明治三十四年二月五日
文部省檢定濟
中學校數學科用教科書

高等師範學校教授理學士
國枝元治 編

代數學教科書

和文

下卷

東京
金港堂書籍株式會社
發兌

代數學教科書下卷

目　次.

代數學教科書

下卷

第十章 二次方程式.

118. 量ノ計算ニ代數學ヲ應用シテ問題ヲ解クコノ如何ニ便利ナルカハ前ノ諸章ニ於テ略知ルコヲ得タリ. 偖是迄ハ問題ヲ解クニ當リテ得タル方程式ハ皆一次方程式カ或ハ一次方程式ニテ解キ得ベキ方程式トナル格段ナル場合ノミナリキ,然レモ一般ニ應用問題ヲ解クニ當リテ得ル處ノ方程式ハ恒ニ斯ノ如シトイフコヲ得ズ,實際ニハ種々ノ場合アルナリ.

例令バ次ノ如キ問題モアルベシ.

某數アリ,之ヨリ6ヲ減ジタル差ト此

二倍ヨリ5ヲ減ジタル差トノ積ハ此數ヨリモ7少ナキ數ト此數ヨリモ14多キ數トノ積ニ等シトイフ,某數トハ如何.

xヲ以テ某數ヲ表ハサン,然ルトキハ題意ニ依リ

$$(x-6)(2x-5)=(x-7)(x+14).$$

ヲ得.

或ハ $x^2-24x+128=0.$

此方程式ヲ解ケバ所要ノ數xヲ得ベシ,然ルニ此方程式中ニハ未知數xノ一次ノ項ト二次ノ項トヲ含ミ,此ノ如キ方程式ノ解方ハ未タ知ラザル處ナリ,故ニ之ヨリ此ノ如キ形ノ方程式ノ解方ヲ研究セントス.

119. 二次方程式トハ其總テノ項ヲ一邊ニ集メタルモノガ未知數ニ付キテ二次ノ整式トナル方程式ヲイフナリ.

例令バ前節ニ得タル方程式ハ二次方程式ナリ.

與ヘラレタル二次方程式ノ總テノ項ヲ左邊ニ移セバ一般ニ次ノ形トナル可シ.

$$ax^2+bx+c=0.$$

此處ニ於テxハ未知數,a, b, cハ既知數ニシテ且ツ$a\neq 0$ナリ.

又$x^2=9$ノ如キ方程式アルベシ,此ノ如ク未知數ノ一次ノ項ヲ含マザル二次方程式ヲ**純二次方程式**ト稱シ,其一般ノ形ハ$ax^2=d$ナリ.

又$2x^2-4x-6=0$ノ如ク未知數ノ一次ノ項ト二次ノ項トヲ含ム方程式ヲ**雜二次方程式**ト稱ス.

120. 純二次方程式ノ解法ハ畢竟其平方ガ與ヘラレタル數ニ等シキ樣ナル數ヲ見出スヿ,即チ與ヘラレタル數ノ平方根ヲ見出スヿニ歸スベシ.

例令バ $x^2=9$ ナル純二次方程式ハ x ニテ代表セル數ノ平方ガ 9 ニ等シキヿヲ表ハシ,從テ此方程式ヲ解クトイフヿハ平方ガ 9 トナル數ヲ見出ストイフヿナリ,然ルニ 3 ノ平方モ 9 ニシテ −3 ノ平方モ亦 9 ニ等シ,故ニ $x^2=9$ ノ根ハ +3 或ハ −3 ナリ,何トナレバ $x=+3$ モ $x=-3$ モ何レモ此方程式ニ適合スレバナリ,此事ヲ簡單ニ表ハス爲メニ次ノ記号ヲ用ウ.

$$x=\pm 3.$$

此 ±3 トアルハ +3 或ハ −3 ノ二ツアルヿヲ示セルナリ.

例. $3x^2=75$ ヲ解ク.

$$3x^2=75.$$

或ハ $$x^2=\frac{75}{3}=25.$$

然ルニ $$5^2=(-5)^2=25.$$

故ニ $$x=\pm 5.$$

121. 次ニ雜二次方程式ノ解法ヲ示サン.

例 1. $(x-4)^2=1$ ヲ解ク.

此方程式ニ於テ $x-4$ ヲ一ノ未知數ト考フレバ之ハ純二次方程式ナリ,因テ平方ニ開キテ

$$x-4=\pm 1.$$

故ニ $x-4=1$ 或ハ $x-4=-1$.

因テ $x=1+4=5$ 或ハ $x=-1+4=3$, 故ニ $x=5$ 或ハ 3 ナリ.

此例ニ於テ方程式ハ純二次方程式ト見做シ得ル形ヲ有スルヲ以テ直チニ解クヿヲ得タレ𪜈,一般ニ雜二次方程式ハ此ノ如キ形ヲ有セザルナリ.

例令バ此例ニ於ケル方程式ヲ書キ直セバ

$$x^2-8x+16=1.$$

或ハ $$x^2-8x+15=0.$$

通常此ノ如キ形式ヲ有スルナリ,之ヲ解ク方法ハ如何ニトイフニ,先ヅ之ヲ純二次方程式ト見做シ得ル形ニ書キ直スナリ,即チ次ノ如クス.

此方程式ノxヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$x^2-8x=-15.$$

此兩邊ニxノ係數ノ半分-4ノ平方即チ16ヲ加フレバ　$x^2-8x+16=-15+16=1.$

此左邊ハ$x-4$ノ平方ナリ,故ニ

$$(x-4)^2=1.$$

或整式(例令バ$x-4$)ノ平方(例令バ$x^2-8x+16$)ヲ**完全ナル平方式**或ハ單ニ**完全ナル平方**ト稱ス.

一般ニ　$(x+\frac{a}{2})^2=x^2+2\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}$

$$=x^2+ax+\frac{a^2}{4}.$$

$x^2+ax+\frac{a^2}{4}$ハ完全ナル平方ナリ,故ニ今x^2ノ係數ハ1ナル二次式x^2+axニ其xノ係數ノ半分$\frac{a}{2}$ノ平方即チ$\frac{a^2}{4}$ヲ加フレバ完全ナル平方ヲ得ベシ;例令バ上例ニ於テx^2-8xニ-4ノ平方16ヲ加ヘテ完全ナル平方$x^2-8x+16$ヲ得タルガ如シ.

二次方程式ノ解法ハ完全ナル平方ヲ

作ルニ歸スルナリ.

例 2. $x^2-4=3x-6$ヲ解ケ.

先ヅxヲ含ム項ヲ左邊ニxヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ　$x^2-3x=-6+4=-2.$

兩邊ニxノ係數ノ半分$-\frac{3}{2}$ノ平方$\frac{9}{4}$ヲ加フレバ

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=-2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4}.$$

或ハ　$(x-\frac{3}{2})^2=\frac{1}{4}.$

平方ニ開ケバ　$x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}.$

項ヲ移セバ　$x=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}.$

故ニ$x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$, 或ハ$x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$, 即チ$x=2$或ハ1ナリ.

例 3. $2x^2-3=-5x$ヲ解ケ.

xヲ含ム項ヲ左邊ニxヲ含マザル項ヲ右邊ニ移シ,兩邊ヲ2ニテ除スレバ

$$x^2+\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}.$$

xノ係數ノ半分$\frac{5}{4}$ノ平方即チ$\frac{25}{16}$ヲ兩邊ニ加フレバ

$$x^2+\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=\frac{3}{2}+\frac{25}{16}=\frac{49}{16}.$$

或ハ　$(x+\frac{5}{4})^2=(\frac{7}{4})^2.$

平方ニ開ケバ　$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}.$

故ニ　$x=-\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}=\frac{1}{2}$或ハ$-3.$

例 4. $x^2-25x+37=1-13x$ ヲ解ケ.

x ヲ含ム項ヲ左邊ニ x ヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$x^2-25x+13x=1-37.$$

或ハ

$$x^2-12x=-36.$$

兩邊ニ x ノ係數ノ半分ノ平方即36ヲ加フレバ

$$x^2-12x+6^2=-36+36=0.$$

$$(x-6)^2=0.$$

平方ニ開ケバ

$$x-6=0.$$

$$x=6.$$

例1ヨリ3迄ニ於テハ與ヘラレタル方程式ヲ解キテ恒ニ二ツノ根ヲ得タリ,然ルニ此例4ニ於テハ得ル處ノ根ハ唯一ツナリ,左レ𪜈此ノ如キ場合ニ於テハ此二次方程式ハ二ツノ相等シキ根ヲ有ストイフナリ.

演習問題 41.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $2x^2+16=x^2+41.$
2. $(2x+2)(x+3)=x^2+8x+22.$
3. $x^2-1=20x-97.$
4. $4x^2-5x-24=3x^2-10.$

5. $5x^2-21x+1=5-2x.$
6. $x^2-11x=2x^2-x+24.$
7. $x^2+5x=14.$
8. $3x^2-x=2x^2+72.$
9. $x+156=x^2.$
10. $81-x^2=18x-2x^2.$
11. $3x^2-40x=4x-121.$
12. $10x^2-6=6-x-10x^2.$
13. $4x-3=4x^2-8x+6.$
14. $6x^2-21x=5x^2-104.$
15. $22x+6=x^2+11x-36.$
16. $5x^2+x=5-6x-x^2.$

122. 無理數. 前節ニ於テ純二次方程式及ビ雜二次方程式ヲ解クニ當リテ或數ヲ平方ニ開クヿヲ行ヘリ,而シテ此平方根ハ恒ニ見出サレタルナリ.

如何ニモ整數或ハ分數ノ平方ハ又一ノ整數或ハ分數ニ相違ナケレ𪜈,此逆即チ一ノ整數或ハ分數ノ平方根ハ亦恒ニ一ノ整數或ハ分數ナリトハイフヿヲ得ズ;例令バ2ノ平方根,3ノ平方根,11ノ平方根ノ如キハ一ノ分數或ハ整數ニ等シカラズシテ之等ハ學生等ノ既ニ算術ニ於テ出逢ヒタル處ノ開キ切レザル數ナリ.

從テ二次方程式ヲ解クニ當リテ開キ切レザル數ノ平方根ヲ要スル塲合屢々是アリ.

此ノ如ク開キ切レザル數ノ根,即チ其根ノ値ハ一ノ整數或ハ分數ニテ表ハスヿヲ得ザル正數ノ根ヲ**無理數**ト稱スルヿハ已ニ第一章ニ於テ知ル處ナリ.

例令バ2ノ平方根,3ノ平方根,11ノ平方根ノ如キ何レモ無理數ニシテ次ノ如キ符號ヲ以テ之ヲ表ハス,即チ$\sqrt{2}$或ハ$\sqrt{2}$ニテ2ノ平方根ヲ表ハシ,$\sqrt{3}$或ハ$\sqrt{3}$ニテ3ノ平方根ヲ表ハス.

一般ニ$\sqrt{a}$或ハ$\sqrt{a}$ニテaノ平方根ヲ表ハシ,aガ正數ニシテ或整數或ハ分數ノ平方ニ等シカラザル時ニハ$\sqrt{a}$ハ一ノ無理數ナリ.

一般ニ無理數$\sqrt{a}$トハ其平方ガaニ等シキ數ヲ意味セルナリ.

無理數ハ亦負數或ハ分數ノ如ク數ト

イフ辭ノ意味ヲ擴張シテ得タル一種ノ新數ニシテ整數或ハ分數トハ全ク別種ノ數ナリ,從ツテ如何ナル整數或ハ如何ナル分數ニモ等シカラザル數ナリ,其演算ノ方則ハ整數或ハ分數ト同法則ニ從フモノト規定ス.

