初等幾何學教科書.

平面幾何學:

卷之貳;

第四,第五編.

マスタル オブ アーツ,理學博士,理科大學教授,

菊池大麓

編纂.

明治廿二年,

文部省編輯局.

初等

幾何學

教科書.

平面幾何學:

卷之貳;

第四, 第五編.

マストル オブ アーツ, 理學博士, 理科大學教授,

菊池大麓

編纂.

明治廿二年,

文部省編輯局.

目 錄.

卷 之 貳.

第四編.

比及比例.

第一節.

定義及緒論.

[本編ニ於テ論スル所ノ量ハ特ニ幾何學的ノ量ニ限ラザルナリ. 量ヲ代表スル爲ニ A, B, C 等ノ大羅馬字ヲ用ユ; 是レ代數學ニ於ケル如ク, 其量ノ含ム所ノ單位ノ數ニ非ラズ, 其量自カラヲ代表スルモノナリ. 例ヘハ, 論スル所ノ量ガ線ノ長サナレハ, 其ダケノ長サヲ表ハシ, 其ノ尺, 寸等ノ數ニ非ラズ; 若シ時間ナレハ, 其時間内ノ分, 秒等ノ數ニ非ラズ, 直ニ其ダケノ時ヲ代表スルモノナリ.

同シ種類ノ量(長サト長サ, 重サト重サ, 等ハ同シ種類ノ量; 面積ト長サ, 重サト時, 等ハ異ナレル種類ノ量ナリ) ハ字母中ノ同シ部分ノ文字ヲ以テ之ヲ表ハス; 異ナレル種類ノ量, 或ハ異同何レニテモ

宜シキ量ヲ論スルトキハ, 異ナレル部分ノ文字ヲ用ユ.

m, n, p, q 等ノ小字ハ完全數ヲ表ハス.]

定義 1. 一ツノ量ガ他ノ量ヲ丁度若干度含ムトキハ, 前者ヲ後者ノ**倍量**ト稱ス. 其ノ之ヲ含ムコトガ 1, 2, 3, ... m 度ナルニ從テ, 第一, 第二, 第三, ... 第m倍量ト稱ス.

例ヘハ二寸ノ長サハ一寸ノ長サノ第二倍量ナリ; m 斤ノ重サハ一斤ノ重サノ第m倍量ナリ.

一ツノ量 A ガ他ノ量 B ノ第m倍量ナルコトヲ下ノ如ク記ス: $A = mB$.

(本編ニ於テハ, 言語ヲ以テ述フルトキハ餘リ長タラシク爲ル事ヲ簡畧ニ記ス爲ニ代數學ノ記號ヲ假用ス; 然レトモ, 代數學ニ於テ用ユル時トハ其ノ代表スル所稍異ナルハ前ニ述タルガ如シ.)

mA ト mB ハ A ト B ノ**等倍量**ナリト云フ.

定義 2. 一ツノ量ガ他ノ量ノ中ニ丁度若干度含マルヽトキハ, 前者ヲ後者ノ**約量**ト云フ; 又前者ハ後者ヲ**約ス**ト云フ.

下ニ揭ケタル倍量ノ性質ハ證明ヲ要セザルモノ,

即公理的ノモノトス: ——

(イ) A ガ B ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, mA ハ mB ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナリ.

之ヲ下ノ如ク畧記ス:

$A > = < B$ ニ從テ, $mA > = < mB$.

轉換法ニ由リテ, 此ノ逆モ亦眞ナリ, 即

(ロ) $mA > = < mB$ ニ從テ, $A > = < B$.

(ハ) $mA + mB + mC + \cdots\cdots = m(A + B + C + \cdots\cdots)$.

(ニ) $mA - mB = m(A - B)$. (但シ A ハ B ヨリ大ナリトス.)

(ホ) $mA + nA + pA + \cdots\cdots = (m + n + p + \cdots\cdots)A$.

(ヘ) $mA - nA = (m - n)A$. (但シ m ハ n ヨリ大ナリトス.)

(ト) $m.nA = mn.A = nm.A = n.mA$.

定義 3. 二ツノ(或ハ二ツヨリ多クノ)量ガ第三ノ量ヲ丁度若干度含ムトキハ, 之ヲ**通約ス可キ量**ト稱ス; 第三ノ量ヲ其ノ**公度**ト稱ス. 斯ノ如キ量無ケレハ, 二ツノ量ハ**通約ス可カラザル量**ナリ

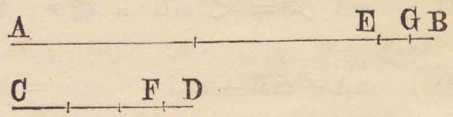
ト云フ.

二ツノ與ヘラレタル量ノ最大公度ヲ求ムル方法.

AB, CD ヲ二ツノ與ヘラレタル量トシ, AB ヲ CD ヨリ大ナルモノトス:

AB, CD ノ最大公度ヲ求ム.

(此ニハ假ニ二ツノ量ヲ直線トス: 其他ノ量ニテモ稍同樣ノ方法ヲ適用スルヲ得.)



AB ヨリ CD ニ等シキ部分ヲ何度ニテモ出來得ル丈ケ切リ取レ;

若シ殘リ EB 有レハ, CD ヨリ EB ニ等シキ部分ヲ何度ニテモ出來得ル丈ケ切リ取レ;

若シ殘リ FD 有レハ, EB ヨリ FD ニ等シキ部分ヲ何度ニテモ出來得ル丈ケ切リ取レ;

斯ノ如ク爲スヿ數回ニシテ, 遂ニ殘リ無キニ至リタリトセヨ;

然ルトキハ其最後ノ殘リガ求ムル所ノ最大公度ナリ.

此方法ハ算術及代數學ニ於テ最大公約數ヲ得ル方法ト同一ノ理ニ基ケリ; 故ニ其ノ證明ハ此ニ

畧ス.

此方法ハ殘リタル部分ヲ其ノ前ノ殘リヨリ切リ取ルヿヲ續ケテ行ヒ, 遂ニ殘リ無キニ至リテ終ル: 而シテ最後ノ殘リガ最大公度ナリ. 故ニ,

(甲) 此方法ガ終リ有レハ, 二ツノ與ヘラレタル量ハ通約ス可キ量ナリ.

又(甲)ノ對偶ヲ取リテ,

(乙) 二ツノ與ヘラレタル量ガ通約ス可カラザル量ナレハ, 此方法ハ終リ無シ.

今(甲)ノ逆ヲ證明セン; 即

(丙) 若シ二ツノ量ガ通約ス可キ量ナレハ, 此方法ハ終リ有リ.

二ツノ量ガ通約ス可キ量ナルヲ以テ, 公度有リ;

其ノ最大公度ヲ M トセヨ;

M ハ CD ヲ約スルヲ以テ, 其ノ若干倍ナル AE ヲ約ス, 且 AB ヲ約ス;

故ニ M ハ第一ノ殘リ EB ヲ約ス;

故ニ M ハ CD 及 EB ノ公度ナリ;

故ニ又第二ノ殘リ FD ヲ約ス;

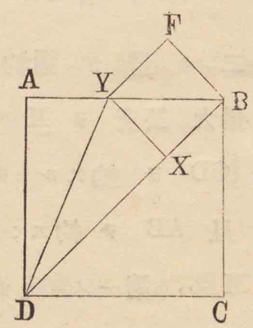
同樣ニ M ハ第三ノ殘リ, 其他總テノ殘リヲ約ス:
然ルニ殘リハ一ッ置ニ必ズ半分ヨリ多ク減少ス;
故ニ此方法ハ遂ニ殘リ M ヲ以テ終ル可シ;
然ラザレハ, M ヨリ小ナル殘リ, 即 M ガ約ス能ハザル殘リニ達ス可ケレハナリ.

(甲)ノ裏即(丙)ノ對偶モ亦眞ナリ, 即

(丁) 若シ此方法ガ終リ無ケレハ, 二ッノ量ハ通約ス可カラザル量ナリ.

(戊) 正方形ノ邊ト其ノ對角線ハ通約ス可カラザル量ナリ.

ABCD ヲ正方形, BD ヲ其ノ對角線トセヨ;
然ル𪜈ハ AB ト BD ハ公度無カル可シ.



BD 上ニ DX ヲ AB ニ等シク取レ;
然レハ AB ト DB ノ公度ハ又 AB ト XB ノ公度ナリ:
XY ヲ DB ニ垂線ニ引キ, AB ト Y ニ於テ出會ハシメヨ;

XY ハ XB ニ等シク, BY ハ XB ノ上ノ正方形ノ對角線ナルヿハ容易ニ證明スルヲ得:
又 DY ヲ結ヒ付ケ, 二ッノ三角形 DAY, DXY ガ全ク相等シキヿヲ證明スルヲ得;
故ニ AY ハ XY ニ等シ, 即 XB ニ等シ:
故ニ AB ト XB ノ公度ハ又 XB ト YB ノ公度ナリ;
即一ッノ正方形ノ邊ト其ノ對角線ノ公度ナリ;
故ニ元ノ正方形ノ邊ト對角線ノ公度ヲ得ルニハ之ト同一ノ問題ヲ解スルヲ要ス;
故ニ吾々ハ何度續ケテ此方法ヲ行フモ常ニ同シ問題ニ歸ル, 唯正方形ガ漸々小ナルノミ;
即此方法ハ終リ無シ;
故ニ正方形ノ邊ト對角線ハ通約ス可カラザル量ナリ.

(戊)ニ於テ通約ス可カラザル量ノ一例ヲ示シタルガ, 總シテ任意ノ二ッノ量ヲ取レハ, 通例通約ス可カラザル量ニシテ, 其ノ通約ス可キ量ナルヿハ却テ稀ナリ.

吾々ガ代數學ニ於テ學ヒタル比及比例ノ理ハ唯通約ス可キ量ノミニ就テ得タルモノナリ. 實地計算ノ爲ニハ, 近算ノ法ヲ以テ之ヲ通約ス可カラザル量ニ應用スルモ差支ナシト雖, 理論上ニ於テハ嚴密

正確ナリト云フヲ得ズ．故ニ通約ス可キト通約ス可カラザルトニ關ラズ，總テノ量ニ就テ比及比例ノ眞理ヲ得ザレハ，吾々ハ之ヲ正當ニ幾何學上總テノ量ニ應用スル能ハザルナリ．故ニ下ニ之ヲ論セントス．

定義 4. 一ツノ量ト同シ種類ノ他ノ量トノ**比**トハ前者ト後者ト「何倍ナルヤ」ニ付テノ關係ナリ．前者ヲ比ノ**前項**，後者ヲ**後項**ト稱ス．

假ニ上ノ如ク，比ノ定義ヲ揭ケ置クト雖，是レ甚滿足ナル定義ニ非ラズ；比ハ到底簡單ニシテ明瞭ナル定義ヲ下ス能ハザル語ナレハナリ． 依リテ下ニ其ノ說明ヲ揭ク．

一ツノ量Aト一ツノ他ノ量Bト「何倍ナルヤ」ニ付テノ關係ハAノ倍量A, 2A, 3A,........等，又Bノ倍量B, 2B 3B,........等ヲ順次ニ小ヨリ大ニ至ル樣ニ整列シタル時，Aノ倍量ガBノ倍量ノ間ニ何如ニ挿マル丶カヲ以テ定ムルナリ． 言ヒ換レハ，Aノ何倍ハBノ何倍ニ等シキヤ，或ハBノ何倍ト何倍トノ間ニ在リヤ，即 m ハ何如ナル數ナルモ，mA ニ等シキBノ倍量 nB，或ハ mA ヲ挿ムBノ二ツノ倍量 nB 及 $(n+1)$B ヲ知ル時ハ即AトBノ比ヲ知ルナリ． 故ニ吾々ガAトBノ比ヲ知ルモ，各ノ

量ノ眞ノ大サヲ知ルニ非ラズ，唯其ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ヲ知ルノミ．

例ヘハ正方形ノ邊Aト對角線Bトノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ヲ記セハ下ノ如シ：

A　　2A　　3A　4A　　5A　　6A　7A　　8A　　9A　　10A　11A　　12A
　B　　2B　　　3B　　4B　　　5B　　6B　　7B　　　8B　　9B

13A　14A　　15A..................141A　　　142A..........................
　　　10B　　　　　　　　　100B

何如ナル正方形ヲ取ルモ其ノ邊ト對角線ノ比ハ常ニ此表ニ依リテ知ルヲ得ルト雖，邊及對角線ノ大サハ固ヨリ之ニ依リテ知ルヲ得ザルナリ．

(己) 同シ種類ノ量ニ非ラザレハ，比ヲ有セズ．

何トナレバ，同シ種類ノ量ニ非ラザレハ其ノ倍量ノ大サヲ較ヘテ，順次ニ之ヲ整列セシムルヿ能ハザレハナリ．

(庚) 同シ種類ノ二ツノ量A, B有リテ，AガBヨリ小ナレバ，Bノ二ツノ續キタル倍量ノ間ニAノ倍量ヲ一ツハ必ズ挿メリ．

何トナレハ，nBトB$(n+1)$Bトノ差ハAヨリ大ナルヲ以テ，其ノ間ニAノ倍量ガ少クモ一ツハ無キ能ハズ．

(辛) A ガ何程 B ヨリ小ナルモ, B ヨリ大ナル A ノ倍量有リ.

(壬) 二ツノ量 A, B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ確定セルモノニシテ B ト何程少シノ差有ル量 C ヲ取ルモ, A, C ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方トハ異ナレリ.

B ト C ノ差ヲ D トセヨ: 然レバ D ハ何程小ナルモ, 其ノ第 m 倍量 mD ガ A ヨリ大ナル様ニ m ヲ取ルヲ得 (但シ D ガ少ナルニ從テ, m ハ大ナリ); 然レバ mB ト mC ノ差 mD ハ A ヨリ大ナルヲ以テ, mB ト mC ハ A ノ同シ倍量ノ間ニ挿マルヽ能ハズ; 即 A ト B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ A ト C ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ニ同シカラズ; 其ノ始メハ或ハ同シキモ, 大ナル倍量ニ至リテ, 必ズ異ナレリ.

A ト B ノ比ヲ記スニ A : B ヲ以テス; A ハ前項, B ハ後項ナリ.

定義 5. 二ツノ量ノ比ガ他ノ二ツノ量ノ比 (前ノ二ツト同シ種類ニテモ, 或ハ異ナレル種類ニテモ), ニ等シトハ二ツノ比ノ前項ノ任意ノ等倍量ヲ取リ, 又後項ノ任意ノ等倍量ヲ取リ, 一ツノ前項ノ倍量ガ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 他ノ前項ノ倍量ガ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナル時ニ云フナリ.

二ツノ量 A, B 及他ノ二ツノ量 P, Q 有リ; m, n ガ何如ナル完全數ナルモ, $mA >=< nB$ ニ從テ $mP >=< nQ$ ナル𪜈ハ, A : B ガ P : Q ニ等シト云フ.

又之ヲ下ノ如ク述フルヲ得:
m ハ任意ノ完全數, n ハ mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ挿マルヽカ, 或ハ nB ニ等シキ様ニ取リタル完全數トセヨ: mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ挿マルヽカ, 或ハ nB ニ等シキカニ從テ, mP ガ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ挿マルヽカ或ハ nQ ニ等シキ時ハ A : B ハ P : Q ニ等シト云フ. 是レ上ノ定義ヨリ直ニ由來スル所ノ結果ナリ.

等シキ比ノ定義ヲ亦下ノ如ク述フルモ同一ナリ: A : B ガ P : Q ニ等シトハ A ノ倍量ト B ノ倍量トノ挿ミ合ヒ方ガ P ノ倍量ト Q ノ倍量トノ挿ミ合ヒ方ニ全ク同シキヲ云フ.

上ノ定義ニ於テ, m, n ハ何如ナル完全數ニテモ差支ナキヲ以テ之ヲ各 1 トスレバ下ノ結果ヲ得:

(癸) 二ツノ比ガ相等シケレバ,一ツノ比ノ前項ガ其ノ後項ヨリ大ナルカ,或ハ之ニ等シキカ,或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ,他ノ比ノ前項モ其ノ後項ヨリ大ナリ,或ハ之ニ等シ,或ハ之ヨリ小ナリ.

