦 HK ヨリ大ナル可シ;
若シ劣弧 DE ガ劣弧 HK ニ等シケレバ,
弦 DE ハ弦 HK ニ等シカル可シ;
若シ劣弧 DE ガ劣弧 HK ヨリ小ナレバ,
弦 DE ハ弦 HK ヨリ小ナル可シ:

今此三ツノ假設ノ中, 一ツハ必ズ眞ナリ;
又終結ハ互ニ相容レザルモノナリ;
故ニ轉換法ニ依リテ, 弦 DE ガ弦 HK ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 劣弧 DE ハ劣弧 HK ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナリ:
而シテ全圓周 DEF ハ全圓周 HKL ニ等シキヲ以テ, 優弧 DE ハ優弧 HK ヨリ小ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ大ナリ.

系. 同シ或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弦ハ中心ニ於テ相等シキ角ニ對ス; 相等シカラザル弦ノ中, 大ナル弦ガ中心ニ於テ大ナル劣角ニ對ス.

定理 9. 中心ヨリ弦ノ中點ヘ引ケル直線ハ弦ニ垂線ナリ.

O ヲ圓 ABC ノ中心;
D ヲ弦 AB ノ中點トセヨ:
然ルトキハ直線 OD ハ弦 AB ニ垂線ナル可シ.

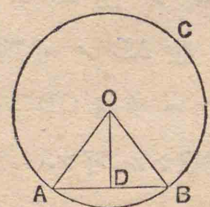


OA, OB ヲ結ヒ付ケヨ;
三角形 OAD, OBD ニ於テ,
邊 AD ハ邊 BD ニ等シク, 假設.
邊 OD ハ兩形ニ通シ,
邊 OA ハ邊 OB ニ等シ;
故ニ角 ODA ハ角 ODB ニ等シク, I, 21.
OD ハ AB ニ垂線ナリ.

問題 77. 圓內ニ於テ, 其ノ中心ヲ過ラザル二ッノ直線ガ相交ルトキハ, 各ガ他ヲ二等分スルヿハ決シテ無シ.

定理 10. 中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ハ其弦ヲ二等分ス.

O ヲ圓 ABC ノ中心,
OD ヲ O ヨリ弦 AB ヘ引ケル垂線トセヨ:
然ルトキハ AB ハ D 點ニ於テ二等分セラル可シ.



OA, OB ヲ結ヒ付ケヨ:
然レハ直角三角形 OAD, OBD ニ於テ,
邊 OA ハ邊 OB ニ等シク,
邊 OD ハ兩形ニ通ス;
故ニ AD ハ BD ニ等シ; I, 22, 系(甲).
即 AB ハ D 點ニ於テ二等分セラル.

系. 此垂線ノ延長ト圓周ト交ル所ノ二ッノ點ハ此弦ニ對スル劣弧及優弧ヲ二等分ス.

---

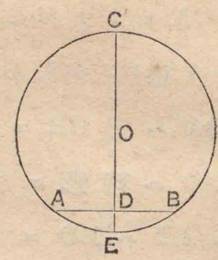
*問題 78. 一ッノ圓ノ平行ナル弦ノ中點ノ軌跡ハ之ニ垂線ナル直徑ナリ.

*問題 79. 平行ナル二ッ弦ハ圓周ヨリ相等シキ弧ヲ截リ取ル.

定理 11. 弦ノ中點ヨリ之ニ直角ニ引ケル直線ハ圓ノ中心ヲ過ル.

AB ヲ圓 ABC ノ一ッノ弦, CE ヲ AB ノ中點 D ヲ過リ之ニ直角ニ引ケル直線トセヨ:
然ルトキハ CD ハ圓ノ中心ヲ過ル可シ.

CD ハ AB ノ 中點 ヲ 過リ 之 ニ 垂線ナル ヲ 以テ, CD ハ A, B ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ノ 軌跡 ナリ; I, 軌跡 2.



圓 ノ 中心 ハ A, B ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在リ;

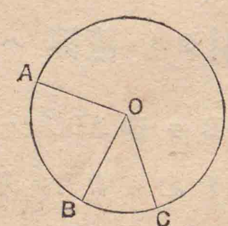
故ニ CD ノ 上ニ 在リ;

即 CD ハ 中心 ヲ 過ル.

問題 80. 二ツノ 與ヘラレタル 點 ヲ 過ル 所ノ 總テノ 圓周 ノ 中心 ノ 軌跡 ハ 此 二ツノ 點 ヲ 結ビ付クル 直線 ヲ 直角ニ 二等分スル 直線 ナリ.

定理 12. 同一ノ 直線 上ニ 在ラザル 三ツ ノ 點 ヲ 過ル 圓周 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル.

A, B, C ヲ 同一ノ 直線 上ニ 在ラザル 三ツノ 點 トセヨ: 然ルトキハ A, B, C ヲ 過ル 圓周 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル 可シ.



A, B, C ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ヲ O トセヨ;

I, 軌跡 ノ 交リ, (甲).

OA, OB, OC ヲ 結ビ付ケヨ;

OA, OB, OC ハ 相等シキ ヲ 以テ,

O ヲ 中心 トシ, OA ニ 等シキ 半徑 ヲ 以テ 畫ケル 圓 ノ 周 ハ A, B, C ヲ 過ル;

而シテ A, B, C ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 點 ハ 唯 一ツ ニ 限リ,

I, 軌跡 ノ 交リ, (甲).

同シ 中心 ヨリ 同シ 半徑 ヲ 以テ 畫ケル 圓 ハ 全ク 同一ナル ヲ 以テ, A, B, C ヲ 過ル 圓周 ハ 唯 一ツ ニ 限ル.

系 1. 三ツノ 同シ 點 ヲ 過ル 圓周 ハ 全ク 相合ス.

系 2. 相合セザル 二ツノ 圓周 ハ 二ツ ヨリ 多クノ 點 ニ 於テ 出會フ 能ハズ.

系 3. 圓 内ノ 或ル 點 ヨリ 圓周 ヘ 引クル 直線 ガ 二ツ ヨリ 多ク 相等シクレハ, 其 點 ハ 中心 ナリ,

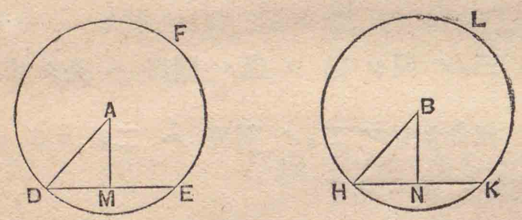
系 4. 三角形 ノ 三ツノ 頂點 ヲ 過リ, 一ツノ 圓 ヲ 畫ク ヲ 得, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル.

定義 11. 三角形 ノ 三ツノ 頂點 ヲ 過ル 圓 ヲ 其ノ **外接圓** ト 稱ス: 其ノ 中心 ヲ 三角形 ノ **外心** ト 稱ス.

定理 13. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弦ハ中心ヨリノ距離ガ相等シ; 相等シカラザル弦ノ中, 大ナルモノガ小ナルモノヨリ中心ニ近シ.

DEF, HKL ヲ相等シキ圓; A, B ヲ其ノ中心; DE, HK ヲ相等シキ弦; AM, BN ヲ中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線トセヨ:

然ルトキハ AM ハ BN ニ等シカル可シ.



AD, BH ヲ結ヒ付ケヨ;

AM ハ中心ヨリ DE ヘ引ケル垂線ナルヲ以テ,

DM ハ DE ノ半分ナリ; II, 10.

同様ニ HN ハ HK ノ半分ナリ; II, 10.

然ルニ DE ハ HK ニ等シ; 假設.

故ニ DM ハ HN ニ等シ: 公理壬.

故ニ二ツノ直角三角形 ADM, BHN ニ於テ,

邊 DM ハ邊 HN ニ等シク,

邊 AD ハ邊 BH ニ等シ; 假設.

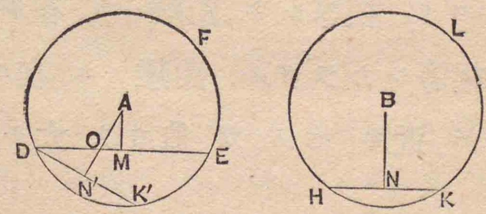
故ニ邊 AM ハ邊 BN ニ等シ. I, 22, 系 (甲).

次ニ, 弦 DE ヲ HK ヨリ大ナリトセヨ:

然ルトキハ AM ハ BN ヨリ小ナル可シ.

圓 HKL ヲ圓 DEF ノ上ニ置キ, B 點ハ A 點ト合シ, H 點ハ D 點ト合シ, 劣弧 HK ハ劣弧 DE ノ上ニ重ナル様ニセヨ:

然レハ弦 HK ハ弦 DE ヨリ小ナルヲ以テ, 假設.



劣弧 HK ハ劣弧 DE ヨリ小ナリ; II 8

故ニ K ハ劣弧 DE 上ノ一ツノ點 K′ ト合ス;

然レハ弦 DK′ 上ノ點ハ (D ヲ除クノ外ハ) 皆弦 DE ノ A ニ反對ノ側ニ在リ;

N′ ヲ N 點ノ重ナル所ノ點トセヨ;

AN′ ヲ結ヒ付ケ, DE ト O ニ於テ交ルトセヨ;

然レハ AN′ ハ AO ヨリ大ナリ, 公理甲.

而シテ AO ハ AM ヨリ大ナリ, I, 18.

故ニ AN′ ハ勿論 AM ヨリ大ナリ;

即 AM ハ BN ヨリ小ナリ.

問題 81. 此定理ノ最初ノ部分ヲ後ノ部分ト同シ方法ニ依リテ證明セヨ.

定理 14. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ中心ヨリ相等シキ距離ニ在ル弦ハ相等シ; 相等シカラザル距離ニ在ル弦ノ中, 中心ニ近キモノガ他ヨリ大ナリ.

DEF, HKL ヲ相等シキ圓; A, B ヲ其ノ中心; AM, BN ヲ中心ヨリ夫々弦 DE 及 HK ヘ引ケル垂線トセヨ: (定理 13 ノ圓ヲ用井ル.)

然ルトキハ距離 AM ガ距離 BN ヨリ小ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ, 弦 DE ハ弦 HK ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナル可シ.

定理 13 ニ依リテ,

若シ弦 DE ガ弦 HK ヨリ大ナレハ,

AM ハ BN ヨリ小ナル可シ;

若シ弦 DE ガ弦 HK ニ等シケレハ,

AM ハ BN ニ等シカル可シ;

若シ弦 DE ガ弦 HK ヨリ小ナレハ,

AM ハ BN ヨリ大ナル可シ:

今此三ツノ假設ノ中, 一ツハ必ズ眞ナリ;

又終結ハ互ニ相容レザルモノナリ;

故ニ轉換法ニ依リテ, 上ノ定理ノ逆ハ皆各眞ナリ.

系. 直徑ハ圓ノ最大ナル弦ナリ.

問題 82. 此定理ヲ直接ニ幾何學的ニ證明セヨ.

問題 83. 圓內ノ一ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル最短キ弦ハ其點ヲ過ル直徑ニ垂線ナリ.

第三節ノ問題.

問題 84. 一ツノ圓ニ於テ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ハ同心圓ナリ.

問題 85. 二ツノ相等シキ圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線ニ平行ナル直線ヨリ其二ツノ圓ガ截リ取ル弦ハ相等シ.

問題 86. 二等邊三角形ノ頂角ガ正三角形ノ外角ニ等シクレハ,其ノ外接圓ノ半徑ハ相等シキ邊ニ等シ.

第四節.

弓形ニ於テノ角.

定義 12. 圓ノ弓形トハ弦ト之ニ對スル二ツノ共軛弧ノ中ノ一ツヲ以テ圍ミタル形ナリ.

弓形ハ之ヲ圍ム弧ガ優弧ナルカ,或ハ劣弧ナルカニ從テ優弓形或ハ劣弓形ト稱ス.

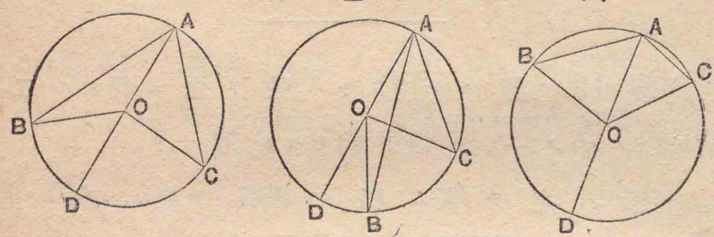
定義 13. 圓周上ノ一ツノ點ヨリ引クル任意ノ二ツノ弦ノ夾ム角ヲ周ニ於テノ角ト稱ス;而シテ此角ハ其ノ二ツノ邊ノ間ニ在ル弧ノ上ニ立ツト云フ.

定義 14. 弓形ノ弧ノ上ノ一ツノ點ヨリ其ノ弧ノ兩端ヘ引クル二ツノ直線ノ夾ム角ヲ弓形ニ於テノ角ト稱ス;而シテ其弓形ハ此角ヲ含ムト云フ.

定理 15. 周ニ於テノ角ハ同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角ノ半分ナリ.

BAC ヲ弧 BC ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角; BOC ヲ同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角トセヨ:
然ルトキハ角 BAC ハ角 BOC ノ半分ナル可シ.

甲　　乙　　丙



AO ヲ結ヒ付ケ, 之ヲ延長シテ圓周ト再ヒ D ニ於テ出會ハシメヨ;

(甲圖及乙圖ニ於テハ, 弧 BC ハ劣弧ニシテ, 角 BOC ハ劣角ナリ; 甲圖ニ於テハ, 中心 O ハ角 BAC ノ內ニ在リ; 乙圖ニ於テハ, 中心 O ハ角 BAC ノ外ニ在リトス: 丙圖ニ於テハ, 弧 BC ハ優弧ニシテ, 角 BOC ハ優角ナリ.)

然レハ OA ハ OB ニ等シキヲ以テ,

角 OAB ハ角 OBA ニ等シ; I, 11.

然ルニ外角 BOD ハ二ツノ內對角 OAB, OBA ノ和ニ等シ; I, 13.

故ニ角 OAB ハ角 BOD ノ半分ナリ;

同樣ニ角 OAC ハ角 COD ノ半分ナリ;

故ニ二ツノ角 OAB, OAC ノ和 (甲及丙圖ノ塲合) 或ハ差 (乙圖ノ塲合) ナル角 BAC ハ二ツノ角 BOD, COD ノ和或ハ差ナル角 BOC ノ半分ナリ. 公理丁或ハ戊.

---

*問題 87. 一ツノ圓內ノ點 E ニ於テ交ル二ツノ弦 AB, CD ガ爲ス所ノ角 AEC ハ弧 AC 及 BD ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角ノ和ノ半分ナリ.

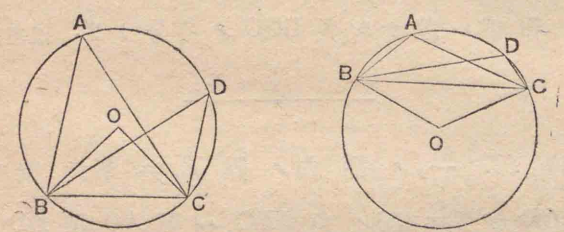
*問題 88. 一ツノ圓ノ二ツノ弦 AB, CD ヲ延長シ圓外ノ點 E ニ於テ出會ハシムルトキハ, 角 AEC ハ弧 AC 及 BD ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角ノ差ノ半分ナリ.

*問題 89. 三角形 ABC ノ頂點 A, B, C ヲ過ル圓周ノ中心 O ヨリ一ツノ邊 BC ヘ垂線 OD ヲ引ケハ, 角 BOD ハ角 A (或ハ其ノ補角) ニ等シ.

定理 16. 同シ弓形ニ於テノ角ハ相等シ.

BAC, BDC ヲ同シ弓形 BADC ニ於テノ角トセヨ: 然ルトキハ角 BAC ハ角 BDC ニ等シカル可シ.

中心 O ヲ B 及 C ト結ヒ付ケヨ;



角 BAC, BDC ハ弧 BADC ト共軛ナル弧 BC ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角ナルヲ以テ,

何レモ同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角 BOC ノ半分ナリ; II, 15.

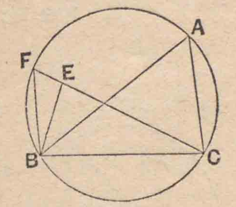
故ニ角 BAC ハ角 BDC ニ等シ. 公理壬.

系 1. 弓形ノ弦ガ其ノ内ノ一ツノ點ニ於テ對スル所ノ角ハ弓形ニ於テノ角ヨリ大ナリ; 弦ガ弓形ト同シ側ニ其ノ外ニ在ル點ニ於テ對スル所ノ角ハ弓形ニ於テノ角ヨリ小ナリ.

E ヲ弓形 BAC ノ内ノ一ツノ點トセヨ:

然ルトキハ角 BEC ハ角 BAC ヨリ大ナル可シ.

CE ヲ延長シ圓周ト再ヒ F ニ於テ出會ハシメ, BF ヲ結ヒ付ケヨ;



然レハ三角形 BEF ノ外角 BEC ハ内對角 BFC ヨリ大ナリ, I, 13.

即 BAC ヨリ大ナリ.

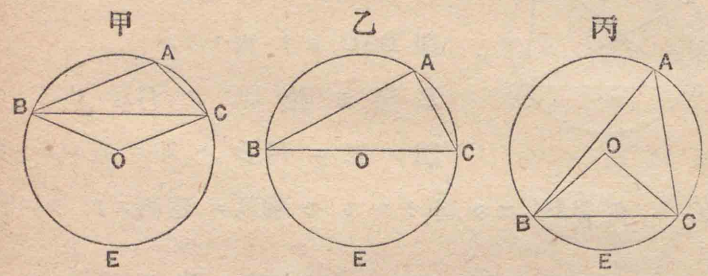
E 點ガ弦 BC ノ弓形 BAC ト同シ側ニ弓形ノ外ニ在レハ, 角 BEC ハ角 BAC ヨリ小ナルコトモ容易ニ證明スルヲ得.

系 2. 弓形ト同シ側ニ於テ, 其ノ弦ヲ底邊トセル三角形ノ頂點ハ, 其頂點ニ於テノ角ガ弓形ニ於テノ角ヨリ小ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ, 弓形ノ外ニ, 或ハ其ノ弧ノ上ニ, 或ハ其ノ内ニ在リ. (定理 16 及系 1 ヨリ轉換法ニ依リテ證明スルヲ得.)

系 3. 一ツノ與ヘラレタル有限直線ノ同シ側ニ於テ, 其直線ガ常ニ一定ノ角ニ對スル樣ナル點ノ軌跡ハ其直線ヲ弦トセル圓弧ナリ.

定理 17. 弓形ニ於テノ角ハ, 其弓形ガ半圓ヨリ小ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ, 一直角ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナリ.

BAC ヲ圓 ABEC ノ弓形 BAC ニ於テノ角トセヨ:



然ルトキハ弓形 BAC ガ半圓ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ,角 BAC ハ一直角ヨリ大ナリ,或ハ之ニ等シ,或ハ之ヨリ小ナル可シ.

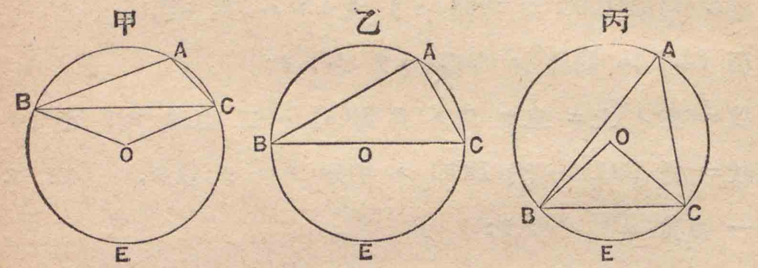
O ヲ中心トシ, OB, OC ヲ結ヒ付ケヨ;
若シ弓形 BAC ガ半圓ヨリ小ナレハ (甲圖),
弧 BEC ハ圓周ノ半分ヨリ大ナリ;
故ニ弧 BEC ノ上ニ立ツ所ノ角 BOC ハ優角ナリ,即二直角ヨリ大ナリ;
故ニ角 BAC ハ優角 BOC ノ半分ナルヲ以テ, II, 15.
一直角ヨリ大ナリ:
若シ弓形 BAC ガ半圓ナレハ (乙圖),
弧 BEC ハ圓周ノ半分ナリ;
故ニ其ノ上ニ立ツ所ノ角 BOC ハ二直角ナリ;

故ニ角 BAC ハ角 BOC ノ半分ナルヲ以テ, II, 15.
一直角ニ等シ:
若シ弓形 BAC ガ半圓ヨリ大ナレハ (丙圖),
弧 BEC ハ圓周ノ半分ヨリ小ナリ;
故ニ其ノ上ニ立ツ所ノ角 BOC ハ二直角ヨリ小ナリ;
故ニ角 BAC ハ角 BOC ノ半分ナルヲ以テ, II, 15.
一直角ヨリ小ナリ:
然レハ弓形 BAC ガ半圓ヨリ小ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ,角 BAC ハ一直角ヨリ大ナリ,或ハ之ニ等シ,或ハ之ヨリ小ナリ.

問題 90. 三角形ノ二邊ヲ直徑トシテ畫キタル圓ノ周ハ第三邊或ハ其ノ延長ノ上ニ於テ出會フ.

定理 18. 弓形ハ,其ニ於テノ角ガ一直角ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ,半圓ヨリ小ナリ,或ハ之ニ等シ,或ハ之ヨリ大ナリ.

BAC ヲ圓 ABEC ノ弓形; BAC ヲ其弓形ニ於テノ角トセヨ:



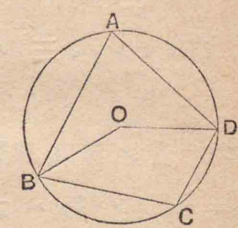
然ルトキハ角 BAC ガ一直角ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 弓形 BAC ハ半圓ヨリ小ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ大ナル可シ.

定理 17 ニ依リテ,
若シ弓形 BAC ガ半圓ヨリ小ナレハ,
角 BAC ハ一直角ヨリ大ナル可シ;
若シ弓形 BAC ガ半圓ナレハ,
角 BAC ハ一直角ニ等シカル可シ;
若シ弓形 BAC ガ半圓ヨリ大ナレハ,
角 BAC ハ一直角ヨリ小ナル可シ:
今此三ツノ假設ノ中, 一ツハ必ズ眞ナリ,
而シテ終結ハ互ニ相容レザルモノナリ;
故ニ轉換法ニ依リテ, 上ノ定理ノ逆ハ皆各眞ナリ.

定義 15. 一ツノ直線形ノ頂點ガ皆一ツノ圓周ノ上ニ在ルトキハ, 其形ハ圓ニ内接スト云フ; 圓ハ其形ニ外接スト云フ.

定理 19. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナリ.

ABCD ヲ圓 ABCD ニ内接スル四邊形トセヨ:



然ルトキハ相對スル角 BAD, BCD ハ互ニ補角ナル可シ.

O ヲ圓ノ中心トシ, OB, OD ヲ結ヒ付ケヨ:

然レハ弧 BCD ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角 BAD ハ同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角 BOD ノ半分ナリ; II, 15.

又弧 BAD ノ上ニ立ツ所ノ周ニ於テノ角 BCD ハ同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角 BOD ノ半分ナリ: II, 15.

故ニ角 BAD, BCD ノ和ハ二ツノ共軛角ノ和ノ半分ナリ, 即四直角ノ半分ナリ;

故ニ角 BAD, BCD ハ互ニ補角ナリ.
故ニ又角 ABC, ADC モ互ニ補角ナリ. (或ハ同様ニ證明スルモ可ナリ.)

系 1. 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハ其ノ內對角(其外角ニ隣レル內角ニ對スル內角)ニ等シ.

系 2. 四邊形ノ對角ガ互ニ補角ナレバ, 之ニ外接スル圓ヲ畫クコヲ得.

何トナレバ, 三ツノ頂點ヲ過ル圓ハ唯一ッ有リ,
II, 12.
而シテ若シ第四頂點ガ此圓ノ上ニ在ラザレバ, 其頂點ニ於テノ角ハ之ニ對スル角ノ補角ナル能ハザレバナリ.
II, 16, 系 1.

問題 91. AC, BD ヲ結ビ付ケ, II, 16 及 I, 13 ヲ用ヰテ此定理ヲ證明セヨ.

問題 92. 一ッノ圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ二ッノ邊 AB, DC ヲ延長シテ E 點ニ於テ出會ハシメ, 又他ノ二ッノ邊 BC, AD ヲ延長シテ F 點ニ於テ出會ハシム; 若シ B, E, F, D ヲ過ル一ッノ圓ヲ畫クコヲ得レバ, AC ハ初ノ圓ノ直徑, EF ハ第二ノ圓ノ直徑ナリ.

第四節ノ問題.

問題 93. AOB, COD ハ互ニ垂線ナル二ッノ直徑ナリ; OA 上ニ任意ニ OE ヲ取リ, OD 上ニ之ニ等シク OF ヲ取リテ, BF ヲ延長セバ, DE ニ垂線ナル可シ; 又 BF, DE ノ延長ガ夫々圓周ト K, L ニ於テ出會ヘバ, 弧 KL ハ周ノ四分ノ一ナル可シ.

*問題 94. AB ハ一ッノ圓ノ定マレル弦ナリ, P ハ圓周上ノ任意ノ點ナリ; AP ト BP ノ為ス角ヲ二等分スル直線ハ皆各二ッノ定マレル點ノ中ノ一ッヲ過ル可シ.

問題 95. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂線ナルキハ, 其ノ交點ヨリ一ッノ邊ヘ引ケル垂線ノ延長ハ之ニ對スル邊ヲ二等分ス.

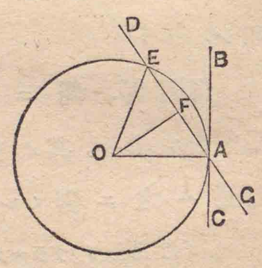
(此定理ヲブラーメグプタノ定理ト稱ス.)

*問題 96. 三角形ノ外接圓ノ周上ノ任意ノ點ヨリ三ッノ邊或ハ其ノ延長ヘ引ケル垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ. (此定理ヲシムソンノ定理ト稱ス; 此直線ヲ其點ニ關係シテ三角形ノシムソン線ト名ク.)

第五節.

切線.

定理 20. 圓周上ノ一ツノ點ヲ過ル總テノ直線ノ中, 獨リ其點ヘノ半徑ニ垂線ナル直線ハ再ヒ圓周ト出會ハズ, 其他ハ皆之ト一ツノ他ノ點ニ於テ出會フ.



A ヲ圓周上ノ一ツノ點, O ヲ其ノ中心, BAC ヲ半徑 OA ニ垂線ナル直線, AD ヲ他ノ任意ノ直線トセヨ:

然ルトキハ BAC ハ再ヒ圓周ト出會ハズ, AD ハ之ト一ツノ他ノ點ニ於テ出會フ可シ.

OA ハ BAC ニ垂線ナルヲ以テ, OA ハ O ヨリ直線 BAC ヘ引クル直線ノ中最短キ

モノナリ; I, 18.

故ニ O ヨリ直線 BAC 上ノ他ノ點ヘ引クル直線ハ皆 OA ヨリ大ナリ, 即圓ノ半徑ヨリ大ナリ;

故ニ BAC 上 A ヨリ他ノ點ハ皆圓ノ外ニ在リ; II, 1, 系 1.

即直線 BAC ハ再ヒ圓周ト出會ハズ.

又 O ヨリ AD ヘ垂線 OF ヲ引キ, OF ト角 AOF ニ等シキ角ヲ OF ノ反對ノ側ニ爲ス所ノ直線 OE ヲ引ク;

然レハ OA, OE ハ垂線 OF ト相等シキ角ヲ爲スヲ以テ互ニ相等シ; I, 18.

故ニ OE ハ圓ノ半徑ニ等シ;

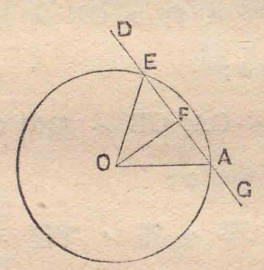
即 E ハ圓周上ノ一ツノ點ニシテ, 直線 AD ハ圓周ト再ヒ E ニ於テ出會フ;

而シテ A, E ヨリ他ノ點ニ於テ出會フコトナシ. II, 6, 系.

定義 16. 圓周ト一ツノ點ニ於テ出會ヒ, 双方ヘ窮リ無ク延長スルモ再ヒ之ト出會ハザル直線ハ其點ニ於テ圓ニ切ス, 或ハ圓ノ**切線**ナリト云フ: 其點ヲ**切點**ト稱ス.

定理 20 ヲ亦下ノ如ク證明スルヲ得. (是ヲ極限法ト名ク.)

A ヲ圓周上ノ一ツノ點, O ヲ其ノ中心, GAD ヲ A ヲ過リ OA ニ垂線ナラザル直線トセヨ:
然ルトキハ GAD ハ圓周ト他ノ一ツノ點ニ於テ出會フ可シ.



O ヨリ GD ヘ垂線 OF ヲ引ク; OF ト角 AOF ニ等シキ角ヲ OF ノ反對ノ側ニ爲ス所ノ直線 OE ヲ引ク;
然レバ OE, OA ハ垂線 OF ト相等シキ角ヲ爲スヲ以テ,
OE ハ OA ニ等シ; I, 18.
故ニ OE ハ圓ノ半徑ニ等シ;
故ニ E ハ圓周ノ上ニ在リ; II, 1, 系 1.
即直線 GD ハ圓周ト A ヨリ他ノ一ツノ點 E ニ於テ出會フ,
而シテ其他ノ點ニ於テ出會フコトナシ. II, 6, 系.

次ニ, 此 E 點ハ常ニ圓周ノ上ニ在リテ漸々 A 點ニ近ツキ, 終ニ之ト合スルトセヨ;
然ルトキハ GD ハ漸々 A ヲ過リ OA ニ垂線ナル直線ニ近ツキ, 終ニ之ト合ス可シ.

E 點ガ圓周ノ上ヲ A ノ方ヘ動クニ從テ,
弧 AE ハ常ニ減少ス,
故ニ角 AOE モ亦從テ減少ス, II, 5.
而シテ E 點ガ終ニ A 點ト合スルトキハ, 角 AOE ハ全ク無クナル;
故ニ角 AOE ノ半分ナル角 AOF モ從テ減少シ, 終ニ全ク無クナル:
今角 OAF ハ角 AOF ノ餘角ナリ; I, 13, 系 2.
故ニ角 OAF ハ常ニ增大シ, 終ニ直角トナル:
即 GD ハ漸々 OA ニ垂線ナル直線ニ近ツキ, 終ニ之ト合ス.

此證明法ヲ採ルトキハ定義 16 ヲ下ノ如クニ述フ可シ:

定義 16 (第二). 圓ノ割線ガ, 其ノ二ツノ交點ガ常ニ相近ツキ終ニ相合スル樣ニ動クトキハ, 其ノ極限ノ位置ニ於テ其直線ハ圓ニ**切ス**或ハ圓ノ**切線**ナリト云フ: 二ツノ交點ノ合シタル點ヲ**切點**ト稱ス.

定理 20 ハ下ノ系 1 及系 2 ノ如ク陳フルヲ得.

系 1. 圓周上ノ一ツノ點ニ於テ一ツノ切線ヲ引クヲ得; 而シテ唯一ツニ限ル.

系 2. 圓ノ切線ハ切點ヘノ直徑ニ垂線ナリ.

系 3. 圓ノ中心ハ切點ニ於テ切線ニ垂線ナル直線ノ上ニ在リ.

系 4. 中心ヨリ切線ヘ引ケル垂線ハ之ト切點ニ於テ出會フ.

問題 97. 一ツノ圓ノ相等シキ弦ハ皆之ト同心ナル一ツノ圓ニ切ス.

定理 21. 直線ハ一ツノ圓ノ中心ヨリ其ノ距離ガ半徑ヨリ小ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ, 其圓周ト交リ, 或ハ之ニ切シ, 或ハ全ク之ト出會ハズ.

中心ヨリ直線ノ距離ガ半徑ヨリ小ナリトセヨ: 然レハ中心ヨリ直線ヘ引ケル垂線ノ足ハ圓周ノ內

ニ在リ; II, 1, 系 1.

又此直線ノ上ニ中心ヨリ何程ニテモ遠キ點ヲ取ルヲ得;

即此直線上ニ圓周外ノ點有リ; II, 1, 系 1.

故ニ此直線ノ上ニハ圓周ノ內ノ點モ有リ, 又外ノ點モ有リ;

即直線ハ圓周ト交ル.

次ニ, 中心ヨリ直線ノ距離ガ半徑ニ等シトセヨ: 然レハ此直線ハ半徑ノ端ニ於テ之ニ垂線ナリ;

故ニ圓ニ切ス II, 20.

次ニ, 中心ヨリ直線ノ距離ガ半徑ヨリ大ナリトセヨ: 然ルトキハ此直線上ノ總テノ點ハ中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ大ナリ; I, 18.

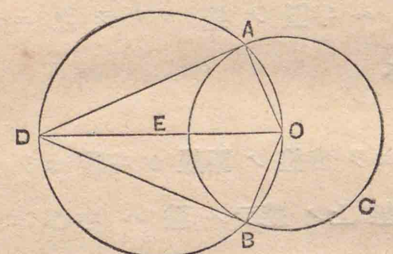
故ニ皆圓周外ニ在リ;

即此直線ハ全ク之ト出會ハズ.

系. 圓ノ中心ヨリ一ツノ直線ノ距離ハ, 其直線ガ圓周ト交ルカ, 或ハ之ニ切スルカ, 或ハ全ク之ト出會ハザルカニ從テ, 半徑ヨリ小ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ大ナリ.

定理 22. 圓外ノ一ッノ點ヨリ之ヘ二ッノ切線ヲ引クヲ得; 而シテ唯二ッニ限ル.

ABC ヲ一ッノ圓, D ヲ其ノ外ニ在ル一ッノ點トセヨ:
然ルトキハ D ヨリ ABC ヘ二ッノ切線ヲ引クヲ得, 而シテ唯二ッニ限ル可シ.



D ヲ ABC ノ中心 O ト結ビ付ケヨ;
E ヲ DO ノ中點トセヨ;
E ヲ中心トシ, 半徑 EO ヲ以テ圓ヲ畫ケ;
然レハ OD ハ此圓ノ直徑ニシテ, 之ヲ二ッノ半圓ニ分ツ;
而シテ D 點ハ圓 ABC ノ外ニ在リ, O 點ハ圓 ABC

ノ内ニ在ルヲ以テ,
各ノ半圓ノ弧ハ圓 ABC ノ周ト交ル;
此交點ヲ A, B トセヨ;
DA, DB, OA, OB ヲ結ビ付ケヨ;
然レハ DAO ハ半圓ニ於テノ角ナルヲ以テ,
直角ナリ; II, 17.
故ニ DA ハ圓 ABC ニ切ス; II, 20.
同樣ニ DB モ圓 ABC ニ切ス;
故ニ D ヨリ二ッノ切線ヲ引クヲ得:
又 D ヨリ此他ニ任意ノ直線ヲ引キ圓周 ABC ト F 點ニ於テ出會フトセヨ;
圓 DAOB ハ圓 ABC ト A, B ヨリ他ノ點ニ於テ出會フ能ハザルヲ以テ, II, 12, 系 2.
F 點ハ圓周 DAOB ノ上ニ在ラズ;
故ニ DFO ハ直角ナラズ; II, 17, 及 II, 16, 系 1.
故ニ DF ハ切線ナラズ; II, 20.
故ニ D ヨリ圓 ABC ヘ引クル切線ハ DA, DB ノ二ッニ限ル.

系. 圓外ノ一ッノ點ヨリ之ヘ引クル二ッノ切線ハ相等シク; 其點ト圓ノ中心トヲ結ビ付クル直線ト相等シキ角ヲ爲ス. I, 22, 系 (甲).

*問題 98. 一ッノ圓ガ二ッノ相交ル直線ニ切スレハ,其ノ中心ハ此直線ノ夾ム角ヲ二等分スル直線ノ上ニ在リ.

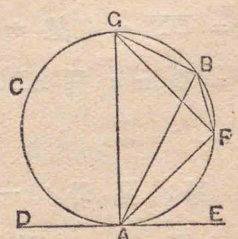
*問題 99. 二ッノ平行ナル直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

*問題 100. 四邊形ノ邊ガ皆同シ圓ニ切スルトキハ相對スル邊ノ和ハ相等シ.

*問題 101. 問題 100 ノ逆ヲ證明セヨ.

定理 23. 切線,及切點ヨリ引ケル弦ノ夾ム角ハ各隣リノ弓形ニ於テノ角ニ等シ.

DE ヲ A ニ於テ圓 ABC ノ切線; AB ヲ A ヨリ引ケル弦トセヨ:



然ルトキハ鋭角 BAE ハ其ノ隣リノ弓形 ACB ニ於テノ角ニ等シク,鈍角 BAD ハ其ノ隣リノ弓形 AFB ニ於テノ角ニ等シカル可シ.

直徑 AG ヲ引キ, BG ヲ結ヒ付ケヨ;

AG ハ直徑, DAE ハ切線ナルヲ以テ,

角 GAE ハ直角ニシテ, II, 20.

角 BAE ハ角 BAG ノ餘角ナリ

又角 ABG ハ直角ナルヲ以テ, II, 17.

角 AGB ハ角 BAG ノ餘角ナリ; I, 13, 系 2.

故ニ角 BAE ハ角 AGB ニ等シ,

即弓形 ACB ニ於テノ角ニ等シ:

又弓形 AFB ノ弧上ニ任意ノ點 F ヲ取リ, FA, FB, FG ヲ結ヒ付ケヨ;

角 GAD ハ直角, II, 20.

又角 GFA モ直角ナルヲ以テ, II, 17.

角 GAD ハ角 GFA ニ等シ;

又角 GAB ハ同シ弧ノ上ニ立ツ所ノ角 GFB ニ等シ; II, 16.

故ニ全角 BAD ハ全角 AFB ニ等シ,

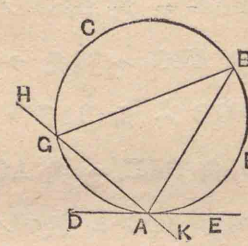
即弓形 AFB ニ於テノ角ニ等シ.

定理 23 ヲ極限法ニ由リテ證明スルコト下ノ如シ:

DE ヲ圓 ABC ノ A 點ニ於テノ切線, AB ヲ A ヲ過ル弦トセヨ:

然ルトハ角 BAE ハ其ノ隣リノ弓形 ACB ニ於テノ角ニ等シク; 角 BAD ハ其ノ隣リノ弓形 AFB ニ於テノ角ニ等シカル可シ.

弧 ACB ノ上ニ任意ノ點 G ヲ取リ, 割線 HGAK ヲ引ク;



然レハ角 BGK ハ G 點ガ弧 BCA ノ上ノ何處ニ在ルモ同シ大サナリ;

G ヲ漸々 A ニ近ツカシメ, 終ニ之ト合セシメヨ;

然レハ割線 HK ハ終ニ A 點ニ於テノ切線ト成リ,

II, 定義 16 (第二).

角 BGK ハ終ニ角 BAE ト成ル;

故ニ角 BAE ハ其ノ隣リノ弓形 ACB ニ於テノ角ニ等シ:

同樣ニ角 BAD ガ其ノ隣リノ弓形 AFB ニ於テノ角ニ等シキヿヲ證明スルヲ得.

問題 102. AB, AC ハ一ツノ圓周上ノ點 A ヨリ引ケル二ツノ弦ナリ; BD ヲ A ニ於テノ切線ニ平行ニ引キ, AC ト D 點ニ於テ交ラシム: 圓 BCD ハ AB ニ切ス.

問題 103. ABCD ハ圓ニ內接スル四邊形ニシテ, 其ノ對角線ノ交點ヲ E トス; 三角形 AEB ニ外接スル圓ヲ畫ケハ, E ニ於テ此圓ニ切スル直線ハ四邊形ノ一ツノ邊ニ平行ナリ.

第五節ノ問題.

問題 104. 中心 O ナル圓外ノ點 A ヨリ之ヘ二ツノ切線 AB, AC ヲ引ケハ, OA ハ二ツノ切點ヲ結ヒ付クル弦 BC ヲ直角ニ二等分ス.

問題 105. 圓ノ弦ハ其ノ一ツノ端ヲ過ル直徑ト其端ヨリ他ノ端ニ於テノ切線ヘ引ケル垂線トノ夾ム角ヲ二等分ス.

問題 106. 四邊共ニ同シ圓ニ切スル平行四邊形ハ菱形ナリ.

問題 107. 二ツノ圓ニ切スル直線ノ切點 A, B ヨリ圓ノ中心ヲ結ヒ付クル直線ガ夫々ノ周ト交ル點 C, D ヘ引ケル直線 AC, BD ハ平行ナリ.

第六節.

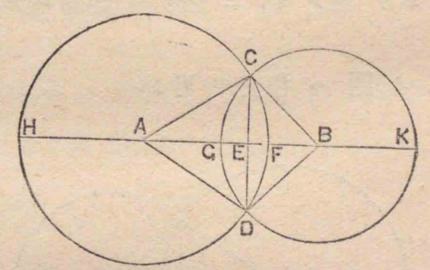
二ッノ圓.

定義 17. 二ッノ圓ノ周ガ唯一ッノ點ニ於テ出會フトキハ, 二ッノ圓ハ相切スト云フ. 而シテ此際各ノ圓ガ全ク他ノ外ニ在レハ, 此二ッノ圓ハ外切スト云ヒ; 一ッノ圓ガ, 全ク他ノ内ニ在レハ, 内切スト云フ. 二ッノ圓ガ, 各一部分他ノ内ニ在リ, 一部分他ノ外ニ在ルトキハ, 相交ルト云フ.

定理 24. 二ッノ圓ノ周ガ其ノ中心ヲ結ヒ付クル直線上ニ在ラザル一ッノ點ニ於テ出會フトキハ, 圓周ハ一ッノ他ノ點ニ於テ再ヒ出會ヒ, 圓ハ相交ル; 二ッノ交點ヲ結ヒ付クル直線ハ中心ヲ結ヒ付クル直線ニ垂線ニシテ, 之ガ爲ニ二等分セラル; 而シテ中心ノ間ノ距離ハ半徑

ノ和ヨリ小ニシテ, 其ノ差ヨリ大ナリ.

中心 A, B ナル二ッノ圓ノ周ガ直線 AB ノ上ニ

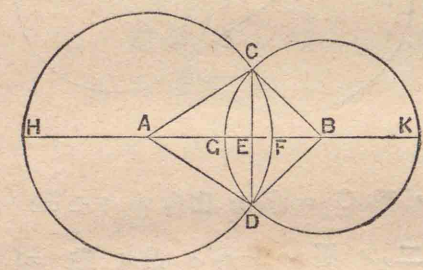


在ラザル一ッノ點 C ニ於テ出會フトセヨ:
然ルトキハ此二ッノ圓ハ一ッノ他ノ點ニ於テ出會フ可シ.

A, B ヲ結ヒ付クヨ:
CE ヲ C ヨリ AB ヘ引クル垂線トシ, D ヲ CE ノ延長ノ上ニ ED ガ CE ニ等シキ樣ニ取リタル點トセヨ;
AC, AD, BC, BD ヲ結ヒ付クヨ:
然レハ直角三角形 AEC, AED ニ於テ,
邊 CE ハ邊 DE ニ等シク,
邊 AE ハ兩形ニ通ス;
故ニ AC, AD ハ相等シ; I, 9.

故ニ D ハ中心 A ナル圓ノ周ノ上ニ在リ: II, 1, 系 1.
同様ニ D ハ又中心 B ナル圓ノ周ノ上ニ在リ:
故ニ二ッノ圓ノ周ハ D ニ於テ出會フ,
而シテ C, D ヨリ他ノ點ニ於テハ出會ハズ. II, 12, 系 2.

又此二ッノ圓ハ相交ル可シ.