注意. 此處ニ於テ論ズル無理數$\sqrt{a}$ハ後章ニ於テ論ズル無理數ノ格段ナル塲合ナリ.

無理數ニ對シテ整數或ハ分數ヲ**有理數**ト稱ス.

有理數ニ正負ノ別アル如ク無理數ニモ亦正負アルナリ,例令バ$+\sqrt{a}$或ハ單ニ$\sqrt{a}$ハ正ノ無理數ニシテ$-\sqrt{a}$ハ負ノ無理數ナリ.

偖正數ノ平方モ正數ニシテ,負數ノ平方モ亦正數ナルヲ以テ一ツノ正數ノ平方根ハ二ツアリ,一ハ正ニシテ他ハ負ナ

リ,例令バ4ノ平方根ハ2或ハ-2ノ二ツナリ,同樣ニ2ノ平方根ハ$\sqrt{2}$或ハ$-\sqrt{2}$ノ二ツナリ.

一般ニ或正數aノ平方根ハ$\sqrt{a}$或ハ$-\sqrt{a}$ノ二ツナリ.

又代數學ニ於テハ文字ノ代表セル數ガ實際開キ切ルヽト否トニ拘ハラズ根號ヲ有スル數ヲ無理數ト稱ス.

例令バ$\sqrt{a}$ヲ無理數ト稱シ,aノ代表セル數ノ開キ切ルヽト否トニハ關セザルナリ.

即チ開キ切レザル形ヲ有スルキニハ根號ヲ附シテ其根ヲ表ハシ之ヲ無理數ト稱スルナリ.(後章ヲ參照セヨ).

二數a及ビbノ平方根ノ積或ハ商ハ又一數ノ平方根ノ形ニ表ハスコヲ得.次ノ如シ.

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}.\quad 又\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

何トナレバ$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2=ab$, 故

$=\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}.$

又$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}$. 故ニ$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

123. 二次方程式ヲ解クニ當リ開キ切レザル場合ニハ無理數ヲ用ウルコトニヨリテ其根ヲ見出スコヲ得ルナリ.

例 1. $3x^2-4x+1=2x^2-4x+8$ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ニ於テxヲ含ム項ヲ左邊ニ,xヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ次ノ方程式ヲ得.

$$x^2=7.$$

平方ニ開キテ　$x=\pm\sqrt{7}.$

即チ所要ノ根ハ無理數$\sqrt{7}$或ハ$-\sqrt{7}$ノ二ツナリ.

注意. 代數學ニ於テハ無理數$\sqrt{a}$ハ其儘書下スナリ,例ヘバ$\sqrt{7}$ハ其儘$\sqrt{7}$ト記スルヲ常トス,或特別ナル必要ノ存スルニアラザレバ決シテ此開キ切レザル數ヲ無理ニ開カザルナリ,併シ或特別ナル場合例令バ此無理數ノ値ヲ小數點以下三位マデ求ムトイフ如キ場合ニハ,算術ニ於ケル開平法ノ方法ニヨリテ,所要

ノ位マデ開キテ其値2·646ヲ見出スナリ,然レドモ$\sqrt{7}$ハ決シテ2·646ニハ等シカラザルナリ,初學者誤解セザランコトヲ要ス.

又$x^2=7$ヲ開キテ$\pm x=\pm\sqrt{7}$トハ書スベカラズ,直チニ$x=\pm\sqrt{7}$ト書スベシ,之レ方程式ノ意味ニヨレバxハ其平方ガ7トナル如キ數ヲ表ハセバナリ,從テ一般ニ$x^2=a$ヲ開キテ直チニ$x=\pm\sqrt{a}$ト記スベシ.

例 2. $x^2-6x+2=0$ヲ解ク.

xヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$x^2-6x=-2.$$

兩邊ニxノ係數ノ半分ノ平方ヲ加ヘテ

$$x^2-6x+9=-2+9=7.$$

平方ニ開キテ

$$x-3=\pm\sqrt{7}.$$

故ニ

$$x=3+\sqrt{7}\text{或ハ}3-\sqrt{7}.$$

124. 虛數. 前諸節ニ於テハ正數ノ平方根ニ付キテノミ論ゼリ,併シ二次方程式ヲ解クニ當リ負數ノ平方根ヲ要スル場合モ往々是アリ.

例令バ$x^2=-3$ヲ解カントスルニ當リ

-3トイフ負數ノ平方根ヲ要スルナリ,即チxハ-3ノ平方根ニ等シキナリ,然ルニ是迄知レル處ノ整數分數及ビ無理數ノ中何レニテモ其平方ハ常ニ正數ニシテ決シテ負數ナラズ,因テ-3ノ如キ負數ノ平方根ハ整數分數及ビ無理數中ニハ存セザルナリ,是ニ於テカ又數トイフ辭ノ意味ヲ擴張シテ-3ノ如キ負數ノ平方根$\sqrt{-3}$ノ如キモノヲ一種ノ數ト見做スナリ. 一般ニaガ正數從テ$-a$ガ負數ナルトキニ$\sqrt{-a}$ヲ一種ノ數ト見做シ,此新ナル數ハ又整數分數及ビ無理數ト同ジ規則ニ從フモノト規定ス,而シテ$\sqrt{-a}$トイフ數ハ其平方ガ負數$-a$ナル數ヲ意味ス.

$\sqrt{-a}$ノ如キ新數ヲ稱シテ**虛數**ト名ヅク.

偖又$-a$ノ平方根ハ二ツアルベシ,即

ヲ $\sqrt{-a}$ ト $-\sqrt{-a}$ トナリ,何トナレバ $\sqrt{-a}$ ノ平方モ,$-\sqrt{-a}$ ノ平方モ何レモ $-a$ ニ等シケレバナリ.

虛數 $\sqrt{-a}$ ハ通例次ノ如ク記スルヲ便利トス.

$$\sqrt{-a}=\sqrt{-1\times a}=\sqrt{-1}\sqrt{a}.$$

$\sqrt{-1}$ ヲ表ハスニ通常 i トイフ符徵ヲ用ウ.

即チ $$\sqrt{-a}=i\sqrt{a}.$$

虛數ニ對シテ從來ノ數ヲ**實數**ト稱ス.

a ト b トガ實數ヲ表ハストキニ $a+ib$ ノ如キ形ノ數ヲ**複素數**ト稱ス. 例令バ $2+3i$ ハ一ノ複素數ナリ.

125. 虛數ヲ用ウレバ二次方程式ノ根ヲ見出スヿヲ得ル場合少ナカラズ.

例 1. $x^2=-3$ ヲ解ク.

此場合ニ於テハ直チニ

$$x=\pm\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}.$$

即チ $x=i\sqrt{3}$ 或ハ $-i\sqrt{3}$.

例 2. $x^2-4x+13=0$ ヲ解ク.

x ヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$x^2-4x=-13.$$

兩邊ニ x ノ係數ノ半分ノ平方 $(-2)^2$ ヲ加ヘテ

$$x^2-4x+(-2)^2=-13+4=-9.$$

平方ニ開ケバ

$$x-2=\pm\sqrt{-9}.$$

即チ $x=2+\sqrt{-9}$ 或ハ $2-\sqrt{-9}$.

或ハ次ノ如ク記ス.

$$x=2+3i \text{ 或ハ } 2-3i.$$

126. 以上ノ諸節ニ於テ示セル如ク,一般ニ二次方程式ヲ解クニハ次ノ法則ニ從フベシ.

(1). 未知數 x ヲ含ム諸項ヲ一邊ニ,未知數ヲ含マザル項ヲ他邊ニ移シ,同類項ヲ約スベシ.

(2). 次ニ x^2 ノ係數ヲ以テ兩邊ヲ除ス

ベシ.

(3). 然ル後 x ノ係數ノ半分ノ平方ヲ兩邊ニ加ヘ而シテ平方ニ開クベシ.

(4). 斯クシテ得タル一次方程式ヲ解クベシ.

演習問題 42.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $5x^2+14x=55.$
2. $3x^2+35=22x.$
3. $13x^2+10x=30-x.$
4. $3x^2+2x=30+x-5x^2.$
5. $7x-6=6x^2-5.$
6. $x^2-29x+5=11-4x^2.$
7. $x+11=6x^2-11.$
8. $6(x^2-3)=11x-8.$
9. $(2x-3)^2=8x.$
10. $3x^2-2x=2x+39.$
11. $(x-1)(2x-3)=4x^2-4.$
12. $\frac{2-x^2}{2}-\frac{x-x^2}{2}=1-\frac{5}{2}x+x^2.$
13. $(x-4)(3x-1)=x^2+3x-2.$
14. $x^2-4=\frac{x-9}{3}.$
15. $21x^2=27x+108.$
16. $12x^2-23x+10=0.$
17. $5x^2-3x=180-7x^2.$
18. $2(x-3)=3(x+2)(x-3).$
19. $(5x-7)(2x-13)=(x-5)(7x-5).$
20. $4(x+2)-5(x-2)=(x-1)(x+2).$

21. $5(9-2x)-4(3-x)(9-2x)=5(3-x).$
22. $7x^2-26=(2x-2)(4x+7).$
23. $3x^2-4=21x-6.$
24. $5x+7=(x-1)(3x+2).$
25. $3x-1=(x+1)(4x+7).$
26. $x^2-9=(2x-1)(2x-7).$

127. 一般ニ二次方程式ハ次ノ如キ形ヲ有ス.

$$ax^2+bx+c=0.$$

此處ニ於テ a, b, c ハ既知數ヲ表ハシ且ツ $a\neq 0$ ナリ, 若シ $a=0$ ナルトキニハ最早之ハ二次方程式ニ非ズシテ一次方程式ナリ.

上ノ方程式ヲ一般ナル二次方程式ト稱ス.

此方程式ニ於テ x ヲ含マザル項ヲ右邊ニ移セバ

$$ax^2+bx=-c.$$

x^2 ノ係數 a ニテ兩邊ヲ除スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

x ノ係數ノ半分ノ平方 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ヲ兩邊ニ加

フレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

或ハ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

平方ニ開キテ

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

故ニ $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

故ニ此方程式ノ根ハ

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 或ハ } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ノ二ナリ

是レ二次方程式ノ根ノ公式ニシテ,之ヲ用ウレバ如何ナル二次方程式ノ根ニテモ容易ニ求ムルヿヲ得ルナリ. 學者タル者宜ク此公式ヲ記憶スベシ.

例. $6x^2-13x+2=0$ ヲ解ケ.

上ノ公式中ニ $a=6, b=-13, c=2$ ト置キテ得ル所ノ數ガ所要ノ根ナリ. 即チ

$$\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4.6.2}}{2.6}, \text{ 即チ } \frac{13\pm\sqrt{169-48}}{12},$$

$$\text{即チ } \frac{13\pm11}{12}, \text{ 即チ } 2 \text{ 或ハ } \frac{1}{6}$$

ナリ.

128. 前節ニ於テハ二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ハ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 及ビ $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ナルヿヲ見出シタリ,但シ $a\neq0$ ナリトス.

(1). b^2-4ac ノ數値ガ完全ナル平方數ナルトキニハ根ハ有理數ニシテ相異ナルナリ.

(2). $b^2-4ac=0$ ナルトキニハ根ハ $-\frac{b}{2a}$ トナル,此場合ニハ二ツノ等根ヲ有ストイフナリ.

b^2-4ac ガ 0 ナラザルトキニハ二根ハ不等ナルヿ明カナリ.

