初等
幾何學
教科書

立體幾何學.

第三版.

マストル オブ アーツ，理學 博士，理科 大學 教授，

菊池大麓

編纂.

明治廿八年，

大日本圖書株式會社.

目　録.

立體幾何學.

立體幾何學

第六編.

平面.

第一節.

平行ナル　平面　及　直線.

定義 1.　平面トハ　其ノ　上ニ　何レノ　二ツノ　點　ヲ　取ルモ，之　ヲ　結ヒ付クル　直線　ハ　常ニ　全ク　其　面　上ニ　在ル　表面　ナリ.

(此　定義　ハ　已ニ　第一編　定義　6　ニ　揭ケタレド，本　編　ニ　於テ　最緊要ナル　ヲ　以テ，再ヒ　此ニ　揭ク.)

故ニ　一ツノ　直線　上ノ　二ツノ　點　ガ　一ツノ　平面　上ニ　在レハ，其　直線　ハ　全ク　其　平面　上ニ　在リ.

直線　ガ　全ク　平面　上ニ　在ル　トキハ，其　平面　ガ　之　ヲ　含ム　ト　云フ.

○平面　ハ　何レノ　方向　ニモ　限リ無ク　廣ガリタル　モノ　トス.

(然レド　圖　ニ　於テハ　平行四邊形　ヲ　畫キテ　以テ　其ノ　位置　ヲ　示ス.)

公理 1. 平面 上ニ 在ル 一ツノ 直線 ヲ 定メ, 之 ヲ 軸 トシテ 平面 ヲ 廻轉セシムル 𪜈ハ, 平面 ハ 其ノ 廻轉スル ニ 從テ 宇宙 間 總テノ 點 ヲ 過ル.

定理 1. 下ノ 要件 ノ 一ツ ニ 適スル 平面 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル:

(甲) 一ツノ 直線, 及 其ノ 上ニ 在ラザル 一ツノ 點 ヲ 含ムヿ;

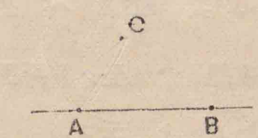
(乙) 同シ 直線 ノ 上ニ 在ラザル 三ツノ 點 ヲ 含ムヿ;

(丙) 二ツノ 相交ル 直線 ヲ 含ムヿ;

(丁) 二ツノ 平行ナル 直線 ヲ 含ムヿ.

(甲) AB ヲ 一ツノ 直線, C ヲ 其ノ 上ニ 在ラザル 一ツノ 點 トセヨ:

然ル𪜈ハ AB 及 C ヲ 含ム 平面 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル 可シ.



AB ヲ 含ム 任意ノ 平面 ヲ 取リ, AB ヲ 軸 トシテ 之 ヲ C ヲ 過ル マデ 廻轉セヨ;

然レハ 此 平面 ハ 要件 ニ 適ス:

今 之 ヲ 此 位置 ヨリ 少シニテモ 廻轉スレハ, C 點 ヲ 過ラズ;

故ニ AB 及 C ヲ 含ム 平面 ハ 唯 一ツ ニ 限ル.

(乙) A, B, C ヲ 同シ 直線 ノ 上ニ 在ラザル 三ツノ 點 トセヨ:

然ル𪜈ハ A, B, C ヲ 含ム 平面 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル 可シ.

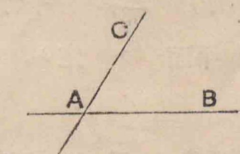
AB ヲ 結ヒ付ケヨ;

然レハ A, B ヲ 含ム 平面 ハ 直線 AB ヲ 含ム;

故ニ 此 場合 ハ (甲) ニ 同シ.

(丙) AB, AC ヲ A 點 ニ 於テ 交ル 二ツノ 直線 トセヨ:

然ル𪜈ハ AB, AC ヲ 含ム 平面 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル 可シ.



AC 上ニ 任意ノ 點 C ヲ 取レ;

AB 及 C ヲ 含ム 平面 ハ AC 上ノ 二ツノ 點 A, C ヲ 含ム ヲ 以テ, AC ヲ 含ム;

故ニ 此 場合 モ (甲) ニ 同シ.

(丁) AB, CD ヲ 二ッノ 平行線 トセヨ:
然ルトキハ AB, CD ヲ 合ム 平面 ハ 一ッ 有リ, 而シテ 唯 一ッ ニ 限ル 可シ.

AB, CD ハ 平行線 ノ 定義 ニ 依リテ 一ッノ 平面 上ニ 在リ;
而シテ CD 上 任意ノ 點 ヲ 取レハ, 此 點 及 AB ヲ 合ム 平面 ハ 唯 一ッ ニ 限ル; VI, 1, (甲).
故ニ AB, CD ヲ 合ム 平面 ハ 即 此 平面 ノミ.

此 定理 ヲ 又 下ノ 如ク 述フル ヲ 得:
(甲) 一ッノ 直線 及 其ノ 上ニ 在ラザル 一ッノ 點
(乙) 同シ 直線 ノ 上ニ 在ラザル 三ッノ 點,
(丙) 二ッノ 相交ル 直線, 或ハ
(丁) 二ッノ 平行ナル 直線 ハ
一ッノ 平面 ヲ 定ム.

附言. 二ッノ 直線 ノ 相對シテノ 位置 ニ 付テハ, 二ッノ 直線 ハ
(甲) 同一ノ 平面 上ニ 在リテ, 相交ルカ; 或ハ
(乙) 互ニ 平行ナルカ (此 場合ニ 於テハ 勿論 同一ノ 平面 上ニ 在リ); 或ハ

(丙) 同一ノ 平面 上ニ 在ラズ (此 場合 ニ 於テハ 相交ラズ 又 平行ナラズ).
故ニ 二ッノ 直線 ガ 平行ナルヿ ヲ 證明スル ニハ (平面幾何學 ニ 於ケル 如ク) 其 ガ 相交ラザルヿ ヲ 證明スル ノミ ニテハ 足ラズ, 其 ガ 同一ノ 平面 上ニ 在ルヿ ヲ 證明スル ヲ 要ス.

---

* 問題 1. 一ッノ 定マレル 點 ヲ 過リ, 且 此 點 ヲ 過ラザル 一ッノ 定マレル 直線 ノ 上 ヲ 滑ル 直線 ハ 一ッノ 平面 ヲ 成ス.

* 問題 2. 二ッ ヅヽ 三ッノ 點 ニ 於テ 交ル 三ッノ 直線 ハ 一ッノ 平面 上ニ 在リ.

* 問題 3. 二ッノ 平行線 ノ 一ッ ノ 上ノ 任意ノ 點 ヲ 他 ノ 上ノ 任意ノ 點 ト 結ヒ付クル 直線 ハ 平行線 ノ 平面 ノ 上ニ 在リ.

* 問題 4. 三ッノ 平行線 ガ 第四ノ 直線 ト 交レハ, 四ッノ 直線 ハ 同一ノ 平面 上ニ 在リ.

定義 2. 二ッノ 平面 ガ 平行ナリ トハ 之 ヲ 何レノ 方向 ニ 何 程 延長スルモ 決シテ 出會ハザル ヲ 云フ.

定義 3. 直線ト平面ト平行ナリトハ之ヲ何程延長スルモ決シテ出會ハザルヲ云フ.

一ツノ平面ト一ツノ直線ノ相對シテノ位置ニ付テハ, 直線ハ

(甲) 全ク平面上ニ在ルカ; 或ハ

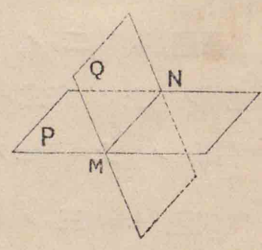
(乙) 之ト唯一ツノ點ニ於テ出會フカ; 或ハ

(丙) 之ニ平行ナリ.

定理 2. 二ツノ平面ガ出會ヘハ, 其ノ交リハ一ツノ直線ナリ.

P, Q ヲ出會フ所ノ二ツノ平面トセヨ:
然ルトキハ其ノ交リハ一ツノ直線ナル可シ.

M, N ヲ兩平面上ニ在ル二ツノ點トセヨ;
然レハ直線 MN ハ兩平面上ニ在リ: VI, 定義 1.
而シテ此直線上ニ在ラザル點ハ兩平面上ニ在ルヲ得ズ;



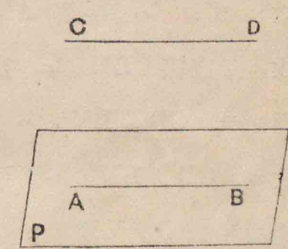
若シ是レ有リトセハ, 二ツノ平面 P, Q ガ一ツノ直線 MN 及其ノ上ニ在ラザル一ツノ點ヲ含ム;
是レ定理 1 ニ戻ル;

故ニ兩平面上ニ在ル點ハ總テ直線 MN ノ上ニ在リ;
即二ツノ平面 P, Q ノ交リハ直線 MN ナリ.

問題 5. 二ツノ直線ガ平行ナレハ, 其ノ一ツト交ル總テノ平面ハ又他ト交ル.

定理 3. 二ツノ直線ガ平行ナレハ, 其ノ一ツヲ含ミ, 他ヲ含マザル平面ハ他ニ平行ナリ.

AB, CD ヲ二ツノ平行線, P ヲ AB ヲ含ミ, CD ヲ含マザル一ツノ平面トセヨ:
然ルトキハ P ハ CD ニ平行ナル可シ.



AB, CD ハ平行ナルヲ以テ, 一ツノ平面上ニ在リ;
AB ハ此平面及 P ノ上ニ在リ,
即二ツノ平面ノ交リナリ;
故ニ CD ハ平面 P ニ AB 上ニ在ラザル點ニ於テ出會フ能ハズ; VI, 2.
然ルニ CD ハ AB ニ出會フ能ハズ; 假設.
故ニ CD ハ平面 P ニ出會ハズ,

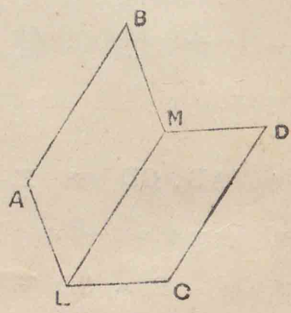
即平面P及直線CDハ平行ナリ.

此定理ヲ亦下ノ如ク述フルヲ得:

系1. 一ツノ直線ガ之ヲ含マザル平面上ノ直線ニ平行ナレハ,其平面ニ平行ナリ.

系2. 二ツノ直線ガ平行ナレハ,夫々其ノ一ツヲ含ム二ツノ平面ノ交リハ二ツノ直線ニ平行ナリ.

何トナレハ,AB,CDヲ平行線,LMヲ夫々AB,CDヲ含ム二ツノ平面ノ交リトセハ,



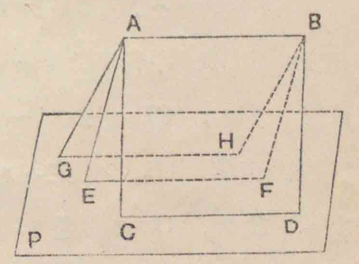
平面AMハCDニ平行ナリ;
故ニCDハ平面AMニ出會ハズ;
故ニ直線LMニ出會ハズ;
而シテCD,LMハ同一ノ平面上ニ在リ;
故ニCD,LMハ平行ナリ;
同樣ニAB,LMモ平行ナリ.

問題6. 定理3ヲ問題5ニ依リテ證明セヨ.

定理4. 一ツノ直線ガ一ツノ平面ニ平行ナレハ,其平面ト其直線ヲ含ム平面トノ交リハ其直線ニ平行ナリ又互ニ平行ナリ.

ABヲ平面Pニ平行ナル直線;ABヲ含ム平面AD,AF,AH,等ヲ夫々平面Pト直線CD,EF,GH,等ニ於テ交ルトセヨ:

然ルトキハCD,EF,GH,等ハABニ平行,又互ニ平行ナル可シ.

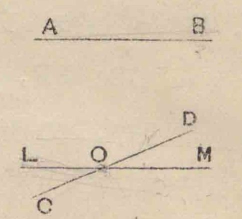


ABハCDヲ含ム平面ニ出會ハザルヲ以テ, 假設
CDニ出會フ能ハズ;
而シテAB,CDハ同一ノ平面上ニ在リ;
故ニAB,CDハ平行ナリ;
同樣ニEF,GH,等モ皆ABニ平行ナリ:
又若シCD,EFガ互ニ平行ナラザレハ,其ノ交點及直線ABヲ含ム二ツノ平面AD,AF有リ;
是レ定理1ニ戻ル;
故ニCD,EFハ平行ナリ;
同樣ニGH等モ亦CD及EFニ平行ナリ.

系1. 二ツノ平面ト其ノ交リニ平行ナル平面

トノ 交リ ハ 亦 之 ニ 平行ナリ.

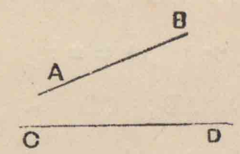
系 2. 一ツノ 直線 ヲ 含ミ, 之 ト 交ラズ 又 之 ニ 平行ナラザル 直線 ニ 平行ナル 一ツノ 平面 ヲ 引ク ヲ 得 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル.

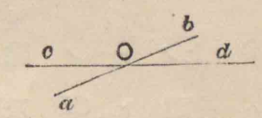


何トナレハ, AB, CD ヲ 相交ラズ 又 平行ナラザル 二ツノ 直線 トシ; CD 上ノ 一ツノ 點 O 及 直線 AB ノ 定ムル 平面 上ニ 於テ, O ヲ 過リ AB ニ 平行ニ 直線 LM ヲ 引クハ, 直線 CD 及 LM ノ 定ムル 平面 ハ CD ヲ 過リ AB ニ 平行ナリ: VI, 3.
又 CD 上ノ 一ツノ 點 及 AB ヲ 含ム 平面 ハ AB ニ 平行ナル 平面 ト 必ズ AB ニ 平行ナル 直線 ニ 於テ 交ル ヲ 以テ, VI, 4.
此 平面 ノ 他ニハ CD ヲ 含ミ AB ニ 平行ナル 平面 有ル 能ハズ.

系 3. 一ツノ 點 ヲ 過リ 二ツノ 互ニ 平行ナラザル 直線 ニ 平行ナル 一ツノ 平面 ヲ 引ク ヲ 得, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル.

何トナレハ, AB, CD ヲ 平行ナラザル 直線, O ヲ





與ヘラレタル 點 トシ; O 及 AB ノ 定ムル 平面 上ニ 於テ, O ヲ 過リ AB ニ 平行ニ 直線 *ab* ヲ 引キ, 又 O 及 CD ノ 定ムル 平面 上ニ 於テ, O ヲ 過リ CD ニ 平行ニ 直線 *cd* ヲ 引クハ, *ab*, *cd* ノ 定ムル 平面 ハ AB, CD ニ 平行ナリ: VI, 3.
而シテ 此 平面 ノ 他ニ O ヲ 過リ AB, CD ニ 平行ナル 平面 有ル 能ハズ.

---

*問題 7. 一ツノ 直線 ガ 一ツノ 平面 ニ 平行ナレハ, 其 平面 上ノ 一ツノ 點 ヲ 過リ 其 直線 ニ 平行ナル 直線 ハ 其 平面 上ニ 在リ.

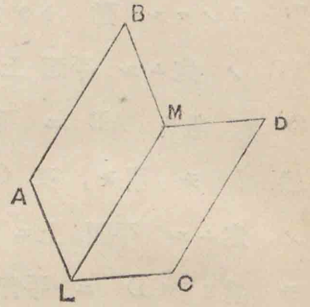
*問題 8. 一ツノ 平面 ニ 出會フ 直線 ハ 之 ニ 平行ナル 總テノ 平面 ニ 出會フ.

定理 5. 同一ノ 直線 ニ 平行ナル 直線 ハ 互ニ 平行ナリ.

(直線 ガ 皆 同一ノ 平面 上ニ 在ル 場合 ハ 已ニ 定理 I, 8 ニ 於テ 證明シタリ; 故ニ 此ニハ 直線 ガ 同一ノ 平面 上ニ 在ラザル モノ トス.)

AB, CD ヲ各直線 LM ニ平行ナリトセヨ:

然ルトキハ AB, CD ハ互ニ平行ナル可シ.



CD 上ノ一ツノ點及 AB ヲ含ム平面ト CD 及 LM ヲ含ム一ツノ平面トノ交リハ LM ニ平行ナリ; VI, 3, 系 2.

故ニ其ノ交リハ即直線 CD ナリ;

又此交リハ AB ニ平行ナリ; VI, 3, 系 2.

故ニ CD ハ AB ニ平行ナリ.

定理 6. 二ツノ平面ガ同一ノ直線ニ平行ナレバ, 其ノ交リモ亦之ニ平行ナリ.

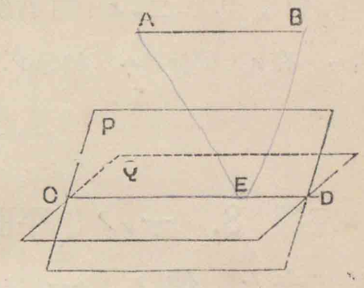
P, Q ヲ同一ノ直線 AB ニ平行ナル二ツノ平面, CD ヲ其ノ交リトセヨ:

然ルトキハ CD ハ AB ニ平行ナル可シ.

CD 上ニ任意ノ點 E ヲ取レ;

AB 及 E ヲ含ム平面ハ平面 P ト AB ニ平行ナル

直線ニ於テ交ル; VI, 4.



此平面ハ又 Q ト AB ニ平行ナル直線ニ於テ交ル;

然ルニ E ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ハ唯一ツナルヲ以テ, 二ツノ平面 P, Q ハ AB 及 E ノ定ムル平面ト同一ノ直線ニ於テ交ル;

故ニ此直線ハ P, Q ノ交リ CD ナリ;

即 CD ハ AB ニ平行ナリ.

定理 7. 二ツノ平行ナル平面ト他ノ一ツノ平面トノ交リハ互ニ平行ナリ.

二ツノ平行ナル平面 P, Q ヲ他ノ一ツノ平面 R ト夫々 AB, CD ニ於テ交ルトセヨ:

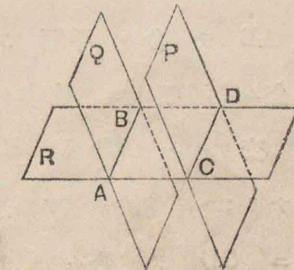
然ルトキハ AB, CD ハ平行ナル可シ.

平面 P, Q ハ決シテ出會ハザルヲ以テ, 假設.

直線 AB, CD モ出會フ能ハズ;

而シテ AB, CD ハ同一ノ平面上ニ在リ;

故ニ AB, CD ハ平行ナリ.

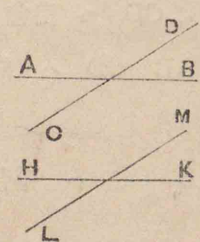


問題 9. 二ツノ 平行線 ノ 二ツノ 平行ナル 平面 ノ 間ニ 在ル 部分 ハ 相等シ.

定理 8. 一ツノ 平面 上ニ 在ル 二ツノ 直線 ガ 夫々 他ノ 一ツノ 平面 上ニ 在ル 二ツノ 直線 ニ 平行ナレハ, 二ツノ 平面 ガ 平行ナルカ; 或ハ 四ツノ 直線 ガ 平行ナリ.

AB, CD ヲ 一ツノ 平面 上ニ 在ル 二ツノ 直線; HK, LM ヲ 他ノ 一ツノ 平面 上ニ 在ル 二ツノ 直線 トシ; AB ハ HK ニ 平行, CD ハ LM ニ 平行ナリ トセヨ:

然ルトキハ AB, CD ノ 平面 ガ HK, LM ノ 平面 ニ 平行ナルカ, 或ハ AB, CD, HK, LM ガ 皆 平行ナル 可シ.



AB ヲ 含ム 平面 ガ HK ヲ 含ム 平面 ニ 出會ヘハ, 其ノ 交リ ハ AB 及 HK ニ 平行ナリ; VI, 3, 系 2.

同樣ニ CD ヲ 含ム 平面 ガ

lake amusement

LM ヲ 含ム 平面 ニ 出會ヘハ, 其ノ 交リ ハ CD 及 LM ニ 平行ナリ; VI, 3, 系 2.

故ニ AB 及 CD ヲ 含ム 平面 ガ HK 及 LM ヲ 含ム 平面 ニ 出會ヘハ, 其ノ 交リ ハ AB, CD, HK, LM ノ 何レ ニモ 平行ナラザル ヲ 得ズ:

故ニ 若シ AB ガ CD ニ 平行ナレハ, HK モ LM ニ 平行ニシテ, 何レモ 二ツノ 平面 ノ 交リ ニ 平行ナリ;

故ニ 四ツノ 直線 ハ 平行ナリ; VI, 5.

然レドモ 若シ AB ガ CD ニ 平行ナラザレハ, 同一ノ 直線 ガ 之 ニ 平行ナル 能ハザル ヲ 以テ,

AB, CD ヲ 含ム 平面 ハ HK, LM ヲ 含ム 平面 ニ 出會フ 能ハズ;

即 二ツノ 平面 ハ 平行ナリ.

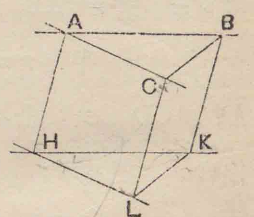
問題 10. 二ツノ 相交ル 直線 ガ 同一ノ 平面 ニ 平行ナレハ, 其ノ 平面 モ 亦 此 平面 ニ 平行ナリ.

定理 9. 一ツノ 平面 上ニ 在ル 二ツノ 直線 ガ 夫々 他ノ 一ツノ 平面 上ニ 在ル 二ツノ 直線 ニ 平行ナレハ, 前者 ノ 夾ム 角 ハ 後者 ノ 夾ム 角 ニ 等シ.

AB, AC ハ 一ツノ 平面 ニ 在リテ, 角 BAC ヲ 夾ミ; HK, HL ハ 他ノ 一ツノ 平面 ニ 在リテ, 角 KHL ヲ 夾ミ; AB ハ HK ニ 平行, AC ハ HL ニ 平行ナリ トセヨ:

然ルトキハ 角 BAC ハ 角 KHL ニ 等シカル 可シ.

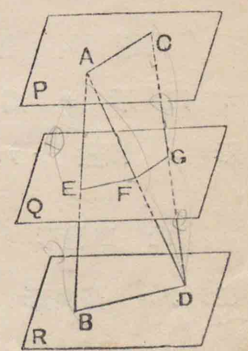
(角 BAC, KHL ハ 二雙 ノ 補角 ノ 中, B ト K ハ 平行線 AB, HK ノ 平面 ニ 於テ AH ノ 同シ 側 ニ 在リ 又 C ト L ハ 平行線 AC, HL ノ 平面 ニ 於テ AH ノ 同シ 側 ニ 在ル モノ トス.)



AH ヲ 結ヒ付ケヨ;
AB, HK ノ 平面 上ニ 於テ, BK ヲ AH ニ 平行ニ 引ケ;
然レハ ABKH ハ 平行四邊形 ナリ;
故ニ AB ハ HK ニ 等シク, AH ハ BK ニ 等シ;
同樣ニ AC, HL ハ 一ツノ 平面 上ニ 在リ;
此 平面 上ニ 於テ, CL ヲ AH ニ 平行ニ 引ケハ,
AC ハ HL ニ 等シク, AH ハ CL ニ 等シ;
BC, KL ヲ 結ヒ付ケヨ;
BK, CL ハ 各 AH ニ 等シクシテ 且 之 ニ 平行ナル ヲ 以テ, 相等シク 且 平行ナリ.

故ニ BC ハ KL ニ 等シ;
故ニ 二ツノ 三角形 ABC, HKL ニ 於テ, 三ツノ 邊 AB, BC, CA ハ 夫々 三ツノ 邊 HK, KL, LH ニ 等シ;
故ニ 二ツノ 三角形 ハ 全ク 相等シク,
角 BAC ハ 角 KHL ニ 等シ.

定理 10. 二ツノ 直線 ガ 平行ナル 平面 ト 交レハ, 其ノ 分 ハ 同シ 比 ヲ 有ス.



直線 AB, CD ガ 平行ナル 平面 P, Q, R ト 夫々 A, E, B 及 C, G, D ニ 於テ 交ル トセヨ:
然ルトキハ AE : EB :: CG : GD ナル 可シ.

AD ヲ 結ヒ付ケ, AD ガ 平面 Q ト F ニ 於テ 交ル トセヨ;
FE, FG ヲ 結ヒ付ケヨ;
然レハ EF ハ BD ニ 平行, FG ハ AC ニ 平行ナリ; VI, 7.
故ニ AE : EB :: AF : FD, V, 1.
及 CG : GD :: AF : FD; V, 1.
故ニ AE : EB :: CG : GD.

第一節ノ問題.

*問題 11. 三ツノ平面ハ一般ニ一ツノ點ニ於テ交ル. 特別ナル場合ハ如何?