定義 6. 二ツノ量ノ比ガ他ノ二ツノ量ノ比ヨリ**大ナリ**トハ兩比ノ前項ノ等倍量,及後項ノ等倍量ヲ,第一ノ比ノ前項ノ倍量ガ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナルカ或ハ之ニ等シキニ,第二ノ比ノ前項ノ倍量ハ其ノ後項ノ倍量ヨリ大ナラズ,或ハ之ヨリ小ナル樣ニ,取リ得ル時ニ云フ.

$mA > nB$ ナルニ nP ハ nQ ヨリ大ナラズ,

或ハ $mA = nB$ ナルニ $nP < nQ$ ナル樣ナル m, n ノ値ヲ見出シ得ルトキハ $A:B$ ハ $P:Q$ ヨリ大ナリト云フ.

定義 7. AトBノ比ガPトQノ比ニ等シケレバ,四ツノ量ハ**比例**ヲ爲スト云フ;或ハ之ヲ**比例量**ナリト云フ.

比例ハ下ノ如ク之ヲ記ス:

$A:B::P:Q$;

之ヲAトBノ比ハPトQノ比ニ等シトモ,又ハAノBニ於ケルハPノQニ於ケルガ如シトモ讀ミテ可ナリ.

AトQヲ比例ノ**外項**;BトPヲ**中項**ト稱ス.

Qヲ三ツノ量A,B,Pノ**第四比例項**ト稱ス.

前項Aハ前項Pト,後項Bハ後項Qト**對應**スト云フ.

定義 8. 同シ種類ノ三ツノ量ガ比例ヲ爲ストハ第一ト第二ノ比ガ第二ト第三ノ比ニ等シキヲ云フ;即A,B,Cガ比例ヲ爲セハ,$A:B::B:C$.

此場合ニ於テハCヲA,Bノ**第三比例項**ト稱ス;BヲAトCノ間ノ**比例中項**ト稱ス.

定義 9. 一ツノ量ト之ニ等シキ量ノ比ヲ**等比**ト稱ス;前項ガ後項ヨリ大ナル比ヲ**優比**ト稱ス;前項ガ後項ヨリ小ナル比ヲ**劣比**ト稱ス.

第二節.

定理.

定理 1. 同シ比ニ等シキ比ハ相等シ.

$A:B::P:Q$ 叉 $A:B::X:Y$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $P:Q::X:Y$ ナル可シ.

$A:B::P:Q$ ナルヲ以テ,

m ハ何如ナル完全數ナルモ,

mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ在ルカ或ハ nB ニ等シキカニ從テ,

mP ハ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ或ハ nQ ニ等シ: 定義 5.

同樣ニ mX ハ nY 及 $(n+1)Y$ ノ間ニ在ルカ或ハ nY ニ等シ: 定義 5.

然レハ m ハ何數ナルモ,

mP ガ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ或ハ nQ ニ等シキカニ從テ, mX ハ nY 及 $(n+1)Y$ ノ間ニ在ルカ或ハ nY ニ等シ;

故ニ $P:Q::X:Y$. 定義 5.

定義 10. 一ツノ比ノ前項及後項ガ夫々他ノ比ノ後項及前項ナルトキハ, 二ツノ比ヲ各他ノ反比ト稱ス.

$A:B$ ト $B:A$ ハ各他ノ反比ナリ.

定理 2. 二ツノ比ガ相等シケレハ, 其ノ反比モ亦相等シ.

$A:B::P:Q$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $B:A::Q:P$ ナル可シ.

$A:B::P:Q$ ナルヲ以テ,

A ノ倍量ト B ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ハ P ノ倍量ト Q ノ倍量ノ挿ミ合ヒ方ニ全ク同シ; 定義 5.

故ニ叉 $B:A::Q:P$.

附言. 此定理ヲ反轉ノ理ト稱ス.

定理 3. 相等シキ量ハ他ノ一ツノ量ト相等シキ比ヲ有ス: 一ツノ量ハ相等シキ量ト相等シキ比ヲ有ス.

A, B, C ハ同シ種類ノ三ツノ量ニシテ, $A=B$ ナ

リトセヨ:

然ルトキハ　$A:C::B:C$　ナル可シ;

又　$C:A::C:B$　ナル可シ.

$A=B$ ナルヲ以テ, $mA=mB$;　IV,(イ).

故ニ　$mA><nC$ ニ從テ,　$mB><nC$;

故ニ　$A:C::B:C$.　定義 5.

同様ニ　$C:A::C:B$.

定理 4. 相等シカラザル二ツノ量ノ中ノ大ナルモノト他ノ一ツノ量ノ比ハ其ノ小ナルモノト同シ量ノ比ヨリ大ナリ: 又一ツノ量ト相等シカラザル二ツノ量ノ中ノ小ナルモノノ比ハ其量ト大ナルモノノ比ヨリ大ナリ.

A, B, C ハ同シ種類ノ三ツノ量ニシテ, $A>B$ ナリトセヨ:

然ルトキハ　$A:C>B:C$　ナル可シ;

又　$C:B>C:A$　ナル可シ.

$A>B$ ナルヲ以テ, $mA>mB$ ニシテ,　IV,(イ).

其ノ差ガ C ヨリ大ナル様ニ m ヲ取ルヲ得; IV,(辛).

故ニ mA ガ nC 及 $(n+1)C$ ノ間ニ在ルカ或ハ nC ニ等シケレハ, mB ハ nC ヨリ小ナリ;

故ニ　$A:C>B:C$.　定義 6.

又 nC ハ mA ヨリ大ナラザルニ, $nC>mB$;

故ニ　$C:B>C:A$.　定義 6.

系 1. $A:C><B:C$ ニ從テ,

$A><B$;

又　$C:A<>C:B$ ニ從テ,

$A><B$.

是レ定理 3 及定理 4 ヨリ轉換法ニ由リテ證明スルヲ得.

系 2. 三ツノ與ヘラレタル量ニハ唯一ツノ第四比例項有ルノミ: 二ツノ與ヘラレタル量ニハ唯一ツノ第三比例項及唯一ツノ比例中項有ルノミ.

定理 5. 二ツノ量ノ等倍量ノ比ハ其量ノ比ニ等シ.

mA, mB ヲ A, B ノ任意ノ等倍量トセヨ:

然ルトキハ　$mA:mB::A:B$　ナル可シ.

p, q ヲ任意ノ數トセヨ,

然レバ　$pA > = < qB$　ニ從テ,

$m.pA > = < m.qB$;　IV, (イ).

而シテ　$m.pA = p.mA$　及　$m.qB = q.mB$;　IV, (ト).

故ニ　$pA > = < qB$　ニ從テ,

$p.mA > = < q.mB$;

故ニ　$mA : mB :: A : B$.　定義 5.

系. $A : B :: C : D$ ナレバ, $mA : mB :: nC : nD$.

定理 6. 二ツノ量 A, B ノ比ガ二ツノ完全數 m, n ノ比ニ等シケレバ, $nA = mB$: 逆ニ, $nA = mB$ ナレバ, A ト B ノ比ハ m ト n ノ比ニ等シ.

$A : B :: m : n$ ナリトセヨ:

然ルトキハ　$nA = mB$　ナル可シ.

nA ト nm ハ A ト m ノ等倍ナリ;

又　mB ト mn ハ B ト n ノ等倍ナリ;

然ルニ　$nm = mn$;

而シテ　$A : B :: m : n$ ナルヲ以テ,　假設.

$nA = mB$.　定義 5.

逆ニ, $nA = mB$ ナリトセヨ:

然ルトキハ　$A : B :: m : n$　ナル可シ.

$pA > = < qB$　ニ從テ,

$n.pA > = < n.qB$;　IV, (イ).

即　$p.nA > = < q.nB$;　IV, (ト).

故ニ　$p.mB > = < q.nB$;　假設

即　$p.m > = < q.n$;

故ニ　$A : B :: m : n$.　定義 5.

系. 若シ $A : B :: P : Q$ ニシテ, $nA = mB$ ナレバ, $nP = mQ$. 故ニ A ガ B ノ倍量, 或ハ約量, 或ハ約量ノ倍量ナレバ, P ハ Q ノ同シ倍量, 或ハ約量, 或ハ約量ノ倍量ナリ.

附言. $nA = mB$ ナレバ, A ト B ハ通約ス可キ量ナリ; 而シテ其ノ比ハ $m : n$ ニ等シ. 然ルニ m, n ハ完全數ナルヲ以テ, 其ノ比ハ已ニ代數學ニ於テ論シタル所ニシテ, 分數 m/n ヲ以テ之ヲ表ハスヲ得. 故ニ通約ス可キ量 A, B ノ比モ分數 m/n ヲ以テ之ヲ表ハスヲ得. A, B ガ通約ス可カラザル量ナレバ, 斯ノ如キ分數ナシ; 然レトモ $m : n$ ヲ分數 m/n ヲ以テ表ハスト同様ニ, A, B ノ比ヲ A/B ヲ以テ表ハスコト有

リ: 然レドモ是レ決シテ通常ノ分數ニ非ラズ.

又 m, n ハ數ナルヲ以テ, 定義 5 ヲ此ニ引用スルハ少シク之ヲ擴メタルノ趣有リ; 學フ者注意ス可シ.

定理 7. 同シ種類ノ四ツノ量ガ比例ヲ爲セハ, 第一ノ量ガ第三ノ量ヨリ大ナルカ, 或ハ之ニ等シキカ, 或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ, 第二ノ量ガ第四ノ量ヨリ大ナリ, 或ハ之ニ等シ, 或ハ之ヨリ小ナリ.

A, B, C, D ハ同シ種類ノ四ツノ量ニシテ,
$A:B::C:D$ ナリトセヨ:
然ル時ハ $A \gtreqless C$ ニ從テ, $B \gtreqless D$ ナル可シ.

若シ $A = C$ ナレハ, $A:D::C:D$; IV, 3.
然ルニ $A:B::C:D$; 假設.
故ニ $A:B::A:D$, IV, 1.
故ニ $B = D$: IV, 4, 系 1.
若シ $A > C$ ナレハ, $A:D > C:D$; IV, 4.

然ルニ $A:B::C:D$; 假設.
故ニ $A:D > A:B$,
故ニ $B > D$: IV, 4, 系 1.
同樣ニ $A < C$ ナレハ, $B < D$ ヲ證明スルヲ得.

定理 8. 同シ種類ノ四ツノ量ガ比例ヲ爲セハ, 第一ト第三ノ比ハ第二ト第四ノ比ニ等シ.

A, B, C, D ハ同シ種類ノ四ツノ量ニシテ,
$A:B::C:D$ ナリトセヨ:
然ル時ハ $A:C::B:D$ ナル可シ.

$A:B::C:D$ ナルヲ以テ,
$mA:mB::nC:nD$; IV, 5, 系.
故ニ $mA \gtreqless nC$ ニ從テ,
$mB \gtreqless nD$; IV, 7.
故ニ $A:C::B:D$. 定義 5.

附言. 此定理ヲ更迭ノ理ト稱ス.

問題 327. $A:B::C:D$ ナレハ, $mA:nB::mC:nD$.

定理 9. 任意ノ數ノ同シ種類ノ量ガ比例ヲ爲ストキハ，前項ノ和ト後項ノ和ノ比ハ一ッノ前項ト其ノ後項ノ比ニ等シ.

A, B, C, D, E, F,......ハ同シ種類ノ量ニシテ，A : B :: C : D :: E : F ......ナリトセヨ：

然ルトキハ A : B :: A + C + E + ...: B + D + F +....ナル可シ.

A : B :: C : D :: E : F ......ナルヲ以テ

$mA >=< nB$ ニ從テ，

$mC >=< nD$; 定義 5.

及 $mE >=< nF$, 等： 定義 5.

故ニ $mA + mC + mE + ... >=< nB + nD + nF + ...$,

即 $m(A + C + E + ...) >=< n(B + D + F + ...)$; IV,(ハ).

故ニ A : B :: A + C + E + ...: B + D + F + ...

附言. 此定理ヲ加比ノ理ト稱ス.

---

* 問題 328. A : B :: C : D :: E : F ......ナレハ，

(i) A : B :: A − C : B − D; (ii) A : B :: $mA \pm nC : mB \pm nD$;

(iii) A : B :: $mA + nC + pE + ... : mB + nD + pF + ...$.

定理 10. 二ッノ比ガ相等シケレハ，一ッノ比ノ前項及後項ノ和ト其ノ後項ノ比ハ他ノ比ノ前項及後項ノ和ト其ノ後項ノ比ニ等シ.

A : B :: P : Q トセヨ：

然ルトキハ A + B : B :: P + Q : Q ナル可シ.

m ハ任意ノ數; n ハ，mA ガ nB 及 $(n+1)B$ ノ間ニ在ルカ，或ハ nB ニ等シキ樣ナル數トセヨ；

然レハ $mA + mB$ ハ $mB + nB$ 及 $mB + (n+1)B$ ノ間ニ在ルカ，或ハ $mB + nB$ ニ等シ；

即 $m(A + B)$ ハ $(m+n)B$ 及 $(m+n+1)B$ ノ間ニ在ルカ，或ハ $(m+n)B$ ニ等シ： IV,(ハ)及(ホ).

又 A : B :: P : Q ナルヲ以テ，

mP ハ nQ 及 $(n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ，或ハ nQ ニ等シ； 定義 5.

故ニ上ト同樣ニ $m(P + Q)$ ハ $(m+n)Q$ 及 $(m+n+1)Q$ ノ間ニ在ルカ，或ハ $(m+n)Q$ ニ等シ：

故ニ　A＋B ノ 倍量 ト B ノ 倍量 ノ 挿ミ合ヒ 方ハ

丁度 P＋Q ノ 倍量 ト Q ノ 倍量 ノ 挿ミ合ヒ 方 ニ 同シ；

故ニ　$A+B : B :: P+Q : Q.$　定義 5.

附言. 此 定理 ヲ 合比 ノ 理 ト 稱ス.

問題 329. $A:B > P:Q$ ナレハ, $A+B:B > P+Q:Q$.

定理 11. 二ツノ 比 ガ 相等シケレハ, 一ツノ 比 ノ 前項 ト 後項 ノ 差 ト 其 後項 ノ 比 ハ 他ノ 前項 ト 後項 ノ 差 ト 其 後項 ノ 比 ニ 等シ.

$A : B :: P : Q$　ナリ トセヨ:

然ルトキハ　$A \sim B : B :: P \sim Q : Q$　ナル 可シ.

此 定理 ハ 定理 10 ト 全ク 同樣ノ 方法 ニ 由リテ 證明スル ヲ 得:

但 mB ヲ 双方 ヘ 加ヘル 代リニ, mB ヲ 双方 ヨリ 減スルカ ($A > B$, 由リテ $m < n$ ナル 場合); 或ハ 双方 ヲ mB ヨリ 減スル ($A < B$, 由リテ $m > n$ ナル 場合) ナリ.

附言. 此 定理 ヲ 除比 ノ 理ト 稱ス.

問題 330. $A : B > P : Q$ ナレハ, $A ><B$ ニ 從テ, $A \sim B : B ><P \sim Q : Q$.

定理 12. 二ツノ 相等シキ 比 ノ 前項 ノ 等倍量, 及 後項 ノ 等倍量 ヲ 取レハ, 各ノ 比 ノ 前項 ノ 倍量 ト 後項 ノ 倍量 ノ 比 ハ 相等シ.

$A : B :: P : Q$　ナリ トセヨ:

然ルトキハ　$mA : nB :: mP : nQ$　ナル 可シ.

p, q ヲ 任意ノ 數 トセハ,

$pm.A >=< qn.B$　ニ 從テ,

$pm.P >=< qn.Q$;　假設, 及 定義 5.

即　$p.mA >=< q.nB$　ニ 從テ,

$p.mP >=< q.nQ$;

故ニ　$mA : nB :: mP : nQ.$　定義 5.

定理 13. 二群ノ量有リ；各ノ群ノ第一ノ量ト第二ノ量ノ比ガ相等シク，又各ノ群ノ第二ノ量ト第三ノ量ノ比ガ相等シク，以下最後ノ量ニ至ルマデ皆斯ノ如クナルトキハ，各ノ群ノ第一ノ量ト最後ノ量ノ比ハ相等シ.