是ニ由テ $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ノ相等シキ爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ $b^2-4ac=0$ ナリ.

(3). b^2-4ac ノ數値ガ正ニシテ完全ナ

ル平方數ニアラザルトキニハ根ハ無理數 $\sqrt{b^2-4ac}$ ヲ含ムベシ.

二次方程式ノ一根ガ無理數ヲ含ムトキニハ他ノ根モ亦之ヲ含ム.

(4). b^2-4ac ノ數値ガ負數ナル場合ニハ根ハ虛數即チ $\sqrt{-(4ac-b^2)}$ ヲ含ム.

二次方程式ノ一根ガ虛數ヲ含ムトキニハ他ノ根モ亦之ヲ含ム.

129. 因數分解ノ應用. 一ノ代數式ノ因數ノ一ガ0トナリ,他ノ總テノ因數ガ0カ又ハ有限※ノ數値ヲ有スルトキニハ此代數式ハ0トナルベシ.

例 今ハ $(x-3)(2x+1)$ ナル代數式ノ因數ノ一ナル $(x-3)$ ガ零トナル樣ニ x ノ數値ヲ選ムトキニハ此式ノ數値ハ0トナルベシ.

今 $x=3$ トスレバ $0\times(2\times3+1)=0\times7=0$ ナリ.

即チ $x=3$ トスルトキニハ $(x-3)(2x+1)=0$ ナル故ニ3ハ $(x-3)(2x+1)=0$ ト云フ方程式ノ根ナリ.

※(測リ得ベカラザル程大ナラザルコトヲイフ)

上例ニ於テ見ル如ク一ノ方程式ノ總テノ項ヲ其一邊ニ移シテ之ヲ因數ニ分解シタル場合ニ於テ其因數ノ何レカ一ツヲ0ニスル如キ未知數 x ノ値ハ此方程式ノ根ナリ.

是ニ由テ因數分解ヲ用ヰテ二次方程式ヲ解クコトヲ得ベシ. 次ニ例ヲ擧ゲテ之ヲ示サン.

例 1. $(x-3)(2x+1)=0$ ノ根ヲ求ム.

$x-3=0$ 即チ $x=3$.

次ニ $2x+1=0$ 即チ $x=-\frac{1}{2}$.

即チ $x=3$ 或ハ $-\frac{1}{2}$ ナリ.

例 2. $4x^2-3=2x+3x^2$ ノ根ヲ求ム.

各項ヲ左邊ニ移セバ

$$x^2-2x-3=0.$$

左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$(x-3)(x+1)=0.$$

因テ $x-3=0$ 或ハ $x+1=0$.

即チ $x=3$ 或ハ -1.

例 3. $(x-4)(x+1)=2(x-2)$ ヲ解ク.

先ヅ乘積ヲ見出セバ

$$x^2-3x-4=2x-4.$$

各項ヲ左邊ニ移シテ

$$x^2-5x=0.$$

或ハ $x(x-5)=0.$

故ニ $x=0$ 或ハ $x-5=0.$

即チ $x=0$ 或ハ $5.$

注意. 因數分解ニヨリテ二次方程式ヲ解クコトハ視察ニ依リテ容易ニ因數ヲ發見シ得ル塲合ニ限ルベシ,一般ノ塲合ニハ 126 節ニ擧ゲタル方法ニ從フカ或ハ 127 節ノ公式ヲ用ヰテ解クモノト知ル可シ.

演習問題 43.

因數分解ニヨルカ或ハ公式ヲ用ヰテ次ノ方程式ヲ解ク.

1. $(x-2)(x+1)=0.$
2. $(3x-1)(2x+7)=0.$
3. $x^2-9x+18=0.$
4. $2x^2+13x-7=0.$

5. $x^2-x+2=x+17.$
6. $2x^2+15x-27=0.$
7. $(x+7)(2x-3)=5(x+7).$
8. $7x(x-3)=2x-6.$
9. $x^2-2x-1=0.$
10. $(2x-7)(11x+3)=0.$
11. $2x^2+3x-2=x^2+2x-1.$
12. $x^2-7x-78=0.$
13. $3x^2+x-2=0.$
14. $10x^2-20x+8=9x-5x^2-4.$
15. $7x^2+26x+20=5.$
16. $39x^2+62x-5=0.$
17. $3x^2-6=4x-5.$
18. $5x^2-3x=7x+10.$
19. $\frac{x-1}{3}+\frac{x^2-3}{2}=3.$
20. $\frac{x+1}{3}+\frac{x^2+3}{2}=1.$
21. $x^2-4x+8=0.$
22. $17x^2-125x-88=0.$
23. $(x-1)^2=(2x-3)(x+4).$
24. $15x^2-8x-63=0.$
25. $x^2+(a-c)x-ac=0.$
26. $x^2-2ax+a^2+b^2.$
27. $x^2-2bx+b^2-c^2=0.$
28. $x^2-3ax+2a^2=0.$
29. $\frac{x^2-1}{3}-\frac{x-2}{2}+x^2=\frac{1}{2}(x-1)(2x-5).$
30. $(x-3)(x-5)=(2x+8)(6x-1).$

分數方程式.

130. 方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含マザル同數ヲ乘ズルモ其根ノ値ハ不變ナリ,然レドモ若シ方程式ノ兩邊ガ整式ナルトキニ未知數ヲ含ム代數式ヲ乘ズレバ餘分

ノ根ヲ引致ス,而シテ此餘分ノ根ハ乘ジタル式ヲ0ニスル未知數ノ値ナリ.

例令バ $3x=4$ ノ根ハ $x=\frac{4}{3}$ ナリ,今此兩邊ニ $x-7$ ナル整式ヲ乘ズレバ

$$3x(x-7)=4(x-7).$$

或ハ $$(x-7)(3x-4)=0.$$

故ニ此新方程式ノ根ハ $x=\frac{4}{3}$ ト $x=7$ トナリ,然ルニ此7トイフ根ハ餘分ノ根ニシテ之ハ兩邊ニ乘ジタル整式 $x-7$ ヲ0ニスル x ノ値ナリ.

與ヘラレタル方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含ム同一ノ因數アルトキ此因數ニテ兩邊ヲ除シテ得ル方程式ノ根ハ原方程式ノ總テノ根ヨリモ不足セリ,而シテ此不足ノ根ハ兩邊ヲ除シタル所ノ式ヲ0ニスル未知數ノ値ナリ.

例令バ $x^2-9=5x-15$ ヲ書キ直セバ

$$(x-3)(x+3)=5(x-3).$$

兩邊ヲ $x-3$ ニテ除スレバ

$$x+3=5.$$

或ハ $$x=2.$$

即チ根トシテ2ヲ得タリ,然ルニ原方程式ノ根ハ2ノ外ニ尙ホ3トイフ根ヲ有ス,此3ハ除數タリシ整式 $x-3$ ヲ0ニスル未知數ノ値ナリ.

故ニ未知數ヲ含ム式ヲ以テ妄リニ方程式ノ兩邊ヲ乘除ス可カラズ.

131. 分數式ヲ含ム方程式即チ分數方程式ノ或モノハ二次方程式ニ直シテ之ヲ解クヿヲ得. 次ニ例ヲ以テ之ヲ示サン.

例 1. $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x-1}=1$ ヲ解ク.

此總テノ項ヲ左邊ニ移シテ加ヘ合スレバ

$$\frac{2(x-1)-3(x-3)-(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)}=0.$$

或ハ $$\frac{4+3x-x^2}{(x-3)(x-1)}=0.$$

此左邊ノ分數式ハ既約分數式ナリ,偖此分數式ノ分子ガ0トナラバ此分數式ハ0トナルベシ,即チ此分子ヲ0ニスル x ノ値ハ此方程式ニ適合スベシ,即チ次ノ方程式

$$4+3x-x^2=0.$$

ノ根ガ所要ノ根ナリ. 偖此根ハ

$$x=4 \text{ 或ハ } -1.$$

故ニ4或ハ−1ガ所要ノ根ナリ.

注意. 上ノ如ク分子ヲ0ニ等シク置キテ作リタル方程式ノ根ガ所要ノ根タルヿヲ得ル爲ニハ,原方程式ノ各項ヲ一邊ニ移シ,之ヲ加ヘ合シテ得タル分數式ガ既約分數式タルトキニ限ルナリ,若シ斯クシテ得タル分數式ガ既約分數式ナラザルトキニハ先ヅ之ヲ既約分數式ニ化シタル後上ノ手續ヲ行フベシ.

偖分數方程式ヲ解クニ當リ多クノ場合ニハ各分母ノ最小公倍數ヲ其兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヒ去リ而シテ得ル處ノ方程式ヲ解キテ可ナリ,之ハ多クノ場合ニハ與ヘラレタル方程式ノ各項ヲ一邊ニ移シ,之ヲ集メテ得ル既約分數式ノ分母ハ原方程式中ノ各分母ノ最小公倍數ニ等シケレバナリ.

或ル場合ニハ斯クシテ得タル根ノ中

ニハ原方程式中ノ分母ノ最小公倍數ヲ0ニ等シカラシムルモノアルヿアリ,斯カル場合ニハ此方法ヲ用ウベカラズ,改メテ以前ノ方法ニ從ヒ原方程式ノ各項ヲ一ツニ集メ之ヲ既約分數式ニ化シテ後其分子ヲ0ニ等シト置キテ得ル處ノ方程式ヲ解クベシ.

例 2. $\frac{x^2-8}{(x-2)(x-3)}+1+\frac{4}{x-3}=0$ ヲ解ケ.

分母ノ最小公倍數$(x-2)(x-3)$ヲ乘ズレバ

$$x^2-8+(x-2)(x-3)+4(x-2)=0.$$

或ハ $$2x^2+x-10=0.$$

此方程式ヲ解キテ$x=2$或ハ$-\frac{5}{2}$ヲ得,然レドモ$x=2$トイフ値ハ分母ノ最小公倍數$(x-2)(x-3)$ヲモ0トナス故ニ此解ハ正當ナラズ,故ニ此場合ニハ原方程式ノ各項ヲ集メテ $$\frac{2x^2+x-10}{(x-2)(x-3)}=0.$$

ヲ得,左邊ヲ既約分數式ニ化シテ

$$\frac{2x+5}{x-3}=0.$$

ヲ得,此分子ヲ0ト置キテ得ル方程式ノ根即チ$x=-\frac{5}{2}$ガ所要ノ根ナリ.

例 3. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x-4}{x-3}=\frac{2x-5}{x-2}$ ヲ解ケ.

分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$(x+2)(x-3)(x-2)+(x-4)(x+1)(x-2)=(2x-5)(x+1)(x-3).$$

或ハ

$$x^3-3x^2-4x+12+x^3-5x^2+2x+8=2x^3-9x^2+4x+15.$$

或ハ $$x^2-6x+5=0.$$

此方程式ヲ解キテ $x=1$ 或ハ 5 ヲ得,而シテ何レモ分母ノ最小公倍數 $(x+1)(x-3)(x-2)$ ヲ 0 トナサヾルヲ以テ此等ノ値ハ方程式ノ根ナリ.

以上ノ諸例ニ示セル如ク分數式ヲ含ム方程式ヲ解クニハ次ノ法則ニ從フベシ.

與ヘラレタル方程式ノ各項ヲ一邊ニ移シ之ヲ集メテ一ツノ既約分數式ニ化シ而シテ後此分數式ノ分子ヲ 0 ニ等シト置キテ得ル處ノ方程式ヲ解クベシ.