*問題 12. 同一ノ平面上ニ在ラザル二ツノ直線ノ各ヲ過リ, 他ニ平行ナル平面ヲ引クハ, 二ツノ平面ハ互ニ平行ナリ.

問題 13. 皆同一ノ平面上ニ在ラザル四ツノ直線ガ四邊形ヲ爲ス: 各ノ邊ノ中點ハ一ツノ平行四邊形ノ頂點ナリ.

此四邊形ノ如ク, 邊ガ皆同一ノ平面上ニ在ラザル多角形ヲゴーシユ多角形ト稱ス.

問題 14. 一ツノ與ヘラレタル點ヲ過リ, 二ツノ與ヘラレタル直線ニ出會フ直線ノ位置ヲ求ム.

問題 15. 與ヘラレタル點ヲ過リ與ヘラレタル平面ニ平行ナル直線ノ軌跡ハ其平面ニ平行ナル平面ナリ.

此問題ニ於テ謂フ所ノ軌跡ハ第一編定義 47 ニ陳ヘタル軌跡ノ意義ヲ擴張シタルモノナリ. 別ニ之ヲ陳ヘザルモ學フ者ハ之ヲ了解スルナル可シ; 故ニ略ス.

第二節.

垂線.

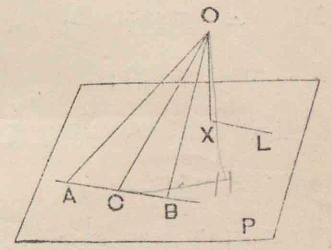
定義 4. 一ッノ直線ガ一ッノ平面ニ出會ヒ, 其平面上ニ在リテ其ノ交點ヲ過ル總テノ直線ニ垂線ナレハ, 其直線ヲ(其交點ニ於テ)其平面ノ垂線ト稱ス. 又其直線ト平面ハ互ニ垂直ナリト云フ.

定義 5. 一ッノ平面ニ出會ヒ之ニ垂線ナラザル直線ヲ其平面ノ斜線ト稱ス.

定義 6. 二ッノ出會ハザル直線ノ爲ス角トハ夫々之ニ平行ナル二ッノ相交ル直線ノ爲ス角ヲ云フ.

定理 11. 一ッノ平面上ニ, 其平面外ノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ其ノ上ノ總テノ他ノ點ヨリ小ナル點ハ一ッ有リ, 而シテ唯一ッニ限ル: 與ヘラレタル

點ヨリ其點ヘ引ケル直線ハ其平面ノ垂線ナリ.



O ヲ平面 P 外ノ與ヘラレタル點トセヨ:

P 上ニ O ヨリノ距離ガ P 上ノ總テノ他ノ點ヨリ小ナル點ハ一ッ有リ, 而シテ唯一ッニ限ル可シ.

O ハ平面 P ノ外ニ在ルヲ以テ, O ヨリ P 上ノ點ヘノ距離ハ限リ無ク小クナル能ハズ;

故ニ或ル最小ノ距離有リ;

而シテ若シ P 上ノ二ッノ點 A, B ノ O ヨリノ距離 OA, OB ガ相等シクレハ, 直線 AB 上ニ A ト B ノ間ニ在ル C 點ノ距離 OC ハ OA 及 OB ヨリ小ナリ; I, 18.

故ニ O ヨリノ距離ガ最小ナル點ハ唯一ッニ限ル.

X ヲ此點トセヨ:

然ルトキハ OX ハ平面 P ノ垂線ナル可シ.

平面 P 上ニ於テ, X ヲ過リ任意ノ直線 XL ヲ引クハ, OX ハ O ヨリ XL ヘ引クル最短キ直線ナルヲ以テ, 假設.

XL ニ垂線ナルヿハ定理 I, 18 ヨリ同一法ニ依リテ證明スルヲ得;

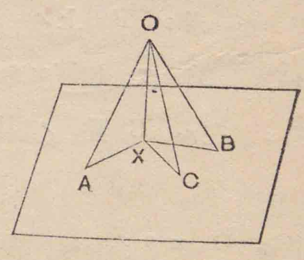
同様ニ OX ハ平面 P 上ニ在リテ, X ヲ過ル總テノ直線ニ垂線ナリ;

即平面 P ノ垂線ナリ.

系 1. 平面外ノ一ツノ與ヘラレタル點ヨリ其平面ヘ唯一ツノ垂線ヲ引クヲ得, 而シテ唯一ツニ限ル.

系 2. 平面外ノ一ツノ與ヘラレタル點ヨリ引クル相等シキ斜線ノ端ハ同シ點ヨリノ垂線ノ足ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

何トナレハ, OA, OB, OC, 等ガ相等シキ斜線ナレハ I, 22, 系 (甲) ニ依リテ, XA, XB, XC, 等ハ相等シ.



系 3. 系 2 ノ逆モ亦眞ナルヿ明ナリ.

附言. 此定理ノ最初ノ部分ヲ證明スルニ

當リテ,「一ツノ平面外ノ一ツノ點ヨリ其平面ヘノ距離ハ限リ無ク小クナル能ハズ」ト斷定セリ; 即是ヲ公理的ニシテ證明ヲ要セザル事トシタリ.

定義 7. 平面外ノ一ツノ點ト平面トノ距離トハ其ノ最短キ距離ヲ云フナリ.

---

*問題 16. 平面外ノ點ヨリ平面ヘ引クル斜線ノ中, 垂線ト相等シキ角ヲ爲スモノハ相等シ; 又相等シカラザル角ヲ爲スモノノ中, 大ナル角ヲ爲スモノガ小ナル角ヲ爲スモノヨリ大ナリ.

*問題 17. 問題 16 ノ逆ヲ證明セヨ.

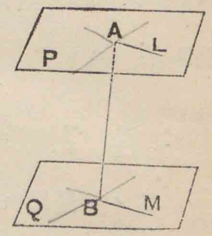
定理 12. 一ツノ平面ニ垂直ナル直線ハ之ニ平行ナル總テノ平面ニ垂直ナリ.

P, Q ヲ互ニ平行ナル平面, AB ヲ P, Q ニ夫々 A, B ニ於テ出會ヒ, P ニ垂直ナル直線トセヨ:

然ルトキハ AB ハ又 Q ニ垂直ナル可シ.

Q 上ニ於テ B ヲ過リ任意ノ直線 BM ヲ引キ,

AB, BM ノ定ムル平面ガ P ト直線 AL ニ於テ交ル トセヨ;



然レハ AL ハ BM ニ平行ナリ; **VI, 7.**

故ニ, 角 LAB ハ直角ナルヲ以テ, 假設.

角 ABM モ亦直角ナリ;

同樣ニ AB ハ平面 Q 上ニ在リテ B ヲ過ル總テノ直線ニ垂線ナリ.

即 AB ハ Q ニ垂直ナリ.

定義 8. 二ツノ平行ナル平面ノ距離トハ共通ノ垂線ノ其ノ間ニ在ル部分ノ長サナリ.

定理 13. 二ツノ平行線ノ一ツガ一ツノ平面ニ垂直ナレハ, 他ノ直線モ亦之ニ垂直ナリ.

AX, BY ヲ平面 P ニ夫々 A, B ニ於テ出會ヒ, 互ニ平行ナル二ツノ直線トシ, AX ヲ P ニ垂直ナリトセヨ:

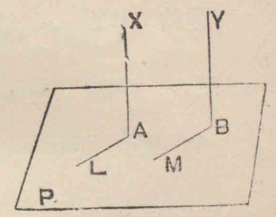
然ルトキハ BY モ亦 P ニ垂直ナル可シ.

平面 P 上ニ A, B ヲ過リ, 任意ノ平行線 AL,

BM ヲ引ク;

然レハ角 XAL, YBM ハ相等シ; **VI, 9.**

而シテ角 XAL ハ直角ナリ; 假設.



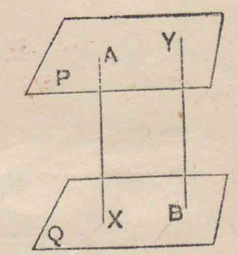
故ニ YBM モ直角ナリ;

故ニ BY ハ P 上ニ在リテ B ヲ過ル總テノ直線ニ垂線ナリ;

即 BY ハ P ニ垂直ナリ.

定理 14. 同シ或ハ平行ナル平面ノ垂線ハ互ニ平行ナリ.

P, Q ヲ平行ナル平面, AX, BY ヲ夫々 P, Q ノ垂線ナリトセヨ:



然ルトキハ AX, BY ハ平行ナル可シ.

P, Q ハ平行ナルヲ以テ, AX, BY ハ二ツナガラ P 及 Q ニ垂直ナリ; **VI, 12.**

又 B ヲ過リ, XA ニ平行ナル直線ハ P ニ垂直ナリ; **VI, 13.**

然ルニ B ヨリ P ヘ 唯 一ツノ 垂線 ヲ 引ク ヲ 得;

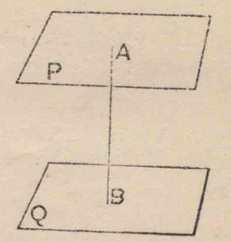
VI, 11, 系 1.

故ニ 垂線 BY ハ XA ニ 平行ナリ.

系. 平面 上ノ 一ツノ 點 ヨリ 之ニ 一ツノ 垂線 ヲ 引ク ヲ 得, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル.

定理 15. 一ツノ 直線 ガ 二ツノ 平面 ニ 垂直ナレハ, 其 平面 ハ 平行ナリ.

直線 AB ヲ 二ツノ 平面 P 及 Q ニ 夫々 A 及 B 點 ニ 於テ 垂直ナリ トセヨ:



然ルトキハ P, Q ハ 互ニ 平行 ナル 可シ.

若シ P, Q ガ 出會ヘハ, 其ノ 交リ ノ 上ニ 任意 ノ 一ツノ 點 X ヲ 取リ, XA, XB ヲ 結ヒ付ケヨ;

AB ハ P ニ 垂直ナル ヲ 以テ, XA ハ AB ニ 垂線 ナリ;

同様ニ XB モ 亦 AB ニ 垂線ナリ;

然ルニ 一ツノ 點 X ヨリ 一ツノ 直線 AB ニ 二ツノ 垂線 ヲ 引ク 能ハズ;

故ニ P, Q ハ 出會フ 能ハズ;

即 平行ナリ.

系. 二ツノ 平行線 ガ 夫々 二ツノ 平面 ノ 一ツ ニ 垂直ナレハ, 二ツノ 平面 ハ 互ニ 平行ナリ.

定義 9. 一ツノ 平面 外ノ 點 ヨリ 引ケル 垂線 ガ 其 平面 ニ 出會フ 點 ヲ 其 平面 上ニ 其 點 ノ 正射影 ト 云フ.

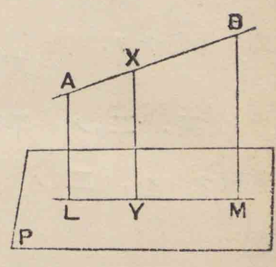
定義 10. 一ツノ 平面 上ニ 一ツノ 線 ノ 正射影 ト ハ 其ノ 上ノ 點 ノ 正射影 ノ 軌跡 ナリ.

(本 書 ニ 於テハ, 正射影 ノミ ヲ 論スル ヲ 以テ, 或ハ 之 ヲ 略シテ 單ニ 射影 ト 云フ.)

定理 16. 一ツノ 平面 上ニ 一ツノ 直線 ノ 正射影 ハ 其ノ 上ノ 任意ノ 二ツノ 點 ノ 正射影 ヲ 結ヒ付クル 直線 ナリ.

AB ヲ 一ツノ 直線; L, M ヲ 平面 P 上ニ AB 上 ノ 任意ノ 二ツノ 點 A, B ノ 射影 トセヨ:

然ルトキハ AB ノ 正射影 ハ 直線 LM ナル 可シ.



AL, BM ハ 平面 P ニ 垂直ナル ヲ 以テ, 平行ナリ; VI, 14.
平行線 AL, BM ノ 定ムル 平面 ハ 直線 AB 及 LM ヲ 含ム;
此 平面 上ニ 於テ, AB 上ノ 任意ノ 點 X ヨリ XY ヲ AL ニ 平行ニ 引キ, LM ト Y ニ 於テ 交ル トセヨ;
然レハ, XY ハ 平面 P ニ 垂直ニシテ, VI, 13
X 點 ノ 射影 ハ Y 點 ナリ;
故ニ AB 上ノ 總テノ 點 ノ 射影 ハ 直線 LM ノ 上ニ 在リ;
又 LM 上ノ 總テノ 點 ハ AB 上ノ 點 ノ 射影 ナリ;
故ニ AB ノ 射影 ハ LM ナリ.

系. 一ツノ 平面 上ニ 其 平面 ニ 平行ナル 直線 ノ 射影 ハ 其 直線 ニ 平行ナリ.

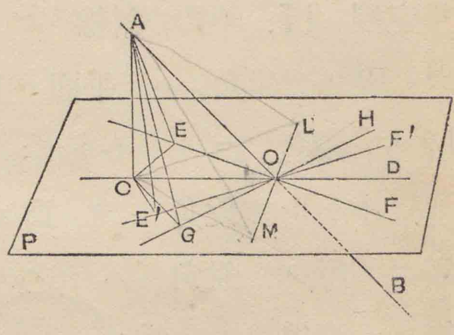
---

* 問題 18. 直線 ガ 平面 ニ 垂直ナル トキハ 其ノ 射影 如何? 点ナリ

定理 17. (甲) 斜線 ガ 其ノ 正射影 ト 爲ス 所ノ 鋭角 ハ 平面 上 他ノ 直線 ト 爲ス 所ノ 鋭角 ヨリ 小ナリ: (乙) 平面 上 正射影 ト 小ナル 鋭角 ヲ 爲ス 直線 ト (斜線 ガ) 爲ス 所ノ 鋭角 ハ 之 ト 大ナル 鋭角 ヲ 爲ス 直線 ト 爲ス 所ノ 鋭角 ヨリ 小ナリ: 又 (丙) 平面 上 正射影 ト 相等シキ 角 ヲ 爲ス 二ツノ 直線 ト (斜線 ガ) 爲ス 所ノ 角 ハ 相等シク; 正射影 ニ 垂線ナル 直線 ト 爲ス 所ノ 角 ハ 直角 ナリ.

AOB ヲ 平面 P ニ 斜線, COD ヲ 其ノ 正射影, EOF ヲ O ヲ 過ル P 上 任意ノ 直線 トセヨ:
然ルトキハ (甲) 鋭角 AOC ハ 鋭角 AOE ヨリ 小ナル 可シ.

C ヲ AB 上 任意ノ 點 A ノ 射影 トセヨ;
OE ヲ OC ニ 等シク 取リ, AE, CE ヲ 結ヒ付クヨ;
然レハ AC ハ CE ニ 垂線ナル ヲ 以テ,
AE ハ AC ヨリ 大ナリ;
故ニ 三角形 AOC, AOE ニ 於テ, 二ツノ 邊 AO, OC ハ



夫々 二ッノ 邊 AO, OE ニ 等シク, 第三 邊 AC ハ 第三 邊 AE ヨリ 小ナリ;
故ニ 角 AOC ハ 角 AOE ヨリ 小ナリ. I, 20.

次ニ, GOH ヲ 平面 P 上ニ 在リテ CD ト 鋭角 COE ヨリ 大ナル 鋭角 COG ヲ 爲ス 直線 トセヨ:
然ルトキハ (乙) 角 AOE ハ 角 AOG ヨリ 小ナル 可シ.

OG ヲ OE ニ 等シク 取リ, CG, AG ヲ 結ヒ付ケヨ;
然レハ 三角形 COE, COG ニ 於テ, 二ッノ 邊 CO, OE ハ 夫々 二ッノ 邊 CO, OG ニ 等シク, 夾角 COE ハ 夾角 COG ヨリ 小ナル ヲ 以テ,
CE ハ CG ヨリ 小ナリ; I, 19.
而シテ 角 ACE, ACG ハ 各 直角 ナル ヲ 以テ, I, 18 又ハ III, 9 ニ 依リテ 容易ニ AE ガ AG ヨリ 小ナル ヲ 證明スル ヲ 得;
故ニ 三角形 AOE, AOG ニ 於テ, 二ッノ 邊 AO, OE ハ 夫々 二ッノ 邊 AO, OG ニ 等シク, 第三 邊 AE ハ 第三

邊 AG ヨリ 小ナル ヲ 以テ,
角 AOE ハ 角 AOG ヨリ 小ナリ. I, 20.

次ニ, E'OF' ヲ 平面 P 上ニ 在リテ CD ト 鋭角 COE ニ 等シキ 鋭角 COE' ヲ 爲ス 直線, LOM ヲ 平面 P 上ニ 在リテ OC ニ 垂線ナル 直線 トセヨ:
然ルトキハ (丙) 角 AOE, AOE' ハ 相等シカル 可シ, 又 角 AOL, AOM ハ 各 直角 ナル 可シ.

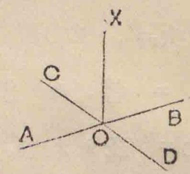
最初ノ 部分 ハ 恰モ (乙) ト 同一ノ 方法 ニ 由リテ 證明スル ヲ 得; 但 I, 19 及 20 ニ 依ラズ, I, 9 及 21 ヲ 引用ス.
第二ノ 部分ハ 角 COL, COM ガ 相等シキ ヲ 以テ, 最初ノ 部分 ト 同様ニ 角 AOL, AOM ガ 相等シキ ヲ 證明スル ヲ 得; 故ニ 各 直角 ナリ.

系. 斜線 ハ 平面 上 其ノ 平面 トノ 交點 ヲ 過ル 一ッノ 直線 ニ 垂線ナリ, 而シテ 唯 一ッ ニ 限ル.

定義 11. 一ッノ 直線 ガ 一ッノ 平面 ト 爲ス 角 トハ 直線 ガ 平面 上 其 直線 ノ 正射影 ト 爲ス 所ノ 角 ナリ.

定理 18. 相交ル 二ッノ 直線 ニ 垂線ナル

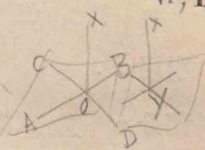
直線ハ其ノ平面ニ垂直ナリ.



直線 OX ヲ相交ル二ツノ直線 AOB, COD ニ其ノ交點 O ニ於テ垂線ナリトセヨ:

然ルトキハ OX ハ AOB, COD ノ平面ニ垂直ナル可シ.

若シ OX ガ斜線ナレハ, 一ツノ平面上二ツノ直線ニ垂線ナル能ハズ; VI, IV, 17, 系.



故ニ OX ハ斜線ナラズ;

即 OX ハ垂線ナリ.

O ヲ過ラズシテ, AOB 及 COD ニ垂線ナル直線ハ OX ニ平行ナルヲ以テ, VI, 定義 6.

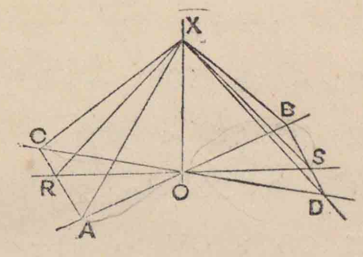
OX ガ垂線ナレハ, 其直線モ亦垂線ナリ. VI, 13.

此定理ハ頗ル重要ナルモノナリ; 故ニ下ニ定理 17 ニ依ラザル(ユークリッドノ)證明法ヲ示ス:

此方法ハ O ヲ過リ AB, CD ノ平面上ニ任意ノ直線 ROS ヲ引キ, OX ガ之ニ垂線ナルコトヲ證明スルニ在リ:

OA ヲ OB ニ等シク, OC ヲ OD ニ等シク取リ, AC,

BD ヲ結ヒ付ケ, ROS ト R, S ニ於テ交ラシメ; OX 上任意ノ點 X ヲ取リ, AX, BX, CX, DX, RX, SX ヲ結ヒ付クレハ,



先ツ三角形 AOC, BOD ガ全ク相等シク, I, 9

次ニ三角形 AOR, BOS ガ全ク相等シク, I, 15.

次ニ三角形 AOX, BOX ガ全ク相等シク, I, 9.

又三角形 COX, DOX ガ全ク相等シク, I, 9.

次ニ三角形 ACX, BDX ガ全ク相等シク, I, 21.

次ニ三角形 RAX, SBX ガ全ク相等シク, I, 9

次ニ三角形 ROX, SOX ガ全ク相等シク, I, 21.

因リテ, 角 ROX, SOX ガ相等シク, 各直角ナルヲ證明スルヲ得.

系 1. 同一ノ點ヲ過ル三ツノ直線ガ同一ノ直線ニ垂線ナレハ, 同一ノ平面上ニ在リ.

何トナレハ, 直線 AOB, COD, ROS ガ同一ノ直線 OX ニ垂線ニシテ, 同一ノ平面上ニ在ラザレハ, OX, ROS ノ平面ガ AOB, COD ノ平面ト R'OS' ニ於テ

交ル トセヨ;

然レハ 角 XOS′ ハ 直角 ナリ, VI, 18.

又 角 XOS モ 直角 ナリ; 假設.

故ニ 角 XOS ハ 角 XOS′ ニ 等シ,

即 OS ト OS′ ハ 同一ノ 直線 ナラザル ヲ 得ズ;

故ニ AOB, COD, ROS ハ 同一ノ 平面 上ニ 在リ.

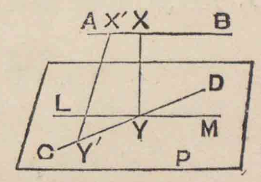
系 2. 一ツノ 定マレル 直線 ニ 垂線ナル 直線 ガ 其 直線 ヲ 軸 トシテ 廻轉スル トキハ, 一ツノ 平面 ヲ 畫ク.

定理 19. 同一ノ 平面 上ニ 在ラザル 二ツノ 直線 ニ 垂線ナル 直線 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯一ツ ニ 限ル; 此 垂線 ハ 二ツノ 直線 ノ 間 ノ 最短キ 距離 ナリ.

AB, CD ヲ 同一ノ 平面 上ニ 在ラザル (相交ラズ 又 平行ナラザル) 二ツ ノ 直線 トセヨ:

然ルトキハ AB, CD ニ 垂線ナル 直線 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル 可シ.

CD ヲ 過リ AB ニ 平行ナル 平面 ハ 一ツ 有リ, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル; VI, 4, 系 2.



P ヲ 此 平面 トセヨ;

P 上ニ AB ノ 射影 ヲ LM トセヨ;

LM ハ AB ニ 平行ナル ヲ 以テ, VI, 16, 系.

CD ニ 平行ナラズ,

故ニ LM ハ CD ト 一ツノ 點 Y ニ 於テ 交ル;

LM ノ 上ノ 點 ハ AB ノ 上ノ 或ル 點 ノ 射影 ナリ,

今 Y ハ 直線 AB 上ノ X 點 ノ 射影 ナリ トセヨ:

然レハ XY ハ 平面 P ニ 垂直ナル ヲ 以テ, CD ニ 垂線ナリ;

又 LM ニ 垂線ナリ,

故ニ LM ニ 平行ナル AB ニ モ 垂線ナリ;

即 XY ハ AB, CD 兩 直線 ニ 垂線ナリ.

若シ XY ノ 他ニ 兩 直線 ニ 垂線ナル 直線 X′Y′ 有ル ヲ 得ハ,

X′Y′ ハ Y′ ヲ 過リ AB ニ 平行ナル 直線 ニ 垂線ナリ;

而シテ 此 直線 ハ 平面 P 上ニ 在ルヿ ハ 定理 VI, 4 ニ 依リテ 明ナリ;

故ニ X′Y′ ハ 平面 P ニ 垂直ナリ, VI, 18.

故ニ Y′ ハ X′ ノ 射影 ニシテ LM ノ 上ニ 在リ,

故ニ XY ノ 他ニ 兩 直線 ニ 垂線ナル 直線 有ル ヲ 得ズ;

即 XY ハ AB, CD 兩 直線 ニ 垂線ナル 唯 一ツノ 直線 ナリ

次ニ, XY ハ AB, CD ノ 間ノ 最短キ 距離 ナル 可シ

X'Y' ヲ AB, CD ノ 間ノ 他ノ 任意ノ 一ツノ 距離 トセヨ:

X'Y' ハ 平面 P ニ 垂線ナラザル ヲ 以テ,

X' ヨリ 平面 P ヘ ノ 垂線 ヨリ 大ナリ;

而シテ 此 垂線 ハ X' ヨリ LM ヘ 引クル 垂線ナリ,

故ニ XY ニ 等シ;

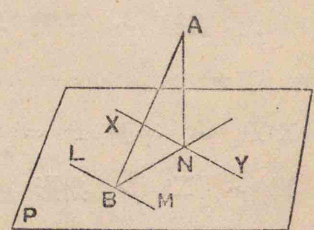
故ニ XY ハ X'Y' ヨリ 小ナリ,

即 XY ハ 最短キ 距離 ナリ,

作圖題 1. 一ツノ 與ヘラレタル 平面 外ノ 與ヘラレタル 點 ヨリ 其 平面 ヘ 垂線 ヲ 引クコ.