先ツ各ノ群ニ三ツノ量有リトセン：

A, B, C ハ一ツノ群，P, Q, R ハ他ノ群ニシテ，

A : B :: P : Q 及 B : C :: Q : R ナリトセヨ：

然ルトキハ　A : C :: P : R ナル可シ.

A : B :: P : Q ナルヲ以テ，

$mA : mB :: mP : mQ$;　IV, 12.

又　B : C :: Q : R ナルヲ以テ，

$mB : nC :: mQ : nR$;　IV, 12.

今若シ　$mA > nC$ ナレハ，$mA : mB > nC : mB$;　IV, 4.

然ルニ　$mA : mB :: mP : mQ$, 及 $nC : mB :: nR : mQ$;

反轉.

故ニ　$mP : mQ > nR : mQ$,

故ニ　$mP > nR$;　IV, 4, 系 1.

即若シ　$mA > nC$ ナレハ，$mP > nR$:

同樣ニ若シ　$mA = nC$ ナレハ，$mP = nR$;

及　若シ　$mA < nC$ ナレハ，$mP < nR$:

故ニ　A : C :: P : R.　定義 5.

次ニ，各ノ群ニ三ツヨリ多クノ量有リトセン：

A, B, C, D,....H, K ハ一ツノ群；P, Q, R, S,....X, Y ハ他ノ群ニシテ，

A : B :: P : Q,　B : C :: Q : R,　C : D :: R : S,........

H : K :: X : Y トセヨ：

然ルトキハ　A : K :: P : Y ナル可シ.

前ニ　A : B :: P : Q, B : C :: Q : R ナルトキハ，

A : C :: P : R ナルコヲ證明シタリ；

故ニ　A : C :: P : R,　C : D :: R : S ナルヲ以テ，

同樣ニ　A : D :: P : S;

而シテ　D : E :: S : T;

故ニ同樣ニ　A : E :: P : T;

續ケテ此證明法ヲ用井テ，遂ニ A : K :: P : Y ヲ得.

附言. 此定理ヲ等比ノ理ト稱ス.

系. 若シ $A:B::Q:R$ 及 $B:C::P:Q$ ナレハ, $A:C::P:R$.

何トナレハ, S ヲ P, Q, R ノ第四比例項トセハ,

$P:Q::R:S$;

故ニ　$B:C::R:S$,　IV, 1.

而シテ　$A:B::Q:R$;　假設.

故ニ　$A:C::Q:S$;　等比.

今　$P:Q::R:S$ ナルヲ以テ,

　$P:R::Q:S$;　更迭.

故ニ　$A:C::P:R$.　IV, 1.

---

* 問題 331. $A:B::P:Q$ ナレハ,

(i) $A+B:A\sim B::P+Q:P\sim Q$;

(ii) $A:A-B::P:P-Q$.

* 問題 332. $A:C::P:R$ 及 $B:C::Q:R$ ナレハ $A+B:C::P+Q:R$.

定義 11. 同シ種類ノ量ガ幾個デモ任意ノ數有レハ, 其ノ第一ノ量ト最後ノ量ノ比ヲ第一ノ量ト第二ノ量ノ比, 第二ノ量ト第三ノ量ノ比, 等總テノ比ノ**相乘比**ト稱ス.

例ヘハ, $A:K$ ハ二ツノ比 $A:B$ 及 $B:K$ ノ相

乘比ナリ; 或ハ三ツノ比 $A:B$, $B:C$ 及 $C:K$ ノ相乘比ナリ; 或ハ四ツノ比 $A:B$, $B:C$, $C:D$ 及 $D:K$ ノ相乘比ナリ; 其他幾個ニテモ斯ノ如キ比ノ相乘比ナリ.

若シ第一ノ量ト第二ノ量ノ比ガ一ツノ比ニ等シク, 第二ノ量ト第三ノ量ノ比ガ他ノ一ツノ比ニ等シク, 以下皆之ニ倣フ𪜈ハ, 第一ノ量ト最後ノ量ノ比ヲ又此等ノ比ノ相乘比ト稱ス.

例ヘハ, 三ツノ量 P, Q, R 有リテ, $P:Q::A:B$, $Q:R::C:D$ ナレハ, 比 $P:R$ ハ二ツノ比 $A:B$ 及 $C:D$ ノ相乘比ナリト云フ; 若シ四ツノ量 P, Q, R, S 有リテ, $P:Q::A:B$, $Q:R::C:D$, $R:S::E:F$ ナル𪜈ハ, 比 $P:S$ ハ三ツノ比 $A:B$, $C:D$, 及 $E:F$ ノ相乘比ナリト云フ.

定理 13 ハ是ニ由リテ下ノ如ク述フルヲ得:

一ツノ群ノ比ガ夫々一ツヅヽ他ノ群ノ比ニ等シケレハ, 各ノ群ノ相乘比ハ相等シ.

定義 12. 相等シキ二ツノ比ノ相乘比ヲ各ノ比ノ**二乘比**ト稱ス: 相等シキ三ツノ比ノ相乘比ヲ**三乘比**ト稱ス: 其他之ニ倣フ.

*問題 333. A : B 及 C : D ノ相乘比ガ等比ナレハ, A : B ト C : D ハ各他ノ反比ナリ.

定理 14. 二ツノ比ガ相等シケレハ各ノ比ノ二乘比モ亦相等シ; 二ツノ比ノ二乘比ガ相等シケレハ, 二ツノ比ハ相等シ.

A : B :: P : Q ナリトセヨ:

然ルトキハ A : B ノ二乘比ハ P : Q ノ二乘比ニ等シカル可シ.

C ヲ A, B ノ第三比例項; R ヲ P, Q ノ第三比例項トセヨ;

即　A : B :: B : C, 及 P : Q :: Q : R;

而シテ　A : B :: P : Q ナルヲ以テ,

B : C :: Q : R; IV, 1.

故ニ　A : C :: P : R, 等比.

即 A : B ノ二乘比ハ P : Q ノ二乘比ニ等シ.

次ニ, A : B ノ二乘比ヲ P : Q ノ二乘比ニ等シトセヨ:

然ルトキハ A : B :: P : Q ナル可シ.

C 及 R ヲ夫々 A, B 及 P, Q ノ第三比例項トセヨ:

然レハ　A : C :: P : R; 假設.

S ヲ A, B, P ノ第四比例項トセヨ:

即　A : B :: P : S;

故ニ　B : A :: S : P; 反轉.

而シテ　A : C :: P : R;

故ニ　B : C :: S : R; 等比.

然ルニ　A : B :: B : C;

故ニ　A : B :: S : R; IV, 1.

又　A : B :: P : S;

故ニ　P : S :: S : R; IV, 1.

即 S ハ P, R ノ比例中項ナリ,

故ニ　S = Q IV, 4, 系 2.

故ニ　A : B :: P : Q.

系. 三乘比, 等ニ付テモ同樣ノ定理ヲ得.

問題 334. m, n ガ任意ノ數ナレハ, $m : n$ ノ二乘比ハ $m^2 : n^2$ ナリ; 三乘比ハ $m^3 : n^3$ ナリ.

問題 335. m, n, p, q ガ任意ノ數ナレハ, $m : n$ 及 $p : q$ ノ相乘比ハ $mp : nq$ ナリ.

第五編.

比及比例ノ應用.

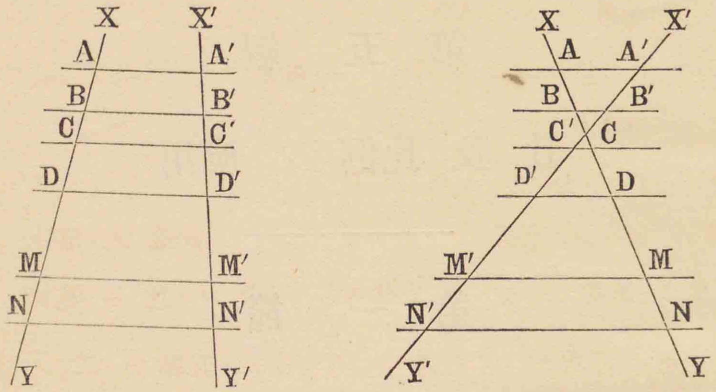
第一節.

基本ノ定理.

定理 1. 數多ノ平行線ガ二ツノ直線ト交リ, 之ヲ數多ノ部分ニ切斷スレハ, 一ツノ直線ノ任意ノ二ツノ部分ノ比ハ他ノ直線ノ之ニ對應スル部分ノ比ニ等シ.

數多ノ平行線 AA′, BB′, CC′, DD′, 等ガ二ツノ直線 XY, X′Y′ ト夫々 A, B, C, D, 等及 A′, B′, C′, D′, 等ノ點ニ於テ交リ, 之ヲ相對應スル部分 AB, BC, CD, 等及 A′B′, B′C′, C′D′, 等ニ切斷ストセヨ:

然ルトキハ AB : CD :: A′B′ : C′D′ ナル可シ.



XY 上ニ AM ヲ $m.AB$ ニ等シク, AN ヲ $n.CD$ ニ等シク, 且 M ト N ハ A ノ同シ側ニ在ル様ニ取レ (但 m, n ハ任意ノ完全數ナリ, 以下皆同シ);

M, N ヲ過リ MM', NN' ヲ AA' ニ平行ニ引キ,

X'Y' ト夫々 M', N' ニ於テ交ルトセヨ:

AM ハ各 AB ニ等シキ m 部分ニ分ツヲ得;

各ノ分點ヲ過リ AA' ニ平行線ヲ引ケハ, 此平行線ハ A'M' ヲ各 A'B' ニ等シキ m 部分ニ分ツ: I, 28.

故ニ $A'M' = m.A'B'$;

同樣ニ $A'N' = n.C'D'$;

故ニ MM' ガ NN' ノ AA' ニ反對ノ側ニ在ルカ, 或ハ NN' ト合スルカ, 或ハ其ノ AA' ト同シ側ニ在ルカニ從テ,

$AM >=< AN$ ニシテ,

且 $A'M' >=< A'N'$;

即 $m.AB >=< n.CD$ ニ從テ,

$m.A'B' >=< n.C'D'$,

故ニ $AB : CD :: A'B' : C'D'$.

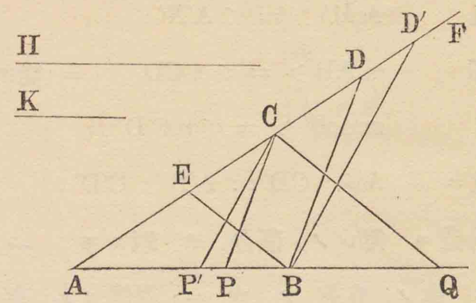
同樣ニ何レノ部分ヲ取ルモ, 一ツノ直線ノ部分ノ比ハ他ノ直線ノ之ニ對應スル部分ノ比ニ等シ.

系. 三角形ノ底邊ニ平行ナル直線ハ二ツノ邊ヲ相等シキ比ヲ有スル分ニ分ツ.

定理 2. 與ヘラレタル有限直線ハ任意ノ比ヲ有スル二ツノ分ニ內分スルヲ得; 又等比ニ非ラザル任意ノ比ニ外分スルヲ得; 而シテ各ノ場合ニ於テ, 斯ノ如キ分點ハ唯一ツニ限ル.

AB ヲ與ヘラレタル有限直線; H, K ヲ任意ノ與ヘラレタル比有スル二ツノ直線トセヨ:

然ルトキハ AB ヲ比 H : K ニ內分スルヲ得可シ; 又 H ガ K ニ等シキ場合ノ外ハ, 之ヲ比 H : K ニ外分スルヲ得可シ; 且斯ノ如キ分點ハ內分, 外分各一ツニ限ル可シ.



A ヲ過リ, 任意ノ直線 AF ヲ引キ; 其ノ上ニ AC ヲ H ニ等シク, CD, CE ヲ C ノ反對ノ側ニ各 K ニ等シク取レ;
BD, BE ヲ結ビ付ケ, CP, CQ ヲ夫々 BD, BE ニ平行ニ引キ, AB 及其ノ延長ト P, Q ニ於テ交ルトセヨ;
然レバ CP ハ DB ニ平行ナルヲ以テ,

$AP : PB :: AC : CD,$ V, 1, 系.

故ニ $AP : PB :: H : K;$

即 AB ハ P ニ於テ比 $H : K$ ニ内分サレタリ:
同様ニ AB ハ Q ニ於テ比 $H : K$ ニ外分サレタルヲ證明スルヲ得; 但 H ガ K ニ等シケレバ, E 點ガ A 點ト合スルヲ以テ, Q 點ヲ得ル能ハズ.

若シ P 點ノ他ニ AB ヲ比 $H : K$ ニ内分スル點有ルヲ得バ, P' ヲ此點トセヨ;
CP' ヲ結ビ付ケ, BD' ヲ P'C ニ平行ニ引ケ;

然レバ $AC : CD' :: AP' : P'B;$ V, 1, 系.

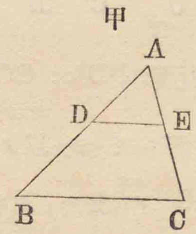
即 $AC : CD' :: H : K,$

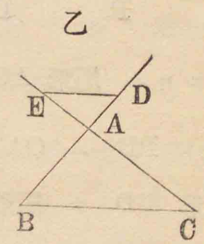
故ニ $AC : CD' :: AC : CD$

故ニ $CD' = CD:$ IV, 4, 系 1.

然レドモ D' ガ D ト同一ノ點ナルニ非ラザレバ, CD ハ CD' ニ等シキ能ハズ;
故ニ P 點ノ他ニハ AB ヲ比 $H : K$ ニ内分スル點無シ.
同様ニ Q 點ノ他ニハ AB ヲ比 $H : K$ ニ外分スル點無シ.

定理 3. 三角形ノ邊ヲ相等シキ比ヲ有スル分ニ分ツ直線ハ底邊ニ平行ナリ.





直線 DE ハ三角形 ABC ノ邊 AB, AC ト夫々 D,E ニ於テ交リ, $AD : DB :: AE : EC$ ナリトセヨ:
然ルトキハ DE ハ BC ニ平行ナル可シ.

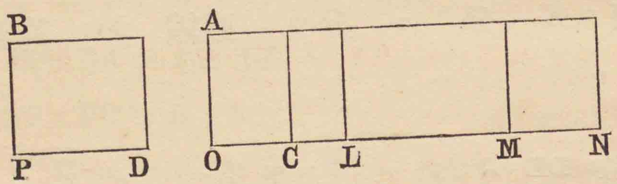
D ヲ過リ BC ニ平行ナル直線ハ AC ヲ比 $AD : DB$ ニ分ツ; V, 1, 系.

而シテ AC ヲ此比ニ內分（甲圖）或ハ外分スル（乙圖）點ハ唯 E 點有ルノミ； V, 2.

故ニ DE ハ即此平行線ナリ.

定理 4. 相等シキ高サノ矩形ノ比ハ其ノ底邊ノ比ニ等シ.

AC, BD ヲ夫々底邊 OC, PD ノ上ニ在ル所ノ相等シキ高サノ矩形トセヨ：



然ルトキハ　矩形 AC : 矩形 BD :: OC : PD ナル可シ.

PB ハ OA ニ等シキヲ以テ， 假設.

矩形 BD ヲ矩形 AC ノ上ニ重ネ，BP ハ AO ト合シ，D 點ハ OC 線上ノ L 點ノ上ニ重ナル樣ニ置クヲ得；

然レハ矩形 BD ハ矩形 AL ト合ス：

OM ヲ m.OC ニ等シク；ON ヲ n.OL ニ等シク取リ，

矩形 AM, AN ヲ作レ；

OM ヲ各 OC ニ等シキ m 部分ニ分チ，各ノ分點ニ

於テ OA ニ平行線ヲ引ケハ，各 AC ニ等シキ m 矩形ヲ得； III, 1, 系 2.