直線 AB ハ中心 A ナル圓ノ周ト F 及 H ニ於テ交リ; 中心 B ナル圓ノ周ト G 及 K ニ於テ交リ; F ト B ハ A ノ同シ側ニ在リ, G ト A ハ B ノ同シ側ニ在リトセヨ:

BK ハ BC ニ等シキヲ以テ,
AK ハ AB, BC ノ和ニ等シ,
故ニ AC ヨリ大ナリ; I, 16.
故ニ K ハ中心 A ナル圓ノ外ニ在リ: II, 1, 系 1.
又 BG ハ BC ニ等シキヲ以テ,

AG ハ AB ト BC ノ差ニ等シ,
故ニ AC ヨリ小ナリ; I, 16, 系.
故ニ G ハ中心 A ナル圓ノ内ニ在リ: II, 1, 系 1.
故ニ此二ッノ圓ハ相交ル. II, 定義 17.

又 AB ハ CD ニ垂線ニシテ之ヲ二等分ス: 作圖.
而シテ AB ハ AC 及 BC ノ和ヨリ小ニシテ, I, 16.
AC 及 BC ノ差ヨリ大ナリ. I, 16, 系.

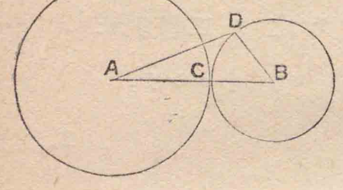
系. 若シ二ッノ圓ノ周ガ唯一ッノ點ニ於テ出會フトキハ, 其點ハ中心ヲ結ヒ付クル直線ノ上ニ在リ.

何トナレハ, 若シ其點ガ此直線ノ上ニ在ラザレハ, 上ノ定理ニ依リテ一ッノ他ノ點ニ於テ出會フ可ケレハナリ. (此系ハ即定理 24 ノ對偶ナリ.)

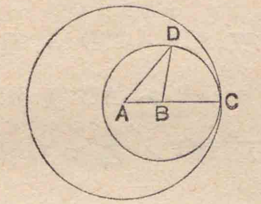
定理 25. 二ッノ圓ノ周ガ其ノ中心ヲ結ヒ付クル直線ノ上ニ在ル一ッノ點ニ於テ出會フトキハ, 此二ッノ圓周ハ他ノ點ニ於テ出會ハズ, 圓ハ外切或ハ内切ス; 而シテ其ノ中心ノ間ノ距離ハ外切ノ場合ニ於テハ半徑ノ

和ニ等シク, 内切ノ場合ニ於テハ半徑ノ差ニ等シ.

甲



乙



中心 A, B ナル二ツノ圓ノ周ガ A, B ヲ過ル直線上ノ一ツノ點 C ニ於テ出會フトセヨ:
然ルトキハ此二ツノ圓ハ他ノ點ニ於テ出會ハザル可シ.

中心 B ナル圓ノ周ノ上ニ他ノ任意ノ點 D ヲ取リ, AD, BD ヲ結ビ付ケヨ:
甲圖ノ場合ニ於テハ, AD 及 BD ノ和ハ AB ヨリ大ナリ, I, 16.
而シテ BD ハ BC ニ等シ;
故ニ AD ハ AC ヨリ大ナリ; 公理庚.
故ニ D ハ中心 A ナル圓ノ外ニ在リ; II, 1, 系 1.
故ニ中心 B ナル圓ハ全ク中心 A ナル圓ノ外ニ在リ;

即二ツノ圓ハ外切ス; II, 定義 17.
而シテ AB ハ半徑 AC, BC ノ和ニ等シ:
乙圖ノ場合ニ於テハ AD ハ AB 及 BD ノ和ヨリ小ナリ, I 16.
而シテ BD ハ BC ニ等シ;
故ニ AD ハ AC ヨリ小ナリ;
故ニ D ハ中心 A ナル圓ノ内ニ在リ; II, 1, 系 1.
故ニ中心 B ナル圓ハ全ク中心 A ナル圓ノ内ニ在リ
即二ツノ圓ハ内切ス; II, 定義 17.
而シテ AB ハ半徑 AC, BC ノ差ニ等シ.

系 1. 二ツノ圓ガ相交レバ, 其ノ周ハ二點ニ於テ出會ヒ, 其點ハ其ノ中心ヲ結ビ付クル直線ノ上ニ在ラズ. (是レ定理 25 ノ對偶ナリ.)

系 2. 二ツノ圓ガ相切スレバ, 其ノ中心ヲ結ビ付クル直線ハ切點ヲ過ル. (是レ定理 24 ノ系ト同シ事ナリ.)

系 3. 二ツノ圓ガ相切スレバ, 其ノ切點ニ於テ同一ノ切線ヲ有ス.

何トナレバ, 切點ニ於テ一ツノ圓ノ半徑ニ垂線

ナル直線ハ亦他ノ圓ノ半徑ニモ垂線ナルヲ以テ兩圓ニ切線ナリ. II, 20, 系 2.

---

*問題 108. 二ツノ圓ノ周ガ出會フコ無ク, 各全ク他ノ外ニ在レハ, 其ノ中心ノ間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ大ナリ. 若シ其ノ一ツガ全ク他ノ内ニ在レハ, 距離ハ半徑ノ差ヨリ小ナリ.

*問題 109. 二ツノ圓ノ中心ノ間ノ距離ガ (イ) 半徑ノ和ヨリ大ナルカ; 或ハ (ロ) 其ノ和ニ等シキカ; 或ハ (ハ) 其ノ和ヨリ小ニシテ, 差ヨリ大ナルカ; 或ハ (ニ) 其ノ差ニ等シキカ; 或ハ (ホ) 其ノ差ヨリ小ナルカニ從テ; 二ツノ圓ハ (イ) 各全ク他ノ外ニ在リ; 或ハ (ロ) 外切シ; 或ハ (ハ) 相交リ; 或ハ (ニ) 内切シ; 或ハ (ホ) 一ツガ全ク他ノ内ニ在ル可シ: 之ヲ轉換法ニ依リテ證明セヨ; 又直接ニ幾何學的ニ證明セヨ.

第六節ノ問題.

---

*問題 110. 二ツノ圓ガ相切スレハ, 切點ヲ過ル任

意ノ二ツノ直線ガ其二ツノ圓周ヨリ截リ取ル所ノ弧ノ弦ハ平行ナリ.

問題 111. 二ツノ圓ガ相切スレハ, 切點ヲ過ル任意ノ直線ハ圓ヨリ相等シキ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ル.

問題 112. 二ツノ圓ガ P 點ニ於テ外切シ, 直線 AB ガ夫々 A, B ニ於テ之ニ切ス; AB ヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ P 點ヲ過リ, 中心ヲ結ヒ付クル直線ニ切ス.

問題 113. 三ツノ相等シキ圓ガ互ニ相切スレハ, 其ノ中心ハ正三角形ノ頂點ナリ. 三ツノ切點モ亦然リ.

問題 114. 二ツノ圓ガ E 點ニ於テ外切シ, AB, CD ハ平行ニシテ各一ツノ圓ノ直徑ナレハ, 直線 AD, BC ハ E 點ニ於テ交ル.

問題 115. 一ツノ圓ノ半徑ガ他ノ圓ノ直徑ナレハ, 二ツノ圓ハ内切シ; 切點ヨリ外ノ周ヘ引ケル直線ハ内ノ周ニ於テ二等分セラル.

*問題 116. 外切スル二ツノ定マレル圓ニ外切スル任意ノ圓ヲ畫ケハ, 定マレル圓ノ中心ヨリ其ノ中心ノ距離ノ差ハ常ニ定マレル圓ノ半徑ノ差ニ等シ.

*問題 117. 相交ル二ツノ定マレル圓ニ切スル任意ノ圓ヲ畫ケハ, 定マレル圓ノ中心ヨリ其ノ中心ノ距離ノ和或ハ差ハ常ニ同シ.

問題 118. 二ツノ圓ガ相交ル所ノ點 A, B ヲ過リ直線 PAQ, RBS ヲ引キ, 圓周ト P, Q, R, S 點ニ於テ出會ハシム: 弦 PR, QS ハ平行ナリ.

第七節.

內接形及外接形.

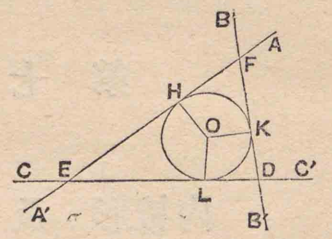
定義 18. 直線形ノ邊ガ皆其ノ內ニ在ル一ツノ圓ニ切スル時ハ, 圓ハ直線形ニ內接シ, 直線形ハ圓ニ外接スト云フ.

定理 26. 同一ノ點ヲ過ラズ又平行ナラザル三ツノ與ヘラレタル直線ニ切スル圓ハ四ツ有リ, 而シテ唯四ツニ限ル.

AA′, BB′, CC′ ヲ同一ノ點ヲ過ラズ又平行ナラザル三ツノ直線トセヨ:

然ルトキハ之ニ切スル圓ハ四ツ有リ, 而シテ唯四ツニ限ル可シ.

AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ四ツ有リ，而シテ唯四ツニ限ル；



I, 軌跡ノ交リ（乙）.

O ヲ其ノ一ツトセヨ；

O ヨリ AA′, BB′, CC′ ヘ夫々垂線 OH, OK, OL ヲ引ク：

然レハ O ハ AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在ルヲ以テ，OH, OK, OL ハ相等シ；

故ニ O ヲ中心トシ H, K, L ヲ過ル一ツノ圓ヲ書クヲ得；

而シテ H, K, L ニ於テノ角ハ各直角ナルヲ以テ，圓ハ此點ニ於テ AA′, BB′, CC′ ニ切ス： II, 20.

同様ニ他ノ三ツノ點ノ各ヲ中心トシテ，此三ツノ直線ニ切スル圓ヲ書クヲ得：

而シテ AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ハ此四ツニ限ルヲ以テ，

他ニ之ヲ中心トシテ此三ツノ直線ニ切スル圓ヲ書キ得可キ點無シ：

故ニ AA′, BB′, CC′ ニ切スル圓ハ四ツ有リ，而シテ唯四ツニ限ル.

系 1. 三角形ノ三ツノ邊ニ切スル圓ハ一ツ有リ，而シテ唯一ツニ限ル.

定義 19. 三角形ノ三ツノ邊ニ切スル圓ヲ其ノ**內接圓**ト稱ス：其ノ中心ヲ**內心**ト稱ス.

系 2. 三角形ノ一ツノ邊，及他ノ二ツノ邊ノ延長ニ切スル圓ハ三ツ有リ，而シテ唯三ツニ限ル.

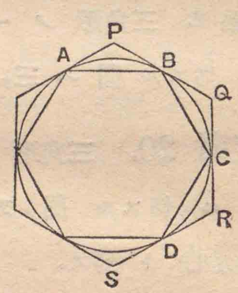
定義 20. 三角形ノ一ツノ邊，及他ノ二ツノ邊ノ延長ニ切スル圓ヲ其ノ**傍接圓**ト稱ス：其ノ中心ヲ**傍心**ト稱ス.

問題 119. 二ツノ平行線ガ一ツノ他ノ直線ト交レハ，此三ツノ直線ニ切スル圓ハ二ツ有リ，而シテ唯二ツニ限ル. 此二ツノ圓ハ相等シ.

定理 27. 圓ノ全周ヲ任意ノ數ノ相等シキ弧ニ分ツトキハ，此等ノ弧ノ

弦ノ成ス内接形ハ正多角形ナリ; 又總テノ分點ニ於テノ切線ノ成ス外接形モ正多角形ナリ.

圓 ABC ノ全周ヲ A, B, C, 等ノ點ニ於テ任意ノ數(圖ニ於テハ六)ノ相等シキ弧ニ分チ,
AB, BC, CD, 等ヲ其ノ弦トセヨ:
然ルトキハ内接形 ABCD... ハ正多角形ナル可シ.



弧 AB, BC, CD, 等ハ皆相等シキヲ以テ,
弦 AB, BC, CD, 等ハ皆相等シ. II, 7.
故ニ多角形 ABCD... ノ邊ハ皆相等シ:
又多角形 ABCD... ノ各ノ角ハ全周ヨリ弧 AB, BC, CD, 等ノ中二ツダケヲ引キ去リタル弧ノ上ニ立ツ;
故ニ多角形 ABCD.. ノ角ハ皆相等シキ弧ノ上ニ立ツヲ以テ, 相等シ: II, 5, 及 15.
故ニ ABCD... ハ正多角形ナリ.

又分點 A, B, C, D, 等ニ於テノ切線ガ外接形

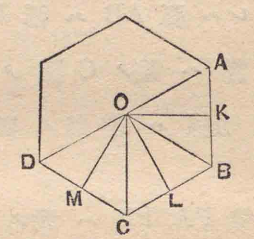
PQRS... ヲ成ストセヨ:
然ルトキハ PQRS... ハ正多角形ナル可シ.

圓ノ中心ヲ中心トシテ圖ヲ廻轉シ, A 點ガ元ノ B 點ノ上ニ重ナル樣ニセヨ;
然レハ弧 AB ハ弧 BC ニ等シキヲ以テ, 假設.
B 點ハ元ノ C 點ノ上ニ重ナル;
又切線ハ各其ノ切點ヘノ半徑ニ垂線ナルヲ以テ; II, 20, 系 2.
切線 PA, PB ハ元ノ QB, QC ノ上ニ重ナル;
故ニ角 APB ハ元ノ角 BQC ノ上ニ重ナリ, 之ト合ス
故ニ多角形ノ角ハ各隣角ニ等シキヲ以テ, 皆相等シ:
又切線 PA ハ元ノ QB ノ上ニ重ナリ, 之ト合ス;
然ルニ PA ハ PB ニ等シク, QB ハ QC ニ等シ; II, 22, 系.
故ニ切線 PA, PB, QB, QC, 等ハ皆相等シ;
多角形ノ邊ハ各此等ノ切線二ツヨリ成ルヲ以テ, 皆相等シ;
故ニ PQRS... ハ正多角形ナリ.

定理 28. 正多角形ノ角ヲ二等分スル直線ハ皆一ツノ點ニ於テ出會ヒ; 此

點ハ總テノ頂點ヨリ相等シキ距離ニ在リ，且總テノ邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

正多角形 ABCD... ノ A 及 B ニ於テノ角ヲ二等分スル直線ガ O ニ於テ出會フトセヨ；OC, OD,... ヲ結ヒ付ケヨ：



然ルトキハ OC, OD,... ハ多角形ノ C, D... ニ於テノ角ヲ二等分ス可シ.

三角形 OBA, OBC ニ於テ，
邊 AB ハ邊 CB ニ等シク， 假設.
邊 OB ハ兩形ニ通ス；
角 OBA ハ角 OBC ニ等シ； 假設.
故ニ角 OAB ハ角 OCB ニ等シ： I, 9.
然ルニ角 OAB ハ A ニ於テノ角ノ半分ナリ； 假設.
而シテ A ニ於テノ角ハ C ニ於テノ角ニ等シ； 假設.
故ニ角 OCB ハ C ニ於テノ角ノ半分ナリ；
即 OC ハ C ニ於テノ角ヲ二等分ス：

同樣ニ OD ... ハ D ... ニ於テノ角ヲ二等分ス：
故ニ多角形ノ角ヲ二等分スル直線ハ皆 O ニ於テ出會フ.

又角 OAB, OBA ハ相等シキ角ノ半分ナルヲ以テ，相等シ；
故ニ OA ハ OB ニ等シ； I, 12.
同樣ニ OB ハ OC ニ等シク，OC ハ OD ニ等シク，
OA, OB, OC, OD, ... ハ皆相等シ；
即 O 點ハ總テノ頂點ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

次ニ，O ヨリ各ノ邊ヘ夫々垂線 OK, OL, OM, ... ヲ引ケ；
然レハ直角三角形 OBK, OBL ニ於テ，
角 OBK ハ角 OBL ニ等シク，
邊 OB ハ兩形ニ通ス；
故ニ OK ハ OL ニ等シ： I, 13, 系 4, 及 I, 10
同樣ニ OL ハ OM ニ等シク，
OK, OL, OM, ... ハ皆相等シ；
即 O 點ハ總テノ邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

第七節ノ問題

*問題 120. 三角形ノ二ツノ傍心ヲ結ヒ付クル直線ハ一ツノ頂點ヲ過リ, 內心ト第三ノ傍心トヲ結ヒ, 付クル直線ニ垂線ナリ.

*問題 121. 三角形 ABC ノ二ツノ頂點 B, C, 及內心及邊 BC ニ切スル傍接圓ノ中心ヲ過リ一ツノ圓ヲ畫クヲ得.

*問題 122. 三角形ノ二ツノ傍心及二ツノ頂點ヲ過リ, 一ツノ圓ヲ畫クヲ得.

*問題 123. 三角形ノ各ノ頂點ヲ過リ, 外心ト他ノ頂點トヲ結ヒ付クル直線ニ平行ナル二ツノ直線ヲ引クハ, 此六ツノ直線ガ爲ス所ノ六邊形ノ邊ハ皆相等シ; 角ハ二ツヅヽ相等シ.

問題 124. 直線形ノ角ヲ二等分スル直線ガ皆同一ノ點ヲ過レハ, 此直線形ニ內接スル圓ヲ畫クヲ得.

問題 125. 三角形ノ內心ト外心トガ合スレハ, 其三角形ハ正三角形ナリ.

問題 126. 二等邊三角形ノ內接圓ノ切點ヲ結ヒ付クテ得ル所ノ三角形ハ二等邊ナリ.

問題 127. 底邊及頂角ガ與ヘラレタル三角形ノ內心ノ軌跡ハ二ツノ圓弧ナリ.

第八節.

作圖題.

初等幾何學ノ作圖ニ於テ用ヰルヿヲ許ス器械ハ定規及兩脚規ニ限リ,定規ハ直線ヲ引ク爲ニ,兩脚規ハ圓ヲ畫キ及距離ヲ移ス爲ニノミ用ヰルモノトス. 即最初ヨリ爲シ得ルト認ムル所ノ作圖ハ下ノ三ツニ限ル;之ヲ幾何學作圖ノ規矩ト稱ス.

作圖ノ規矩.

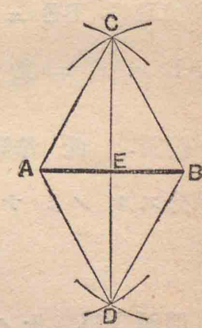
1. 一ツノ任意ノ點ヨリ他ノ任意ノ點ヘ直線ヲ引クヿヲ得.

2. 有限直線ヲ任意ノ長サニ延長スルヿヲ得.

3. 任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫クヿヲ得.

作圖題 1. 與ヘラレタル有限直線ヲ二等分スルヿ.

AB ヲ與ヘラレタル有限直線トス:
之ヲ二ツニ等分スルヿヲ求ム.



A 及 B ヲ中心トシ AB ノ半分ヨリ大ナル同シ任意ノ半徑ヲ以テ二ツノ圓ヲ畫ク; 規矩 3.
此二ツノ圓ハ相交ル,
C, D ヲ其ノ周ノ交點トセヨ:
CD ヲ結ヒ付ク, 規矩 1.
AB ト E ニ於テ交ラシメヨ;
然ルトキハ AB ハ E ニ於テ二等分セラル.

AC, AD, BC, BD ヲ結ヒ付クヨ,
二ツノ三角形 ACD, BCD ニ於テ,
邊 AC ハ邊 BC ニ等シク, 作圖.
邊 AD ハ邊 BD ニ等シク, 作圖.
邊 CD ハ兩形ニ通ス;
故ニ角 ACD ハ角 BCD ニ等シ: I, 21.
又二ツノ三角形 ACE, BCE ニ於テ,

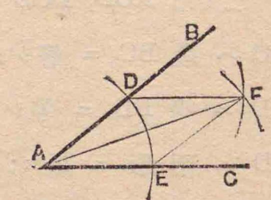
邊 AC ハ 邊 BC ニ 等シク, 作圖.
邊 CE ハ 兩形 ニ 通シ,
角 ACE ハ 角 BCE ニ 等シ:
故ニ AE ハ BE ニ 等シ; I, 9.
即 AB ハ E ニ 於テ 二等分セラル.

附言. 此 作圖 ニ 於テ, CD ハ AB ヲ E ニ 於テ 二等分スル ノミ ナラズ, 又 之 ニ 垂線ナリ.

問題 128. 上ノ 作圖 ニ 於テ A 及 B ヲ 中心 トシテ 圓 ヲ 畫ク ニ, 其ノ 半徑 ガ AB ノ 半分 ヨリ 大ナル ヲ 要スル 理由 如何?

作圖題 2. 與ヘラレタル角ヲ二等分スルヿ.

BAC ヲ 與ヘラレタル 角 トス:
之 ヲ 二等分スルヿ ヲ 求ム.



A ヲ 中心 トシ 任意ノ 半徑 ヲ 以テ 圓 ヲ 畫キ, AB ト D ニ 於テ, AC ト E ニ 於テ 交ラシメヨ; 規矩 3

D 及 E ヲ 中心 トシ, DE ノ 半分 ヨリ 大ナル 同シ 任意ノ 半徑 ヲ 以テ 二ツノ 圓 ヲ 畫ク: 規矩 3.
此 二ツノ 圓 ハ 相交ル, F ヲ 其ノ 周 ノ 交點 ノ 一ツトセヨ;
AF ヲ 結ヒ付ケヨ; 規矩 1.
AF ハ 角 BAC ヲ 二等分ス.

DF, EF ヲ 結ヒ付ケヨ;
然レハ 三角形 ADF, AEF ニ 於テ,
邊 AD ハ 邊 AE ニ 等シク, 作圖.
邊 DF ハ 邊 EF ニ 等シク, 作圖.
邊 AF ハ 兩形 ニ 通ス;
故ニ 角 DAF ハ 角 EAF ニ 等シ; I, 21.
即 AF ハ 角 BAC ヲ 二等分ス.

問題 129. FA ヲ 延長スレハ, 共軛角 BAC ヲ 二等分ス.

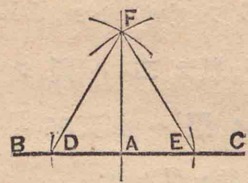
問題 130. 與ヘラレタル 角 ヲ 四ツ ニ 等分スルヿ.

作圖題 3. 與ヘラレタル 直線 上ノ 與ヘラレタル 點 ヨリ 之 ニ 垂線 ヲ 引クヿ.

BAC ヲ 與ヘラレタル 直線, A ヲ 其ノ 上ニ 在ル 與

ヘラレタル點トス:

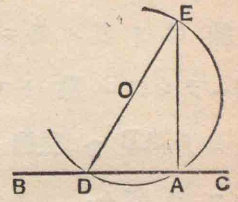
A ヨリ BAC ニ垂線ヲ引クヿヲ求ム.



A ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 規矩 3.
AB ト D ニ於テ, AC ト E ニ於テ交ラシメヨ;
D 及 E ヲ中心トシ DA ヨリ大ナル同シ任意ノ半徑ヲ以テ二ッノ圓ヲ畫キ, 規矩 3.
F ニ於テ交ラシメヨ;
FA ヲ結ヒ付ケヨ; 規矩 1.
然レハ AF ハ BAC ニ垂線ナリ.

DF, EF ヲ結ヒ付ケヨ;
然レハ二ッノ三角形 FAD, FAE ニ於テ,
邊 AD ハ邊 AE ニ等シク, 作圖.
邊 DF ハ邊 EF ニ等シク, 作圖.
邊 AF ハ兩形ニ通ス;
故ニ角 DAF ハ角 EAF ニ等シク, I, 21.
各直角ナリ:
即 AF ハ BAC ニ垂線ナリ.

他ノ方法.



BAC 外ニ任意ノ點 O ヲ取リ, O ヲ中心トシ, 半徑 OA ヲ以テ圓ヲ畫ク; 規矩 3.
此圓ハ BAC ト再ヒ D ニ於テ交ル;
直線 DOE ヲ引キ, 圓周ト再ヒ E ニ於テ出會ハシメヨ;
AE ヲ結ヒ付ケヨ;
然ルトキハ AE ハ BC ニ垂線ナリ.

弓形 DAE ハ半圓ナルヲ以テ, 作圖.
角 DAE ハ直角ナリ; II, 17.
即 AE ハ BAC ニ垂線ナリ.

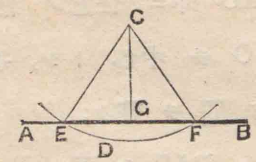
問題 131. 第二ノ方法ニ於テ, 圓ガ再ヒ BAC ト交ラザルヿ有リヤ? 若シ有レハ, 其場合ニ於テハ如何爲ス可キヤ?

問題 132. 與ヘラレタル直線ノ上ニ正方形ヲ作ルヿ.

問題 133. 二ッノ邊ヲ與ヘ, 矩形ヲ作ルヿ.

作圖題 4. 與ヘラレタル直線外ノ與ヘラレタル點ヨリ之ヘ垂線ヲ引クヿ.

AB ヲ與ヘラレタル直線, C ヲ其ノ外ニ在ル與ヘラレタル點トス:
C ヨリ AB ヘ垂線ヲ引クコトヲ求ム.



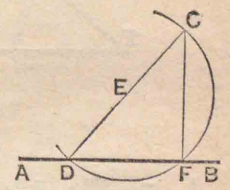
直線 AB ノ C ニ反對ノ側ニ任意ノ點 D ヲ取リ,
C ヲ中心トシ CD ヲ半徑トシテ圓ヲ書キ, 規矩 3.
AB ト E, F ニ於テ交ラシメヨ;
CE, CF ヲ結ヒ付ケヨ; 規矩 1.
角 ECF ヲ二等分スル直線 CG ヲ引キ, 作圖題 2.
AB ト G ニ於テ交ラシメヨ;
然ルトキハ CG ハ AB ニ垂線ナリ.

二ツノ三角形 CEG, CFG ニ於テ,
CE ハ CF ニ等シク, 作圖.
CG ハ兩形ニ通シ,
角 ECG ハ角 FCG ニ等シ; 作圖.
故ニ角 EGC ハ角 FGC ニ等シ: I, 9.
故ニ CG ハ AB ニ垂線ナリ.

他ノ方法.

AB 上ニ任意ノ點 D ヲ取リ, CD ヲ結ヒ付ケヨ;

CD ヲ E ニ於テ二等分シ, 作圖題 1.
E ヲ中心トシ, 半徑 EC (即 ED) ヲ以テ圓ヲ書ク;
此圓ハ AB ト D ノ他ニ尚ホ一ツノ點 F ニ於テ交ル;
CF ヲ結ヒ付ケヨ;
CF ハ求ムル所ノ垂線ナリ.

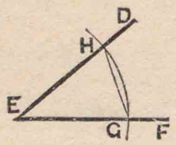


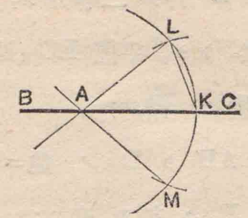
CD ハ直徑ナルヲ以テ, CFD ハ半圓ナリ;
故ニ角 CFD ハ直角ナリ; II, 17.
故ニ CF ハ AB ニ垂線ナリ.

問題 134. 第一ノ方法ニ於テ D ヲ AB ノ C ニ反對ノ側ニ取ル理由ヲ説明セヨ.

問題 135. 第二ノ方法ニ於テ圓ガ AB ト D ヨリ他ノ點ニ於テ出會ハザルコト有リヤ? 若シ有レハ, 其場合ニ於テハ如何爲ス可キヤ?

作圖題 5. 與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ爲ス直線ヲ引クコト.





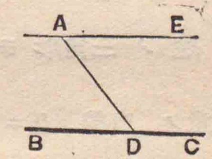
A ヲ與ヘラレタル直線 BC 上ノ與ヘラレタル點, DEF ヲ與ヘラレタル角トス:
A ヨリ BC ト角 DEF ニ等シキ角ヲ爲ス直線ヲ引クヿヲ求ム.

E ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 規矩 3.
EF, ED ト夫々 G, H ニ於テ交ラシメヨ;
GH ヲ結ヒ付クヨ; 規矩 1.
A ヲ中心トシ同シ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 規矩 3.
AC ト K ニ於テ交ラシメヨ;
K ヲ中心トシ GH ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 規矩 3.
前ノ圓ト L, M ニ於テ交ラシメヨ;
AL, AM ヲ結ヒ付クヨ; 規矩 1.
然ル𪜈ハ AL 及 AM ハ何レモ BC ト DEF ニ等シキ角ヲ爲ス.

LK ヲ結ヒ付クヨ;
二ツノ三角形 LAK, HEG ニ於テ,
邊 AK ハ邊 EG ニ等シク, 邊 AL ハ邊 EH ニ等シク,
邊 LK ハ邊 HG ニ等シ; 作圖.
故ニ角 LAK ハ角 HEG ニ等シ, I, 21.
即 AL ハ BC ト DEF ニ等シキ角ヲ爲ス:
同樣ニ AM モ BC ト DEF ニ等シキ角ヲ爲ス.

作圖題 6. 與ヘラレタル點ヲ過リ, 與ヘラレタル直線ニ平行ナル直線ヲ引クヿ.

A ヲ與ヘラレタル點,
BC ヲ與ヘラレタル直線トス:
A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ヲ引クヿヲ求ム.



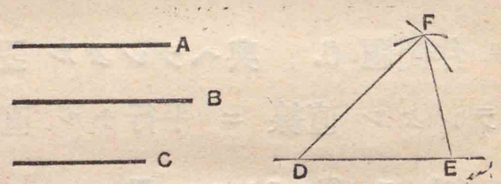
BC 上ニ任意ノ點 D ヲ取リ, AD ヲ結ヒ付クヨ;
角 ADB ニ等シキ角 DAE ヲ爲ス直線 AE ヲ引ケ; 作圖題 5.
然ル𪜈ハ AE ハ BC ニ平行ナリ.

錯角 BDA, DAE ガ相等シキヲ以テ,
AE, BC ハ平行ナリ. I, 6.

問題 136. 與ヘラレタル點ヲ過リ，二ツノ與ヘラレタル平行線ノ間ニ在ル部分ガ與ヘラレタル直線ニ等シキ様ニ，直線ヲ引クヿ.

作圖題 7. 三ツノ邊ヲ與ヘ，三角形ヲ作ルヿ.

A, B, C ヲ與ヘラレタル三ツノ邊トス: A, B, C ニ等シキ邊ノ三角形ヲ作ルヿヲ求ム.



任意ノ直線上ニ其ノ中ノ一ツナル A ニ等シク DE ヲ取レ; 規矩 3.
D ヲ中心トシ B ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ク; 規矩 3.
E ヲ中心トシ C ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 規矩 3.
前ノ圓ト F ニ於テ交ラシメヨ;
DF, EF ヲ結ヒ付ケヨ;
DEF ハ求ムル所ノ三角形ナリ.

DE ハ A ニ等シク, 作圖.

DF ハ B ニ等シク, 作圖.
EF ハ C ニ等シ; 作圖.
故ニ三角形 DEF ノ三ツノ邊ハ夫々 A, B, C ニ等シ.

注意. 與ヘラレタル三ツノ直線 A, B, C ノ中何レノ二ツヲ取ルモ, 其ノ和ハ他ノ一ツヨリ大ナルヲ要ス; 然ラザレハ, 此題ハ解ナシ; 何トナレハ, 若シ B ト C ノ和ガ A ヨリ大ナラザレハ, 二ツノ圓ハ相交ラズ; B ガ A ト C ノ和ヨリ大ナル時モ, 又 C ガ A ト B ノ和ヨリ大ナル時モ同シク二ツノ圓ハ相交ラザレハナリ. (I, 16 ヲ參考セヨ.)

---

*問題 137. 與ヘラレタル底邊ノ上ニ正三角形ヲ作ルヿ.

*問題 138. 直角ヲ三ツニ等分スルヿ.

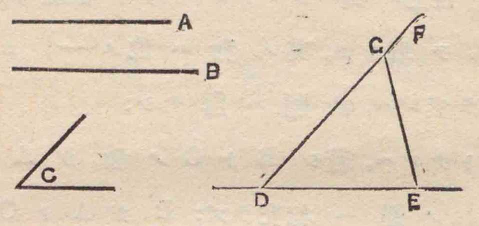
作圖題 8. 二ツノ邊及其ノ夾角ヲ與ヘ，三角形ヲ作ルヿ.

A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル邊, C ヲ與ヘラレタル角トス:
二ツノ邊ハ A, B ニ等シク, 其ノ夾角ハ C ニ等シキ

三角形ヲ作ルコトヲ求ム.

任意ノ直線上ニDEヲAニ等シク取レ; 規矩 3.

Dニ於テDEトCニ等シキ角ヲ爲ス直線DFヲ引ケ; 作圖題 5.



DFノ上ニDGヲBニ等シク取レ; 規矩 3.

GEヲ結ヒ付ケヨ; 規矩 1.

DEGハ求ムル所ノ三角形ナリ.

DEハAニ等シク, 作圖.

DGハBニ等シク, 作圖.

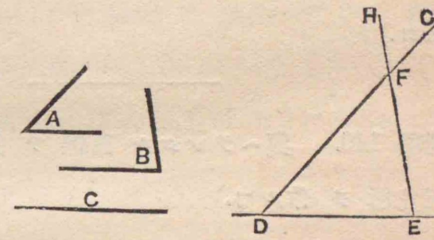
其ノ夾角EDGハCニ等シ; 作圖.

故ニ三角形DEGノ二邊DE, DGハ夫々A, Bニ等シク; 角EDGハ角Cニ等シ.

問題 139. 二ツノ邊及一ツノ角ヲ與ヘ平行四邊形ヲ作ルコト.

作圖題 9. 二ツノ角及其ノ間ノ邊ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルコト.

A, Bヲ與ヘラレタル角; Cヲ與ヘラレタル邊トス: 二ツノ角ハA, Bニ等シク, 其ノ間ノ邊ハCニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



任意ノ直線上ニCニ等シクDEヲ取レ; 規矩 3.

Dニ於テ角Aニ等シキ角EDGヲ爲ス直線DGヲ引ケ; 作圖題 5.

Eニ於テ角Bニ等シキ角DEHヲ爲ス直線EHヲ引ケ; 作圖題 5.

(角EDGト角DEHハDEノ同シ側ニ在リテ反對ニ向ク樣ニスルヲ要ス;)

DGトEHトFニ於テ交ラシメヨ;

然ルトキハDEFハ求ムル所ノ三角形ナリ.

DEハ與ヘラレタル邊Cニ等シク, 作圖.

角EDF, DEFハ夫々與ヘラレタル角A, Bニ等シ; 作圖.

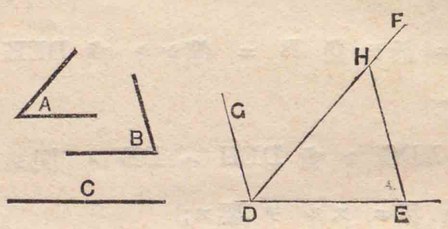
故ニ三角形DEFノ二ツノ角ハ與ヘラレタル角ニ等シ

ク，其ノ間ノ邊ハ與ヘラレタル邊ニ等シ.

注意. 二ツノ與ヘラレタル角ハ合セテ二直角ヨリ小ナルヲ要ス; 然ラザレハ此題ハ解ナシ. (I, 13 ヲ參考セヨ.)

問題 140. 與ヘラレタル直線ヲ斜邊トシテ, 直角二等邊三角形ヲ作ルヿ.

作圖題 10. 二ツノ角, 及其ノ一ツニ對スル邊ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルヿ.



A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル角, C ヲ B ニ等シキ角ニ對スル與ヘラレタル邊トス:

二ツノ角ハ A, B ニ等シク, B ニ對スル邊ハ C ニ等シキ三角形ヲ作ルヿヲ求ム.

任意ノ直線上ニ DE ヲ C ニ等シク取レ; 規矩 3.

D ニ於テ DE ト A ニ等シキ角 EDF ヲ爲ス直線 DF

ヲ引ク; 作圖題 5.

D ニ於テ DF ト B ニ等シキ角 FDG ヲ爲ス直線 DG ヲ引ク; 作圖題 5.

E ヲ過リ DG ニ平行ナル直線ヲ引キ, 作圖題 6.

DF ト H ニ於テ交ラシメヨ;

然ルトキハ DEH ハ求ムル所ノ三角形ナリ.

EH ハ DG ニ平行ナルヲ以テ, 作圖.

角 DHE ハ錯角 GDH ニ等シ, I, 7.

即角 B ニ等シ; 作圖.

角 EDH ハ角 A ニ等シ; 作圖.

B ニ等シキ角 DHE ニ對スル邊 DE ハ C ニ等シ; 作圖.

故ニ三角形 DEH ノ二ツノ角ハ與ヘラレタル角ニ等シク, 其ノ一ツニ對スル邊ハ與ヘラレタル邊ニ等シ.

注意. 作圖題 9 ト同樣ニ二ツノ與ヘラレタル角ハ合セテ二直角ヨリ小ナルヲ要ス.

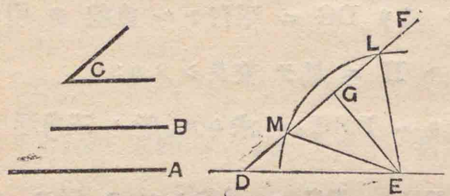
作圖題 11. 二ツノ邊及其ノ一ツニ對スル角ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルヿ.

A, B ヲ與ヘラレタル二ツノ邊, 角 C ヲ B ニ等シキ邊ニ對スル與ヘラレタル角トス.

二ッノ邊ハ A, B ニ等シク, B ニ對スル角ハ C ニ等シキ三角形ヲ作ルヿヲ求ム.

任意ノ直線上ニ DE ヲ A ニ等シク取レ; 規矩 3.

D ニ於テ DE ト角 C ニ等シキ角ヲ爲ス直線 DF ヲ引ケ, 作圖題 5.



E ヲ中心トシ B ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ;

與ヘラレタル角及邊ノ大サニ從テ種々ノ場合ガ起リ來ル.

(甲) C ヲ銳角ナリトセヨ:

(1) 若シ邊 B ガ E ヨリ DF ヘ引ケル垂線ヨリ小ナレハ,

圓ハ DF ト交ラズ; II, 21.

本題ハ解ナシ.

(2) 若シ邊 B ガ垂線ニ等シケレハ,

圓ハ DF ト唯一ッノ點 G ニ於テ出會フ; II, 21.

EG ヲ結ヒ付ケヨ;

DEG ハ求ムル所ノ三角形ナリ.

(3) 若シ邊 B ガ垂線ヨリ大ニシテ, 邊 A ヨリ小ナレハ,

圓ハ DF ト D ノ同シ側ニ在ル二ッノ點 L, M ニ於テ交ル; II, 21, 或ハ I, 18.

EL, EM ヲ結ヒ付ケヨ; 規矩 1.

然ルトキハ DEL, DEM ハ何レモ本題ノ要件ニ適スル三角形ニシテ, 本題ニハ二ッノ解有リ.

(4) 若シ邊 B ガ邊 A ニ等シケレハ,

圓ハ DF ト D 及他ノ一ッノ點 L ニ於テ交ル;

EL ヲ結ヒ付ケヨ;

然ルトキハ DEL ハ求ムル所ノ三角形ナリ.

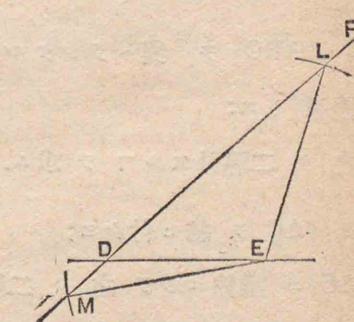
(5) 若シ邊 B ガ邊 A ヨリ大ナレハ,

圓ハ DF ト D ノ反對ノ側ニ在ル二ッノ點 L, M ニ於テ交ル;

EL ヲ結ヒ付ケヨ;

DEL ハ求ムル所ノ三角形ナリ:

DEM ハ要件ニ適セズ.



故ニ此場合ニ於テハ唯

一ツノ解有ルノミ

(乙) Cヲ直角ナリトセヨ:

然ルトキハ邊Bガ邊Aヨリ大ナレバ,常ニ二ツノ三角形ヲ得;

然レドモ此二ツノ三角形ハ全ク相等シキモノニシテ,(甲)ノ(3)ノ如ク二ツノ異ナレル解ヲ得ズ.

其他ノ場合ニ於テハ解ナシ.

(丙) Cヲ鈍角ナリトセヨ:

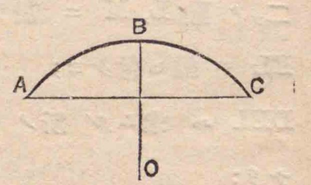
然ルトキハ邊Bガ邊Aヨリ大ナル場合ニ於テ,唯一ツノ解有リ:

其他ノ場合ニ於テハ解ナシ.

作圖題 12. 與ヘラレタル圓弧ヲ二等分スルヿ.

ABCヲ與ヘラレタル圓弧トス:

之ヲ二等分スルヿヲ求ム.



ACヲ結ビ付ケヨ;

ACニ垂線ニシテ之ヲ二等分スル直線BOヲ引キ, 作圖題 1.

弧ABCトBニ於テ出會ハシメヨ;

弧ABCハBニ於テ二等分セラル.

BOハ圓ノ中心ヲ過ル, II, 11.

而シテ弦ACニ垂線ナリ;

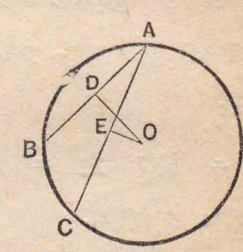
故ニBOハ弧ACヲ二等分ス; II, 10, 系.

即弧ABCハBニ於テ二等分セラル.

作圖題 13. 與ヘラレタル圓周或ハ圓弧ノ中心ヲ得ルヿ.

ABCヲ一ツノ圓ノ與ヘラレタル周或ハ弧トス:

其ノ中心ヲ求ム.



A點ヲ過リ任意ノ二ツノ弦AB, ACヲ引ク;

AB及ACヲ直角ニ二等分スル直線DO, EOヲ引キ; Oニ於テ交ハラシメヨ; 作圖題 1.

Oハ求ムル所ノ中心ナリ.

Oハ三ツノ點A, B, Cヨリ相等シキ距離ニ在リ; I, 軌跡ノ交リ, (甲).

故ニOハ周或ハ弧ABCノ中心ナリ. 11; 12, 系 3.

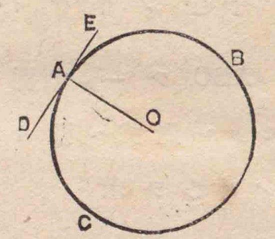
作圖題 14. 同一ノ直線上ニ在ラザル三ツノ點ヲ過ル圓周ヲ畫クヿ.

此作圖題ハ I, 軌跡ノ交リ, (甲) 及定理 II, 12 中ニ解セリ.

作圖題 15. 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル一ツノ點ニ於テ其圓ニ切線ヲ引クヿ.

A ヲ與ヘラレタル圓周 BAC 上ノ與ヘラレタル點トス:

A ニ於テ之ニ切線ヲ引クヿヲ求ム.



圓ノ中心 O ヲ得ヨ; 作圖題 13.

OA ヲ結ヒ付ケヨ;

A ニ於テ OA ニ垂線ナル直線 DAE ヲ引ケ; 作圖題 3.

DAE ハ A ニ於テノ切線ナリ. II, 20, 系 2.

問題 141. 與ヘラレタル圓ニ切シ, 與ヘラレタル直

線ト與ヘラレタル角ヲ爲ス所ノ直線ヲ引クヿ.

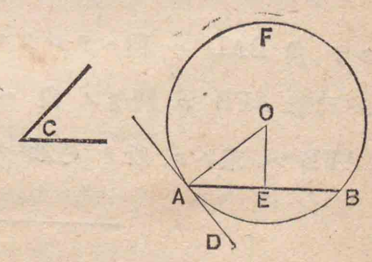
作圖題 16. 與ヘラレタル圓外ノ與ヘラレタル點ヨリ之ヘ切線ヲ引クヿ.

此作圖題ハ定理 II, 22 中ニ解セリ.