A ヲ 與ヘラレタル 平面 P 外ノ 與ヘラレタル 點 トス:

A ヨリ P ヘ 垂線 ヲ 引クコ ヲ 求ム.



平面 P 上ニ 任意ノ 直線 LM ヲ 引キ,

A ヨリ LM ヘ 垂線 AB ヲ 引ク;

平面 P 上ニ 於テ, BN ヲ LM ニ 垂線ニ 引ク;

A ヨリ BN ヘ 垂線 AN ヲ 引ク;

AN ハ 求ムル 所ノ 垂線 ナリ.

N ヲ 過リ XNY ヲ LM ニ 平行ニ 引ク;

LM ハ AB 及 BN ニ 垂線ナル ヲ 以テ, 其ノ 平面 ニ 垂直ナリ; VI, 18

故ニ XY モ 亦 其ノ 平面 ニ 垂線ニシテ, VI, 13

角 ANY ハ 直角 ナリ;

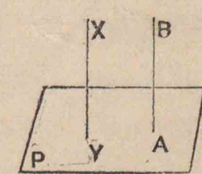
故ニ AN ハ BN 及 NY ニ 垂線ナル ヲ 以テ,

其ノ 平面 即 P ノ 垂線 ナリ. VI, 18

作圖題 2. 一ツノ 與ヘラレタル 平面 上ノ 與ヘラレタル 點 ヨリ 其 平面 ニ 垂線 ヲ 引クコ.

A ヲ 與ヘラレタル 平面 P 上ノ 與ヘラレタル 點 トス:

A ヨリ P ニ 垂線 ヲ 引クコ ヲ 求ム.



P 外ニ任意ノ點 X ヲ取リ, X ヨリ P ヘ垂線 XY ヲ引ク; VI, 作 1.

A ヨリ XY ニ平行ニ AB ヲ引ク;

AB ハ求ムル所ノ垂線ナリ. VI, 13.

第二節之問題.

問題 19. 一ツノ點ヨリ一ツノ平面ヘ引クル斜線ノ中, 正射影ガ相等シキモノハ相等シ; 正射影ガ大ナルモノガ他ヨリ大ナリ.

問題 20. 問題 19 ノ逆ヲ證明セヨ.

問題 21. 定理 13 ヲ VI, 9 ニ依ラズ, VI, 18 ヲ用ヰテ, 證明セヨ.

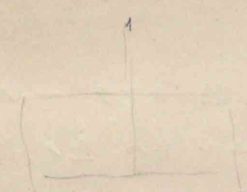
問題 22. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリ相等シキ距離ニ在ル點ノ軌跡ヲ求ム.

問題 23. 一ツノ點ヨリ, 一ツノ直線ヘ及此直線ヲ過ル平面ヘ垂線ヲ引ケバ, 垂線ノ足ヲ結ビ付クル直線ハ其直線ニ垂線ナリ.

問題 24. 一ツノ點 X ヨリ一ツノ平面 P ヘ垂線 XY ヲ引キ, Y ヨリ P 上ノ直線 AB ヘ垂線 YN ヲ

引ケバ, XN ハ AB ニ垂線ナリ.

問題 25. 三角形 ABC ノ垂心 O ヨリ其ノ平面ニ垂線 OP ヲ引ケバ, 直線 PA ハ A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ニ垂線ナリ.



第三節.

二面角及立體角.

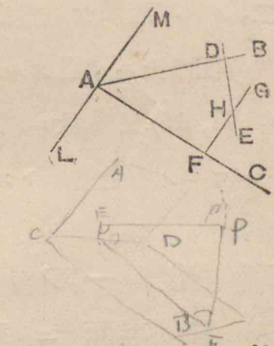
定義 12. 相交ル二ツノ平面ハ**二面角**ヲ爲スト云フ. 二面角ノ大サハ二ツノ平面ノ交リナル直線上ノ任意ノ點ヨリ夫々一ツノ平面上ニ於テ此直線ニ垂線ニ引クル二ツノ直線ノ夾ム平面角ノ大サヲ以テ之ヲ度ル.

二ツノ平面ノ交リヲ軸トシテ一ツノ平面ヲ廻轉セシメ他ノ平面ト合セシムルトキハ, 上ノ如ク引クル二ツノ直線モ亦相合ス; 故ニ此平面ガ最初ノ位置ヨリ最後ノ位置ニ達スルマテノ廻轉ノ度ハ恰モ直線ガ最初ノ位置ヨリ最後ノ位置ニ達スルマテノ廻轉ノ度ニ同シ; 二ツノ二面角ニ於テ, 此平面角ガ相等シケレハ, 二ツノ二面角ハ全ク相合スル樣ニ重リ合ハスヿヲ得, 即相等シ. 加之, 交リノ上ノ何レノ點ヨリ之ニ垂線ナル直線ヲ引クモ (各一ツノ平面上ニ), 其ノ角ハ常ニ同一ナリ (VI, 9). 故ニ此二ツノ直線ノ夾角ノ大サヲ以テ二ツノ平面ノ

爲ス二面角ノ大サヲ度ルハ至當ノ事ナリ.

二ツノ平面ノ爲ス二面角ノ大サハ又其ノ垂線ノ爲ス角ヲ以テ之ヲ度ルヲ得.

二ツノ平面 P, Q ガ直線 LM ニ於テ交ルトセヨ:



直線 LM 上ニ任意ノ點 A ヲ取リ, AB, AC ヲ夫々平面 P, Q 上ニ於テ LM ニ垂線ニ引ク;

角 BAC ハ平面 P, Q ノ爲ス二面角ノ大サヲ度ル角ナリ:

LM ハ平面 BAC ニ垂直ナリ; VI, 18.

故ニ AB 上任意ノ點 D ヨリ平面 BAC 上ニ於テ之ニ垂線 DE ヲ引ケハ,

DE ハ平面 P ニ垂直ナリ; VI, 18.

同樣ニ AC 上任意ノ點 F ヨリ平面 BAC 上ニ於テ之ニ垂線 FG ヲ引ケハ,

FG ハ平面 Q ニ垂直ナリ;

DE, FG ヲ H ニ於テ交ルトセヨ;

然レハ A, D, H, F ヲ過ル圓ヲ畫クヲ得; II, 19, 系 2.

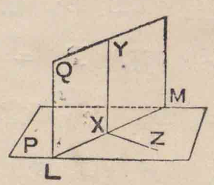
故ニ角 DHG ハ角 BAC ニ等シ; II, 19, 系 1.
即平面 P, Q ノ垂線ノ交角ハ其ノ爲ス二面角ノ大サヲ度ル角ニ等シ; 故ニ其ノ大サヲ以テ, 其二面角ノ大サヲ度ルヲ得.

定義 13. 二ツノ平面ノ爲ス二面角ガ直角ナルトキハ, 二ツノ平面ハ互ニ**垂直**ナリト云フ.

二ツノ平面ガ垂直ナルトキハ, 其ノ交リニ垂線ニ一ツノ平面上ニ引ケル直線ハ他ノ平面ニ垂直ナルコト明ナリ (VI, 18). 故ニ或ハ之ヲ以テ, 二ツノ平面ノ垂直ナルコトノ定義トス.

定理 20. 一ツノ平面ノ垂線ヲ含ム平面ハ其平面ニ垂直ナリ.

XY ヲ X 點ニ於テ平面 P ノ垂線, Q ヲ XY ヲ含ム任意ノ平面トセヨ:
然ルトキハ平面 Q ハ平面 P ニ垂直ナル可シ.



LM ヲ平面 P, Q ノ交リトセヨ;
X ヲ過リ平面 P 上ニ XZ ヲ LM ニ垂線ニ引ケ;

然レハ XY ハ P ニ垂直ナルヲ以テ,
角 YXZ ハ直角ナリ;
而シテ YXZ ハ P, Q ノ爲ス二面角ヲ度ル角ナリ;
故ニ P, Q ハ互ニ垂直ナリ.

系 1. 一ツノ點ニ於テ相交ル三ツノ直線ノ各ガ他ノ二ツニ垂線ナレハ, 之ヲ二ツヅヽ含ム三ツノ平面ノ各ガ他ノ二ツニ垂直ナリ.

系 2. 二ツノ相交ル平面ガ各第三ノ平面ニ垂直ナルトキハ, 其ノ交リモ亦第三ノ平面ニ垂直ナリ.

定義 14. 三ツ以上ノ平面ガ一ツノ點ニ於テ出會ヒ尖リタル形ヲ境スルモノト見做ストキハ, **立體角**或ハ**多面角**ヲ爲スト云フ. 其點ヲ立體角ノ**頂點**ト稱ス; 平面ノ交ル直線ヲ其ノ**稜**ト稱ス. 三ツノ平面ガ爲ス立體角ヲ**三面角**ト稱ス.

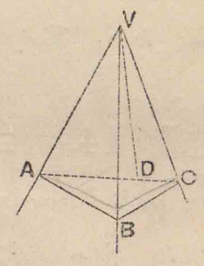
定理 21. 三ツノ平面ガ立體角ヲ爲ストキハ, 其ノ稜ガ頂點ニ於テ爲ス所ノ三ツノ平面角ハ何レノ二ツヲ取ルモ合セテ第三ノ角ヨリ大ナリ

三ッノ 平面 AVB, BVC, CVA ガ V ニ 於テ 立體角 ヲ 爲ス トセヨ:

然ルトキハ 平面角 AVB, BVC, CVA ノ 中, 何レノ 二ッ ヲ 取ルモ, 其ノ 和 ハ 第三ノ 角 ヨリ 大ナル 可シ.

三ッノ 角 ガ 相等シケレバ 此 定理 ハ 明白ナリ.

若シ 然ラザレバ 角 AVC ヲ 他ノ 二ッノ 何レ ヨリモ 小ナラズ トセヨ;



然レバ 他ノ 二ッノ 角 ガ 合セテ 角 AVC ヨリ 大ナルヿ ヲ 證明スレバ 足レリ:

平面 AVC ニ 於テ 角 AVD ヲ 角 AVB ニ 等シク 作レ; 直線 ADC ヲ 引キ, VD ト D ニ 於テ 交ラシメヨ;

VB ヲ VD ニ 等シク 取リ, AB, BC ヲ 結ビ付ケヨ;

二ッノ 三角形 AVB, AVD ニ 於テ, 二ッノ 邊 AV, VB ハ 夫々 二ッノ 邊 AV, VD ニ 等シク, 夾角 AVB ハ 夾角 AVD ニ 等シ;

故ニ AB ハ AD ニ 等シ;

故ニ BC ハ 三角形 ノ 二 邊 AB, AC ノ 差 ナル DC ヨリ 大ナリ;

二ッノ 三角形 BVC, DVC ニ 於テ, 二ッノ 邊 BV, VC ハ 夫々 二ッノ 邊 DV, VC ニ 等シク, 底邊 BC ハ 底邊 DC ヨリ 大ナリ;

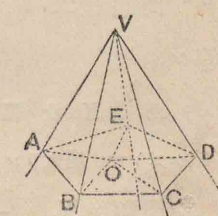
故ニ 角 BVC ハ 角 DVC ヨリ 大ナリ;

故ニ 角 AVB, BVC ハ 合セテ 角 AVC ヨリ 大ナリ.

定理 22. 一ッノ 立體角 ノ 頂點 ニ 於テノ 平面角 ノ 和 ハ 四 直角 ヨリ 小ナリ.

V ヲ 任意ノ 數 ノ 平面 ガ 出會ヒテ 爲ス 所ノ 立體角 ノ 頂點 トセヨ:

V ニ 於テノ 平面角 ノ 和 ハ 四 直角 ヨリ 小ナル 可シ.



一ッノ 平面 ヲ 畫キ, 立體角 ノ 稜 ト A, B, C, D, E ニ 於テ 交リ, 多角形 ABCDE ヲ 爲ス トセヨ:

此 多角形 內ニ 任意ノ 點 O ヲ 取リ, AO, BO, CO, DO, EO ヲ 結ビ付ケヨ:

角 VAB, VAE ノ 和 ハ 角 BAE ヨリ 大ナリ, VI, 21.

即 角 BAO, EAO ノ 和 ヨリ 大ナリ;

B, C, D, E ニ 於テモ 亦 同樣ナリ;

故ニ 頂點 ガ V ニ 在ル 總テノ 三角形 ノ 底角 ノ 和 ハ 頂點 ガ O ニ 在ル 總テノ 三角形 ノ 底角 ノ 和 ヨリ

大ナリ;

而シテ 此 二 組 ノ 三角形 ハ 同 數 ナル ヲ 以テ, 其ノ 總テノ 角 ノ 和 ハ 相等シ;

故ニ V ニ 於テノ 總テノ 角 ノ 和 ハ O ニ 於テノ 總テノ 角 ノ 和 ヨリ 小ナリ;

即 V ニ 於テノ 平面角 ノ 和 ハ 四 直角 ヨリ 小ナリ.

附言. 此 定理 ハ 凸立體角, 即 一ツノ 平面 ニ 依リテノ 截リ口 (ABCDE) ガ 凸多角形 ナル モノ ニ 限リ 眞ナリ.

第三 節 ノ 問題.

*問題 26. 二ツノ 平面 ガ 交レハ, 對頂二面角 ハ 相等シ.

此 問題 及 問題 28 等 ニ 於テ 用井タル 語 ノ 意義 ハ 別ニ 定義 ヲ 揭ケズシテ 明ナラン; 故ニ 略ス.

*問題 27. 一ツノ 二面角 ヲ 爲ス 二ツノ 平面 ガ 夫々 他ノ 一ツノ 二面角 ヲ 爲ス 二ツノ 平面 ニ 平行ナレハ, 二ツノ 二面角 ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角 ナリ.

*問題 28. 一ツノ 平面 ガ 二ツノ 平行ナル 平面 ト 交レハ, (甲) 其ノ 爲ス 所ノ 錯二面角 ハ 相等シ; (乙) 同位二面角 ハ 相等シ; (丙) 同シ 側ニ 在ル 二ツノ 內二面

角 ノ 和 ハ 二 直角 ニ 等シ.

*問題 29. 一ツノ 與ヘラレタル 直線 ヲ 過リ, 一ツノ 與ヘラレタル 平面 ニ 垂直ナル 一ツノ 平面 ヲ 畫ク ヲ 得, 而シテ 唯 一ツ ニ 限ル.

*問題 30. 若シ 三ツノ 平面 ノ 各 ガ 他ノ 二ツ ニ 垂直ナレハ, 其ノ 交リ ナル 三ツノ 直線 ノ 各 ハ 他ノ 二ツ ニ 垂線ナリ.

*問題 31. 一ツノ 平面 上ノ 直線 ガ 他ノ 平面 上ニ 其ノ 射影 ト 爲ス 銳角 ノ 中, 二ツノ 平面 ノ 交リ ニ 垂線ナル 直線 ノ 爲ス 角 即 二面角 ヲ 度ル 平面角 ガ 最大ナリ.

*問題 32. 二ツノ 立體角 ヲ 成ス 平面角 及 二面角 ガ 夫々 同シ 順 ニ (兩 方 共ニ 右 ヨリ 左 ヘ, 或ハ 左 ヨリ 右 ヘ) 取リテ 相等シクレハ, 二ツノ 立體角 ハ 重リ 合ハスコ ヲ 得.

*問題 33. 二ツノ 立體角 ノ 平面角 及 二面角 ガ 反對ノ 順 ニ (即 一ツ ハ 右 ヨリ 左 ヘ, 一ツ ハ 左 ヨリ 右 ヘ) 取リテ 相等シクレハ, 如何?

[此 塲合 ニ 於テハ, 一ツノ 立體角 ヲ 裏返セハ (恰モ 袋 ヲ 其ノ 內部 ガ 外ニ 出ル 樣ニ 裏返ス 如ク), 二ツノ 立體角 ハ 重リ 合ハスコ ヲ 得: 一ツノ 立體角 ハ 他 ヲ

鏡 ニ 寫シテ 見タル 像 ノ 如シ. 又 一ツノ 立體角 ノ 稜 ヲ 各 頂點 ヲ 越ヘテ 延長スレハ, 丁度 全ク 他 ニ 等シキ 立體角 ヲ 得. 斯ノ如キ 關係 有ル 二ツノ 立體角 ハ 對稱的ニ 相等シ ト 云フ; 又 一ツ ヲ 他 ノ 像 ナリ ト 云フ.

先ニ 第一 編 定義 44 及 45 ニ 於テ 平面圖 ノ 點 及 線 ニ 付テノ 對稱 ヲ 陳ヘタル ガ, 之 ヲ 擴張シテ 一ツノ 平面 上ニ 在ラザル 圖形 ニ 付テモ 同樣ニ 點對稱 及 線對稱 ヲ 論スル ヲ 得. 加之, 平面對稱 ナル モノ 有リ; 其ノ 定義 下ノ 如シ:

二ツノ 點 ヲ 結ヒ付クル 直線 ガ 一ツノ 平面 ニ 依リテ 直角 ニ 二等分サルヽ 𪜈ハ, 二ツノ 點 ハ 其 平面 ニ 付テ 對稱ナリ ト 云フ, 又 各 ヲ 他 ノ 像 ト 稱ス.

一ツノ 圖形 ニ 於テ, 各ノ 點 ニ 對シ 必ズ 一定ノ 平面 ニ 付テ 之 ニ 對稱ナル 點 有ル 𪜈ハ, 其 圖形 ハ 其 平面 ニ 付テ 對稱ナリ ト 云フ, 又 二ツノ 互ニ 相對稱ナル 部分 ニ 分ツ ヲ 得; 而シテ 各ノ 部分 ヲ 他 ノ 像 ト 稱ス.]

* 問題 34. 二ツノ 三面角 ハ 其ノ 平面角 ガ 夫々 相等シクレハ, 重リ 合ハスヿ ヲ 得ルカ 或ハ 對稱ナリ.

問題 35. 二ツノ 點 ヲ 結ヒ付クル 直線 ヲ 直角 ニ 二等分スル 平面 ノ 上ニ 畫キタル 平面圖 ノ 各ノ 點 ヲ

其 二ツノ 點 ニ 結ヒ付クル 𪜈ハ, 其 平面 ニ 付テ 對稱ナル 二ツノ 圖形 ヲ 得.

問題 36. 同一ノ 點 ニ 於テ 出會ヒ, 同一ノ 平面 上ニ 在ラザル 三ツノ 直線 有リ: 其 交點 ヲ 過リ, 三ツノ 直線 ト 相等シキ 角 ヲ 爲ス 直線 ヲ 引クヿ ヲ 求ム.

問題 37. A, B ハ 夫々 相交ル 二ツノ 平面 ノ 一ツノ 上ニ 在ル 點 ナリ; 平面 ノ 交リ ノ 上ニ 一ツノ 點 C ヲ AC, CB ノ 和 ガ 最小ナル 樣ニ 取ルヿ ヲ 求ム.

問題 38. 一ツノ 平面 P, 及 其ノ 上ニ 在ラザル 二ツノ 點 A, B 有リ; (甲) A, B ガ P ノ 同シ 側ニ 在レハ 平面 P ノ 上ニ 一ツノ 點 C ヲ AC, CB ノ 和 ガ 最小ナル 樣ニ 取ルヿ ヲ 求ム; (乙) A, B ガ P ノ 反對ノ 側 ニ 在レハ, 其ノ 上ニ C ヲ AC, CB ノ 差 ガ 最大ナル 樣ニ 取ルヿ ヲ 求ム.

第四節.

多面體.

定義 15. 多面體トハ平面ヲ以テ界シタル立體ナリ: 之ヲ界スル平面ノ數ニ由リテ, 四面體, 五面體, 六面體, 等ニ區別ス.

四ツヨリ少キ平面ガ一ツノ場所ヲ圍ミ込ム能ハザルヿハ公理的トス.

定義 16. 多面體ノ面トハ之ヲ界スル平面ノ其ノ限界タル部分ナリ. 多面體ノ稜トハ其ノ面ノ交リナル直線ナリ. 多面體ノ頂點トハ其ノ面ノ爲ス立體角ノ頂點ナリ.

多面體ノ面ハ多角形ナリ.

定義 17. 多面體ノ總テノ面ガ全ク相等シキ正多角形ニシテ, 總テノ角ガ相等シケレハ, 之ヲ正多面體ト稱ス.

定義 18. 平行六面體トハ相對スル面ガ夫々平行ナル六面體ナリ. 其ノ相對スル頂點ヲ結ヒ付クル

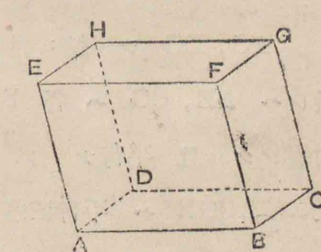
直線ヲ其ノ對角線ト稱ス.

圖 (定理 23 ノ) ニ於テ ABCD-EFGH ヲ平行六面體トセハ, 面 ABCD ハ面 EFGH ニ平行, 面 ABFE ハ面 DCGH ニ, 面 BCGF ハ面 ADHE ニ平行ナリ. AG, BH, CE, DF ハ各對角線ナリ.

一ツノ平行六面體ニハ八ツノ頂點, 十二ノ稜, 廿四ノ平面角及四ツノ對角線有リ.

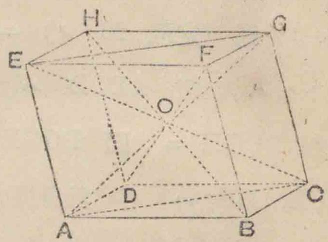
定理 23. 平行六面體ノ相對スル面ハ全ク相等シキ平行四邊形ナリ; 其ノ四ツノ對角線ハ同一ノ點ヲ過ル.

ABCD-EFGH ヲ平行六面體トセヨ:



然ルトキハ相對スル面 AC 及 EG ハ全ク相等シキ平行四邊形; 又 BE 及 CH, CF 及 DE モ夫々全ク相等シキ平行四邊形ナル可シ.

平面 AF ガ二ツノ平行ナル平面 AC, EG ト交ルヲ以テ,



其ノ 交リ AB, EF ハ 平行ナリ; VI, 7.
同樣ニ AE, BF モ 平行ナリ;
故ニ ABFE ハ 平行四邊形 ナリ;
同樣ニ 總テノ 面 ガ 各 平行 四邊形 ナリ:
故ニ AB ハ EF ニ 等シク,
BC ハ FG ニ 等シ;
又 AB, BC ハ 夫々 EF, FG ニ 平行ナル ヲ 以テ,
角 ABC ハ 角 EFG ニ 等シ; VI, 9
故ニ 二ツノ 平行四邊形 ABCD, EFGH ハ 全ク 相等シ:
同樣ニ 他ノ 二 双 ノ 相對スル 面 モ 夫々 全ク 相等シ.

次ニ, 四ツノ 對角線 AG, BH, CE, DF ハ 同一ノ 點 ヲ 過ル 可シ.

AC, EG ヲ 結ヒ付ケヨ;
然レハ AE, CG ハ 各 BF ニ 等シク 且 平行ナル ヲ 以テ 相等シク 且 平行ナリ;
故ニ ACGE ハ 平行四邊形 ニシテ 其ノ 對角線 AG, CE ハ 各 他 ヲ 二等分ス:
同樣ニ, CE, BH モ 各 他 ヲ 二等分ス;
BH, DF, 及 DF, AG モ 亦 然リ:

故ニ 此 四ツノ 對角線 ノ 中點 ハ 同一ノ 點 ナリ,
即 四ツノ 對角線 ハ 同一ノ 點 ヲ 過ル.

系. 平行六面體 ノ 稜 ハ 必ズ 四ツ ヅヽ 相等シク, 一ツノ 頂點 ニ 於テ 出會フ 三ツノ 稜 ハ 相等シカラザル ヲ 得ル モノ ナリ. 廿四ノ 平面角 ハ 四ツ ヅヽ 必ズ 相等シ.

定義 19. 平行六面體 ノ 對角線 ノ 交點 ヲ 其ノ 中心 ト 稱ス.

定義 20. 直六面體 トハ 各ノ 面 ガ 矩形 ナル 平行六面體 ナリ. 立方 トハ 各ノ 面 ガ 正方形 ナル 平行六面體 ナリ. 立方 ハ 正六面體 ナリ.

問題 39. 平行六面體 ノ 四ツノ 對角線 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ハ 十二ノ 稜 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ.

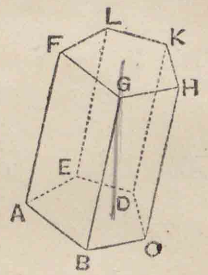
問題 40. 平行六面體 ノ 二 双 ノ 相對スル 面 ト 交リ, 他ノ 一 双 ト 交ラザル 平面 ニ 依リテノ 截リ口 ハ 平行四邊形 ナリ.

問題 41. 直六面體 ノ 對角線 ハ 皆 相等シク; 其ノ 上ノ 正方形 ハ 一ツノ 頂點 ニ 於テ 出會フ 三ツノ 稜 ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ.

定義 21. 角壔 トハ 一ツノ 直線 ニ 平行ナル (任意ノ

數ノ) 平面, 及 其 直線 ニ 出會ヒ 互ニ 平行ナル 二ツノ 平面 ノ 界スル 多面體 ナリ.