即　矩形 AM = m. 矩形 AC；

同樣ニ　矩形 AN = n. 矩形 AL；

而シテ　底邊 OM $>=<$ 底邊 ON ニ從テ，

矩形 AM $>=<$ 矩形 AN； III, 1, 系 2 及 3.

即　m.OC $>=<$ n.OL ニ從テ，

m. 矩形 AC $>=<$ n. 矩形 AL；

故ニ　矩形 AC : 矩形 AL :: OC : OL，

即　矩形 AC : 矩形 BD :: OC : PD.

系 1. 相等シキ高サノ平行四邊形ノ比ハ其ノ底邊ノ比ニ等シ.

系 2. 相等シキ高サノ三角形ノ比ハ其ノ底邊ノ比ニ等シ.

---

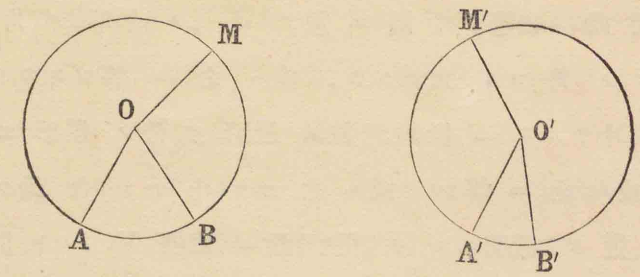
* 問題 336. 相等シキ底邊ノ平行四邊形或ハ三角形ノ比ハ其ノ高サノ比ニ等シ.

* 問題 337. 三角形 ABC 內ノ點 O ヲ過リ，直線 AO, BO, CO ヲ引キ，之ニ對スル邊ト夫々 X, Y, Z ニ於テ交ラシムルトキハ，三角形 AOB, AOC ノ比ハ BX, CX ノ比ニ等シ.

第二編ニ於テハ全周ヨリ大ナル弧，及四直角ヨリ大ナル角ヲ考フルノ必要ナカリシト雖，II, 4, 及5ノ如キ定理ハ弧及之ニ對スル角ガ何程大ナルモ眞ナルコト明ナリ．今下ノ定理ニ於テ弧AB又ハ弧AMト云フハ一ツノ點ガAヨリ發シ圓周ノ上ヲ何様ニテモ旋リテB又ハMニ至ルマデ經過シタル途ナリ：即點ガAヨリ發シ圓周ヲ何廻ニテモ旋リテ後B又ハMニ達シタリトセハ，弧AB又ハAMトハ總テ其點ノ經過シタル丈ケノ弧ナリ：而シテ此弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角AOB又ハAOMトハ其點ヲ過ル半徑ガ點ト同時ニ廻轉シタル丈ケノ角ナリ．

定理 5. 同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ，中心ニ於テノ角ノ比ハ其ノ立ツ所ノ弧ノ比ニ等シ．

AB, A′B′ ヲ夫々中心 O, O′ ナル相等シキ圓ノ弧，AOB, A′O′B′ ハ夫々弧 AB, A′B′ ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角トセヨ：



然ルトキハ　角 AOB : 角 A′O′B′ :: 弧 AB : 弧 A′B′　ナル可シ．

AM ヲ弧 AB ノ m 倍ナル弧；A′M′ ヲ弧 A′B′ ノ n 倍ナル弧トセヨ；

然レハ AM ハ各 AB ニ等シキ m 弧ヨリ成リ，各ノ弧ノ上ニ立ツ所ノ中心ニ於テノ角ガ角 AOB ニ等シキヲ以テ，

角 AOM $= m.$角 AOB；

同様ニ　角 A′O′M′ $= n.$角 A′O′B′；

而シテ　弧 AM $> = <$ 弧 A′M′　ニ從テ，

角 AOM $> = <$ 角 A′O′M′；　II, 5.

即　$m.$弧 AB $> = <$ $n.$弧 A′B′　ニ從テ，

$m.$角 AOB $> = <$ $n.$角 A′O′B′；

故ニ　角 AOB : 角 A′O′B′ :: 弧 AB : 弧 A′B′.

系．扇形 AOB : 扇形 A′O′B′ :: 弧 AB : 弧 A′B′.

何トナレハ II, 4 及 5 ト同様ノ方法ニ由リテ，

「同シ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ，一ツノ扇形ノ角ガ他ノ扇形ノ角ヨリ大ナルカ，或ハ之ニ等シキカ，或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ，前ノ扇形ガ後ノ扇形ヨリ大ナリ，或ハ之ニ等シ，或ハ之ヨリ小ナリ」ト云フ定理及其ノ逆ヲ證明スルヲ得；故ニ定理 V, 5 ト同樣ニ，扇形ノ比ガ弧ノ比ニ等シキコトヲ證明スルヲ得.

第一節ノ問題.

*問題 338. V, 2 ニ於テ，K ガ最初 H ヨリ甚小ニシテ，夫ヨリ漸々增長シ，H ニ等シクナリ，尙ホ增長シテ H ヨリ甚大クナルニ從テ，P 及 Q 點ノ位置ノ變化何如？

AB ガ P 點ニ於テ任意ノ比ニ內分サレ，又 Q 點ニ於テ同シ比ニ外分サルヽ片ハ，AB ハ P, Q ニ於テ **調和ニ分タレタリ** ト云フ：又四ツノ點 A, P, B, Q ハ **調和列點** ナリト云フ：又 P, Q ハ A, B ニ付テ各他ノ **調和共軛點** ナリト云フ.

*問題 339. A, P, B, Q ガ調和列點ニシテ，M ガ AB ノ中點ナレハ，MA ハ MP, MQ ノ比例中項ナリ.

*問題 340. A, P, B, Q ガ調和列點ニシテ，P ガ AB ノ中點ナル片ハ，Q ハ何所ニ在リヤ？

*問題 341. P, Q ガ A, B ニ付テ調和共軛點ナレハ，A, B ガ P, Q ニ付テ調和共軛點ナリ.

*問題 342. A, P, B, Q ガ調和列點ナレハ，QA, QP, QB ハ調和級數ヲ爲ス，又 AP, AB, AQ モ調和級數ヲ爲ス.

第二節.

相似形.

定義 1. 一ツノ直線形ノ角ガ夫々一ツノ他ノ直線形ノ(同シ順ニ取リタル)角ニ等シケレハ,二ツノ直線形ハ 等角ナリ トニフ;一ツノ形ノ各ノ角ガ他ノ形ノ之ニ等シキ角ニ 對應ス トニフ;相對應スル角ノ間ニ在ル邊ヲ 對應邊 トニフ.

定義 2. 二ツノ直線形ガ等角ニシテ,對應邊ガ比例ヲ爲ストキハ,二ツノ直線形ヲ 相似直線形 ト稱ス.

本書ニ於テハ相似直線形ノミヲ論スルヲ以テ,之ヲ畧シテ單ニ相似形トニフ.

定義 3. 二ツノ與ヘラレタル直線ガ二ツノ相似形ノ對應邊ナルトキハ,此相似形ハ與ヘラレタル直線ノ上ニ相似ノ位置ニ在リ トニフ.

定理 6. 同シ直線形ニ相似ナル直線形ハ互ニ相似ナリ.

直線形A,Bヲ何レモ直線形Cニ相似ナリトセヨ:
然ルトキハA,Bハ互ニ相似ナル可シ.

AハCニ相似ナルヲ以テ,
Aノ角ハ夫々(同シ順ニ)Cノ角ニ等シ;
同樣ニBノ角モ夫々(同シ順ニ)Cノ角ニ等シ;
故ニAノ角ハ夫々(同シ順ニ)Bノ角ニ等シ:
又Aノ任意ノ二ツノ邊ノ比ハCノ之ニ對應スル邊ノ比ニ等シ;
Bノ任意ノ二ツノ邊ノ比モ亦Cノ之ニ對應スル邊ノ比ニ等シ;
故ニA及Bノ對應邊ハ比例ヲ爲ス: IV,1.
故ニA,Bハ相似形ナリ.

定理 7. 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ夫々一ツノ他ノ三角形ノ三ツノ角ニ等シケレハ,二ツノ三角形ハ相似ナリ;而シテ相等シキ角ニ對スル邊ガ對應邊ナリ.

二ツノ三角形ABC,DEFニ於テ角A及Bハ夫々角D及Eニ等シク;因リテ(I,13,系4)角Cハ角F

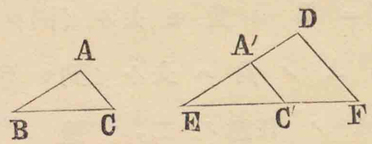
ニ等シトセヨ:

然ルトキハ 三角形 ABC, DEF ハ 相似ニシテ,

AB : BC :: DE : EF,　BC : CA :: EF : FD,　及

CA : AB :: FD : DE　ナル可シ.

三角形 ABC ヲ 三角形 DEF ノ上ニ 重ネ, B 點 ハ E 點 ノ 上ニ, 邊 BA ハ 邊 ED ノ 上ニ 重ナル 様ニ 置ケ;



然レハ 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シキ ヲ 以テ,

邊 BC ハ 邊 EF ノ 上ニ 重ナル;

A 及 C 點 ハ 夫々 ED 及 EF, 或ハ 其ノ 延長 ノ 上ノ 點 A′ 及 C′ ノ 上ニ 落ル トセヨ;

然レハ 角 EA′C′ ハ 角 EDF ニ 等シキ ヲ 以テ,

A′C′ ハ DF ニ 平行ナリ;

故ニ　A′E : DE :: EC′ : EF,　V, 1, 系.

即　AB : DE :: BC : EF;　作圖.

故ニ　AB : BC :: DE : EF.　更迭.

同様ニ BC : CA :: EF : FD,　及　CA : AB :: FD : DE

ヲ 證明スル ヲ 得.

附言. 上ノ 三ツノ 比例 ノ 中, 二ツ ヲ 上ノ 方法 ニ

依リテ 證明スレハ, 第三ノ 比例 ハ 等比 ノ 理 ニ 由リテ 眞ナリ.

---

* 問題 343. 一ツノ 點 A ヨリ 二ツノ 直線 ヲ 引キ, 一ツハ 圓 ニ B 點 ニ 於テ 切シ, 一ツ ハ 之 ト C, D ニ 於テ 交レハ, 三角形 ABC, ABD ハ 相似ナリ.

問題 344. 鋭角三角形 ABC ノ 頂點 A 及 B ヨリ 之 ニ 對スル 邊 ヘ 垂線 AD, BE ヲ 引ケハ, 三角形 ABC, DEC ハ 相似ナリ.

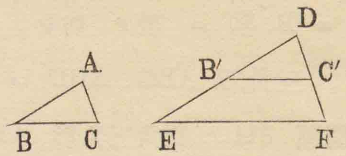
問題 345. ABC ハ 二等邊三角形 ニシテ, 邊 AB ハ 邊 AC ニ 等シ; 中心 B 及 半徑 BC ヲ 以テ 圓 ヲ 畫キ, AC ト 再ヒ D 點 ニ 於テ 交ハラシム: 然ルトキハ BC ハ AC, CD ノ 比例中項 ナリ.

問題 346. 一ツノ 三角形 ノ 邊 ガ 夫々 一ツノ 他ノ 三角形 ノ 邊 ニ 平行ナルカ, 或ハ 垂線ナル トキハ, 二ツノ 三角形 ハ 相似ナリ.

定理 8. 一ツノ 三角形 ノ 一ツノ 角 ガ 一ツノ 他ノ 三角形 ノ 一ツノ 角 ニ 等シク; 此 角 ヲ 夾ム 邊 ガ 比例 ヲ 爲ス トキハ, 二ツノ 三角形 ハ 相似ナリ; 而シテ 對應スル 邊 ニ 對スル 角 ガ 相等シ.

三角形 ABC, DEF ニ於テ, 角 BAC ハ 角 EDF ニ等シク, AB : AC :: DE : DF ナリトセヨ:

然ルトキハ 二ツノ 三角形 ハ 相似ニシテ, 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 ACB ハ 角 DFE ニ 等シカル 可シ.



三角形 ABC ヲ 三角形 DEF ノ 上ニ 重ネ, A 點 ハ D 點 ノ 上ニ 重ナリ, 邊 AB ハ 邊 DE ノ 上ニ 重ナル 様ニ セヨ;

然レハ 角 BAC ハ 角 EDF ニ 等シキ ヲ 以テ,

邊 AC ハ 邊 DF ノ 上ニ 重ナル;

B 及 C 點 ハ 夫々 DE 及 DF 或ハ 其ノ 延長 ノ 上ノ 點 B′ 及 C′ ノ 上ニ 落ルトセヨ;

然レハ AB : AC :: DE : DF ナル ヲ 以テ,

DB′ : DE :: DC′ : DF; 作圖, 及 更迭.

故ニ EF ハ B′C′ ニ 平行ナリ; V, 3.

故ニ 角 DB′C′ ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 DC′B′ ハ 角 DFE ニ 等シ; 即 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 ACB ハ 角 DFE ニ 等シ;

故ニ 三角形 ABC, DEF ハ 等角ニシテ, 相似ナリ. V, 7.

問題 347. 三角形 ノ 頂點 ヨリ 底邊 ヘ 引ケル 垂線 ガ 三角形 ノ 內ニ 在リテ, 底邊 ノ 分ノ 比例中項 ナルトキハ, 三角形 ハ 直角三角形 ナリ.

問題 348. 二ツノ 直線 AB, CD 或ハ 其ノ 延長 ガ E 點 ニ 於テ 交リ, AE : CE :: ED : EB ナルトキハ, A, B, C, D ヲ 過リ 一ツノ 圓 ヲ 畫ク ヲ 得.

問題 349. 一ツノ 四邊形 ノ 三ツノ 角 ガ 一ツノ 他ノ 四邊形 ノ 三ツノ 角 ニ 等シク, 一 双 ノ 相等シキ 角 ヲ 夾ム 邊 ガ 比例 ヲ 爲ストキハ (相等シキ 角 ニ 隣ル 邊 ガ 對應ニシテ), 二ツノ 四邊形 ハ 相似ナリ.

問題 350. APB ハ 直徑 AB, 中心 C ナル 半圓; N ハ CB 上ノ 任意ノ 點 ニシテ, AB ヲ T マデ 延長シ, CT : AC :: AC : CN ナリトス; T ヨリ 引ケル 切線 ガ 半圓 ニ P ニ 於テ 切スレハ, 角 CNP ハ 直角 ナリ.

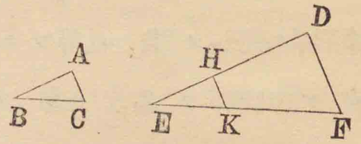
定理 9. 二ツノ 三角形 ノ 各ノ 角 ヲ 夾ム 邊 ガ (同シ 順ニ 取リテ) 比例 ヲ 爲ストキハ, 二ツノ 三角形 ハ 相似ニシテ, 對應邊 ニ 對スル 角 ガ 相等シ.

二ツノ三角形 ABC, DEF ニ於テ, AB : BC :: DE : EF, BC : CA :: EF : FD, 因リテ(等比ノ理) CA : AB :: FD : DE ナリトセヨ:

然ルトキハ 三角形 ABC, DEF ハ 相似ニシテ,

角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 BCA ハ 角 EFD ニ 等シク, 因リテ 角 CAB ハ 角 FDE ニ 等シカル 可シ.

ED 上ニ EH ヲ BA ニ等シク取レ; 又 EF 上ニ EK ヲ BC ニ等シク取レ;



HK ヲ結ヒ付ケヨ;

然レハ AB : BC :: DE : EF ナルヲ以テ,

HE : EK :: DE : EF;

而シテ 角 DEF ハ 二ツノ 三角形 HEK, DEF ニ 通ス;

故ニ 三角形 HEK, DEF ハ 相似ナリ: V, 8.

故ニ EK : KH :: EF : FD;

然ルニ BC : CA :: EF : FD; 假設.

故ニ EK : KH :: BC : CA, IV, 1.

而シテ EK ハ BC ニ 等シ,

故ニ KH ハ CA ニ 等シ; IV, 4, 系, 1.

故ニ 二ツノ 三角形 ABC, HEK ハ 三ツノ 邊ガ 夫々 相等

シキヲ以テ, 全ク相等シ: I, 21.