作圖題 17. 與ヘラレタル直線ノ上ニ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ畫クヿ.

AB ヲ與ヘラレタル直線, C ヲ與ヘラレタル角トス:

AB ノ上ニ C ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫クヿヲ求ム.

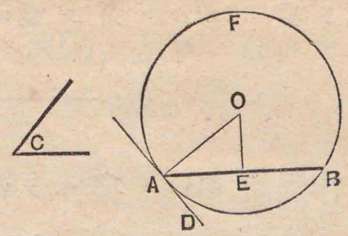


A ニ於テ C ニ等シキ角 BAD ヲ爲ス直線 AD ヲ引ケ; 作圖題 5.

AD ニ垂線 AO ヲ引ケ; 作圖題 3.

AB ヲ直角ニ二等分スル直線 EO ヲ引キ, 作圖題 1.

AO ト O ニ於テ交ラシメヨ;
中心 O, 半徑 OA ヲ以テ圓ヲ書ケ;
此圓ノ弓形 AFB ハ求ル所ノ弓形ナリ.

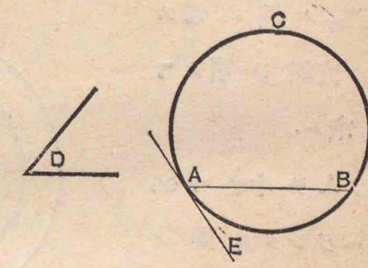


O ハ A 及 B ヨリ相等シキ距離ニ在リ; I, 軌跡 2.
故ニ B ハ此圓ノ周ノ上ニ在リ; II, 1, 系 1.
故ニ弓形ハ直線 AB ノ上ニ在リ:
又 AD ハ半徑 OA ニ垂線ナルヲ以テ,
AD ハ切線ナリ; II, 20.
故ニ角 BAD ハ隣リノ弓形 AFB ニ於テノ角ニ等シ, II, 23.
而シテ角 BAD ハ與ヘラレタル角 C ニ等シ, 作圖.
故ニ弓形 AFB ニ於テノ角ハ與ヘラレタル角 C ニ等シ,
即 AFB ハ求ムル所ノ弓形ナリ.

問題 142. 與ヘラレタル角ガ直角ナルトキハ如何?

作圖題 18. 與ヘラレタル圓ヨリ與ヘラレタル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルヿ.

ABC ヲ與ヘラレタル圓, D ヲ與ヘラレタル角トス:
ABC ヨリ D ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルヿヲ求ム.



圓周 ABC 上ノ任意ノ點 A ニ於テ切線 AE ヲ引ケ; 作圖題 15.
A ニ於テ AE ト D ニ等シキ角 EAB ヲ爲ス直線 AB ヲ引ケ; 作圖題 5.
角 BAE ニ隣レル弓形 ACB ハ求ムル所ノ弓形ナリ.

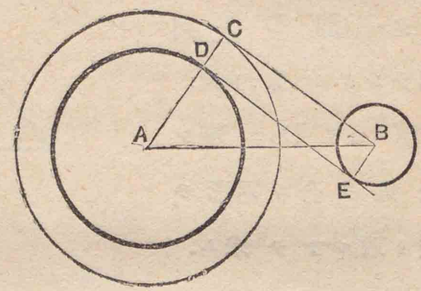
弓形 ACB ニ於テノ角ハ BAE ニ等シ; II, 23.
故ニ與ヘラレタル角 D ニ等シ;
故ニ與ヘラレタル圓 ABC ヨリ與ヘラレタル角 D ニ等シキ角ヲ含ム弓形 ACB ヲ截リ取リタリ.

作圖題 19. 二ツノ與ヘラレタル圓ニ切スル直線ヲ引クヿ.

A 及 B ヲ與ヘラレタル圓ノ中心トシ; 中心 A ナル圓ヲ中心 B ナル圓ヨリ大ナリトス:

此二ツノ圓ニ切スル直線ヲ引クヿヲ求ム.

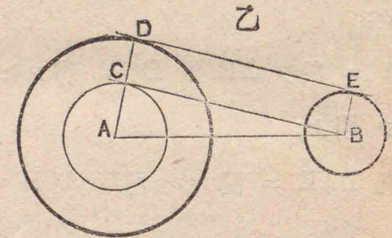
甲



A ヲ中心トシ, 與ヘラレタル圓ノ半徑ノ和(甲圖)或ハ差(乙圖)ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫ケ;

B ヨリ此圓ニ切線ヲ引キ, C ヲ切點トセヨ; 作圖題 16.

乙



AC ヲ結ヒ付ケヨ;

AC 或ハ其ノ延長ヲ中心 A ナル圓ノ周ト D ニ於テ交ラシメヨ;

B ヲ過リ, AC ニ平行ナル直線ヲ引ケ; 作圖題 6.

E ヲ, 此直線ト中心 B ナル圓周トノ二ツノ交點ノ中, BC ノ D ト同シ側ニ在ルモノトセヨ:

DE ヲ結ヒ付ケヨ:

DE ハ兩圓ニ切スル直線ナリ.

BC ハ切線ナルヲ以テ,

角 ACB ハ直角ナリ; II, 20, 系 2.

AC ハ AD 及 BE ノ和或ハ差ナルヲ以テ,

BE ハ CD ニ等シ, 且 BE ハ CD ニ平行ナリ;

故ニ BCDE ハ平行四邊形ニシテ, II, 26.

其ノ一ツノ角 DCB ガ直角ナルヲ以テ,

他ノ角モ亦皆直角ナリ; II, 25, 系 2.

故ニ角 ADE, BED ハ各直角ナリ;

故ニ DE ハ兩圓ノ切線ナリ. II, 20.

---

*問題 143. 二ツノ圓ガ各全ク他ノ外ニ在リテ出會ハザルトキハ, 兩圓ニ切スル直線ハ二双有リ.

*問題 144. 二ツノ圓ガ外切スレハ兩圓ニ切スル直線ハ一双ト一ツ有リ.

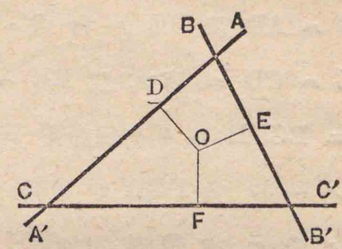
*問題 145. 二ツノ圓ガ交ルトキハ, 幾個ノ共通切線ヲ引クヲ得ルヤ? 內切スルトキハ如何? 一ツガ全ク他ノ內ニ在リテ出會ハザルトキハ如何?

*問題 146. 二ツノ圓ガ相等シキトキハ作圖法如何?

作圖題 20. 同一ノ點ヲ過ラズ又平行ナラザル三ツノ直線ニ切スル圓ヲ

畫クコト.

AA′, BB′, CC′ ヲ同一ノ點ヲ過ラズ又平行ナラザル直線トス:
此三ツノ直線ニ切スル圓ヲ畫クコトヲ求ム.



夫々ノ交角ヲ二等分スル六ツノ直線ヲ引ク; 作圖題 2.
此六ツノ直線ノ交點ハ四ツ有リテ, 何レモ AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在リ: I, 軌跡ノ交リ (乙).
O ヲ其ノ一ツトセヨ;
AA′ ヘ垂線 OD ヲ引ク; 作圖題 4.
O ヲ中心トシ半徑 OD ヲ以テ圓ヲ畫ク; 規矩 3.
此圓ハ三ツノ直線ニ切ス.

BB′, CC′ ヘ夫々垂線 OE, OF ヲ引ク;
然レバ O ハ AA′, BB′, CC′ ヨリ相等シキ距離ニ在ルヲ以テ,
OE, OF ハ何レモ OD ニ等シ;
故ニ E, F ハ中心 O, 半徑 OD ナル圓周ノ上ニ在リ; II, 1, 系 1.

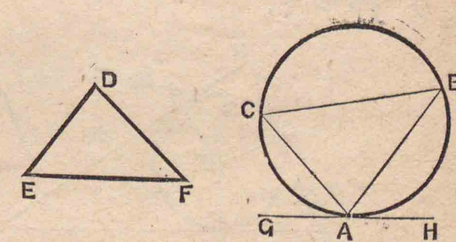
而シテ AA′, BB′, CC′ ハ夫々 OD, OE, OF ニ垂線ナルヲ以テ,
AA′, BB′, CC′ ハ何レモ此圓ノ切線ナリ. II, 20.

他ノ三ツノ點ノ各ヲ中心トシテ同様ニ AA′, BB′, CC′ ニ切スル圓ヲ畫クコトヲ得. (II, 26 ヲ參考セヨ.)

作圖題 21. 與ヘラレタル圓ニ內接シ, 與ヘラレタル三角形ト等シキ角ノ三角形ヲ作ルコト

ABC ヲ與ヘラレタル圓, DEF ヲ與ヘラレタル三角形トス:
圓 ABC ニ內接シ, 三角形 DEF ト等シキ角ノ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.

ABC 上ノ任意ノ點 A ニ於テ切線 GAH ヲ引ク; 作圖題 15.



A ヨリ角 DEF ニ等シキ角 HAB ヲ爲ス弦 AB ヲ引ク;
又角 DFE ニ等シキ角 GAC ヲ爲ス弦 AC ヲ引ク;

BC ヲ 結ヒ付クヨ:

ABC ハ 求ムル 所ノ 三角形 ナリ.

此 三角形 ハ 圓 ニ 內接セリ:

而シテ 弓形 ACB ニ 於テノ 角 ACB ハ 角 BAH ニ 等シ, II, 23.

即 角 DEF ニ 等シ;

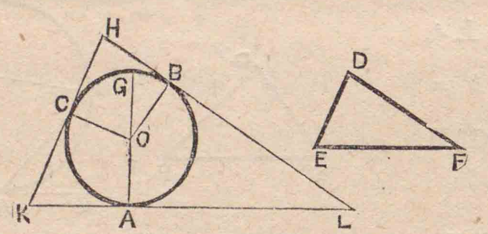
同樣ニ 角 ABC ハ 角 DFE ニ 等シ;

故ニ 第三 角 BAC ハ 第三 角 EDF ニ 等シ; I, 13, 系 4.

故ニ 三角形 ABC ノ 角 ハ 夫々 與ヘラレタル 三角形 ノ 角 ニ 等シ;

故ニ ABC ハ 求ムル 所ノ 三角形 ナリ.

作圖題 22. 與ヘラレタル 圓 ニ 外接シ, 與ヘラレタル 三角形 ト 等シキ 角 ノ 三角形 ヲ 作ルコ.



ABC ヲ 與ヘラレタル 圓, DEF ヲ 與ヘラレタル 三角形 トス:

圓 ABC ニ 外接シ, 三角形 DEF ト 等シキ 角 ノ 三角形 ヲ 作ルコ ヲ 求ム.

中心 O ヲ 得ヨ; 作圖題 13.

任意ノ 直徑 AOG ヲ 引ク;

角 DEF ニ 等シキ 角 GOC ヲ 爲ス 直線 OC ヲ 引ク; 作圖題 5.

又 OG ノ 反對ノ 側 ニ DFE ニ 等シキ 角 GOB ヲ 爲ス 直線 OB ヲ 引ク; 作圖題 5.

A, B, C ニ 於テ 圓 ニ 切線 ヲ 引キ, 作圖題 15.

三角形 HKL ヲ 作レ;

HKL ハ 求ムル 所ノ 三角形 ナリ.

A 及 C ニ 於テノ 角 ハ 直角 ナル ヲ 以テ, II, 20, 系 2.

四邊形 CKAO ニ 外接スル 圓 ヲ 畫クコ ヲ 得; II, 19, 系 2.

故ニ 角 CKA ハ 外角 COG ニ 等シ, II, 19, 系 1.

即 角 DEF ニ 等シ,

同樣ニ 角 BLA ハ 角 DFE ニ 等シ;

故ニ 第三 角 KHL ハ 第三 角 EDF ニ 等シ; I, 13, 系 4.

即 三角形 HKL ノ 角 ハ 夫々 與ヘラレタル 三角形 DEF ノ 角 ニ 等シ;

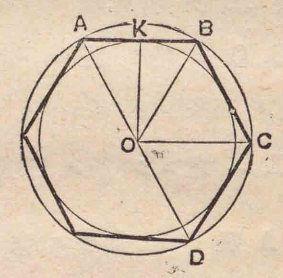
而シテ 此 三角形 ハ 與ヘラレタル 圓 ニ 外接ス;

故ニ HKL ハ 求ムル 所ノ 三角形 ナリ.

作圖題 23. 與ヘラレタル正多角形ニ內接或ハ外接スル圓ヲ畫クコ.

ABCD... ヲ與ヘラレタル正多角形トス:
ABCD. ニ內接或ハ外接スル圓ヲ畫クコヲ求ム.

多角形ノ隣角 A, B ヲ二等分シ, 作圖題 2.
二等分スル直線ヲ O ニ
於テ出會ハシメヨ;
中心 O, 半徑 OA ヲ以テ
圓ヲ畫ク;
此圓ハ ABCD... ニ外接ス.



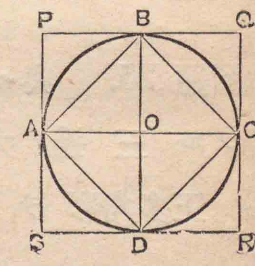
O ハ正多角形 ABCD...
ノ角ヲ二等分スル直線ノ交點ナルヲ以テ,
OA, OB, OC, OD,... ハ相等シ, II, 28.
故ニ中心 O, 半徑 OA ナル圓周ハ A, B, C, D,... 等總テ
ノ頂點ヲ過ル;
故ニ此圓ハ ABCD... ニ外接ス.

又 O ヨリ AB ヘ垂線 OK ヲ引ク; 作圖題 4.
中心 O, 半徑 OK ヲ以テ圓ヲ畫ク;
此圓ハ ABCD... ニ內接ス.

O ハ總テノ邊ヨリ相等シキ距離ニ在リ; II, 28.
故ニ此圓ハ O ヨリ總テノ邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ
過ル;
而シテ各ノ邊ハ此圓ニ切ス; II, 20.
故ニ此圓ハ ABCD... ニ內接ス.

作圖題 24. 與ヘラレタル圓ニ內接或ハ外接スル四邊, 八邊, 十六邊, 三十二邊, 等ノ正多角形ヲ作ルコ.

ABCD ヲ與ヘラレタル
圓トス:
之ニ內接或ハ外接スル 4,
8, 16, 32,... 邊ノ正多角形
ヲ作ルコヲ求ム



中心 O ヲ得ヨ; 作圖題 13.
互ニ垂線ナル二ツノ直徑 AC, BD ヲ引ク: 作圖題 3.
AB, BC, CD, DA ヲ結ヒ付ケヨ;
A, B, C, D ニ於テ切線ヲ引キ四邊形 PQRS ヲ作レ:
作圖題 15.
ABCD ハ圓ニ內接スル四邊ノ正多角形ナリ;

PQRS ハ 圓 ニ 外接スル 四 邊 ノ 正多角形 ナリ.

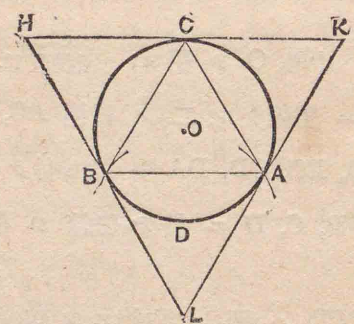
O ニ 於テノ 角 ハ 皆 各 直角 ナル ヲ 以テ,
弧 AB, BC, CD, DA ハ 相等シ; II, 4.
故ニ ABCD, PQRS ハ 何レモ 正多角形 ナリ, II, 27.
而シテ 一ッ ハ 內接シ, 一ッ ハ 外接ス.

八 邊 ノ 正多角形 ヲ 作ル ニハ, 弧 AB, BC, CD, DA ヲ 二等分シ, 作圖題 12.
上 ト 同樣ノ 作圖 ヲ 爲ス 可シ.

十六 邊, 三十二 邊, 等 モ 亦 之 ニ 倣フ.

作圖題 25. 與ヘラレタル 圓 ニ 內接 或ハ 外接スル 三 邊, 六 邊, 十二 邊, 二十四 邊, 等 ノ 正多角形 ヲ 作ルコト.

ABC ヲ 與ヘラレタル 圓 トス:
之 ニ 內接 或ハ 外接スル 3, 6, 12, 24,... 邊 ノ 正多角形 ヲ 作ルコト ヲ 求ム.



中心 O ヲ 得ヨ; 作圖題 13.
圓周 上 任意ノ 點 D ヲ 取リ, 與ヘラレタル 圓 ノ 半徑 ニ 等シキ 半徑 ヲ 以テ 圓 ヲ 書キ,
與ヘラレタル 圓周 ト A, B ニ 於テ 交ラシメヨ;
B ヲ 中心 トシ 半徑 AB ヲ 以テ 圓 ヲ 書ク;
此 圓 ハ 與ヘラレタル 圓 ノ 周 ト A 及 他ノ 一ッ ノ 點 C ニ 於テ 交ル;
AB, BC, CA ヲ 結ビ付クヨ;
A, B, C ニ 於テ 圓 ニ 切線 ヲ 引キ, 三角形 HKL ヲ 作レ;
ABC ハ 圓 ニ 內接スル, HKL ハ 之 ニ 外接スル 正三角形 ナリ.

AOD, DOB ハ 各 正三角形 ナル ヲ 以テ, 作圖.
角 AOD, DOB ハ 各 二 直角 ノ 三分ノ一 ナリ; I, 13.
故ニ AOB ハ 四 直角 ノ 三分ノ一 ナリ;
弦 BC ハ 弦 AB ニ 等シキ ヲ 以テ, 角 BOC ハ 角 AOB ニ 等シ; II, 8.
故ニ 角 BOC モ 亦 四 直角 ノ 三分ノ一 ナリ;
然ルニ O ニ 於テノ 角 ハ 合セテ 四 直角 ニ 等シキ ヲ 以テ,
角 COA モ 亦 四 直角 ノ 三分ノ一 ナリ;
故ニ 弧 AB, BC, CA ハ 相等シ; II, 4.
故ニ ABC, HKL ハ 正三角形 ナリ: II, 27.

而シテ一ッハ圓ニ內接シ, 一ッハ外接ス.

6, 12, 24... 邊ノ正多角形ヲ作ルニハ續シテ弧 AB, BC, CA ヲ二等分シ, 上ノ如ク弦及切線ヲ引ク可シ.

第八節ノ問題.

問題 147. 二ッノ對角線及一ッノ邊ヲ與ヘ, 平行四邊形ヲ作ルコ.

問題 148. 與ヘラレタル直線ヲ對角線トセル正方形ヲ作ルコ.

問題 149. 與ヘラレタル角 BAC 內ノ與ヘラレタル點 O ヲ過リ直線 BOC ヲ, BC ガ O ニ於テ二等分サルヽ樣ニ引クコ.

問題 150. 與ヘラレタル角 BAC 外ノ與ヘラレタル點 O ヨリ直線 OBC ヲ, OB ガ BC ニ等シキ樣ニ引クコ.

問題 151. 一ッノ與ヘラレタル直線ノ同シ側ニ在ル二ッノ與ヘラレタル點ヨリ其直線上ノ一ッノ點ヘ引クル直線ガ之ト相等シキ角ヲ爲ス樣ニ其點ヲ定ムルコ.

問題 152. 與ヘラレタル直線ヲ任意ノ數ノ相等シキ

部分ニ分ツコ.

問題 153. 底邊, 底邊ニ隣ル一ッノ角, 及他ノ二ッノ邊ノ和ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルコ.

問題 154. 二ッノ邊, 及第三邊ヘノ中線ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルコ.

問題 155. 三ッノ中線ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルコ.

問題 156. 與ヘラレタル圓ニ於テ, 與ヘラレタル長サノ弦ヲ與ヘラレタル點ヲ過ル樣ニ引クコ.

問題 157. 二ッノ圓ノ交點ヲ過リ, 一ッノ直線ヲ, 各ノ圓ガ其カラ截リ取ル弦ガ相等シキ樣ニ引クコ.

*問題 158. 圓內ノ或ハ圓外ノ與ヘラレタル點ヨリ其ノ周ヘ最長キ直線及最短キ直線ヲ引クコ.

問題 159. 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ書クコ.

問題 160. 二ッノ與ヘラレタル圓ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ書クコ.

問題 161. 一ッノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 與ヘラレタル直線上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ書クコ.

第貳編ノ問題.

問題 162. 二ツノ圓ノ交點ヲ過リ一ツノ直線ヲ引キ,其ノ端ハ各一ツノ圓周ノ上ニ在リトス:圓ノ中心ヲ結ヒ付クル直線ガ此直線ノ上ニ投スル正射影ハ其ノ半分ニ等シ.

問題 163. 定マレル長サノ直線ガ,其ノ端ガ常ニ直角ニ交ル二ツノ與ヘラレタル直線ノ上ニ在ル様ニ動ク;其ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

問題 164. 二ツノ相交ル圓ノ一ツノ交點ヲ過ル各ノ圓ノ直徑ノ他ノ端ヲ結ヒ付クル直線ハ他ノ交點ヲ過ル.

問題 165. 二ツノ圓周ノ出會フ點 B ヲ過リ直線 ABC ヲ引キ圓周ト A 及 C ニ於テ出會ハシム:又 B 點ヲ過リ任意ノ直線ヲ引キ圓周ト再ヒ P 及 Q ニ於テ出會ハシム:AP, CQ ノ交點 R ノ軌跡ハ或ル圓弧ナリ.

*問題 166. シムソンノ定理(問題 96)ノ逆ヲ證明セヨ.

*問題 167. O 點ガ三角形 ABC ノ垂心ナレハ四ツノ,

點 O, A, B, C ノ中何レノ點ニテモ他ノ三ツノ點ノ成ス所ノ三角形ノ垂心ナリ.

一ツノ三角形ノ各ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引クル垂線ノ足ヲ結ヒ付クテ得ル所ノ三角形ヲ元ノ三角形ノ**垂足三角形**ト稱ス.

問題 168. 垂足三角形ノ二ツノ邊ハ,何レノ二ツニテモ,其ノ交點ヲ過ル所ノ元ノ三角形ノ垂線ト相等シキ角ヲ爲ス. 又元ノ三角形ノ邊ト相等シキ角ヲ爲ス.

*問題 169. 一ツノ三角形ニ關スル下ノ九ツノ點ヲ過リ一ツノ圓ヲ畫クヿヲ得:

(イ)各ノ邊ノ中點;

(ロ)各ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引クル垂線ノ足;

(ハ)各ノ頂點ト垂心トノ半途ノ點.

此圓ヲ其三角形ノ**九點圓**ト稱ス.

*問題 170. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ內接圓ノ切點(之ニ隣ル邊ノ)ヘノ距離ハ三角形ノ周ノ半分ヨリ之ニ對スル邊ヲ減シタルモノニ等シ.

問題 171. 底邊,頂角,及他ノ二ツノ邊ノ和ヲ與ヘ,三角形ヲ作ルヿ.

問題 172. 斜邊, 及 直角 ヨリ 之 ヘ 引ケル 垂線 ヲ 與ヘ, 直角三角形 ヲ 作ルコト.

問題 173. 底邊, 高サ (頂點 ヨリ 底邊 ヘ 引ケル 垂線), 及 外接圓 ノ 半徑 ヲ 與ヘ, 三角形 ヲ 作ルコト.

問題 174. 與ヘラレタル 圓 ニ 外接シ, 與ヘラレタル 四邊形 ト 等シキ 角 ノ 四邊形 ヲ 作ルコト.

問題 175 一ツノ 與ヘラレタル 直線 ニ 切シ, 中心 ハ 一ツノ 他ノ 與ヘラレタル 直線 ノ 上ニ 在ル, 與ヘラレタル 半徑 ノ 圓 ヲ 畫クコト.

第參編.

面積.

第一節.

定理.

本編 ニ 於テ 論スル 所ノ 量 ハ 平面直線形 ノ 面積 ナリ. 故ニ 二ツノ 形 ガ 相等シ 或ハ 一ツ ガ 他 ノ 半分 ナリ ナド 云フ ハ 皆 其ノ 面積 ニ 付テ 云フ ナリ.

普通 公理 (丁) 及 (戊) ニ 依リ, 幾何學 公理 1 ヲ 擴張スルコト 下ノ 如シ:

全ク 相等シキ (即 重リ 合ハスコト ヲ 得ル) 量 ノ 或ハ 差 ハ 重リ 合フ 能ハザルモ 相等シ.

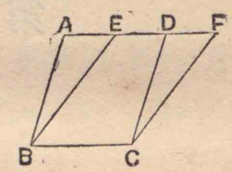
定義 1. 平行四邊形 ノ 高サ トハ 底邊 ト 見做ス 所ノ 一ツノ 邊 ト 之 ニ 對スル 邊 トノ 距離 ナリ.

定義 2. 三角形 ノ 高サ トハ 底邊 ト 見做ス 所ノ

一ツノ邊ト之ニ對スル頂點トノ距離ナリ.

定理 1. 同シ底邊ノ上ニ,同シ平行線ノ間ニ在ル平行四邊形ハ相等シ.

ABCD, EBCF ヲ同シ底邊 BC ノ上ニ,同シ平行線 AF, BC ノ間ニ在ル二ツノ平行四邊形トセヨ:然ルトキハ ABCD ハ EBCF ニ等シカル可シ.



DC ハ AB ニ平行ナルヲ以テ,
角 FDC ハ角 EAB ニ等シ; I, 7, 系.
又 CF ハ BE ニ平行ナルヲ以テ,
角 CFD ハ角 BEA ニ等シ; I, 7, 系.
CD, BA ハ平行四邊形ノ相對スル邊ナルヲ以テ,
相等シ; I, 25.
故ニ二ツノ三角形 CDF, BAE ハ全ク相等シ:
I, 13, 系 4, 及 I, 10.
四邊形 ABCF ヨリ三角形 CDF ヲ減セヨ;
又同シ四邊形ヨリ三角形 BAE ヲ減セヨ;

然ルトキハ殘リ ABCD ハ殘リ EBCF ニ等シ.

系 1. 平行四邊形ハ其ノ底邊及高サニ等シキ底邊及高サノ矩形ニ等シ.

何トナレハ,上ノ定理ニ依リテ平行四邊形ハ同シ底邊及同シ高サノ矩形ニ等シク,而シテ其矩形ハ(I, 27, 系ニ依リテ)之ニ等シキ底邊及高サノ總テノ矩形ニ等シケレハナリ.

系 2. 相等シキ底邊及相等シキ高サノ平行四邊形ハ相等シ

何トナレハ,相等シキ底邊及相等シキ高サノ平行四邊形ハ皆之ニ等シキ底邊及高サノ矩形ニ等シキヲ以テ(系 1),互ニ相等シ.

系 3. 相等シキ高サノ平行四邊形ノ中,底邊ノ大ナルモノガ他ヨリ大ナリ. 相等シキ底邊ノ平行四邊形ノ中,高サノ大ナルモノガ他ヨリ大ナリ.

何トナレハ高サハ等シク,底邊ハ等シカラザル矩形ハ,之ヲ重ネ合ハセ,底邊ガ小ナル矩形ハ底邊ガ大ナル矩形ノ一部分タル樣ニ置クコトヲ得; 故ニ底邊ガ大ナル矩形ハ他ヨリ大ナリ(公理甲). 故ニ平行四邊形ハ之ニ等シキ高サ及底邊ノ矩形ニ等シキヲ以テ,

相等シキ高サノモノノ中,底邊ノ大ナルモノガ他ヨリ大ナリ.

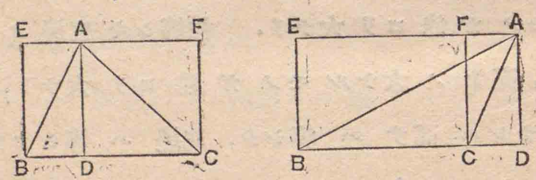
底邊ハ相等シク,高サハ相等シカラザルモノニ付テモ,同様ニ高サノ大ナルモノガ他ヨリ大ナルコトヲ證明スルヲ得.

定理 2. 三角形ハ之ト等シキ底邊及高サノ矩形ノ半分ナリ.

ABC ヲ三角形; BC ヲ其ノ底邊; AD ヲ其ノ高サトセヨ;

然ルトキハ三角形 ABC ハ BC ニ等シキ底邊,及 AD ニ等シキ高サノ矩形ノ半分ニ等シカル可シ.

甲 乙



B, C ヨリ AD ニ平行ニ BE, CF ヲ引キ, A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線トE, F ニ於テ交ルトセヨ;

然レハ EC ハ矩形ニシテ,其ノ底邊ハ BC, 高サハ AD

ナリ:

今三角形 ABD ハ矩形 ED ノ半分ナリ; I, 25.

又三角形 ACD ハ矩形 AC ノ半分ナリ; I, 25.

故ニ三角形 ABD 及 ACD ノ和(甲圖ノ場合)或ハ差(乙圖ノ場合)ナル三角形 ABC ハ矩形 ED 及 AC ノ和或ハ差ナル矩形 EC ノ半分ナリ.

系 1. 三角形ハ之ト等シキ底邊及高サノ平行四邊形ノ半分ナリ.

系 2. 同シ或ハ相等シキ底邊ノ上ニ在ル相等シキ高サノ三角形ハ相等シ.

系 3. 同シ或ハ相等シキ底邊ノ上ニ在ル相等シキ三角形ハ相等シキ高サヲ有ツ.

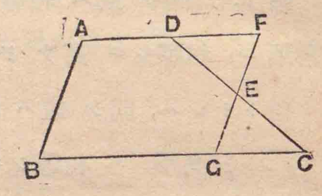
何トナレハ,同シ或ハ相等シキ底邊及相等シカラザル高サノ三角形ハ相等シキ底邊及相等シカラザル高サノ矩形ノ半分ナルヲ以テ (III, 2), 高サノ大ナル三角形ガ他ヨリ大ナリ: 故ニ其ノ對偶ヲ取リテ,同シ或ハ相等シキ底邊ヲ有ツ二ツノ三角形ガ相等シクレハ,其ノ高サモ亦相等シ.

系 4. 二ツノ相等シキ三角形ガ同一ノ底邊ノ上ニ,其ノ同シ側ニ立ツトキハ,或ハ同一直線上ノ相等シキ

底邊ノ上ニ,其ノ同シ側ニ立ツトキハ,其ノ頂點ヲ結ヒ付クル直線ハ底邊ニ平行ナリ.

何トナレハ,此二ツノ三角形ノ高サハ相等シク且(同一ノ直線ニ垂線ナルヲ以テ)平行ナルヲ以テ,其ノ頂點ヲ結ヒ付クル直線ハ底邊ニ平行ナリ(I, 26).

定理 3. 梯形ハ其ノ二ツノ平行ナル邊ノ和ノ半分ニ等シキ底邊,及此二ツノ邊ノ距離ニ等シキ高サノ矩形ニ等シ.



ABCD ハ梯形ニシテ,其ノ邊 AD, BC ヲ平行ナリトセヨ:

然ルトキハ ABCD ハ AD, BC ノ和ノ半分ニ等シキ底邊,及 AD, BC ノ距離ニ等シキ高サノ矩形ニ等シカル可シ.

E ヲ CD ノ中點トシ,E ヲ過リ直線 FEG ヲ AB ニ平行ニ引キ,AD 及 BC 或ハ其ノ延長ト夫々 F 及 G ニ於テ交ルトセヨ;

然レハ三角形 DEF, CEG ニ於テ,

角 DEF ハ角 CEG ニ等シク, I, 4.

角 EDF ハ錯角 ECG ニ等シク, I, 7.

邊 DE ハ邊 CE ニ等シ; 作圖.

故ニ三角形 DEF, CEG ハ全ク相等シク, I, 10.

DF ハ CG ニ等シ:

三角形 CEG, DEF ノ各ヘ同シ形 ABGED ヲ加ヘテ得ル所ノ二ツノ形ハ相等シ;

即梯形 ABCD ハ平行四邊形 ABGF ニ等シ:

又相等シキ二ツノ直線 DF, GC ノ各ヘ AD 及 BG ヲ加ヘヨ;

然レハ AD ト BG ト DF ノ和即 AF, BG ノ和ハ AD ト BG ト GC ノ和即 AD, BC ノ和ニ等シ;

而シテ AF ハ BG ニ等シ; I, 25.

故ニ BG ハ AD, BC ノ和ノ半分ニ等シ:

故ニ平行四邊形 ABGF ノ底邊ハ AD, BC ノ和ノ半分ニ等シク,其ノ高サハ AD, BC ノ距離ナリ;

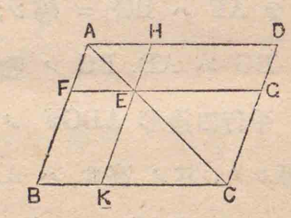
故ニ梯形 ABCD ハ AD, BC ノ和ノ半分ニ等シキ底邊,及 AD, BC ノ距離ニ等シキ高サノ矩形ニ等シ.

III, 1, 系 1.

問題 176. 梯形ノ二ツノ邊 BA, CD ヲ延長シ, H ニ於テ交ルトセハ, 三角形 HBD, HAC ハ相等シ.

定義 3. 平行四邊形ノ對角線上ノ一ツノ點ヲ過リ其ノ邊ニ平行ニ引クル二ツノ直線ハ之ヲ四ツノ平行四邊形ニ分ツ; 其ノ中二ツハ元ノ平行四邊形ト同シ直線ヲ對角線トス, 之ヲ此對角線ニ添フ平行四邊形ト稱ス; 他ノ二ツヲ對角線ニ添フ平行四邊形ノ餘形ト稱ス.

定理 4. 平行四邊形ノ對角線ニ添フ平行四邊形ノ餘形ハ相等シ.



ABCD ヲ平行四邊形; FK, HG ヲ其ノ對角線 AC ニ添フ平行四邊形ノ餘形トセヨ:

然ルトキハ FK ハ HG ニ等シカル可シ.

對角線ハ平行四邊形ヲ二等分スルヲ以テ, I, 25.
三角形 ABC, AFE, EKC ハ夫々三角形 CDA, EHA, CGE

ニ等シ;

即全形 ABC ハ全形 CDA ニ等シク, 其ノ部分 AFE, EKC ハ夫々其ノ部分 EHA, CGE ニ等シキヲ以テ, 殘リ FK ハ殘リ HG ニ等シ.

問題 177. 若シ E 點ガ對角線 AC ノ上ニ在ラズ, 三角形 ABC ノ内ニ在リ FG ガ AC ト L 點ニ於テ交リ, HK ガ之ト M 點ニ於テ交レハ, 平行四邊形 FK ハ平行四邊形 HG ヨリ小ニシテ, 其ノ差ハ三角形 FMG (或ハ HLK) ノ二倍ナリ.

定義 5. 二ツノ相隣レル邊ガ二ツノ與ヘラレタル直線ニ等シキ矩形ヲ此二ツノ直線ノ包ム矩形ト稱ス. 一ツノ邊ガ與ヘラレタル直線ニ等シキ正方形ヲ此直線ノ上ノ正方形ト稱ス.

二ツノ直線 AB, CD ノ包ム矩形ヲ略稱シテ, 矩形 AB, CD ト云フ.

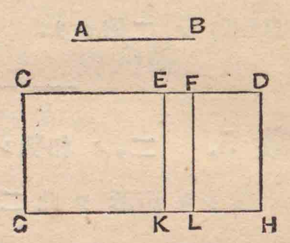
定義 4. 有限直線上ノ一ツノ點ハ之ヲ内分スト云フ (或ハ單ニ之ヲ分ツト云フ); 其ノ延長ノ上ノ一ツノ點ハ之ヲ外分スト云フ. 何レノ場合ニ於テモ有限直線ノ兩端ヨリ分點ノ距離ヲ其ノ分ト

稱ス.

有限直線ガ內分サルヽトキハ, 全線ハ二ツノ分ノ和ニ等シク; 外分サルヽトキハ, 二ツノ分ノ差ニ等シ.

定理 5. **二ツノ與ヘラレタル直線ノ包ム矩形ハ其ノ一ツト他ヲ分チタル諸部分トノ包ム矩形ノ和ニ等シ.**

AB, CD ヲ二ツノ與ヘラレタル直線トシ, CD ヲ任意ノ部分 CE, EF, FD ニ分チタリトセヨ:



然ルトキハ AB, CD ノ包ム矩形ハ AB, CE 及 AB, EF 及 AB, FD ノ包ム矩形ノ和ニ等シカル可シ.

CG ヲ CD ニ直角ニ引キ, AB ニ等シク取レ;
G ヲ過リ GH ヲ CD ニ平行ニ引ク;
D, E, F ヲ過リ DH, EK, FL ヲ CG ニ平行ニ引ク:
然レハ全形 CH ハ其ノ部分 CK, EL, FH ノ和ニ等シ;

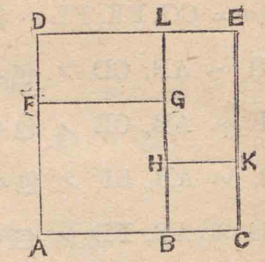
然ルニ CG, EK, FL ハ各 AB ニ等シキヲ以テ, 作圖, 及 I, 25.
CH ハ AB, CD ノ包ム矩形ナリ,
CK ハ AB, CE ノ包ム矩形ナリ,
EL ハ AB, EF ノ包ム矩形ナリ,
FH ハ AB, FD ノ包ム矩形ナリ;
故ニ AB, CD ノ包ム矩形ハ AB, CE 及 AB, EF 及 AB, FD ノ包ム矩形ノ和ニ等シ.

系 1. 一ツノ直線ヲ二ツノ部分ニ分ツトキハ, 全線ト其ノ一ツノ部分トノ包ム矩形ハ此部分ノ上ノ正方形ト二ツノ部分ノ包ム矩形ノ和ニ等シ.

系 2. 一ツノ直線ヲ二ツノ部分ニ分ツトキハ, 全線ノ上ノ正方形ハ全線ト各ノ部分トノ包ム矩形ノ和ニ等シ.

定理 6. **二ツノ直線ノ和ノ上ノ正方形ハ各ノ直線ノ上ノ正方形ノ和ヨリ大ナルヿ二ツノ直線ノ包ム矩形ノ二倍ナリ.**

AB, BC ヲ二ツノ直線トシ, 之ヲ一直線ニ置キ,



AC ヲ 其ノ 和 トセヨ:

然ルトキハ AC ノ 上ノ 正方形 ハ AB 及 BC ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ヨリ 大ナルヿ AB, BC ノ 包ム 矩形 ノ 二倍ナル可シ.

AC ノ 上ニ 正方形 ACED ヲ 作レ;
AB, BC ノ 上ニ 正方形 ABGF, BCKH ヲ 作レ;
BG ヲ 延長シ, DE ト L ニ 於テ 交ル トセヨ;
AF ト AD ハ 同一ノ 直線 ノ 上ニ 在リ, I, 1, 系 2.
即 F 點 ハ AD ノ 上ニ 在リ;
又 同樣ニ K 點 ハ CE ノ 上ニ 在リ;
同樣ニ BG ト BH モ 同一 ノ 直線 ノ 上ニ 在リ,
即 H 點 ハ BL ノ 上ニ 在リ:
正方形 AE ハ 正方形 AG 及 BK ノ 和 ヨリ 矩形 FL 及 HE ノ 和 ダケ 大ナリ:
AD ハ AC ニ 等シク, AF ハ AB ニ 等シキ ヲ 以テ,
殘リ FD ハ 殘リ BC ニ 等シ;
之 ト 同樣ニ KE ハ AB ニ 等シ;
故ニ FL ハ FG, FD ノ 包ム 矩形 ナル ヲ 以テ,
AB, BC ノ 包ム 矩形 ニ 等シ;

同樣ニ HE モ 亦 AB, BC ノ 包ム 矩形 ニ 等シ:
故ニ 正方形 AE ハ 正方形 AG 及 BK ノ 和 ヨリ 大ナルヿ AB, BC ノ 包ム 矩形 ノ 二倍ナリ.

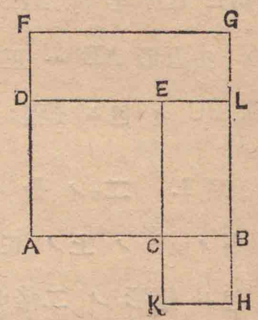
系 1. 二ツノ 分 ニ 內分シタル 直線 ノ 上ノ 正方形 ハ 各ノ 分 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ヨリ 大ナルヿ 二ツノ 分 ノ 包ム 矩形 ノ 二倍ナリ.

系 2. 一ツノ 直線 ノ 上ノ 正方形 ハ 其ノ 半分 ノ 上ノ 正方形 ノ 四倍ナリ.

問題 178. 一ツノ 直線 ヲ 任意ノ 數 ノ 部分 ニ 分テハ, 全線 ノ 上ノ 正方形 ハ 各ノ 部分 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 部分 ノ 各ノ 双 ノ 包ム 矩形 ノ 和 ノ 二倍 ヲ 加ヘタル モノ ニ 等シ.

問題 179. 正方形 ノ 對角線 ニ 添フ 平行四邊形 ハ 正方形 ナリ.

定理 7. 二ツノ 直線 ノ 差 ノ 上ノ 正方形 ハ 各ノ 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ヨリ 小ナルヿ 二ツノ 直線 ノ 包ム 矩形 ノ 二倍ナリ.



AB, BC ヲ二ツノ直線トシ，之ヲ一直線ニ置キ，AB ヲ其ノ大ナルモノトシ，AC ヲ其ノ差トセヨ:
然ルトキハ AC ノ上ノ正方形ハ AB 及 BC ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルヿ AB, BC ノ包ム矩形ノ二倍ナル可シ.

AC ノ上ニ正方形 ACED ヲ作レ;
AB 及 BC ノ上ニ正方形 ABGF, BCKH ヲ作レ (但シ AG ハ AE ト同シ側ニ, BK ハ反對ノ側ニ, 在ル樣ニセヨ);
DE ヲ延長シ, BG ト L ニ於テ交ルトセヨ:
AF ト AD, KC ト CE, HB ト BG ハ夫々同一ノ直線上ニ在リ:　　I, 1, 系 2.
正方形 AE ハ正方形 AG 及 BK ノ和ヨリ矩形 FL 及 LK ダケ小ナリ;
AF ハ AB ニ等シク, AD ハ AC ニ等シキヲ以テ,
殘リ DF ハ殘リ BC ニ等シ;
又 EC ハ AC ニ等シク, CK ハ CB ニ等シキヲ以テ,
和 EK ハ和 AB ニ等シ:

FL ハ DL, DF ノ包ム矩形ナルヲ以テ,
AB, BC ノ包ム矩形ニ等シ;
LK ハ EK, KH ノ包ム矩形ナルヲ以テ,
亦 AB, BC ノ包ム矩形ニ等シ:
故ニ正方形 AE ハ正方形 AG 及 BK ノ和ヨリ小ナルヿ AB, BC ノ包ム矩形ノ二倍ナリ.

系. 二ツノ分ニ外分シタル直線ノ上ノ正方形ハ各ノ分ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルヿ二ツノ分ノ包ム矩形ノ二倍ナリ.

問題 180. 二ツノ與ヘラレタル直線ノ和及差ノ上ノ正方形ノ差ハ其二ツノ直線ノ包ム矩形ノ四倍ナリ

定理 8. 二ツノ直線ノ上ノ正方形ノ差ハ直線ノ和ト其ノ差トノ包ム矩形ニ等シ.

AB, BC ヲ二ツノ直線トセヨ;
然ルトキハ AB 及 BC ノ上ノ正方形ノ差ハ AB, BC ノ和及差ノ包ム矩形ニ等シカル可シ.

AB, BC ノ中小ナル BC ヲ大ナル AB ノ上ニ

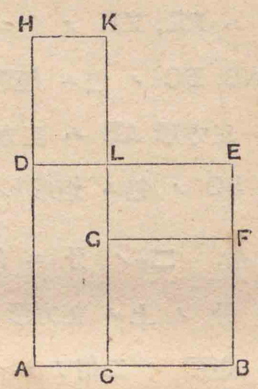
重ナル様ニ置ク;

AB 及 BC ノ上ニ正方形 ABED, CBFG ヲ作レ;

AD ヲ H マデ延長シ, DH ヲ BC ニ等シクセヨ;

CG ヲ延長シ, DE ト L ニ於テ交リ, LK ヲ BC ニ等シクセヨ;

HK ヲ結ヒ付クヨ;



然レハ F ハ直線 BE 上ノ點ナリ,

又 DLKH ハ矩形ナリ; I, 6, 系 2, 及 I, 25, 系 2.