圖 ニ 於テ, AG, BH, CK, DL, EF ハ 同一ノ 直線 ニ 平行ナル 平面 ナリ トス;



其ノ 交リ AF, BG, CH, DK, EL ハ 皆 平行ナリ (VI, 6):

ABCDE, FGHKL ハ 之 ニ 出會ヒ 互ニ 平行ナル 二ツノ 平面 ナリ トス;

此 二ツノ 平面 ト 前ノ 平面 ノ 各 トノ 交リ ハ 平行ナリ (VI, 7), 即 AB ハ FG ニ, BC ハ GH ニ, CD ハ HK ニ, DE ハ KL ニ, EA ハ LF ニ 平行ナリ: 故ニ

定義 22. 直線 ニ 平行ナル 面 ハ 皆 平行四邊形 ナリ; 之 ヲ 角壔 ノ **側面** ト 稱ス; 側面 ノ 交リ ヲ **側稜** ト 稱ス. 又 兩 端 ニ 在ル 面 ハ 全ク 相等シク, 相等シキ 邊 ガ 平行ナル 多角形 ナリ; 之 ヲ 角壔 ノ **端面** ト 稱ス.

定義 23. 角壔 ノ 側稜 ガ 端面 ニ 垂直ナル トキハ, 之 ヲ **直角壔** ト 稱ス; 斜ナル トキハ, 之 ヲ **斜角壔** ト

斜角壔 ノ **傾キ** トハ 側稜 ト 端面 ノ 垂線 トノ

角 ナリ.

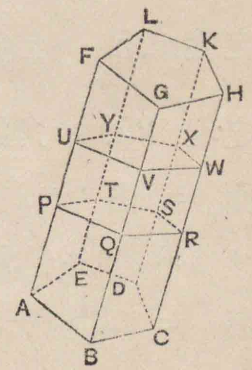
平行六面體 ハ 端面 ガ 平行四邊形 ナル 角壔 ナリ.

角壔 ハ 端面 ノ 邊 ノ 數 ニ 由リテ 三角壔, 四角壔, 五角壔, 等 ニ 區別ス.

定理 24. 角壔 ヲ 其ノ 端面 ニ 出會ハザル 二ツノ 平行ナル 平面 ニ 依リテ 截ル トキハ; 其ノ 截リ口 ハ 全ク 相等シキ 多角形 ナリ.

ABCDE-FGHKL ハ 角壔 ニシテ, 二ツノ 平行ナル 平面 ガ 之 ヲ 截リ口 PQRST, UVWXY ニ 於テ 截ル トセヨ 然ルトキハ PQRST, UVWXY ハ 全ク 相等シカル 可シ.

PQ, UV ハ 平行ナリ; VI, 7.



故ニ PQVU ハ 平行四邊形 ニシテ,

PQ, UV ハ 相等シ,

同樣ニ, 他ノ 相對應スル 邊 モ 亦 夫々 相等シ;

又 相對應スル 角 (PQR 及 UVW, QRS 及 VWX, 等) モ 亦 夫々 相等シ; VI, 9.

故ニ 二ツノ 多角形 ハ 全ク 相等シ.

*問題 42. 角壔ノ側面ノ面積ハ直截リ口(側稜ニ垂直ナル平面ニ依リテノ截リ口)ノ周ニ等シキ長サノ直線及一ツノ側稜ノ包ム矩形ニ等シ.

定義 24. 角錐トハ一ツノ平面多角形, 及其ノ邊ヲ底邊トシ(其平面外ノ)同一ノ點ヲ頂點トシタル三角形ノ界スル所ノ多面體ナリ. 多角形ナル面ヲ其ノ**底面**ト稱シ; 三角形ナル面ヲ**斜面**, 其ノ出會フ點ヲ**頂點**, 其ノ交リヲ**斜稜**ト稱ス. 頂點ヨリ底面ヘ引クル垂線ヲ其ノ**高サ**ト稱ス.

角錐ハ其ノ底面ノ邊ノ數ニ由リテ三角錐, 四角錐, 等ニ區別ス.

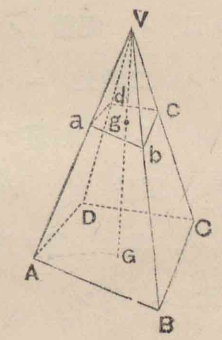
定義 25. 三角錐ハ特ニ之ヲ**四面體**ト稱ス.

定理 25. 角錐ヲ其ノ底面ニ平行ナル平面ニ由リテ截ルトキハ, (甲) 各ノ斜稜及高サハ同シ比ニ分タル; (乙) 截リ口ハ底面ニ相似ナル多角形ナリ.

V-ABCD ヲ角錐, $abcd$ ヲ底面 ABCD ニ平行ナル平面ニ依リテノ截リ口; VG ヲ其ノ高サ, g ヲ VG

ト平面 $abcd$ ノ交點トセヨ:

然ルトキハ (甲) VA, VB, VC, VD, VG ハ夫々 a, b, c, d, g ニ於テ同シ比ニ分タル可シ.



AB ハ ab ニ平行ナルヲ以テ, VI, 7.

$Va : aA :: Vb : bB$; V, 1, 系.

同様ニ $Vb : bB :: Vc : cC$, 等;

又 AG, ag ヲ結ヒ付クレハ,

AG ハ ag ニ平行ナルヲ以テ, VI, 7.

$Va : aA :: Vg : gG$;

故ニ斜稜及高サハ皆同シ比ニ分タル.

(乙) 多角形 $abcd$ ハ多角形 ABCD ニ相似ナル可シ

角 ABC ハ角 abc ニ等シク, VI, 9.

其他ノ相對應スル角モ夫々相等シ:

又 $VB : AB :: Vb : ab$ ナルヲ以テ, VI, 7.

$VB : Vb :: AB : ab$; 更迭.

同様ニ $VB : Vb :: BC : bc$;

故ニ $AB : ab :: BC : bc$;

故ニ $AB : BC :: ab : bc$; 更迭

同樣ニ 他ノ 對應邊 モ 比例 ヲ 爲ス:
故ニ 多角形 ABCD, $abcd$ ハ 相似ナリ.

問題 43. 角錐 ノ 底面 ニ 平行ナル 平面 ニ 依リテ ノ 截リ口 ノ 面積 ノ 比 ハ 頂點 ヨリ 其 平面 ノ 距離 ノ 比 ノ 二乘比 ニ 等シ.

問題 44. 相等シキ 高サ ノ 角錐 ヲ 底面 ニ 平行ニ シテ 各ノ 頂點 ヨリ 相等シキ 距離 ニ 在ル 平面 ニ 由リテ 截ル トキハ, 其ノ 截リ口 ノ 面積 ノ 比 ハ 其ノ 底面 ノ 面積 ノ 比 ニ 等シ.

*問題 45. (甲) 四面體 ノ 相對スル 稜 ノ 中點 ヲ 結ヒ付クル 三ツノ 直線 ハ 同一ノ 點 ヲ 過ル: (乙) 若シ 其 直線 ガ 互ニ 垂線ナル トキハ, 相對スル 稜 ハ 相等シク, 四ツ ノ 面 ハ 全ク 相等シ: (丙) 若シ 二 双 ノ 相對スル 稜 ガ 夫々 互ニ 垂線ナル トキハ, 第三 双 モ 亦 互ニ 垂線ナリ: (丁) 各ノ 頂點 ヲ 之 ニ 對スル 面 ノ 重心 ニ 結ヒ付クル 四ツノ 直線 ハ 同一ノ 點 ヲ 過リ, 各ノ 直線 ハ 此 點 ニ 於テ 比 3:1 ニ 分タル: (戊) 一ツノ 稜 ヲ 含ミ 之 ニ 對スル 稜 ノ 中點 ヲ 過ル 平面 ハ 皆 同一ノ 點 ヲ 過ル.

定理 26. 多面體 ノ 面 ノ 數 及 頂點 ノ 數 ノ 和 ハ 稜 ノ 數 ヨリ 2 丈ケ 多シ.

多面體 ノ 面 ノ 數 ヲ m ヲ 以テ 表ハシ, 頂點 ノ 數 ヲ c ヲ 以テ, 稜 ノ 數 ヲ r ヲ 以テ 表ハセ:
然ルトキハ $m+c=r+2$ ナル 可シ.

最初 一ツノ 面 ヲ 取リ, 之 ニ 他ノ 面 ヲ 一ツ ヅヽ 附ケ加ヘテ 以テ 多面體 ヲ 組立ル ト 想像セヨ; c_p, r_p ヲ 斯ノ如ク 組立ル 途中 面 ノ 數 ガ p ニ 至リタル 時 ノ c, r ノ 値 トセヨ:
最初ノ 面 ガ a 邊 ナリ トセハ,

$$c_1=a,\quad r_1=a \quad ニシテ,\quad c_1=r_1;$$

次ニ, 之 ニ 附ケ加フル 面 ヲ b 邊 ナリ トセハ,
此 面 ハ 最初ノ 面 ト 一ツノ 稜 及 二ツノ 頂點 ヲ 共有ス;
故ニ 新ニ 加ヘタル 稜 ノ 數 ハ $b-1$, 頂點 ノ 數 ハ $b-2$ ナリ;
故ニ $c_2=a+b-2$, $r_2=a+b-1$ ニシテ, $c_2+1=r_2$;
斯ク 一ツノ 面 ヲ 附ケ加フル 毎ニ 稜 ノ 數 ハ 頂點 ノ 數 ヨリ 一ツ 多ク 增加ス;
故ニ $c_3+2=r_3$, 等;
一般ニ $c_p+p-1=r_p$;
多面體 ノ 面 ノ 數 ハ m ナル ヲ 以テ, 最後 ヨリ 一ツ

前ノ面ヲ加ヘタル𪜈ハ, $c_{m-1}+m-2=r_{m-1}$:

最後ノ一面ハ之ヲ附ケ加ヘタル爲ニ一ツモ新ナル稜或ハ頂點ヲ得ズ;

故ニ $c=c_{m-1}$, $r=r_{m-1}$;

故ニ $c+m-2=r$,

即 $m+c=r+2$.

定理 27. 正多面體ハ五種有リ而シテ唯五種ニ限ル.

一ツノ立體角ヲ成スニハ, 三ツ以上ノ平面角ガ頂點ニ於テ出會フヿヲ要ス;

而シテ平面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ; VI, 22.

故ニ正多面體ノ面ハ正三角形或ハ正四邊形或ハ正五邊形ナラザルヲ得ズ;

何トナレハ, 正六邊形ノ一ツノ角ハ四直角ノ三分ノ一ナルヲ以テ, 之ヲ三ツ合スレハ四直角ニ等シク;

七邊形以上ナレハ其ノ角ヲ三ツ合スレハ四直角ヨリ大ナレハナリ:

同樣ニ六ツ以上ノ正三角形, 或ハ四ツ以上ノ正方形, 或ハ四ツ以上ノ正五邊形ハ立體角ヲ爲ス能ハズ:

故ニ正多面體ハ其ノ立體角ヲ爲ス面ガ

(1) 三ツノ正三角形, (2) 三ツノ正方形,

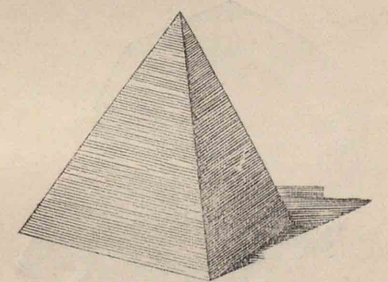
(3) 四ツノ正三角形, (4) 三ツノ正五邊形, 或ハ

(5) 五ツノ正三角形

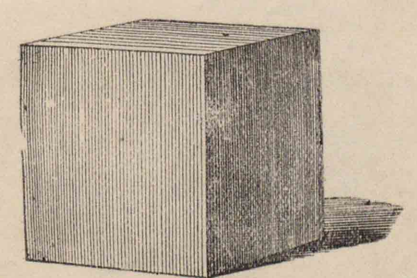
ナルモノノ外有ル能ハズ.

是ニ由リテ, 正多面體ヲ組立ツル𪜈ハ下ノ五ツヲ得; 而シテ此ノ外ニハ正多面體無シ:

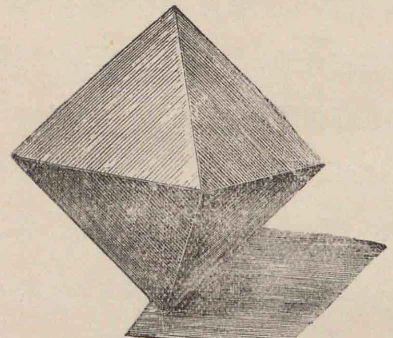
(1) 正四面體



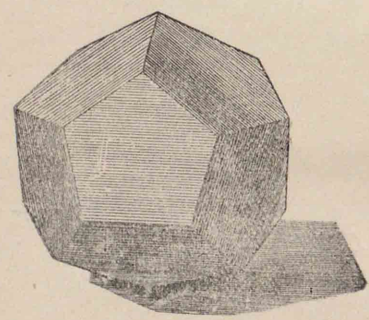
(2) 正六面體即立方



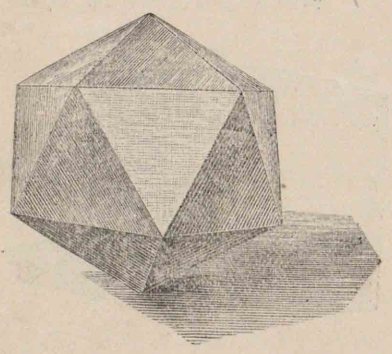
(3) 正八面體



(4) 正十二面體



(5) 正二十面體



第五節.

多面體 ノ 體積.

定義 26. 立體 ノ 體積 トハ 其ノ 限界 內ノ 場所 ノ 量ナリ. 二ツノ 立體 ガ 相等シ トハ 其ノ 體積 ガ 等シキ ヲ 云フ ナリ.

定義 27. 斜角壔 ノ 直截リ口 トハ 其ノ 側稜 ニ 垂直ナル 平面 ニ 依リテノ 截リ口 ナリ.

定理 28. 斜角壔 ハ 直截リ口 及 側稜 ガ 之 ニ 等シキ 直角壔 ニ 等シ.

ABCDE-FGHKL ヲ 斜角壔, PQRST ヲ 其ノ 直截リ口 トセヨ:

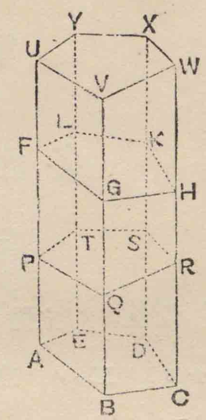
然ルトキハ ABCDE-FGHKL ハ 直截リ口 ガ PQRST ニ 等シク, 側稜 ガ AF ニ 等シキ 直角壔 ニ 等シカル 可シ.

斜角壔 ノ 總テノ 側面 ヲ 延長シ, PU ヲ AF ニ 等シク 取リ; U ヲ 過リ, PQRST ニ 平行ナル 平面 ヲ

畫キ,

側面ノ延長ト夫々 UV, VW, WX, XY, YU ニ於テ交ラシメヨ;

然レハ PQRST-UVWXY ハ直角壔ニシテ, 其ノ直截リ口ハ即 PQRST ナリ, 又其ノ側稜ハ AF ニ等シ:



多面體 ABCDE-PQRST ト多面體 FGHKL-UVWXY ハ總テノ相對應スル稜及角ガ夫々相等シ,

故ニ重リ合ハスヿヲ得 (是レ容易ニ證明スルヲ得), 即全ク相等シ;

故ニ双方ヘ多面體 PQRST-FGHKL ヲ加ヘタルモノハ相等シ;

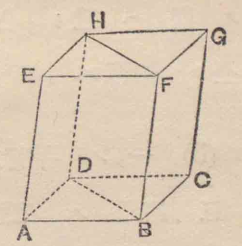
即斜角壔 ABCDE-FGHKL ハ直角壔 PQRST-UVWXY ニ等シ.

定理 29. 一ッノ平行六面體ヲ二ッノ相對スル稜ヲ含ム平面ニ依リテ分ツトキハ, 二ッノ部分ハ相等シ.

平行六面體 ABCD-EFGH ヲ二ッノ相對スル稜 BF, DH ヲ含ム平面ニ依リテ二ッノ部分 ABD-EFH, CDB-GHF ニ分チタリトセヨ:

然ルトキハ此二ッノ部分ハ相等シカル可シ.

各ノ部分ハ三角壔ナリ;



而シテ其ノ直截リ口ガ全ク相等シキヿハ容易ニ證明スルヲ得;

故ニ二ッノ部分ハ夫々一ッノ直角壔ニ等シク, VI, 28.

此二ッノ直角壔ノ直截リ口即端面ハ全ク相等シク, 側稜モ亦相等シ;

故ニ此二ッノ直角壔ハ重リ合ハスヲ得ルヿハ容易ニ證明スルヲ得,

即全ク相等シ;

故ニ二ッノ部分モ亦相等シ.

定理 30. 相等シキ底面及相等シキ高サノ平行六面體ハ相等シ.

此定理ハ下ノ如ク數段ニ別チテ證明スルヿ

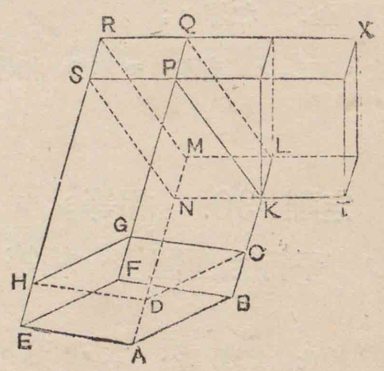
便宜ナリ.

(i) 高サ ガ 相等シク, 底面 ガ 全ク 相等シキ 直六面體 ハ 相等シ.

總テノ 相對應スル 稜 及 角 ガ 夫々 相等シキ ヲ 以テ 二ツノ 體 ハ 重リ 合ハスヿ ヲ 得,
即 全ク 相等シ.

(ii) 一ツノ 平行六面體 ハ 高サ ガ 其ノ 高サ ニ 等シク, 且 底面 ノ 底邊 及 高サ ガ 其ノ 底面 ノ 底邊 及 高サ ニ 等シキ 直六面體 ニ 等シ.

ABCD-EFGH (以下 略シテ AG トス) ヲ 一ツノ 平行六面體 トセヨ;
BC ニ 平行ナル 總テノ 面 ヲ 延長シ,
KL ヲ BC ニ 等シク 取リ;
K 及 L ヲ 過リ, KL ニ 垂直ナル 平面 ヲ 畫クハ,
平行六面體 NQ ヲ 得;
然レハ 多面體 ABFE-NKPS ト 多面體 DCGH-MLQR ハ 總テノ 相對應スル 稜 及 角



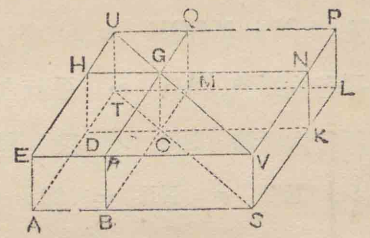
ガ 夫々 相等シキ ヲ 以テ,
全ク 相等シキヿ ハ 容易ニ 證明スル ヲ 得;
全 體 ABFE-MLQR ヨリ 各 ヲ 減シタル 殘リ ハ 相等シ;
即 平行六面體 AG ハ 平行六面體 NQ ニ 等シ:
今 平行六面體 NQ ノ 稜 NK ニ 平行ナル 總テノ 面 ヲ 延長シ, KT ヲ NK ニ 等シク 取リ,
K 及 T ヲ 過リ, KT ニ 垂直ナル 平面 ヲ 畫クハ,
平行六面體 KX ヲ 得;
而シテ 上 ト 同樣ニ 平行六面體 NQ, KX ハ 相等シキヿ ヲ 證明スル ヲ 得,
故ニ 平行六面體 AG ハ 平行六面體 KX ニ 等シ:
而シテ KX ハ 直六面體 ナルヿ 明ナリ;
又 其ノ 高サ ハ AG ノ 高サ ニ 等シク,
底面 TL ノ 底邊 KL 及 高サ KT ハ AG ノ 底面 ABCD ノ 底邊 BC 及 高サ NK ニ 等シ.

(iii) 高サ ガ 相等シク, 且 底面 ノ 底邊 及 高サ ガ 相等シキ 平行六面體 ハ 相等シ.

相等シキ 直六面體 ニ 等シキ ヲ 以テ ナリ.

(iv) 高サ 及 底面 ガ 相等シキ 二ツノ 直六面體 ハ 相等シ.

ABCD-EFGH 及 CKLM-GNPQ ヲ 高サ 及 底面 ガ 相等シキ 二ツ ノ 直六面體 トセヨ;



然レハ 底面 AC, KM ハ 矩形 ナル ヲ 以テ, CK, CM ガ 夫々 DC, BC ノ 延長 ナル 樣ニ, 二ツノ 體 ヲ 置ク ヲ 得;

二ツノ 體 ノ 高サ ガ 相等シキ ヲ 以テ,

面 EG, GP ハ 同一ノ 平面 上ニ 在リテ, GN, GQ ハ 夫々 HG, FG ノ 延長 ナリ;

AB 及 LK ノ 延長 ヲ S ニ 於テ 出會ハシメ, SC ヲ 結ヒ付クヨ;

AD, LM ノ 延長 ガ SC ノ 延長 ノ 上ノ 點 T ニ 於テ 出會フコ ハ 定理 III, 4 ニ 依リテ 容易ニ 證明スル ヲ 得;

故ニ ASLT-EVPU ハ 一ツノ 直六面體 ニシテ,

SV, TU ヲ 過ル 平面 ハ 之 ヲ 二ツノ 相等シキ 角壔 AST-EVU, LTS-PUV ニ 分ツ; VI, 29.

同樣ニ 角壔 BSC-FVG, KCS-NGV モ 相等シク,

又 角壔 DCT-HGU, MTC-QUG モ 相等シ;

故ニ 直六面體 AG, CP ハ 相等シ.

(v) 高サ 及 底面 ガ 相等シキ 平行六面體 ハ 相等シ. 相等シキ 直六面體 ニ 等シキ ヲ 以テ ナリ.

系 1. 相等シキ 底面 及 相等シキ 高サ ノ 角壔 ハ 相等シ.

是 ヨリ 第五 編 ニ 於ケル ト 同樣ノ 方法 ニ 由リテ, 下ノ 命題 ヲ 證明スル ヲ 得:

系 2. 底面 ガ 相等シキ 角壔 ノ 比 ハ 其ノ 高サ ノ 比 ニ 等シ.

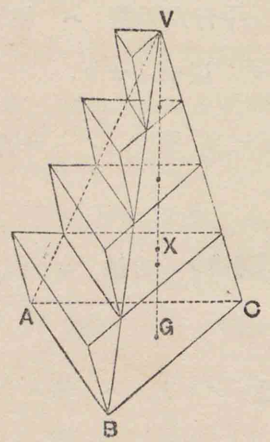
系 3. 高サ ガ 相等シキ 角壔 ノ 比 ハ 其ノ 底面 ノ 比 ニ 等シ.

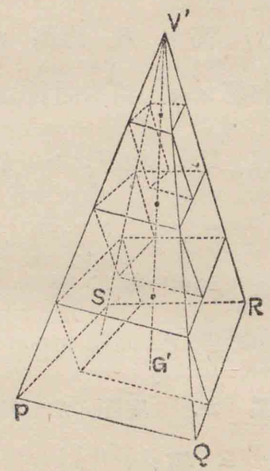
系 4. 二ツノ 角壔 ノ 比 ハ 其ノ 高サ 及 底面 ノ 比 ノ 相乘比 ナリ.

定理 31. 相等シキ 底面 及 相等シキ 高サ ノ 二ツノ 角錐 ハ 相等シ.

V-ABC 及 V′-PQRS ハ 二ツノ 角錐 ニシテ, 其ノ 底面 ABC, PQRS ガ 相等シク, 且 其ノ 高サ VG, V′G′ ガ 相等シ トセヨ:

然ルトキハ 二ツノ 角錐 ハ 相等シカル 可シ.