而シテ HEK, DEF ハ 相似ナリ;

故ニ 三角形 ABC, DEF ハ 相似ニシテ,

角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, 角 BCA ハ 角 EFD ニ 等シク, 因リテ (I, 13, 系 4) 角 CAB ハ 角 FDE ニ 等シ.

定理 10. 二ツノ 三角形ノ 一ツノ 角ガ 相等シク, 他ノ 一ツノ 角ヲ 夾ム 邊ガ (相等シキ 角ニ 對スル 邊ガ 對應スル 様ニ) 比例ヲ 爲ストキハ, 三角形ノ 第三角ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角ナリ: 若シ 相等シケレハ, 二ツノ 三角形ハ 相似ナリ.

二ツノ 三角形 ABC, DEF ニ 於テ, 角 ABC ハ 角 DEF ニ 等シク, AB : AC :: DE : DF ナリトセヨ:

然ルトキハ 角 ACB, DFE ハ 相等シキカ 或ハ 互ニ 補角ナル 可シ:

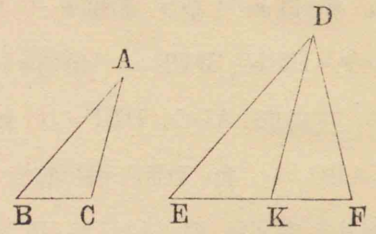
若シ 相等シケレハ, 三角形 ABC, DEF ハ 相似ナル 可シ.

若シ 角 BAC ガ 角 EDF ニ 等シケレハ, 角 ACB

ハ角 DFE ニ等シ；

I, 13, 系 4.

而シテ二ツノ三角形ハ相似ナリ. V, 7.



若シ角 BAC ガ角 EDF ニ等シカラザレバ，角 EDF ヲ角 BAC ヨリ大ナリトセヨ：

D ヨリ角 BAC ニ等シキ角 EDK ヲ為ス直線 DK ヲ引キ，EF ト K ニ於テ交ルトセヨ；

然ルトキハ二ツノ三角形 ABC, DEK ハ等角ナリ， I, 13, 系, 4.

故ニ ED : DK :: BA : AC； V, 7.

然ルニ ED : DF :: BA : AC； 假設.

故ニ ED : DK :: ED : DF； IV, 1.

故ニ DK ハ DF ニ等シクシテ， IV, 4, 系 1.

角 DKF ハ角 DFE ニ等シ；

而シテ角 DKF ハ角 DKE 即角 ACB ノ補角ナリ：

故ニ角 DFE ハ角 ACB ノ補角ナリ.

系. 斯ノ如キ三角形ハ下ノ場合ニ於テハ必ズ相似ナリ：

(甲) 相等シキ二ツノ角ガ直角或ハ鈍角ナル時；

(乙) 他ノ一双ノ對應邊ニ對スル角ガ兩三角形ニ於テ銳角或ハ鈍角ナル時，或ハ一ツノ三角形ニ於テ直角ナル時；

(丙) 各ノ三角形ニ於テ，相等シキ角ニ對スル邊ガ他ノ與ヘラレタル邊ヨリ小ナラザル時.

問題 351. OMN, OPQ ハ二ツノ直線ニシテ，MP, NQ ハ R ニ於テ出會フ；若シ OM : MP :: ON : NQ ナレバ，三角形 PQR ハ二等邊ナリ.

定理 11. 二ツノ相似直線形ヲ各ノ對應邊ガ平行ナル樣ニ置クトキハ，一ツノ形ノ頂點ヲ他ノ形ノ之ニ對應スル頂點ニ結付クル總テノ直線ハ平行ナルカ或ハ同一ノ點ヲ過ル；而シテ其點ヨリ之ヲ過ル任意ノ直線ガ二ツノ形ノ對應邊ト交ル點マデノ距離ノ比ハ對應邊ノ比ニ等シ.

ABCD......, HKLM...... ヲ二ツノ相似形，其ノ邊 AB, BC, CD...... ヲ夫々之ニ對應スル邊 HK, KL, LM...... ニ平行ナリトセヨ:

然ルトキハ直線 AH, BK, CL, DM, ... ハ皆平行ナルカ或ハ同一ノ點ヲ過ル可シ.

第一. 二ツノ形ガ相似ナルノミナラズ又相等シキトキハ, AB, HK ハ相等シク且平行ナリ:

故ニ甲圖ノ如キ位置ニ在レハ, AH, BK ハ平行ナリ; I, 26.

同樣ニ BK, CL モ平行ナリ, 又 CL, DM モ平行ナリ, 其他皆然リ;

故ニ AH, BK, CL, DM 等ハ皆平行ナリ:

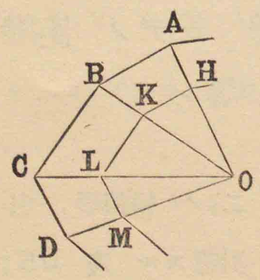
乙圖ノ如キ位置ニ在レハ, AH, BK ハ平行四邊形ノ對角線ナルヲ以テ各他ヲ二等分ス;

同樣ニ BK, CL モ各他ヲ二等分ス; CL, DM 等モ亦然リ;

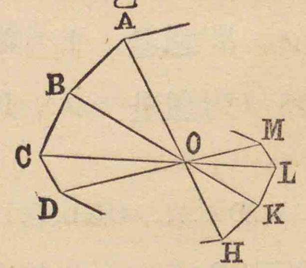
故ニ AH, BK, CL, DM 等ノ中點ハ何レモ同一ノ點ナリ;

即 AH, BK, CL, DM 等ハ皆同一ノ點ヲ過ル.

甲



乙



第二. 二ツノ形ガ相等シカラザルトキハ, AH, BK (乙圖) 或ハ其ノ延長 (甲圖) ヲ O ニ於テ交ルトセヨ:

AB, HK ハ平行ナルヲ以テ,

三角形 ABO, HKO ハ等角ナリ,

故ニ BO : KO :: AB : HK; V, 7.

即 AH ハ BK ヲ比 AB : HK ニ外分 (甲圖) 或ハ内分ス (乙圖):

同樣ニ CL ハ BK ヲ比 BC : KL ニ外分或ハ内分ス;

而シテ二ツノ形ハ相似ナルヲ以テ AB : HK :: BC : KL;

故ニ AH, CL ハ BK ヲ同シ比ニ外分或ハ内分ス;

故ニ AH, CL ハ BK ト同一ノ點 O ニ於テ交ル; V, 2.

同樣ニ DM 等モ同一ノ點 O ヲ過ルヲ證明スルヲ得.

次ニ, O 點ヲ過ル任意ノ直線ガ對應邊 AB, HK ト夫々 P, Q 點ニ於テ交ルトセヨ:

然ルトキハ OP : OQ :: AB : HK ナル可シ.

AP, HQ ハ平行ナルヲ以テ,

三角形 APO, HQO ハ等角ニシテ,

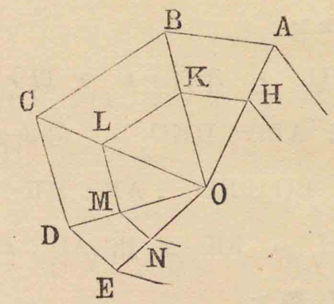
OP : OQ :: OA : OH; V, 7.

而シテ OA : OH :: AB : HK;

故ニ OP : OQ :: AB : HK.

系 1. 相似直線形ハ同シ數ノ相似三角形ニ分ツヲ得.

何トナレハ，二ツノ形ヲ，其ノ對應邊ガ平行ニシテ，一ツガ全ク他ノ内ニ在ル樣ニ置クヲ得（二ツノ形ガ全ク相等シキ塲合ハ明白ナルヲ以テ論セズ）：然ル𪜈ハ，對應スル頂點ヲ結ヒ付クル直線ハ形内ノ一ツノ點ニ於テ出會ヒ，二ツノ形ヲ各ノ形ノ邊ト同シ數ノ相似三角形ニ分ツヿ明ナリ.



系 2. 相似直線形ノ周ノ比ハ其ノ對應邊ノ比ニ等シ.

定義 4. 二ツノ相似形ノ對應スル頂點ヲ結ヒ付クル總テノ直線ノ交點ヲ其ノ**相似ノ中心**ト稱ス.

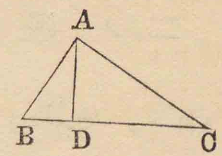
問題 352. 系 1 ノ逆ヲ證明セヨ.

*問題 353. O ハ定マレル點ナリ；P ハ與ヘラレタル圓周上ノ點ナリ；OP 上ニ OQ ヲ比 OP : OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ樣ニ取レハ，Q ノ軌跡ハ圓周ナリ.

定理 12. **直角三角形ニ於テ，直角ノ頂點ヨリ斜邊ヘ引ケル垂線ハ三角形ヲ全形ニ相似ナル，因リテ又互ニ相似ナル二ツノ三角形ニ分ツ.**

ABC ハ直角三角形ニシテ，BAC ヲ直角，AD ヲ A ヨリ斜邊 BC ヘ引ケル垂線トセヨ：

然ル𪜈ハ三角形 DBA, DAC ハ各三角形 ABC ニ相似ニシテ，又互ニ相似ナル可シ.



三角形 DBA, ABC ニ於テ角 ABC ハ兩形ニ通シ，直角 BDA, BAC ハ相等シ；

故ニ二ツノ三角形ハ相似ナリ： V, 7.

同樣ニ三角形 DAC, ABC モ亦相似ナリ：

故ニ二ツノ三角形 DBA, DAC ハ同シ三角形 ABC ニ相似ナルヲ以テ互ニ相似ナリ. V, 6.

系. 此三角形ノ各ノ邊ハ斜邊，及斜邊ノ之ニ隣ル分ノ間ノ比例中項ナリ：垂線ハ斜邊ノ二ツノ分ノ間ノ比例中項ナリ.

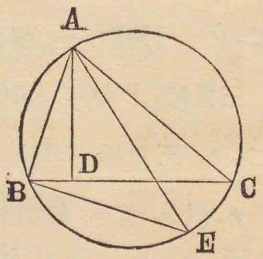
問題 354. 此三角形ノ底邊ノ分ノ比ハ二ッノ邊ノ二乘比ナリ.

問題 355. 圓ノ二ッノ平行ナル切線ガ A 點ニ於テ切スル第三ノ切線ト P, Q ニ於テ交ル；半徑ハ AP, AQ ノ間ノ比例中項ナリ.

定理 13. 三角形ノ外接圓ノ直徑ハ一ッノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ引ケル垂線, 及其頂點ニ於テ出會フ所ノ二ッノ邊ノ第四比例項ナリ.

AE ヲ三角形 ABC ノ外接圓ノ直徑, AD ヲ A ヨリ BC ヘ引ケル垂線トセヨ：

然ルトキハ AD : AC :: AB : AE ナル可シ.



BE ヲ結ヒ付ケヨ；

角 ABE ハ直角ナルヲ以テ, II, 17.

角 ADC ニ等シ；

又角 ACB, AEB ハ同シ弓形ニ於テノ角ナルヲ以

テ, 相等シ； II, 16.

故ニ三角形 ADC, ABE ハ等角ニシテ,

AD : AC :: AB : AE. V, 1.

問題 356. D ガ二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 或ハ其ノ延長ノ上ノ點ナレハ, 三角形 ABD, ACD ノ外接圓ハ相等シ.

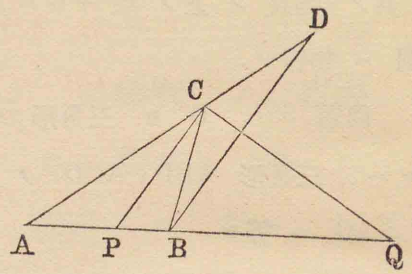
問題 357. D ガ三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ點ナレハ, 三角形 ABD, ACD ノ外接圓ノ直徑ノ比ハ AB : AC ニ等シ.

定理 14. 三角形ノ頂角或ハ之ニ隣ル外角ヲ二等分スル直線ガ底邊ト交ル點ハ底邊ヲ他ノ二ッノ邊ノ比ニ內分或ハ外分ス.

逆ニ, 底邊ヲ他ノ二ッノ邊ノ比ニ內分或ハ外分スル點ヨリ頂點ヘ引ケル直線ハ頂角或ハ之ニ隣ル外角ヲ二等分ス.

ABC ヲ三角形; CP, CQ ハ C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ニシテ, 底邊 AB 及其ノ延長ト P 及 Q 點ニ於テ交ルトセヨ:
然ルトキハ AB ハ比 AC : CB ニ, P ニ於テ內分, 及 Q ニ於テ外分サル可シ.

B ヨリ PC ニ平行ニ BD ヲ引キ, AC ノ延長ト D ニ於テ交ルトセヨ;



然レハ角 CBD ハ角 BCP ニ等シ;
又角 CDB ハ角 ACP ニ等シ;
然ルニ角 BCP ハ角 ACP ニ等シ; 假設.
故ニ角 CBD ハ角 CDB ニ等シ;
故ニ CB ハ CD ニ等シ:
又 PC ハ BD ニ平行ナルヲ以テ,
AP : PB :: AC : CD; V, 1, 系.
而シテ CD ハ CB ニ等シキヲ以テ,
AP : PB :: AC : CB.
同樣ニ B ヨリ QC ニ平行線ヲ引キ, AQ : QB :: AC : CB ヲ證明スルヲ得.

逆ニ, AB ヲ P 及 Q ニ於テ比 AC : CB ニ內分及外分シタリトセヨ:
然ルトキハ CP, CQ ハ C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分ス可シ.

C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ハ AB ヲ比 AC : CB ニ內分及外分ス:
而シテ AB ガ比 AC : CB ニ內分及外分サルヽ點ハ各唯一ツニ限ル, V 2.
而シテ P, Q ガ此分點ナリ;
故ニ CP, CQ ハ C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ナリ.

系. 頂點 C ガ比 AC : CB ガ常ニ任意ノ與ヘラレタル比ニ等シキ樣ニ動クトキハ, C ニ於テノ內角及外角ヲ二等分スル直線ハ AB ヲ此比ニ內分及外分スル點ヲ過ル.

問題 358. 三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ D ニ於テ二等分シ, 角 ADC, ADB ヲ二等分スル直線ヲ邊 AC, AB ト夫々 E, F ニ於テ出會ハシムルトキハ, EF ハ BC ニ平行ナリ.

第二節ノ問題.

*問題 359. 一ツノ點ヨリ引ケル三ツノ直線ガ二ツノ平行線ト夫々 A, B, C 及 A′, B′, C′ 點ニ於テ交レハ, AB : BC :: A′B′ : B′C′.

*問題 360. 二ツノ平行線 AB, A′B′ カ夫々 C 及 C′ 點ニ於テ同シ比ニ二ツ共ニ內分サレ或ハ二ツ共ニ外分サルヽ片ハ, AA′, BB′, CC′ ハ同一ノ點ヲ過ル.

*問題 361. 直線 DEF ガ三角形ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 D, E, F 點ニ於テ交リ, AB 及 AC ト相等シキ角ヲ爲ス: 然ル片ハ BD : CD :: BF : CE.

問題 362. D ハ三角形 ABC ノ邊 AC 上ノ點, E ハ邊 AB 上ノ點ナリ: BD, CE ガ各他ヲ比 4 : 1 ニ分ツ片ハ, D, E ハ夫々 CA, AB ヲ比 3 : 1 ニ分ツ.

問題 363. 直線 AD ハ三角形 ABC ノ角 BAC ヲ二等分シ, 邊 BC ト D ニ於テ交リ, 直線 DE, DF ハ夫々角 ADB, ADC ヲ二等分シ, 邊 AB, AC ト夫々 E, F 點ニ於テ交ル; 三角形 BEF ト三角形 CEF ノ比ハ BA ト AC ノ比ニ等シ.

問題 364. 二ツノ二等邊三角形ノ頂角ガ相等シケレハ, 其ノ高サノ比ハ其ノ底邊ノ比ニ等シ.

*問題 365. 平行四邊形ノ對角線ニ添フ平行四邊形ハ全形ニ, 及互ニ相似ナリ.