BE ハ BA ニ等シク, BF ハ BC ニ等シキヲ以テ,

殘リ EF ハ殘リ AC ニ等シ,

而シテ DL ハ AC ニ等シ;

故ニ EF ハ DL ニ等シ;

又 EL ハ BC ニ等シク, DH モ BC ニ等シキヲ以テ,

EL ハ DH ニ等シ;

故ニ矩形 DK ハ矩形 LF ニ等シ: I, 27, 系.

今正方形 AE ト BG トノ差ハ矩形 AL 及矩形 LF ノ和ナリ;

然ルニ LF ハ DK ニ等シキヲ以テ,

此差ハ矩形 AL 及 DK ノ和ニ等シ, 即矩形 AK ニ等シ;

而シテ AK ハ AH, AC ノ包ム矩形ニシテ,

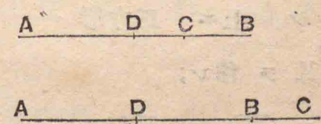
AH ハ AD, DH ノ和即 AB, BC ノ和ナリ;

AC ハ AB, BC ノ差ナリ;

故ニ AB 及 BC ノ上ノ正方形ノ差ハ AB 及 BC ノ和ト其ノ差トノ包ム矩形ニ等シ.

系. 一ツノ直線ガ任意ノ點ニ於テ内分或ハ外分サルヽトキハ, 其ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ直線ノ半分ノ上ノ正方形, 及分點ト中點トノ間ニ在ル部分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ.

何トナレハ, AB ヲ C ニ於テ内分或ハ外分サレタル直線, D ヲ其ノ中點トセハ, AC ハ AD ト DC ノ和ナリ;



BC ハ BD ト DC ノ差, 即 AD ト DC ノ差ナリ;

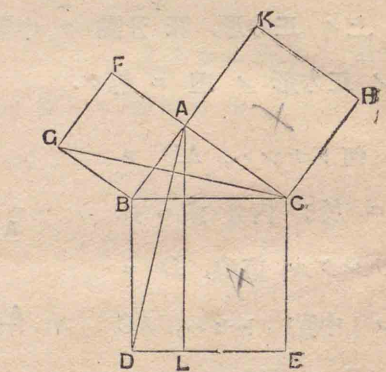
故ニ此定理ニ依リテ, AC, BC ノ包ム矩形ハ AD 及 DC ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ.

定理 9. 直角三角形ニ於テ, 斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二ツノ邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

三角形 ABC ニ於テ角 BAC ヲ直角ナリトセヨ:
然ルトキハ BC ノ上ノ正方形ハ BA 及 AC ノ上ノ正方形ノ和ニ等シカル可シ.

(此定理ハ頗ル重要ナルヲ以テ二ツノ異ナレル證明ヲ掲ク.)

第一證明法.

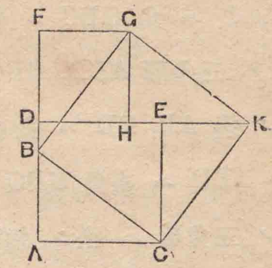


BC ノ上ニ正方形 BDEC ヲ作レ;
AB ノ上ニ正方形 BAFG ヲ作レ;
AC ノ上ニ正方形 ACHK ヲ作レ;
AL ヲ BD ニ平行ニ引キ, AD, CG ヲ結ビ付ケヨ;
角 CBD, ABG ハ各直角ナルヲ以テ, 相等シ;
角 ABC ヲ双方ヘ加フレハ,

角 ABD ハ角 GBC ニ等シ;
然レハ三角形 ABD, GBC ニ於テ,
二ツノ邊 AB, BD ハ夫々二ツノ邊 GB, BC ニ等シク,
夾角 ABD ハ夾角 GBC ニ等シキヲ以テ,
二ツノ三角形ハ全ク相等シ; I, 9
今 BAC, BAF ハ各直角ナルヲ以テ, FAC ハ一直線ナリ; I, 3.
故ニ三角形 GBC ト正方形 BF ハ同シ高サニシテ,
同シ底邊 GB ノ上ニ在リ;
故ニ正方形 BF ハ三角形 GBC ノ二倍ナリ; III, 2.
同樣ニ矩形 BL ハ三角形 ABD ノ二倍ナリ;
故ニ矩形 BL ハ正方形 BF, 即 AB ノ上ノ正方形ニ等シ:
同樣ニ矩形 CL ハ AC ノ上ノ正方形ニ等シキコヲ證明スルヲ得:
而シテ矩形 BL 及 CL ハ合セテ BE, 即 BC ノ上ノ正方形ニ等シ;
故ニ BC ノ上ノ正方形ハ AB 及 AC ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

第二證明法.

AC ノ 上ノ 正方形



ACED ヲ 作レ;

AB ヲ F マデ 延長シ,

BF ヲ AC 即 AD ニ 等シク

セヨ;

然レハ DF ハ AB ニ 等シ;

DF ノ 上ニ 正方形 DHGF ヲ 作レ;

然レハ 此 正方形 ハ AB ノ 上ノ 正方形 ニ 等シ,

而シテ DH ト DE ハ 同一ノ 直線 ノ 上ニ 在リ;

BG ヲ 結ヒ付ケヨ;

DH ヲ K マデ 延長シ, HK ヲ DE 即 AC ニ 等シク セヨ;

CK, KG ヲ 結ヒ付ケヨ;

二ツノ 直角三角形 CAB, BFG ニ 於テ,

邊 AC, AB ハ 夫々 FB, FG ニ 等シ;

故ニ 此 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シ; I, 9.

同樣ニ 三角形 KHG, CEK モ 亦 各 全ク 此 二ツノ 三角形 ノ 各 ニ 等シ;

故ニ 四邊形 BCKG ハ 等邊ナリ:

又 角 ECK ハ 角 ACB ニ 等シキ ヲ 以テ,

角 BCK ハ 角 ACE ニ 等シ

故ニ BCK ハ 直角 ナリ;

故ニ BCKG ハ 正方形 ニシテ, BC ノ 上ニ 在リ.

今 三角形 CEK ハ 三角形 CAB ニ 等シク, 三角形 KHG ハ 三角形 BFG ニ 等シキ ヲ 以テ,

正方形 BK ハ 正方形 AE 及 DG ヲ 合セタル 形 ニ 等シ;

故ニ BC ノ 上ノ 正方形 ハ AB 及 AC ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ.

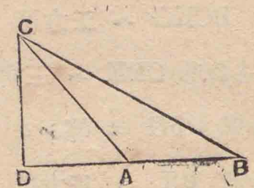
問題 181. 直角三角形 ノ 直角 ヨリ 斜邊 ヘ 垂線 ヲ 引キ, 之 ヲ 二ツノ 部分 ニ 分テハ, 其 部分 ノ 一ツト 斜邊 ノ 包ム 矩形 ハ 此 部分 ニ 隣ル 邊 ノ 上ノ 正方形 ニ 等シ.

定理 10. 鈍角三角形 ニ 於テ, 鈍角 ニ 對スル 邊 ノ 上ノ 正方形 ハ 他ノ 二ツノ 邊 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ヨリ 大ナルヿ 一, ノ 邊 ト 其 邊 ノ 上ニ 他ノ 邊 ノ 正射影 ト ノ 包ム 矩形 ノ 二倍ナリ.

三角形 ABC ニ 於テ, BAC ヲ 鈍角 トシ, CD ヲ BA ノ 延長 ニ 垂線ナリ トセヨ:

然ルトキハ BC ノ 上ノ 正方形 ハ BA, AC ノ 上ノ 正方形 ノ

和ヨリ大ナルヿ邊BAトBAノ上ニACノ正射影ナルADトノ包ム矩形ノ二倍ナル可シ.



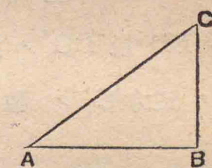
BDハBA, ADノ和ナルヲ以テ,
BDノ上ノ正方形ハBA及ADノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形BA, ADノ二倍ダケ大ナリ: III, 6.
双方ヘDCノ上ノ正方形ヲ加ヘヨ;
然レバBD, DCノ上ノ正方形ノ和ハBA, AD, DCノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形BA, ADノ二倍ダケ大ナリ;
然ルニBD, DCノ上ノ正方形ノ和ハBCノ上ノ正方形ニ等シ; III, 9.
又AD, DCノ上ノ正方形ノ和ハACノ上ノ正方形ニ等シ; III, 9.
故ニBCノ上ノ正方形ハBA, ACノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形BA, ADノ二倍ダケ大ナリ.

定理 11. 三角形ノ鋭角ニ對スル邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二ノ邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルヿ一ツノ邊ト

其ノ上ニ他ノ邊ノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ナリ.

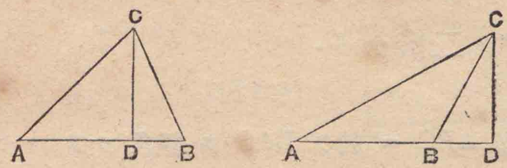
三角形ABCニ於テBACヲ鋭角ナリトセヨ:
然ルトキハBCノ上ノ正方形ハBA, ACノ上ノ正方形ノ和ヨリ小ナルヿABトABノ上ニACノ正射影トノ包ム矩形ノ二倍ナル可シ.

若シ角ABCガ直角ナルトキハ, ABノ上ニACノ正射影ハ即ABナリ;
故ニABトABノ上ニACノ正射影トノ包ム矩形ハ即ABノ上ノ正方形ナリ;



而シテBCノ上ノ正方形ハBA, ACノ上ノ正方形ノ和ヨリABノ上ノ正方形ノ二倍ダケ小ナルヿ明ナリ. III, 9.

若シ角ABCガ直角ナラザルトキハ, CヨリAB或ハABノ延長ヘ垂線CDヲ引ク;
然レバADハABノ上ニACノ正射影ナリ;



BD ハ AB 及 AD ノ差ナルヲ以テ,

BD ノ上ノ正方形ハ AB 及 AD ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 AB, AD ノ二倍ダケ小ナリ; III, 7.

双方ヘ DC ノ上ノ正方形ヲ加ヘヨ;

然レバ BD 及 DC ノ上ノ正方形ノ和ハ BA, AD 及 DC ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 BA, AD ノ二倍ダケ小ナリ;

然ルニ BD 及 DC ノ上ノ正方形ノ和ハ BC ノ上ノ正方形ニ等シク;

AD 及 DC ノ上ノ正方形ノ和ハ AC ノ上ノ正方形ニ等シ:

故ニ BC ノ上ノ正方形ハ BA 及 AC ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 BA, AD ノ二倍ダケ小ナリ.

系. 定理 9, 10, 11 ノ逆ニ; 三角形ノ一ツノ邊ニ對スル角ハ其邊ノ上ノ正方形ガ他ノ二ツノ邊ノ

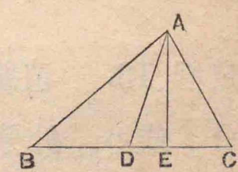
上ノ正方形ノ和ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ大ナルカ或ハ小ナルカニ從テ, 直角, 或ハ鈍角, 或ハ鋭角ナリ.

何トナレバ, 上ノ三ツノ定理ニ於テ, 假設ハ起リ得可キ總テノ場合ヲ盡シ, 終結ハ互ニ相容レズ; 故ニ轉換法ニ依リテ各ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ.

定理 12. 三角形ノ二ツノ邊ノ上ノ正方形ノ和ハ底邊ノ半分ノ上ノ正方形, 及頂點ヨリ底邊ノ中點ヘ引ケル直線ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ.

ABC ヲ三角形, D ヲ底邊 BC ノ中點トセヨ:

然ルトキハ AB 及 AC ノ上ノ正方形ノ和ハ BD 及 DA ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナル可シ.



AD ガ BC ニ垂線ナルトキハ, 此定理ハ III, 9 ニ依リテ明ナリ:

AD ガ BC ニ垂線ナラザレバ, ADB ヲ鈍角ナリトセヨ;

AE ヲ BC ニ垂線トセヨ;

然レハ AB ノ上ノ正方形ハ BD 及 DA ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 BD, DE ノ二倍ダケ大ナリ, III, 10.

又 AC ノ上ノ正方形ハ CD, DA ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 CD, DE ノ二倍ダケ小ナリ; III, 11.

而シテ CD ハ BD ニ等シキヲ以テ, 假設.

AC ノ上ノ正方形ハ BD, DA ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 BD, DE ノ二倍ダケ小ナリ;

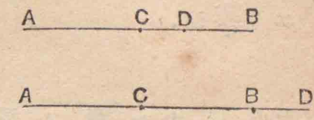
故ニ AB 及 AC ノ上ノ正方形ノ和ハ BD 及 DA ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ.

問題 182. 平行四邊形ノ邊ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

定理 13. 直線ヲ任意ノ點ニ於テ内分或ハ外分スレハ, 二ツノ分ノ上ノ正方形ノ和ハ直線ノ半分ノ上ノ正方形, 及分點ト中點トノ間ノ部分ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ.

AB ヲ D ニ於テ内分或ハ外分サレタル直線; C ヲ

其ノ中點トセヨ:



然ルトキハ AD 及 BD ノ上ノ正方形ノ和ハ AC 及 CD ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナル可シ.

AD ハ AC, CD ノ和ナルヲ以テ,

AD ノ上ノ正方形ハ AC 及 CD ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 AC, CD ノ二倍ダケ大ナリ: III, 6.

又 BD ハ BC ト CD ノ差即 AC ト CD ノ差ナルヲ以テ,

BD ノ上ノ正方形ハ AC 及 CD ノ上ノ正方形ノ和ヨリ矩形 AC, CD ノ二倍ダケ小ナリ:

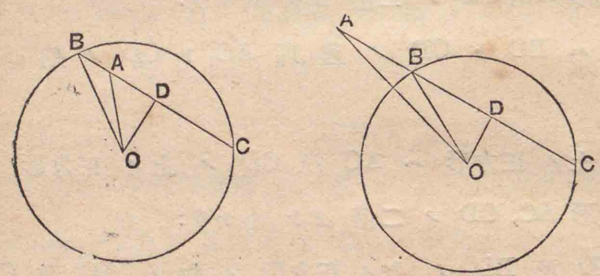
故ニ AD 及 BD ノ上ノ正方形ノ和ハ AC 及 CD ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ.

系. 二ツノ與ヘラレタル直線ノ和及其ノ差ノ上ノ正方形ノ和ハ其直線ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ.

定理 14. 圓ノ弦ヲ内分或ハ外分スレハ, 二ツノ分ノ包ム矩形ハ半徑ノ上ノ正方形ト分點ヲ圓ノ中心

ト結ヒ付クル直線ノ上ノ正方形トノ差ニ等シ.

中心 O ナル圓ノ弦 BC ヲ A ニ於テ二ツノ分 AB, AC ニ內分或ハ外分シタリトセヨ:
然ルトキハ AB, AC ノ包ム矩形ハ OB 及 OA ノ上ノ正方形ノ差ニ等シカル可シ.



O ヨリ BC ヘ垂線 OD ヲ引ク:
然レハ BD ハ DC ニ等シ: II, 10.
故ニ AC ハ BD 及 AD ノ和ニ等シク,
AB ハ其ノ差ナリ;
故ニ AB, AC ノ包ム矩形ハ BD 及 AD ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ: III, 8
然ルニ OB ノ上ノ正方形ハ BD 及 OD ノ上ノ正方形

ノ和ニ等シク, III, 9.
OA ノ上ノ正方形ハ AD 及 OD ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ; III, 9.
故ニ OB 及 OA ノ上ノ正方形ノ差ハ BD 及 AD ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ:
故ニ AB, AC ノ包ム矩形ハ OB 及 OA ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ.

系 1. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル弦ノ分ノ包ム矩形ハ何レノ弦ニテモ皆等シ.

系 2. 若シ與ヘラレタル點ガ圓ノ內ニ在レハ, 之ヲ過ル弦ノ分ノ包ム矩形ハ其點ニ於テ二等分サルヽ弦ノ半分ノ上ノ正方形ニ等シ.

系 3. 若シ與ヘラレタル點ガ圓ノ外ニ在レハ, 之ヲ過ル弦ノ分ノ包ム矩形ハ其點ヨリ引ケル切線ノ上ノ正方形ニ等シ.

系 4. 逆ニ; 若シ一ツノ圓外ノ點ヲ過ル弦ノ分ノ包ム矩形ガ其點ヲ圓周上ノ一ツノ點ト結ヒ付クル直線ノ上ノ正方形ニ等シケレハ, 此直線ハ圓ニ切ス.

何トナレハ, 若シ AB, AC ノ包ム矩形ガ AP ノ上ノ

正方形ニ等シクシテ, 而シテ AP ガ圓ニ切セザレバ, AP ハ再ヒ圓周トQニ於テ出會フ可シ:
系1ニ依リテ矩形 AP, AQ ハ矩形 AB, AC ニ等シ;
故ニ又 AP ノ上ノ正方形ニ等シキヲ要ス;
然レ圧是レ决シテ有ル能ハズ:
故ニ AP ハ再ヒ圓周ニ出會ハズ, 即圓ニ切ス.

系5. 圓周上ノ點ヨリ直徑ヘ引クル垂線ガ其直徑ヲ分ツ所ノ二ツノ分ノ包ム矩形ハ垂線ノ上ノ正方形ニ等シ.

系2及定理II, 10ニ依リテ直ニ證明スルヲ得.

第一節ノ問題.

*問題183. 二ツノ相等シキ三角形ガ同シ底邊ノ上ニ反對ノ側ニ在リ; 其ノ頂點ヲ結ヒ付クル直線ハ底邊ニ於テ二等分セラル.

問題184. 四邊形ノ對角線ガ互ニ垂線ナレバ, 其ノ包ム矩形ハ四邊形ノ二倍ナリ.

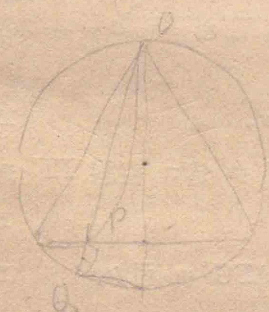
*問題185. 正三角形ノ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引クル垂線ノ上ノ正方形ハ邊ノ半分ノ上ノ正方形ノ三倍ナリ.

*問題186. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ其ノ延長ノ上ニ任意ノ點 O ヲ取レバ, OA, AB ノ上ノ正方形ノ差ハ矩形 OB, OC ニ等シ.

*問題187. 三角形ノ邊ノ上ノ正方形ノ和ノ三倍ハ中線ノ上ノ正方形ノ和ノ四倍ナリ.

*問題188. 二ツノ直線 AB, CD 或ハ其ノ延長ガ O 點ニ於テ交リ, 矩形 OA, OB ガ矩形 OC, OD ニ等シケレバ; A, B, C, D ヲ過リ一ツノ圓ヲ畫クコヲ得.

問題189. 二等邊三角形 OAB ノ頂點 O ヨリ任意ノ直線ヲ引キ, 底邊 AB トPニ於テ交ラシメ, 外接圓ノ周トQニ於テ交ラシム: 矩形 OP, OQ ハ常ニ同シ大サナリ.



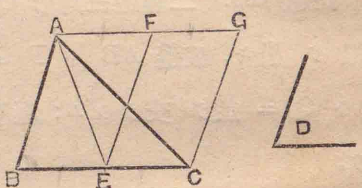
第二節.

作圖題.

作圖題 1. 與ヘラレタル三角形ニ等シク，而シテ其ノ一ツノ角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルヿ.

ABC ヲ與ヘラレタル三形角, D ヲ與ヘラレタル角トス:

ABC ニ等シク，而シテ一ツノ角ガ D ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルヿヲ求ム.



BC ヲ E ニ於テ二等分セヨ， II, 作 1.

E ニ於テ D ニ等シキ角 CEF ヲ爲ス直線 EF ヲ引ク， II, 作 5.

A ヲ過リ，BC ニ平行ニ直線 AFG ヲ引ク， II, 作 6.

C ヲ過リ，EF ニ平行ニ直線 CG ヲ引キ， II, 作 6.

AFG ト G ニ於テ交ラシメヨ:

ECGF ハ求ムル所ノ平行四邊形ナリ.

AE ヲ結ヒ付ケヨ;

三角形 AEC ハ三角形 AEB ニ等シ， III, 2, 系 2.

故ニ三角形 ABC ハ三角形 AEC ノ二倍ナリ;

又平行四邊形 ECGF モ三角形 AEC ノ二倍ナリ; III, 2, 系 1.

故ニ平行四邊形 ECGF ハ三角形 ABC ニ等シ，

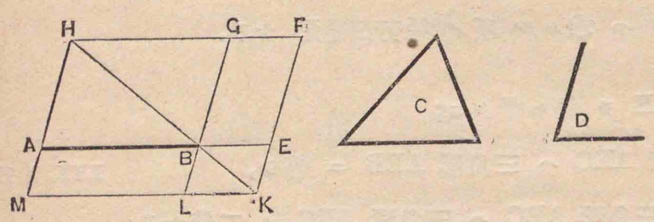
而シテ其ノ角 FEC ハ與ヘラレタル角 D ニ等シ.

作圖題 2. 與ヘラレタル底邊ノ上ニ與ヘラレタル三角形ニ等シク，而シテ其ノ一ツノ角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルヿ.

AB ヲ與ヘラレタル底邊, C ヲ與ヘラレタル三角形, D ヲ與ヘラレタル角トス:

AB ノ上ニ C ニ等シク，而シテ一ツノ角ガ D ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルヿヲ求ム.

平行四邊形 BEFG ヲ三角形 C ニ等シク，其ノ角 GBE ガ角 C ニ等シキ様ニ作レ; III, 作 1.



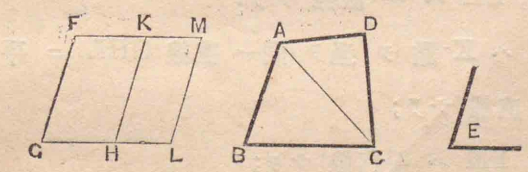
且其ノ一ッノ邊 BE ヲ AB ノ延長ノ上ニ在ラシメヨ;
A ヲ過リ AH ヲ BG ニ平行ニ引キ, II, 作 6.
FG ノ延長ト H ニ於テ交ラシメヨ;
HB ヲ結ビ付クヨ;
HA ガ FE ニ平行ナルヲ以テ, HB ハ FE ニ平行ナラズ; 公理 4.
HB ト FE ヲ延長シ K ニ於テ交ラシメヨ;
HB ハ角 FHA ノ内ニ在ルヲ以テ,
K 點ハ B, E ノ方ニ在リ;
K ヲ過リ AB ニ平行ニ KLM ヲ引キ, II, 作 6.
GB 及 HA ノ延長ト L, M ニ於テ出會ハシメヨ;
ABLM ハ求ムル所ノ平行四邊形ナリ

MKFH ハ平行四邊形ニシテ, HK ハ其ノ對角線ナルヲ以テ, 作圖.

矩形 AL ハ矩形 GE ニ等シ; III, 4.
然ルニ GE ハ C ニ等シ; 作圖.
故ニ AL ハ C ニ等シ;
其ノ角 ABL ハ對頂角 GBE ニ等シ,
即與ヘラレタル角 D ニ等シ;
而シテ其ノ底邊ハ AB ナリ

作圖題 3. 與ヘラレタル直線形ニ等シク而シテ一ッノ角ガ與ヘラレタル角ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルヿ.

ABCD ヲ與ヘラレタル直線形, E ヲ與ヘラレタル角トス:



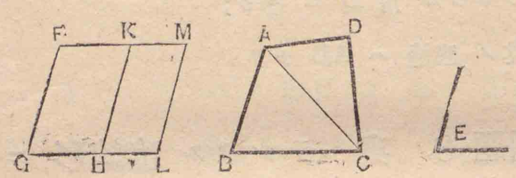
ABCD ニ等シク, 一ッノ角ガ E ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルヿヲ求ム.

AC ヲ結ビ付クヨ;
三角形 ABC ニ等シク, 一ッノ角ガ E ニ等シキ平行四邊

形 FGHK ヲ 作レ, III, 作 1.

KH ノ 上ニ 三角形 ADC ニ 等シク, 而シテ 一ツノ 角 KHL ガ 角 E ニ 等シキ 平行四邊形 KHLM ヲ 作レ, III, 作 2.

然ルトキハ FGLM ハ 求ムル 所ノ 平行四邊形 ナリ.



角 FGH, KHL ハ 各 角 E ニ 等シキ ヲ 以テ, 互ニ 相等シ;

然ルニ FGH ハ KHG ノ 補角 ナリ; I, 7, 系.

故ニ KHL, KHG ハ 互ニ 補角 ナリ;

故ニ GH, HL ハ 一 直線 ナリ: I, 3.

FK, KM ハ K 點 ヲ 過リ 同一 直線 GHL ニ 平行ナル ヲ 以テ, 一 直線 ナリ; 公理 4.

故ニ GL, FM ハ 平行線 ナリ;

FG, ML ハ 各 KH ニ 平行ナル ヲ 以テ, 互ニ 平行ナリ; I, 8.

故ニ FGLM ハ 平行四邊形 ナリ:

而シテ FH ハ 三角形 ABC ニ 等シク, KL ハ 三角形 ADC ニ 等シキ ヲ 以テ,

FGLM ハ ABCD ニ 等シ;

而シテ 其ノ 一ツノ 角 FGL ハ 角 E ニ 等シ;

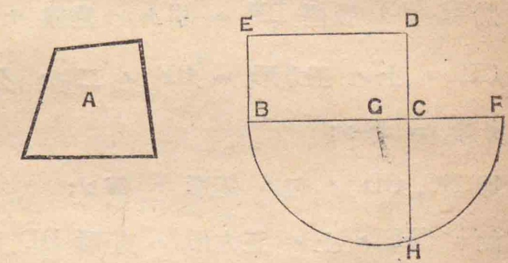
故ニ FGLM ハ 求ムル 所ノ 平行四邊形 ナリ.

與ヘラレタル 直線形 ガ 五ツ 以上ノ 邊 ヲ 有ツモ, 之 ヲ 三角形 ニ 分チ 上 ト 同様ノ 方法 ニ 由リテ 此題 ノ 解 ヲ 為ス ヲ 得.

作圖題 4. 與ヘラレタル 直線形 ニ 等シキ 正方形 ヲ 作ルコト.

A ヲ 與ヘラレタル 直線形 トス:

A ニ 等シキ 正方形 ヲ 作ルコト ヲ 求ム.



A ニ 等シキ 矩形 BCDE ヲ 作レ; III, 作 3.

若シ 此 矩形 ニ 於テ, BC, CD ガ 相等シケレハ, BD ハ 求ムル 所ノ 正方形 ナリ:

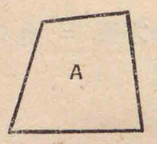
若シ BC, CD ガ 相等シカラザレハ, BC ヲ 延長シ, CF ヲ CD ニ 等シク 取レ:

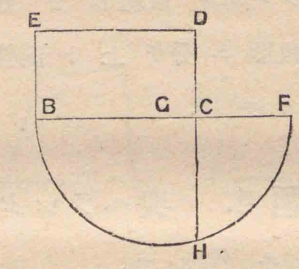
BF ヲ G ニ 於テ 二等分セヨ;

G ヲ 中心 トシ, 半徑 GB ヲ 以テ 圓 ヲ 書ケ;

DC ヲ 延長シ, 圓周 ト H ニ 於テ 交ラシメヨ;

然ルトキハ CH ノ 上ノ 正方形 ハ 求ムル 所ノ 正方形 ナリ.





CH ハ 圓周 上ノ

點 H ヨリ 直徑 BF ヘ 引ケル 垂線 ナル ヲ 以テ,

CH ノ 上ノ 正方形 ハ BF ノ 二ツノ 分 BC, CF ノ 包ム

矩形 ニ 等シ; III, 14, 系 5.

即 BC, CD ノ 包ム 矩形 ニ 等シ;

故ニ CH ノ 上ノ 正方形 ハ 矩形 BD ニ 等シ;

故ニ 與ヘラレタル 直線形 A ニ 等シ.

問題 190. 與ヘラレタル 底邊 ノ 上ニ, 與ヘラレタル 正方形 ニ 等シキ 矩形 ヲ 作ルコト.

作圖題 5. 與ヘラレタル 直線形 ニ 等シク,

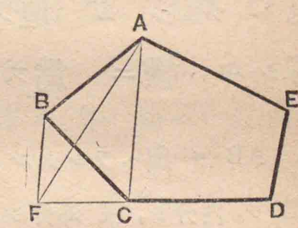
而シテ 邊 ノ 數 ガ 一ツ 少キ 直線形 ヲ 作ルコト; 之 ニ 依リテ, 與ヘラレタル 直線形 ニ 等シキ 三角形 ヲ 作ルコト.

ABCDE ヲ 與ヘラレタル 直線形 トス:

ABCDE ニ 等シクシテ, 邊 ノ 數 ガ 之 ヨリ 一ツ 少キ 直線形 ヲ 作ルコト ヲ 求ム.

AC ヲ 結ビ付ケヨ;

B ヲ 過リ AC ニ 平行ニ BF ヲ 引キ, DC ノ 延長 ト F ニ 於テ 交ラシメヨ;



AF ヲ 結ビ付ケヨ;

然ルトキハ AFDE ハ 求ムル 所ノ 形 ナリ.

三角形 AFC, ABC ハ 同シ 底邊 AC ノ 上ニ 在リテ, 相等シキ 高サ ナル ヲ 以テ,

三角形 AFC ハ 三角形 ABC ニ 等シ; III, 2, 系 2.

双方 ヘ 形 ACDE ヲ 加ヘヨ;

AFDE ハ ABCDE ニ 等シ,

而シテ 邊 ノ 數 ハ 一ツ 少シ.

同樣ニ EF ヲ 結ビ付ケ, A ヲ 過リ EF ニ 平行ナル 直線 ヲ 引キ, DF ノ 延長 ト G ニ 於テ 交ラシムルトキハ, 三角形

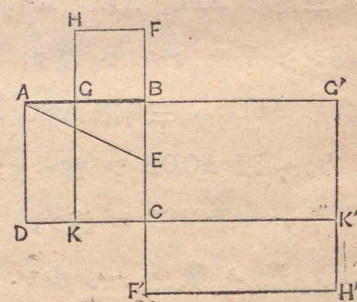
EGD ハ AFDE ニ等シ, 即 ABCDE ニ等シ

與ヘラレタル直線形ノ邊ノ數ハ幾個ナルモ同樣ノ方法ヲ應用スルヲ得.

作圖題 6. 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ内分シ, 又外分シ, 直線ト一ツノ分トノ包ム矩形ガ他ノ分ノ上ノ正方形ニ等シキ樣ニ爲スコ.

AB ヲ與ヘラレタル直線トス:
AB ヲ内分シ, 又外分シ, AB ト一ツノ分トノ包ム矩形ガ他ノ分ノ上ノ正方形ニ等シキ樣ニ爲スコヲ求ム.

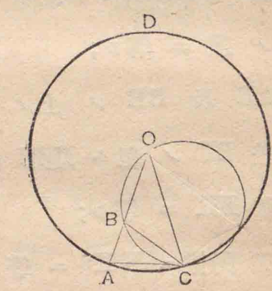
AB ノ上ニ正方形 ABCD ヲ作レ;
BC ヲ E ニ於テ二等分シ,
EA ヲ結ヒ付クヨ;
BC ノ延長ノ上ニ,
F, F′ ヲ EF, EF′ ガ各 EA ニ等シキ樣ニ取レ;



BF, BF′ ノ上ニ正方形 BFHG, BF′H′G′ ヲ作レ;
然ルトキハ AB, AG ノ包ム矩形ハ BG ノ上ノ正方形ニ等シ:
又 AB, AG′ ノ包ム矩形ハ BG′ ノ上ノ正方形ニ等シ.

HG ヲ延長シテ, 矩形 FHKC ヲ作リ; DC ヲ延長シテ, 矩形 F′H′K′C ヲ作レ;
然レハ AB ノ上ノ正方形ハ AE 及 BE ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ; III, 9.
AE 及 BE ノ上ノ正方形ノ差ハ其ノ和 CF 及其ノ差 BF ノ包ム矩形ニ等シ; III, 8.
即 FK ニ等シ;
又同樣ニ F′K′ ニ等シ:
故ニ AB ノ上ノ正方形 AC ハ矩形 FK ニ等シ,
故ニ双方ヨリ GC ヲ減シテ,
矩形 AK, 即 AB, AG ノ包ム矩形ハ FG, 即 BG ノ上ノ正方形ニ等シ:
又 AC ハ F′K′ ニ等シ,
故ニ双方ヘ BK′ ヲ加ヘテ,
矩形 AK′, 即 AB, AG′ ノ包ム矩形ハ F′G′, 即 BG′ ノ上ノ正方形ニ等シ.

作圖題 7. 與ヘラレタル圓ニ內接スル正十邊形ヲ畫クヿ; 依リテ, 圓ニ外接スル正十邊形ヲ畫クヿ; 及圓ニ內接又ハ外接スル正五邊形, 二十邊形, 四十邊形八十邊形,...... ヲ畫クヿ.



ACD ヲ與ヘラレタル圓トス:
ACD ニ內接スル正十邊形ヲ畫クヿヲ求ム.

中心 O ヲ得ヨ; II, 作 13.
任意ノ半徑 OA ヲ引ケ;
OA ヲ B ニ於テ OA, AB ノ包ム矩形ガ OB ノ上ノ正方形ニ等シキ様ニ分テ; III, 作 6.
A ヲ中心トシ, OB ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ, 圓 ACD ノ周ト C ニ於テ交ラシメヨ;
AC ヲ結ビ付ケヨ;
AC ハ圓ニ內接スル正十邊形ノ一ツノ邊ナリ.

OC, BC ヲ結ビ付ケヨ;

三ツノ點 O, B, C ヲ過ル圓ヲ畫ケ;
AC ノ上ノ正方形ハ矩形 AO, AB ニ等シキヲ以テ,
AC ハ圓 OBC ニ切ス; III, 14, 系 4.
故ニ角 ACB ハ之ニ隣レル弓形ニ於テノ角 BOC ニ等シ, II, 23.
故ニ角 ACO ハ角 BOC, BCO ノ和ニ等シ,
即外角 ABC ニ等シ; I, 13.
然ルニ OA ハ OC ニ等シキヲ以テ,
角 CAO ハ角 ACO ニ等シ; I, 11.
故ニ角 CAO ハ角 ABC ニ等シ;
故ニ BC ハ AC ニ等シ, I, 12.
即 OB ニ等シ:
故ニ角 BCO ハ角 BOC ニ等シ; I, 11.
故ニ角 ACO ハ各 AOC ニ等シキ二ツノ角ノ和ナリ,
即角 AOC ノ二倍ナリ;
故ニ角 CAO モ亦角 AOC ノ二倍ナリ;
故ニ角 AOC ハ三角形 AOC ノ總テノ角ノ和ノ五分ノ一ナリ,
即四直角ノ十分ノ一ナリ,
故ニ劣弧 AC ハ全周ノ十分ノ一ナリ: II, 4.
故ニ全周 ACD ヲ劣弧 AC ニ等シキ弧ニ分チ, 各ノ

弧ノ弦ヲ引ケハ, 圓ニ内接スル正十邊形ヲ得. II, 27.

分點ニ於テ切線ヲ引ケハ, 外接スル正十邊形ヲ得.

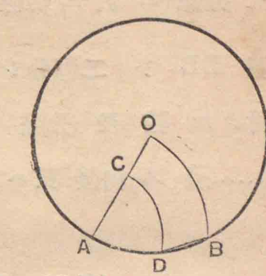
分點ヲ一ッ置キニ取レハ圓周ハ五ッニ等分セラル:
因リテ内接及外接スル正五邊形ヲ得.

又各ノ弧ヲ續ケテ二等分シ, 分點ヲ結ヒ付クル弦及分點ニ於テノ切線ヲ引ケハ, 二十, 四十, 八十, .. 邊ノ内接及外接正多角形ヲ得.

問題 191. 二ッノ圓ガ再ヒ交ル點ヲEトスレハ, 弦CEハACニ等シ; 又OB, BC, CEハ圓OBCニ内接スル正五邊形ノ三ッノ邊ナリ: 之ヲ證明セヨ.

問題 192. 頂角ガ各ノ底角ノ三倍ナル二等邊三角形ヲ作ルコ.

作圖題 8. 與ヘラレタル圓ニ内接スル正十五邊形ヲ畫クコ; 依リテ, 圓ニ外接スル正十五邊形ヲ畫クコ; 又圓ニ内接又ハ外接スル正三十邊形, 六十邊形,……ヲ畫クコ.



ADBヲ與ヘラレタル圓トス:
ADBニ内接スル正十五邊形ヲ畫クコヲ求ム.

中心Oヲ得ヨ; II, 作 13.
任意ノ半徑OAヲ引ケ;
OAヲCニ於テACノ上ノ正方形ガ矩形AO, OCニ等シキ樣ニ分テ; III, 作 6.
中心A及半徑AO, ACヲ以テ, 二ッノ圓弧ヲ畫キ, 圓ADBノ周ト夫々B, Dニ於テ交ラシメヨ;
BDヲ結ヒ付ケヨ;
BDハ圓ニ内接スル正十五邊形ノ邊ナリ.

ABハ圓ニ内接スル正六邊形ノ邊ナリ, II, 作 25.
ADハ圓ニ内接スル正十邊形ノ邊ナリ; III, 作 7.
然レハ全周ニ三十有ル部分ノ中,
弧ABハ五ッヲ含ミ, 弧ADハ三ッヲ含ム;
故ニ弧DBハ二ッヲ含ム,
故ニ弧DBハ全周ノ十五分ノ一ナリ;
故ニ全周ヲDBニ等シキ弧ニ分チ, 其ノ弦ヲ引ケハ, 内接正十五邊形ヲ得. II, 27.

又分點ニ於テ切線ヲ引ケハ,外接正十五邊形ヲ得.

弧 DB ヲ二等分シ, 又之ヲ二等分シ,… 分點ヲ結ヒ付クル弦及分點ニ於テノ切線ヲ引ケハ, 三十, 六十,……邊ノ內接又ハ外接正多角形ヲ得.

第二節ノ問題.

問題 193. 二ツノ與ヘラレタル正方形ノ差ニ等シキ正方形ヲ作ルコ.

問題 194. 三角形ノ邊ノ上ニ在ル一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ直線ヲ引キ, 其三角形ヲ二等分スルコ.

問題 195. 正五邊形ノ外角ヲ三等分スルコ.

第三編ノ問題

問題 196. 若シ四ツノ點 A, B, C, D ガ一直線ノ上ニ此順ニ在レハ, 矩形 AC, BD ハ矩形 AB, CD 及矩形 BC, AD ノ和ニ等シ.

(此定理ハオイレルノ發見シタルモノナリ.)

問題 197. 與ヘラレタル周ノ總テノ矩形ノ中, 正方形ガ最大ナリ.

*問題 198. 二ツノ定マレル點ヲ過ル直線上ノ一ツノ點ヨリ此二ツノ點ヲ過ル總テノ圓ヘ引クル切線ハ皆相等シ.

*問題 199. 三角形ノ垂心ガ各ノ垂線ヲ分ツ分ノ包ム矩形ハ相等シ.

*問題 200. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 與ヘラレタル直線ニ切スル圓ヲ書クコ.

*問題 201. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ書クコ.

問題 202. 直角ヲ五ツニ等分スルコ.

第四編.

比及比例

第一節.

定義及緒論.

[本編ニ於テ論スル所ノ量ハ特ニ幾何學的ノ量ニ限ラザルナリ. 量ヲ代表スル爲ニ A, B, C, 等ノ大羅馬字ヲ用井ル; 是レ代數學ニ於ケル如ク, 其量ノ含ム所ノ單位ノ數ニ非ラズ, 其量自身ヲ代表スルモノナリ. 例ヘハ, 論スル所ノ量ガ線ノ長サナレハ, 其ダケノ長サヲ表ハシ, 其ノ尺, 寸等ノ數ニ非ラズ; 又若シ時間ナレハ, 其時間內ノ分, 秒等ノ數ニ非ラズ, 直ニ其ダケノ時ヲ代表スルモノナリ.

同シ種類ノ量 (長サト長サ, 重サト重サ, 等ハ同シ種類ノ量; 面積ト長サ, 重サト時, 等ハ異ナレル種類ノ量ナリ) ハ字母中ノ同シ部分ノ文字ヲ以テ之ヲ表ハス; 異ナレル種類ノ量, 或ハ異同何レニテモ

宜シキ量ヲ論スルトキハ, 異ナレル部分ノ文字ヲ用井ル. m, n, p, q, 等ノ小字ハ完全數ヲ表ハス.]

定義 1. 一ツノ量ガ他ノ量ヲ丁度若干度含ムトキハ, 前者ヲ後者ノ**倍量**ト稱ス. 其ノ之ヲ含ムコトガ 1, 2, 3,............ m 度ナルニ從テ, 第一, 第二, 第三, ... 第m倍量ト稱ス.

例ヘハ二寸ノ長サハ一寸ノ長サノ第二倍量ナリ; m 斤ノ重サハ一斤ノ重サノ第m倍量ナリ.

一ツノ量 A ガ他ノ量 B ノ第m倍量ナルコトヲ次ノ如ク記ス: $A = mB$.

(本編ニ於テハ, 言語ヲ以テ述フルトキハ餘リ長タラシクナル事ヲ簡略ニ記ス爲ニ代數學ノ記號ヲ假用ス; 然レドモ代數學ニ於テ用井ル時トハ其ノ代表スル所稍異ナルハ前ニ述タルガ如シ.)

mA ト mB ハ A ト B ノ**等倍量**ナリト云フ.

定義 2. 一ツノ量ガ他ノ量ノ中ニ丁度若干度含マルヽトキハ, 前者ヲ後者ノ**約量**ト云フ; 又前者ハ後者ヲ**約ス**ト云フ.

下ニ掲ケタル倍量ノ性質ハ證明ヲ要セザルモノ,

即公理的ノモノトス:——

(イ) A ガ B ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, mA ハ mB ヨリ大ナリ,或ハ之ニ等シ,或ハ之ヨリ小ナリ.

之ヲ下ノ如ク略記ス:

$A >=< B$ ニ從テ, $mA >=< mB$.

轉換法ニ由リテ,此ノ逆モ亦眞ナリ,即

(ロ) $mA >=< mB$ ニ從テ, $A >=< B$.

(ハ) $mA + mB + mC + \ldots\ldots = m(A + B + C + \ldots\ldots)$.

(ニ) $mA - mB = m(A - B)$. (但シ A ハ B ヨリ大ナリトス.)

(ホ) $mA + nA + pA + \ldots\ldots = (m + n + p + \ldots\ldots)A$.

(ヘ) $mA - nA = (m - n)A$. (但シ m ハ n ヨリ大ナリトス.)

(ト) $m.nA = mn.A = nm.A = n.mA$.

定義 3. 二ツノ(或ハ二ツヨリ多クノ)量ガ第三ノ量ヲ丁度若干度含ムトキハ,之ヲ**通約ス可キ量**ト稱ス:第三ノ量ヲ其ノ**公度**ト稱ス. 斯ノ如キ量無ケレハ,二ツノ量ハ**通約ス可カラザル量**ナリト

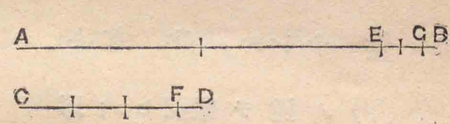
云フ.

二ツノ與ヘラレタル量ノ最大公度ヲ求ムル方法.

AB, CD ヲ二ツノ與ヘラレタル量トシ, AB ヲ CD ヨリ大ナルモノトス:

AB, CD ノ最大公度ヲ求ム.