若シ 此 二ツノ 角錐 ガ 相等シカラザレハ,

V-ABC ガ V'-PQRS ヨリ 大ニシテ, 其ノ 體積 ノ 差 ハ 端面 ガ ABC, 高サ ガ GX ニ 等シキ 角壔 ニ 等シ トセヨ;

二ツノ 相等シキ 高サ VG, V'G' ヲ 各 GX ヨリ 小ナル 同數 ノ 相等シキ 部分 ニ 分テ;

各ノ 分點 ヲ 過リ 底面 ニ 平行ナル 平面 ヲ 畫ケハ,

二ツノ 角錐 ノ 相對應スル 截リ口 ハ 相等シキヿ ハ VI, 25 ニ 由リテ 明ナリ;

今 各ノ 截リ口 ヲ 端面 トシ, 角錐 ノ 高サ ヲ 等分シタル 各ノ 部分 ニ 等シキ 高サ ノ 角壔 ヲ 作レ,

但シ V-ABC ニ 於テハ 各ノ 角壔 ヲ 夫々ノ 截リ口

ヨリ 上ニ, 又 V'-PQRS ニ 於テハ 夫々ノ 截リ口 ヨリ 下ニ 在ル 樣ニ セヨ;

然レハ 角壔 ハ 皆 相等シキ 高サ ナル ヲ 以テ, 相等シキ 截リ口 ヲ 端面 トシタル 角壔 ハ 相等シ; VI, 30, 系 1

故ニ V-ABC ノ 方 ノ 角壔 ノ 和 ハ V'-PQRS ノ 方 ノ 角壔 ノ 和 ヨリ 最下ノ 角壔 ダケ 大ナリ;

然ルニ V-ABC ノ 方 ノ 角壔 ノ 和 ハ 角錐 ヨリ 大ニシテ, V'-PQRS ノ 方 ノ 角壔 ノ 和 ハ 角錐 ヨリ 小ナルヿ 明ナリ;

故ニ 角壔 ノ 和 ノ 差 ハ 角錐 ノ 差 ヨリ 大ナリ;

即 V-ABC ノ 方 ノ 最下ノ 角壔 ハ 同シ 端面 ABC 及 高サ GX ナル 角壔 ヨリ 大ナリ;

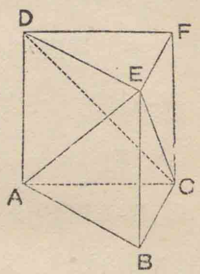
然ルニ 最下ノ 角壔 ノ 高サ ハ 角錐 ノ 高サ ヲ 等分シタル 部分 ノ 一ツ ナル ヲ 以テ, GX ヨリ 小ナリ;

故ニ 最下ノ 角壔 ハ 端面 ABC 及 高サ GX ナル 角壔 ヨリ 大ナル 能ハズ;

故ニ 二ツノ 角錐 ハ 相等シカラザル 能ハズ, 即 相等シ.

定理 32. 一ツノ 三角壔 ハ 三ツノ 相等シキ 三角錐 ニ 分ツ ヲ 得.

ABC-DEF ヲ三角壔トセヨ:
然ルトキハ之ヲ三ツノ相等シキ三角錐ニ分ツヲ得可シ.



平面 ACE, DCE ヲ畫クハ,
角壔ハ三ツノ三角錐 EABC, EADC, EFCD ニ分タル;
而シテ角錐 EADC 及 EFCD ノ底面 ADC, FCD ハ相等シク,
高サハ何レモ E 點ヨリ平面 ACFD ヘノ距離ナルヲ以テ,
角錐 EADC, EFCD ハ相等シ;
又角錐 EABC 及 EFCD ノ底面 ABC, DEF ハ相等シク,
高サハ何レモ平面 ABC, DEF ノ距離ナルヲ以テ,
角錐 EABC, EFCD ハ相等シ:
故ニ角壔 ABC-DEF ハ三ツノ相等シキ角錐 EABC, EADC, EFCD ニ分タル.

系 1. 角錐ハ底面及高サガ相等シキ角壔ノ三分ノ一ナリ.

系 2. 二ツノ角錐ノ比ハ其ノ底面及高サノ比ノ相乘比ナリ.

第六編ノ問題.

問題 46. 二ツノ點 A, B ヨリ一ツノ平面 P ヘ垂線 AX, BY ヲ引キ, 又直線 AB ニ垂直ナル平面ヲ引キ, P ト直線 LM ニ於テ交ラシム; 然ルトキハ LM ハ XY ニ垂線ナル可シ.

問題 47. 同一ノ直線ヲ過ル無數ノ平面有リ; 一ツノ點 X ヨリ此直線ヘ垂線 XY ヲ引ク; X ヨリ諸平面ヘ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ハ XY ヲ直徑トシタル圓ナリ.

問題 48. 四ツノ點有リ; 其ノ中, 何レノ二ツヲ取ルモ, 其ノ距離ハ他ノ二ツノ距離ニ等シ; 然ルトキハ其ノ一ツニ於テ他ノ三ツノ中各双ガ對スル三ツノ角ノ和ハ合セテ二直角ニ等シ.

問題 49. P ハ與ヘラレタル平面; OA, OB ハ與ヘラレタル點 O ヲ過リ P ニ平行ナル二ツノ直線ナリ O ヲ過リ夫々 OA, OB ニ垂直ナル二ツノ平面ノ交リハ P ニ垂直ナリ.

問題 50. 一ツノ三角壔ヲ三ツノ三角錐ニ分ツニ

六ツノ 方法 有ルヿ ヲ 證明セヨ.

問題 51. 與ヘラレタル 二面角 ヲ 二等分スルヿ.

問題 52. 正四面體 ニ 於テ, 高サ ハ 其ノ 足 ヨリ 一ツノ 面 ヘ 引クル 垂線 ノ 三倍 ニ 等シ.

二ツノ 多面體 ガ 相似ナリ トハ,

(第一), 其ノ 相似ノ 位置 ニ 在ル (即 相對應スル) 面 ガ 相似ニシテ;

(第二), 相似ノ 位置 ニ 在ル 二面角 ガ 夫々 相等シク;

(第三), 相似ノ 位置 ニ 在ル 立體角 ガ 夫々 全ク 相等シキ 時 ニ 云フ ナリ.

三ツノ 要件 ノ 中 第一 及 第二 ニ 適スレハ, 必ズ 第三 ニモ 適ス.

問題 53. 二ツノ 相似 多面體 ノ 小ナル モノ ヲ 大ナル モノ ノ 內ニ 入レ, 相對應スル 稜 ガ 平行ナル 樣ニ 置ク トキハ, 相對應スル 頂點 ヲ 結ヒ付クル 直線 ハ 同一ノ 點 ヲ 過ル.

問題 54. 二ツノ 相似 多面體 ノ 比 ハ 相對應スル 稜 ノ 比 ノ 三乘比 ナリ.

第七編.

球, 圓壔, 及 圓錐.

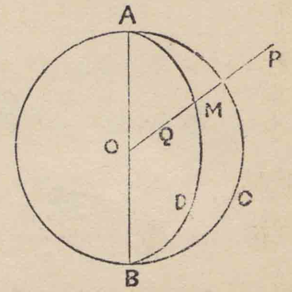
第一節.

球.

定義 1. 球 トハ 半圓 ヲ 其ノ 直徑 ヲ 軸 トシテ 一周 廻轉セシムル 時 生スル 所ノ 體 ナリ. 球 ヲ 界スル 表面 ヲ **球面** ト 稱ス.

[圓 トハ 正格ニ 云ヘハ 圓周 ヲ 以テ 圍ミタル 形 ヲ 指ス ナレ𪜈, 時トシテハ 之 ヲ 圓周 ノ 意義 ニ 用ヰルヿ 有ル 如ク, 球 或ハ 其他ノ 語 モ 時トシテハ 其 體 ヲ 圍ム 所ノ 表面 (即 球 ナレハ 球面) ノ 意義 ニ 用ヰルヿ 有リ; 其 ヲ 體 ノ 意義 ニ 用ヰタルカ, 或ハ 表面 ノ 意義 ニ 用ヰタルカ ハ 前後 ノ 關係 ニ 由リテ, 讀者 之 ヲ 判定スル ナリ, 是レ 頗ル 混雜 ヲ 生スル ノ 虞レ 有ル 如ク 見ユレ𪜈 實際 左程 困難ナラザル ハ 古ヨリノ 經驗 ニ 照シテ 知ル 可シ; 之 ヲ 避ケン トスル 爲ニ 生スル 困難 ノ 方 ガ 却テ 之 ヨリ 大ナルヿ 有リ.]

圖ニ於テ ACB ヲ中心 O ナル半圓トス:



其ノ直徑 AOB ヲ軸トシテ,之ヲ一周廻轉セシムルトキハ,球ヲ生ス:

今任意ノ一ツノ點有リ; ADB ヲ,半圓ガ廻轉シテ AB 及其點ノ定ムル平面ノ上ニ來リタル時ノ位置トセヨ;

其點ハ或ハ (P ノ如ク) 半圓 ADB ヲ完成シタル圓ノ外ニ在ルカ,或ハ (Q ノ如ク) 其圓ノ內ニ在ルカ,或ハ (M ノ如ク) 其圓周ノ上ニ在リ;

第一ノ場合ニ於テハ, P 點ハ又球ノ外ニ在リ而シテ圓ノ中心 O ヨリノ距離 OP ハ圓ノ半徑ヨリ大ナリ; 第二ノ場合ニ於テハ, Q 點ハ又球ノ內ニ在リ, 而シテ O ヨリノ距離 OQ ハ圓ノ半徑ヨリ小ナリ; 第三ノ場合ニ於テハ, M 點ハ球面ノ上ニ在リ, 而シテ距離 OM ハ圓ノ半徑ニ等シ: 故ニ

球面ハ一ツノ定マレル點ヨリ一定ノ距離ニ在ル點ノ軌跡ナリ,

トノ定義ヲ下シ,球ハ此表面ヲ以テ圍ミタル體

ナリトスルモ可ナリ:

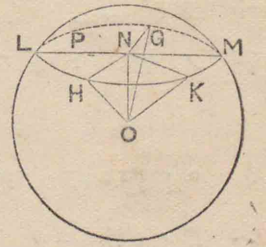
定マレル點 (即廻轉スル半圓ノ中心) ヲ球ノ**中心**,又ハ**球心**ト稱ス. 中心ヨリ球面ノ點ヘ引クル直線ヲ球ノ**半徑**ト稱ス; 總テノ半徑ガ (半圓ノ半徑ニ等シクシテ) 相等シキヿハ前ニ陳タルガ如シ. 中心ヲ過リ双方球面ニ於テ終ル直線ヲ球ノ**直徑**ト稱ス; 直徑ハ半徑ノ二倍ナリ. 直徑ノ兩端ニ在ル一双ノ點ヲ**對點**ト稱ス.

以上陳ヘタル所ニ由リテ, 球ニ付テモ II, 1, 及 II, 1, 系 1, 2, 及 II, 3 ニ掲ケタル圓ノ性質ト同樣ノ性質ヲ得ルヿ明ナリ.

定理 1. 球ヲ平面ニ依リテ截リタル截リ口ハ圓ナリ.

平面 P ガ中心 O ナル球ヲ截リ口 LHKMG ニ於テ截ルトセヨ:

然ルトキハ LHKMG ハ圓ナル可シ.



O ヨリ平面 P ヘ垂線 ON ヲ引キ, O ヲ截リ口ノ周ノ上ノ任意ノ點 H, K, G, 等ト結ヒ付ケヨ;

OH, OK, OG, 等ハ球ノ半徑ナルヲ以テ, 相等シ;
故ニ NH, NK, NG, 等ハ相等シ; VI, 11, 系 2.
故ニ截リ口ハ中心ガ N ナル圓ナリ.

系 1. 球ノ中心ヨリ相等シキ距離ニ在ル平面ニ依リテノ截リ口ノ半徑ハ相等シ: 相等シカラザル距離ニ在ル平面ニ依リテノ截リ口ノ中, 中心ニ近キ截リ口ノ半徑ガ大ナリ: 平面ガ中心ヲ過ル片ハ, 截リ口ノ半徑ハ最大ニシテ, 球ノ半徑ニ等シ.

系 2. 球ノ中心ト截リ口ノ中心ヲ結ビ付クル直線ハ截リ口ニ垂直ナリ.

定義 2. 球ノ中心ヲ過ル平面ニ依リテノ截リ口ヲ**大圓**ト稱ス: 他ノ平面ニ依リテノ截リ口ヲ**小圓**ト稱ス.

定義 3. 球ノ中心ヲ過リ, 大圓或ハ小圓ノ平面ニ垂直ナル直線ガ球面ト交ル二ツノ點ヲ其圓ノ**極**ト稱ス; 其直線ヲ其圓ノ**軸**ト稱ス.

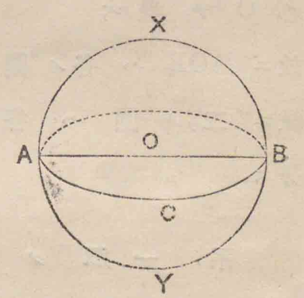
---

*問題 55. 球ノ截リ口ナル圓周ノ上ノ總テノ點ハ其ノ極ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

*問題 56. 同シ極ヲ有スル圓ノ平面ハ平行ナリ.

定理 2. 大圓ハ球ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ.

ABC ヲ中心 O ナル球ノ一ツノ大圓トセヨ:
然ル片ハ ACB ハ球ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ可シ.



一ツノ部分 AYB ヲ轉倒シ, 其ノ界ナル大圓ガ他ノ部分 AXB ノ界ナル大圓ト全ク相合シ, 兩ナガラ此大圓ノ同シ側ニ在ル樣ニ置クハ,
AXB 及 AYB ノ表面ノ總テノ點ハ中心 O ヨリ相等シキ距離ニ在ルヲ以テ, 二ツノ表面ハ全ク相合ス;
故ニ二ツノ部分ハ全ク相合シ, 全ク相等シ.

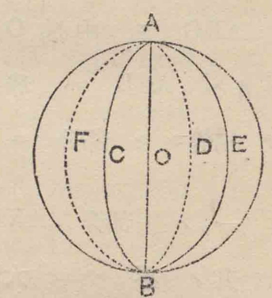
定義 4. 大圓ガ球ヲ分ツ所ノ各ノ部分ヲ**半球**ト稱ス.

定理 3. 二ッノ大圓ハ各他ヲ二等分ス.

互ひに円周が二等分され

ACBD, AEBF ヲ中心 O ナル球ノ二ッノ大圓ニシテ, 其ノ平面ガ直線 AB ニ於テ交ル トセヨ:
然ルトキハ ACBD, AEBF ハ各他ヲ二等分ス可シ.

二ッノ平面ハ何レモ球ノ中心ヲ過ルヲ以テ, AB ハ中心 O ヲ過ル;
故ニ AOB ハ各ノ圓ノ直徑ナリ;
故ニ二ッノ圓ハ各他ヲ二等分ス.

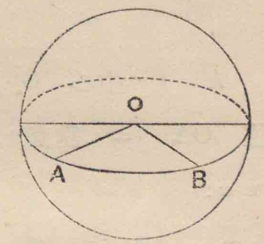


系. 一双ノ對點ヲ過ル大圓ノ數ハ限リ無シ.

問題 57. 球面上ノ一ッノ點ニ於テ出會フ所ノ大圓ハ又其ノ對點ニ於テ出會フ.

定理 4. 球面上對點ナラザル二ッノ點ヲ過ル大圓ハ唯一ッ有ルノミ.

A, B ヲ中心 O ナル球面上ノ二ッノ對點ナラザル點トセヨ:
然ルトキハ A, B ヲ過ル大圓ハ唯一ッ有ルノミナル可シ.



同一ノ直線上ニ在ラザル三ッノ點 A, B 及 O ヲ過ル平面ハ唯一ッ有ルノミ; VI, 1.
故ニ A, B ヲ過ル大圓ハ唯此平面ニ依リテノ截リ口ノミ.

此定理ヲ下ノ如ク陳フルヲ得.

系 1. 球面上對點ナラザル二ッノ點ハ一ッノ大圓ヲ定ム.

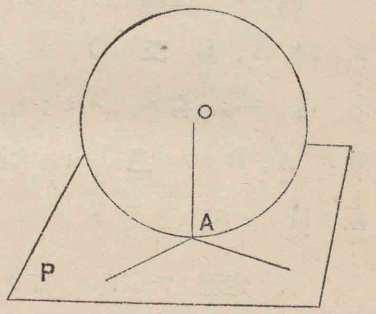
系 2. 一ッノ直線ハ球面ト二ッヨリ多クノ點ニ於テ出會フ能ハズ.

何トナレハ, 此直線及中心ノ定ムル平面ニ依リテノ截リ口ナル大圓ノ周ト二ッヨリ多クノ點ニ於テ出會フ能ハザレハナリ.

定理 5. 球面上ノ一ッノ點ヲ過ル總テノ平面ノ中, 獨リ其點ヘノ半徑

ニ 垂直ナル 平面 ハ 其他ノ 點 ニ 於テ 球面 ニ 出會ハズ.

A ヲ 中心 O ナル 球面 上ノ 一ツノ 點; P ヲ 半徑 OA ニ 垂直ナル 平面 トセヨ:



然ルトキハ A ヲ 過ル 總テノ 平面 ノ 中, 獨リ 平面 P ハ A ヨリ 他ノ 點 ニ 於テ 球面 ニ 出會ハザル 可シ.

OA ハ 平面 P ニ 垂直ナル ヲ 以テ, O ヨリ 平面 P 上ノ 他ノ 點 ヘ 引クル 直線 ハ 何レモ 半徑 OA ヨリ 大ナルコ ハ VI, 11 及 同 系 1 ニ 依リテ 明ナリ; 故ニ P 上 A ヨリ 他ノ 點 ハ 何レモ 球 ノ 外ニ 在リ. A ヲ 過ル 其他ノ 平面 (Q) ハ O ヨリ 之 ヘ 引クル 垂線 (ON) ガ 半徑 OA ヨリ 小ナル ヲ 以テ, 垂線 ノ 足 (N) ハ 球 ノ 內ニ 在リ, 而シテ 此 平面 ハ 球 ト (中心 N, 半徑 NA ナル) 圓 ニ 於テ 交ル: 故ニ 球面 ニ A ヨリ 他ノ 點 ニ 於テ 出會ハザル 平面 ハ OA ニ 垂直ナル 平面 P ノミ ナリ.

定義 5. 球面 ト 唯 一ツノ 點 ニ 於テ 出會ヒ, 四方 ヘ 窮リ無ク 延長スルモ 再ヒ 之 ト 出會ハザル 平面 ハ 其點 ニ 於テ 球 ニ **切ス**, 或ハ 球 ノ **切平面** ナリ ト 云フ: 其 點 ヲ **切點** ト 云フ.

或ハ 下ノ 如ク 之 ヲ 陳フル ヲ 得:
定理 1 ニ 於テ, 截リ口 ヲ 中心 ヨリ 漸々 遠クスレハ, 圓 ハ 漸々 收縮シ, 中心 ヨリノ 距離 ガ 丁度 半徑 ニ 等シキ トキハ, 圓 ハ 窮リ無ク 小ク 即 唯 一ツノ 點 ト ナル 此 位置 ニ 於テノ 平面 ヲ 球 ノ 切平面 ト 稱ス.

系 1. 切平面 上ニ 在リテ, 切點 ヲ 過ル 總テノ 直線 ハ 再ヒ 球面 ト 出會ハズ; 其 點 ヲ 過ル 其他ノ 直線 ハ 球面 ト 他ノ 一ツノ 點 ニ 於テ 交ル.

定義 6. 球面 ト 一ツノ 點 ニ 於テ 出會ヒ, 双 方 ヘ 窮リ無ク 延長スルモ 再ヒ 之 ト 出會ハザル 直線 ヲ 其 點 ニ 於テ 球 ニ **切ス**, 或ハ 球 ノ **切線** ナリ ト 云フ: 其 點 ヲ **切點** ト 稱ス.

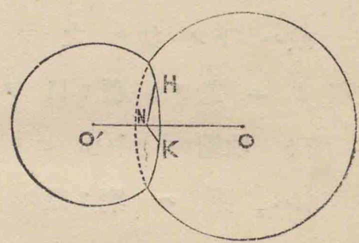
系 2. 球 ノ 切線 ハ 其ノ 切點 ヘ ノ 半徑 ニ 垂線 ナリ.

定理 6. 二ツノ 球 ガ 交ル トキハ, 其ノ 交

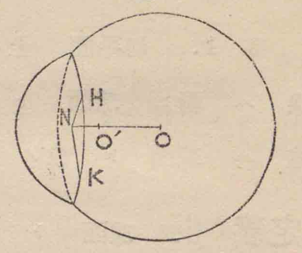
リ ハ 圓 ナリ: 圓 ノ 平面 ハ 球心 ヲ 結ヒ付クル 直線 ニ 垂直ニシテ, 中心 ハ 其直線 ノ 上ニ 在リ.

中心 O, O′ ナル 二ツノ 球 ガ 交ル トセヨ: 然ルトキハ 其ノ 交リ ハ 圓ニシテ, 其 圓 ノ 平面 ハ OO′ ニ 垂直, 其ノ 中心 ハ OO′ ノ 上ニ 在ル 可シ.

(甲)



(乙)



其ノ 交リ ノ 上ニ 任意ノ 二ツノ 點 H, K ヲ 取リ, OH, OK, O′H, O′K ヲ 結ヒ付ケヨ; 然レハ 二ツノ 三角形 OHO′, OKO′ ハ 全ク 相等シ; I, 21

故ニ H 及 K ヨリ 共通ノ 底邊 OO′ ヘ 引ケル 垂線 ハ 相等シク, 且 同一ノ 點 N ニ 於テ OO′ ニ 出會フコト ハ 容易ニ 證明スル ヲ 得;

故ニ HN, KN ハ OO′ ニ 垂直ナル 平面 ノ 上ニ 在リ, 且 HN ハ KN ニ 等シキ ヲ 以テ, H, K ハ 中心 N ナル 圓周 ノ 上ニ 在リ.

系 1. 二ツノ 球心 ヲ 漸々ニ 遠ク (甲 圖 ノ 場合) 或ハ 漸々 近クル (乙 圖 ノ 場合) トキハ, 其ノ 交リ ナル 圓 ハ 漸々 小ク ナリ, 遂ニ 窮リ無ク 小ク 即 一ツノ 點 ト ナル.

定義 7. 唯 一ツノ 點 ニ 於テ 出會フ 所ノ 二ツノ 球 ハ **相切ス** ト 云フ: 而シテ 各 ガ 全ク 他 ノ 外ニ 在ル トキハ **外切ス** ト 云フ; 一ツ ガ 全ク 他 ノ 内ニ 在ル トキハ **内切ス** ト 云フ.

系 2. 二ツノ 球 ガ 相切スル トキハ, 其ノ 中心 及 切點 ハ 同一ノ 直線 ノ 上ニ 在リ.

問題 58. 二ツノ 球 ガ 外切スレハ, 其ノ 中心 ノ 間ノ 距離 ハ 半徑 ノ 和 ニ 等シク; 内切スレハ, 半徑 ノ 差 ニ 等シ.

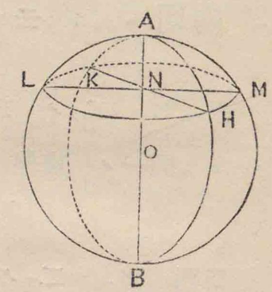
問題 59. 二ツノ 球 ガ 相切スレハ, 其ノ 切點 ニ 於テ 同一ノ 切平面 ヲ 有ス.

定義 8. 二ツノ 相交ル 圓 ノ 爲ス **角** トハ 交點 ニ 於テノ 切線 ノ 爲ス 角 ヲ 云フ.

定理 7. 一ツノ圓ノ極ヲ過ル大圓ハ其圓ヲ二等分シ，之ト直角ヲ爲ス.

LHMK ヲ中心 O ナル球面上ノ圓; A, B ヲ其ノ極; AHBK ヲ其ノ極ヲ過リ LHMK ト H 及 K ニ於テ交ル大圓トセヨ:

然ルトキハ AHBK ハ LHMK ヲ二等分シ，之ト直角ヲ爲ス可シ.



A, B ハ LHMK ノ極ナルヲ以テ，

直徑 AOB ハ其ノ中心 N ヲ過リ，其ノ平面ニ垂直ナリ;

故ニ大圓 AHBK ノ平面ガ圓 LHMK ノ平面ト交ル所ノ直線 HK ハ N ヲ過ル;

故ニ HK ハ LHMK ノ直徑ニシテ，之ヲ二ツノ全ク相等シキ部分ニ分ツ.

次ニ，平面 AHBK ハ LHMK ノ垂線 AB ヲ含ムヲ以テ，之ニ垂直ナリ;

故ニ圓 LHMK ノ H ニ於テノ切線ハ交リ HN ニ垂線ナルヲ以テ，平面 AHBK ニ垂直ナリ， VI, 定義 13

故ニ AHBK ノ H ニ於テノ切線ニ垂線ナリ;

即二ツノ圓ハ H ニ於テ直角ヲ爲ス:

同樣ニ，二ツノ圓ハ K ニ於テモ亦直角ヲ爲スヿヲ證明スルヲ得.

系 1. 極ヨリ圓ニ至ル大圓弧ハ皆相等シ.

系 2. 一ツノ大圓ノ極ヨリ之ニ至ル大圓弧ハ四分圓周ナリ.

系 3. 大圓上ノ(對點ナラザル)二ツノ點ヨリ一ツノ點ニ至ル大圓弧ガ各四分圓ナレハ，其點ハ其ノ極ナリ.

定義 9. 球面角トハ一ツノ球面上ノ二ツノ大圓ノ爲ス角ナリ.

定義 10. 球面多角形トハ大圓弧ヲ以テ圍ミタル球面ノ一部分ナリ.