*問題 366. 一ツノ共通ノ角ヲ有シ, 相似ニシテ, 相似ノ位置ニ在ル二ツノ平行四邊形ノ共通ノ角ヲ過ル對角線ハ同一ノ直線ナリ.

問題 367. ABC ハ圓ニ內接スル三角形ニシテ, A ニ於テノ切線 AD ガ BC ノ延長ト D ニ於テ出會フ片ハ, 三角形 ABD 及 ACD ニ外接スル圓ノ直徑ノ比ハ比 AD : CD ニ等シ.

問題 368. 圓ニ內接スル六邊形ノ相對スル邊ヲ延長シテ交ハラシムル片ハ, 三ツノ交點ハ一直線上ニ在リ.

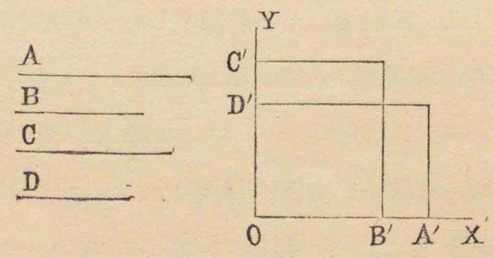
第三節.

面積.

定理 15. 四ツノ直線ガ比例ヲ爲ス𪜈ハ, 外項ノ包ム矩形ハ內項ノ包ム矩形ニ等シ.

逆ニ, 二ツノ矩形ガ相等シキ𪜈ハ其ノ邊ナル四ツノ直線ハ一ツノ矩形ノ邊ガ內項, 他ノ矩形ノ邊ガ外項ナル樣ニ比例ヲ爲ス.

A, B, C, D ハ四ツノ直線ニシテ, A : B :: C : D ナリトセヨ:



然ル𪜈ハ A, D ノ包ム矩形ハ B, C ノ包ム矩形ニ等シカル可シ.

直角 XOY ノ一ツノ邊ノ上ニ OA′ ヲ A ニ等シク, OB′ ヲ B ニ等シク取リ; 他ノ邊ノ上ニ OC′ ヲ C ニ等シク, OD′ ヲ D ニ等シク取リ,

矩形 A′D′, B′C′ ヲ作レ,

A′D′ ハ A, D ノ包ム矩形, B′C′ ハ B, C ノ包ム矩形ナリ:

而シテ 矩形 B′D′ ハ兩形ニ通スル部分ナリ;

今 矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: OA′ : OB′; V, 4.

又 矩形 B′C′ : 矩形 B′D′ :: OC′ : OD′; V, 4.

然ルニ OA′ : OB′ :: OC′ : OD′; 假設.

故ニ 矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: 矩形 B′C′ : 矩形 B′D′; IV, 1.

故ニ 矩形 A′D′ ハ矩形 B′C′ ニ等シ; IV, 4, 系 1.

即 A, D ノ包ム矩形ハ B, C ノ包ム矩形ニ等シ.

逆ニ, A, D ノ包ム矩形ガ B, C ノ包ム矩形ニ等シトセヨ:

然ル𪜈ハ A : B :: C : D ナル可シ.

前ト同シ作圖ヲ爲セハ,

矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: 矩形 B′C′ : 矩形 B′D′; IV, 3.

而シテ 矩形 A′D′ : 矩形 B′D′ :: OA′ : OB′, V, 4.

又　矩形B′C′ : 矩形B′D′ :: OC′ : OD′;　V, 4.

故ニ　OA′ : OB′ :: OC′ : OD′,

即　A : B :: C : D.

系. 三ツノ直線ガ比例ヲ為ストキハ, 外項ノ包ム矩形ハ中項ノ上ノ正方形ニ等シ; 逆ニ, 一ツノ正方形ガ一ツノ矩形ニ等シケレバ, 正方形ノ邊ハ矩形ノ二ツノ邊ノ間ノ比例中項ナリ.

* 問題 369. V, 7 及 15 ニ由リテ, 圓ノ二ツノ弦ガ圓内ノ或ハ圓外ノ點ニ於テ交ルトキハ, 弦ノ分ノ包ム矩形ハ他ノ弦ノ分ノ包ム矩形ニ等シキコト (III, 14, 系 1) ヲ證明セヨ. 又 III, 14, 系 3 ヲ證明セヨ.

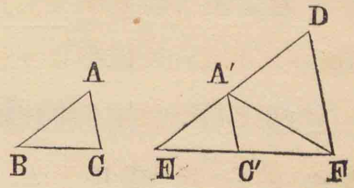
問題 370. 圓周上ノ點 A ヨリ二ツノ弦 AB, AC ヲ引キ, A ヲ過ル直徑ノ他ノ端ニ於テノ切線ト D, E ニ於テ交ラシムルトキハ, 三角形 AED, ABC ハ相似ナリ.

問題 371. 直角三角形 ABC ノ直角 B ヲ二等分スル直線ガ AC ト F ニ於テ交リ, 外接圓ト D ニ於テ交レバ, 矩形 BD, BF ハ三角形ノ二倍ニ等シ.

定理 16. 相似三角形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ.

ABC, DEF ハ相似三角形ニシテ, BC, EF ヲ一双ノ對應邊トセヨ:

然ルトキハ　三角形ABC : 三角形DEF ハ BC : EF ノ二乘比ナル可シ.



三角形 ABC ヲ三角形 DEF ノ上ニ置キ, B 點ハ E 點ノ上ニ重ナリ, BA ハ ED ノ上ニ重ナル樣ニセヨ;

然レバ　角 ABC ハ角 DEF ニ等シキヲ以テ, BC ハ EF ノ上ニ重ナル;

A′, C′ ヲ A, C ノ落ル點トセヨ;

A′C′ 及 A′F ヲ結ヒ付ケヨ:

然レバ　三角形A′EC′ : 三角形A′EF :: EC′ : EF;　V, 4, 系 2.

即　三角形ABC : 三角形A′EF :: BC : EF;

同樣ニ　三角形A′EF : 三角形DEF :: A′E : DE,

即　:: AB : DE;

然ルニ　AB : DE :: BC : EF;

故ニ　三角形A′EF : 三角形DEF :: BC : EF;

三角形 ABC ト三角形 DEF ノ比ハ ABC ト A′EF ノ比及 A′EF ト DEF ノ比ノ相乘比ナリ;

而シテ此比ハ各比 BC : EF ニ等シキヲ以テ,

三角形ABC：三角形DEF ハ BC：EF ノ二乘比ナリ.

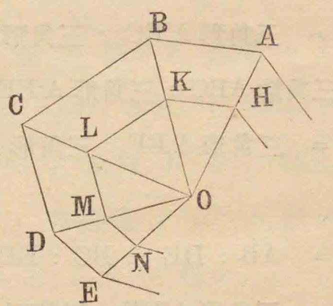
問題 372. 三角形 ABC ノ二ツノ中線 AE, BF ガ G ニ於テ交ル; 三角形 AGB, EGF ノ面積ヲ比較セヨ.

定理 17. 相似直線形ノ比ハ其ノ對應邊ノ二乘比ニ等シ.

ABCD...., HKLM.... ヲ二ツノ相似直線形; AB, HK ヲ一双ノ對應邊トセヨ:

然ルトキハ ABCD....：HKLN.... ハ AB：HK ノ二乘比ナル可シ.

二ツノ直線形ヲ其ノ對應邊ガ平行ニシテ, 一ツガ全ク他ノ內ニ在ル樣ニ置ケ:



AH, BK, CL, DM... ヲ結ヒ付ケ, 之ヲ延長シテ, 相似ノ中心 O ニ於テ出會ハシメヨ; V, 11

然レハ直線形ハ邊ノ數ト同シ數ノ双ノ相似三角形

ニ分タル;

而シテ各ノ双ノ三角形ノ比ハ其ノ底邊ノ二乘比ナリ,

即直線形ノ對應邊ノ二乘比ナリ;

故ニ一ツノ直線形ヲ爲ス三角形ノ和ト他ノ直線形ヲ爲ス三角形ノ和ノ比ハ對應邊ノ二乘比ナリ, 加比.

即直線形 ABCD....：直線形 HKLM.... ハ AB：HK ノ二乘比ナリ.

系. 相似直線形ノ比ハ其ノ對應邊ノ上ノ正方形ノ比ニ等シ.

何トナレハ正方形ハ相似形ナルヲ以テ, 其ノ比ハ對應邊ノ二乘比ニ等シケレハナリ.

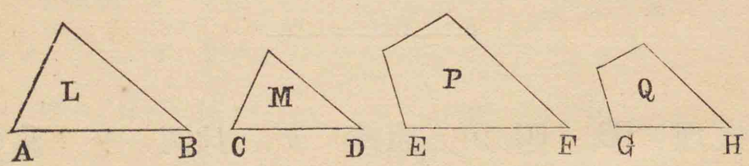
問題 373. 同シ圓ニ內接スル正方形及正六邊形ノ邊ノ上ニ作リタル正三角形ノ比ヲ求ム.

定理 18. 四ツノ直線ガ比例ヲ爲シ其ノ第一及第二ノ上ニ一双ノ相似形ヲ相似ノ位置ニ在ル樣ニ畫キ, 第三及第四ノ上ニモ亦一双ヲ畫クトキハ, 此等ノ形ハ比例ヲ爲

ス: 逆ニ, 四ツノ直線ノ第一ノ上ニ在ル直線形ト第二ノ上ニ之ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル直線形ノ比ガ第三ノ上ニ在ル直線形ト第四ノ上ニ之ト相似ニシテ相似ノ位置ニ在ル直線形ノ比ニ等シケレハ, 四ツノ直線ハ比例ヲ爲ス.

AB, CD, EF, GH ヲ比例ヲ爲ス四ツノ直線; L, M ヲ AB, CD ノ上ニ相似ノ位置ニ在ル相似形; 又 P, Q ヲ EF, GH ノ上ニ相似ノ位置ニ在ル相似形トセヨ:

然ルトキハ $L : M :: P : Q$ ナル可シ.



$L : M$ ハ $AB : CD$ ノ二乘比ニ等シ; V, 17.

$P : Q$ ハ $EF : GH$ ノ二乘比ニ等シ; V, 17.

而シテ比 $AB : CD$ ハ比 $EF : GH$ ニ等シキヲ以テ,

$AB : CD$ ノ二乘比ハ $EF : GH$ ノ二乘比ニ等シ; IV, 14.

故ニ $L : M :: P : Q$.

逆ニ, $L : M :: P : Q$ ナリトセヨ:

然ルトキハ $AB : CD :: EF : GH$ ナル可シ.

$L : M$ ハ $AB : CD$ ノ二乘比ニ等シ; V, 17

又 $P : Q$ ハ $EF : GH$ ノ二乘比ニ等シ;

故ニ $AB : CD$ ノ二乘比ハ $EF : GH$ ノ二乘比ニ等シ;

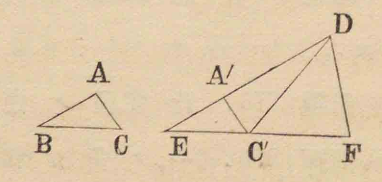
故ニ $AB : CD :: EF : GH$. IV, 14.

定理 19. 一ツノ角ガ相等シキ二ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ其角ヲ夾ム一ツノ形ノ邊ト他ノ形ノ邊ノ比ノ相乘比ナリ.

ABC, DEF ヲ角 ABC ガ角 DEF ニ等シキ二ツノ三角形トセヨ:

然ルトキハ比 $ABC : DEF$ ハ比 $AB : DE$ 及比 $BC : EF$ ノ相乘比ナル可シ.

角 ABC ガ角 DEF ニ等シキヲ以テ,



AB, BC ガ邊 DE, EF ノ上ニ重ナル樣ニ, 三角形 ABC ヲ DEF ノ上ニ置クヲ得;

A′, C′ ヲ A, C ノ落ル點トセヨ:

A′C′, DC′ ヲ結ヒ付ケヨ;

三角形 ABC 即 A′EC′ ト三角形 DEF ノ比ハ A′EC′ ト DEC′ ノ比及 DEC′ ト DEF ノ比ノ相乘比ナリ;

故ニ A′E : DE 及 EC′ : EF ノ相乘比ナリ: V, 4, 系.

即 AB : DE 及 BC : EF ノ相乘比ナリ.

平行四邊形ハ三角形ノ二倍ナルヲ以テ, 亦同シ比ヲ有ス.

系 1. 一ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ一ツノ角ガ一ツノ他ノ三角形或ハ平行四邊形ノ一ツノ角ノ補角ナルトキハ, 二ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ其角ヲ夾ム一ツノ形ノ邊ト他ノ形ノ邊ノ比ノ相乘比ナリ.

系 2. 直線ト直線ノ比ヲ二ツ相乘シタル比ハ前項ノ包ム矩形ト後項ノ包ム矩形ノ比ニ等シ.

---

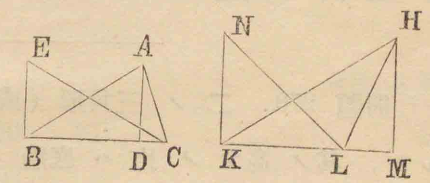
* 問題 374. 此定理ヲ平行四邊形ニ付テ直接ニ證明セヨ.

* 問題 375. 此定理ノ逆ハ何如?

* 問題 376. 一ツノ角ガ相等シキ二ツノ三角形或ハ平行四邊形ガ相等シケレハ, 各ノ形ニ於テ其角ヲ夾ム一ツノ邊ノ比ハ他ノ邊ノ反比ニ等シ. 之ヲ直接ニ, 及此定理ニ依リテ, 證明セヨ.

* 問題 377. 問題 376 ノ逆二ツ有リ; 之ヲ陳述シ, 及證明セヨ.

定理 20. 二ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ比ハ其ノ底邊ノ比及其ノ高サノ比ノ相乘比ナリ.



ABC, HKL ハ二ツノ三角形ニシテ, BC, KL ヲ其ノ底邊, AD, HM ヲ其ノ高サトセヨ:

然ルトキハ三角形 ABC, HKL ノ比ハ比 BC : KL 及比 AD : HM ノ相乘比ナル可シ.

BE ヲ BC ニ垂線ニ引キ, AD ニ等シクシ, EC ヲ結ヒ付ケヨ;

又 KN ヲ KL ニ垂線ニ引キ, HM ニ等シクシ, NL ヲ

結ヒ付ケヨ;

然レハ 三角形 ABC, EBC ハ 相等シ; III, 2, 系 2.

同様ニ 三角形 HKL, NKL モ 亦 相等シ;

而シテ 角 CBE ハ 角 LKN ニ 等シキ ヲ 以テ,

三角形 EBC ト 三角形 NKL ノ 比 ハ 比 BC : KL, 及 比

EB : NK 即 AD : HM ノ 相乘比 ナリ; V, 19.

故ニ 三角形 ABC ト 三角形 HKL ノ 比 ハ 比 BC : KL

及 比 AD : HM ノ 相乘比 ナリ.

平行四邊形 ニ 付テモ 同様ニ 證明スル ヲ 得.

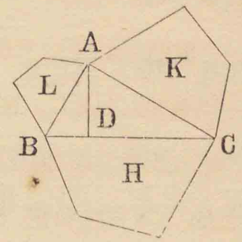
系. 二ツノ 三角形 或ハ 平行四邊形 ノ 比 ハ 之 ト 同シ 高サ 及 同シ 底邊 ノ 矩形 ノ 比 ニ 等シ.

---

* 問題 278. 二ツノ 三角形 (或ハ 平行四邊形) ガ 相等シケレハ, 其ノ 高サ ノ 比 ハ 底邊 ノ 比 ノ 反比 ナリ.

定理 21. 直角三角形 ノ 斜邊 ノ 上ニ 畫キタル 直線形 ハ 他ノ 二ツノ 邊 ノ 上ニ 畫キタル 之 ト 相似ニシテ 相似ノ 倍置 ニ 在ル 直線形 ノ 和 ニ 等シ.

三角形 ABC ニ 於テ 角 BAC ヲ 直角 ナリ ト セヨ; 又 H, K, L ハ 邊 BC, CA, AB ノ 上ニ 畫キタル 相似ニシテ 相似ノ 位置 ニ 在ル 直線形 トセヨ:



然ル𪜈ハ H ハ K 及 L ノ 和 ニ 等シカル 可シ.