(此ニハ假ニ二ツノ量ヲ直線トス:其他ノ量ニテモ稍同樣ノ方法ヲ適用スルヲ得.)



AB ヨリ CD ニ等シキ部分ヲ何度ニテモ出來得ル丈ケ截リ取レ;

若シ殘リ EB 有レハ, CD ヨリ EB ニ等シキ部分ヲ何度ニテモ出來得ル丈ケ截リ取レ;

若シ殘リ FD 有レハ, EB ヨリ FD ニ等シキ部分ヲ何度ニテモ出來得ル丈ケ截リ取レ;

斯ノ如ク爲スヿ數回ニシテ,遂ニ殘リ無キニ至リタリトセヨ;

然ルトキハ最後ノ殘リガ求ムル所ノ最大公度ナリ.

此方法ハ算術及代數學ニ於テ最大公約數ヲ得

ル方法ト同一ノ理ニ基ケリ；故ニ其ノ證明ハ此ニ略ス.

此方法ハ殘リタル部分ヲ其ノ前ノ殘リヨリ截リ取ルコヲ續ケテ行ヒ，遂ニ殘リ無キニ至リテ終ル；而シテ最後ノ殘リガ最大公度ナリ．故ニ

(甲) 此方法ガ終リ有レハ，二ツノ與ヘラレタル量ハ通約ス可キ量ナリ.

又(甲)ノ對偶ヲ取リテ，

(乙) 二ツノ與ヘラレタル量ガ通約ス可カラザル量ナレハ，此方法ハ終リ無シ.

今(甲)ノ逆ヲ證明セン；即

(丙) 若シ二ツノ量ガ通約ス可キ量ナレハ，此方法ハ終リ有リ.

二ツノ量ガ通約ス可キ量ナルヲ以テ，公度有リ；其ノ最大公度ヲMトセヨ；
MハCDヲ約スルヲ以テ，其ノ若干倍ナルAEヲ約ス；且ABヲ約ス；
故ニMハ第一ノ殘リEBヲ約ス；
故ニMハCD及EBノ公度ナリ；
故ニ又第二ノ殘リFDヲ約ス

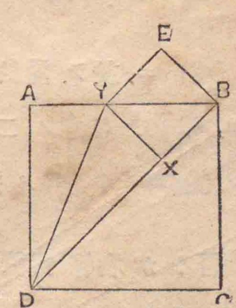
同樣ニMハ第三ノ殘リ，其他總テノ殘リヲ約ス：
然ルニ殘リハ一ツ置ニ必ズ半分ヨリ多ク減少ス，
故ニ此方法ハ遂ニ殘リMヲ以テ終ル可シ：
然ラザレハ，Mヨリ小ナル殘リ，即Mガ約ス能ハザル殘リニ達ス可ケレハナリ.

(甲)ノ裏即(丙)ノ對偶モ亦眞ナリ，即

(丁) 若シ此方法ガ終リ無ケレハ，二ツノ量ハ通約ス可カラザル量ナリ.

(戊) 正方形ノ邊ト其ノ對角線ハ通約ス可カラザル量ナリ.

ABCDヲ正方形，BDヲ其ノ對角線トセヨ；
然ルトキハABトBDハ公度無カル可シ.



BD上ニDXヲABニ等シク取レ；
然レハABトDBノ公度ハ又ABトXBノ公度ナリ：
XYヲDBニ垂線ニ引キ，ABトYニ於テ出會ハシメヨ；

XY ハ XB ニ等シク, BY ハ XB ノ上ノ正方形ノ對角線ナルコハ容易ニ證明スルヲ得:

又 DY ヲ結ヒ付ケ, 二ツノ三角形 DAY, DXY ガ全ク相等シキコヲ證明スルヲ得,

故ニ AY ハ XY ニ等シ, 即 XB ニ等シ:

故ニ AB ト XB ノ公度ハ又 XB ト YB ノ公度ナリ;

即一ツノ正方形ノ邊ト其ノ對角線ノ公度ナリ;

故ニ元ノ正方形ノ邊ト對角線ノ公度ヲ得ルニハ之ト同一ノ問題ヲ解スルヲ要ス;

故ニ吾々ハ何度續ケテ此方法ヲ行フモ常ニ同シ問題ニ歸ル,而テシ正方形ガ漸々小クナル;

即此方法ハ終リ無シ;

故ニ正方形ノ邊ト對角線ハ通約ス可カラザル量ナリ

(戊) ニ於テ通約ス可カラザル量ノ一例ヲ示シタルガ, 總シテ任意ノ二ツノ量ヲ取レハ, 通例通約ス可カラザル量ニシテ, 其ノ通約ス可キ量ナルコハ却テ稀ナリ.

吾々ガ初等代數學ニ於テ學ヒタル比及比例ノ理ハ唯通約ス可キ量ノミニ就テ得タルモノナリ. 實地計算ノ爲ニハ, 近算ノ法ヲ以テ之ヲ通約ス可カラザル量ニ應用スルモ差支ナシト雖, 理論上ニ於テハ嚴密

正確ナリト云フヲ得ズ. 故ニ通約ス可キト通約ス可カラザルトニ關ラズ, 總テノ量ニ就テ比及比例ノ眞理ヲ得ザレハ, 吾々ハ之ヲ正當ニ幾何學上總テノ量ニ應用スル能ハザルナリ 故ニ下ニ之ヲ論ス

定義 4. 一ツノ量ト同シ種類ノ他ノ量ノ**比**トハ前者ト後者ト「何倍ナリヤ」ニ付テノ關係ナリ. 前者ヲ比ノ**前項**, 後者ヲ**後項**ト稱ス.

假ニ上ノ如ク, 比ノ定義ヲ掲ケ置クト雖, 是レ甚滿足ナル定義ニ非ラズ; 比ハ到底簡單ニシテ明瞭ナル定義ヲ下ス能ハザル語ナリ. 依リテ下ニ其ノ説明ヲ掲ク.

一ツノ量 A ト一ツノ他ノ量 B ト「何倍ナリヤ」ニ付テノ關係ハ A ノ倍量 A, 2A, 3A,............等, 又 B ノ倍量 B, 2B, 3B,... .等ヲ順次ニ小ヨリ大ニ至ル樣ニ整列シタル時, A ノ倍量ガ B ノ倍量ノ間ニ如何ニ挿マルヽカヲ以テ定ムルナリ. 言ヒ換レハ, A ノ何倍ハ B ノ何倍ニ等シキヤ, 或ハ B ノ何倍ト何倍トノ間ニ在リヤ, 即 m ハ如何ナル數ナルモ, mA ニ等シキ B ノ倍量 nB, 或ハ mA ヲ挿ム B ノ二ツノ倍量 nB 及 $(n+1)B$ ヲ知ル時ハ即 A ト B ノ比ヲ

不完全ノ所アリ

知ルナリ. 故ニ吾々ガ A ト B ノ比ヲ知ルモ, 各ノ量ノ眞ノ大サヲ知ルニ非ラズ, 唯其ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ヲ知ルノミ.

例ヘハ正方形ノ邊 A ト對角線 B トノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ヲ記セハ下ノ如シ:

A B 2A 2B 3A 4A 3B 5A 4B 6A 7A 5B 8A 6B 9A 7B 10A 11A 8B 12A 9B

13A 14A 10B 15A.............................141A 100B 142A.......................................

如何ナル正方形ヲ取ルモ其ノ邊ト對角線ノ比ハ常ニ此表ニ依リテ知ルヲ得ルト雖, 邊及對角線ノ大サハ固ヨリ之ニ依リテ知ルヲ得ザルナリ.

(己) 同シ種類ノ量ニ非ラザレハ, 比ヲ有セズ.

何トナレハ, 同シ種類ノ量ニ非ラザレハ其ノ倍量ノ大サヲ較ヘテ, 順次ニ之ヲ整列セシムルコト能ハザレハナリ.

省 (庚) 同シ種類ノ二ツノ量 A, B 有リテ, A ガ B ヨリ小ナレハ, B ノ二ツノ續キタル倍量ノ間ニ A ノ倍量ヲ一ツハ必ズ挿メリ,

何トナレハ, nB ト $(n+1)$B トノ差ハ A ヨリ大ナルヲ以テ, 其ノ間ニ A ノ倍量ガ少クモ一ツハ無キ能ハズ.

(辛) A ガ何程 B ヨリ小ナルモ, B ヨリ大ナル A ノ倍量有リ.

省 (壬) 二ツノ量 A, B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ確定セルモノニシテ B ト何程少シノ差有ル量 C ヲ取ルモ, A, C ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方トハ異ナレリ.

B ト C ノ差ヲ D トセヨ 然レハ D ハ何程小ナルモ, 其ノ第 m 倍量即 mD ガ A ヨリ大ナル樣ニ m ヲ取ルヲ得 (但シ D ガ小ナルニ從テ, m ハ大ナリ), 然レハ mB ト mC ノ差 mD ハ A ヨリ大ナルヲ以テ; mB ト mC ハ A ノ同シ倍量ノ間ニ挿マルヽ能ハズ; 即 A ト B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ A ト C ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ニ同シカラズ; 其ノ始メハ或ハ同シキモ, 大ナル倍量ニ至リテ, 必ズ異ナレリ.

A ト B ノ比ヲ記スニ A:B ヲ以テス; A ハ前項, B ハ後項ナリ.

定義 5. 二ツノ量ノ比ガ他ノ二ツノ量ノ比 (前ノ二ツト同シ種類ニテモ, 或ハ異ナレル種類ニテモ),

ニ等シトハ二ツノ比ノ前項ノ任意ノ等倍量ヲ取リ,又後項ノ任意ノ等倍量ヲ取リ,一ツノ前項ノ倍量ガ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ,他ノ前項ノ倍量ガ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナル時ニ云フナリ.

二ツノ量 A, B 及他ノ二ツノ量 P, Q 有リ; m, n ガ如何ナル完全數ナルモ, $mA >=< nB$ ニ從テ, $mP >=< nQ$ ナルトキハ, A:Q ガ P:Q ニ等シト云フ,

又之ヲ下ノ如ク述フルヲ得:

m ハ任意ノ完全數, n ハ mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ挿マルヽカ,或ハ nB ニ等シキ樣ニ取リタル完全數トセヨ: mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ挿マルヽカ或ハ nB ニ等シキカニ從テ, mP ガ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ挿マルヽカ或ハ nQ ニ等シキ時ハ A:B ハ P:Q ニ等シト云フ.是レ上ノ定義ヨリ直ニ由來スル所ノ結果ナリ.

等シキ比ノ定義ヲ亦下ノ如ク述フルモ同一ナリ.A:B ガ P:Q ニ等シトハ A ノ倍量ト B ノ倍量トノ挿ミ合ヒ方ガ P ノ倍量ト Q ノ倍量トノ挿ミ合ヒ方ニ全ク同シキヲ云フ.

上ノ定義ニ於テ, m, n ハ如何ナル完全數ニテモ差支ナキヲ以テ之ヲ各1トスレハ下ノ結果ヲ得.

(系) 二ツノ比ガ相等シケレハ,一ツノ比ノ前項ガ其ノ後項ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ,他ノ比ノ前項モ其ノ後項ヨリ大ナリ,或ハ之ニ等シ,或ハ之ヨリ小ナリ.

定義 6. 二ツノ量ノ比ガ他ノ二ツノ量ノ比ヨリ大ナリトハ兩比ノ前項ノ等倍量,及後項ノ等倍量ヲ,第一ノ比ノ前項ノ倍量ガ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナルカ或ハ之ニ等シキニ,第二ノ比ノ前項ノ倍量ハ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナラズ,或ハ之ヨリ小ナル樣ニ,取リ得ル時ニ云フ.

$mA > nB$ ナルニ, mP ハ nQ ヨリ大ナラズ; 或ハ $mA = nB$ ナルニ, $mP < nQ$ ナル樣ナル m, n ノ値ヲ見出シ得ルトキハ, A:B ハ P:Q ヨリ大ナリト云フ.

定義 7. A ト B ノ比ガ P ト Q ノ比ニ等シケレハ,四ツノ量ハ**比例**ヲ爲スト云フ; 或ハ之ヲ**比例量**ナリト云フ.

比例ハ下ノ如ク之ヲ記ス:

$$A : B :: P : Q;$$

之ヲAトBノ比ハPトQノ比ニ等シトモ,又ハAノBニ於ケルハPノQニ於ケルガ如シトモ讀ミテ可ナリ.

AトQヲ比例ノ**外項**; BトPヲ**中項**ト稱ス. Qヲ三ツノ量A, B, Pノ**第四比例項**ト稱ス. 前項Aハ前項Pニ,後項Bハ後項Qニ對應スト云フ.

定義 8. 同シ種類ノ三ツノ量ガ比例ヲ爲ストハ第一ト第二ノ比ガ第二ト第三ノ比ニ等シキヲ云フ; 即A, B, Cガ比例ヲ爲セハ, $A : B :: B : C$.
此場合ニ於テハCヲA, Bノ**第三比例項**ト稱ス; BヲAトCノ間ノ**比例中項**ト稱ス.

定義 9. 一ツノ量ト之ニ等シキ量ノ比ヲ**等比**ト稱ス; 前項ガ後項ヨリ大ナル比ヲ**優比**ト稱ス; 前項ガ後項ヨリ小ナル比ヲ**劣比**ト稱ス.

第二節.

定理.

定理 1. 同シ比ニ等シキ比ハ相等シ.

A B :: P·Q 又 $A : B :: X : Y$ ナリトセヨ:

然ルトキハ　$P\ Q :: X : Y$　ナル可シ.

$A : B :: P\ \ Q$ ナルヲ以テ,

m ハ如何ナル完全數ナルモ,

mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ在ルカ或ハ nB ニ等シキカニ從テ;

mP ハ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ或ハ nQ ニ等シ: IV, 定義 5.

同樣ニ mX ハ nY 及 $(n+1)Y$ ノ間ニ在ルカ或ハ nY ニ等シ:

然レハ m ハ如何ナル數ナルモ, mP ガ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ或ハ nQ ニ等シキカニ從テ, mX ハ nY 及 $(n+1)Y$ ノ間ニ在ルカ或ハ nY ニ等シ;

故ニ　$P : Q :: X : Y.$　IV, 定義 5.

定義 10. 一ツノ比ノ前項及後項ガ夫々他ノ比ノ後項及前項ナル時ハ, 二ツノ比ヲ各他ノ反比ト稱ス

$A:B$ ト $B:A$ ハ各他ノ反比ナリ.

定理 2. 二ツノ比ガ相等シケレハ, 其ノ反比モ亦相等シ.

$A:B::P:Q$ ナリトセヨ:

然ル時ハ $B:A::Q:P$ ナル可シ.

$A:B::P:Q$ ナルヲ以テ,

A ノ倍量ト B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ P ノ倍量ト Q ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ニ全ク同シ; IV, 定義 5.

故ニ又 $B:A::Q:P$.

附言. 此定理ヲ反轉ノ理ト稱ス.

定理 3. 相等シキ量ハ他ノ一ツノ量ト相等シキ比ヲ有ス: 一ツノ量ハ相等シキ量ト相等シキ比ヲ有ス.

A, B, C ハ同シ種類ノ三ツノ量ニシテ, $A=B$ ナリトセヨ:

然ル時ハ $A:C::B:C$ ナル可シ;

又 $C:A::C:B$ ナル可シ.

$A=B$ ナルヲ以テ, $mA=mB$; IV, (イ).

故ニ $mA >=< nC$ ニ從テ, $mB >=< nC$;

故ニ $A:C::B:C$. IV, 定義 5.

同樣ニ $C:A::C:B$.

定理 4. 相等シカラザル二ツノ量ノ中ノ大ナルモノト他ノ一ツノ量ノ比ハ其ノ小ナルモノト同シ量ノ比ヨリ大ナリ: 又一ツノ量ト相等シカラザル二ツノ量ノ中ノ小ナルモノノ比ハ其量ト大ナルモノノ比ヨリ大ナリ.

A, B, C ハ同シ種類ノ三ツノ量ニシテ, $A>B$ ナリトセヨ:

然ル時ハ $A:C>B:C$ ナル可シ;

又 $C:B>C:A$ ナル可シ.

$A>B$ ナルヲ以テ, $mA>mB$ ニシテ, IV, (イ).

其ノ差ガ C ヨリ大ナル樣ニ m ヲ取ルヲ得; IV, (辛).

故ニ斯樣ニ m ヲ取レハ, mA ガ nC 及 $(n+1)C$ ノ間ニ在ルカ或ハ nC ニ等シケレハ, mB ハ nC ヨリ小ナリ;

故ニ $\quad A:C>B:C.$ IV, 定義 6.

又 nC ハ mA ヨリ大ナラザルニ, $nC>mB$;

故ニ $\quad C:B>C:A.$ IV, 定義 6.

系 1. $A:C>=<B:C$ ニ從テ,

$A>=<B$;

又 $\quad C:A<=>C:B$ ニ從テ,

$A>=<B.$

是レ定理 3 及定理 4 ヨリ轉換法ニ由リテ證明スルヲ得.

系 2. 三ツノ與ヘラレタル量ニハ唯一ツノ第四比例項有ルノミ. 二ツノ與ヘラレタル量ニハ唯一ツノ第三比例項及唯一ツノ比例中項有ルノミ.

定理 5. 二ツノ量ノ等倍量ノ比ハ其量ノ比ニ等シ.

mA, mB ヲ A, B ノ任意ノ等倍量トセヨ:

然ルトキハ $\quad mA:mB::A:B$ ナル可シ.

p, q ヲ任意ノ數トセヨ;

然レハ $\quad pA>=<qB$ ニ從テ,

$m.pA>=<m.qB$; IV, (イ).

而シテ $m.pA=p.mA$ 及 $m.qB=q.mB$; IV, (ト).

故ニ $\quad pA>=<qB$ ニ從テ,

$p.mA>=<q.mB$;

故ニ $\quad mA:mB::A:B.$ IV, 定義 5.

系. $A:B::P:Q$ ナレハ $\quad mA:mB::nP:nQ.$

定理 6. 二ツノ量 A, B ノ比ガ二ツノ完全數 m, n ノ比ニ等シケレハ, $nA=mB$: 逆ニ, $nA=mB$ ナレハ, A ト B ノ比ハ m ト n ノ比ニ等シ.

$A:B::m:n$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $\quad nA=mB$ ナル可シ.

nA ト nm ハ A ト m ノ等倍ナリ;

又 $\quad mB$ ト mn ハ B ト n ノ等倍ナリ;

然ルニ $\quad nm=mn$;

而シテ $\quad A:B::m:n$ ナルヲ以テ, 假設.

$nA=mB.$ IV, 定義 5.

逆ニ, $nA = mB$ ナリ トセヨ:

然ル𪜈ハ $A : B :: m : n$ ナル 可シ.

$pA >=< qB$ ニ 從テ,

$n.pA >=< n.qB$; IV, (イ).

即 $p.nA >=< q.nB$; IV, (ト).

故ニ $p.mB >=< q.nB$; 假設.

即 $p.m >=< q.n$;

故ニ $A : B :: m : n$. IV, 定義 5.

系. 若シ $A : B :: P : Q$ ニシテ, $nA = mB$ ナレハ, $nP = mQ$. 故ニ A ガ B ノ 倍量, 或ハ 約量, 或ハ 約量 ノ 倍量 ナレハ, P ハ Q ノ 同シ 倍量, 或ハ 約量, 或ハ 約量 ノ 倍量 ナリ.

附言. $nA = mB$ ナレハ, A ト B ハ 通約ス可キ 量 ナリ; 而シテ 其ノ 比 ハ $m : n$ ニ 等シ. 然ルニ m, n ハ 完全數 ナル ヲ 以テ, 其ノ 比 ハ 已ニ 代數學 ニ 於テ 論シタル 所 ニシテ, 分數 m/n ヲ 以テ 之 ヲ 表ハス ヲ 得. 故ニ 通約ス可キ 量 A, B ノ 比 モ 分數 m/n ヲ 以テ 之 ヲ 表ハス ヲ 得. A, B ガ 通約ス可カラザル 量 ナレハ, 斯ノ 如キ 分數 ナシ; 然レ𪜈 $m : n$ ヲ 分數 m/n ヲ 以テ 表ハスト 同様ニ, A, B ノ 比 ヲ A/B ヲ 以テ 表ハスヿ 有リ,

然レ𪜈 是レ 決シテ 通常ノ 分數 ニ 非ラズ.

又 m, n ハ 數 ナル ヲ 以テ, 定義 5 ヲ 此ニ 引用スル ハ 少シク 之 ヲ 擴メタル ノ 趣 有リ; 學フ者 注意ス 可シ.

定理 7. 同シ 種類 ノ 四ツノ 量 ガ 比例 ヲ 爲セハ, 第一ノ 量 ガ 第三ノ 量 ヨリ 大ナルカ, 或ハ 之 ニ 等シキカ, 或ハ 之 ヨリ 小ナルカ ニ 從テ, 第二ノ 量 ガ 第四ノ 量 ヨリ 大ナリ, 或ハ 之ニ 等シ, 或ハ 之 ヨリ 小ナリ.

A, B, C, D ハ 同シ 種類 ノ 四ツノ 量 ニシテ, $A : B :: C : D$ ナリ トセヨ:

然ル𪜈ハ $A >=< C$ ニ 從テ, $B >=< D$ ナル 可シ.

若シ $A = C$ ナレハ, $A : D :: C : D$; IV, 3.

然ルニ $A : B :: C : D$; 假設.

故ニ $A : B :: A : D$, IV, 1.

故ニ $B = D$: IV. 4, 系 1.

若シ $A > C$ ナレハ, $A : D > C : D$; IV. 4.

然ルニ　$A:B::C:D;$　假設.

故ニ　$A:D > A:B,$

故ニ　$B > D$　IV, 4, 系 1.

同様ニ　$A < C$ ナレハ, $B < D$ ヲ 證明スル ヲ 得.

定理 8. 同シ 種類 ノ 四ツノ 量 ガ 比例 ヲ 爲セハ, 第一 ト 第三 ノ 比 ハ 第二 ト 第四 ノ 比 ニ 等シ.

A, B, C, D ハ 同シ 種類 ノ 四ツノ 量 ニシテ,

$A:B::C:D$ ナリ トセヨ:

然ルトキハ　$A:C::B:D$ ナル 可シ.

$A:B::C:D$ ナル ヲ 以テ,

$mA:mB::nC:nD;$　IV, 5, 系.

故ニ　$mA >=< nC$ ニ 從テ,

$mB >=< nD;$　IV, 7.

故ニ　$A:C::B:D.$　IV, 定義 5.

附言. 此 定理 ヲ 更迭 ノ 理 ト 稱ス.

定理 9. 任意ノ 數 ノ 同シ 種類 ノ 量

ガ 比例 ヲ 爲ス トキハ, 前項 ノ 和 ト 後項 ノ 和 ノ 比 ハ 一ツノ 前項 ト 其ノ 後項 ノ 比 ニ 等シ.

$A, B, C, D, E, F, \ldots\ldots$ ハ 同シ 種類 ノ 量 ニシテ,

$A:B::C:D::E:F::\ldots\ldots$ ナリ トセヨ:

然ルトキハ　$A:B::A+C+E+\ldots\ldots:B+D+F+\ldots\ldots$ ナル 可シ.

$A:B::C:D::E:F::\ldots\ldots$ ナル ヲ 以テ,

$mA >=< nB$ ニ 從テ,

$mC >=< nD;$　IV, 定義 5.

及　$mE >=< nF;$ 等;　IV, 定義 5.

故ニ　$mA + mC + mE + \ldots\ldots >=< nB + nD + nF + \ldots\ldots,$

即　$m(A + C + E + \ldots\ldots) >=< n(B + D + F + \ldots\ldots),$

IV, (ハ).

故ニ　$A:B::A+C+E+\ldots\ldots:B+D+F+\ldots\ldots$

附言. 此 定理 ヲ 加比 ノ 理 ト 稱ス.

定理 10. 二ツノ 比 ガ 相等シケレハ, 一ツノ 比 ノ 前項 及 後項 ノ 和 ト 其ノ 後項

ノ比ハ他ノ比ノ前項及後項ノ和ト其ノ後項ノ比ニ等シ.

$A:B::P:Q$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $A+B$ $B::P+Q$ Q ナル可シ.

m ハ任意ノ數; n ハ, mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ在ルカ, 或ハ nB ニ等シキ樣ナル數トセヨ;

然レハ $mA+mB$ ハ $mB+nB$ 及 $mB+(n+1)B$ ノ間ニ在ルカ, 或ハ $mB+nB$ ニ等シ;

即 $m(A+B)$ ハ $(m+n)B$ 及 $(m+n+1)B$ ノ間ニ在ルカ, 或ハ $(m+n)B$ ニ等シ: IV, (ハ) 及 (ホ).

又 $A:B::P:Q$ ナルヲ以テ,

mP ハ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ, 或ハ nQ ニ等シ; IV, 定義 5.

故ニ上ト同樣ニ $m(P+Q)$ ハ $(m+n)Q$ 及 $(m+n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ, 或ハ $(m+n)Q$ ニ等シ:

故ニ $A+B$ ノ倍量ト B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ丁度 $P+Q$ ノ倍量ト Q ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ニ同シ;

故ニ $A+B:B::P+Q:Q$. IV, 定義 5.

附言. 此定理ヲ合比ノ理ト稱ス.

定理 11. 二ツノ比ガ相等シケレハ, 一ツノ比ノ前項ト後項ノ差ト其後項ノ比ハ他ノ前項ト後項ノ差ト其後項ノ比ニ等シ.

$A:B::P:Q$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $A\sim B:B::P\sim Q:Q$ ナル可シ.

此定理ハ定理 10 ト全ク同樣ノ方法ニ由リテ證明スルヲ得:

但 mB ヲ双方ヘ加ヘル代リニ, mB ヲ双方ヨリ減スルカ ($A>B$, 由リテ $m<n$ ナル場合); 或ハ双方ヲ mB ヨリ減スル ($A<B$, 由リテ $m>n$ ナル場合) ナリ.

附言. 此定理ヲ除比ノ理ト稱ス.

定理 12. 二ツノ相等シキ比ノ前項ノ等倍量, 及後項ノ等倍量ヲ取レハ, 各ノ比ノ前項ノ倍量ト後項ノ倍量ノ比ハ相等シ.

$A:B::P:Q$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $mA:nB::mP:nQ$ ナル可シ.

p, q ヲ任意ノ數トセハ,

$pm.A >=< qn.B$ ニ從テ,

$pm.P >=< qn.Q$; 假設, 及 IV, 定義 5.

即 $p.mA >=< q.nB$ ニ從テ,

$p.mP >=< q.nQ$;

故ニ $mA : nB :: mP : nQ$. IV, 定義 5.

定理 13. 二群ノ量有リ; 各ノ群ノ第一ノ量ト第二ノ量ノ比ガ相等シク, 又各ノ群ノ第二ノ量ト第三ノ量ノ比ガ相等シク, 以下最後ノ量ニ至ルマデ皆斯ノ如クナル時ハ, 各ノ群ノ第一ノ量ト最後ノ量ノ比ハ相等シ.

先ツ各ノ群ニ三ツノ量有リトセヨ:

A, B, C ハ一ツノ群, P, Q, R ハ他ノ群ニシテ,

$A : B :: P : Q$ 及 $B : C :: Q : R$ ナリトセヨ:

然ル時ハ $A : C :: P : R$ ナル可シ.

$A : B :: P : Q$ ナルヲ以テ,

$mA : mB :: mP : mQ$; IV, 12.

又 $B : C :: Q : R$ ナルヲ以テ,

$mB : nC :: mQ : nR$; IV, 12.

今若シ $mA > nC$ ナレハ, $mA : mB > nC : mB$; IV, 4.

然ルニ $mA : mB :: mP : mQ$, 及 $nC : mB :: nR : mQ$; 反轉

故ニ $mP : mQ > nR : mQ$,

故ニ $mP > nR$; IV, 4, 系 1.

即若シ $mA > nC$ ナレハ, $mP > nR$:

同樣ニ若シ $mA = nC$ ナレハ, $mP = nR$;

及 若シ $mA < nC$ ナレハ, $mP < nR$:

故ニ $A : C :: P : R$. IV, 定義 5.

次ニ, 各ノ群ニ三ツヨリ多クノ量有リトセヨ:

A, B, C, D,......H, K ハ一ツノ群; P, Q, R, S,...... X, Y ハ他ノ群ニシテ,

$A : B :: P : Q$, $B : C :: Q : R$, $C : D :: R : S$, ...

$H : K :: X : Y$ トセヨ:

然ル時ハ $A : K :: P : Y$ ナル可シ.

前ニ $A : B :: P : Q$, $B : C :: Q : R$ ナル時ハ, $A : C :: P : R$ ナルヿヲ證明シタリ;

故ニ　A:C::P:R,　C:D::R:S　ナルヲ以テ,
同樣ニ　A:D::P:S;
而シテ　D:E::S:T;
故ニ同樣ニ　A:E::P:T;
續ケテ此證明法ヲ用ヰテ,遂ニ　A:K::P:Y　ヲ得.

附言.　此定理ヲ等比ノ理ト稱ス.

系.　若シ　A:B::Q:R　及　B:C::P:Q　ナレハ,
A:C::P:R.

何トナレハ,S ヲ P, Q, R ノ第四比例項トセハ,
P:Q::R:S,

故ニ　B:C::R:S,　IV, 1.
而シテ　A:B::Q:R,　假設.
故ニ　A:C::Q:S;　等比.
今　P:Q::R:S　ナルヲ以テ,
P:R::Q:S;　更迭.
故ニ　A:C::P:R.　IV, 1.

定義 11. 同シ種類ノ量ガ幾個ニテモ任意ノ數有レハ,其ノ第一ノ量ト最後ノ量ノ比ヲ第一ノ量ト第二ノ量ノ比,第二ノ量ト第三ノ量ノ比,等

總テノ比ノ**相乘比**ト稱ス.

例ヘハ,A:K ハ二ツノ比 A:B 及 B:K ノ相乘比ナリ;或ハ三ツノ比 A:B, B:C 及 C:K ノ相乘比ナリ;或ハ四ツノ比 A:B, B:C, C:D 及 D:K ノ相乘比ナリ;其他幾個ニテモ斯ノ如キ比ノ相乘比ナリ.

若シ第一ノ量ト第二ノ量ノ比ガ一ツノ比ニ等シク,第二ノ量ト第三ノ量ノ比ガ他ノ一ツノ比ニ等シク,以下皆之ニ倣フトキハ,第一ノ量ト最後ノ量ノ比ヲ又此等ノ比ノ相乘比ト稱ス.

例ヘハ,三ツノ量 P, Q, R 有リテ,P:Q::A:B, Q:R::C:D ナレハ,比 P:R ハ二ツノ比 A:B 及 C:D ノ相乘比ナリト云フ;若シ四ツノ量 P, Q, R, S 有リテ,P:Q::A:B,　Q:R::C:D,　R:S::E:F ナルトキハ,比 P:S ハ三ツノ比 A:B, C:D, 及 E:F ノ相乘比ナリト云フ.

定理 13 ハ是ニ由リテ下ノ如ク述フルヲ得:

一ツノ群ノ比ガ夫々一ツヅヽ他ノ群ノ比ニ等シクレハ,各ノ群ノ相乘比ハ相等シ.

定義 12. 相等シキ二ツノ比ノ相乘比ヲ各ノ比ノ二乘比ト稱ス: 相等シキ三ツノ比ノ相乘比ヲ三乘比ト稱ス: 其他之ニ倣フ.

定理 14. 二ツノ比ガ相等シケレハ各ノ比ノ二乘比モ亦相等シ; 二ツノ比ノ二乘比ガ相等シケレハ, 二ツノ比ハ相等シ.

$A:B::P:Q$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $A:B$ ノ二乘比ハ $P:Q$ ノ二乘比ニ等シカル可シ.

C ヲ A, B ノ第三比例項; R ヲ P, Q ノ第三比例項トセヨ;

即 $A:B::B:C$, 及 $P:Q::Q:R$;

而シテ $A:B::P:Q$ ナルヲ以テ,

$B:C::Q:R$; IV, 1.

故ニ $A:C::P:R$, 等比.

即 $A:B$ ノ二乘比ハ $P:Q$ ノ二乘比ニ等シ.

次ニ, $A:B$ ノ二乘比ヲ $P:Q$ ノ二乘比ニ等シ

トセヨ:

然ルトキハ $A:B::P:Q$ ナル可シ.

C 及 R ヲ夫々 A, B, 及 P, Q ノ第三比例項トセヨ:

然レハ $A:C::P:R$; 假設.

S ヲ A, B, P ノ第四比例項トセヨ:

即 $A:B::P:S$;

故ニ $B:A::S:P$; 反轉.

而シテ $A:C::P:R$;

故ニ $B:C::S:R$; 等比.

然ルニ $A:B::B:C$;

故ニ $A:B::S:R$; IV, 1.

又 $A:B::P:S$;

故ニ $P:S::S:R$; IV, 1.

即 S ハ P, R ノ比例中項ナリ,

故ニ $S=Q$; IV, 4, 系 2.

故ニ $A:B::P:Q$.

系. 三乘比, 等ニ付テモ同様ノ定理ヲ得.

第五編.

比及比例ノ應用.

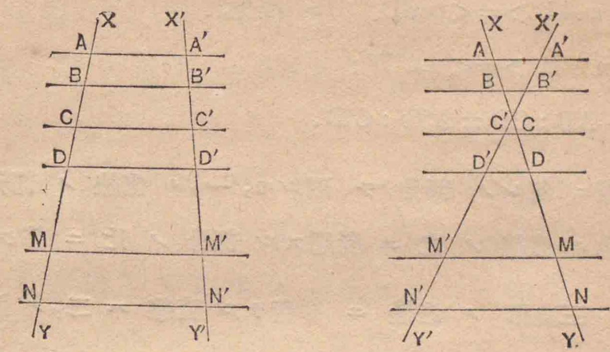
第一節.

基本ノ定理.

定理 1. 數多ノ平行線ガ二ッノ直線ト交リ，之ヲ數多ノ部分ニ切斷スレハ，一ッノ直線ノ任意ノ二ッノ部分ノ比ハ他ノ直線ノ之ニ對應スル部分ノ比ニ等シ.

數多ノ平行線 AA', BB', CC', DD', 等ガ二ッノ直線 XY, $X'Y'$ ト夫々 A, B, C, D, 等及 A', B', C', D', 等ノ點ニ於テ交リ，之ヲ相對應スル部分 AB, BC, CD, 等及 $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, 等ニ切斷ストセヨ:

然ルトキハ　$AB : CD :: A'B' : C'D'$　ナル可シ.



XY 上ニ AM ヲ $m.AB$ ニ等シク，AN ヲ $n.CD$ ニ等シク，且 M ト N ハ A ノ同シ側ニ在ル樣ニ取レ(但 m, n ハ任意ノ完全數ナリ，以下皆同シ);
M, N ヲ過リ，MM', NN' ヲ AA' ニ平行ニ引キ，
$X'Y'$ ト夫々 M', N' ニ於テ交ルトセヨ:
AM ハ各 AB ニ等シキ m 部分ニ分ツヲ得;
各ノ分點ヲ過リ AA' ニ平行線ヲ引ケハ，此平行線ハ $A'M'$ ヲ各 $A'B'$ ニ等シキ m 部分ニ分ツ:　I, 28.
故ニ $A'M' = m.A'B'$;
同樣ニ $A'N' = n.C'D'$;
故ニ MM' ガ NN' ノ AA' ニ反對ノ側ニ在ルカ，或ハ NN' ト合スルカ，或ハ其ノ AA' ト同シ側ニ在ルカニ從テ，
$AM >=< AN$ ニシテ，

$$A'M' >=< A'N';$$

即 $m.AB >=< n.CD$ ニ從テ,

$m.A'B' >=< n.C'D'$;

故ニ $AB : CD :: A'B' : C'D'$.

同樣ニ何レノ部分ヲ取ルモ,一ツノ直線ノ部分ノ比ハ他ノ直線ノ之ニ對應スル部分ノ比ニ等シ.

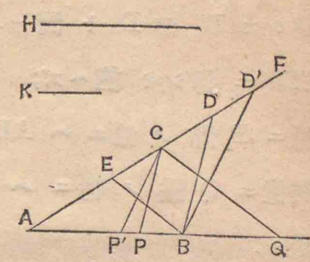
系. 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ハ二ツノ邊ヲ相等シキ比ヲ有スル分ニ分ツ.

定理 2. 與ヘラレタル有限直線ハ任意ノ比ヲ有スル二ツノ分ニ內分スルヲ得; 又等比ニ非ラザル任意ノ比ニ外分スルヲ得; 而シテ各ノ場合ニ於テ, 斯ノ如キ分點ハ唯一ツニ限ル.

AB ヲ與ヘラレタル有限直線; H, K ヲ任意ノ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ直線トセヨ:

然ルトキハ AB ヲ比 $H : K$ ニ內分スルヲ得可シ; 又 H ガ K ニ等シキ場合ノ外ハ, 之ヲ比 $H : K$ ニ外分スルヲ得可シ; 且斯ノ如キ分點ハ內分, 外分各一ツニ限ル可シ.

A ヲ過リ, 任意ノ直線 AF ヲ引キ; 其ノ上ニ AC



ヲ H ニ等シク, CD, CE ヲ C ノ反對ノ側ニ各 K ニ等シク取レ;

BD, BE ヲ結ヒ付ケ, CP, CQ ヲ夫々 BD, BE ニ平行ニ引キ, AB 及其ノ延長ト P, Q ニ於テ交ルトセヨ;

然レハ CP ハ DB ニ平行ナルヲ以テ,

$AP : PB :: AC : CD$, V, 1, 系.

故ニ $AP : PB :: H : K$;

即 AB ハ P ニ於テ比 $H : K$ ニ內分サレタリ:

同樣ニ AB ハ Q ニ於テ比 $H : K$ ニ外分サレタルヲ證明スルヲ得; 但 H ガ K ニ等シクレハ, E 點ガ A 點ト合スルヲ以テ, Q 點ヲ得ル能ハズ.

若シ P 點ノ他ニ AB ヲ比 $H : K$ ニ內分スル點有ルヲ得ハ, P' ヲ此點トセヨ;

CP' ヲ結ヒ付ケ, BD' ヲ P'C ニ平行ニ引ケ;

然レハ $AC : CD' :: AP' : P'B$, V, 1, 系.

即 $AC : CD' :: H : K$;

故ニ $AC : CD' :: AC : CD$;

故ニ $CD' = CD$; IV, 4, 系 1.

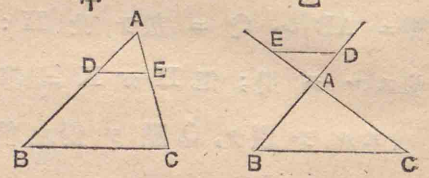
然レバ D′ ガ D ト同一ノ點ナルニ非ラザレバ, CD ハ CD′ ニ等シキ能ハズ;

故ニ P 點ノ他ニハ AB ヲ比 H:K ニ內分スル點無シ.

同樣ニ Q 點ノ他ニハ AB ヲ比 H:K ニ外分スル點無シ.

定理 3. 三角形ノ邊ヲ相等シキ比ヲ有スル分ニ分ツ直線ハ底邊ニ平行ナリ.

直線 DE ハ三角形 ABC ノ邊 AB, AC ト夫々 D, E ニ於テ交リ, AD : DB :: AE : EC ナリトセヨ:



然ルトキハ DE ハ BC ニ平行ナル可シ.

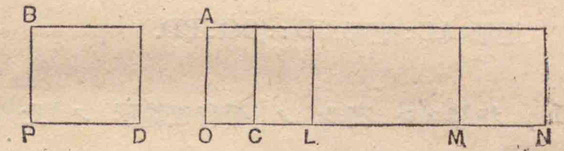
D ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ハ AC ヲ比 AD:DB ニ分ツ; V, 1, 系.

而シテ AC ヲ此比ニ內分(甲圖)或ハ外分スル(乙圖)點ハ唯 E 點有ルノミ; V, 2.

故ニ DE ハ即此平行線ナリ.

定理 4. 相等シキ高サノ矩形ノ比ハ其ノ底邊ノ比ニ等シ.

AC, BD ヲ夫々底邊 OC, PD ノ上ニ在ル所ノ相等シキ高サノ矩形トセヨ:



然ルトキハ 矩形 AC : 矩形 BD :: OC : PD ナル可シ.

PB ハ OA ニ等シキヲ以テ, 假設.

矩形 BD ヲ矩形 AC ノ上ニ重ネ, BP ハ AO ト合シ, D 點ハ OC 線上ノ點 L ノ上ニ重ナル樣ニ置クヲ得;

然レバ矩形 BD ハ矩形 AL ト合ス:

OM ヲ m.OC ニ等シク, ON ヲ n.OL ニ等シク取リ, 矩形 AM, AN ヲ作レ;

OM ヲ各 OC ニ等シキ m 部分ニ分チ, 各ノ分點ニ於テ OA ニ平行線ヲ引ケバ, 各 AC ニ等シキ m 矩形ヲ得; III, 1, 系 2.

即 矩形 AM $=m.$ 矩形 AC;

同樣ニ 矩形 AN $=n.$ 矩形 AL;

而シテ 底邊 OM $>=<$ 底邊 ON ニ從テ,

矩形 AM $>=<$ 矩形 AN: III, 1, 系 2 及 3.

即 $m.$OC $>=<n.$OL ニ從テ,

$m.$矩形 AC $>=<n.$矩形 AL;

故ニ 矩形 AC : 矩形 AL :: OC : OL,

即 矩形 AC : 矩形 BD :: OC : PD.

系 1. 相等シキ 高サ ノ 平行四邊形 ノ 比 ハ 其ノ 底邊 ノ 比 ニ 等シ.

系 2. 相等シキ 高サ ノ 三角形 ノ 比 ハ 其ノ 底邊 ノ 比 ニ 等シ.

---

*問題 203. 相等シキ 底邊 ノ 平行四邊形 或ハ 三角形 ノ 比 ハ 其ノ 高サ ノ 比 ニ 等シ.

第二編 ニ 於テハ 全周 ヨリ 大ナル 弧, 及 四直角 ヨリ 大ナル 角 ヲ 考フル ノ 必要 ナカリシ ト 雖, II, 4 及 5 ノ 如キ 定理 ハ 弧 及 之ニ 對スル 角 ガ 何程 大ナルモ 眞ナル〻 明ナリ. 今 下ノ 定理 ニ 於テ 弧 AB 又ハ 弧

AM ト 云フ ハ 一ツノ 點 ガ A ヨリ 發シ 圓周 ノ 上 ヲ 何樣ニテモ 旋リテ B 又ハ M ニ 至ル マデ 經過シタル 途 ナリ: 即 點 ガ A ヨリ 發シ 圓周 ヲ 何廻 ニテモ 旋リテ 後 B 又ハ M ニ 達シタリ トセハ, 弧 AB 又ハ AM トハ 總テ 其 點 ノ 經過シタル 丈ケノ 弧 ナリ: 而シテ 此 弧 ノ 上ニ 立ツ 所ノ 中心 ニ 於テノ 角 AOB 又ハ AOM トハ 其 點 ヲ 過ル 半徑 ガ 點 ト 同時ニ 廻轉シタル 丈ケノ 角 ナリ.

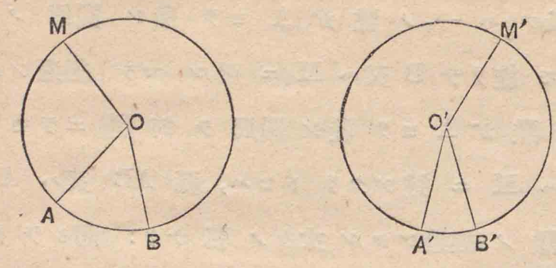
定理 5. 同シ 圓 或ハ 相等シキ 圓 ニ 於テ, 中心 ニ 於テノ 角 ノ 比 ハ 其ノ 立ツ 所ノ 弧 ノ 比 ニ 等シ.