若シ所得ノ既約分數式ノ分子ガ未知數ヲ含マザルトキニハ與ヘラレタル方程式ハ根ヲ有セザルナリ.

又多クノ場合ニハ方程式ノ各項ヲ集メテ一ツノ既約分數式ニ化スル手數ヲ省略センガ爲メニ各分母ノ最小公倍數ヲ兩邊ニ乘ジテ分母ヲ拂ヒ去リ而シテ得ル處ノ方程式ヲ解キテ可ナリ,併シ前ニモ注意セル通リ斯クシテ得タル根ガ分母ノ最小公倍數ヲ 0 ニ等シカラシムルトキニハ上ニ擧ゲタル一般ノ方法ニ從ハザル可カラズ.

演習問題 44.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $x+\frac{1}{x+1}=\frac{3}{2}$.
2. $\frac{x-1}{2}+\frac{2}{x-1}=\frac{10}{3}$.
3. $\frac{x+1}{4}-\frac{4}{x+5}=\frac{1}{2}$.
4. $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{7}{6}$.
5. $\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}$.
6. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{29}{10}$.
7. $\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{26}{15}$.
8. $\frac{1}{x-3}-\frac{x+3}{x+1}+\frac{2}{5}=0$.
9. $\frac{7}{x+3}+\frac{x-4}{5-x}=\frac{2}{3}$.
10. $\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{11}{12}$.
11. $\frac{5}{x+2}-\frac{10}{x+11}=\frac{2}{3x}$.
12. $\frac{x+1}{x+3}-\frac{2}{3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{5}{3}$.

13. $\frac{4}{2x+1}+\frac{5}{2(x+1)}=\frac{12}{2x+3}$.

14. $\frac{3}{2x-1}+\frac{4}{2x-3}=\frac{15}{2x+3}$.

15. $\frac{3(x-1)}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x-1}=5$.

16. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+1}{x+5}=1$.

17. $\frac{x-1}{x(x-2)}-\frac{8-7x}{8x}=0$.

18. $\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}+2=\frac{x+\frac{5}{3}}{8-\frac{5}{3}}+\frac{9}{11}$.

19. $\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}$.

20. $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{10x}{4x^2-1}$.

21. $\frac{1}{x^2-x}+\frac{3}{3x^2+4x}=\frac{9}{2x^2}$.

22. $\frac{1}{x^2-36}-\frac{1}{6-x}=\frac{1}{9}+\frac{1}{x+6}$.

23. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=2\frac{x+3}{x-3}$.

24. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{2x+13}{x+16}$.

25. $\frac{x-1}{x+2}+\frac{3x-2}{x+4}=\frac{5x-4}{x+4}$.

26. $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+1}{x+4}-\frac{x+4}{x+1}=\frac{2}{3}$.

27. $\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{x}{(x+1)(x-2)}=\frac{x}{(x^2-1)(x-2)}$.

28. $x+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{x}$.

29. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$.

30. $\frac{a}{a+x}+\frac{a}{a-x}=4$.

31. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

32. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

33. $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

34. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{c-a}+\frac{1}{c-b}$.

35. $\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}=\frac{c}{c-a}+\frac{c}{c-b}$.

36. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+c}{x-a-c}+\frac{b-c}{x-b+c}$.

無理方程式.

132. 無理式ヲ含ム方程式即チ無理方程式ノ或者ハ二次方程式ヲ用ヰテ之ヲ解クコヲ得. 今例ヲ以テ之ヲ示サン.

例 1. 方程式 $1+\sqrt{x^2-3x+3}=2x$ ヲ解ケ.

項ヲ移セバ $\sqrt{x^2-3x+3}=2x-1$.

兩邊ヲ自乘ズレバ

$$x^2-3x+3=4x^2-4x+1.$$

或ハ $3x^2-x-2=0$.

此二次方程式ヲ解キテ $x=1$ 或ハ $-\frac{2}{3}$ ヲ得,偖此等ノ値ガ與ヘラレタル方程式ニ果シテ適合スルヤ否ヤヲ吟味スルヲ要ス.

先ヅ $x=1$ ト置ケバ左邊ハ $1+\sqrt{1-3+3}=2$ トナリ,右邊モ 2 トナルヲ以テ此値ハ方程式ニ適合ス,次ニ $x=-\frac{2}{3}$ ト置クキハ左邊ハ $1+\sqrt{\frac{4}{9}+2+3}=1+\frac{7}{3}=\frac{10}{3}$ トナリ,右邊ハ $-\frac{4}{3}$ トナルヲ以テ此値ハ方程式ニ

適合セズ,因テ$x=1$ハ所要ノ根ナレトモ$x=-\frac{2}{3}$ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナラズ.

何故ニ此場合ニ於テ$x=-\frac{2}{3}$ノ如キ原方程式ニ適合セザル値ヲ得タルヤト云フニ,夫ハ全ク方程式ノ解法ノ不完全ニ歸スルナリ,即チ根ヲ發見スル途中ニ於テ方程式ノ兩邊ヲ自乘シタルヿニ因ルナリ;例令バ$x-a=0$ノ根ト$x^2=a^2$ノ根トハ全ク相等シキヤトイフニ,其然ラザルヿハ明ラカナルベシ,何ントナレバ$x^2=a^2$ハ$x=a$ノ外ニ$x=-a$トイフ根ヲモ有スルヲ以テナリ.

故ニ上ノ例ニ於テ$\sqrt{x^2-3x+3}=2x-1$ノ兩邊ヲ自乘シ得タル方程式$3x^2-x-2=0$ヲ解キテxノ値ヲ發見シタレドモ,此方程式$3x^2-x-2=0$ハ又$-\sqrt{x^2-3x+3}=2x-1$ノ兩邊ヲ自乘シテモ得ラルベシ,從テ

$3x^2-x-2=0$ヲ解キテ得タルxノ値ノ中ニハ原方程式ニ適合セザルモノアルナリ,即チ$x=-\frac{2}{3}$ハ原方程式ニ適合セズ,併シ此値ハ方程式$-\sqrt{x^2-3x+3}=2x-1$ニハ適合ス.

此ノ如ク方程式ノ解法ノ不完全ナルヿヨリシテ生ズル處ノ原方程式ニハ全ク關係ナキ未知數xノ値ヲ**無緣根**ト稱ス.

無理方程式ヲ解クニハ先ヅ之ヲ有理方程式ニ化シテ解ク故ニ無緣根ヲ生ズルナリ,故ニ所得ノxノ値ニ就キテ夫々原方程式ニ適スルヤ否ヲ吟味セザルベカラズ.

注意. 或正數ノ平方根ハ正負ノ二ツアレドモ既ニ$\sqrt{a^2}$ノ如キ形ニ書表ハシタルモノハ其正ノ方例令バaヲ表ハシ,決シテ$-a$(負)ヲ表ハサズ,$-\sqrt{a}$トアレバ之

レハ$-a$ヲ示シ又決シテaヲ表ハスモノニアラズ,又上ノ例ニ於テ$\sqrt{x^2-3x+3}$ハx^2-3x+3ノ平方根ノ二ツノ中正ノ方ヲ表ハスモノニシテ決シテ負ノ方ヲ表ハスモノニアラズ,同樣ニ$-\sqrt{x-3x+3}$ハ平方根ノ負ノ方ヲ表ハシ決シテ正ノ方ヲ表ハサズ,深ク注意センコヲ要ス.

例 2. 方程式$\sqrt{(2x+8)}+2\sqrt{(x+5)}=2$ヲ解ケ.

項ヲ移セバ

$$2\sqrt{(x+5)}=2-\sqrt{(2x+8)}.$$

兩邊ヲ自乘スレバ

$$4(x+5)=4-4\sqrt{(2x+8)}+2x+8.$$

項ヲ移シ,同類項ヲ約スレバ

$$2x+8=-4\sqrt{(2x+8)}.$$

2ニテ兩邊ヲ除シ,而ノ後兩邊ヲ自乘スレバ

$$x^2+8x+16=4(2x+8).$$

$$x^2=16.$$

此方程式ヲ解キテ$x=4$或ハ-4ヲ得,此$x=4$トイフ値ハ方程式ニ適合セズ,$x=-4$ノミ方程式ニ適合スルヲ以テ-4ガ與ヘラレタル方程式ノ根ニシテ4ハ

其無緣根ナリ.

例 3. 方程式$x^2-5x+6\sqrt{x^2-5x-3}=10$ヲ解ケ.

兩邊ヨリ3ヲ減ズレバ

$$x^2-5x-3+6\sqrt{x^2-5x-3}=7.$$

今左邊ニ於テ$\sqrt{x^2-5x-3}$ヲ一ノ未知數ノ如クニ考フルトキニハx^2-5x-3ハ其平方ニ等シキ故ニ$\sqrt{x^2-5x-3}$ヲyヲ以テ表ハセバ方程式ハ

$$y^2+6y=7.$$

トナル,此方程式ヲ解キテ

$$y=1,\ 或ハ\ -7.$$

ヲ得,因テ

$$\sqrt{x^2-5x-3}=1,$$

或ハ $$\sqrt{x^2-5x-3}=-7.$$

偖$\sqrt{x^2-5x-3}$ハ正ナラザルベカラズ,故ニ-7トイフ値ハ不合理ノモノナルヲ以テ用ウベカラズ,是ニ由テ$\sqrt{x^2-5x-3}=1$ナリ,之ヲ解カンガ爲メニ兩邊ヲ自乘スレバ $x^2-5x-3=1.$

之ヲ解キテ

$$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}.$$

偖$x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$ナルトキニハ明カニ$\sqrt{x^2-5x-3}=1$ニシテ$\sqrt{x^2-5x-3}=1$ナルトキニハ與ヘラレタル方程式ノ

左邊ハ1+6トナリ,右邊ハ7ナル故ニ此値ハ方程式ニ適合ス,故ニ

$$x=\frac{5+\sqrt{37}}{2} \text{ 或ハ } \frac{5-\sqrt{37}}{2}.$$

ヲ以テ所要ノ根トス.

133. 以上ノ諸例ニ於テ示セル如ク,平方根ヲ含メル無理方程式ヲ解クニハ次ノ如クナスベシ

先ヅ適宜ニ方程式ノ項ヲ移シテ兩邊ヲ自乘スルヿニヨリテ各項ガ皆有理式ナル方程式ニ化シテ此方程式ヲ解クベシ,而シテ後所得ノ根ガ果シテ與ヘラレタル方程式ニ適合スルヤ否ヤヲ一々吟味スベシ.

此ノ如クシテ得タル未知數ノ値ガ何レモ與ヘラレタル方程式ニ適合セザルヿアリ,此時ニハ無理方程式ガ根ヲ有セザルヿニシテ所得ノ未知數ノ値ハ無緣根ナリ.

例令バ $\sqrt{(2x+8)}+2\sqrt{(x+5)}+2=0$ ナル方程式ハ根ヲ有セズ,何トナレバ $\sqrt{(2x+8)}$, $2\sqrt{(x+5)}$, 2ノ何レモ正ナリ,故ニ其和ガ0トナルニハ各項ガ0トナラザルベカラズ,然ルニ $2\neq0$ ナリ故ニ方程式ハ不合理ナルヿ即チ此方程式ハ根ヲ有セザルヿ明カナリ. 又此方程式ヲ上ノ方法ニ從ツテ解クヿニハ $x=4$ 或ハ -4 ヲ得,而シテ此等ノ値ハ何レモ方程式ニ適合セズ,因テ此等ノ値ハ皆無緣根ナリ.