AD ヲ BC ニ 垂線ニ 引ケ;

然レハ BC : CA :: CA : CD ナル ヲ 以テ, V, 12, 系.

BC : CD ハ BC : CA ノ 二乘比 ナリ:

故ニ H : K :: BC : CD; V, 17.

同様ニ H : L :: BC : BD;

故ニ K : L :: CD : BD; 反轉, 及 等比.

故ニ K + L : L :: CD + BD : BD, 合比.

即 :: BC : BD;

然ルニ H : L :: BC : BD;

故ニ K ト L ノ 和 ハ H ニ 等シ.

附言. 此 定理 ハ 古代 ギリシヤ ノ 數學者 ピユータゴラス ノ 發見セル モノ ナリ ト 云フ, 因テ ピユータゴラス ノ 定理 ト 稱ス; 此 定理 ハ 相似直線形 ニ 限ラズ, 凡テ ノ 相似形 ニ 付テモ 亦 眞ナリ. III, 9 ハ 此 定理 ノ 特

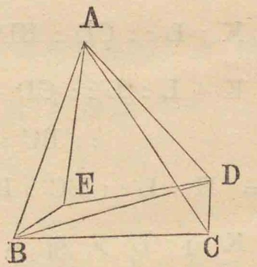
別ノ場合ナリ.

問題 379. III, 9 ヲ用ヰテ, 此定理ヲ證明セヨ.

定理 22. 四邊形ノ二ツノ對角線ノ包ム矩形ハ其ノ相對スル邊ノ包ム矩形ノ和ヨリ小ナリ: 唯四邊形ニ外接スル圓ヲ畫キ得可キ特別ノ場合ニ於テノミ, 之ニ等シ.

ABCD ハ四邊形ニシテ, 先ヅ之ニ外接スル圓ヲ畫ク能ハズトセヨ:

然ルトキハ矩形 AC, BD ハ矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ヨリ小ナル可シ.



A, B, C, D ヲ過ル圓ヲ畫ク能ハザルヲ以テ,

角 ABD ハ角 ACD ニ等シカラズ;

角 ABE ヲ角 ACD ニ等シク作レ;

角 BAE ヲ角 CAD ニ等シク作レ;

DE ヲ結ビ付ケヨ:

三角形 ABE, ACD ハ等角ナルヲ以テ,

BA : AE :: CA : AD, V, 7.

故ニ BA : AC :: EA : AD, 更迭.

而シテ角 BAE ハ角 DAC ニ等シキヲ以テ, 双方ヘ角 CAE ヲ加ヘ, (或ハ之ヲ双方ヨリ減シ) 全角 (或ハ殘リ) BAC ハ全角 (或ハ殘リ) DAE ニ等シ;

故ニ三角形 ABC, EAD ハ相似ナリ; V, 8.

故ニ BC : AC :: DE : AD;

故ニ矩形 BC, AD ハ矩形 AC, DE ニ等シ; V, 15.

又三角形 BAE, CAD ガ相似ナルヲ以テ,

AB : BE :: AC : CD;

故ニ矩形 AB, CD ハ矩形 AC, BE ニ等シ;

故ニ矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ハ矩形 AC, BE 及 AC, DE ノ和ニ等シ:

然ルニ BD ハ BE 及 DE ノ和ヨリ小ナルヲ以テ,

矩形 AC, BD ハ矩形 AC, BE 及 AC, DE ノ和ヨリ小ナリ,

即矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ヨリ小ナリ.

次ニ ABCD ニ外接スル圓ヲ畫キ得ルトセヨ:

然ルトキハ矩形 AC, BD ハ矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ和ニ等シカル可シ.

角 ABD ハ 角 ACD ニ 等シキ ヲ 以テ,

E 點 ハ 直線 BD ノ 上ニ 在リ;

BD ハ BE 及 DE ノ 和 ニ 等シ;

故ニ 矩形 AC, BD ハ 矩形 AB, CD 及 AD, BC ノ 和 ニ 等シ.

系. 四邊形 ノ 對角線 ノ 包ム 矩形 ガ 相對スル 邊 ノ 包ム 矩形 ノ 和 ニ 等シケレハ, 四邊形 ニ 外接スル 圓 ヲ 畫ク ヲ 得.

附言. 此 定理 中 特別ノ 場合 (即 圓 ニ 內接スル 四邊形 ノ 對角線 ノ 包ム 矩形 ガ 相對スル 邊 ノ 包ム 矩形 ノ 和 ニ 等シキコ) ヲ トレミー ノ 定理 ト 稱ス; 圓 ノ 最 有用ナル 性質 ノ 一 ナリ.

問題 380. 圓 ニ 內接スル 四邊形 ノ 對角線 ガ 互ニ 垂線ナレハ, 相對スル 邊 ノ 包ム 矩形 ノ 和 ハ 四邊形 ノ 二倍ナリ.

第三 節 ノ 問題.

* 問題 381. 三角形 ABC ノ 頂點 A ニ 於テノ 內角 或ハ 外角 ヲ 二等分スル 直線 AD ガ 底邊 BC ト D ニ 於テ 交ル: AD ノ 上ノ 正方形 ハ 邊 AB, AC ノ 包ム 矩形

ト 底邊 ノ 分 BD, CD ノ 包ム 矩形 ノ 差 ニ 等シ.

問題 382. 三角形 ノ 外接圓 ノ 直徑 及 內接圓 ノ 半徑 ノ 包ム 矩形 ハ 內接圓 ノ 中心 ヲ 過ル 外接圓 ノ 弦 ノ 分 ノ 包ム 矩形 ニ 等シ.

問題 383. ACB, BCD ハ 相等シキ 角 ニシテ, CB ハ 三角形 ABC, DBC ニ 通ス; 二ツノ 三角形 ノ 比 ハ AC : CD ニ 等シ.

問題 384. CA, CB ハ 一ツノ 圓 ノ 互ニ 垂線ナル 半徑, DE ハ 任意ノ 弦 ナリ; BD, BE ガ AC ト F 及 G ニ 於テ 交レハ, 三角形 BFG, BDE ハ 相似ナリ.

問題 385. 相似三角形 ノ 比 ハ 其ノ 內接圓 或ハ 外接圓 ノ 半徑ノ 二乘比 ナリ.

問題 386. 正六邊形 ノ 邊 ヲ 兩 方 ヘ 延長シ, 其ノ 交 點 ヲ 結ヒ付ケテ, 一ツノ 正六邊形 ヲ 得: 此 二ツノ 六邊形 ノ 比 ハ 1 : 3 ナリ.

問題 387. 圓 外 ノ 點 ヨリ 切線 及 割線 ヲ 引キ, 又 同シ 點 ヨリ 切線 ニ 等シキ 長サノ 直線 ヲ 任意ノ 方向 ニ 引ケハ, 此 直線 ハ 其ノ 端 ヨリ 割線 ノ 交點 ヘ 引ケル 直線 ガ 圓 ト 交ル 所ノ 點 ヲ 過ル 弦 ニ 平行ナリ.

問題 388. ABC ハ 正三角形, P ハ 其ノ 外接圓 ノ 周 上ニ BC ノ A ニ 反對ノ 側 ニ 在ル 點 ナリ: PA ノ

上ノ正方形ハ PB, PC ノ包ム矩形及 BC ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ.

問題 389. 鋭角三角形 ABC ノ邊 BC ヲ直徑トシテ圓ヲ書キ, AB 邊ノ上ニ AD ヲ A ヨリノ切線ニ等シク取リ, DE ヲ AB ニ垂線ニ引キ, AC ノ延長ト E ニ於テ交ラシムルトキハ三角形 ABC, ADE ハ相等シ.

問題 390. 三角形 ABC ノ邊上ニ夫々 D, E, F 點ヲ BD : DC :: CE : EA :: AF : FB :: 1 : 2 ナル樣ニ取ル: 三角形 ABC ト DEF ノ比ハ何如?

第四節.

軌跡及作圖題.

軌跡 1. 相交ル二ツノ直線ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡.

AB, CD ヲ O ニ於テ交ル二ツノ直線トセヨ: AB, CD ヨリノ距離ノ比ガ與ヘラレタル比ニ等シキ點ノ軌跡ヲ求ム.

X, Y ヲ與ヘラレタル比ヲ有スル二ツノ直線トシ,

AB 上ノ任意ノ點 E ヨリ AB ニ垂線 EF ヲ引キ,

EF ヲ X ニ等シク取レ;

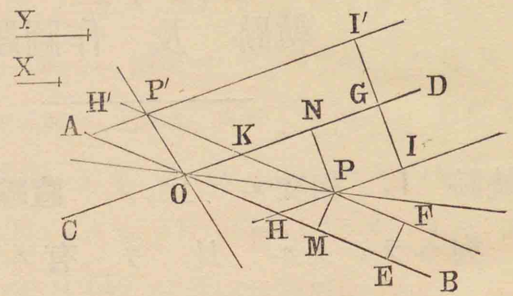
又 CD 上ノ任意ノ點 G ヲ過リ CD ニ垂線 IGI′ ヲ引キ,

GI 及 GI′ ヲ各 Y ニ等シク取レ;

F ヲ過リ FK ヲ AB ニ平行ニ引キ,

CD ト K ニ於テ交ラシメヨ;

又 I 及 I' ヲ過リ, IH 及 I'H' ヲ CD ニ平行ニ引キ, FK ト夫々 P 及 P' ニ於テ交リ, AB ト夫々 H 及 H' ニ於テ出會ハシメヨ;



然ルトキハ P, P' ハ求ムル所ノ軌跡上ノ點ナルヿ明ナリ:

先ツ, P ヲ角 BOD 或ハ其ノ對頂角ノ内ニ在リトセヨ;

P ヨリ AB, CD ヘ夫々垂線 PM, PN ヲ引ケ;

角 PHM, PKN ハ各角 BOD ニ等シキヲ以テ, 相等シ;

而シテ角 PMH, PNK ハ各直角ナルヲ以テ, 相等シ:

故ニ三角形 PMH, PNK ハ相似ナリ; V, 7.

故ニ　$PH : PM :: PK : PN$,

故ニ　$PH : PK :: PM : PN$; 更迭.

故ニ $PH : PK$ 即チ $OK : PK$ ハ與ヘラレタル比ニ等シ;

而シテ角 OKP ハ定マレル大サノ角ナリ;

故ニ角 POK ハ定マレル大サノ角ナリ; V, 8.

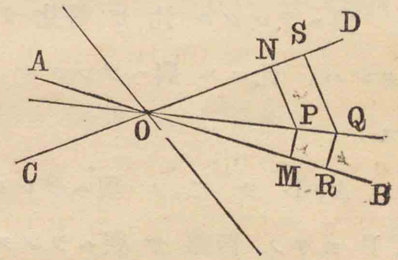
故ニ P ハ O ヲ過ル一ツノ定マレル直線 OP ノ上ニ在リ:

次ニ, P' ヲ角 AOD 或ハ其ノ對頂角ノ内ニ在リトセヨ;

然ルトキハ同樣ニ P' ハ O ヲ過ル一ツノ他ノ定マレル直線 OP' 上ニ在ルヿヲ證明スルヲ得.

又此二ツノ直線ノ中何レニテモ一ツノ上ニ在ル各ノ點ノ AB, CD ヨリノ距離ノ比ハ與ヘラレタル比ニ等シ.

Q ヲ此二ツノ中一ツノ上ニ在ル點トシ, QR, QS ヲ夫々 AB, CD ニ垂線ニ引ケ;



然レハ三角形 QRO, PMO ハ等角ナリ;

故ニ　$QR : PM$

　　$:: OQ : OP$;

三角形 QSO, PNO ハ等角ナリ;

故ニ　$QS : PN :: OQ : OP$;

故ニ　$QR : PM :: QS : PN$;

故ニ　$QR : QS :: PM : PN$, 更迭.

即 AB, CD ヨリ Q 點ノ距離ハ與ヘラレタル比ヲ有ス;

故ニ AB, CD ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ハ其ノ交點 O ヲ過ル二ツノ直線 OP, OP' ナリ.

---

* 問題 391. 二ツノ與ヘラレタル直線ガ平行ナルトキハ,

軌跡ハ之ニ平行ナル一双ノ平行線ナリ.

＊問題 392. 軌跡ノ一部分ナルOヲ過ル直線 OP ハ HK ニ平行ナリ.

軌跡 2. 二ツノ與ヘラレタル點ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡.

與ヘラレタル比ガ等比ナル場合ハI, 軌跡 2 ニ論シタレハ, 此ニハ與ヘラレタル比ハ等比ニ非ラザルモノトス.

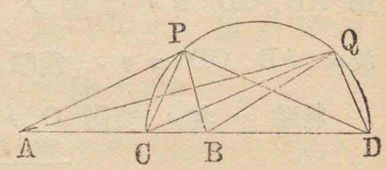
A, B ヲ二ツノ與ヘラレタル點トセヨ:

A, B ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ヲ求ム.

P ヲ一ツノ斯ノ如キ點トセヨ:

A, B ヲ結ヒ付ケ, 之ヲ C, D ニ於テ與ヘラレタル比ニ内分及外分シタリトセヨ;

V, 2.



然レハ　PA : PB : : AC : CB,

及　　PA : PB : : AD : DB;

故ニ PC, PD ハ夫々三角形

APB ノ P ニ於テノ内角及外角ヲ二等分ス,　V, 14.

故ニ CPD ハ直角ナリ;

故ニ P 點ハ常ニ CD ヲ直徑トセル圓周ノ上ニ在リ.

又此圓周上ノ各ノ點ノ A, B ヨリノ距離ハ與ヘラレタル比ヲ有ス.

Q ヲ此圓周上ノ任意ノ點トセヨ:

QA, QB, QC, QD ヲ結ヒ付ケ, 角 CQA ニ等シク角 CQB′ ヲ作レ,

然レハ CQ ハ角 AQB′ ヲ二等分ス, 而シテ角 CQD ハ直角ナリ;

故ニ QD ハ角 AQB′ ニ隣ル外角ヲ二等分ス,

故ニ AC : CB′ : : AD : DB′;

即 AC : AD : : CB′ : DB′;　更迭.

然ルニ AC : CB : : AD : DB,

即 AC : AD : : CB : DB,　更迭.

故ニ CB′ : DB′ : : CB : DB;

故ニ B 。ト B′ ハ同一ノ點ナリ;　V, 2.

故ニ QC ハ角 AQB ヲ二等分シ,

AQ : QB : : AC : CB.

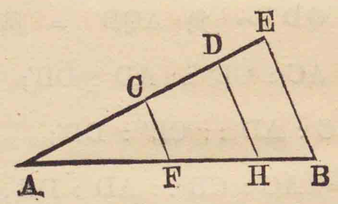
故ニ A, B ヨリノ距離ガ與ヘラレタル比ヲ有スル點ノ軌跡ハ AB ヲ其比ニ内分及外分スル點 C, D

ヲ結ヒ付クル直線ヲ直徑トシテ畫キタル圓周ナリ.

作圖題 1. 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ與ヘラレタル分タレタル直線ニ相似ニ分ツヿ.†

AB ヲ一ツノ直線, ACDE ヲ C, D ニ於テ分タレタル與ヘラレタル直線トス:
AB ヲ ACDE ニ相似ニ分ツヿヲ求ム.

AB, AE ヲ一ツノ端ガ同シ點 A ニ在ル樣ニ置ケ; EB ヲ結ヒ付ケ; C, D ヲ過リ, CF, DH ヲ EB ニ平行ニ引キ, AB ト夫々 F, H ニ於テ交ラシメヨ;



AB ハ F, H ニ於テ AE ニ相似ニ分カタレタリ.

CF, DH, EB ハ平行ナルヲ以テ,

AF : FH :: AC : CD, V, 1.

又 FH : HB :: CD : DE;

† 相似ニ分ツトハ兩直線ニ於テ相對應スル諸分ノ比ガ相等シキヲ云フ.

即 AB ハ F, H ニ於テ ACDE ニ相似ニ分タレタリ.