AB, A′B′ ヲ 夫々 中心 O, O′ ナル 相等シキ 圓 ノ 弧, AOB, A′O′B′ ヲ 夫々 弧 AB, A′B′ ノ 上ニ 立ツ 所ノ 中心 ニ 於テノ 角 トセヨ:

然ルトキハ 角 AOB : 角 A′O′B′ :: 弧 AB : 弧 A′B′ ナル 可シ.

AM ヲ 弧 AB ノ m 倍ナル 弧; A′M′ ヲ 弧 A′B′ ノ n 倍ナル 弧 トセヨ;

然レハ AM ハ 各 AB ニ 等シキ m 弧 ヨリ 成リ,



各ノ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角ガ角AOBニ等シキヲ以テ,

角AOM $= m.$角AOB;

同樣ニ　角A'O'M' $= n.$角A'O'B';

而シテ　弧AM $>=<$ 弧A'M'　ニ從テ,

角AOM $>=<$ 角A'O'M';　II, 5.

即　$m.$弧AB $>=<$ $n.$弧A'B'　ニ從テ,

$m.$角AOB $>=<$ $n.$角A'O'B';

故ニ　角AOB : 角A'O'B' :: 弧AB : 弧A'B'

系. 扇形AOB : 扇形A'O'B' :: 弧AB : 弧A'B'.

何トナレハ, II, 4 及 5 ト同樣ノ方法ニ由リテ「同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 一ツノ扇形ノ角ガ他ノ扇形ノ角ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 前ノ扇形ガ後ノ扇形ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナリ」ト云フ定理

及其ノ逆ヲ證明スルヲ得; 故ニ定理V, 5ト同樣ニ扇形ノ比ガ弧ノ比ニ等シキヿヲ證明スルヲ得.

第一節ノ問題.

問題 204. V, 2ニ於テ, Kガ最初Hヨリ甚小ニシテ, 夫ヨリ漸々增長シ, Hニ等シクナリ, 尚ホ增長シテHヨリ甚大クナルニ從テ, P及Q點ノ位置ノ變化如何?

ABガP點ニ於テ任意ノ比ニ內分サレ, 又Q點ニ於テ同シ比ニ外分サルヽトキハ, ABハP, Qニ於テ**調和ニ分タレタリ**ト云フ: 又四ツノ點A, P, B, Qハ**調和列點**ナリト云フ: 又P, QハA, Bニ付テ各他ノ**調和共軛點**ナリト云フ.

問題 205. A, P, B, Qガ調和列點ニシテ, PガABノ中點ナルトキハ, Qハ何所ニ在リヤ?

問題 206. P, QガA, Bニ付テ調和共軛點ナレハ, A, BハP, Qニ付テ調和共軛點ナリ.

第二節.

相似直線形.

定義 1. 一ツノ直線形ノ角ガ夫々一ツノ他ノ直線形ノ(同シ順ニ取リタル)角ニ等シケレハ,二ツノ直線形ハ等角ナリト云フ;一ツノ形ノ各ノ角ガ他ノ形ノ之ニ等シキ角ニ對應スト云フ;相對應スル角ノ間ニ在ル邊ヲ對應邊ト云フ.

定義 2. 二ツノ直線形ガ等角ニシテ對應邊ガ比例ヲ爲ストキハ,二ツノ直線形ヲ相似直線形ト稱ス.

本書ニ於テハ相似直線形ノミヲ論スルヲ以テ,或ハ之ヲ略シテ單ニ相似形ト云フ.

定義 3. 二ツノ與ヘラレタル直線ガ二ツノ相似形ノ對應邊ナルトキハ,此相似形ハ與ヘラレタル直線ノ上ニ相似ノ位置ニ在リト云フ.

定理 6. 同シ直線形ニ相似ナル直線形ハ互ニ相似ナリ.

直線形 A, B, ヲ何レモ直線形 C ニ相似ナリトセヨ:然ルトキハ A, B ハ互ニ相似ナル可シ.

A ハ C ニ相似ナルヲ以テ,
A ノ角ハ夫々(同シ順ニ) C ノ角ニ等シ,
同樣ニ B ノ角モ夫々(同シ順ニ) C ノ角ニ等シ;
故ニ A ノ角ハ夫々(同シ順ニ) B ノ角ニ等シ;
又 A ノ任意ノ二ツノ邊ノ比ハ C ノ之ニ對應スル邊ノ比ニ等シ,
B ノ任意ノ二ツノ邊ノ比モ亦 C ノ之ニ對應スル邊ノ比ニ等シ;
故ニ A 及 B ノ對應邊ハ比例ヲ爲ス: IV, 1.
故ニ A, B ハ相似形ナリ.

定理 7. 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シケレハ,二ツノ三角形ハ相似ナリ;而シテ相等シキ角ニ對スル邊ガ對應邊ナリ.

二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ角 A 及 B ハ夫々角 D 及 E ニ等シク;因リテ (I, 13, 系 4) 角 C ハ角 F

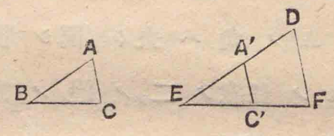
ニ等シトセヨ:

然ルトキハ三角形 ABC, DEF ハ相似ニシテ,

AB : BC :: DE : EF, BC : CA :: EF : FD, 及

CA : AB :: FD : DE ナル可シ.

三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ重テ, B 點ハ E 點ノ上ニ, 邊 BA ハ邊 ED ノ上ニ重ナル樣ニ置ケ;



然レハ角 ABC ハ角 DEF ニ等シキヲ以テ,

邊 BC ハ邊 EF ノ上ニ重ナル;

A 及 C 點ハ夫々 ED 及 EF, 或ハ其ノ延長ノ上ノ點 A′ 及 C′ ノ上ニ落ルトセヨ:

然レハ角 EA′C′ ハ角 EDF ニ等シキヲ以テ,

A′C′ ハ DF ニ平行ナリ;

故ニ A′E : DE :: EC′ : EF, V, 1, 系.

即 AB : DE :: BC : EF, 作圖.

故ニ AB : BC :: DE : EF. 交迭.

同樣ニ BC : CA :: EF : FD, 及 CA : AB :: FD : DE ヲ證明スルヲ得.

附言. 上ノ三ツノ比例ノ中, 二ツヲ上ノ方法ニ依リテ證明スレハ, 第三ノ比例ハ等比ノ理ニ由リテ眞ナリ.

---

*問題 207. 一ツノ點 A ヨリ二ツノ直線ヲ引キ, 一ツハ圓ニ B 點ニ於テ切シ, 一ツハ之ト C, D ニ於テ交レハ, 三角形 ABC, ABD ハ相似ナリ.

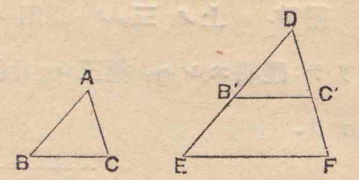
問題 208. 鋭角三角形 ABC ノ頂點 A 及 B ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線 AD, BE ヲ引クハ, 三角形 ABC, DEC ハ相似ナリ.

定理 8. 一ツノ三角形ノ一ツノ角ガ一ツノ他ノ三角形ノ一ツノ角ニ等シク; 此角ヲ夾ム邊ガ比例ヲ爲ストキハ, 二ツノ三角形ハ相似ナリ; 而シテ對應スル邊ニ對スル角ガ相等シ.

三角形 ABC, DEF ニ於テ, 角 BAC ハ角 EDF ニ等シク, AB:AC::DE:DF ナリトセヨ:

然ルトキハ二ツノ三角形ハ相似ニシテ, 角 ABC ハ角 DEF ニ等シク, 角 ACB ハ角 DFE ニ等シカル可シ.

三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ重テ, A 點ハ D 點ノ上ニ重ナリ,



邊 AB ハ邊 DE ノ上ニ重ナル樣ニセヨ;

然レハ角 BAC ハ角 EDF ニ等シキヲ以テ,

邊 AC ハ邊 DF ノ上ニ重ナル;

B 及 C 點ハ夫々 DE 及 DF 或ハ其ノ延長ノ上ノ點 B′ 及 C′ ノ上ニ落ルトセヨ;

B′C′ ヲ結ヒ付ケヨ;

然レハ　AB : AC :: DE : DF　ナルヲ以テ,

　　DB′ : DE :: DC′ : DF ;　　作圖及更迭.

故ニ　EF ハ B′C′ ニ平行ナリ;　　V, 3.

故ニ角 DB′C′ ハ角 DEF ニ等シク, 角 DC′B′ ハ角 DFE ニ等シ; 即角 ABC ハ角 DEF ニ等シク, 角 ACB ハ角 DFE ニ等シ;

故ニ三角形 ABC, DEF ハ等角ニシテ, 相似ナリ.　　V, 7.

問題 208. 二ツノ直線 AB, CD 或ハ其ノ延長ガ E 點ニ於テ交リ, AE : CE :: ED : EB ナルトキハ, A, B, C, D ヲ過リ一ツノ圓ヲ畫クヿヲ得.

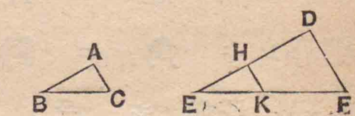
定理 9. 二ツノ三角形ノ各ノ角ヲ夾ム邊ガ(同シ順ニ取リテ)比例ヲ爲ストキハ, 二ツノ三角形ハ相似ニシテ, 對應邊ニ對スル角ガ相等シ.

二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ, AB:BC::DE:EF, BC:CA::EF:FD, 因リテ(等比ノ理) CA:AB::FD:DE ナリトセヨ:

然ルトキハ三角形 ABC, DEF ハ相似ニシテ,

角 ABC ハ角 DEF ニ等シク, 角 BCA ハ角 EFD ニ等シク, 因リテ角 CAB ハ角 FDE ニ等シカル可シ.

ED 上ニ EH ヲ BA ニ等シク取レ; 又 EF 上ニ EK ヲ BC ニ等シク取レ;



HK ヲ結ヒ付ケヨ;

然レハ　AB:BC::DE:EF　ナルヲ以テ,

　　HE:EK::DE:EF;

而シテ角 DEF ハ二ツノ三角形 HEK, DEF ニ通ス;

故ニ三角形 HEK, DEF ハ相似ナリ:　　V, 8.

故ニ　EK:KH::EF:FD;

然ルニ　BC:CA::EF:FD;　　假設.

故ニ EK : KH :: BC : CA, IV, 1.

而シテ EK ハ BC ニ 等シ,

故ニ KH ハ CA ニ 等シ; IV, 4, 系 1.

故ニ 二ツノ 三角形 ABC, HEK ハ 三ツノ 邊ガ 夫々 相等シキ ヲ 以テ, 全ク 相等シ: I, 21.

而シテ 三角形 HEK, DEF ハ 相似ナリ;

故ニ 三角形 ABC, DEF ハ 相似ニシテ,

角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 BCA ハ 角 EFD ニ 等シク, 因リテ (I, 13, 系 4) 角 CAB ハ 角 FDE ニ 等シ.

定理 10. 二ツノ 三角形 ノ 一ツノ 角 ガ 相等シク, 他ノ 一ツノ 角 ヲ 夾ム 邊 ガ (相等シキ 角 ニ 對スル 邊 ガ 對應スル 樣ニ) 比例 ヲ 爲ス トキハ, 三角形 ノ 第三 角 ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角 ナリ: 若シ 相等シケレハ, 二ツノ 三角形 ハ 相似ナリ.

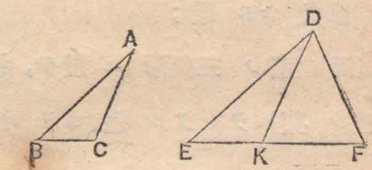
二ツノ 三角形 ABC, DEF ニ 於テ, 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, AB : AC :: DE : DF ナリ トセヨ:

然ルトキハ 角 ACB, DFE ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角ナル 可シ:

若シ 相等シケレハ, 三角形 ABC, DEF ハ 相似ナル 可シ

若シ 角 BAC ガ 角 EDF ニ 等シケレハ, 角 ACB ハ 角 DFE ニ 等シ;

而シテ 二ツノ 三角形 ハ 相似ナリ. V, 7.



若シ 角 BAC ガ 角 EDF ニ 等シカラ ザレハ, 角 EDF ヲ 角 BAC ヨリ 大ナリ トセヨ:

D ヨリ 角 BAC ニ 等シキ 角 EDK ヲ 爲ス 直線 DK ヲ 引キ, EF ト K ニ 於テ 交ル トセヨ;

然ルトキハ 二ツノ 三角形 ABC, DEK ハ 等角ナリ

故ニ ED : DK :: BA : AC; V, 7.

然ルニ ED : DF :: BA : AC: 假設.

故ニ ED : DK :: ED : DF; IV, 1.

故ニ DK ハ DF ニ 等シクシテ, IV, 4, 系 1.

角 DKF ハ 角 DFE ニ 等シ;

而シテ 角 DKF ハ 角 DKE 即 角 ACB ノ 補角 ナリ.

故ニ 角 DFE ハ 角 ACB ノ 補角 ナリ.

系. 斯ノ如キ 三角形 ハ 下ノ 場合 ニ 於テハ 必ズ 相似ナリ

(甲) 相等シキ二ツノ角ガ直角或ハ鈍角ナル時;

(乙) 他ノ一双ノ對應邊ニ對スル角ガ兩三角形ニ於テ鋭角或ハ鈍角ナル時, 或ハ一ツノ三角形ニ於テ直角ナル時;

(丙) 各ノ三角形ニ於テ, 相等シキ角ニ對スル邊ガ他ノ與ヘラレタル邊ヨリ小ナラザル時.

問題 209. OMN, OPQ ハ二ツノ直線ニシテ, MP, NQ ハ R ニ於テ出會フ; 若シ OM . MP :: ON : NQ ナレバ, 三角形 PQR ハ二等邊ナリ.

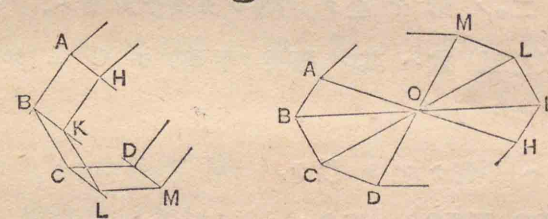
定理 11. 二ツノ相似直線形ヲ各ノ對應邊ガ平行ナル樣ニ置クトキハ, 一ツノ形ノ頂點ヲ他ノ形ノ之ニ對應スル頂點ニ結ビ付クル總テノ直線ハ平行ナルカ或ハ同一ノ點ヲ過ル; 而シテ其點ヨリ之ヲ過ル任意ノ直線ガ二ツノ形ノ對應邊ト交ル點マデノ距離ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シ.

ABCD......, HKLM...... ヲ二ツノ相似形, 其ノ邊 AB, BC, CD...... ヲ夫々之ニ對應スル邊 HK, KL, LM..... ニ平行ナリトセヨ:

然ルトキハ直線 AH, BK, CL, DM,......... ハ皆平行ナルカ或ハ同一ノ點ヲ過ル可シ.

第一. 二ツノ形ガ相似ナルノミナラズ又全ク相等シキトキハ, AB, HK ハ相等シク且平行ナリ:

甲　　　乙



故ニ甲圖ノ如キ位置ニ在レバ, AH, BK ハ平行ナリ; I, 26.

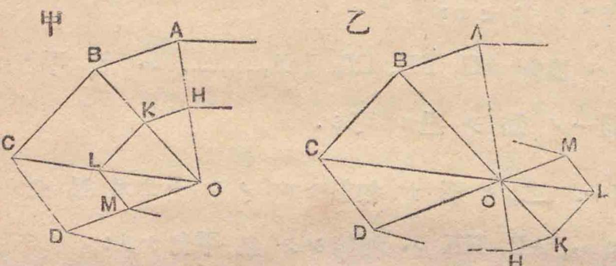
同樣ニ BK, CL モ平行ナリ, 又 CL, DM モ平行ナリ, 其他皆然リ;

故ニ AH, BK, CL, DM, 等ハ皆平行ナリ:

乙圖ノ如キ位置ニ在レバ, AH, BK ハ平行四邊形ノ對角線ナルヲ以テ各他ヲ二等分ス;

同樣ニ BK, CL モ各他ヲ二等分ス; CL, DM, 等モ亦然リ;

故ニ AH, BK, CL, DM, 等ノ中點ハ何レモ同一ノ點ナリ;
即 AH, BK, CL, DM, 等ハ皆同一ノ點ヲ過ル.



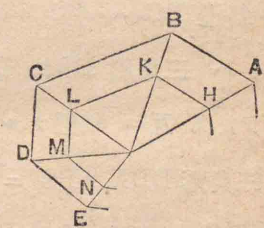
第二. 二ツノ形ガ全ク相等シカラザルトキハ,
AH, BK (乙圖) 或ハ其ノ延長 (甲圖) ヲ O ニ於テ交ルトセヨ:
AB, HK ハ平行ナルヲ以テ,
三角形 ABO, HKO ハ等角ナリ,
故ニ　BO : KO :: AB : HK;　V, 7.
即 AH ハ BK ヲ比 AB:HK ニ外分 (甲圖) 或ハ内分ス (乙圖):
同様ニ CL ハ BK ヲ比 BC:KL ニ外分或ハ内分ス;
而シテ二ツノ形ハ相似ナルヲ以テ AB:HK::BC:KL;
故ニ AH, CL ハ BK ヲ同シ比ニ外分或ハ内分ス;
故ニ AH, CL ハ BK ト同一ノ點 O ニ於テ交ル;　V, 2.
同様ニ DM, 等モ同一ノ點 O ヲ過ルコトヲ證明スルヲ得.

次ニ, O 點ヲ過ル任意ノ直線ガ對應邊 AB, HK ト夫々 P, Q 點ニ於テ交ルトセヨ
然ルトキハ　OP : OQ :: AB : HK　ナル可シ.

AP, HQ ハ平行ナルヲ以テ,
三角形 APO, HQO ハ等角ニシテ,
　OP : OQ :: OA : OH;
而シテ　OA : OH :: AB : HK;
故ニ　OP : OQ :: AB : HK.

系 1. 相似直線形ハ同シ數ノ相似三角形ニ分ツヲ得.

何トナレハ, 二ツノ形ヲ, 其ノ對應邊ガ平行ニシテ, 一ツガ全ク他ノ内ニ在ル樣ニ置クヲ得 (二ツノ形ガ全ク相等シキ場合ハ明白ナルヲ以テ論セズ): 然ルトキハ, 相對應スル頂點ヲ結ヒ付クル直線或ハ其ノ延長ハ形内ノ一ツノ點ニ於テ出會ヒ, 二ツノ形ヲ各ノ形ノ邊ト同シ數ノ相似三角形ニ分ツコト明ナリ.



系 2. 相似形ノ周ノ比ハ其ノ對應邊ノ比ニ等シ.

定義 4. 各ノ對應邊ガ平行ナル二ツノ相似形ノ相對應スル頂點ヲ結ビ付クル總テノ直線ノ交點ヲ其ノ相似ノ中心ト稱ス.

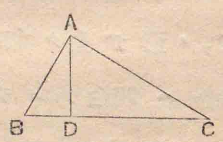
問題 210. 系 1 ノ逆ヲ證明セヨ.

定理 12. 直角三角形ニ於テ, 直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ハ三角形ヲ全形ニ相似ナル, 因リテ又互ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツ.

ABC ハ直角三角形ニシテ, BAC ヲ直角, AD ヲ A ヨリ斜邊 BC ヘ引ケル垂線トセヨ:

然ルトキハ三角形 DBA, DAC ハ各三角形 ABC ニ相似ニシテ, 又互ニ相似ナル可シ.

三角形 DBA, ABC ニ於テ角 ABC ハ兩形ニ通シ, 直角 BDA, BAC ハ相等シ;



故ニ二ツノ三角形ハ相似ナリ: V, 7.

同樣ニ三角形 DAC, ABC モ亦相似ナリ:

故ニ二ツノ三角形 DBA, DAC ハ同シ三角形 ABC ニ相似

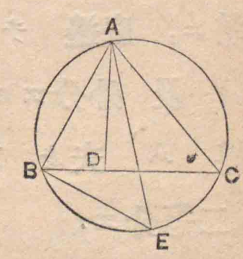
ナルヲ以テ互ニ相似ナリ.

系. 此三角形ノ各ノ邊ハ斜邊, 及斜邊ノ之ニ隣ル分ノ間ノ比例中項ナリ: 垂線ハ斜邊ノ二ツノ分ノ間ノ比例中項ナリ.

問題 211. 此三角形ノ底邊ノ分ノ比ハ二ツノ邊ノ二乘比ニ等シ.

定理 13. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線及其頂點ニ於テ出會フ所ノ二ツノ邊ノ第四比例項ナリ.

AE ヲ三角形 ABC ノ外接圓ノ直徑, AD ヲ A ヨリ BC ヘ引ケル垂線トセヨ:



然ルトキハ AD:AC::AB:AE ナル可シ.

BE ヲ結ビ付ケヨ;

角 ABE ハ直角ナルヲ以テ, III, 17.

角 ADC ニ 等シ;

又 角 ACB, AEB ハ 同シ 弓形 ニ 於テノ 角 ナルヲ 以テ, 相等シ; II, 16.

故ニ 三角形 ADC, ABE ハ 等角ニシテ,

AD : AC :: AB : AE. V

問題 212. D ガ 三角形 ABC ノ 底邊 BC 上ノ 點ナレハ, 三角形 ABD, ACD ノ 外接圓 ノ 直徑 ノ 比 ハ AB : AC ニ 等シ.

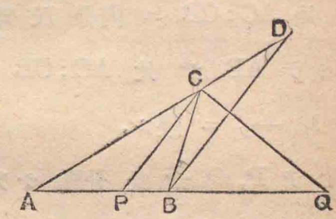
定理 14. 三角形 ノ 頂角 ヲ 二等分スル 直線 ハ 底邊 ヲ 他ノ 二ツノ 邊 ノ 比 ニ 內分シ, 頂角 ニ 隣ル 外角 ヲ 二等分スル 直線 ハ 底邊 ヲ 同シ 比 ニ 外分ス.

逆ニ, 底邊 ヲ 他ノ 二ツノ 邊 ノ 比 ニ 內分 及 外分スル 點 ヨリ 頂點 ヘ 引ケル 直線 ハ 夫々 頂角 及之 ニ 隣ル 外角 ヲ 二等分ス.

ABC ヲ 三角形; CP, CQ ハ 夫々 C ニ 於テノ 內角

及 外角 ヲ 二等分スル 直線 ニシテ, 底邊 AB 及 其ノ 延長 ト P 及 Q 點 ニ 於テ 交ル トセヨ:

然ルトキハ AB ハ 比 AC : CB ニ, P ニ 於テ 內分, 及 Q ニ 於テ 外分サル 可シ.



B ヨリ PC ニ 平行ニ BD ヲ 引キ, AC ノ 延長 ト D ニ 於テ 交ル トセヨ;

然レハ 角 CBD ハ 角 BCP ニ 等シ;

又 角 CDB ハ 角 ACP ニ 等シ;

然ルニ 角 BCP ハ 角 ACP ニ 等シ; 假設.

故ニ 角 CBD ハ 角 CDB ニ 等シ;

故ニ CB ハ CD ニ 等シ:

又 PC ハ BD ニ 平行ナル ヲ 以テ,

AP : PB :: AC : CD; V, 1, 系.

而シテ CD ハ CB ニ 等シキ ヲ 以テ,

AP : PB :: AC : CB.

同樣ニ B ヨリ QC ニ 平行線 ヲ 引キ, AQ : QB :: AC : CB ヲ 證明スル ヲ 得.

逆ニ, AB ヲ P 及 Q ニ於テ比 AC:CB ニ內分及外分シタリトセヨ:

然ルトキハ CP, CQ ハ C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分ス可シ.

C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ハ AB ヲ比 AC:CB ニ內分及外分ス:

而シテ AB ガ比 AC:CB ニ內分及外分サルヽ點ハ各唯一ツニ限ル, V, 2.

而シテ P, Q ガ此分點ナリ;

故ニ CP, CQ ハ C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ナリ.

系. 頂點 C ガ比 AC:CB ガ常ニ任意ノ與ヘラレタル比ニ等シキ樣ニ動クトキハ, C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ハ常ニ AB ヲ此比ニ內分及外分スル點ヲ過ル.

問題 213. 三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ D ニ於テ二等分シ, 角 ADC, ADB ヲ二等分スル直線ヲ邊 AC, AB ト夫々 E, F ニ於テ出會ハシムルトキハ, EF ハ BC ニ平行ナリ.

第二節ノ問題.

*問題 214. 一ツノ點ヨリ引タル三ツノ直線ガ二ツノ平行線ト夫々 A, B, C 及 A′, B′, C′ 點ニ於テ交レハ, AB : BC :: A′B′ : B′C′.

問題 215. ABC ハ二等邊三角形ニシテ, 邊 AB ハ邊 AC ニ等シ; 中心 B 及半徑 BC ヲ以テ圓ヲ書キ, AC ト再ヒ D 點ニ於テ交ハラシム: 然ルトキハ BC ハ AC, CD ノ比例中項ナリ.

問題 216. 一ツノ三角形ノ邊ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ邊ニ平行ナルカ, 或ハ垂線ナルトキハ, 二ツノ三角形ハ相似ナリ.

問題 217. 圓ノ二ツノ平行ナル切線ガ A 點ニ於テ切スル第三ノ切線ト P, Q ニ於テ交ル; 半徑ハ AP, AQ ノ間ノ比例中項ナリ.

*問題 218. 平行四邊形ノ對角線ニ添フ平行四邊形ハ全形ニ, 及互ニ相似ナリ.

問題 219. ABC ハ圓ニ內接スル三角形ニシテ, A ニ於テノ切線 AD ガ BC ノ延長ニ D ニ於テ出會フトキハ, 三角形 ABD 及 ACD ニ外接スル圓ノ直徑ノ比ハ比 AD:CD ニ等シ.

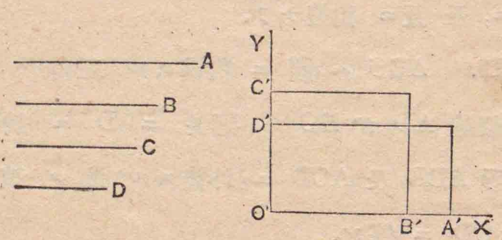
第三節.

面積.

定理 15. 四ツノ直線ガ比例ヲ爲ストキハ, 外項ノ包ム矩形ハ内項ノ包ム矩形ニ等シ.

逆ニ, 二ツノ矩形ガ相等シキトキハ其ノ邊ナル四ツノ直線ハ一ツノ矩形ノ邊ガ内項, 他ノ矩形ノ邊ガ外項ナル様ニ比例ヲ爲ス.

A, B, C, D ハ四ツノ直線ニシテ, $A:B::C:D$ ナリトセヨ:



然ルトキハ A, D ノ包ム矩形ハ B, C ノ包ム矩形ニ等シカル可シ.

直角 XOY ノ一ツノ邊ノ上ニ OA′ ヲ A ニ等シク, OB′ ヲ B ニ等シク取リ; 他ノ邊ノ上ニ OC′ ヲ C ニ等シク, OD′ ヲ D ニ等シク取リ,

矩形 A′D′, B′C′ ヲ作レ;

A′D′ ハ A, D ノ包ム矩形, B′C′ ハ B, C ノ包ム矩形ナリ:

而シテ矩形 B′D′ ハ兩形ニ通スル部分ナリ;

今　矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: OA′ : OB′;　V, 4.

又　矩形 B′C′ : 矩形 B′D′ :: OC′ : OD′;　V, 4.

然ルニ　OA′ : OB′ :: OC′ : OD′;　假設.

故ニ　矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: 矩形 B′C′ : 矩形 B′D′;　IV, 1

故ニ　矩形 A′D′ ハ矩形 B′C′ ニ等シ,　IV, 4, 系 1.

即 A, D ノ包ム矩形ハ B, C ノ包ム矩形ニ等シ.

逆ニ, A, D ノ包ム矩形ガ B, C ノ包ム矩形ニ等シトセヨ:

然ルトキハ　$A:B::C:D$　ナル可シ.

前ト同シ作圖ヲ爲セハ,

矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: 矩形 B′C′ : 矩形 B′D′;　IV, 3.

而シテ 矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: OA′ : OB′,　V, 4.

又　矩形 B′C′ : 矩形 B′D′ :: OC′ : OD′;　　V, 4.

故ニ　OA′ : OB′ :: OC′ : OD′,　　IV, 1.

即　A : B :: C : D.

系. 三ツノ直線ガ比例ヲ爲ストキハ, 外項ノ包ム矩形ハ中項ノ上ノ正方形ニ等シ; 逆ニ, 一ツノ正方形ガ一ツノ矩形ニ等シクレハ, 正方形ノ邊ハ矩形ノ二ツノ邊ノ間ノ比例中項ナリ.

---

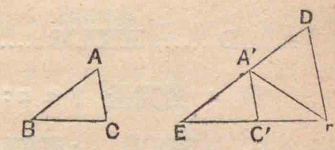
*問題 220. V, 7 及 15 ニ由リテ, 圓ノ二ツノ弦ガ圓内ノ或ハ圓外ノ點ニ於テ交ルトキハ, 弦ノ分ノ包ム矩形ハ他ノ弦ノ分ノ包ム矩形ニ等シキコ (III, 14, 系 1) ヲ證明セヨ. 又 III, 14, 系 3 ヲ證明セヨ.

問題 221. 直角三角形 ABC ノ直角 B ヲ二等分スル直線ガ AC トFニ於テ交リ, 外接圓トDニ於テ交レハ, 矩形 BD, BF ハ三角形ノ二倍ニ等シ.

定理 16. 相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ.

ABC, DEF ハ相似三角形ニシテ, BC, EF ヲ一双ノ對應邊トセヨ:

然ルトキハ　三角形 ABC : 三角形 DEF ハ BC : EF ノ二乘比ニ等シカル可シ.



三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ置キ, B 點ハ E 點ノ上ニ重ナリ, BA ハ ED ノ上ニ重ナル樣ニセヨ;

然レハ角 ABC ハ角 DEF ニ等シキヲ以テ, BC ハ EF ノ上ニ重ナル;

A′, C′ ヲ A, C ノ落ル點トセヨ;

A′C′ 及 A′F ヲ結ヒ付ケヨ.

然レハ　三角形 A′EC′ : 三角形 A′EF :: EC′ : EF;　　V, 4, 系 2.

即　三角形 ABC : 三角形 A′EF :: BC : EF;

同樣ニ　三角形 A′EF : 三角形 DEF :: A′E : DE,

即　:: AB : DE;

然ルニ　AB : DE :: BC : EF;

故ニ　三角形 A′EF : 三角形 DEF :: BC : EF;

三角形 ABC ト三角形 DEF ノ比ハ ABC ト A′EF ノ比及 A′EF ト DEF ノ比ノ相乘比ナリ;

而シテ此比ハ各比 BC : EF ニ等シキヲ以テ,

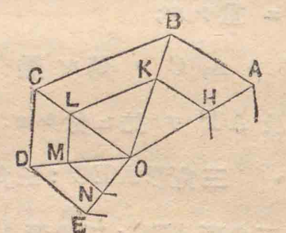
三角形 ABC : 三角形 DEF ハ BC : EF ノ二乘比ニ等シ.

定理 17. 相似直線形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ.

ABCD......, HKLM...... ヲ二ッノ相似直線形; AB, HK ヲ一双ノ對應邊トセヨ:

然ルトキハ ABCD......: HKLM...... ハ AB:HK ノ二乘比ニ等シカル可シ.

二ッノ直線形ヲ其ノ對應邊ガ平行ニシテ, 一ッガ全ク他ノ内ニ在ル樣ニ置ケ:



AH, BK, CL, DM.....

ヲ結ビ付ケ, 之ヲ延長シテ, 相似ノ中心 O ニ於テ出會ハシメヨ;

然レバ直線形ハ邊ノ數ト同シ數ノ双ノ相似三角形ニ分タル;

而シテ各ノ双ノ三角形ノ比ハ其ノ底邊ノ二乘比ニ等シ, 即直線形ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ;

故ニ一ッノ直線形ヲ爲ス三角形ノ和ト他ノ直線形ヲ爲ス三角形ノ和ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シ, 加比

即 直線形 ABCD......: 直線形 HKLM...... ハ AB:HK ノ二乘比ニ等シ.

系. 相似直線形ノ比ハ其ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ.

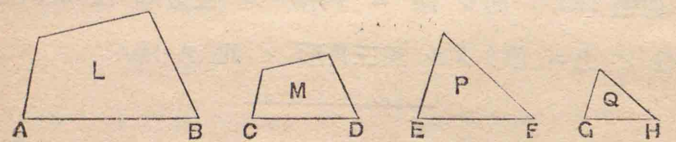
何トナレバ, 正方形ハ相似形ナルヲ以テ, 其ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シケレバナリ.

問題 222. 同シ圓ニ內接スル正方形及正六邊形ノ邊ノ上ニ作リタル正三角形ノ比ヲ求ム.

定理 18. 四ッノ直線ガ比例ヲ爲シ, 其ノ第一及第二ノ上ニ一双ノ相似形ヲ相似ノ位置ニ在ル樣ニ畫キ, 第三及第四ノ上ニモ亦一双ヲ畫クトキハ, 此等ノ形ハ比例ヲ爲ス: 逆ニ, 四ッノ直線ノ第一ノ上ニ在ル直線形ト第二ノ上ニ之ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル直線形ノ比ガ第三ノ上ニ在ル直線形ト第四ノ

上ニ之ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル直線形ノ比ニ等シケレハ，四ツノ直線ハ比例ヲ爲ス.

AB, CD, EF, GH ヲ比例ヲ爲ス四ツノ直線；L, M ヲ AB, CD ノ上ニ相似ノ位置ニ在ル相似形；又 P, Q ヲ EF, GH ノ上ニ相似ノ位置ニ在ル相似形トセヨ：
然ルトキハ L:M::P:Q ナル可シ.



L:M ハ AB:CD ノ二乘比ニ等シ； V, 17.
P:Q ハ EF:GH ノ二乘比ニ等シ； V, 17.
而シテ比 AB:CD ハ比 EF:GH ニ等シキヲ以テ，
AB:CD ノ二乘比ハ EF:GH ノ二乘比ニ等シ； IV, 14.
故ニ L:M::P:Q.

逆ニ，L:M::P:Q ナリトセヨ：
然ルトキハ AB:CD::EF:GH ナル可シ；

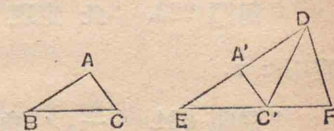
L:M ハ AB:CD ノ二乘比ニ等シ；
又 P:Q ハ EF:GH ノ二乘比ニ等シ；

故ニ AB:CD ノ二乘比ハ EF:GH ノ二乘比ニ等シ；
故ニ AB:CD::EF:GH. IV, 14.

定理 19. 一ツノ角ガ相等シキ二ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ其角ヲ夾ム一ツノ形ノ邊ト他ノ形ノ邊ノ比ノ相乘比ニ等シ.

ABC, DEF ヲ角 ABC ガ角 DEF ニ等シキ二ツノ三角形トセヨ：
然ルトキハ比 ABC:DEF ハ比 AB:DE 及比 BC:EF ノ相乘比ナル可シ.

角 ABC ガ角 DEF ニ等シキヲ以テ，



邊 AB, BC ガ夫々邊 DE, EF ノ上ニ重ナル樣ニ，三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ置クコトヲ得；
A', C' ヲ A, C ノ落ル點トセヨ：
A'C', DC' ヲ結ヒ付ケヨ；
三角形 ABC 即 A'EC' ト三角形 DEF ノ比ハ A'EC' ト DEC' ノ比及 DEC' ト DEF ノ比ノ相乘比ナリ；
故ニ A'E:DE 及 EC':EF ノ相乘比ニ等シ： V, 4, 系 2.

即 AB:DE 及 BC:EF ノ 相乘比 ニ 等シ

平行四邊形 ハ 三角形 ノ 二倍ナル ヲ 以テ, 亦 同シ 比 ヲ 有ス.

系 1. 一ッノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ノ 一ッノ 角 ガ 一ッノ 他ノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ノ 一ッノ 角 ノ 補角 ナル トハ, 二ッノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ノ 比 ハ 其 角 ヲ 夾ム 一ッノ 形 ノ 邊 ト 他ノ 形 ノ 邊 ノ 比 ノ 相乘比 ニ 等シ.

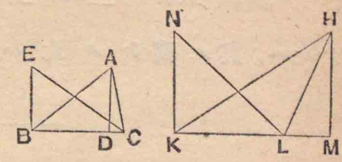
系 2. 直線 ト 直線 ノ 比 ヲ 二ッ 相乘シタル 比 ハ 前項 ノ 包ム 矩形 ト 後項 ノ 包ム 矩形 ノ 比 ニ 等シ.

---

*問題 223. 此 定理 ヲ 平行四邊形 ニ 付テ 直接ニ 證明セヨ.

*問題 224. 一ッノ 角 ガ 相等シキ 二ッノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ガ 相等シケレハ, 各ノ 形 ニ 於テ 其 角 ヲ 夾ム 一ッノ 邊 ノ 比 ハ 他ノ 邊 ノ 反比 ニ 等シ. 之 ヲ 直接ニ, 及 此 定理 ニ 依リテ, 證明セヨ.

定理 20. 二ッノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ノ 比 ハ 其ノ 底邊 ノ 比 及 其ノ 高サ ノ 比 ノ 相乘比 ニ 等シ.



ABC, HKL ハ 二ッノ 三角形 ニシテ, BC, KL ヲ 其ノ 底邊; AD, HM ヲ 其ノ 高サ トセヨ:

然ルトキハ 三角形 ABC, HKL ノ 比 ハ 比 BC:KL 及 比 AD:HM ノ 相乘比 ニ 等シカル 可シ.

BE ヲ BC ニ 垂線ニ 引キ, AD ニ 等シクシ, EC ヲ 結ヒ付ケヨ;

又 KN ヲ KL ニ 垂線ニ 引キ, HM ニ 等シクシ, NL ヲ 結ヒ付ケヨ;

然レハ 三角形 ABC, EBC ハ 相等シ; III, 2, 系 2.

同樣ニ 三角形 HKL, NKL モ 亦 相等シ;

而シテ 角 CBE ハ 角 LKN ニ 等シキ ヲ 以テ,

三角形 EBC ト 三角形 NKL ノ 比 ハ 比 BC:KL 及 比 EB:NK 即 AD:HM ノ 相乘比 ニ 等シ; V, 19.

故ニ 三角形 ABC ト 三角形 HKL ノ 比 ハ 比 BC:KL 及 比 AD:HM ノ 相乘比 ニ 等シ.

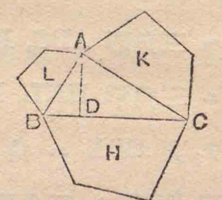
平行四邊形 ニ 付テモ 同樣ニ 證明スル ヲ 得.

系. 二ッノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ノ 比 ハ 之 ト 等シキ 高サ 及 等シキ 底邊 ノ 矩形 ノ 比 ニ 等シ.

*問題 225. 二ツノ三角形(或ハ平行四邊形)ガ相等シクレハ, 其ノ高サノ比ハ底邊ノ比ノ反比ナリ.

定理 21. 直角三角形ノ斜邊ノ上ニ畫キタル直線形ハ他ノ二ツノ邊ノ上ニ畫キタル之ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル直線形ノ和ニ等シ.

三角形 ABC ニ於テ角 BAC ヲ直角ナリトセヨ;



又 H, K, L ハ邊 BC, CA, AB ノ上ニ畫キタル相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル直線形トセヨ:

然ルトキハ H ハ K 及 L ノ和ニ等シカル可シ.

AD ヲ BC ヘ垂線ニ引ク;

然レハ $BC:CA::CA:CD$ ナルヲ以テ, V, 12, 系.

$BC:CD$ ハ $BC:CA$ ノ二乘比ナリ:

故ニ $H:K::BC:CD$; V, 17.

同樣ニ $H:L::BC:BD$;

故ニ $K:L::CD:BD$; 反轉及等比.

故ニ $K+L:L::CD+BD:BD$, 合比.

即 $::BC:BD$;

然ルニ $H:L::BC:BD$;

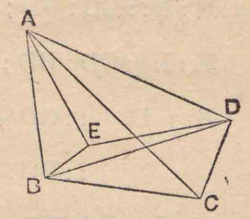
故ニ K ト L ノ和ハ H ニ等シ.

附言. 此定理ハ古代ギリシヤノ數學者ピユータゴラスノ發見セルモノナリト云フ, 因テピユータゴラスノ定理ト稱ス; 此定理ハ相似直線形ニ限ラズ, 凡テノ相似形ニ付テモ亦眞ナリ. III, 9 ハ此定理ノ特別ノ場合ナリ.

定理 22. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ包ム矩形ハ其ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ヨリ小ナリ: 唯四邊形ニ外接スル圓ヲ畫キ得可キ特別ノ場合ニ於テノミ, 之ニ等シ.

ABCD ハ四邊形ニシテ, 先ツ之ニ外接スル圓ヲ畫ク能ハズトセヨ:

然ルトキハ矩形 AC, BD ハ矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ヨリ小ナル可シ.



A, B, C, D ヲ過ル圓ヲ畫ク能ハザルヲ以テ,
角 ABD ハ角 ACD ニ等シカラズ;
角 ABE ヲ角 ACD ニ等シク作レ;
角 BAE ヲ角 CAD ニ等シク作レ;
DE ヲ結ビ付ケヨ:
三角形 ABE, ACD ハ等角ナルヲ以テ,

BA : AE :: CA : AD, V, 7.

故ニ BA : AC :: EA : AD, 更迭.

而シテ角 BAE ハ角 DAC ニ等シキヲ以テ, 双方ヘ角 CAE ヲ加ヘ(或ハ之ヲ双方ヨリ減シ), 全角(或ハ殘リ) BAC ハ全角(或ハ殘リ) DAE ニ等シ;
故ニ三角形 ABC, AED ハ相似ナリ; V, 8.
故ニ BC : AC :: ED : AD;
故ニ矩形 BC, AD ハ矩形 AC, ED ニ等シ; V, 15.
又三角形 BAE, CAD ガ相似ナルヲ以テ,
AB : BE :: AC : CD;

故ニ矩形 AB, CD ハ矩形 AC, BE ニ等シ;
故ニ矩形 AB, CD, 及 AD, BC ノ和ハ矩形 AC, BE 及 AC, ED ノ和ニ等シ:
然ルニ BD ハ BE 及 ED ノ和ヨリ小ナルヲ以テ,
矩形 AC, BD ハ矩形 AC, BE 及 AC, ED ノ和ヨリ小ナリ,
即矩形 AB, CD, 及 AD, BC ノ和ヨリ小ナリ.

次ニ, ABCD ニ外接スル圓ヲ畫キ得ルトセヨ:
然ルトキハ矩形 AC, BD ハ矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ニ等シカル可シ.

角 ABD ハ角 ACD ニ等シキヲ以テ,
E 點ハ直線 BD ノ上ニ在リ;
BD ハ BE 及 ED ノ和ニ等シ;
故ニ矩形 AC, BD ハ矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ニ等シ.

系. 四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ガ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シケレハ, 四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クヲ得.

附言. 此定理中特別ノ場合(即圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ノ包ム矩形ガ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ニ等シキコ)ヲプトレミーノ定理ト稱ス; 圓

ノ最有用ナル性質ノ一ナリ.

第三節ノ問題.

問題 226. 三角形 ABC ノ二ツノ中線 AD, BE ガ G ニ於テ交ル; 三角形 AGB, DGE ノ面積ヲ比較セヨ.

問題 227. ACB, BCD ハ相等シキ角ニシテ, CB ハ三角形 ABC, DBC ニ適ス; 二ツノ三角形ノ比ハ AC:CD ニ等シ.

問題 228. CA, CB ハ一ツノ圓ノ互ニ垂線ナル半徑, DE ハ任意ノ弦ナリ; BD, BE ガ AC ト F 及 G ニ於テ交レハ, 三角形 BFG, BDE ハ相似ナリ.