球面多角形ノ邊，内角，外角，等ハ先ニ第一編定義 23 ヨリ 33 マテニ掲ケタルモノト同樣ナルヲ以テ，此ニハ別ニ其ノ定義ヲ掲ケズ.

球面多角形ハ同シ球面上ノ他ノ部分，或ハ等シキ半徑ノ他ノ球面上ニ移シ，全ク其ノ面上ニ在ル樣ニ置クヲ得ルヿハ定義 1 ニ付テ陳タル所ニ依リテ明ナリ.

以下二ッ以上ノ球面角，球面形，等ヲ比較スルハ總テ同シ球面上，或ハ相等シキ半徑ノ球面上ニ在ルモノナリ.

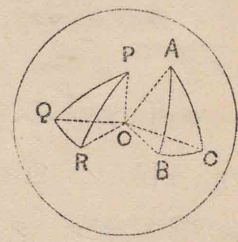
定義 11. **月形**（ツキガタ）トハ二ッノ大圓ノ半圓周ヲ以テ圍ミタル球面形ナリ.

定理 8. 二ッノ球面角ノ比ハ其ノ頂點ヲ極トシタル大圓ノ其角ノ邊ノ間ニ挿マレタル弧ノ比ニ等シ.

BAC, QPR ヲ中心 O ナル球面上ノ二ッノ角トシ，夫々其ノ頂點 A 及 P ヲ極トシテ大圓ノ弧ヲ畫キ，BC, QR ヲ夫々二ッノ角ノ邊ノ間ニ挿マレタル其ノ部分トセヨ:

然ルトキハ角 ~~ABC~~ BAC : 角 QPR :: 弧 BC : 弧 QR ナル可シ.

OA, OB, OC, OP, OQ, OR ヲ結ヒ付クヨ:



圓 AB, AC ノ A ニ於テノ切線ハ，夫々 OAB, OAC ノ平面ニ於テ OA ニ垂線ナルヲ以テ，夫々 OB, OC ニ平行ナリ;

故ニ球面角 BAC ハ角 BOC ニ等シ; VI, 9.

同様ニ角 QPR ハ角 QOR ニ等シ

而シテ角 BOC : 角 QOR :: 弧 BC : 弧 QR ナリ; V, 5.

故ニ角 BAC : 角 QPR :: 弧 BC : 弧 QR.

系 1. 一ッノ球面角ハ其ノ頂點ヲ極トシタル大圓ノ其ノ邊ノ間ニ挿マレタル弧ガ中心ニ於テ對スル角ニ等シ.

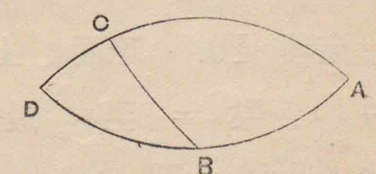
系 2. 月形ノ兩端ニ於テノ角ハ相等シ.

系 3. 二ッノ月形ノ比ハ其ノ角ノ比ニ等シ.

系 4. 月形ト全球面ノ比ハ其月形ノ角ト四直角ノ比ニ等シ.

定義 10. **球面三角形**トハ三ッノ大圓ノ弧ヲ以テ圍ミタル球面ノ一部分ナリ.

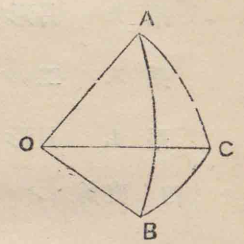
通常球面三角形ト云フトキハ其ノ邊ハ劣弧ナリトス: 邊ガ劣弧ナレハ，其ノ角ハ皆劣角ナリ; 何トナレハ，圖ニ於テ ABC ヲ其ノ邊ガ劣弧ナル球面三角形トセハ，AB, AC ハ劣弧ナルヲ以テ，之ヲ延長シ，D ニ於テ出會ハシメヨ (D ハ A ノ對點ナリ);



角 ABC 及 DBC ハ合セテ二直角ニ等シ，故ニ角 ABC ハ二直角ヨリ小ナリ；同様ニ其他ノ角モ皆各二直角ヨリ小ナリ.

定理 9. 球面三角形ノ二ツノ邊ハ合セテ他ノ一ツノ邊ヨリ大ナリ.

ABC ヲ中心 O ナル球面上ノ三角形トセヨ：然ルトキハ其ノ二ツノ邊ハ合セテ第三邊ヨリ大ナル可シ.



平面 BOC, COA, AOB ハ O 點ニ於テ三面角ヲ爲スヲ以テ，

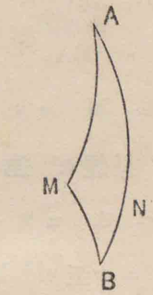
角 BOC, COA, AOB ハ何レノ二ツヲ取ルモ合セテ第三ノ角ヨリ大ナリ； VI, 21.

而シテ角 BOC, COA, AOB ノ相互ノ比ハ弧 BC, CA, AB ノ比ニ等シ； V, 5.

故ニ球面三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ハ何レノ二ツヲ取ルモ合セテ第三邊ヨリ大ナリ.

定理 10. 球面上一ツノ點ヨリ他ノ一ツノ點ニ至ル最短キ途ハ其二ツノ點ヲ過ル大圓ナリ.

A, B ヲ球面上ノ二ツノ點，ANB ヲ之ヲ過ル大圓ノ弧トセヨ：



然ルトキハ ANB ハ A ヨリ B ニ至ル球面上ノ最短キ途ナル可シ.

若シ ANB ガ最短キ途ニ非ラザレハ，其ノ外ニ最短キ途有リ；M ヲ其ノ上ノ一ツノ點トセヨ；

M 點ヲ A, B ト大圓ノ弧 AM, MB ニ依リテ結ヒ付ケヨ；

AN ヲ AM ニ等シク取レ；

ANB ハ AM, MB ノ和ヨリ小ナルヲ以テ， 9.

BN ハ BM ヨリ小ナリ：

今 A ヲ過ル直徑ヲ軸トシテ球面ヲ廻轉シ，大圓弧 AM ヲ元大圓弧 AB ノ在リシ處ニ至ラシムルトキハ，AM ハ AN ニ等シキヲ以テ，M ハ元ノ N ノ上ニ重ナル；

故ニ A ヨリ M ニ至ル最短キ途ハ (如何ナル途ニテモ) A ヨリ N ニ至ル最短キ途ノ上ニ重ナリ，之ニ等シ；

同様ニ B ヲ過ル直徑ヲ軸トシテ球面ヲ廻轉シ，

大圓弧 BM ガ 大圓弧 BN ノ 在リシ 處 ニ 至ラシムル トキハ, BN ハ BM ヨリ 小ナル ヲ 以テ,

M ハ BA 上ノ N ヨリ B ニ 遠キ 側 ニ 落ル;

故ニ M ヨリ B ニ 至ル 最短キ 途 ハ N ヨリ B ニ 至ル 最短キ 途 ヨリ 大ナリ;

故ニ A ヨリ M ヲ 過リ B ニ 至ル 最短キ 途 ハ A ヨリ N ニ 至リ N ヨリ B ニ 至ル 最短キ 途 ヨリ 大ナリ,

即 M ハ A ヨリ B ニ 至ル 最短キ 途 ノ 上ニ 在ラズ;

其他 大圓 AB 外ノ 何レノ 點 ヲ 取ルモ, A ヨリ B ニ 至ル 最短キ 途 ノ 上ニ 在ラザルコト ヲ 證明スル ヲ 得;

故ニ A ヨリ B ニ 至ル 最短キ 途 ハ 大圓 AB ノ 外 ナラズ.

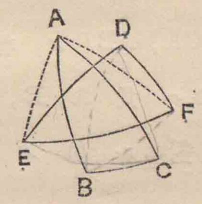
附言. 定理 4, 9, 及 10, 等 ヲ 考フルニ, 大圓 ノ 球面 上ニ 於ケル ハ 恰モ 直線 ノ 平面 上ニ 於ケル ガ 如キ 事 多シ.

定義 13. 球面三角形 ノ 各ノ 邊 ノ 二ツノ 極 ノ 中 其邊 ニ 對スル 頂點 ト 同シ 側 ニ 在ル モノ ヲ 大圓 ノ 弧 ニ 依リテ 結ヒ付ケテ 得ル 所ノ 三角形 ヲ 元ノ 三角形 ノ **極三角形** ト 稱ス.

定理 11. 一ツノ 球面三角形 ガ 他ノ 一ツノ 球面三角形 ノ 極三角形 ナル トキハ, 後者 モ 亦 前者 ノ 極三角形 ナリ.

球面三角形 DEF ヲ 球面三角形 ABC ノ 極三角形 ナリ トセヨ:

然ルトキハ ABC モ 亦 DEF ノ 極三角形 ナル 可シ.



E ハ 弧 CA ノ 極 ナル ヲ 以テ,

弧 EA ハ 四分圓周 ナリ; VII, 7, 系 2

同樣ニ 弧 FA モ 四分圓周 ナリ;

故ニ A ハ EF ノ 極 ナリ: VII, 7, 系 3

今 D ハ BC ノ 極 ニシテ, A ト D ハ BC ノ 同シ 側 ニ 在リ; VII, 定義 13.

故ニ 弧 AD ハ 四分圓周 ヨリ 小ナリ;

故ニ A 及 D ハ 亦 EF ノ 同シ 側ニ 在リ:

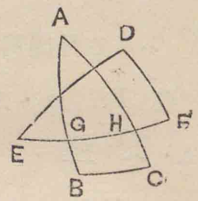
同樣ニ, B ハ FD ノ 極 ニシテ, B ト E ハ FD ノ 同シ 側 ニ 在リ,

又 C ハ DE ノ 極 ニシテ, C ト F ハ DE ノ 同シ 側 ニ 在リ;

故ニ 三角形 ABC ハ 三角形 DEF ノ 極三角形 ナリ.

定理 12. 三角形ノ角ハ其ノ極三角形ノ之ニ對應スル邊ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角ナリ.

ABC, DEF ハ各他ノ極三角形ニシテ, D, E, F ハ BC, CA, AB ノ極ナリトセヨ:
然ルトキハ角 A, B, C ハ夫々邊 EF, FD, DE ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角ナル可シ.



邊 AB, AC 或ハ其ノ延長ガ邊 EF 或ハ其ノ延長ト夫々 G, H ニ於テ交ルトセヨ;
A ハ EF ノ極ナルヲ以テ,
角 A ハ GH ガ中心ニ於テ對スル角ニ等シ; VII, 8, 系 1.
E, F ハ夫々 CA, AB ノ極ナルヲ以テ,
弧 EH, FG ハ各四分圓周ナリ; VII, 7, 系 2.
故ニ弧 EH, FG ノ和, 即 EF, GH ノ和ハ半圓ニ等シ;
故ニ弧 EF 及 GH ガ中心ニ於テ對スル角ハ合セテ二直角ニ等シ;

即角 A ハ弧 EF ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角ナリ:
同様ニ, 角 B 及 C ハ夫々弧 FD, DE ガ中心ニ於テ對スル角ノ補角ナリ.

定理 13. 球面三角形ノ三ツノ角ノ和ハ六直角ヨリ小ニシテ, 二直角ヨリ大ナリ.

三角形ノ各ノ角ハ二直角ヨリ小ナルヲ以テ, 其ノ和ハ六直角ヨリ小ナリ. VII, 定義 12.

次ニ, 各ノ角ハ極三角形ノ邊ガ中心ニ於テ對スル角ト合セテ二直角ニ等シ; VII, 12.
故ニ三ツノ角ノ和ハ極三角形ノ三ツノ邊ガ中心ニ於テ對スル角ノ和ト合セテ, 六直角ニ等シ;
然ルニ球面三角形ノ三ツノ邊ガ中心ニ於テ對スル角ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ; VI, 22.
故ニ三ツノ角ハ二直角ヨリ大ナリ.

附言. 球面三角形ノ三ツノ角ノ和ハ平面三角形ニ於ケル如ク一定セズ, 唯二直角ト六直角ノ

間ニ在ルヿ確定セリ. 球面三角形ハ三ツノ直角或ハ三ツノ鈍角ヲ有スルヲ得.

定義 14. 球面三角形ノ角ノ和ト二直角ノ差ヲ其三角形ノ**球面過剰**ト稱ス.

定義 15. **對稱(球面)三角形**トハ各ノ形ノ頂點ガ他ノ頂點ノ對點ナル二ツノ球面三角形ナリ.

斯ノ如キ二ツノ三角形ハ邊及角ガ夫々相等シキヿヲ容易ニ證明スルヲ得; 然レ𪜈之ヲ重ネ合ハス能ハザルナリ (問題 63 ノ場合ヲ除ク). 逆ニ, 二ツノ三角形ノ邊及角ガ夫々相等シク, 然レ𪜈之ヲ重ネ合ハス能ハザルトキハ, 此二ツノ三角形ヲ各ノ形ノ頂點ガ他ノ頂點ノ對點ナル樣ニ置クヲ得: 故ニ斯ノ如キ三角形ハ如何ナル位置ニ在ルモ之ヲ對稱三角形ナリト云フヿ有リ.

第一節ノ問題.

*問題 60. 球面三角形ノ周ハ大圓ノ周ヨリ小ナリ.

*問題 61. 二ツノ球面三角形ハ下ノ場合ニ於テ重ネ合ハスヿヲ得ルカ, 或ハ對稱ニ爲スヿヲ得:—

(i) 二ツノ邊及夾角ガ夫々相等シキ時;

(ii) 二ツノ角及其ノ間ノ邊ガ夫々相等シキ時;

(iii) 三ツノ邊ガ夫々相等シキ時 (問題 62 ノ (v) 或ハ問題 34 ヲ用ヰテ證明ス可シ);

(iv) 三ツノ角ガ夫々相等シキ時.

*問題 62. 球面三角形ニ付テ下ノ定理ト同樣ノ定理ヲ證明セヨ:—

(i) I, 11; (ii) I, 12; (iii) I, 14;

(iv) I, 15; (v) I, 19; (vi) I, 20;

(vii) I, 22.

*問題 63. 對稱二等邊三角形ハ重ネ合ハスヿヲ得.

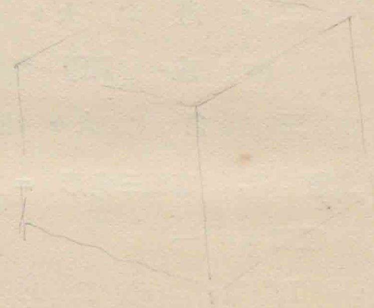
*問題 64. 對稱三角形ハ相等シ.

*問題 65. 球面三角形ハ其ノ球面過剰ノ半分ニ等シキ角ノ月形ニ等シ.

問題 66. 同シ平面上ニ在ラザル四ツノ點ヲ過リ, 一ツノ球ヲ畫クヿヲ得, 而シテ唯一ツニ限ル.

問題 67. 球面ノ一部分ヲ與ヘ, 其ノ中心ヲ得ルヿ.

問題 68. 與ヘラレタル 四面體 ニ 內接スル 球 ヲ 畫クヿ.



第二節.

圓壔 及 圓錐.

定義 16. **直圓壔** トハ 矩形 ヲ 其ノ 一邊 ヲ 軸 トシテ 一周 廻轉セシムル 時 生スル 所ノ 體 ナリ; 其 邊 ヲ 直圓壔 ノ **軸** ト 稱ス. 直圓壔 ハ 曲面 (即 軸 ニ 對スル 邊 ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 表面) 及 二ツノ 平面 (即 軸 ニ 垂直ナル 二ツノ 邊 ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 表面) ヲ 以テ 界セリ. 此 平面 ハ 何レモ 軸 ニ 垂直ニシテ (VI, 18, 系 2), 其ノ 直圓壔 ヲ 界スル 部分 ハ 相等シキ 圓 ナリ: 之 ヲ 直圓壔 ノ **端面** 或ハ **底面** ト 稱ス; 其ノ 半徑 ハ 軸 ニ 垂直ナル 邊 ニ 等シク, 之 ヲ 直圓壔 ノ **半徑** ト 云フ. 軸 ノ 長サ ヲ 其ノ **高サ** ト 云フ. 軸 ニ 對スル 邊 ヲ 直圓壔 ノ **母線** ト 稱ス.

本書 ニ 於テハ 直圓壔 ノ 外 圓壔 ヲ 論セザル ヲ 以テ, 之 ヲ 單ニ 圓壔 ト 云フヿ 有リ.

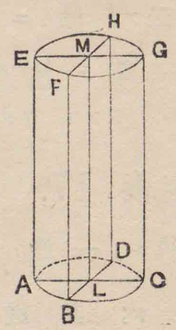
定義 17. **直圓錐** トハ 直角三角形 ヲ 其ノ 直角 ニ 隣ル 一邊 ヲ 軸 トシテ 廻轉セシムル 時 生スル 所ノ 體 ナリ; 其 邊 ヲ 直圓錐 ノ **軸** ト 稱ス; 其 邊 ト 斜

邊 ト 交ル 頂點 ヲ 直圓錐 ノ **頂點** ト 稱ス. 直圓錐 ハ 曲面 (即 斜邊 ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 表面) 及 一ツノ 平面 (即 軸 ト 直角 ヲ 爲ス 邊 ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 表面) ヲ 以テ 界セリ. 此 平面 ハ 軸 ニ 垂直ニシテ (VI, 18, 系 2), 其ノ 直圓錐 ヲ 界スル 部分 ハ 圓 ナリ: 之 ヲ 直圓錐 ノ **底面** ト 稱ス. 其ノ 半徑 ヲ 直圓錐 ノ **半徑** ト 稱ス. 斜邊 ヲ 直圓錐 ノ **斜邊** 或ハ **母線** ト 稱ス. 軸 ノ 長サ ヲ 其ノ **高サ** ト 云フ.

本書 ニ 於テハ 直圓錐 ノミ ヲ 論スル ヲ 以テ, 之 ヲ 單ニ 圓錐 ト 云フコ 有リ.

定理 14. 直圓壔 ノ 軸 ヲ 含ム 平面 ニ 依リテノ 截リ口 ハ 矩形 ナリ.

ABCD-EFGH ヲ 圓壔, LM ヲ 其ノ 軸, BFHD ヲ LM ヲ 含ム 平面 ニ 依リテノ 截リ口 トセヨ:
然ルトキハ BFHD ハ 矩形 ナル 可シ.



LMFB ハ 廻轉スル 矩形 ノ 一ツノ 位置 ナリ;
故ニ 其ノ 平面 ト 圓壔 ノ 交リ ナル BF ハ 一ツノ 母線 ナリ;

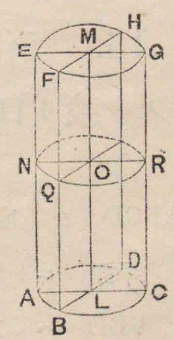
同樣ニ DH モ 母線 ナリ;
故ニ BF, DH ハ 何レモ LM ニ 平行ニシテ 互ニ 平行ナリ
又 BD, FH ハ 互ニ 平行ニシテ, BF, DH ニ 垂線ナル 二ツノ 直線 ナリ; VI, 7
故ニ BFHD ハ 矩形 ナリ.

---

*問題 69. 圓壔 ノ 軸 ニ 平行ナル 平面ニ 依リテノ 截リ口 ハ 矩形 ナリ.

定理 15. 直圓壔 ノ 軸 ニ 垂直ナル 平面 ニ 依リテノ 截リ口 ハ 端面 ニ 等シキ 圓 ナリ.

LM ヲ 圓壔 ABC-EFG ノ 軸; NQR ヲ LM ニ 垂直ナル 平面 ニ 依リテノ 截リ口 トセヨ:
然ルトキハ NQR ハ ABC ニ 等シキ 圓 ナル 可シ.



Q ヲ 截リ口 ノ 上ノ 任意 ノ 點 トシ,
Q ヲ 過ル 母線 BQF ヲ 引ケ;
LM ヲ 截リ口 ノ 平面 ト O ニ

於テ交ルトシ,

OQ ヲ結ヒ付ケヨ;

截リ口ノ平面ハ LM ニ垂直ナルヲ以テ端面ニ平行ナリ; VI, 15

故ニ OQ ハ LB ニ平行ナリ; VI, 7

故ニ LBQO ハ矩形ニシテ,

OQ ハ LB ニ等シ;

故ニ截リ口ノ上ノ點ハ皆 O ヨリ圓壔ノ半徑ニ等シキ距離ニ在リ;

而シテ勿論一ツノ平面上ニ在リ;

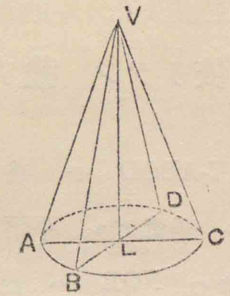
故ニ截リ口ハ端面ニ等シキ圓ナリ.

系. 直圓壔ノ曲面上ノ點ハ皆軸ヨリ相等シキ距離ニ在リ.

定理 16. 直圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

V-ABCD ヲ直圓錐, VL ヲ其ノ軸, VBD ヲ VL ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口トセヨ:

然ルトキハ VBD ハ二等邊三角形ナル可シ.



截リ口ノ平面ハ軸 VL ヲ含ムヲ以テ, 底面ト直徑 BLD ニ於テ交ル;

V ヲ B 及 D ト結ヒ付クル直線 VB, VD ハ圓錐ノ母線ナリ, 而シテ又截リ口ノ平面上ニ在リ;

故ニ圓錐ノ軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ハ三角形 VBD ナリ;

而シテ VB ハ VD ニ等シキヲ以テ,

三角形 VBD ハ二等邊ナリ.

系. 頂角 BVD ハ廻轉スル三角形ノ頂角ノ二倍ナリ.

定義 18. 軸ヲ含ム平面ニ依リテノ截リ口ノ頂角ヲ直圓錐ノ頂角ト稱ス.

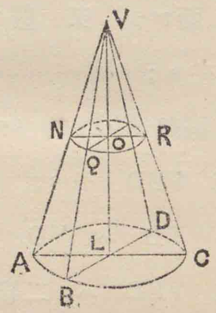
---

*問題 70. 直圓錐ノ頂點ヲ過ル平面ニ依リテノ截リ口ハ二等邊三角形ナリ.

定理 17. 直圓錐ノ軸ニ垂直ナル平面ニ依リテノ截リ口ハ圓ナリ.

V-ABCD ヲ直圓錐, VL ヲ其ノ軸, NQR ヲ軸ニ垂直ナル平面ニ依リテノ截リ口トセヨ:

然ルトキハ NQR ハ圓ナル可シ.



截リ口ノ平面ト軸ト O 點ニ於テ交ルトセヨ:

截リ口ノ上ニ任意ノ點 Q ヲ取リ, Q ヲ過ル母線 VQB ヲ引キ, BL, QO ヲ結ビ付ケヨ;

然ルトキハ QO ハ BL ニ平行ナリ; VI, 7

故ニ QO : BL :: VO : VL; V, 1, 系

即截リ口ノ上ノ任意ノ點ノ O ヨリノ距離ト底面ノ半徑ノ比ハ常ニ VO : VL ニ等シ;

故ニ截リ口ノ上ノ點ハ皆 O ヨリ相等シキ距離ニ在リ;

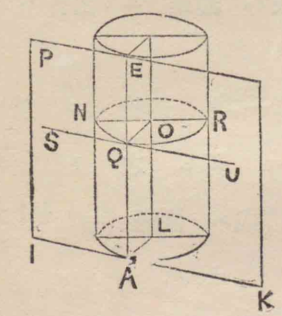
而シテ勿論一ツノ平面上ニ在リ;

故ニ截リ口ハ中心 O ナル圓ナリ.

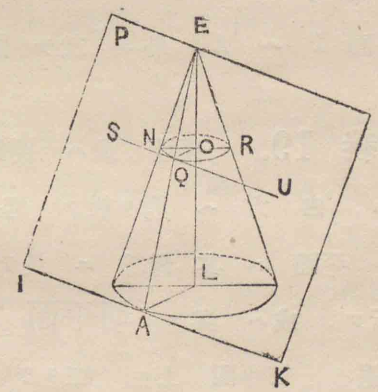
定理 18. 直圓壔或ハ直圓錐ノ一ツノ母線, 及其母線ノ端ニ於テノ底面ノ切線ヲ含ム平面ハ圓壔或ハ圓錐ト再ビ出會ハズ.

AE ヲ圓壔 (甲圖) 或ハ圓錐 (乙圖) ノ一ツノ母線, IAK ヲ AE ノ端 A ニ於テ底面ニ切スル直線, P ヲ AE 及 IK ヲ含ム平面トセヨ:

然ルトキハ平面 P ハ母線 AE 外ノ點ニ於テ圓壔或ハ圓錐ト出會ハザル可シ.



甲



乙

L ヲ底面ノ中心トセヨ;

平面 P 上 AE 外ノ任意ノ點 S ヲ取リ,

S ヲ過リ, 底面ニ平行ナル平面ヲ畫キ,

平面 P ト直線 SQU ニ於テ交リ, 母線ト Q 點ニ於テ交リ, 圓壔或ハ圓錐ト截リ口 NQR ニ於テ交ルトセヨ;

O ヲ 截リロ ノ 中心 トセヨ;

然レハ SQU ハ IAK ニ 平行, QO ハ AL ニ 平行ナル ヲ 以テ, VI, 7.