演習問題 45.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $2\sqrt{x}=3x-1.$
2. $3+\sqrt{(x^2+x+4)}=2x+1.$
3. $x-1+2\sqrt{(x+2)}=0.$
4. $x=2\sqrt{(x^2-12)}.$
5. $2x+3\sqrt{(2+x)}=1.$
6. $\sqrt{(x^2-5x-1)}=x+12.$
7. $2x-\sqrt{(2x^2-17)}=5.$
8. $5-\sqrt{(x^2-3)}=x+6.$
9. $\sqrt{x}-\sqrt{(5-x)}=1.$
10. $\sqrt{(4-3x)}=\sqrt{x}-\sqrt{(4-x)}.$
11. $\sqrt{(x^2+9)}+x^2=21.$
12. $2\sqrt{(x^2-4x-1)}=9+4x-x^2.$

13. $\sqrt{(x^2-6x+16)}+(x-3)^2=13.$

14. $2x^2+\sqrt{(x^2+3x-8)}=226-6x.$

15. $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=\sqrt{(7x+1)}.$

16. $\sqrt{(2x+1)}+\sqrt{(7x-27)}=\sqrt{(3x+4)}.$

17. $\sqrt{(x^2-3x+2)}-\sqrt{(x^2-7x+12)}=\sqrt{2}.$

18. $\sqrt{(2x+8)}-\sqrt{(2x+3)}=\sqrt{(2x)}.$

19. $\sqrt{(3x-3)}+\sqrt{(5x-19)}=\sqrt{(2x+8)}.$

20. $\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(3x+7)}=\sqrt{(2x+5)}.$

21. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(a+b-2x)}.$

22. $\dfrac{1}{x+\sqrt{(2-x^2)}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{(2-x^2)}}=1.$

23. $\dfrac{x+\sqrt{(3-x)}}{x-\sqrt{(3-x)}}+3=0.$

24. $\sqrt{(b^2+ax)}-\sqrt{(a^2+bx)}=a-b.$

25. $\dfrac{x+\sqrt{(12a^2-x)}}{x-\sqrt{(12a^2-x)}}=\dfrac{a+1}{a-1}.$

26. $\dfrac{x+\sqrt{(x^2-4)}}{x-\sqrt{(x^2-4)}}-\dfrac{x-\sqrt{(x^2-4)}}{x+\sqrt{(x^2-4)}}=4\sqrt{(x^2-4)}.$

二次方程式應用問題.

134. 次ニ二次方程式ヲ用ヰテ解キ得ベキ應用問題ノ解法ヲ示シ,且ツ必要ナル注意ヲ與フベシ.

例 1. 此章ノ首メニ與ヘタル問題ハ今ニ至リテ初メテ解クコヲ得. 即チ所得ノ方程式ハ

$$x^2-24x+128=0.$$

之ヲ解キテ

$$x=8 \text{ 或ハ } 16.$$

此二數何レモ問題ニ適スルヲ以テ所要ノ數ハ 8 或ハ 16 ナリ.

例 2. 二桁ノ數アリ,一位ノ數字ハ十位ノ數字ヨリモ 5 丈ケ多ク,且ツ此數ハ數字ノ積ノ二倍ヨリモ 1 丈ケ少ナシトイフ,此數如何.

十位ノ數字ヲ x トセン,然ルヰハ一位ノ數字ハ

$x+5$ ニ等シカルベク,又此數ハ $10x+(x+5)$ ナルベシ.

因テ題意ニヨリテ次ノ方程式ヲ得.

$$2x(x+5)-1=10x+(x+5).$$

項ヲ移シ,同類項ヲ約スレバ

$$2x^2-x-6=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ $x=2$ 或ハ $-\frac{3}{2}$ ヲ得,此 $-\frac{3}{2}$ トイフ數ハ此方程式ニハ適合スレドモ題意ニハ適セズ,何トナレバ題意ニヨリテ求ムル處ノ數ハ一桁ノ正ノ整數ナレバナリ,因テ十位ノ數ハ 2,一位ノ數ハ $2+5=7$ ニシテ所要ノ數ハ 27 ナリ.

例 2. 一商人ノ利益金高ヲ圓ニテ表ハセル數ノ平方ハ其數ノ二十倍ヨリモ 300 丈ケ多シトイフ,此人ノ利金ノ高ヲ問フ.

利金ノ高ヲ x 圓トセン,然ルトキハ題意ニヨリ

$$x^2=20x+300.$$

項ヲ移セバ $x^2-20x-300=0.$

此方程式ヲ解キテ

$$x=30 \text{ 或ハ } -10.$$

故ニ利益金高ハ 30 圓ニシテ -10 圓ハ不合理ナリ,然

レドモ損失ヲ以テ負ノ利益ト考フレバ此二ツノ値ハ何レモ題意ニ適シ,此人ハ 30 圓ヲ利セリ,或ハ 10 圓ヲ損セリトイフヿヲ得ベシ.

例 4. 等速度ヲ以テ馳スル汽車アリ,300哩ヲ距ツル二ツノ停車場間ヲ馳スルニ要スル時間ハ其ノ速度ガ毎時 5 哩少ナキトキヨリモ二時間丈ケ短カシト云フ,此汽車毎時ノ速度如何.

x 哩ヲ以テ毎一時間ノ速度トセン,然ルトキハ 200哩ヲ走スルニ要スル時間ハ $\frac{300}{x}$ 時間ニシテ毎時間 5 哩丈ケ速度ノ少ナキ時ニ要スル時間ハ $\frac{300}{x-5}$ 時間ナリ,故ニ題意ニヨリ

$$\frac{300}{x-5}-2=\frac{300}{x}.$$

此方程式ヲ解キテ

$$x=30 \text{ 或ハ } -25.$$

故ニ毎時ノ速度ハ 30 哩ニシテ,-25 哩トイフ答ハ題意ニ適セズ.

例 5. 甲乙兩工共ニ一ノ工事ニ從事シテ 33 日ト三時間ニテ之ヲ成就シタリ,

但シ毎日ノ仕事時間ハ九時間ナリトス,今若シ甲一人ナル時ハ乙一人ニテ同シ仕事ヲ成就スル日數ヨリモ十五日早ク成就スベシトイフ,各一人ニテ同シ仕事ヲ成就スルニ要スル日數ヲ問フ.

今乙一人ニテ此工事ヲ成就スルニ要スル日數ヲxトセン,然ルトキハ甲一人ニテ要スル日數ハ$x-15$ナルベシ,又33日ト三時間ハ$33\frac{1}{8}$日ナリ. 因テ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-15}=\frac{1}{33\frac{1}{8}}.$$

此方程式ヲ解キテ

$$x=75 \text{ 或ハ } 6\tfrac{3}{8}.$$

ヲ得. 此$6\frac{3}{8}$トイフ値ハ題意ニ適セズ,何トナレバ甲乙兩人共ニ働キテ$33\frac{1}{8}$日ヲ要スルヲ以テ乙一人ニテハ勿論之ヨリモ多キ日數ヲ要スベキヲ以テナリ,即チ乙ハ七十五日ヲ要シ甲ハ六十日ヲ要ス.

例 6. 一隊ノ兵士アリ,之ヲ正方形ニ整列セシムルヿヲ得,今之ニ其正方形ノ一列丈ケノ兵員ヲ增加スルトキニハ全員三十名トナルト云フ,此隊ノ兵數幾何.

xヲ以テ所要ノ兵數トセン,然ルトキハ之ヲ正方形ニ整列シタルトキノ一列ノ兵數ハ$\sqrt{x}$ナルベシ,因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$x+\sqrt{x}=30.$$

此方程式ヲ解キテ

$$x=25.$$

因テ所要ノ兵數ハ二十五ナリ.

注意. 此問題ニ於テ方程式$x+\sqrt{x}=30$ヲ解クニ當リ,$x=25$ノ外ニ36トイフ無緣根ヲ得ベシ,此ノ如キ數ハ題意ニ適スルヤ否ヤヲ吟味スルニ及バズ直チニ棄ツベキモノナリ.

例 7. 父子ノ年齡ノ和ハ80ニシテ,又其各年齡ノ數ノ積ノ百分ノ一ハ子ノ年齡ヨリモ15少ナシトイフ,父子ノ年齡各幾何.

xヲ以テ子ノ年齡ヲ表ハス數トセン,然ルトキハ$80-x$ガ父ノ年齡ノ數ナルベシ,因テ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$\frac{1}{100}x(80-x)=x-15.$$

或ハ $$x^2+20x-1500=0.$$

此方程式ヲ解キテ

$$x=30,\text{或ハ}-50.$$

此處ノ負値ハ題意ニ適セズ,故ニ子ノ年齡ハ三十歲ニシテ父ノ年齡ハ五十歲ナリ.

135. 以上ノ諸例ニ於テ見ル如ク,問題ヲ解クニ方リテ既知數ト未知數トノ關係ヲ代數的ニ表ハス方程式ヲ解キテ得ル處ノ結果ノ或者ハ題意ニ適セザルモノアルナリ,是レ何故ナルヤト尋ヌルニ夫ハ方程式ノ根ハ正ニテモ負ニテモ,又整數ニテモ分數ニテモ其方程式ニ適合スルモノナラバ少シモ差支ナシ,即チ方程式ノ根ハ如何ナル種類ノ數ニテモ差支ナキナリ,然ルニ問題ニ於テ求ムル處ノ數ニハ多クハ或條件附隨セルナリ;例令バ例2ノ如キ塲合ニハ必ズ正ノ整數

ニシテ而カモ1ヨリ5迄ノ一位ノ數ノ何レカ一ツナラザルベカラズトイフ制限アリ,例4ニ於テハ速度ハ必ズ正ナラザルベカズ,例5ニ就テハ所要ノ數ハ正ナレ𪜈必ズ或數ヨリハ大ナラザルベカラズ,又例7ノ如キ塲合ニハ年齡ハ負數ナルヿヲ得ザル等,問題ニ付キテ夫々方程式ニハ言ヒ表ハシ得ザル制限アルナリ,是ニ於テカ方程式ヲ解キテ得タル結果ニハ問題ニ適セザルモノモアルナリ,即チ方程式ノ與フル處ノ數ハ一般ナルモ問題ノ要スル處ノ數ハ格段ナルモノナル故ナリ.

故ニ問題ヲ解クニハ次ノ如クスベシ.

先ヅ既知數ト未知數トノ關係ヲ代數的ニ表ハス方程式ヲ作リ,次ニ此方程式ヲ解キテ其根ヲ求ムベシ,最後ニ斯クシテ得タル數ニ付キテ一々其ガ問題ニ於

テハ陰ニ或ハ陽ニ示セル方程式ニハ表ハシ得ザル制限ニ背カザルヤ否ヤヲ吟味スベシ.

演習問題 46.

1. 二數ノ和ハ18ニシテ其積ハ72ナリトイフ二數ヲ求ム.

2. 二數アリ,其一ハ他ノ三分ノ一ニシテ,其積ハ432ナリトイフ,此二數幾何.

3. 二數アリ,其平方ノ和ハ769ニシテ,一ハ他ノ二倍ヨリモ1丈ケ多シトイフ,此二數幾何.

4. 二桁ノ數アリ,一位ノ數字ハ十位ノ數字ノ二倍ニシテ,各數字ノ積ハ此數ヨリモ16丈ケ少ナシトイフ,仍テ問フ此數如何.