問題 229. 正六邊形ノ邊ヲ兩方ヘ延長シ, 其ノ交點ヲ結ヒ付ケテ, 一ツノ正六邊形ヲ得: 此二ツノ六邊形ノ比ハ 1 : 3 ナリ:

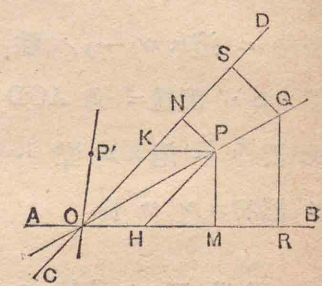
問題 230. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂線ナレハ, 相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ハ四邊形ノ二倍ナリ.

第四節.

軌跡及作圖題.

軌跡 1. 相交ル二ツノ直線ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡.

AB, CD ヲ O ニ於テ交ル二ツノ直線トセヨ: AB, CD ヨリノ距離ノ比ガ與ヘランタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.



P ヲ此要件ニ適スル一ツノ點トシ, 先ツ角 BOD 或ハ其ノ對頂角ノ內ニ在リトセヨ; P ヨリ AB, CD ヘ夫々垂線 PM, PN ヲ引ク; 又 AB, CD ニ平行ニ PK, PH ヲ引キ, 夫々 CD, AB ト K, H ニ於テ出會ハシメヨ; OP ヲ結ヒ付ケヨ; 角 PHM, PKN ハ各角 BOD ニ等シキヲ以テ相等シ;

而シテ角 PMH, PNK ハ各直角ナルヲ以テ, 相等シ:

故ニ三角形 PMH, PNK ハ相似ナリ; V, 7.

故ニ PH : PM :: PK : PN,

故ニ PH : PK :: PM : PN; 更迭.

故ニ PH : PK 即 OK : KP ハ與ヘラレタル比ニ等シ;

而シテ角 OKP ハ定マレル大サノ角ナリ;

故ニ角 KOP ハ定マレル大サノ角ナリ; V, 8.

故ニ角 BOD 或ハ其ノ對頂角ノ內ニ在リテ此要件ニ適スル任意ノ點 Q ヲ取レハ, 角 DOQ ハ角 KOP ニ等シキヲ以テ, Q ハ直線 OP ノ上ニ在リ:

次ニ, P′ ヲ角 AOD 或ハ其ノ對頂角ノ內ニ在リテ此要件ニ適スル一ツノ點トセヨ;

然ルトキハ同樣ニ角 AOD 或ハ其ノ對頂角ノ內ニ在リテ此要件ニ適スル點ハ何レモ直線 OP′ ノ上ニ在ルコトヲ證明スルヲ得.

又此二ツノ直線ノ中何レニテモ一ツノ上ニ在ル點ノ AB, CD ヨリノ距離ノ比ハ與ヘラレタル比ニ等シ.

Q ヲ此二ツノ中一ツノ上ニ在ル任意ノ點トシ, QR, QS ヲ夫々 AB, CD ニ垂線ニ引ク;

然レハ三角形 QRO, PMO ハ等角ナリ,

故ニ QR : PM : OQ : OP;

同樣ニ QS : PN :: OQ : OP;

故ニ QR : PM :: QS : PN;

故ニ QR : QS :: PM : PN, 更迭.

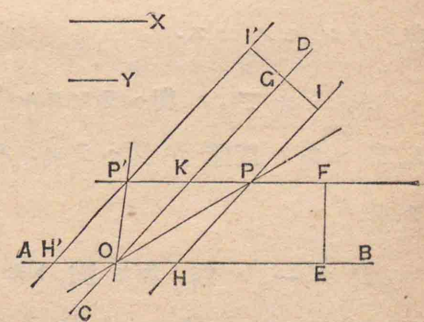
即 AB, CD ヨリ Q 點ノ距離ハ與ヘラレタル比ヲ有ス.

故ニ AB, CD ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ハ其ノ交點 O ヲ過ル二ツノ直線 OP, OP′ ナリ.

今此軌跡ヲ作ルコ次ノ如シ.

X, Y ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ直線トシ, AB 上ノ任意ノ點 E ヨリ AB ニ垂線 EF ヲ引キ, EF ヲ X ニ等シク取レ;

又 CD 上ノ任意ノ點 G ヲ過リ CD ニ垂線 IGI′ ヲ引キ, GI 及 GI′ ヲ各 Y ニ等シク取レ:



F ヲ過リ FK ヲ AB ニ平行ニ引ク;

又 I 及 I′ ヲ過リ IH 及 I′H′ ヲ CD ニ平行ニ引キ,

FK ト夫々 P 及 P′ ニ於テ交ラシメヨ;

然ルトキハ P, P′ ハ要件ニ適スル點ナルコト明ナリ;

故ニ OP, OP′ ヲ結ビ付クレバ求ムル所ノ軌跡ヲ得.

---

*問題 231. 二ツノ與ヘラレタル直線ガ平行ナルトキハ, 軌跡ハ之ニ平行ナル一双ノ平行線ナリ.

*問題 232. 軌跡ノ一部分ナル直線 OP′ ハ HK ニ平行ナリ.

軌跡 2. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡.

與ヘラレタル比ガ等比ナル場合ハ I, 軌跡 2 ニ論シタルヲ以テ, 此ニハ與ヘラレタル比ハ等比ニ非ラザルモノトス.

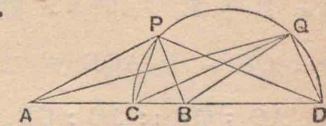
A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル點トセヨ:

A, B ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求ム.

P ヲ一ツノ斯ノ如キ點トセヨ:

AB ヲ結ビ付ケ, 之ヲ C, D ニ於テ與ヘラレタル比ニ

內分及外分シタリトセヨ; V, 2.



然レバ PA : PB :: AC : CB,

及　PA : PB :: AD : DB,

故ニ PC, PD ハ夫々三角形 APB ノ P ニ於テノ內角及外角ヲ二等分ス; V, 14.

故ニ CPD ハ直角ナリ;

故ニ P 點ハ常ニ CD ヲ直徑トセル圓周ノ上ニ在リ.

又此圓周上ノ各ノ點ノ A, B ヨリノ距離ハ與ヘラレタル比ヲ有ス.

Q ヲ此圓周上ノ任意ノ點トセヨ:

QA, QB, QC, QD ヲ結ビ付ケ,

角 CQA ニ等シク角 CQB′ ヲ CQ ノ反對ノ側ニ作レ;

然レバ CQ ハ角 AQB′ ヲ二等分ス, 而シテ角 CQD ハ直角ナリ;

故ニ QD ハ角 AQB′ ニ接スル外角ヲ二等分ス,

故ニ　AC : CB′ :: AD : DB′;

即　AC : AD :: CB′ : DB′; 更迭.

然ルニ　AC : CB :: AD : DB,

即　AC : AD :: CB : DB, 更迭.

故ニ　CB′ : DB′ :: CB : DB;

故ニ B ト B ハ 同一ノ 點 ナリ;　V, 2

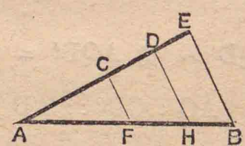
故ニ QC ハ 角 AQB ヲ 二等分シ,

AQ : QB :: AC : CB.

故ニ A, B ヨリノ 距離 ガ 與ヘラレタル 比 ヲ 有スル 點 ノ 軌跡 ハ AB ヲ 其 比 ニ 內分 及 外分スル 點 C, D ヲ 結ヒ付クル 直線 ヲ 直徑 トシテ 畫キタル 圓周 ナリ.

作圖題 1. 一ツノ 與ヘラレタル 直線 ヲ 與ヘラレタル 分タレタル 直線 ニ 相似ニ 分ツコト.†

AB ヲ 一ツノ 與ヘラレタル 直線, ACDE ヲ C, D ニ 於テ 分タレタル 與ヘラレタル 直線 トス: AB ヲ ACDE ニ 相似ニ 分ツコト ヲ 求ム.



AB, AE ヲ 一ツノ 端 ガ 同シ 點 A ニ 在ル 樣ニ 置ク;

EB ヲ 結ヒ付クヨ;

C, D ヲ 過リ, CF, DH ヲ EB ニ 平行ニ 引キ, AB ト 夫々 F, H ニ 於テ 交ラシメヨ;

† 相似ニ 分ツ トハ 兩 直線 ニ 於テ 相對應スル 諸 分 ノ 比 ガ 相等シキ ヲ云フ.

AB ハ F, H ニ 於テ AE ニ 相似ニ 分タレタリ.

CF, DH, EB ハ 平行ナル ヲ 以テ,

AF : FH :: AC : CD,

又 FH : HB : CD : DE;

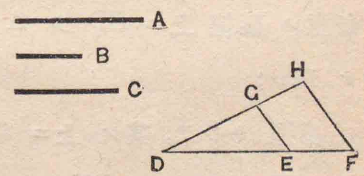
即 AB ハ F, H ニ 於テ ACDE ニ 相似ニ 分タレタリ.

作圖題 2. 一ツノ 與ヘラレタル 直線 ヲ 與ヘラレタル 比 ニ 內分 及 外分スルコト.

此 作圖題 ハ 定理 V, 2 中ニ 解セリ.

作圖題 3. 三ツノ 與ヘラレタル 直線 ノ 第四比例項 ナル 直線 ヲ 得ルコト.

A, B, C ヲ 三ツノ 與ヘラレタル 直線 トス: A, B, C ノ 第四比例項 ナル 直線 ヲ 求ム.



任意ノ 直線 上ニ DE ヲ A ニ 等シク, EF ヲ B ニ 等シク 取レ;

D ヲ 過ル 他ノ 任意ノ 直線 上ニ DG ヲ C ニ 等シク 取レ;

EG ヲ 結ヒ付ケ, FH ヲ EG ニ 平行ニ 引キ, DG ノ 延長

トH ニ 於テ 交ラシメヨ;

GH ハ 求ムル 所ノ 第四比例項 ナリ.

EG, FH ハ 平行ナル ヲ 以テ,

DE : EF :: DG : GH, V, 1, 系.

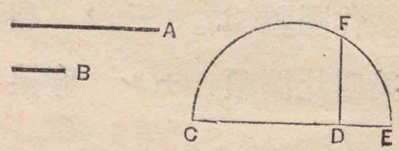
即 A : B :: C : GH;

故ニ GH ハ A, B, C ノ 第四比例項 ナリ.

作圖題 4. 二ツノ 與ヘラレタル 直線 ノ 間 ノ 比例中項 ナル 直線 ヲ 得ルコト.

A, B ヲ 二ツノ 與ヘラレタル 直線 トス:

A, B ノ 間ノ 比例中項 ナル 直線 ヲ 求ム.



任意ノ 直線 上ニ CD ヲ A ニ 等シク, DE ヲ B ニ 等シク 取レ;

CE ヲ 直徑 トシテ, 其ノ 上ニ 半圓 ヲ 書ケ;

D ヨリ CE ニ 垂線ニ DF ヲ 引キ, 圓周 ト F ニ 於テ 交ラシメヨ;

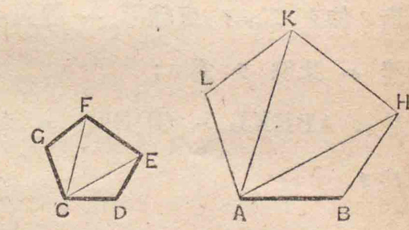
DF ハ 求ムル 所ノ 比例中項 ナリ.

角 CFE ハ 直角 ナリ; II, 17.

故ニ FD ハ CD, DE ノ 間ノ 比例中項 ナリ. V, 12, 系.

作圖題 5. 與ヘラレタル 直線 ノ 上ニ, 他ノ 與ヘラレタル 直線 ノ 上ノ 與ヘラレタル 直線形 ニ 相似ニシテ 相似ノ 位置 ニ 在ル 直線形 ヲ 作ルコト.

AB ヲ 與ヘラレタル 直線, CDEFG ヲ 他ノ 與ヘラレタル 直線 CD ノ 上ニ 在ル 與ヘラレタル 直線形 トス:



AB ノ 上ニ CDEFG ニ 相似ニシテ, 相似ノ 位置 ニ 在ル 直線形 ヲ 作ルコト ヲ 求ム

C 點 ヲ 頂點 E, F ニ 結ビ付ケテ, CDEFG ヲ 三角形 CDE, CEF, CFG ニ 分テ;

角 BAH, ABH ヲ 夫々 角 DCE, CDE ニ 等シク 作レ;

角 HAK, AHK ヲ 夫々 角 ECF, CEF ニ 等シク 作レ;

續ケテ 斯ノ如ク ニシテ, 與ヘラレタル 直線形 ヲ 分チタル 三角形 ト 夫々 等角ナル 三角形 ヲ 作レ;

斯樣ニシテ 得タル 直線形 ハ 求ムル 所ノ 直線形 ナリ.

三角形 ABH, CDE ハ 等角ナル ヲ 以テ, 作圖.

AB : BH :: CD : DE; V, 7.

且 BH : HA :: DE : EC;

又 三角形 AHK, CEF ハ 等角ナル ヲ 以テ,

HA : HK :: EC : EF;

故ニ BH : HK :: DE : EF; 等比.

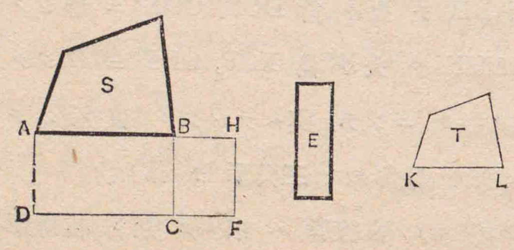
同様ニ HK : KL :: EF : FG, 等;

斯ノ如ク 二ツノ 直線形 ハ 等角ニシテ, 相等シキ 角 ヲ 夾ム 邊 ハ 比例 ヲ 爲ス;

故ニ ABHKL ハ CDEFG ニ 相似ニシテ, 相似ノ 位置 ニ 在リ.

作圖題 6. 一ツノ 直線形 ニ 等シク, 一ツノ 他ノ 直線形 ニ 相似ナル 直線形 ヲ 作ルヿ.

E, S ヲ 二ツノ 與ヘラレタル 直線形 トス:
E ニ 等シク, S ニ 相似ナル 直線形 ヲ 作ルヿ ヲ 求ム.



S ノ 一ツノ 邊 AB ノ 上ニ S ニ 等シキ 矩形 ABCD ヲ 作レ; III, 作 3 及 作 2.

BC ノ 上ニ E ニ 等シキ 矩形 BCFH ヲ 作レ;

AB, BH ノ 間ノ 比例中項 ナル KL ヲ 得ヨ; V, 作 4.

KL ノ 上ニ, AB ノ 上ニ 在ル S ニ 相似ニシテ 相似ノ 位置 ニ 在ル 直線形 T ヲ 作レ; V, 作 5.

T ハ 求ムル 所ノ 直線形 ナリ.

AB : KL :: KL : BH ナル ヲ 以テ,

AB : BH ハ AB : KL ノ 二乘比 ナリ;

又 形 S : 形 T ハ AB : KL ノ 二乘比 ナリ; V, 17.

故ニ 形 S : 形 T :: AB : BH;

而シテ 矩形 AC : 矩形 BF :: AB : BH; V, 4.

故ニ 形 S : 形 T :: 矩形 AC : 矩形 BF;

而シテ 形 S ハ 矩形 AC ニ 等シ,

故ニ 形 T ハ 矩形 BF ニ 等シ, IV, 7.

即 形 E ニ 等シ:

故ニ 形 T ハ 求ムル 所ノ 直線形 ナリ.

第四節 ノ 問題.

*問題 233 與ヘラレタル 三角形 ニ 相似ナル 三角形 ノ

一ツノ頂點ハ一ツノ定マレル點ニ在リ; 他ノ一ツノ頂點ハ常ニ與ヘラレタル直線ノ上ニ在リ: 然ルトキハ第三ノ頂點ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ.

問題 234. 與ヘラレタル點 A ヲ過リ, 與ヘラレタル直線 OX, OY ト夫々 P, Q ニ於テ交リ, OP : OQ ガ與ヘラレタル比ヲ有スル樣ナル直線ヲ引クコト.

問題 235. 與ヘラレタル頂角ヲ有シ, 與ヘラレタル三角形ニ等シキ二等邊三角形ヲ作ルコト.

第五編ノ問題.

*問題 236. 邊ノ數ガ同シキ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ之ニ外接スル圓ノ半徑ノ比ニ等シ.

問題 237. 二ツノ相等シカラザル直線ノ和ノ半分ハ其ノ間ノ比例中項ナル直線ヨリ大ナリ.

問題 238. 二ツノ直線ノ包ム矩形ハ各ノ上ノ正方形ノ間ノ比例中項ナリ.

問題 239. O 點ヨリ任意ノ直線ヲ引キ, 其ノ上ニ二ツノ點 P, Q ヲ OP : OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ樣ニ取レ: P 點ノ軌跡ガ直線ナレバ, Q 點ノ軌跡ハ之ニ平行ナル直線ナリ.

問題 240. 鋭角三角形 ABC ノ頂點 A 及 B ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線 AD, BE ヲ引ケバ, 三角形 ABC, DEC ハ相似ナリ.

問題 241. 三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ガ三角形ノ內ニ在リテ, 底邊ノ分ノ比例中項ナルトキハ, 三角形ハ直角三角形ナリ.

問題 242. A, B, C, D ハ 一 直線 上ノ 點 ナリ; AC BD ノ 上ニ 相似三角形 AXC, BYD ヲ 畫キ, 對應邊 AX, BY 及 對應邊 CX, DY ハ 平行ナリ トス: XY ト AD ガ O 點 ニ 於テ 交レバ, 矩形 OA, OD ハ 矩形 OB, OC ニ 等シ.

問題 243. 一ツノ 四邊形 ノ 三ツノ 角 ガ 一ツノ 他ノ 四邊形 ノ 三ツノ 角 ニ 等シク, 一 双 ノ 相等シキ 角 ヲ 夾ム 邊 ガ 比例 ヲ 爲ス トキハ (相等シキ 角 ニ 隣ル 邊 ガ 對應ニシテ), 二ツノ 四邊形 ハ 相似ナリ.

問題 244. 二ツノ 二等邊三角形 ノ 頂角 ガ 相等シケレバ, 其ノ 高サ ノ 比 ハ 其ノ 底邊 ノ 比 ニ 等シ.

問題 245. 一ツノ 共通ノ 角 ヲ 有シ, 相似ニシテ, 相似 ノ 位置 ニ 在ル 二ツノ 平行四邊形 ノ 共通ノ 角 ヲ 過ル 對角線 ハ 同一 ノ 直線 ナリ.

問題 246. 二ツノ 圓 ガ 外切スル トキハ, (切點 ヲ 過ラザル) 共通 切線 ノ 其ノ 切點 ノ 間ニ 在ル 部分 ハ 二ツノ 圓 ノ 直徑 ノ 間ノ 比例中項 ナリ.

問題 247. D ガ 二等邊三角形 ABC ノ 底邊 BC 或ハ 其ノ 延長 ノ 上ノ 點 ナレバ, 三角形 ABD, ACD ノ 外接圓 ハ 相等シ.

問題 248. 相似三角形 ノ 比 ハ 其ノ 內接圓 或ハ 外接圓 ノ 半徑 ノ 二乘比 ナリ.

問題 249. A, P, B, Q ガ 調和列點 ニシテ, M ガ AB ノ 中點 ナレバ, MA ハ MP, MQ ノ 比例中項 ナリ.

問題 250. 二ツノ 圓 ノ 共通 切線 ノ 各ノ 双 ノ 交點 ハ 其ノ 中心 ヲ 結ビ付クル 直線 ヲ 半徑 ノ 比 ニ 內分 及 外分ス.

此 二ツノ 點 ヲ 二ツノ 圓 ノ **相似 ノ 中心** ト 稱ス: 而シテ 之 ヲ **內心** ト **外心** ト ニ 區別ス.

問題 251. 二ツノ 圓 ノ 相似 ノ 中心 O ヨリ 一ツノ 直線 ヲ 引キ, 一ツノ 圓 ト R, R′ ニ 於テ 交リ, 他ノ 圓 ト S, S′ ニ 於テ 交ラシムル トキハ (但シ R 點 ガ S 點 ニ 對應シ, R′ 點 ガ S′ 點 ニ 對應スル モノ トス, 即 OR ガ OR′ ヨリ 小ナレバ, OS モ OS′ ヨリ 小ナリ トス), 矩形 OR, OS′ 及 矩形 OR′, OS ハ 相等シク, 且ツ 何レノ 直線 ニテモ 常ニ 同シ.

雜問題.

此ニ揭クル問題ハ授業上ノ都合等ニ依リ前ニ載セタル諸問題ヲ補ヒ又ハ之ヲ換フ可キ必要有ル場合ニ於テ敎師ノ撰擇スル材料ニ供スルモノナリ.

I.

1. 四ツノ直線ガ一ツノ點ニ於テ出會ヒ, 相隣ラザル角ガ相等シキトキハ, 此等ノ直線ハ二ツヅヽ同一ノ直線ノ上ニ在リ.

2. 定理 I, 2 ト I, 3 トハ如何ナル關係有リヤ?

3. 相交ル二ツノ直線ノ爲ス四ツノ角ヲ二等分スル直線ハ互ニ垂線ナル二ツノ直線ヲ成ス.

4. 二ツノ角 AOB, COD ハ同一ノ頂點 O ヲ有ス; 邊 AO ハ邊 CO ニ, 邊 BO ハ邊 DO ニ垂線ナリ: 然ルトキハ角 AOB ハ角 COD ニ等シキカ或ハ其ノ補角ナル可シ.

5. 定理 I, 6 ト I, 7 ハ如何ナル關係有リヤ? 定理 I, 7 ノ證明法ハ如何ナル方法ナリヤ?

6. 定理 I, 8 ノ逆ヲ述ヘ, 之ヲ證明セヨ.

7. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ之ニ對スル邊ノ中點ヘ引クル直線ハ相等シ.

8. 頂點Aナル角ノ一ツノ邊上ニ二ツノ點B, C有リ, 又他ノ邊上ニ二ツノ點D, E有リテ, ABハADニ等シク, ACハAEニ等シ: BEハCDニ等シキヿヲ證明セヨ.

9. 一ツノ四邊形ノ三ツノ邊ガ夫々他ノ一ツノ四邊形ノ(同シ順ニ取リタル)三ツノ邊ニ等シク, 又其ノ角モ夫々相等シクレハ, 二ツノ四邊形ハ全ク相等シ.

10. 正三角形ノ各ノ邊ノ上ニ其ノ端ヨリ同シ距離ニ一ツヅヽ三ツノ點ヲ取レハ, 之ヲ結ヒ付クル直線ハ正三角形ヲナス.

11. 一ツノ角ヲ二等分スル直線上ノ一ツノ點ヨリ各ノ邊ニ平行ナル直線ヲ引キ他ノ邊ト出會ハシムルトキハ, 此二ツノ直線ハ相等シ.

12. 二等邊三角形ABCノ底邊BCニ隣レル二ツノ角ヲ二等分スル直線ガ夫々之ニ對スル邊ニD及Eニ於テ出會フトキハ, BDハCEニ等シ.

13. 二等邊三角形ノ頂點ニ於テノ外角ヲ二等分スル直線ハ底邊ニ平行ナリ.

14. 平行線ニ關スル定理ニ依ラズシテ, 三角形ノ外角ハ其ノ內對角ノ何レヨリモ大ナルヿヲ證明セヨ.

15. 直角三角形ハ二ツノ二等邊三角形ニ分ツヿヲ得.

16. 三角形ノ一ツノ角ガ他ノ二ツノ角ノ和ヨリ小ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ大ナルカニ從テ, 其角ハ銳角, 直角或ハ鈍角ナリ.

17. 定理I, 14ニ依リテ定理I, 12ヲ證明セヨ.

18. 定理I, 15ノ證明法ハ如何ナル方法ナリヤ?

19. 二等邊三角形ノ頂點ヲ底邊ノ上ノ一ツノ點ト結ヒ付クル直線ハ相等シキ邊ヨリ小ナリ.

20. 定理I, 18ノ逆ヲ證明セヨ.

21. 四邊形ノ相對スル邊ガ相等シクレハ, 相對スル角モ亦相等シ.

22. 三角形ABCノ邊ABノ上ニ(若シACガABヨリ大ナレハ, 之ヲ延長シテ) ADヲACニ等シク取リ; 又同樣ニ邊ACノ上ニ(或ハ之ヲ延長シテ) AEヲABニ等シク取リ; DEヲ結ヒ付ケ, BCトF點ニ於テ交ラシメヨ: 然ルトキハAFハ角BACヲ二等分ス可シ.

23. 多角形ノ一ツノ頂點ヲ總テノ他ノ頂點ニ結ヒ付クテ以テ定理I, 23ヲ證明セヨ.

24. 正五邊形ノ各ノ角ハ直角ノ何分ナリヤ?

25. n邊ノ正多角形ノ各ノ内角ノ大サヲ求ム.

26. 定理I, ヲ 23 引用セズ, 問題 11 (24 頁) 及定理 I, 2 系ニ依リテ定理 I, 24 ヲ證明セヨ.

27. 三角形ノ一ツノ角ヲ二等分スル直線ニ垂線ナル直線ハ(甲)之ヲ夾ム邊ノ各ト他ノ二ツノ角ノ和ノ半分ニ等シキ角ヲ爲ス;(乙)第三邊ト他ノ二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シキ角ヲ爲ス.

28. 三角形ノ一ツノ角ヲ二等分スル直線ト其ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線トノ爲ス所ノ角ハ他ノ二ツノ角ノ差ノ半分ニ等シ.

29 中線ガ之ニ隣レル二ツノ邊ト爲ス角ノ中, 小ナル邊ト爲ス角ガ大ナル邊ト爲ス角ヨリ大ナリ.

30 三角形ノ一ツノ角ヲ二等分スル直線ハ其ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線及中線ノ間ニ在リ.

31 平行四邊形ノ一ツノ對角線ガ角ヲ二等分スレハ, 其平行四邊形ハ菱形ナリ.

32. 或ル四邊形ノ一双ノ相對スル邊ハ平行ナレトモ

相等シカラズ; 他ノ一双ノ邊ハ相等シケレトモ平行ナラズ: 然ルトキハ相對スル角ハ互ニ補角ナリ.

33. 菱形ハ其ノ各ノ對角線ニ付テ對稱ナリ.

34. 四邊形ガ其ノ對角線ノ各ニ付テ線對稱ヲ有テハ, 其四邊形ハ菱形ナリ.

35. 平行四邊形ガ其ノ對角線ノ一ツニ付テ對稱ナレハ, 其平行四邊形ハ菱形ナリ.

36. 一ツノ直線ノ上ニ相等シキ正射影ヲ投スル二ツノ平行ナル直線ハ相等シ.

37. 一ツノ直線ノ上ニ相等シキ正射影ヲ投スル二ツノ相等シキ直線ハ之ト相等シキ角ヲ爲ス.

III

1. 若シ一ツノ直線ガ圓ノ對稱ノ軸ナレハ, 其直線ハ直徑ナリ.

2. 若シ一ツノ線ガ一ツノ與ヘラレタル點ヲ過ル各ノ直線ニ付テ線對稱ヲ有テハ, 其線ハ其點ヲ中心トセル圓周ナリ.

3. 一ツノ直線形ノ邊ヲ直角ニ二等分スル直線ガ皆同一ノ點ニ於テ出會ヘバ,其直線形ノ總テノ頂點ヲ過ル圓ヲ畫クヲ得.

4. AB ハ中心 C ナル圓ノ弦ナリ;圓周上ノ一ツノ點 D ヨリ之ヘ垂線 DE ヲ引ケバ,角 ADE ハ角 BDC ニ等シ.

5. 菱形ノ邊ヲ直徑トシテ畫キタル四ツノ圓ハ同一ノ點ヲ過ル.

6. 圓ニ内接スル四邊形ノ一双ノ相對スル邊ガ相等シケレバ,他ノ一双ハ平行ナリ.

7. 與ヘラレタル圓内ノ一ツノ定マレル點ヲ過ル所ノ弦ノ中點ノ軌跡ハ或ル圓周ナリ.

8. 三角形 ABC ノ頂點 A 及 C ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ハ E ニ於テ交リ,BD ハ外接圓ノ直徑ナリトセヨ:然ルトキハ AE ハ CD ニ等シク;AC, ED ハ各他ヲ二等分ス可シ.

9. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ノ足ハ此垂線ノ延長ガ外接圓ノ周ニ出會フ所ノ點ト垂心トノ半途ニ在リ.

10. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ其ノ垂心マデノ距離ハ外心ヨリ其頂點ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ノ二倍ナリ.

11. P ハ圓弧 APB ノ上ノ任意ノ點ナリ;AP ヲ延長シ,其ノ上ニ PQ ヲ PB ニ等シク取レバ,Q ノ軌跡ハ或ル圓弧ナリ.

12. 三角形ノ垂心ト外接圓ノ周上ノ任意ノ點トヲ結ビ付クル直線ハ三角形ノ其點ニ關シテノシムソン線ニ二等分セラル.

13. 或ル一ツノ點ヨリ四ツノ與ヘラレタル直線ヘ引クル垂線ノ足ガ皆同一ノ直線上ニ在リ:此點ノ位置ヲ求ム.

14. O 點ガ三角形 ABC ノ垂心ナレバ,角 BOC, COA, AOB ハ夫々角 A, B, C ニ等シキカ,或ハ其ノ補角ナリ.

15. 四ツノ點有リ,各他ノ三ツノ成ス三角形ノ垂心ナリ;此四ツノ中何レニテモ三ツヲ過ル圓ハ皆相等シ.

16. 一ツノ平行四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クヲ得レバ,其形ハ矩形ナリ.

17. 三角形ノ邊ノ上ニ其ノ外ニ畫キタル正三角形ニ外接スル三ツノ圓ノ周ハ同一ノ點ヲ過ル.

18. 直角三角形 ABC ノ斜邊 BC ヘ引ケル垂線 AD ノ足ヨリ他ノ邊ヘ垂線 DE, DF ヲ引ケバ, B, E, F, C ヲ過ル一ツノ圓ヲ書クヿヲ得.

19. 邊ノ數ガ偶數ナル直線形ノ邊ガ皆同シ圓ニ切スル𪜈ハ, 一ツオキニ取リタル邊ノ和ハ相等シ.

20. 定理 II, 23 ヲ內接四邊形ノ二ツノ頂點ガ合シタル極限ノ塲合トシテ, II, 19, 系 1 ニ依リテ證明セヨ.

21. 二ツノ相等シキ圓ガ常ニ相切シ, 又夫々直角ニ交ル二ツノ與ヘラレタル直線ノ一ツニ常ニ切スル樣ニ動ク; 二ツノ圓ノ切點ノ軌跡ヲ求ム.

22. AB ハ圓 APQB ノ與ヘラレタル弦ナリ; PQ ハ同シ圓ノ弦ニシテ, 其ノ長サハ一定セリ: AP, BQ ガ R 點ニ於テ出會フトセバ, PQ ハ如何ナル位置ニ在ルモ, R ハ常ニ一ツノ定マレル圓周ノ上ニ在リ.

23. 直角三角形ニ於テ直角ヲ夾ム邊ノ一ツヲ直徑トシテ圓ヲ書ケバ, 此圓ガ斜邊ト交ル所ノ點ニ於テ之ニ切スル直線ハ他ノ邊ヲ二等分ス.

24. 二等邊三角形ノ各ノ頂點ニ於テ其ノ外接圓ニ切線ヲ引ケバ, 此三ツノ直線ハ二等邊三角形ヲナス. 又此二ツノ三角形ガ共ニ正三角形ナルニ非ザレバ,

其ノ頂角ハ相等シカラズ.

25. 問題 116 ニ於テ, 第三ノ圓ガ定マレル圓ニ內切スル時; 或ハ一ツニ外切シ, 一ツニ內切スル時ハ如何? 又二ツノ定マレル圓ガ內切スル時ハ如何?

26. 二等邊三角形ノ二ツノ相等シキ傍接圓ノ半徑ハ其ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ニ等シ.

27. D, E, F ヲ三角形 ABC ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ノ足トス; 三角形 ABC ノ垂心 O ガ其ノ內ニ在ル塲合 (即三角形 ABC ガ銳角ナル塲合) ニ於テハ O ハ三角形 DEF ノ內心; A, B, C ハ其ノ傍心ナリ. 三角形 ABC ガ鈍角又ハ直角ナル𪜈ハ如何?

28. 三角形ノ外心, 垂心, 重心, 及九點圓ノ中心ハ同一ノ直線ノ上ニ在リテ, 九點圓ノ中心ハ外心ト垂心ノ半途ニ在リ.

29. 九點圓ノ半徑ハ外接圓ノ半徑ノ半分ナリ.

30. 三角形 ABC ノ傍接圓ガ邊 BC ニ P 點ニ於テ切シ, 邊 AC, AB ノ延長ニ夫々 Q, R ニ於テ切ス; 然ル𪜈ハ AQ, AR ハ各三角形ノ周ノ半分ニ等シ; BP ト AB ノ和, 及 CP ト AC ノ和モ亦各之ニ等シ.

31. 直角三角形ノ內接圓ノ直徑ト斜邊ノ和ハ他

ノ二ツノ邊ノ和ニ等シ.

32. 圓ニ内接スル等邊直線形ハ又等角ナリ.

33. 圓ニ内接スル等角直線形ハ必ズ等邊ナリヤ?

34. 正多角形ハ,若シ其ノ邊ノ數ガ偶數ナレバ,對稱ノ中心ヲ有ツ;若シ邊ノ數ガ奇數ナレバ,對稱ノ中心ナシ.

35. n邊ノ正多角形ハ,nガ偶數ニテモ,奇數ニテモ,nノ對稱ノ軸ヲ有ツ.

36. 作圖題II,3ハ作圖題II,2ノ特別ノ場合ナリト云フ;之ヲ說明セヨ.

37. 與ヘラレタル直線ヲ斜邊トシテ,一ツノ鋭角ガ他ノ二倍ナル直角三角形ヲ作ルヿ. 斜邊ハ短キ邊ノ二倍ナルヿヲ證明セヨ.

38. 二ツノ對角線ヲ與ヘ菱形ヲ作ルヿ.

39. 與ヘラレタル角BAC内ノ與ヘラレタル點Oヲ過リ直線BOCヲ,BOガCOノ二倍ナル樣ニ引クヿ.

40. 與ヘラレタル角BACノ外ノ與ヘラレタル點Oヨリ,直線OBCヲ,OBガBCノ二倍ナル樣ニ引クヿ.

41. 一ツノ與ヘラレタル直線ノ上ノ一ツノ點ヘ,其ノ反對ノ側ニ在ル二ツノ與ヘラレタル點ヨリ引ケル二ツ

ノ直線ガ其直線ト相等シキ角ヲ爲ス樣ニ其點ヲ定ムルヿ.

42. 二ツノ與ヘラレタル直線ヨリ與ヘタラレル距離ニ在ル點ヲ定ムルヿ. 斯ノ如キ點ハ幾個有リヤ?

43. 問題152ノ方法ヲ用ヰズシテ,與ヘラレタル直線ヲ三ツニ等分スルヿ.

44. 直角ノ半分ニ等シキ角ヲ六ツニ等分スルヿ.

45. 一ツノ點ヲ過ル三ツノ與ヘラレタル直線有リ;一ツノ直線ヲ,此三ツノ間ニ在ル所ノ其ノ二ツノ部分ガ相等シキ樣ニ引クヿ.

46. 夫々二ツノ與ヘラレタル平行線ノ一ツノ上ニ在リテ,一ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ相等シク,且此點ニ於テ一直角ニ對スル樣ナル二ツノ點ヲ求ム.

47. 底邊,底邊ニ隣ル一ツノ角,及他ノ二ツノ邊ノ差ヲ與ヘ,三角形ヲ作ルヿ.

48. 底邊,底角ノ差,及他ノ二ツノ邊ノ差ヲ與ヘ,三角形ヲ作ルヿ.

49. 周及角ヲ與ヘ,三角形ヲ作ルヿ.

50. 一ツノ邊,及他ノ二ツノ邊ヘノ中線ヲ與ヘ,三

角形ヲ作ルヿ.

51. 底邊, 頂角, 及他ノ二ツノ邊ノ差ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルヿ.

52. 頂角, 其ノ一ツノ邊, 及之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線ヲ與ヘ, 三角形ヲ作ルヿ.

53. 頂角ガ各ノ底角ノ四倍ナル二等邊三角形ヲ作ルヿ.

54. 正方形ノ內ニ正三角形ヲ, (甲) 一ツノ頂點ガ正方形ノ一ツノ邊ノ中點ニ在ル樣ニ; (乙) 一ツノ頂點ガ正方形ノ一ツノ頂點ニ在ル樣ニ; 作ルヿ.

55. 外切スル二ツノ圓有リ; 其ノ切點ヲ過リ與ヘラレタル長サノ直線ヲ, 兩端ガ各一ツノ圓周上ニ在ル樣ニ引クヿ.

56. 相切スル相等シキ二ツノ圓ノ周ノ上ニ兩端及二ツノ三等分點ガ有ル直線ヲ引クヿ.

57. 二ツノ圓ノ交點ヲ過リ, 各ノ圓周上ニ一ツヅヽ端ガ有ル最大ナル直線ヲ引クヿ.

58. 與ヘラレタル圓周上ノ一ツノ點ニ於テ之ヘ切線ヲ, 先ツ其ノ中心ヲ見出サズシテ, 引クヿ.

59. 相交ラザル二ツノ圓ノ周ノ上ニ端ガ有ル最長キ及最短キ直線ヲ引クヿ.

60. 與ヘラレタル直徑ニ平行ニ, 與ヘラレタル長サノ弦ヲ引クヿ.

61. 與ヘラレタル點ヲ中心トシ與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クヿ　通例二ツノ解有ルヿヲ證明セヨ. 唯一ツノ解有ル場合有リヤ?

62. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 與ヘラレタル圓周上ノ與ヘラレタル點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫クヿ.

63. 二ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 中心ハ與ヘラレタル直線ノ上ニ在ル圓ヲ畫クヿ.

64. 與ヘラレタル直線ニ與ヘラレタル點ニ於テ切シ且與ヘラレタル圓ニ切スル圓ヲ畫クヿ.

65. 與ヘラレタル點ヲ過リ一ツノ直線ヲ, 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ之ヘ引ケル垂線ガ其ノ反對ノ側ニ在リテ相等シキ樣ニ引クヿ.

66. 夫々三ツノ與ヘラレタル點ノ一ツヲ中心トシ, 相切スル三ツノ圓ヲ畫クヿ.

III

1. 定理 III, 6 ハ 定理 III, 10 ニ 於テ 角 BAC ヲ 平角 ト ナシタル 極限ノ 場合 ナリ ト 云フ 之 ヲ 說明セヨ.

2. 定理 III, 7 ハ 定理 III, 11 ノ 極限ノ 場合 ナリ ト 云フ: 之 ヲ 說明セヨ.

3. 定理 III, 13 ハ 定理 III, 12 ノ 極限ノ 場合 ナリ ト 云フ: 之 ヲ 說明セヨ.

4. 定理 III, 13 ニ 於テ, D 點 ヨリ AB ニ 垂線 ナル 直線 DE ヲ 任意ノ 長サ ニ 引キ, AE, BE, CE ヲ 結ヒ付ケ, III, 12 及 9 ニ 依リテ 此 定理 ヲ 證明セヨ.

5. III, 14, 系 2 ノ 逆 ヲ 陳ヘ, 之 ヲ 證明セヨ.

6. 四邊形 ノ 對角線 ガ 互ニ 垂線ナレハ, 一 双 ノ 相對スル 邊 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ 他ノ 双 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ.

7. 與ヘラレタル 直線 ヲ 分チタル 二ツノ 分 ノ 包ム 矩形 ハ 二ツノ 分 ガ 相等シキ 時 ニ 最大ナリ.

8. 與ヘラレタル 直線 ヲ 內分シタル 二ツノ 分 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ 二ツノ 分 ガ 相等シキ 時 ニ 最小ナリ.

9. 三角形 ノ 二ツノ 邊 ノ 上ノ 正方形 ノ 差 ハ 其二, ノ 邊 ノ 出會フ 頂點 ヨリ 底邊 ヘ 引クル 垂線 ノ 足 ガ 之 ヲ 分ツ 二ツノ 分 ノ 上ノ 正方形 ノ 差 ニ 等シ.

10. 四邊形 ノ 邊 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ 其ノ 對角線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ヨリ 對角線 ノ 中點 ヲ 結ヒ付クル 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 四倍 ダケ 大ナリ.

11. 四邊形 ノ 對角線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ 相對スル 邊 ノ 中點 ヲ 結ヒ付クル 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ノ 二倍ナリ.

12. 三角形 ノ 重心 ヨリ 其ノ 各ノ 頂點 ヘ 引クル 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ノ 三倍 ハ 三ツノ 邊 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ.

13. P ハ 三角形 ABC ノ 邊 BC ノ 上ノ 點 ニシテ, CP ハ BP ノ 二倍 ニ 等シ: 然ル時ハ AB ノ 上ノ 正方形 ノ 二倍 ト AC ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ BP ノ 上ノ 正方形 ノ 六倍 ト AP ノ 上ノ 正方形 ノ 三倍 トノ 和 ニ 等シ.

14. 任意ノ 點 ヨリ 三角形 ノ 各ノ 頂點 ヘ 引クル 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ 其ノ 重心 ヨリ 各ノ 頂點 ヘ 引クル 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 其 點 ヨリ 重心 ヘ 引クル 直線 ノ 上ノ 正方形 ノ 三倍 ヲ 加ヘタル モノ ニ 等シ.

15. 同シ 底邊 (叉ハ 同一 直線 上ノ 相等シキ 底邊) ノ 上ニ 其ノ 同シ 側 ニ 在ル 所ノ 同シ 高サ ノ 二ツノ 三角形 ノ 邊 (或ハ 其ノ 延長) ガ 底邊 ニ 平行ナル 直線 ヨリ

截リ取ル部分ハ相等シ.

16. 三角形ノ二ツノ邊ノ和及差ノ包ム矩形ハ底邊,及底邊ノ中點ト頂點ヨリ底邊ヘノ垂線ノ足トノ間ニ在ル部分ノ包ム矩形ノ二倍ニ等シ.

17. OA, OB ハ中心 C ナル圓外ノ點 O ヨリ之ヘ引ケル二ツノ切線ナリ; AB ノ中點 D ヲ過リ弦 PDQ ヲ引ケハ, OC ハ角 POQ ヲ二等分ス.

18. 問題 17 ニ於テ, O ヲ過リ弦 ORS ヲ引ケハ, AB ハ角 RDS ヲ二等分ス.

19. 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル三ツノ直線ガ同一ノ點ヲ過リ, 此點ニ於テ相等シキ矩形ヲ包ム分ニ分タルヽトキハ, 此點ハ垂心ナリ.

20. 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ, 其ノ二ツノ分ノ包ム矩形ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ樣ニ內分及外分スルコ. 與ヘラレタル正方形ノ大サニ如何ナル制限有リヤ?

21. 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ, 其ノ二ツノ分ノ上ノ正方形ノ差ガ與ヘラレタル正方形ニ等シキ樣ニ內分及外分スルコ.

22. 平行四邊形ヲ與ヘラレタル點ヲ過ル直線ニ依リテ二等分スルコ.

23. 與ヘラレタル直線ノ上ニ, 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ノ上ノ正方形ノ和ガ最小ナル點ヲ見出スコ.

IV

1. $A:B::C:D::E:F$ .... ナレハ,

(i) $A:B::A-C:B-D$;

(ii) $A:B::mA \pm nC:mB \pm nD$;

(iii) $A:B::mA+nC+pE+\ldots:mB+nD+pF+\ldots$

2. $A:B>P:Q$ ナレハ, $A+B:B>P+Q:Q$.

3. $A:B>P:Q$ ナレハ, $A><B$ ニ從テ, $A\sim B:B><P\sim Q:Q$.