角 SQO ハ 角 IAL ニ 等シ, 即 直角 ナリ; VI, 9.

故ニ SQU ハ 截リロ ノ 切線 ナリ;

故ニ S ハ 圓壔 或ハ 圓錐 ノ 外ニ 在リ;

故ニ 平面 P 上, AE 外ノ 點 ハ 皆 圓壔 或ハ 圓錐 ノ 外ニ 在リ,

即 平面 P ハ AE 外ニ 於テ 圓壔 或ハ 圓錐 ニ 出會ハズ.

定義 19. 圓壔 或ハ 圓錐 ト 一ツノ 母線 ニ 於テ 出會ヒ, 四 方 ヘ 窮リ無ク 延長スルモ 再ヒ 之 ト 出會ハザル 平面 ハ 其 母線 ニ 於テ 圓壔 或ハ 圓錐 ニ 切ス ト 云フ, 或ハ 其ノ **切平面** ナリ ト 云フ.

系. 切平面 上ニ 在リテ 母線ト 交ル 直線 ハ 其 交點 ノ 外 圓壔 或ハ 圓錐 ニ 出會ハズ.

問題 71. 圓壔 或ハ 圓錐 ノ 切平面 ハ 母線 及 軸 ヲ 含ム 平面 ニ 垂直ナリ.

第二 節 ノ 問題.

問題 72. 圓壔 及 圓錐 ノ 切平面 ニ 關スル 性質 ヲ 問題 69 及 70 ヨリ 極限法 ヲ 用井テ 得ヨ (第二 編, 第五 節 ヲ 參考ス 可シ).

問題 73. 球 ト 一ツノ 圓 ニ 於テ 出會ヒ, 其他ニ 於テ 之 ト 出會ハザル 圓壔 及 圓錐 有リ.

此 場合 ニ 於テ, 球 ト 圓壔 或ハ 圓錐 ハ 相切ス ト 云フ.

問題 74. 曲面 ガ 球 ト 大圓 ニ 於テ 出會ヒ, 端面 ガ 其ノ 極 ニ 於テ 之 ト 出會ヒ, 其他ノ 點 ニ 於テ 之 ト 出會ハザル 圓壔 有リ.

此 場合 ニ 於テ, 球 ハ 圓壔 ニ 內接シ, 圓壔 ハ 球 ニ 外接ス ト 云フ.

第七編ノ問題.

問題 75. 與ヘラレタル四面體ニ外接スル球ヲ畫クヿ.

問題 76. 球面三角形ニ付テ, 平面幾何學問題 94, 95, 96, 97 ト同樣ノ命題ヲ證明セヨ.

問題 77. 球面三角形ノ內接圓, 傍接圓及外接圓ヲ作ルヿ.

附錄.

附錄 I-VI ハ平面ノ部ニ載セタリ.

VII

立體ノ表面ノ面積ニ付テ.

(i) 角壔ノ側面ノ面積.

角壔ノ側面ノ面積ヲ表ハス數ヲ m トシ, 其ノ直截リ口ノ周ノ長サヲ表ハス數ヲ p トシ, 側稜ノ長サヲ表ハス數ヲ l トセハ, (問題 42)

$$m=lp.$$

定義. 直角錐トハ底面ガ正多角形ニシテ頂點ヨリ底面ヘ引ケル垂線ノ足ガ其ノ中心ト合スルモノナリ. 此場合ニ於テハ總テノ側面ガ各二等邊三角形ニシテ, 全ク相等シキヿ明ナリ.

(ii) 直角錐ノ側面ノ面積.

側面ノ面積ヲ表ハス數ヲ m トシ, 底面ノ周ノ長サヲ表ハス數ヲ p トシ, 頂點ヨリ底面

ノ一邊ヘ引ケル垂線ノ長サヲ表ハス數ヲ h トセハ,

$$m = \tfrac{1}{2}hp$$

ナルコト明ナリ.

定義. 底面ニ平行ナル平面ニ依リテ一ツノ體ヲ截レハ, 底面ト此平面ノ間ニ在ル部分ヲ截頭體ト云フ.

(iii) 截頭直角錐ノ側面ノ面積.

截頭直角錐ノ總テノ側面ハ各梯形ニシテ, 全ク相等シキコト明ナリ. 故ニ側面ノ面積ヲ表ハス數ヲ m トシ, 底面ノ周ノ長サヲ表ハス數ヲ p, 截リ口ノ周ノ長サヲ表ハス數ヲ p' トシ, 側面ノ平行ナル二ツノ邊ノ間ノ距離ヲ d トセハ, (III, 3)

$$m = \tfrac{1}{2}(p + p')\,d$$

ナルコト明ナリ.

(iv) 直圓壔ノ曲面ノ面積.

直圓壔ノ端面ニ內接シタル正多角形ヲ畫ク; 其ノ邊ヲ過リ軸ニ平行ナル平面ヲ畫ケハ, 各ノ平面ニ依リテ圓壔ノ截リ口ハ平行四邊形ニシテ (問題 69), 此等ノ平面ノ界スル體ハ直角壔ナリ; 兩端

面ハ圓壔ノ端面ト同シ平面ニシテ, 側稜ハ皆圓壔ノ母線ナリ: 此ノ如キ角壔ハ圓壔ニ內接スト云フ. 而シテ今端面ニ內接シタル正多角形ノ邊ノ數ヲ窮リ無ク多クスルトキハ, 其ノ周ノ極限ガ圓 (即圓壔ノ端面) ノ周ナルト同様ニ, 內接直角壔ノ側面ノ極限ハ即圓壔ノ曲面ナリ.

故ニ圓壔ノ曲面ノ面積ヲ表ハス數ヲ n トセハ, (i) ニ於ケル m ノ (邊ノ數ヲ窮リ無ク多クシタル時ノ) 極限ハ n ナリ. 圓壔ノ高サヲ表ハス數ヲ h トシ, 半徑ノ長サヲ表ハス數ヲ r トセハ; (i) ニ於ケル l ハ即 h ナリ, 又 p ノ極限ハ $2\pi r$ ナリ; 故ニ

$$n = 2\pi rh.$$

直圓壔ノ總テノ表面ノ面積ハ $2\pi rh + 2\pi r^2$ 即 $2\pi r(r+h)$ ナリ.

又下ノ如クニ考フルヲ得 (然レトモ其ノ嚴正ナル證明ハ此ニ揭クル能ハズ).

直圓壔ノ曲面ヲ紙ニテ作リタリト假定セヨ: 今此紙ヲ一ツノ母線ニ沿フテ截レハ, 之ヲ展開シテ平ニスルヲ得, 而シテ紙面ハ一ツノ矩形トナル;

其ノ 邊 ハ 圓壔 ノ 高サ ト 端面 ノ 周 ナリ; 故ニ

$$n=2\pi r.h.$$

(v) 直圓錐 ノ 曲面 ノ 面積.

直圓錐 ノ 底面 ニ 內接シタル 正多角形 ヲ 畫ケ 其ノ 各ノ 邊 及 頂點 ヲ 過ル 平面 ヲ 畫ケハ, 各ノ 平面 ニ 依リテ 圓錐 ノ 截リ口 ハ 二等邊三角形 ナリ (問題 70); 此等ノ 平面 ノ 界スル 體 ハ 直角錐 ナリ; 頂點 及 底面 ハ 圓錐 ノ 頂點 及 底面 ト 同シクシテ, 斜稜 ハ 皆 圓錐 ノ 母線 ナリ: 此ノ如キ 角錐 ハ 圓錐 ニ 內接ス ト 云フ.

而シテ 今 底面 ニ 內接シタル 正多角形 ノ 邊 ノ 數 ヲ 窮リ無ク 多ク スル トキハ, 其ノ 周 ノ 極限 ガ 圓 (即 圓錐 ノ 底面) ノ 周 ナル ト 同樣ニ, 內接直角錐 ノ 斜面 ノ 極限 ハ 即 圓錐 ノ 曲面 ナリ.

故ニ 圓錐 ノ 曲面 ノ 面積 ヲ 表ハス 數 ヲ n トセハ, (ii) ニ 於ケル m ノ 極限 ハ n ナリ; 圓錐 ノ 斜邊 及 半徑 ノ 長サ ヲ 表ハス 數 ヲ 夫々 s, r トセハ, (ii) ニ 於ケル h ノ 極限 ハ s, 又 p ノ 極限 ハ $2\pi r$ ナリ; 故ニ

$$n=\pi r s.$$

直圓錐 ノ 總テノ 表面 ノ 面積 ハ $\pi rs+\pi r^2$ 即 $\pi r(r+s)$ ナリ.

直圓錐 ノ 高サ ヲ 表ハス 數 ヲ h トセハ,

$$s=\sqrt{r^2+h^2}.$$

又 下ノ 如クニ 考フル ヲ 得.

直圓錐 ノ 曲面 ヲ 紙 ニテ 作リタリ ト 假定セヨ: 今 此 紙 ヲ 一ツノ 母線 ニ 沿フテ 截レハ, 之 ヲ 展開シテ 平ニスル ヲ 得, 而シテ 紙面 ハ 一ツノ 扇形 トナル; 其ノ 半徑 ハ 圓錐 ノ 斜邊, 弧 ハ 底面 ノ 周 ナリ. 故ニ, 附錄 VI ニ 由リテ,

$$n=\tfrac{1}{2}.2\pi r.s=\pi r s.$$

附言. 圓壔 及 圓錐 ノ 如ク 其ノ 表面 ヲ 平ラニ 展開スル ヲ 得ル 一 種 ノ 表面 有リ: 之 ニ 反シテ 球 ノ 如キ 表面 ハ 展開スル 能ハザル モノ ナリ.

(vi) 截頭直圓錐 ノ 曲面 ノ 面積.

截頭直圓錐 ノ 曲面 ハ 同シ 頂點 ヲ 有シ, 夫々 截頭直圓錐 ノ 端面 ノ 一ツ ヲ 底面 トセル 二ツノ 直圓錐 ノ 曲面 ノ 差 ナリ.

截頭直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ハス數ヲ n トシ, 斜邊ノ長サヲ表ハス數ヲ s トシ, 二ツノ端面ノ半徑ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々 r_1, r_2 トシ; 二ツノ直圓錐ノ曲面ノ面積ヲ表ハス數ヲ夫々 n_1, n_2 トシ, 其ノ斜邊ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々 s_1, s_2 トセヨ; 然レバ,

$$n = n_1 - n_2 \quad 又 \quad s = s_1 - s_2;$$

$$n_1 = \pi r_1 s_1, \quad n_2 = \pi r_2 s_2;$$

又 $r_1 : r_2 :: s_1 : s_2$ ナルヿ明ナリ;

故ニ $r_1 s_2 = r_2 s_1$;

$$n = \pi(r_1 s_1 - r_2 s_2) = \pi(r_1 s_1 - r_1 s_2 + r_2 s_1 - r_2 s_2)$$

$$= \pi(r_1 + r_2) s.$$

兩端面ノ半途ニ在ル平面ニ依リテノ截リ口ノ半徑ノ長サヲ表ハス數ヲ r トセバ,

$2r = r_1 + r_2$ ナルヿ明ナリ;

故ニ $n = 2\pi r s$.

或ハ之ヲ内接截頭直角錐ノ端面ノ邊ノ數ヲ窮リ無ク多クシタル時ノ極限ナリトシテ, (iii) ニ依リテ此式ヲ得ルモ可ナリ. 或ハ之ヲ展開スレバ, 曲面ハ二ツノ扇形ノ差, 即扇ノ地紙ノ如キ形トナル; 因リテ其ノ面積ヲ得ルモ可ナリ.

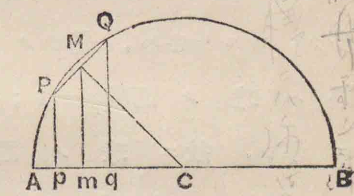
(vii) 球ノ面積.

半圓 APQB ガ其ノ直徑 ACB ヲ軸トシテ廻轉シ球ヲ生スルトセヨ; 半圓周 AB ヲ任意ノ數ノ弧ニ等分シ, PQ ヲ其ノ一ツトセヨ; 中心 C ヨリ弦 PQ へ垂線 CM ヲ引ケ; M ハ PQ ノ中點ナリ. P, M, Q ヨリ AB へ垂線 Pp, Mm, Qq ヲ引ケ; 又 P ヨリ Qq へ垂線 Pl ヲ引ケ (圖ニ於テハ混雜ヲ避クル爲ニ之ヲ省ク);

然レバ PlQ, MmC ハ相似三角形ナルヿ明ナリ;

故ニ $Pl : PQ :: Mm : MC$;

即 $pq : PQ :: Mm : MC$;



PQ, pq, Mm, CM ノ長サヲ表ハス數ヲ夫々 s, d, y, h トセバ,

$$d : s :: y : h;$$

故ニ $ys = hd$;

今半圓ガ廻轉シテ球ヲ生スル時ニ, PQ ノ如ク AB ヲ等分シタル各ノ弧ノ弦ハ皆截頭直圓錐ヲ生ス;

PQ ノ生スル截頭直圓錐ノ面積ヲ表ハス數ハ (vi) ニ依リテ $2\pi ys$ ナリ, 而シテ $ys = hd$ ナルヲ以テ,

$2\pi hd$ ニ等シ;

總テ PQ ノ如キ弦ノ生スル截頭直圓錐ノ面積ノ和ヲ表ハス數ハ, 各ノ弦ノ正射影ヲ夫々 $d_1\ d_2\ d_3$……トセハ, h ハ總テノ弦ニ付テ相等シキヲ以テ, $2\pi h\,(d_1+d_2+d_3+\cdots\cdots)$ ナリ;

而シテ正射影ノ和ハ直徑ニ等シ; 故ニ半徑ノ長サヲ表ハス數ヲ r トセハ,

$$d_1+d_2+d_3+\cdots\cdots=2r;$$

故ニ總テノ截頭直圓錐ノ面積ノ和ヲ表ハス數ハ $4\pi rh$ ナリ: AB ヲ等分シタル部分ノ數ヲ窮リ無ク多クスルトキハ, 總テノ截頭直圓錐ノ面積ノ和ノ極限ハ球ノ面積ナリ; 又 CM ハ極限ニ於テハ半徑ニ等シ. 故ニ球ノ面積ヲ表ハス數ヲ q トセハ,

$$q=4\pi r^2.$$

$q=4\pi r^2=\frac{2}{3}(4\pi r^2+2\pi r^2)$ ナルヲ以テ, 球面ノ面積ハ之ニ外接スル (問題 74) 直圓壔ノ總テノ表面 (iv) ノ三分ノ二ナリ.

定義. 球ヲ二ツノ平行ナル平面ニ依リテ截ルトキハ, 其ノ間ニ在ル球面ノ部分ヲ帶ト稱ス. 平面ノ距離ヲ帶ノ高サ又ハ厚サト云フ.

帶ノ面積及其ノ厚サヲ表ハス數ヲ夫々 n, d トセハ, $n=2\pi rd$.

VIII

立體ノ體積ニ付テ.

體積ヲ計ルニ學理上最適當ナル單位ハ各ノ稜ガ長サノ單位ニ等シキ立方ノ體積ナリ: 例ヘハ, 寸ガ長サノ單位ナレハ, 立方寸即稜ガ各一寸ナル立方ノ體積ヲ體積ノ單位トス. 然ルニ通常體積ヲ要スルハ多ク實積ニ非ラズシテ, 寧容量ナリ, 即此函ノ內ニハ何程ノ物ヲ容ル可キヤ, 此樽ノ內ニハ何程ノ油有リヤ, 等ヲ計ルヿナリ; 又其函, 樽, 等ノ諸器ニ容ルヽ物品, 即穀物及粉類又ハ液體ノ量ヲ計ルモ亦之ヲ容ルヽ器ノ容量ニ由ル. 土砂ナドハ一間立方ヲ單位トシテ之ヲ計ル; 故ニ長サノ單位ト簡單ナル關係有リテ甚便利ナリ: 然レ𪜈不幸ニシテ吾邦ニ於テ容量ヲ計ル爲ニ最多ク用井ル

所ノ單位ハ長サノ單位ト簡單ナル關係ヲ有セズ. 即吾邦ノ容量ノ單位ハ升ナリ. 明治二十四年法律第三號度量衡法ニ依レハ, 量ノ單位一升ハ64827立方分(即64·827立方寸)ニ等シ. 故ニ通常ノ容量ノ單位ヲ以テ器ノ容量又ハ物品ノ量ヲ表ハサントスルトキハ, 先ツ其幾立方寸ナルカヲ計リ(下ノ方法或ハ其他ニ由リテ)而シテ其數ヲ64·827ニテ割リ, 以テ升ノ數ヲ得ルナリ.

(i) 直六面體ノ體積.

直六面體ノ底面ノ面積Mヲ表ハス數ヲmトシ, 高サHノ長サヲ表ハス數ヲhトセヨ; 直六面體ノ體積Tヲ表ハス數ヲtトセヨ;

L, A, Uヲ夫々長サ, 面積及體積ノ單位トセハ, VI, 30, 系4ニ依リテ, T:Uハ比M:A及H:Lノ相乘比ナリ;

故ニ　$t:1$ハ$m:1$及$h:1$ノ相乘比ナリ;

故ニ　$t = mh$,

即直六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ底面ノ面積及高サヲ表ハス數ノ積ニ等シ.

直六面體ノ一ツノ頂點ニ於テ出會フ三ツノ稜ノ

Ordeal Mr. Shibuda

長サヲ表ハス數ヲa, b, cトセハ,

$$t = abc.$$

立方ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ稜ノ長サヲ表ハス數ノ三乘ニ等シ. 體積ヲ表ハス數ノ立方根ハ稜ノ長サヲ表ハス數ナリ.

平行六面體ノ體積ヲ表ハス數ハ其ノ底面ノ面積及高サノ長サヲ表ハス數ノ積ニ等シ.

(ii) 角壔ノ體積.

VI, 30, 系4ニ依リテ, 此場合ニ於テモ, $t = mh$ナルコト明ナリ.

(iii) 角錐ノ體積.

角錐ノ體積ハVI, 32, 系1ニ依リテ相等シキ底面及高サノ角壔ノ體積ノ三分ノ一ナリ. 故ニ體積, 底面ノ面積, 及高サノ長サヲ表ハス數ヲ夫々t, m, hトセハ,

$$t = \tfrac{1}{3}mh.$$

(iv) 截頭角錐ノ體積.

截頭角錐ノ體積ハ二ツノ角錐ノ體積ノ差トシテ之ヲ得ルコト容易ナリ.

但シ 截頭角錐 ニ 善ク 似タル 形 ノ 立體 ニシテ，其實 截頭角錐 ナラザル モノ 有リ，即 其ノ 側面 ヲ 延長シタル 時 皆 一ツノ 頂點 ニ 於テ 出會ハザル モノ 有リ：截頭角錐 ノ 體積 ノ 式 ヲ 斯ノ如キ 立體 ノ 體積 ヲ 計ル ニ 應用ス 可カラズ.

(v) 直圓壔 ノ 體積.

附錄 VII, (iv) ニ 於クル 如ク 之 ニ 内接スル 直角壔 ヲ 畫キ，其ノ 底面 ノ 邊 ノ 數 ヲ 窮リ無ク 多ク スル トキハ，其ノ 體積 ノ 極限 ハ 即 圓壔 ノ 體積 ナリ：

故ニ 圓壔 ノ 體積 ヲ 表ハス 數 ヲ d トセハ，(ii) ニ 於クル t ノ 極限 ハ d ナリ；m ノ 極限 ハ πr^2 ナリ；

h ハ h ナリ；

故ニ $$d = \pi r^2 h.$$

(vi) 直圓錐 ノ 體積.

附錄 VII, (v) ニ 於クル 如ク，之 ニ 内接スル 直角錐 ヲ 畫キ，其ノ 底面 ノ 邊 ノ 數 ヲ 窮リ無ク 多ク スル トキハ，其ノ 體積 ノ 極限 ハ 即 圓錐 ノ 體積 ナリ.

故ニ 圓錐 ノ 體積 ヲ 表ハス 數 ヲ d トセハ，

$$d = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

直圓錐 ノ 體積 ハ 相等シキ 半徑 及 高サ ノ 圓壔 ノ 體積 ノ 三分ノ一 ナリ.

截頭直圓錐 ノ 體積 ハ 二ツノ 直圓錐 ノ 體積 ノ 差 トシテ 之 ヲ 得ルコト 容易ナリ.

(vii) 球 ノ 體積.

ACB ヲ 中心 C ナル 四分圓；AT, BT ヲ A, B ニ 於テノ 切線 トセヨ；

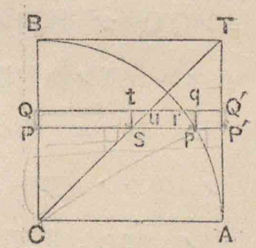
CB ヲ 任意ノ 數 ニ 等分シ，PQ ヲ 其ノ 一ツノ 部分 トセヨ；

P, Q ヲ 過リ，CA ニ 平行ニ PP′, QQ′ ヲ 引キ，

PP′ ト 弧 AB ノ 交點 p ヨリ QQ′ へ 垂線 pq ヲ 引キ，

CT ヲ 結ヒ付ケ，CT ト PP′ ノ 交點 s ヨリ QQ′ へ 垂線 st ヲ 引ク；

CB ノ 總テノ 部分 ニ 付テ 同樣ノ 作圖 ヲ 爲セ；



今 CB ヲ 軸 トシテ，此 圖形 ヲ 一 周 廻轉セシムル トキハ，四分圓 ハ 半球 ヲ 生シ，CATB ハ 圓壔 ヲ 生シ，CTB ハ 圓錐 ヲ 生ス；

又 PP'Q'Q, PstQ, 及 他ノ 部分 ニ 付テ 同樣ニ 作リタル 矩形 ハ 皆 各 圓壔 ヲ 生ス:

PP' ハ CA ニ 等シク, CA ハ Cp ニ 等シキ ヲ 以テ,

PP' ノ 上ノ 正方形 ハ Cp ノ 上ノ 正方形 ニ 等シ,

即 CP, Pp ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ;

而シテ CP ハ Ps ニ 等シ;

故ニ PP' ノ 上ノ 正方形 ハ Pp 及 Ps ノ 上ノ 正方形 ノ 和 ニ 等シ.

故ニ 半徑, PQ, Pp, Ps ノ 長サ ヲ 表ハス 數 ヲ 夫々 r, k, x, z トセハ,

$$r^2 = x^2 + z^2;$$

故ニ $$\pi r^2 k = \pi x^2 k + \pi z^2 k,$$

即 PP'Q'Q ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 圓壔 ノ 體積 ハ PpqQ ガ 生スル 所ノ 圓壔 及 PstQ ガ 生スル 所ノ 圓壔 ノ 體積 ノ 和 ニ 等シ;

CB ノ 總テノ 部分 ニ 付テ 作リタル (PP'Q'Q, PpqQ 及 PstQ ノ 如キ) 矩形 ガ 生スル 所ノ 圓壔 ニ 付テモ 同樣ノ 關係 ヲ 得; 故ニ PP'Q'Q ノ 如キ 矩形 ガ 生スル 所ノ 圓壔 ノ 體積 ノ 和 ハ PpqQ 及 PstQ ノ 如キ 矩形 ガ 生スル 所ノ 二組 ノ 圓壔 ノ 體積 ノ 和 ニ 等シ:

而シテ PP'Q'Q ノ 如キ 矩形 ガ 生スル 所ノ 圓壔 ノ

和 ハ 即 CATB ガ 生スル 所ノ 圓壔 ナリ:

PpqQ ノ 如キ 矩形 ガ 生スル 所ノ 圓壔 ノ 和 ハ 四分圓 CAB ガ 生スル 半球 ヨリ pqr ノ 如キ 形 ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 體 ノ 和 ダケ 大ナリ;

今 若シ CB ヲ 等分シタル 部分 ノ 數 ヲ 多ク スレハ, PQ ハ 何程 ニテモ 小ク スルヿ ヲ 得; 從テ, pqr モ 又 其 ガ 廻轉シテ 生スル 所ノ 體 モ 又 總テノ 斯ノ如キ 體 ノ 和 モ 何程 ニテモ 小ク スルヿ ヲ 得; 故ニ CB ヲ 分チタル 部分 ノ 數 ヲ 窮リ無ク 多ク スレハ, PpqQ ノ 如キ 矩形 ガ 生スル 所ノ 圓壔 ノ 體積 ノ 和 ノ 極限 ハ CAB ガ 生スル 半球 ノ 體積 ナリ:

同樣ニ PstQ ノ 如キ 矩形 ガ 生スル 所ノ 圓壔 ノ 體積 ノ 和 ノ 極限 ハ CTB ガ 生スル 圓錐 ノ 體積 ナリ:

故ニ 球 ノ 體積 ヲ 表ハス 數 ヲ t トセハ,

$$\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}\pi r^3 = \pi r^3,$$

即 $$t = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

球 ノ 體積 ハ 之 ニ 外接スル 直圓錐 ノ 體積 ノ 三分ノ二 ナリ.