5. 長方形ノ運動場アリ,長サハ幅ヨリモ20間長クシテ,其面積ハ2925坪アリトイフ,此運動場ノ長サト幅トヲ計算セヨ.

6. 或數ノ二倍ヲ42ヨリ減ジタル殘餘ト此數ヲ12ニ加ヘタル和トノ積ハ此數ノ十五倍ヨリモ40丈ケ多シトイフ,或數トハ如何.

7. 或數ト其反數トノ和ハ此數ノ二倍ヨリ此反數ヲ減ジタル差ヨリモ少ナキヿ$\frac{7}{9}$ナリトイフ,或數トハ如何.

8. 20ヨリモ大ニシテ25ヨリモ小ナル數アリ,24ヨリ此數ヲ減ジタル差ヲ此數ヨリ18ヲ減ジタル差ニテ除シテ得ル商ハ此數ヨリ20ヲ減ジタル差ニ等シトイフ,此數ヲ求ム.

9. 十五錢ニテ買ヒ得ベキ蜜柑ノ數ハ其六十個ノ價ノ錢數ニ等シトイフ,仍テ問フ十五錢ニテ蜜柑幾個ヲ買ヒ得ベキヤ.

10. 三個ノ正數アリ,第二ノ數ハ第一ノ數ヨリモ3丈ケ大ニシテ,第三ノ數ハ第一ノ數ノ半分ニ等シ,今第一ノ數ト第三ノ數トノ差ノ平方ハ第二ノ數ノ二倍ヨリモ6丈ケ大ナリトイフ,仍テ此三數ヲ問フ.

11. 父子ノ年齡ノ差ハ20ニシテ,年數ノ積ノ十分ノ一ハ父ノ年齡ヲ超過スルヿ180ナリトイフ,父子ノ年齡各幾何.

12. 二數ノ平方ノ差ハ345ニシテ,一數ノ二倍ハ他ノ數ノ三倍ヨリモ少ナキヿ22ナリトイフ,此二數ヲ求ム.

13. 矩形ノ大廣間アリ,周圍四十四間アリテ疊數

ハ二百四十疊アリトイフ,此廣間ノ横竪ヲ問フ.

14. 或宴會ノ費用金48圓ヲ出席會員若干名ニ割當テシニ,八人ノ來客ヨリハ會費ヲ徵收セザリシ爲メ一人ニ付キ一圓ツヽ多ク出セリトイフ,若干名トハ幾人ナリシヤ.

15. 或人鐵道株券若干ヲ金二千五百圓ニテ買ヒ,二十五株ヲ除キテ他ヲ一株ニ付キ五圓ノ利ヲ得テ賣リシニ金二千二百五十圓ヲ得メリトイフ,幾株ヲ買ヒシヤ.

16. 二數アリ,一方ノ數ガ23ヨリモ多キ丈ケ他ノ數ハ23ヨリモ少ナク,二數ノ平方ノ和ハ1076ナリトイフ,此二數幾何.

17. 二桶アリ,一ハ水若干升ヲ入レ他ハ酒若干升ヲ入ル,而シテ其升數酒ハ水ノ半分ナリ,今兩桶ヨリ八升ツヽ汲ミ出シ互ヒニ之ヲ入レ換ヘタルニ兩桶内ノ液ハ同ジ强サノ混合酒トナレリトイフ,然ラバ水ト酒トノ升數幾何.

18. 二桁ノ數アリ,數字ノ和ハ10ニシテ,此數ト數字ノ位置ヲ交換シテ得ベキ數トノ積ハ2701ナリトイフ,此數ヲ求ム.

19. 或人米若干俵ヲ金100圓ヲ以テ買ヒ,之ヲ一俵

四圓八十錢ノ割ニ賣リテ總躰ニテ五俵ノ元價ニ當ル利益ヲ得タリトイフ,此人ノ買ヒ取リシ俵數幾千.

20. 三ツノ相隣レル偶數アリ,最大ナル數ノ立方ト最小ナル數ノ立方トノ差ハ中央ノ數ノ七十倍ヨリモ大ナルヿ28ナリトイフ,三數トハ如何.

21. 酒ヲ以テ充タサレタル樽アリ,最初此中ヨリ九升ヲ汲出シ之ヲ補フニ水ヲ以テシ,更ラニ又九升ヲ汲ミ出シタル後ニ純分六斗四升ノ酒殘レリトイフ,此樽中ニ酒幾升アリシヤ.

22. 甲乙ノ二工夫共ニ一ノ仕事ヲ若干日ニテ成就ストイフ,若シ此二工此仕事ノ半分ヲ別々ニ成サバ甲ハ前ヨリモ一日速ク乙ハ前ヨリモ三日遲ク成就スベシトイフ,仍テ問フ甲乙共ニ此仕事ニ從事スル時ハ幾日ヲ要スルヤ.

23. 或水夫一ノ河流ヲ溯リテ或距離ノ處ヘ6時間ニテ達セリ,此間ヲ流水ノ力ニテ下ル時間ハ同距離ヲ靜水ノ時ニ漕ク時間ヨリモ$13\frac{1}{2}$時間多シトイフ仍テ問フ同距離ヲ流ニ順フテ漕キ下ルニハ何時間ヲ要スルヤ.

24. 或會堂ノ床ニ敷石セシニ,長サハ幅ノ二倍アル石240枚ヲ要セリ.其後之ヲ改築セシ際ニハ幅ニ於

テ三寸長サニ於テ五寸ヅヽ舊石ヨリモ小ナル石360枚ヲ要セシトイフ,新舊石ノ大サヲ問フ.

25. 長サ三十間幅二十間ノ運動場アリ,此内ニ於テ周圍ニ一樣ナル廣サノ競走道ヲ割キ取リタル爲メニ運動場ノ面積141坪ヲ減ジタリトイフ,道ノ廣サ如何.

26. 鷄卵ヲ六十錢丈ケ買フニ,若シ十個ニ付キ三錢ヅヽ高價ナラバ買ヒ得ベキ數ハ十個少ナカルベシトイフ,鷄卵十個ノ價如何.

27. 二列車アリ,一ハ他ヨリモ毎時ノ速度4里丈ケ小ナル爲ル48里ノ鐵路ヲ走スルニ二時間多ク要ストイフ,二列車ノ速度各幾何.

28. 二ツノ正數アリ,其和ハ$\frac{1}{3}$ニシテ其差ハ其積ノ四倍ヨリモ$\frac{1}{12}$丈ケ大ナリトイフ,二數トハ如何ナル數ナルヤ.

29. 一隊ノ兵士アリ,一行ノ人數ハ一列ノ人數ノ三倍ナル行列ニ整列セシムルヿヲ得,今此内ヨリ75人ヲ減ズルトキニハ殘リノ人數ヲ深サ三人ノ中空ノ正方形ニ整列セシムルヿヲ得,而シテ此平方形ノ外側ノ一邊ノ人數ハ以前ノ行列ノ一行ノ人數ニ等シトイフ,此隊ノ人員幾何.

30. 或水夫靜水ヲ漕クトキニハ毎時$2\frac{1}{2}$里ヲ行クヿヲ得,今一ノ河流ヲ$10\frac{1}{2}$里ノ間上下セシニ10時間ヲ要セシトイフ,此河流ノ速度幾何ナリシヤ.

31. 或人金4000圓ヲ銀行ニ預ケテ一年ノ後受取リタル利子中60圓ヲ除キ其餘ヲ元金ニ加ヘテ之ヲ預ケシニ,其後一ケ年ノ後ニ於テ利子金273圓ヲ得タリトイフ,仍テ問フ利率如何.

32. 或人7哩ノ路ヲ旅行スルニ中リ一哩ヲ行キタル後毎時ノ速度ヲ一哩丈ケ增セシ爲メニ半時間速ク目的地ニ達セリトイフ,仍テ問フ此旅客ノ要セシ時間如何.

33. 一河ノ同側ニ甲乙二市アリテ相距ルヿ十八哩ナリ,甲市ヨリ乙市ニ達センガ爲メニ其距離ノ一半ハ舟行シ一半ハ步行シテ四時間半ヲ費セリ,歸路モ亦往路ノ如ク步行舟行相半シタレドモ,水勢逆ナリシ爲メ舟行ノ速度ハ前ヨリモ毎時一哩半少ナカリシヲ以テ五時間ヲ要セシトイフ,步行舟行ノ速度各如何.

34. 上下二種ノ砂糖アリ,上十二斤ノ價ハ下十二斤ノ價ヨリモ三十錢丈ケ高價ナル爲メニ金三圓ニテ買ヒ得ル高ハ上糖ハ下糖ヨリモ四斤少ナシトイ

フ,上下二糖ノ各一斤ノ價ヲ問フ.

35. 矩形及ビ正方形アリ,其面積相等シク且ツ正方形ノ一邊ハ矩形ノ一邊ヨリモ三尺短カシ,今若シ矩形ノ幅ヲ三尺減ヲ長サヲ八尺增スモ其面積ハ變ゼズトイフ,仍テ問フ矩形ノ長サ及ビ幅幾干.

36. 二十二里ヲ距タル兩市ヨリ甲乙ノ旅客同時ニ相向ヒテ出發シ,十時間ヲ經テ相會セリ,偖甲ハ一里ヲ行クニ乙ヨリモ十分多ク費セシトイフ,甲乙各每時何里ヲ步セシヤ.

37. 或人大麥ト大豆トヲ合シテ75俵ヲ賣リシニ兩穀ノ代價同一ナリキ,若シ大麥ヲ大豆ノ相場ニテ賣リタランニハ160圓ヲ得ベク,大豆ヲ大麥ノ相場ニテ賣リタランニハ$122\frac{1}{2}$圓ヲ得ベカリシトイフ,仍テ問フ大麥大豆ノ俵數各幾何.

38. 150哩ヲ距ツル鐵路ノ兩端ヨリ相向ツテ同時ニ出發シタル列車アリ,途中ニテ相會シテヨリ一ハ二時間他ハ四時間半ヲ經テ終點ニ着セリトイフ,兩列車ノ速度ヲ計算セヨ.

39. 甲乙丙ノ相等シキ三樽アリ,甲ハ水,乙ハ酒,丙ハ酒ト水トノ混合液ヲ以テ充タサル,今乙ト丙トノ兩液ヲ盡ク混ジテ得ル混合液中ノ酒ト水トノ比ハ甲ト丙トノ兩液ヲ盡ク混ジテ得ル液中ノ酒ト水トノ比ノ九倍ナリトイフ,丙樽中ノ酒ト水トノ比ヲ見出セ.

40. A,Bノ二列車甲驛ヲ發シテ乙驛ニ向ヘリ,之ト同時ニC,Dノ二列車乙驛ヲ發シテ甲驛ニ向ヘリ,Aハ甲驛ヨリ180里ノ處ニテCニ會シ又甲驛ヨリ210里ノ處ニテDニ會セリ,Bハ乙驛ヨリ189里ノ處ニテCニ會シ甲驛ト乙驛トノ中央ニ於テDニ會セリトイフ,仍テ問フ甲乙兩驛間ノ距離幾何.

41. 甲乙ノ兩脚夫アリ甲ガA地ヲ出發シテB地ニ向ヒタルト同時ニ乙ハB地ヲ發シテA地ニ向ヘリ,途中ニテ兩人相會スル迄ニ甲ハ乙ヨリモ4里多ク步シタリ,又相會シテヨリ甲ハ五時二十分乙ハ十二時間ヲ經テ各其目的地ニ到達セシトイフ,AB兩地ノ距離幾何.

二次方程式雜論.