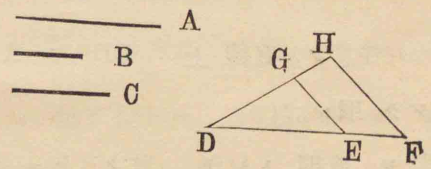
作圖題 2. 一ツノ與ヘラレタル直線ヲ與ヘラレタル比ニ內分及外分スルヿ.

此作圖題ハ定理, V, 2 中ニ解セリ.

作圖題 3. 三ツノ與ヘラレタル直線ノ第四比例項ナル直線ヲ得ルヿ.

A, B, C ヲ三ツノ與ヘラレタル直線トス:

A, B, C ノ第四比例項ナル直線ヲ求ム.



任意ノ直線上ニ DE ヲ A ニ等シク, EF ヲ B ニ等シク取レ;
D ヲ過ル任意ノ直線上ニ DG ヲ C ニ等シク取レ;
EG ヲ結ヒ付ケ, FH ヲ EG ニ平行ニ引キ, DG ノ延長ト H ニ於テ交ラシメヨ;
GH ハ求ムル所ノ第四比例項ナリ.

EG, FH ハ平行ナルヲ以テ,

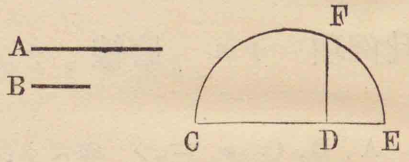
DE : EF :: DG : GH,　　V, 1, 系.

即 A : B :: C : GH;

故ニ GH ハ A, B, C ノ 第四比例項 ナリ.

作圖題 4. 二ツノ 與ヘラレタル 直線 ノ 間 ノ 比例中項 ナル 直線 ヲ 得ルヿ.

A, B ヲ 二ツノ 與ヘラレタル 直線 ト ス:



A, B ノ 間ノ 比例中項 ナル 直線 ヲ 求ム.

任意ノ 直線 上ニ CD ヲ A ニ 等シク, DE ヲ B ニ 等シク 取レ;

CE ヲ 直徑 トシテ, 其ノ 上ニ 半圓 ヲ 畫ケ;

D ヨリ CE ニ 垂線 ニ DF ヲ 引キ, 圓周 ト F ニ 於テ 交ラシメヨ;

DF ハ 求ムル 所ノ 比例中項 ナリ.

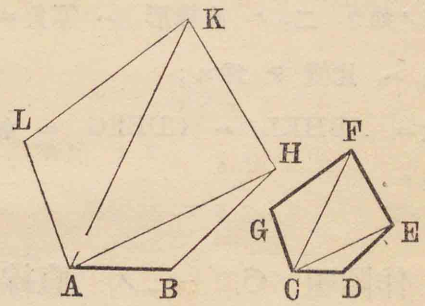
CFE ハ 半圓 ナル ヲ 以テ,

角 CFE ハ 直角 ナリ;

故ニ FD ハ CD, DE ノ 間ノ 比例中項 ナリ.　　V, 12, 系.

作圖題 5. 與ヘラレタル 直線 ノ 上ニ, 他ノ 與ヘラレタル 直線 ノ 上ノ 與ヘラレタル 直線形 ニ 相似ニシテ 相似ノ 位置 ニ 在ル 直線形 ヲ 作ルヿ.

AB ヲ 與ヘラレタル 直線; CDEFG ヲ 他ノ 與ヘラレタル 直線 CD ノ 上ニ 在ル 直線形 トス:



AB ノ 上ニ CDEFG ニ 相似ニシテ 相似ノ 位置ニ 在ル 直線形 ヲ 作ルヿ ヲ 求ム.

C 點 ヲ 頂點 E, F ニ 結ヒ付ケテ, CDEFG ヲ 三角形 CDE, CEF, CFG ニ 分テ;

角 BAH, ABH ヲ 夫々 角 DCE, CDE ニ 等シク 作レ;

角 HAK, AHK ヲ 夫々 角 ECF, CEF ニ 等シク 作レ;

續ケテ 斯ノ如ク ニシテ, 與ヘラレタル 直線形 ヲ 分チタル 三角形 ト 夫々 等角ナル 三角形 ヲ 作レ;

斯樣ニシテ 得タル 直線形 ハ 求ムル 所ノ 直線形 ナリ.

三角形 ABH, CDE ハ 等角ナル ヲ 以テ,

AB : BH :: CD : DE; V, 1.

且 BH : HA :: DE : EC;

又 三角形 AHK, CEF ハ 等角ナル ヲ 以テ,

HA : HK :: EC EF;

故ニ BH : HK :: DE : EF; 等比.

同様ニ HK : KL :: EF : FG, 等;

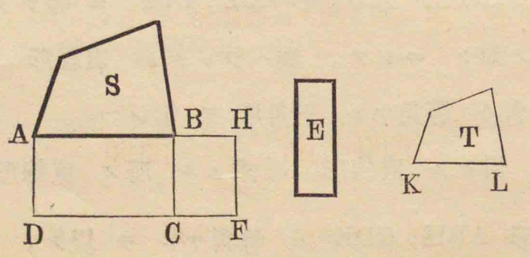
斯ノ如ク 二ツノ 直線形 ハ 等角ニシテ, 相等シキ 角 ヲ 夾ム 邊 ハ 比例 ヲ 爲ス;

故ニ ABHKL ハ CDEFG ニ 相似ニシテ, 相似ノ 位置 ニ 在リ.

作圖題 6. 一ツノ 直線形 ニ 等シク, 一ツノ 他ノ 直線形 ニ 相似ナル 直線形 ヲ 作ルコ.

E, S ヲ 二ツノ 與ヘラレタル 直線形 トス:

E ニ 等シク, S ニ 相似ナル 直線形 ヲ 作ルコ ヲ 求ム.



S ノ 一ツノ 邊 AB ノ 上ニ S ニ 等シキ 矩形 ABCD ヲ 作レ; III, 作 3 及 作 2.

BC ノ 上ニ E ニ 等シキ 矩形 BCFH ヲ 作レ;

AB, BH ノ 間ノ 比例中項 ナル KL ヲ 得ヨ; V, 作 4.

KL ノ 上ニ, AB ノ 上ニ 在ル S ニ 相似ニシテ 相似ノ 位置 ニ 在ル 直線形 T ヲ 作レ; V, 作 5.

T ハ 求ムル 所ノ 直線形 ナリ.

AB : KL :: KL : BH ナル ヲ 以テ,

AB : BH ハ AB : KL ノ 二乘比 ナリ;

又 形S : 形T ハ AB : KL ノ 二乘比 ナリ; V, 17.

故ニ 形 S : 形 T :: AB : BH;

而シテ 矩形AC : 矩形BF :: AB : BH; V, 4.

故ニ 形S : 形T :: 矩形 AC : 矩形BF;

而シテ 形 S ハ 矩形AC ニ 等シ,

故ニ 形 T ハ 矩形BF ニ 等シ, IV, 7.

即 形 E ニ 等シ:

故ニ 形 T ハ 求ムル 所ノ 直線形 ナリ.

第四 節 ノ 問題.

* 問題 393. 與ヘラレタル 三角形 ニ 相似ナル 三角形 ノ

一ツノ頂點ハ一ツノ定マレル點ニ在リ；一ツノ頂點ハ常ニ與ヘラレタル直線ノ上ニ在リ：第三ノ頂點ノ軌跡ハ一ツノ直線ナリ.

問題 394. 與ヘラレタル點 A ヲ過リ，與ヘラレタル直線 OX，OY ト P，Q ニ於テ交リ，OP：OQ ガ與ヘラレタル比ヲ有スル樣ナル直線ヲ引ケ.

問題 394. 圓周上ノ二ツノ與ヘラレタル點ノ各ヲ過リ，平行ニシテ，互ト與ヘラレタル比ヲ有スル弦ヲ引ケ.

問題 365. 與ヘラレタル頂角ヲ有シ，與ヘラレタル三角形ニ等シキ二等角三角形ヲ作レ.

問題 396. 一ツノ點ニ於テ出會フ三ツノ直線有リ；一ツノ直線ヲ，其三ツノ直線ガ之ヨリ切リ取ル二ツノ部分ガ夫々與ヘラレタル長サニ等シキ樣ニ引ケ.

第五編ノ問題.

* 問題 397. 邊ノ數ガ同シキ二ツノ正多角形ノ周ノ比ハ之ニ外接スル圓ノ半徑ノ比ニ等シ.

* 問題 398. 二ツノ直線ノ和ノ半分ハ其ノ間ノ比例中項ナル直線ヨリ大ナリ.

問題 399. 二ツノ直線ノ包ム矩形ハ各ノ上ノ正方形ノ間ノ比例中項ナリ.

問題 400. 正三角形內ノ一ツノ點ヨリ三ツノ邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ其ノ高サニ等シ.

問題 401. O 點ヨリ任意ノ直線ヲ引キ，其ノ上ニ二ツノ點 P，Q ヲ OP：OQ ガ與ヘラレタル比ニ等シキ樣ニ取ル：P 點ノ軌跡ガ直線ナレハ，Q 點ノ軌跡モ亦直線ナリ.

問題 402. 問題 401 ニ於テ，P 點ノ軌跡ガ圓周ナレハ，Q 點ノ軌跡モ亦圓周ナリ.

問題 403. 一ツノ點ヨリ一ツノ二等邊三角形ノ相等シキ邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ガ同シ點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ノ上ノ正方形ニ等シケレハ，斯ノ如キ點ノ軌跡ハ相等シキ兩邊ニ底邊ノ端ニ於テ切スル圓

周ナリ.

問題 404. 圓周上ノ一ツノ點ヨリ之ニ內接スル四邊形ノ相對スル邊ヘ引ケル垂線ノ包ム矩形ハ相等シ. 此定理及其ノ逆ヲ證明セヨ.

問題 405. A, B, C, D ハ一直線上ノ點ナリ; AC, BD ノ上ニ相似三角形 AXC, BYD ヲ畫キ, 對應邊 AX, BY 及對應邊 CX, DY ハ平行ナリトス: XY ト AD ガ O 點ニ於テ交レバ, 矩形 OA, OD ハ矩形 OB, OC ニ等シ.

問題 406. O, A, B, C, D ハ問題 405 ニ於テ述ベタル點ナリ; OE ハ其ノ上ノ正方形ガ矩形 OA, OD ニ等シキ直線ナリ; O ヲ中心トシ, 半徑 OE ヲ以テ圓ヲ畫キ, P ヲ其圓周上ノ任意ノ點トスレバ, 角 APB, CPD ハ相等シ.

問題 407. 三角形ノ頂點ヨリ之ニ對スル邊ヘ垂線ヲ引ケバ, 一ツノ邊ト其ノ垂線ノ比ハ他ノ一ツノ邊ト其ノ垂線ノ比ノ反比ニ等シ.

* 問題 408. 一ツノ直線ガ三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB ト夫々 A', B', C' 點ニ於テ交レバ, 三ツノ比 $AB' : B'C$, $CA' : A'B$, $BC' : C'A$ ノ相乘比ハ等比ナリ.

* 問題 409. 三角形ノ邊 BC, CA, AB 或ハ其ノ延長

ノ上ニ各一ツノ點 A', B', C' 有リ; 但シ A', B', C' ノ中, 二ツダケ邊ノ上ニ在リテ, 一ツハ延長ノ上ニ在ルカ, 或ハ皆延長ノ上ニ在リトス: 而シテ比 $AB' : B'C$, $CA' : A'B$, $BC' : C'A$ ノ相乘比ガ等比ナレバ, 三ツノ點 A', B', C' ハ一直線上ニ在リ.

* 問題 410. 三角形ノ外角ヲ二等分スル直線ガ邊ト交ル三ツノ點ハ一直線上ニ在リ.

* 問題 411. 二ツノ三角形 ABC, $A'B'C'$ ノ頂點ト頂點ヲ結ビ付クル直線 AA', BB', CC' ガ同一ノ點ヲ過ルトキハ, 相對應スル邊ノ交點 P, Q, R ハ一直線上ニ在リ: 逆ニ, 二ツノ三角形ノ邊ノ交點 P, Q, R ガ一直線上ニ在レバ, 相對應スル頂點ヲ結ビ付クル直線ハ同一ノ點ヲ過ル.

* 問題 412. 二ツノ圓ノ共通切線 (問題 206) ノ各ノ双ノ交點ハ其ノ中心ヲ結ビ付クル直線ヲ半徑ノ比ニ內分或ハ外分ス.

此二ツノ點ヲ二ツノ圓ノ**相似ノ中心**ト稱ス: 而シテ之ヲ**內心**ト**外心**トニ區別ス.

問題 413 二ツノ圓ノ相似ノ中心ヨリ一ツノ直線ヲ引キ, 一ツノ圓ト R, R' 點ニ於テ交リ, 他ノ圓ト S, S' 點 (但シ R 點ガ S 點ニ對應シ, R' 點ガ S' 點ニ對

應スルモノトス，即 OR ガ OR' ヨリ小ナレバ，OS モ OS' ヨリ小ナリトス）ニ於テ交ラシムル 片ハ，矩形 OR，OS' 及矩形 OR'，OS ハ相等シク，且ツ何レノ直線ニテモ常ニ同シ．

問題 414．任意ノ點 O ヲ直線形ノ頂點 A，B，C，…． ニ結ヒ付ケ，OA，OB，OC，…． 上ニ a，b，c，…． 點ヲ $Oa : OA :: Ob : OB :: Oc : OC$…． ナル樣ニ取ル片ハ，形 abc…． ハ形 ABC…． ニ相似ナリ．

＊問題 415．O ハ定マレル點ナリ；P ハ與ヘラレタル圓周上ノ點ナリ：OQ ハ OP ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ爲シ，之ト與ヘラレタル比ニ等シキ比ヲ有ス；Q 點ノ軌跡ヲ求ム．

＊問題 416．OA，OB ハ中心 C ナル圓ヘ引ケル切線，OPQ ハ O ヲ過リ圓ト P，Q ニ於テ交リ，AB ト R ニ於テ交ル任意ノ直線ナリ；N ガ AB 及 OC ノ交點ナレバ，NR ハ角 PNQ ヲ二等分スルコトヲ證明シ，因リテ PQ 線ガ O 及 R ニ於テ調和ニ分タルヽコトヲ證明セヨ．

問題 417．定マレル點 O ヨリ圓ト P，Q ニ於テ交ル任意ノ直線ヲ引キ，R ヲ P，Q ニ付テ O ノ共軛點トス；R ノ軌跡ヲ求ム．

乙部圖書

神奈川縣横濱區尾上町三丁目　田沼太右衛門
富山縣富山東四十物町　中田清兵衛
富山縣高岡木舟町　車次郎七
京都府上京區第卅組大文字町　藤井孫兵衛
京都府下京區第五組大文字町　田中治兵衛
大阪府東區博勞町四丁目　中川勘助
大阪府東區道脩町貳丁目　小野市兵衛
大阪府東區北久太郎町四丁目　柳原喜兵衛
大阪府東區本町四丁目　岡島眞七
大阪東區備後町四丁目　梅原龜七
東京府神田區雉子町（圖々社書店）　岡初平
東京府日本橋區通鹽町（中央堂）　宮川保全
大阪府東區上難波南之町四十五番地　文部省編輯局直轄乙部圖書關西取扱所
東京府日本橋區檜物町十番地　文部省編輯局直轄乙部圖書關東取扱所

（定價金貳拾八錢）

版權所有

文部省編輯局

明治二十二年一月十日出版

賣捌人

宮城縣仙臺區國分町五丁目	國分行道
愛知縣名古屋區玉屋町三丁目	片野東四郎
長野縣長野町	西澤喜太郎
愛媛縣宇和島本町	石崎忠八
栃木縣宇都宮大工町	小林八郎
岡山縣岡山區西中山下町	稻川長典
岩手縣盛岡紙町	村井彌兵衛
山形縣山形十日町	荒井清太郎
德島縣德島八百屋町	松浦德二郎
新潟縣長岡表三ノ町	覺張治平
静岡縣静岡東鷹匠町	川上辰二郎
石川縣金澤區安江町	近田太三郎
石川縣金澤區上堤町	城森文治
三重縣津西町	柴田善左衛門
山口縣山口中市町	梅田治輔

秀英舍印刷