4. $A:B::P:Q$ ナレハ,

(i) $A+B:A\sim B::P+Q:P\sim Q$; (ii) $A:A-B::P:P-Q$

5. $A:C::P:R$ 及 $B:C::Q:R$ ナレハ, $A+B:C::P+Q:R$.

6. $A:B$ 及 $C:D$ ノ相乘比ガ等比ナレハ, $A:B$

トC:D ハ各他ノ反比ナリ.

7. m, n ガ任意ノ數ナレハ, $m:n$ ノ二乘比ハ $m^2:n^2$ ナリ; 三乘比ハ $m^3:n^3$ ナリ.

8. m, n, p, q ガ任意ノ數ナレハ, $m:n$ 及 $p:q$ ノ相乘比ハ $mp:nq$ ナリ.

V

1. 三角形 ABC 内ノ點 O ヲ過リ, 直線 AO, BO, CO ヲ引キ, 之ニ對スル邊ト夫々 X, Y, Z ニ於テ交ラシムルトキハ, 三角形 AOB, AOC ノ比ハ BX, CX ノ比ニ等シ.

2. APB ハ直徑 AB, 中心 C ナル半圓; N ハ CB 上ノ任意ノ點ニシテ, AB ヲ T マデ延長シ,

CT : AC : : AC : CN ナリトス; T ヨリ引クル切線ガ半圓ニ P ニ於テ切スレハ, 角 CNP ハ直角ナリ.

3. 二ツノ平行線 AB, A′B′ ガ夫々 C 及 C′ 點ニ於テ同シ比ニ二ツ共ニ内分サレ或ハ二ツ共ニ外分サルヽトキハ, AA′, BB′ CC′ ハ同一ノ點ヲ過ル.

4. 直線 DEF ガ三角形ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, F 點ニ於テ交リ, AB 及 AC ト相等シキ角ヲ爲ス: 然ルトキハ BD : CD : : BF : CE.

5. D ハ三角形 ABC ノ邊 AC 上ノ點, E ハ邊 AB 上ノ點ナリ: BD, CE ガ各他ヲ比 4 : 1 ニ分ツトキハ, D, E ハ夫々 CA, BA ヲ比 3 : 1 ニ分ツ.

6. 直線 AD ハ三角形 ABC ノ角 BAC ヲ二等分シ, 邊 BC ト D ニ於テ交リ, 直線 DE, DF ハ夫々角 ADB ADC ヲ二等分シ, 邊 AB, AC ト夫々 E, F 點ニ於テ交ル; 三角形 BEF ト三角形 CEF ノ比ハ BA ト AC ノ比ニ等シ

7. 圓ニ内接スル六邊形ノ相對スル邊ヲ延長シテ交ハラシムルトキハ, 三ツノ交點ハ一直線ノ上ニ在リ.

8. 三角形 ABC ノ頂點 A ニ於テノ内角或ハ外角ヲ二等分スル直線 AD ガ底邊 BC ト D ニ於テ交ル: AD ノ上ノ正方形ハ邊 AB, AC ノ包ム矩形ト底邊ノ分 BD, CD ノ包ム矩形ノ差ニ等シ.

9. 一ツノ三角形ノ外接圓ノ直徑及内接圓ノ半徑ノ包ム矩形ハ内接圓ノ中心ヲ過ル外接圓ノ弦ノ分(中心ニ於テ分タレタル)ノ包ム矩形ニ等シ.

10. 定理 V, 19 ノ逆ハ如何?

11. 問題 224 ノ逆二ツ有リ; 之ヲ陳ヘヨ: 何レモ必ズ眞ナリヤ?

12. III, 9 ヲ用ヰテ, 定理 V, 21 ヲ證明セヨ.

13. 圓外ノ點ヨリ切線及割線ヲ引キ, 又同シ點ヨリ切線ニ等シキ長サノ直線ヲ任意ノ方向ニ引ケハ, 此直線ハ其ノ端ヨリ割線ノ交點ヘ引ケル直線ガ圓ト交ル所ノ點ヲ過ル弦ニ平行ナリ.

14. ABC ハ正三角形, P ハ其ノ外接圓ノ周上ニ BC ノ A ニ反對ノ側ニ在ル點ナリ: PA ノ上ノ正方形ハ PB, PC ノ包ム矩形及 BC ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

15. 鋭角三角形 ABC ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ書キ, AB 邊ノ上ニ AD ヲ A ヨリノ切線ニ等シク取リ, DE ヲ AB ニ垂線ニ引キ, AC ノ延長ト E ニ於テ交ラシムルトキハ, 三角形 ABC, ADE ハ相等シ.

16. 三角形 ABC ノ邊上ニ夫々 D, E, F 點ヲ BD : DC :: CE : EA :: AF : FB :: 1 : 2 ナル樣ニ取ル: 三角形 ABC ト DEF ノ比ハ如何?

17. 正三角形内ノ一ツノ點ヨリ三ツノ邊ヘ引ケル

垂線ノ和ハ其ノ高サニ等シ.

18. 問題 239 ニ於テ, P 點ノ軌跡ガ圓周ナレハ, Q 點ノ軌跡モ亦圓周ナリ.

19. 一ツノ點ヨリ一ツノ二等邊三角形ノ相等シキ邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ガ同シ點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ノ上ノ正方形ニ等シケレハ, 斯ノ如キ點ノ軌跡ハ相等シキ兩邊ニ底邊ノ端ニ於テ切スル圓周ナリ.

20. 圓周上ノ一ツノ點ヨリ之ニ內接スル四邊形ノ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ハ相等シ; 此定理及其ノ逆ヲ證明セヨ.

21. 圓周上ノ二ツノ與ヘラレタル點ノ各ヲ過リ, 平行ニシテ, 互ト與ヘラレタル比ヲ有スル弦ヲ引クコ.

22. 一ツノ點ニ於テ出會フ三ツノ直線有リ; 一ツノ直線ヲ, 其三ツノ直線ガ之ヨリ截リ取ル二ツノ部分ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニ引クコ.

23. O, A, B, C, D ハ問題 242 ニ於テ述タル點ナリ; OE ハ其ノ上ノ正方形ガ矩形 OA, OD ニ等シキ直線ナリ; O ヲ中心トシ, 半徑 OE ヲ以テ圓ヲ書キ, P ヲ其圓周上ノ任意ノ點トスレハ, 角 APB, CPD ハ相等シ.

24. 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線ヲ引ケハ, 一ツノ邊ト他ノ一ツノ邊ノ比ハ其ノ垂線ノ比ノ反比ニ等シ.

25. 一ツノ直線ガ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 A', B', C' 點ニ於テ交レハ, 三ツノ比 $AB' : B'C$, $CA' : A'B$, $BC' : C'A$ ノ相乘比ハ等比ナリ.

26. 三角形ノ邊 BC, CA, AB 或ハ其ノ延長ノ上ニ各一ツノ點 A', B', C' 有リ; 但シ A', B', C' ノ中, 二ツダケ邊ノ上ニ在リテ, 一ツハ延長ノ上ニ在ルカ, 或ハ皆延長ノ上ニ在リトス: 而シテ比 $AB' : B'C$, $CA' : A'B$ $BC' : C'A$ ノ相乘比ガ等比ナレハ, 三ツノ點 A', B', C' ハ一線上ニ在リ.

27. 三角形ノ外角ヲ二等分スル直線ガ邊ト交ル三ツノ點ハ一直線上ニ在リ.

28. 二ツノ三角形 ABC, $A'B'C'$ ノ頂點ト頂點ヲ結ヒ付クル直線 AA', BB', CC' ガ同一ノ點ヲ過ルトキハ, 相對應スル邊ノ交點 P, Q, R ハ一直線上ニ在リ: 逆ニ, 二ツノ三角形ノ邊ノ交點 P, Q, R ガ一直線上ニ在レハ, 相對應スル頂點ヲ結ヒ付クル直線ハ同一ノ點ヲ過ル.

29. 任意ノ點 O ヲ直線形ノ頂點 A, B, C,... ニ結ヒ付ケ, OA, OB, OC,.. 上ニ a, b, c,... 點ヲ $Oa : OA :: Ob : OB :: Oc : OC$...... ナル樣ニ取ルトキハ, 形 abc... ハ形 ABC... ニ相似ナリ.

30. O ハ定マレル點ナリ; P ハ與ヘラレタル圓周上ノ點ナリ: OQ ハ OP ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ爲シ, 之ト與ヘラレタル比ニ等シキ比ヲ有ス; Q 點ノ軌跡ヲ求ム.

31. OA, OB ハ中心 C ナル圓ヘ引クル切線, OPQ ハ O ヲ過リ圓ト P, Q ニ於テ交リ, AB ト R ニ於テ交ル任意ノ直線ナリ; N ガ AB 及 OC ノ交點ナレハ, NR ハ角 PNQ ヲ二等分スルコトヲ證明シ, 因リテ直線 PQ ガ O 及 R ニ於テ調和ニ分タルヽコトヲ證明セヨ.

32. 定マレル點 O ヨリ圓ト P, Q ニ於テ交ル任意ノ直線ヲ引キ, R ヲ P, Q ニ付テ O ノ共軛點トス; R ノ軌跡ヲ求ム.

附錄。

I

量ヲ計ルコニ付テ.

或ル量ヲ計ルトハ,之ト同シ種類ノ一ツノ量ヲ單位ト定メ,計ラントスル所ノ量ヲ之ト比較シ其ノ比ヲ求ムルナリ. 計ラントスル所ノ量ヲXヲ以テ表ハシ,單位ヲUヲ以テ表ハセハ,Xヲ計ルトハ即比X:Uヲ求ムルナリ. 然ルニXトUガ通約ス可キ量ナラザル𪜈ハ,此比ハ數ヲ以テ嚴正ニ表ハスヲ得ズ: 例ヘハ,一ツノ正方形ノ邊及對角線ハ通約ス可カラザル量ナリ(IV, 戊); 故ニ若シ其ノ邊ガ長サノ單位ニ等シキカ或ハ長サノ單位ト通約ス可キモノナレハ,對角線ト單位ノ比ハ嚴正ニ數ヲ以テ表ハス能ハザルナリ. 而シテ二ツノ任意ノ量ヲ取レハ通例通約ス可カラザルモノナリ

(240 丁); 故ニ計ラントスル量ガ單位ト通約ス可カラザルヿハ極メテ多ク, 總テ斯ノ如キ場合ニ於テハ其量ト單位ノ比ハ嚴正ニ數ヲ以テ示スヿ能ハザルナリ. 然レドモ實地ニ量ヲ計ルニハ必ズシモ嚴正ノ比ヲ要セズ; 其ノ目的ニ依リテ精粗ノ差有ル可シト雖唯近算ヲ以テ足レリトス. 例ヘバ, 上ノ例ニ於テ, 10B ハ 14A ヨリ大ニシテ, 15A ヨリ小ナリ (242 頁ヲ見ヨ), 今若シ假ニ 10B = 14A トセバ, B : A ハ 14 : 10 ニ等シ (IV, 6); 故ニ A ガ 1 ナレバ, B ハ 1·4 ナリ: 又 100 B ハ 141 A ト 142 A ノ間ニ在リ, 若シ假ニ 100 B = 141 A トセバ, B : A ハ 141 : 100 ニ等シク, A ガ 1 ナレバ, B ハ 1·41 ナリ: 又 1000 B ハ 1414 A ト 1415 A ノ間ニ在リ, 若シ假ニ 1000 B = 1414 A トセバ, B : A ハ 1414 : 1000 ニ等シク, A ガ 1 ナレバ, B ハ 1·414 ナリ. 故ニ A ガ 1 尺ナレバ, B ヲ 1·4 尺即 1 尺 4 寸トスル トキハ其ノ誤リ 1 分 4 厘餘ナリ; B ヲ 1·41 尺即 1 尺 4 寸 1 分トスル トキハ其ノ誤リ 4 厘餘ナリ; B ヲ 1·414 尺トスル トキハ其ノ誤リ僅ニ 2 毫强ナリ: 而シテ尙ホ精密ナルヿヲ欲スレバ, 何程ニテモ精密ナルヲ得; 然レドモ日常一般或ハ通常ノ工藝ニ於テハ厘位マデ正シキヲ要スルヿハ甚少ク,

學術用ノ外ハ毫以下ノ數ヲ要スルヿハ決シテ無シト云テ可ナリ. 故ニ B : A ヲ 14/10 或ハ 141/100 或ハ 1414/1000 トセバ其ノ眞ノ比トノ差ハ實地ニ於テハ論スルニ足ラザル小數ナリ. 且厘以下ノ長サヲ計ルハ通常ノ度ヲ以テスル能ハズ, 特別ノ器械ヲ要ス: 萬國度量衡同盟會ノ實驗場ニ於テハ 1 ミリメートル (我 3 厘 3 毫) ノ千分ノ一マデノ差ヲ檢シ得ル裝置有リト云フ: 是等ハ先ツ現今人ノ直接ニ計リ得ル極度ナラン. 上ニ述ヘタルハ長サナレドモ其他ノ量ニ於テモ亦同樣ナリ.

故ニ眞ノ比ヲ數ヲ以テ表ハス能ハザル トキハ, 各量ヲ計ルノ目的ニ從テ多少眞ノ比ニ近キ數ヲ得ルヲ以テ足レリトス: 之ニ依リテ實地ニ於テハ別段差支無キナリ.

量ヲ計ルニ單位ノ大小有ルモ亦此理由ニ基キ, 各般ノ事業ニ於テ近算ニ精粗ノ別有ルニ由リ便宜ノ爲ニ之ヲ設ク. 例ヘバ, 天文學者ガ恒星ノ距離ヲ計ルニ地球ト太陽ノ距離ヲ單位トスルハ其位ヨリ精密ナル測算ヲ爲ス能ハザレバ

ナリ. 一國内ノ距離ハ里ヲ單位トシ, 尙ホ近キ場所ナレハ, 何里何町ト云ヒ, 町ナル小單位ヲ設ク. 上ノ例ニ於テ $B:A$ ヲ 14/10 トスルハ寸ヲ單位トシ, 寸以下ハ端數トシテ切リ捨ルニ同シ; $B:A$ ヲ 1414/1000 トスルハ厘ヲ單位トシ, 毫以下ヲ切リ捨ルナリ. 物理學者ハ光ノ波ノ長サヲ計ルニハテンスメートル即 1 メートルノ百億分ノ一ヲ單位トス. 通運會社ニ於テ荷物ノ重サヲ計ルニ貫ヲ單位トシ, 何貫何百目ト云フ; 貫ノ十分ノ一即百目以下ハ半端トシテ之ヲ計ヘズ; 牛肉屋ハ一斤ヲ單位トシ, 四半斤位ヨリ以下ハ之ヲ計ルノ必要有ラザルナリ: 郵便局ニ於テハ匁ヲ以テ切リ上ク: 藥屋ハ通例分位ニ止リ, 劇藥或ハ貴重ナルモノハ厘, 毫位マデニ至ル: 萬國度量衡同盟會ノ實驗場ニ於テ同盟各國ニ配分スル標準キログラム (凡ソ我二百六十七匁弱) ヲ檢査スルニハミリグラム (キログラムノ百萬分ノ一) ノ千分ノ一ニ及フ. 面積ニ付テ云ヘハ, 一國ノ面積ヲ示スハ方里ニ止ル可ク; 區役所ニテ建坪ヲ調フルニハ何坪何合何勺ニ至ル; 等ナリ.

以上說明シタル所ヲ約言スレハ, 一ツノ量ヲ計ルハ二ツノ事ヲ含有ス: 第一, 同シ種類ノ適宜ノ量ヲ單位ト定ムルコ; 第二, 計ラントスル量ト單位ノ比ヲ, 其ノ目的ニ要スル丈ケノ近算ニ依リテ數ヲ以テ示スコ.

一ツノ線ノ長サガ l ナリト云フハ, 其線ト長サノ單位ノ比ガ $l:1$ ナリト云フコノ略ナリ.

II

直線形ノ面積ニ付テ.

面積ヲ計ルニハ, 單位ハ通例長サノ單位ノ上ノ正方形ノ面積トス. 1尺ガ長サノ單位ナレバ, 方尺即邊ガ 1 尺ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トス; 1 間ガ長サノ單位ナレハ, 坪即邊ガ 1 間ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トス; 1 里ガ長サノ單位ナレハ, 方里即邊ガ 1 里ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トス.

矩形ノ面積. 矩形ノ底邊 B ノ長サヲ b トセヨ, 即底邊 B ト長サノ單位 L ノ比ヲ $b/1$

即 b ナル數字ニ由リテ吾々ガ要スル丈ケ精密ニ表ハシタリトセヨ; 矩形ノ高サ H ノ長サヲ h トセヨ:

然レバ　$B=bL$ 及 $H=hL$: IV, 6.

矩形ノ面積 M ヲ m トセヨ, 即面積 M ト面積ノ單位 A (各ノ邊ガ L ニ等シキ正方形ノ面積) ノ比ヲ $m/1$ 即 m ナル數字ニ由リテ吾々ガ要スル丈ケ精密ニ表ハシタリトセヨ;

然レバ　$$M=mA$$ IV, 6.

V, 19 ニ依リテ, 比 $M:A$ ハ比 $B:L$ 及比 $H:L$ ノ相乘比ナリ;

故ニ　$m:1$ ハ $b:1$ 及 $h:1$ ノ相乘比ニシテ,

$m:1$ ハ $bh:1$ ニ等シキコトヲ證明スルヲ得; (雜問 IV, 8.)

故ニ　$m=bh$,

即矩形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ底邊及高サノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シ.

求積術ニ於テ, 矩形ノ面積ハ底邊ト高サノ積ニ等シト云フハ此事ノ略ナリ.

正方形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ邊ノ長サヲ表ハス數ノ二乘ニ等シ.

平行四邊形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ底邊及

高サノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シ. III, 1, 系 1.

三角形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ底邊及高サノ長サヲ表ハス數ノ積ノ半分ニ等シ. III, 2.

平行四邊形 (或ハ三角形) ノ面積ヲ表ハス數 (三角形ナレバ其ノ二倍) ヲ其ノ底邊或ハ高サノ長サヲ表ハス數ヲ以テ除スレバ, 其ノ高サ或ハ底邊ノ長サヲ表ハス數ヲ得ルコト明ナリ.

正方形ノ面積ヲ表ハス數ノ平方根ハ其ノ邊ノ長サヲ表ハス數ナリ.

正多角形ノ面積ヲ表ハス數ハ其ノ周ノ長サヲ表ハス數ト內接圓ノ半徑ノ長サヲ表ハス數ノ積ノ半分ナリ.

何トナレバ, 正多角形ハ (II, 28 ノ圖ヲ用ヰル) 三角形 AOB, BOC, COD 等ノ和ニ等シ; 故ニ其ノ面積ヲ表ハス數ハ此等ノ三角形ノ面積ヲ表ハス數ノ和ニ等シ: 今 OK, OL, OM, 等ハ內接圓ノ半徑ナリ; 其ノ長サヲ表ハス數ヲ r トセヨ: AB, BC, CD, 等ハ相等シ, 其ノ長サヲ表ハス數ヲ b トセヨ; 其ノ和ハ周ナリ; 周ノ長サヲ表ハス數ヲ p トセヨ: 然レバ面積ヲ表ハス數ハ

$\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rb+\dots\dots\dots\dots=\frac{1}{2}rp.$

任意ノ多角形ノ面積ヲ表ハス數ハ其形ヲ數多ノ三角形ニ分チ其ノ面積ヲ表ハス數ノ和ナリ; 或ハ III, 作圖題 5 ニ由リテ, 其形ニ等シキ三角形ヲ作リ, 其ノ面積ヲ表ハス數ヲ求ムルモ可ナリ.

III

極限ニ付テ.

1. 二ツノ量 A, P 有リ; P ハ或ル定則ニ從テ其ノ大サヲ變シ, 常ニ漸々 A ニ等シキコニ近ツキ, A ト P ノ差ヲ何程ニテモ小クスルヲ得ル時ハ終リニ P ハ A ニ等シク ナル可シ.

何トナレハ, 若シ終リニ P ガ A ニ等シカラザレハ, 其ノ差ヲ D トセヨ; 然レハ吾々ハ P ト A ノ差ヲ D ヨリ小クスル能ハズ; 是レ假設ニ戻ル: 故ニ終リニ P ハ A ニ等シカラザルヲ得ズ.

斯ノ如キ場合ニ於テ, A ヲ P ノ極限ト稱ス.

2. 二量 P, Q 有リ, 或ル定則ニ從テ其ノ大サヲ變ス; 然レト其ノ變スル際常ニ互ト同一ノ比ヲ有ス: 然ル時ハ P ノ極限 A ト Q ノ極限 B ノ比ハ亦此比ニ等シカル可シ.

何トナレハ, $A=P+X,\ B=Q+Y$ トセヨ;
假設ニ依リテ, X, Y ハ何程ニテモ小クスルヲ得;
今若シ A : B ガ常ニ同一ナル比 P : Q ニ等シカラザレハ, A : B ヲ P : Q+Z ニ等シトセヨ;
即 $P+X : Q+Y :: P : Q+Z;$
Y ハ何程ニテモ小クスルヲ得ルヲ以テ, Y ヲ Z ヨリ小ナル樣ニセヨ;
然レハ $Q+Y$ ハ $Q+Z$ ヨリ小ナリ;
故ニ $P+X$ ハ P ヨリ小ナリ;
是レ固ヨリ然ル能ハズ;
故ニ A : B ハ P : Q+Z ニ等シキ能ハズ;
同樣ニ A : B ハ P : Q−Z ニ等シキ能ハズ;
故ニ A : B ハ P : Q ニ等シ.

IV

圓周ト其ノ直徑ノ比ニ付テ.

1. 圓ノ弧ハ之ニ對スル弦ヨリ大ナルヿハ公理的トス: 故ニ圓ニ内接スル正多角形ノ周ハ圓周ヨリ小ナリ, 而シテ邊ノ數ヲ二倍スレハ, 其多角形ノ周ハ元ノ多角形ノ周ヨリ大クシテ, 圓ノ周ニ等シキヿニ近シ: 邊ノ數ヲ二倍スル毎ニ周ハ常ニ圓周ニ等シキヿニ近ツキ, 吾々ハ邊ノ數ヲ多クスレハ, 其ノ圓周トノ差ヲ何程ニテモ小クスルヲ得; 故ニ内接形ノ邊ノ數ヲ究リ無ク多クシタル時, 其ノ周ノ極限ハ圓周ナリ.

同樣ニ, 一ツノ點ヨリ圓ヘ引クル二ツノ切線ハ切點ノ間ノ弧ヨリ大ナルヿハ公理的トス: 然レハ圓ニ外接スル正多角形ノ周ハ圓周ヨリ大ナリ, 而シテ其ノ邊ノ數ヲ究リ無ク多クシタル時, 其ノ周ノ極限ハ圓周ナリ.

2. 二ツノ圓ノ周ノ比ハ其ノ半徑ノ比ニ等シ.

各ノ圓ニ内接スル n 邊ノ正多角形ヲ作レハ其ノ周ノ比ハ, n ガ幾ツナルモ, 常ニ圓ノ半徑ノ比ニ等シ (問題 236). 故ニ n ヲ究リ無ク多クシタル時ノ極限ナル圓周ノ比モ亦此比ニ等シ.

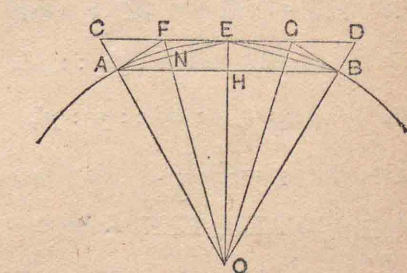
故ニ圓周ト直徑ノ比ハ何レノ圓ニテモ常ニ

同一ナリ. 此比ヲ $\pi:1$ ヲ以テ表ハス (π ハギリシヤ文字ニシテ, パイト讀ム) 而シテ圓周ト直徑ハ通約ス可カラザル量ナルヲ以テ (此ノ證明ハ初等幾何學ニ適セザルヲ以テ, 此ニ揭ケズ), 此比ハ嚴正ニ數ヲ以テ表ハス能ハザルモノナリ. 然レ𪜈其ノ近算ノ數即 π ノ近算ノ値ハ種々ノ方法ニ依リテ頗ル精密ニ計算サレタリ. 下ニ其方法ノ一ツヲ揭ク.

3. 一ツノ圓ノ内接及外接正多角形ノ周ヲ與ヘ, 邊ノ數ガ其ノ二倍ナル内接及外接正多角形ノ周ヲ計算スルヿ.

AB ヲ中心 O ナル圓ニ内接スル正多角形ノ一邊トシ, CD ヲ之ニ外接スル同シ數ノ邊ノ正多角形ノ一邊ニシテ, 弧 AB ノ中點 E ニ於テノ切線ナリトス.

CA, DB ガ中心 O ニ於テ交ルヿハ容易ニ證明スルヲ得; AE, BE ヲ結ヒ付クヨ; 然レハ AE ハ邊ノ數ガ二倍ナル内接形ノ一邊ナリ;



切線 AF, BG ヲ 引ク; 然レハ FG ハ 邊 ノ 數 ガ 二倍ナル 外接形 ノ 一 邊 ナルコ ハ 容易ニ 證明スル ヲ 得:
與ヘラレタル 外接形 及 內接形 ノ 周 ヲ 夫々 P, Q トシ, 邊 ノ 數 ガ 二倍ナル 外接形 及 內接形 ノ 周 ヲ P′, Q′ トセハ; OC ハ 與ヘラレタル 外接形 ニ 外接スル 圓 ノ 半徑 ナル ヲ 以テ, $P : Q :: OC : OE$; 問題 236.
然ルニ OF ハ 角 COE ヲ 二等分スル ヲ 以テ,

$$OC : OE :: CF : FE; \qquad \text{V, 14.}$$

故ニ $\qquad P : Q :: CF : FE;$

故ニ $\qquad P+Q : 2Q :: CF+FE : 2FE;$

即 $\qquad :: CE : FG;$

而シテ 元ノ 邊 ノ 數 ヲ n トセハ, $2n.CE = P$,

又 $\qquad 2n.FG = P'$;

故ニ $\qquad P+Q : 2Q :: P : P'$;

今 p, q, p', q' ヲ P, Q, P′, Q′ ノ 長サ ヲ (吾々 ガ 要スル 丈ケ 精密ニ) 表ハス 數 トセハ,

$$pL + qL : 2qL :: pL : p'L;$$

即 $\qquad p+q : 2q :: p : p'$,

故ニ $\qquad p' = \dfrac{2pq}{p+q}. \qquad \text{(i)}$

又 三角形 AEH, EFN ハ 相似ナル ヲ 以テ,

$$AH : AE :: EN : EF;$$

故ニ $\qquad Q : Q' :: Q' : P'$;

故ニ $\qquad q : q' :: q' : p'$;

故ニ $\qquad q' = \sqrt{p'q}. \qquad \text{(ii)}$

故ニ p, q ガ 與ヘラレタル トキハ, (i) ニ 依リテ p' ヲ 計算シ, 夫ヨリ (ii) ニ 依リテ q' ヲ 計算スル ヲ 得.

4. 直徑 ガ 長サ ノ 單位 ニ 等シキ 圓 ノ 周 ヲ 計算スルコ.

(此 圓周 ヲ 表ハス 數 ハ 即 π ノ 值 ナリ.)

直徑 ガ 1 ナル ヲ 以テ, 外接正方形 ノ 周 ヲ 表ハス 數 ハ 4 ナリ;
內接正方形 ノ 周 ヲ 表ハス 數ハ $2\sqrt{2}$ 即 2·8284271.... ナリ;
故ニ 上ノ (i) 及 (ii) 式 ニ 於テ $p=4$, $q=2{\cdot}8284271$ トスレハ, $p'=3{\cdot}3137085$, $q'=3{\cdot}0614675$ ヲ 得;
是レ 外接 及 內接 正八邊形 ノ 周 ヲ 表ハス 數 ナリ;
是レヨリ シテ, 續ケテ (i) 及 (ii) 式 ヲ 用井テ, 正十六邊形, 正三十二邊形, 等 ノ 周 ヲ 計算スル ヲ 得; 即 次ノ 表 ノ 如シ (但シ 何レモ 近算ナル ハ 勿論ナリ):—

邊ノ數	外接正多角形ノ周	內接正多角形ノ周
4	4·0000000	2·8284271
8	3·3137085	3·0614675
16	3·1825979	3·1214452
32	3·1517249	3·1365485
64	3·1441184	3·1403312
128	3·1422236	3·1412773
256	3·1417504	3·1415138
512	3·1416321	3·1415729
1024	3·1416025	3·1415877
2048	3·1415951	3·1415914
4096	3·1415933	3·1415923
8192	3·1415928	3·1415926

而シテ圓周ハ內接正多角形ノ周ヨリ大ニシテ，外接正多角形ノ周ヨリ小ナリ；故ニ直徑ガ1ナル圓ノ周ハ3·1415926ヨリ大ニシテ，3·1415928ヨリ小ナリ.

故ニ π ノ値ハ大概3·1415927トシテ可ナリ；

尙ホ精密ニ之ヲ計算スレハ，

$$\pi=3·14159265358979 32.........$$

ヲ得.

5. 半徑ガ r ナル圓ノ周ハ $2\pi r$ ナリ.

V

圓ノ面積ニ付テ.

附錄 IV, 1 ト同樣ニ，內接及外接正多角形ノ面積ノ極限(邊ノ數ヲ究リ無ク多クシタル時ノ)ハ圓ノ面積ナリ；

而シテ外接正多角形ノ面積 M ヲ表ハス數ヲ m トセハ

$$m=\tfrac{1}{2}rp;$$

邊ノ數ハ幾ツナルモ，$m:p$ ハ常ニ $\dfrac{r}{2}$ ニ等シ；

m ノ極限ハ圓ノ面積ヲ表ハス數 n ナリ；

p ノ極限ハ圓ノ周ヲ表ハス數 c ナリ；

故ニ極限ノ理ニ依リテ，$n/c=r/2$ ナリ；

即 $n=\tfrac{1}{2}cr;$

而シテ $c=2\pi r;$

故ニ $n=\pi r^2.$

二ツノ圓ノ面積ノ比ハ其ノ半徑ノ二乘比ニ等シ.

圓ノ扇形ノ面積ヲ表ハス數 s ヲ計算スルニハ、

l ヲ其ノ弧ノ長サヲ表ハス數トセヨ;

然レバ　$s : n :: l : 2\pi r;$　　V, 5, 系.

故ニ　$s = \dfrac{nl}{2\pi r} = \frac{1}{2}lr.$

同　三十一年三月十八日發行

同　三十一年三月十五日訂正印刷

同　三十一年三月十四日文部省檢閱濟

同　廿八年三月十五日發行

同　廿八年三月十一日訂正印刷

同　廿二年四月廿日合本　文部省再版

同　廿二年一月十日卷貳

明治廿一年九月廿日卷壹　文部省出版

（定價金八拾五錢）

編纂者　理學博士　菊池大麓
東京府平民
東京市本鄉區弓町一丁目十四番地

印刷者
發行者　大日本圖書株式會社
東京市京橋區銀座一丁目廿二番地
專務取締役
右代表者　佐久間貞一

大日本圖書株式會社出版圖書特約販賣所

守田、野依、梅津、鹿兒島縣 吉田、久永、沖繩縣 豐見城、有馬、

集英堂、安中、佐賀縣 河内、牧川、福岡縣 菊竹、石田、博文社、熊本縣 長崎、大分縣 甲斐、

淺野、岡安、石川縣 近田、宇都宮、古香堂、宮崎縣 松井、津野、秋澤、谷、野崎、長崎縣

宮脇、入江、筒井、德島縣 黒崎、愛媛縣 向井、土肥、高知縣 澤本、和歌山縣 宮井、岐阜縣

德岡、今井、島根縣 川岡、園山、大蘆、安達、山口縣 白銀、小原、藤川、中原、村田、香川縣

奈良縣 木原、福井縣 品川、西村、岡山縣 武内、廣島縣 鈴木、原田 兒玉、鳥取縣 藤谷、

高桑、西村、室、高橋、近、中山、富山縣 中田、磯野、兵庫縣 熊谷、中井、福浦、石田、木村、

南、池田、八木、松邑、山本、山崎、最上谷、臺灣 柳田、新潟縣 山川、覺張、松田、目黒、

秋田縣 成見、藤島、東海林、大澤、青森縣 今泉、伊藤、浦山、北海道 小塩、萱間、白鳥、川

梅原、藤崎、岩手縣 佐藤、文港堂、山形縣 牧野、五十嵐、素月、市川、日向、鈴木、白崎、

川又、伊沼、鯨井、飯塚、栃木縣 内山、森田、北城、福島縣 荒井、甲斐山、佐藤、宮城縣

木田、高橋、是洞、中村、埼玉縣 長島、水村、水村、千葉縣 平野、能勢、高寺、朝野、茨城縣

關西圖書會社、長野縣 小松、荻原、西澤、皆川、今村、宮坂、日新堂、丸山、小林、南川、群馬縣

靜岡縣 吉見、廣瀨、菅沼、齋藤、文林堂、山梨縣 大塚、愛知縣 川瀨、片野、三重縣 安屋、

北村、本田、京都府 村上、藤井、松田、河合、若林、梅原支店、神奈川縣 田沼、丸屋、天野

三木、柳原、石井、前川、丸善、石田、吉岡、岡島、金川、中村、小谷、中川、金尾、此村、田中、

炭本、金剌、宍山、松邑、北隆館、東海信文社、森江、杉村、中野、二見、大阪府 松村、梅原、

東京府 丸善、嵩山房、青野、内田、長島、淺見、大倉、林、鶴喜、水野、宮川、山田、高橋、大橋、

(明治三十五年一月調)

- 文學士山邊知春 文學士太田秀穗 共譯 **倫理學說批判** 全一冊、定價金貳圓五拾錢、量目三百三十五匁
- 文學博士中島力造閱 文學士山邊知春著 中學 **修身教科書** 全五冊、定價金貳圓、郵稅四錢宛
- 文學博士中島力造閱 文學士山邊知春著 中學 **修身教授提要** 全一冊、定價金壹圓貳拾錢、郵稅拾四錢
- 伊澤修二閱 國家教育社編 **聖諭大全** 全四冊、定價金參圓四拾五錢、全部量目九百匁
- 文學士大町芳衛 文學士上田敏 共編 新躰 **中學國文教程** 全十冊、定價各冊金貳拾錢、郵稅四錢宛
- 白井重任 須田直太郎 共編 **女子中等國文** 全八冊、定價各冊金貳拾五錢、郵稅四錢宛
- 細川潤次郎校閱 廣池千九郎編著 **高等女學讀本** 全十冊、定價各冊金貳拾五錢、郵稅四錢宛
- 文學士笹川種郎編纂 中等 **漢文新讀本** 全十冊、定價各冊金貳拾錢、郵稅四錢宛
- 文學士岡田正美校閱 **明治時代文範** 全一冊、定價金六拾五錢、郵稅拾貳錢
- 中郁秋香著 **皇國文法釋義** 全一冊、定價金壹圓、郵稅拾六錢
- 永井一孝著 文學士岡田正美補 **國語法階梯** 全一冊、定價金參拾參錢、郵稅六錢

- 文學士高木尚介著 中等 **皇國文典** 全三冊、定價金六拾錢、郵稅四錢
- 文學士松平圓次郎著 **新式日本文典** 全四冊、定價金壹圓貳拾五錢、郵稅拾四錢
- 文學士阪本健一著 **日本文學史綱** 全一冊、定價金五拾錢、郵稅八錢
- 文學士保科孝一著 **國語學小史** 全一冊、定價金壹圓參拾錢、郵稅拾貳錢
- 川野健作著 **漢文通則** 全一冊、定價金五拾錢、郵稅八錢
- 文學博士外山正一著 文部省出版 **文部省英語讀本** 全五冊、定價金壹圓七拾七錢、郵稅參拾錢
- 文學博士外山正一著 **英語教授法** 全一冊、定價金拾七錢、郵稅不要
- 井上要二編纂 **教室用英語** 袖珍 明 全一冊、定價金拾八錢、郵稅貳錢
- 理學士山上萬次郎著 最近 **地理學教科書** 日本之部 全一冊、定價金七拾錢、郵稅八錢
- 理學士山上萬次郎著 最近 **地理學教科書** 外國之部 全三冊、定價金壹圓參拾錢、郵稅拾四錢
- 理學士山上萬次郎著 最近 **地文學教科書** 全一冊、定價金九拾錢、郵稅拾錢

東京　大日本圖書株式會社
明治三十五年六月改正

◎中等教科用地圖　理學士山上萬次郎著　日本之部 全一冊、定價金參拾五錢、郵稅六錢　外國之部 全一冊、定價金四十五錢、郵稅六錢

◎中等帝國史　文學士笹川種郎著　全一冊、定價金五拾八錢、郵稅八錢

◎中等教育 日本の歷史　文學士青木武助著　全二冊、定價金壹圓拾錢、郵稅拾四錢

◎にほんれきし教科書　三上參次 高津鍬三郎 磯田良共編　全三冊、定價金九拾錢、郵稅拾貳錢

◎訂正初等東洋史　文學士桑原隲藏編著　全一冊、定價金八拾錢、郵稅拾貳錢

◎訂正初等東洋歷史地圖　文學士桑原隲藏編著　全一冊、定價金四拾錢、郵稅貳錢

◎中等東洋史 附圖共　文學博士那珂通世閱 文學士桑原隲藏著　全三冊、定價金壹圓五拾錢、量目三百廿五匁

◎中等西洋史 歷史地圖挿入　文學士高桑駒吉編纂　全一冊、定價金七拾錢、郵稅拾貳錢

◎中學理化示教　理學士白壁傑次郎著　全一冊、定價金參拾錢、郵稅四錢

◎初等理化學教科書　後藤牧太閱 關本幸太郎 小倉鉦次共著　全一冊、定價金八拾錢、郵稅拾貳錢

◎物理學教科書　後藤牧太 根岸福彌共編　全一冊、定價金七拾五錢、郵稅拾貳錢

◎物理學教科書問題集　後藤牧太 根岸福彌共編　全一冊、定價金五拾錢、郵稅六錢

◎物理一般論　理學士木村駿吉譯　全二冊、定價金六圓五拾錢、量目五百五拾匁

◎訂正三版 化學教科書　工學博士高松豐吉編 文部省出版　全二冊、定價金壹圓貳拾錢、郵稅拾貳錢

◎中等化學新編　理學士羽田清八著　全一冊、定價金八拾五錢、郵稅拾貳錢

◎女子教育 化學新編　理學士羽田清八著　全一冊、定價金五拾錢、郵稅八錢

◎中等植物教科書　理學博士松村任三 理學博士齋田功太郎合著　全一冊、定價金六拾五錢、郵稅八錢

◎普通植物　理學博士松村任三著　全一冊、定價金壹圓貳拾錢、郵稅拾六錢

◎大日本普通植物誌　理學博士齋田功太郎著　全一冊、定價金壹圓七拾錢、郵稅拾四錢

◎袖珍用 植物採集便覽　理學博士松村任三著　全一冊、定價金五拾五錢、郵稅四錢

◎日本植物編　理學博士矢田部良吉編纂　第一冊、定價金壹圓五拾錢、郵稅拾貳錢

東京 大日本圖書株式會社
明治三十五年六月改正

◎動物教本　理學士宮島幹之助著　全一冊、定價金八拾五錢、郵稅八錢

◎生理教本　ドクトル川瀨元九郎著　全一冊、定價金六拾五錢、郵稅八錢

◎生理教授提要　ドクトル川瀨元九郎著　全一冊　近刊

◎普通體操法　坪井玄道編纂 文部省出版　全一冊、定價金五拾錢、郵稅六錢

◎兵式體操法　西川政憲著　全一冊、定價金六拾錢、郵稅六錢

◎瑞典式體操　ドクトル川瀨元九郎編纂 日本体育會藏版　全一冊　近刊

◎雨中體育談　西川政憲著　全一冊、定價金七拾錢、郵稅八錢

◎室內體育　醫學博士三島通良譯補　全一冊、定價金五拾錢、郵稅六錢

◎衛生美容術　ドクトル川瀨元九郎 川瀨富美子共著　全一冊、定價金貳拾五錢、郵稅貳錢

◎中等日本臨畫帖　白濱徵編纂　全六冊、定價金壹圓、郵稅拾貳錢

◎中等畫本　白濱徵 本多佑輔共編　全六冊、定價金壹圓參拾五錢、郵稅拾貳錢

◎女子高等畫帖　川端玉章 白濱徵共編　全八冊、定價金壹圓六拾六錢、郵稅拾六錢

◎數學教授法講義　理學博士藤澤利喜太郎述　全一冊、定價金九拾錢、郵稅拾貳錢

◎算術條目及教授法　理學博士藤澤利喜太郎著　全一冊、定價金六拾五錢、郵稅六錢

◎訂正第三版 算術小教科書　理學博士藤澤利喜太郎著　全二冊、定價各冊金五拾五錢、郵稅六錢宛

◎算術教科書　理學博士藤澤利喜太郎著　全二冊、定價各冊金七拾五錢、郵稅八錢宛

◎初等代數學教科書　理學博士藤澤利喜太郎著　全二冊、定價各冊金六拾五錢、郵稅六錢宛

◎續初等代數學教科書　理學博士藤澤利喜太郎著　全一冊、定價金七拾五錢、郵稅八錢

◎幾何學小教科書　理學博士菊池大麓著　全二冊、定價金壹圓四拾錢、郵稅拾四錢

◎初等幾何學教科書　理學博士菊池大麓著 文部省出版　全二冊、定價金壹圓四拾五錢、郵稅拾四錢

◎英文幾何學　理學博士菊池大麓著　全三冊、定價各冊金四拾錢、郵稅四錢

◎幾何學講義　理學博士菊池大麓著　第一卷、定價金七拾五錢、郵稅六錢

東京 大日本圖書株式會社
明治三十五年六月改正

◎近世平面幾何學　菊池大麓・敷藤斧三郎共譯　全一册、定價金七拾錢　郵稅六錢

◎二角法教科書　平面・初等　理學博士菊池・麓理學士澤田吾一共編　全一册、定價金七拾五錢、郵稅八錢

◎法制教科書　中等教育　法學士持地六三郎・法學士岩田宙造共著　全一册、定價金五拾八錢、郵稅六錢

◎經濟教科書　中等教育　法學士持地六三郎著　全一册、定價金六拾八錢、郵稅八錢

◎哲學史要　西洋　文學士波多野精一著　全一册、定價金八拾五錢、郵稅拾錢

◎論理學綱要　文學博士中島力造閱・文學士十時彌著　全一册、定價金六拾五錢、郵稅拾錢

◎修辭法　文學士佐々政一編　全一册、定價金八拾錢　郵稅拾貳錢

◎社會學　高等師範學校教授岸本能武太著　全一册、定價金八拾五錢、郵稅拾貳錢

◎落窪物語大成　中邨秋香著　全四册、定價金壹圓八拾錢、郵稅拾錢

◎視話法　伊澤修二著　全一册、定價金六拾錢　郵稅四錢

◎海軍圖說　海軍中佐木村浩吉著　全一册、定價金參拾五錢、郵稅六錢

◎帝國文學　每月發行　定價每册、金拾貳錢、郵稅壹錢宛

謹告

● 當社は明治二十三年創立以來文部省及名家大家の編著に成れる各種學校の教科書幷に參考書を主とし其他學術技藝に關する有益なる圖書を出版發賣す

● 圖書の製本及用紙は最も注意を加へ堅強耐久を旨とし兼て体裁の美麗に及ばす又見本と賣品とを異にするが如き通弊は當社の斷じて爲さゞる所とす

● 圖書の供給は當社の特に意を用ゐる所就中教科書は豫め十分の準備を爲し置くを以て學期に及んで品切を告ぐるが如きは決して之れ無きを期す若し各地の當社特約販賣所に於て高需に應ずること能はざる場合あらば直接に當社へ宛て御注文あらんことを希望す

● 當社出版圖書解說附總目錄入用の方は往復端書にて申込あれば無代進呈す

◎丁酉倫理會講演集　定價每册、金拾錢　郵稅貳錢宛

東京　大日本圖書株式會社
明治三十五年六月改正