136. 特別ナル場合. 一般ニ二次方程式ハ

$$ax^2+bx+c=0.$$

ナル形ヲ有ス. 但シ $a \neq 0$ ナリ. 次ニ一二ノ特別ナル場合ヲ擧ゲン.

(I). $c=0$. 此場合ニハ方程式ハ次ノ如キ形トナル.

$$ax^2+bx=0.$$

或ハ $$x(ax+b)=0.$$

因テ一ツノ根ハ0ニシテ他ノ根ハ$-\frac{b}{a}$ナリ.

(II). $b=0$. 此場合ニハ方程式ハ次ノ形ヲ有ス.

$$ax^2+c=0.$$

或ハ $$ax^2=-c.$$

是レ純二次方程式ニシテ其根ハ$\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ナリ,此處ニ於テ若シ$-\frac{c}{a}$ガ正ニシテ完全ナル平方數ナルトキニハ根ハ有理數ニシテ,若シ$-\frac{c}{a}$ガ正ニシテ開キ切レザル數ナルトキニハ根ハ無理數ナリ,又若シ$-\frac{c}{a}$ガ負ナルトキニハ根ハ虛數ナリ.

(III). $b=0$ 及ビ $c=0$. 此場合ニハ方程式ハ次ノ形ヲ有ス.

$$ax^2=0.$$

根ハ0ナリ,即チ二ツノ根ガ何レモ0ナリ.

137. 一般ナル二次方程式ハ$x^2+px+q=0$ナル形ニテ表ハスコトヲ得.

一般ニ二次方程式ハ

$$ax^2+bx+c=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ナル形ヲ有シ$a \neq 0$ナリ,此兩邊ヲ未知數xノ平方即チx^2ノ係數aニテ除スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

トナル,此中ニ$p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ト置ケバ此方程式ハ

$$x^2+px+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

トナル,偖テ(1)ノ根モ,(2)ノ根モ全ク同ジモノナリ,但シ(2)ニ於テ$p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ナリ.

(1)ノ根ハ127節ニヨリテ

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ 或ハ\ \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ldots(3)$$

ナルヿヲ知ル.

(2)ノ根ハ如何ト云フニ

$$x^2+px=-q.$$

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p}{4}-q.$$

平方ニ開キテ

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2-4a}{4}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

故ニ $x=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, 或ハ $\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$..(4).

ナリ. 今此處ニ於テ $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ ト置ケバ(3)ヲ得ベシ. 又(3)ニ於テ $b=ap$, $c=aq$ ト置ケバ(4)ヲ得ベシ.

故ニ $x^2+px+q=0$ モ亦二次方程式ノ公式ト見做シテ差支ナカルベシ.

138. 二次方程式ハ必ズ二ツノ根ヲ有シ,且ツ決シテ二ツヨリ多クノ根ヲ有セズ.

二次方程式ノ一般ナル形ハ次ノ如キモノトス,

$$x^2+px+q=0. \qquad (前節參照)$$

此根ハ $\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ 及ビ $\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ノ二ツナリ. 而シテ $p^2-4q=0$ ナル塲合ニハ根ハ $\frac{-p}{2}$ トナリテ一ツナレモ此特別ナル塲合ニハ前ニモ云ヒタル如ク方程式ガ二ツノ相等シキ根ヲ有ストイフナリ. 因テ一般ニ二次方程式ハ二ツノ根ヲ有ス.

次ニ二次方程式ガ三ツノ相異ナル根 α, β 及ビ γ ヲ有スト假定セヨ,然ルトキハ何レモ方程式ニ適合スベキモノナル故ニ

$$\alpha^2+p\alpha+q=0\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\beta^2+p\beta+q=0\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\gamma^2+p\gamma+q=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ヲ得ベシ. (1)ヨリ(2)ヲ減ズレバ

$$\alpha^2-\beta^2+p(\alpha-\beta)=0.$$

或ハ $$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+p(\alpha-\beta)=0.$$

或ハ $$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+p)=0.$$

偖αトβトハ假定ニヨリテ相異ナル故ニ$\alpha-\beta$ハ0ナラズ,因テ$(\alpha-\beta)$ニテ此等式ノ兩邊ヲ除スレバ

$$\alpha+\beta+p=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

ヲ得. 又(2)ヨリ(3)ヲ減ジテ

$$\beta+\gamma+p=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ヲ得. 今(4)ヨリ(3)ヲ減ズレバ

$$\alpha-\gamma=0.$$

ヲ得. 即チαトγトハ相等シカラザルベカラズ,因テ二次方程式ハ三ツノ相異ナル根ヲ有スルコヲ得ズ.

是ニ由テ二次方程式ノ根ノ數ハ唯二ツナリ.

139. 二次方程式ノ根ト係數トノ關係.

二次方程式$ax^2+bx+c=0$ノ二根ヲα及

ビβニテ表ハシ

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

ト置カン. 偖二根ノ和$\alpha+\beta$ハ次ノ如シ.

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

次ニ二根ノ積$\alpha\beta$ヲ求ムレバ

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$
$$=\frac{c}{a}.$$

因テ二次方程式$ax^2+bx+c=0$ノ二根ノ和ハxノ係數ヲx^2ノ係數ニテ除シタルモノヽ符號ヲ變ジタルモノ即チ$-\frac{b}{a}$ニ等シク,二根ノ積ハxヲ含マザル項ヲx^2ノ係數ニテ除シタルモノ即チ$\frac{c}{a}$ニ等シ.

從テ$x^2+px+q=0$ノ根ヲα及ビβニテ表ハセバ

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q.$$

ナリ.

140. $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α,β トスレバ前節ニヨリテ此方程式ハ次ノ如ク書キ表ハスヿヲ得ベシ.

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

或ハ $$(x-\alpha)(x-\beta)=0.\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

既ニ 129 節ニ於テ因數分解ニヨリテ根ヲ發見スル法ヲ擧ゲタレ𪜈斯クシテ得ル根ハ 126 節ニ擧ゲタル一般ノ方法ニヨリテ得ル根ト全ク同樣ナルヿヲ示サヾリシガ,此處ニ至リテ初メテA式ニヨリ其事全ク明瞭トナリタルナリ。

141. 與ヘラレタル根ヲ有スル二次方程式.

是迄論ジタルヿニヨリテ吾人ハ二次方程式ノ根ハ二ツアリテ,且ツ其二ツノ根ト方程式ノ係數トノ間ニ簡單ナル關係ノ存スルヿヲ知リタリ,此事ヨリシテ一般ニ二ツノ與ヘラレタル數ヲ根トセ

ル二次方程式ヲ作ルヿヲ得.

與ヘラレタル二ツノ數ヲ α 及ビ β トセン,此二數ヲ根トセル方程式ハ上來ノ結果ニヨリテ

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$$

ナルベシ. 即チ

二次方程式ノ公式 $x^2+px+q=0$ ニ於テ p ノ代リニ與ヘラレタル二數ノ和ノ符號ヲ變ジタルモノヲ置キ, q ノ代リニ其二數ノ積ヲ置キタルモノガ所要ノ方程式ナリ.

例. 2及ビ $-\frac{5}{3}$ ヲ根トセル二次方程式ヲ作レ.

所要ノ方程式ハ次ノ如シ.

$$x^2-(2-\tfrac{5}{3})x+2\times(-\tfrac{5}{3})=0.$$

或ハ $$x^2-\tfrac{1}{3}x-\tfrac{10}{3}=0.$$

分數ヲ取除カンガ爲メニ 3 ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$3x^2-x-10=0.$$

之レ所要ノ方程式ナリ.

142. 今次ニ二三ノ問題ノ解方ヲ示サ

ン.

例 1. 方程式$x^2-3x+2=0$ノ根ノ平方ノ和ヲ計算セヨ.

α,βヲ以テ與ヘラレタル方程式ノ根トスレバ所要ノ數ハ$\alpha^2+\beta^2$ナリ.

偖139節ニヨリ

$$\alpha+\beta=3,\quad 及ビ\ \alpha\beta=2.$$

然ルニ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta.$

故ニ $\alpha^2+\beta^2=3^2-2\times2=5.$

即チ所要ノ數ハ5ナリ.

例 2. 方程式$x^2+6x-9=0$ノ根ノ平方ヲ根トセル二次方程式ヲ作レ.

α,βヲ以テ與ヘラレタル方程式ノ根トスレバ所要ノ方程式ハα^2,β^2ヲ根トセル二次方程式ナリ.

故ニ $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0.$

之レ所要ノ方程式ナリ,偖

$$\alpha+\beta=-6\ 及ビ\ \alpha\beta=-9.$$

故ニ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2\times(-9)=54.$

$$\alpha^2\beta^2=81.$$

因テ所要ノ方程式ハ

$$x^2-54x+81=0.$$

ナリ.

例 3. 方程式$x^2+px+q=0$ノ根ヲα,βトスレバ$\frac{\alpha}{\beta}$ト$\frac{\beta}{\alpha}$トヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

所要ノ方程式ハ

$$x^2-\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)x+1=0.$$

偖 $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}.$

而シテ $\alpha+\beta=-p,\ 及ビ\ \alpha\beta=q.$

故ニ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2q.$

因テ所要ノ方程式ハ

$$x^2-\frac{p^2-2q}{q}x+1=0.$$

或ハ分母ヲ拂フテ

$$qx^2-(p^2-2q)x+q=0.$$

ナリ.

例 4. 方程式$x^2-x+3=0$ノ根ハ實數ナラザルヿヲ方程式ヲ解カズシテ證セヨ.

與ヘラレタル方程式ハ次ノ如クニ書キ直スヿヲ得.

$$x^2-x+(\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2+3=0.$$

或ハ $(x-\tfrac{1}{2})^2+2\tfrac{3}{4}=0.$

偖此方程式ノ左邊ニ於テ$(x-\tfrac{1}{2})^2$ハxガ實數ナル時

ニハ常ニ正數ニシテ$2\frac{3}{4}$モ又正數ナリ,故ニ此二ツノ正數ノ和ガ0ニ等シキ爲メニハ各ガ0ニ等シカラザルベカラズ,然ルニ$2\frac{3}{4}$ハ0ニ等シカラズ,因テxガ如何ナル實數ニ等シクトモx^2-x+3ハ0ニナルヿナシ,即チ與ヘラレタル方程式ノ根ハ實數ナラズ.

演習問題 47.

1. 次ノ各方程式ノ根ノ積ヲ求ム.

(1). $x^2-3x+4=0$. (2). $2x^2+5x-7=0$.

(3). $x^2+14x+31=0$. (4). $3-x^2-x=0$.

2. 次ノ各方程式ノ根ノ和ヲ求ム.

(1). $7x^2+x-3=0$. (2). $x^2-5x+13=0$.

(3). $px^2-qx+r=0$. (4). $qx^2+px+1=0$.

3. 次ニ與ヘタル根ヲ有スル二次方程式ヲ作レ.

(1). 4ト-3. (2). $\frac{1}{2}$ト$\frac{7}{8}$.

(3). -3ト-7. (4). $\sqrt{5}$ト$-\sqrt{5}$.

(5). $3-\sqrt{2}$ト$3+\sqrt{2}$. (6). $1+\sqrt{7}$ト$1-\sqrt{7}$.

(7). $1-3i$ト$1+3i$. (8). $a-\sqrt{b}$ト$a+\sqrt{b}$.

(9). $c-id$ト$c+id$.

4. 次ノ各方程式ノ根ノ差ヲ求ム.

(1). $x^2+x-2=0$. (2). $3x^2-14x+11=0$.