字彙
及
索引目錄

A.

B.

數字ハ其語ノ定義有ル頁數ナリ: 數字ノ前ニ立ノ字有ルハ立體幾何學, 之レ無キハ平面幾何學 (第八版) ナリ.

Bun : 分. Segment (of a finite straight line), 209.

Burāmeguputa : ブラーメグプタ. Brahmegupta, 125.

C.

Chōkaku : 頂角. Vertical angle, 29 ; (直圓錐 ノ) 立 103.

Chokkaku : 直角. Right angle, 12.

Chokkakusankakukei : 直角三角形. Right-angled triangle, 36.

Chokkakusui : 直角錐. Right pyramid, 立 125.

Chokkakutō : 直角壔. Right prism, 立 54.

Chokkei : 直徑. Diameter, (圓 ノ) 85 ; (球 ノ) 立 77.

Chokuensui : 直圓錐. Right cone, 立 99.

Chokuentō : 直圓壔. Right cylinder, 立 99.

Chokukirikuchi : 直截リ口. Right section, 立 63.

Chokurokumentai : 直六面體. Rectangular parallelepiped, 立 53.

Chokusen : 直線. Straight line, 7.

Chokusenheimenkei : 直線平面形. Plane rectilineal figure, 26.

Chokusenkei : 直線形. Rectilineal figure, 26.

Chōten : 頂點. Vertex, (角 ノ) 9 ; (三角形 ノ) 28 ; (立體角 ノ) 立 43 ; (多面體 ノ) 立 50 ; (角錐 ノ) 立 56 ; (圓錐 ノ) 立 100.

Chōwakyōyakuten : 調和共軛點. Harmonically conjugate points, 293.

Chōwani wakatsu : 調和ニ分ツ. To divide harmonically, 292.

Chōwaretten : 調和列點. Harmonic range, 292.

Chūkō : 中項. Mean term 叉ハ Mean, 263.

Chūsen : 中線. Median line, 叉ハ Median, 82.

Chūshin : 中心. Centre, (對稱 ノ) 62 ; (圓 ノ) 85 ; (相似 ノ) 306, 345 ; (平行六面體 ノ) 立 53 ; (球 ノ) 立 77.

Chūshin ni oiteno kaku : 中心ニ於テノ角. Angle at the centre, 92.

D.

Daien : 大圓. Great circle, 立 78.

Dainari : 大ナリ. To be greater (than) ; (一ツノ比ガ他ノ比ヨリ) 262.

Daisan hireikō : 第三比例項. Third proportional, 263.

Daishi hireikō : 第四比例項. Fourth proportional, 263.

Dōikaku : 同位角. Corresponding angles, 17.

Dōitsuhō : 同一法. Rule of Identity, 6.

Donkaku : 鈍角. Obtuse angle, 12.

Donkakusankakukei : 鈍角三角形. Obtuse-angled triangle, 37.

Dōshin-en : 同心圓. Concentric circles, 91.

E.

Eikaku : 鋭角. Acute angle, 12.

Eikakusankakukei : 鋭角三角形. Acute-angled triangle, 37.

En : 圓. Circle, 85.

Enchō : 延長. Production, 8.

Enshin : 圓心. Centre, 85.

Enshū : 圓周. Circumference, 85.

Ensui : 圓錐. Cone, 立 99.

Entō : 圓壔. Cylinder, 立 99.

F.

Fukumu : 含ム. To contain, 113; 立 1.

Futsū kōri : 普通 公理. General axiom, 2.

G.

Gaibunsuru : 外分スル. To divide externally, 209.

Gaikaku : 外角. Exterior angle, 17; 27.

Gaikō : 外項. Extreme term 又ハ Extreme, 263.

Gaisetsuen : 外接圓. Circumscribed circle, 108.

Gaisetsusuru (.... ni) : 外接スル (.... ニ). To be circumscribed (about....) 121; 147.

Gaisetsusuru (... ni) : 外切スル. To touch externally, 139; 立 8

Gaishin : 外心. Circumcentre, 81; 108.

Gaishin : 外心 (相似 ノ). Outer centre (of similitude), 345.

Gen : 弦. Chord, 97.

Gohenkei : 五邊形. Pentagon, 27.

Gōhi no ri : 合比 ノ 理. Componendo, 274.

Gokakukei : 五角形. Pentagon, 27.

Gokō : 後項. Consequent, 258.

Gomentai : 五面體. Pentahedron, 立 50.

Gōshu : ゴーシユ. Gauche, 立 18.

Gyaku : 逆. Converse, 4.

H.

Hampi : 反比. Reciprocal ratio, 265.

Han-en : 半圓. Semicircle, 89.

Hankei : 半徑. Radius, (圓 ノ) 85; (球 ノ) 立 77; (直圓壔 ノ) 立 99; (直圓錐 ノ) 立 100.

Hankyū : 半球. Hemisphere, 立 79.

Hanten no ri : 反轉 ノ 理. Invertendo, 265.

Hashigogata : 梯形. Trapezium, 59.

Heikaku : 平角. Straight angle, 11.

Heikō : 平行. Parallel, (直線) 20; (平面) 立 5; (平面 ト 直線) 立 6.

Heikō chokusen : 平行 直線. Parallel straight lines, 20.

Heikōrokumentai : 平行六面體. Parallelepiped, 立 50.

Heikōsen : 平行線. Parallel lines, 20.

Heikōshihenkei : 平行四邊形. Parallelogram, 59.

Heimen : 平面. Plane, 8; 立 1.

Heimenkikagaku : 平面幾何學. Plane geometry, 1.

Heimenkaku : 平面角. Plane angle, 9.

Heimenkei : 平面形. Plane figure, 26.

Heimenzukei : 平面圖形. Plane figure, 8.

Hen : 邊. (角 ノ), Side 又ハ Arm (of an angle), 9; (多角形 ノ), Side (of a polygon), 26.

Hi : 比. Ratio, 258.

Hirei : 比例. Proportion, 262.

Hireichūkō : 比例中項. Mean proportional, 263.

Hireiryō : 比例量. Proportionals, 262.

Hishigata : 菱形. Rhombus, 61.

Hitoshi : 等シ. To be equal; (比 ガ) 260.

Hokaku : 補角. Supplementary angle 又ハ Supplement, 13.

Hyōmen : 表面. Surface 7

I.

Ichi : 位置. Position.

J.

Jiku : 軸. Axis, (對稱 ノ) 62; (球面 ノ 圓 ノ) 立 78; (圓錐 ノ) 立 99.

Johi no ri : 除比 ノ 理. Dividendo, 275.

Jūshin : 重心. Centroid 又ハ Centre 又ハ Median point, 82.

K.

Ka : 和. Sum; (角 ノ) 10.

Kahi no ri : 加比 ノ 理. Addendo, 272.

Kaku : 角. Angle, (平面角) 9; (出會ハザル 直線 ノ) 立 20; (直線 ト 平面 ノ) 立 31; (二ッノ 相交ル 圓 ノ) 立 85.

Kakusui : 角錐. Pyramid, 立 56.

Kakutō : 角壔. Prism, 立 53.

Kasetsu : 假設. Hypothesis, 3.

Kassen : 割線. Secant, 106.

Katachi : 形チ. Shape.

Katamuki : 傾キ. Inclination, 立 54.

Kazu : 數. Number.

Kei : 系. Corollary, 6.

Kikagaku : 幾何學. Geometry, 1.

Kikagaku kōri : 幾何學 公理. Geometrical axiom, 2.

Kiku : 規矩. Postulate, 156.

Kinsan : 近算. Approximation, 附錄 II.

Kirikuchi : 截リ口. Section.

Kiseki : 軌跡. Locus, 71.

Kiseki no majiwari : 軌跡 ノ 交リ. Intersection of loci, 77.

Ko : 弧. Arc, 92.

Kōchitsu no ri : 更迭 ノ 理. Alternando, 271.

Kōdo : 公度. Common measure, 253.

Kōri : 公理. Axiom, 2.

Kyoku : 極. Pole, 立 78.

Kyokugen : 極限. Limit, 129 ; 附錄 IV.

Kyokusankakukei : 極三角形. Polar triangle, 立 92.

Kyori : 距離. Distance, 45 ; 61 ; 立 23 ; 立 24.

Kyōyakukaku : 共軛角. Conjugate angles, 10.

Kyōyakuko : 共軛弧. Conjugate arcs, 92.

Kyōyaku : 共軛. Conjugate.

Kyū : 球. Sphere, 立 75.

Kyūmen : 球面. Spherical surface, 又ハ Surface of a sphere, 立 75.

Kyūmenkajō : 球面過剰. Spherical excess, 立 96.

Kyūmenkaku : 球面角. Spherical angle, 立 87.

Kyūmensankakukei : 球面三角形. Spherical triangle, 立 89.

Kyūmentakakukei : 球面多角形. Spherical polygon, 立 87.

Kyūshin : 球心. Centre of a sphere, 立 77.

Kyūten-en : 九點圓. Nine-point circle, 198.

M.

Majiwaru : 交ル. To intersect ; (圓 ガ) 139.

Meidai : 命題. Proposition, 2.

Men : 面 (多面體 ノ). Face, 立 50.

Menseki : 面積. Area, 27.

N.

Naibunsuru : 内分スル. To divide internally, 209.

Naikaku : 内角. Interior angle, 17 ; 26.

Naisetsuen : 内接圓. Inscribed circle, 149.

Naisetsusuru (... ni) : 内接スル (... ニ). To be inscribed (in ...) 121 ; 147.

O.

P.

R.

S.

Sei : 正. Regular.

Seihachimentai : 正八面體. Regular octahedron, 立 62.

Seihōkei : 正方形. Square, 61.

Seijūnimentai : 正十二面體. Regular dodecahedron, 立 62.

Seinijūmentai : 正二十面體. Regular icosahedron, 立 62.

Seirokumentai : 正六面體. Regular hexahedron, 立 61.

Seishaei : 正射影. Orthogonal projection, 69 ; 立 27.

Seishimentai : 正四面體. Regular tetrahedron, 立 61.

Seitakakukei : 正多角形. Regular polygon, 27.

Seitamentai : 正多面體. Regular polyhedron, 立 50.

Sen : 線. Line, 7.

Sentaishō : 線對稱. Line-symmetry, or symmetry with respect to an axis, 62.

Sessen : 切線. Tangent, (圓 ノ) 127, 129 ; (球 ノ) 立 83.

Sessuru : 切スル. To touch, 127, 129 ; 139 ; 立 83 ; 立 85 ; 立 106.

Sekkaku : 接角. Adjacent angle, 10.

Setsuheimen : 切平面. Tangent plane, (球 ノ) 立 83 ; (圓壔 或ハ 圓錐 ノ) 立 106.

Setten : 切點. Point of contact, 127, 129 ; 立 83.

Shaei : 射影. Projection, 69.

Shahen : 斜邊. (直角三角形 ノ) Hypotenuse, 37 ; (直圓錐 ノ) Slant side, 立 100.

Shakakutō : 斜角壔. Oblique prism, 立 54.

Shamen : 斜面. Slant face, 又ハ lateral face, 立 56.

Sharyō : 斜稜. Slant edge, 立 56.

Shasen : 斜線. Oblique line, 立 20.

Shibun-en : 四分圓. Quadrant, 89.

Shihenkei : 四邊形. Quadrilateral, 27.

Shikakukei : 四角形. Quadrangle, 27.

Shimentai : 四面體. Tetrahedron, 立 50 ; 立 56.

Shimuson : シムソン. Simson.

Shōen : 小圓. Small circle, 立 78.

Shōgen : 象限. Quadrant, 89.

Shotō kikagaku : 初等 幾何學. Elementary geometry, 1.

Shū : 周. Perimeter, 27 ; (圓 ノ) Circumference, 85.

Shū ni oiteno kaku : 周 ニ 於テノ 角, Angle at the circumference, 113.

Shūketsu : 終結. Conclusion, 4.

Sōji : 相似. Similar, 294.

Sōjichokusenkei : 相似直線形. Similar rectilineal figures, 294.

Sōjikei : 相似形. Similar figures, 294.

Sōjini wakatsu : 相似ニ 分ツ. To divide similarly, 336.

Sōji no chūshin : 相似 ノ 中心. Centre of similitude, 306 ; 345.

Sōji no ichi ni aru : 相似 ノ 位置 ニ 在ル. Similarly situated, 294.

Sōjōhi : 相乘比. Ratio compounded of, 278.

Sokumen : 側面. Lateral face, 立 54.

Sokuryō : 側稜. Lateral edge, 立 54.

Sou : 添フ. About, 208.

Suichoku : 垂直. Perpendicular, 立 20 ; 立 42.

Suisen : 垂線. Perpendicular, 12 ; Perpendicular 又ハ Normal, 立 20.

Suisennaru : 垂線ナル. Perpendicular, 12.

Suishin : 垂心. Orthocentre, 82.

Suisokusankakukei : 垂足三角形. Pedal Triangle, 197.

T.

Tai : 體, Solid.

Taichōkaku : 對頂角. Vertically opposite angle 又ハ Vertical angle, 16.

Taigū : 對偶. Contrapositive, 4.

Taikakusen : 對角線. Diagonal, (多角形 ノ) 27 ; (平行六面體 ノ) 立 51.

Taiō : 對應. Corresponding ; homologous, 294.

Taiōsuru : 對應スル. To correspond, 263 ; 294.

Taiseki : 體積. Volume, 立 63.

Taishō : 對稱. Symmetry, 61.

Taishōnaru (... ni tsuite) : 對稱ナル (... ニ 付テ). Symmetrical (with respect to ....), 61.

Taishōni wakatsu : 對稱ニ 分ツ. To divide symmetrically, 62.

Taishōsankakukei : 對稱三角形. Symmetrical triangles, 立 96.

Taisuru (... ni) : 對スル (... ニ). To subtend, 92.

Taiten : 對點. Opposite points, 立 77.

Takasa : 高サ. Altitude, (三角形 或ハ 平行四邊形 ノ) 201 ; (角錐 ノ) 立 56 ; (圓壔 ノ) 立 99 ; (圓錐 ノ) 立 100.

Takakukei : 多角形. Polygon, 26.

Tamenkaku : 多面角. Polyhedral angle, 立 43.

Tamentai : 多面體. Polyhedron, 立 50.

Tan-i : 單位. Unit, 附錄 II.

Tanmen : 端面. Base, (角壔 ノ) 立 54 ; (圓壔 ノ) 立 99.

Tatsu (.... no ueni) : 立ツ (.... ノ 上ニ). To stand (upon ....), 92.

Teigi : 定義. Definition, 2.

Teihen : 底邊. Base, 28.

Teimen : 底面. Base, (角錐 ノ) 立 56 ; (圓壔 ノ) 立 99 ; (圓錐 ノ) 立 100.

Teiri : 定理. Theorem, 3.

Ten : 點. Point, 7.

Tenkanhō : 轉換法. Rule of Conversion, 5.

Tentaishō : 點對稱. Point-symmetry or symmetry with respect to a centre, 62.

Tōbairyō : 等倍量. Equimultiples, 252.

Tōhensankakukei : 等邊三角形. Equilateral triangle, 35.

Tōhi : 等比. Ratio of equality, 263.

Tōhi no ri : 等比 ノ 理. Ex aequali, 277.

Tōkaku : 等角. Equiangular, 294.

Tonari no yumigata : 隣リノ 弓形. Alternate segment.

Totsutakakukei : 凸多角形. Convex polygon, 27.

Tsukigata : 月形. Lune, 立 88.

Tsutsumu : 包ム. Contained by, 209.

Tsūyakusubekarazaru : 通約ス可カラザル. Incommensurable, 253.

Tsūyakusubeki : 通約ス可キ. Commensurable, 253.

U.

Ueno : 上ノ. On, 209.

Ura : 裏. Obverse, 4.

W.

Wakatsu : 分ツ. To divide, 209.

Y.

Yakuryō : 約量. Measure, 252.

Yakusuru : 約スル. To measure, 252.

Yokaku : 餘角. Complementary angle 叉ハ Complement, 13.

Yokei : 餘形 (對角線 ニ 添フ 平行四邊形 ノ). Complements (of the parallelograms about a diagonal), 208.

Yōken : 要件. Condition.

Yūgen chokusen : 有限 直線. Finite straight line, 8.

Yūhi : 優比. Ratio of greater inequality, 263.

Yūkaku : 優 (共軛) 角. Major (conjugate) angle, 10.

Yūko : 優 (共軛) 弧. Major (conjugate) arc, 92.

Yūkuriddo : ユークリッド. Euclid.

Yumigata : 弓形. Segment (of a circle), 113.

Yumigata ni oiteno kaku : 弓形 ニ 於テノ 角 Angle in a segment, 113.

Yūyumigata : 優弓形. Major segment, 113.

Z.

(定價金六拾錢)

發行兼印刷者 東京市京橋區銀座一丁目廿二番地 大日本圖書株式會社 右代表者 專務取締役 佐久間貞一

編纂者 東京府平民 理學博士 菊池大麓

明治廿七年十二月十五日發行

明治廿七年十二月十一日訂正印刷

明治廿二年七月廿三日文部省出版

英文幾何學　全三冊

本書ハ菊池理學博士編纂初等幾何學教科書ヲ同先生ガ英譯セラレタルモノナリ高等學校及尋常中學校等英文教科書ヲ用ヒラルル諸學校ニ於テ良教科書ナリ

立躰部　第三卷　定價　金四拾錢　郵稅四錢
平面部 第二卷 第一卷 各冊　定價　金四拾錢　郵稅四錢

初等幾何學教科書　全二冊

理學博士
理科大學教授
菊池大麓先生編纂

本書ハ尋常中學校及尋常師範學校ニ於ケル幾何學教科書ニ供スルモノナリ

立體部　定價　金六拾錢　郵稅六錢
平面部　定價　金八拾五錢　郵稅拾錢

近世平面幾何學　全一冊

本書ハ初等幾何學ヲ終リ進ミテ高等幾何學ヲ修メントスルノ階梯ニ供スルモノナリ故ニ高等學校等ノ教科書トシテ最モ適當ナリ

定價　金七拾錢　郵稅六錢

理科大學數學撰科修業數藤斧三郎譯
理科大學教授理學博士菊池大麓合
ジー、リチャードソン、エー、エス、ラムゼー原著

初等平面三角法教科書　全一冊

本書ハ尋常中學校及尋常師範學校等ノ教科書トシテ編纂セラレタルモノナリ

定價　金七拾五錢　郵稅八錢

理學士澤田吾一
理學博士菊池大麓
兩先生編纂

發賣所

各府縣下賣捌所

同支社
大阪市東區博勞町四丁目十七番屋敷

大日本圖書株式會社
東京市京橋區銀座一丁目二十二番地

理學博士 理科大學教授 藤澤利喜太郎先生編纂

算術教科書 全二册

上巻 定價 金七拾五錢 郵稅八錢
下巻 定價 金七拾五錢 郵稅八錢

本書ハ先生ガ多年ノ實驗ト豐富ナル學識トニヨリ大成セラレタル最モ新趣味アル良教科書ナリ尋常中學校尋常師範學校及之レト同等ナル諸學校ノ數學教科書トシテ最モ適當ナリ

理學博士 理科大學教授 藤澤利喜太郎先生著述

算術條目及教授法 全一册

定價 金六拾五錢 郵稅六錢

本書ハ先生ガ本邦算術條目及教授法ノ錯雜セルヲ憂ヒ之レガ改良ヲ謀ランガ爲メ起稿セラレタルモノナリ故ニ數學教員ノ任アル諸君算術教科書ト對照シテ教授セラルヽニ於テハ蓋シ此業ノ爲メ裨益尠ナカラザル可シ

工學博士 工科大學教授 高松豐吉先生編纂

化學教科書 全三册

第一編無機(第一) 定價 金六拾五錢 郵稅八錢
第一編無機(第二) 定價 金五拾錢 郵稅六錢
第二編有機 定價 金六拾錢 郵稅六錢

本書ハ尋常師範學校及尋常中學校等中等教育ノ化學教科用ニ充ンガ爲メ編纂セラレタル最良ナル教科書ナリ

文科大學長文學博士外山正一先生編纂
英人チャンブレン氏校補

正則文部省英語讀本 全五册

上製 定價 金壹圓七拾七錢
並製 定價 金壹圓四拾五錢

星野文學博士 重野文學博士 閱
磯田文學士 三上文學士 高津文學士 編纂 川崎千虎畫

にほんれきし教科書 全三册

定價 各冊 金三拾錢 郵稅每冊六錢

本書ハ中等教育ニ適當ナル教科書ナリ

理學博士齋田功太郎先生著

大日本普通植物誌 全一册

定價 金壹圓七拾錢 郵稅拾四錢

本書ハ先生多年ノ實驗ニ徵シ博ク獨米諸國ノ教授法ヲ參酌シテ編述セラレタル中等教育ニ於テ最モ適當ナル新案教科書也又野外運動等ニ於テ植物採取用トシテ携帶スルニ必適セル良書也

文科大學教授栗田寛先生序文
高桑駒吉 依田喜一郎 成川睿太郎 校訂增補

增補校訂 吾妻鏡 綴和全十册

定價 金七圓 遞送料(小包郵稅六百匁迄定額)

本書ハ駿府文庫本其他ニ照合シテ嚴密ニ校訂增補セラレタル者ニシテ吾妻鏡モ此書ニ至ッテ完全無欠ト稱ス可シ

高桑、依田、成川三君纂輯

吾妻鏡集解 綴和全二册

定價 各冊 金七拾五錢 郵稅各冊四錢宛

本書卷一ニハ東鑑異本考、駿府文庫本解題、慶長本解題、不審問答、要目集成等ヲ載セ卷二ニハ人名考、類標、目錄、御行次第等ヲ集錄セリ

吾妻鏡集解

伊澤修二先生閱 農學士澤村眞君著

農業教科書 全二册

第一 定價 金六拾錢 郵稅八錢
第二 定價 金七拾錢 郵稅八錢

本書ハ尋常師範學校高等小學校ノ農科專修科農學校等ノ教科書ナリ

教育學舘校定
鈴木忠孝 朝夷六郎 編 文部省撿定濟

國文教科書 綴和全七册

定價 金壹圓拾六錢 郵稅 各冊 貳錢宛

本書ハ尋常中學校及尋常師範學校ノ國語科教科用書トシテ最モ適當ナリ

ドクトル尺秀三郎君著

新編 實用教育學 全一册

定價 金六拾錢 郵稅八錢

本書ハ尋常師範學校教科用書及ヒ小學校教師ノ參考書トシテ最モ適當ナル良書ナリ

海軍圖說　全一冊

伊東海軍々令部長題辭

海軍大尉木村浩吉君著

本文菊判二百頁　木版及石版畫六十七圖挿入

上等製定價金六拾錢郵稅拾貳錢　舶來洋紙表紙色クロース金模樣入　並製　定價金三拾八錢　郵稅拾錢

本書ハ木村海軍大尉ガ我國民ノ未ダ海事思想ニ乏キヲ慨セラレ多年ノ實踐經驗ニ據リ海軍ノ組織上軍艦ニ機關ニ水雷大砲ヲ始メ航海碇泊艦内諸動作ノ事ニ至ル迄毎條精密ナル圖畫ヲ揭ゲ小學校生徒ト雖解シ易キ樣最簡明ニ説明セラレタルモノナリ故ニ之ヲ一讀セハ凡ソ海軍ニ屬スル細大百般ノ事瞭然トシテ指掌ノ如ク因テ以テ海軍ノ我國ニ於ル最大急務タルコトヲ悟了シ躍然其思想ヲ啓發勃興セシムルコト疑ヲ容レズ實ニ現今我國民ノ教育上闕ク可ラザル良書也　本書出版ニ就テハ宮内省ヨリ殊ニ御下賜金アリテ國内ニ普及スルヲ容易ナラシメラレタリ弊社ハ謹デ大尉ノ訓命ニ基ヅキ御趣旨ヲ奉戴シ務メテ價額ヲ低廉ニシ通常價額三分ノ一ヲ定價トシ一日モ早ク海内ニ普及セシメ以テ聊カ報國ノ微衷ヲ表セントス四方ノ諸君希クハ迅速購讀アラムヿヲ切ニ望ム

初等代數學教科書　全二冊　近刻

理學博士藤澤利喜太郎先生著

定價　金　　郵稅

本書ハ先生多年ノ經歷ニ依リ編纂セラレタル算術教科書ニ連續シテ適用スベキ教科書ナリ

初等幾何學講義　全二冊　近刻

理學博士菊池大麓先生著

定價　金　　郵稅

本書ハ菊池先生編纂初等平面幾何學教科書ノ講義ナリ

教科中等植物學新編　全一冊　近刻

理學博士齋田功太郎先生
理學博士松村任三先生合著

定價凡金六拾五錢　郵稅

本書ハ尋常中學校及尋常師範學校ノ教科用ニ充ンガ爲メ兩先生多年ノ實驗ニ依リ編纂セラレタルモノナリ