(3). $2x^2-x-17=0$. (4). $9ax^2-3bx+c=0$.

5. 方程式$ax^2+bx+c=0$ノ根ヲα,βトシテ次ノ各式ヲ證セヨ.

(1). $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{b}{c}$. (2). $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

(3). $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{b^2-2ac}{ac}$.

6. 方程式$x^2-4px+6q=0$ノ根ノ平方ノ和ヲ求ム.

7. 方程式$x^2+ax+b=0$ノ根ノ平方ノ和ハ方程式$x^2+3ax+b+4a^2=0$ノ根ノ平方ノ和ニ等シキヿヲ證セヨ.

8. 方程式$x^2-3x+5=0$ノ根ヲα,βトスル時$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ト$\alpha\beta$トヲ根ニ有スル二次方程式ヲ作レ.

9. 方程式$x^2+11x-12=0$ノ根ノ差ト和トヲ根ニ有スル二次方程式ヲ作レ.

10. 方程式$5x^2+4x+a=0$ノ二根ノ數値ガ相等シキ爲メニハaハ如何ナル値ヲ取ルベキカ.

11. 方程式$a^2x^2+(b^2-2ac)x+c^2=0$ノ根ハ$ax^2+bx+c=0$ノ根ノ平方ニ等シキヿヲ證セヨ.

12. 方程式$x^2+bx+c=0$ノ二根ノ差ガ$x^2+qx+q=0$ノ二根ノ差ニ等シキ爲メニハb,cトp,qトノ間ニ如何ナル關係必要ナルヤ.

13. 次ノ各方程式ノ根ハ何レモ負數ナルコトヲ方程式ヲ解カズシテ示セ.

(1). $x^2+4x+3=0$. (2). $x^2+21x+10=0$.

(3). $3x^2+7x+2=0$.

14. 方程式 $10x^2+x+3=0$ ノ根ハ虛數ナルコトヲ方程式ヲ解カズシテ示セ.

15. 方程式 $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α, β トスル時 $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ト $\beta+\frac{1}{\alpha}$ トヲ根ニ有スル二次方程式ヲ作レ.

第十一章 高次方程式.

143. 未知數ノ二次ヨリモ高キ羃ヲ含ム方程式ヲ總稱シテ**高次方程式**ト稱ス.

高次方程式ノ論ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ是處ニハ唯二次方程式ニテ解キ得ベキ特別ナル場合ノミヲ論ゼントス.

次ニ例ヲ擧ゲテ特別ナル場合ノ解法ヲ示サン.

例 1. 方程式 $x^4-5x^2+6=0$ ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ハ四次方程式ニシテ其中ニハ未知數ノ唯二ツノ相異ナル羃ヲ含ミ,且ツ一ハ他ノ平方ナリ,故ニ x^2 ヲ一ノ未知數ノ如クニ取扱ヒ次ノ如クシテ解クナリ.

$$x^4-5x^2+(\tfrac{5}{2})^2=(\tfrac{5}{2})^2-6.$$

即チ $(x^2-\frac{5}{2})^2=\frac{1}{4}$.

平方ニ開キテ $x^2-\frac{5}{2}=\pm\frac{1}{2}$.

故ニ　$x^2=3$. 之ヨリ $x=\pm\sqrt{3}$.

又　$x^2=2$. 之ヨリ $x=\pm\sqrt{2}$.

因テ四數 $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{2}$ ガ所要ノ根ナリ.

例 2. 方程式 $(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12=0$ ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ニ於テ x^2-x ヲ一ノ未知數ノ如クニ取扱ヒ $x^2-x=y$ ト置ケバ方程式ハ

$$y^2-8y+12=0.$$

トナル,此二次方程式ヲ解キテ

$$y=2 \text{ 或ハ } 6.$$

故ニ　$x^2-x=2$ 或ハ $x^2-x=6$.

初メノ方程式ヲ解キテ　$x=2$ 或ハ -1.

次ノ方程式ヲ解キテ　$x=-2$ 或ハ 3.

即チ所要ノ根ハ $2,3,-1,-2$ ノ四ツナリ.

144. 前章ニ於テ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ガ α,β ナルトキニハ之ハ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ ナル形ニ書表ハシ得ルコトヲ證明シタリ,語ヲ換ヘテ之ヲイヘバ α ガ方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ一ノ根ナラバ $(x-\alpha)$ ハ ax^2+bx+c ノ一因數ナリトイフコトナリ,故ニ二次方程式ノ一

ノ根ガ與ヘラレタルトキニハ除法ニヨリテ之ヲ一次方程式ニ化シテ他ノ根ヲ發見スルコトヲ得ベシ. 一般ニ高次方程式ノ一ノ根ガ與ヘラルルトキニハ其方程式ノ次數ヲ一ツ丈ケ低クスルコトヲ得,夫ハ次ノ定理ニヨルナリ.

x ヲ含ム有理整式ガ x ニ或値例令バ α ヲ代入スルトキニ 0 トナルナラバ $x-\alpha$ ハ其式ノ一因數ナリ.

今與ヘラレタル整式ヲ $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+kx+l$ ナリトシ, x ノ代リニ α ト置カバ此整式ハ 0 ニナルトセン,但シ此處ニテ n ハ正ノ整數, $a,b,c,\ldots\ldots k,l$ ハ既知數ナリ.

今與ヘラレタル整式ヲ $x-\alpha$ ニテ除シ商 Q ヲ得,剩餘 R ヲ得タリトセン,然ルトキハ

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots\ldots+kx+l=Q(x-\alpha)+R.$$

此等式ノ兩邊ノxノ代リニαト置カン,然ルトキハ

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\ldots\ldots+k\alpha+l=R.$$

然ルニ此左邊ハ假說ニヨリテ0ナルヲ以テ

$$R=0.$$

即チ剩餘ハ0ナリ,故ニ與ヘラレタル整式ハ$x-\alpha$ニテ割リ切ルヽナリ,即チ$x-\alpha$ハ與ヘラレタル整式ノ一因數ナリ.

例. $x^3-5x-12$ニ於テ$x=3$ト置クトキニハ之ハ0トナル故ニ此整式ハ$x-3$トイフ因數ヲ含ムベシ,即チ除法ニヨリテ次式ヲ得.

$$x^3-5x-12=(x-3)(x^2+3x+4).$$

上ノ事ヲ應用スレバ方程式ノ一ノ根ヲ知ルトキニハ其方程式ヲ低次ナラシムルコヲ得可シ,因テ高次方程式ノ或モノハ是迄ニ知リタル事ニヨリテ解クコヲ得.

例 1. 方程式$x^3-6x^2+5x+12=0$ノ一ノ根ガ3ナルコヲ知リテ他ノ根ヲ求ム.

3ガ與ヘラレタル方程式ノ一根ナリトイフコハ整式$x^3-6x^2+5x+12$ハxニ3ヲ代入スレバ0トナルトイフコナルヲ以テ$x-3$ハ此整式ノ一因數ナルベシ,即チ除法ニヨリテ

$$x^3-6x^2+5x+12=(x-3)(x^2-3x-4).$$

故ニ與ヘラレタル方程式ハ

$$(x-3)(x^2-3x-4)=0.$$

此處ニテ$x-3=0$ノ與フル根ハ既ニ知レオルモノニシテ求ムル處ノ根ハ

$$x^2-3x-4=0.$$

ノ根ナリ. 此二次方程式ヲ解キテ

$$x=4\text{或ハ}-1.$$

即チ所要ノ根ハ4ト-1トナリ.

例 2. 方程式$x^3+1=2x$ヲ解ケ.

觀察ニヨリテ直チニ1ガ一ノ根ナルコヲ知ルベシ,故ニ此方程式ノ總テノ項ヲ一邊(設令バ左邊)ニ移シテ得ル整式x^3-2x+1ハ$x-1$トイフ因數ヲ含ム可シ.

即チ

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1).$$

與ヘラレタル方程式ハ

$$(x-1)(x^2+x-1)=0.$$

トナリ,1ノ他ノ根ハ

$$x^2+x-1=0.$$

ノ根ナリ. 此二次方程式ヲ解キテ

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

即チ所要ノ根ハ $1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ノ三ツナリ.

例 3. 方程式 $x^3-1=0$ ヲ解ケ.

$x=1$ ト置ケバ左邊ハ0トナル,即チ1ハ根ノ一ツナリ.偖テ

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

ナル故ニ $x=1$ ノ他ニ

$$x^2+x+1=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \text{ 或ハ } \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

又ハ $x=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ 或ハ $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

即チ與ヘラレタル方程式 $x^3-1=0$ ノ根ハ

$$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

ノ三ツナリ.

此三數ノ中何レノ立方モ1ニ等シク,即チ此等ノ數ハ何レモ1ノ立方根ナリ.

例 4. 方程式 $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$ ヲ解ケ.

此方程式ノ根ハ各因數ヲ0ニ等シトオキテ得ル處ノ x ノ値即チ a,b,c,d ノ四ツナルヿハ直チニ書キ下スヿヲ得ベシ.

145. 尙ホ一二ノ例ヲ次ニ示サン.

例 1. 二ツノ方程式

$$2x^3+x^2-5x+2=0,\ 2x^4+x^3-9x^2+8x-2=0.$$

ノ間ノ共通ノ根ヲ求メ且ツ他ノ根ヲモ見出セ.

與ヘラレタル二ツノ方程式ノ左邊ノ最大公約數ヲ求ムレバ $2x^2-3x+1$ ヲ得,因テ上ノ方程式ハ次ノ如シ.

$$(2x^2-3x+1)(x+2)=0,$$

$$(2x^2-3x+1)(x^2+2x-2)=0.$$

共通ノ根ハ此最大公約數 $2x^2-3x+1$ ヲ0ニ等シク置キテ得ル二次方程式ノ根ナリ. 即チ

$$2x^2-3x+1=0.$$

之ヲ解キテ $x=1$ 或ハ $\frac{1}{2}$.

即チ共通ノ根ハ1ト $\frac{1}{2}$ トノ二ツニシテ其他ニハナ

シ. 他ノ根ハ第一ノ方程式ニ於テハ

$$x+2=0.$$

ノ根即チ$x=-2$ニシテ,

第二ノ方程式ニ於テハ

$$x^2+2x-2=0.$$

ノ根即チ　$x=-1+\sqrt{3}$ 或ハ $-1-\sqrt{3}$.

ナリ.

又分數式ヲ含ム或方程式ハ次ノ例ノ如クシテ解クヿヲ得.

例 2. 方程式 $\frac{x^2}{x-1}-\frac{x-1}{x^2}=\frac{8}{3}$ ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ニ於テ $\frac{x^2}{x-1}$ ヲ一ツノ未知數ノ如クニ考ヘ $\frac{x^2}{x-1}=y$ ト書キ表ハセバ方程式ハ

$$y-\frac{1}{y}=\frac{8}{3}.$$

トナル,之ヲ書キ直セバ

$$3y^2-8y-3=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$y=3 \text{ 或ハ } -\frac{1}{3}.$$

最初ノ値ヨリ　$\frac{x^2}{x-1}=3.$

或ハ　$x^2=3(x-1).$

此二次方程式ヲ解キテ

$$x=\frac{3+\sqrt{21}}{2} \text{ 或ハ } \frac{3-\sqrt{21}}{2}.$$

次ノyノ値ヨリ

$$\frac{x^2}{x-1}=-\frac{1}{3}.$$

分母ヲ拂フテ　$x^2=-\frac{1}{3}(x-1).$

此方程式ヲ解キテ

$$x=\frac{-1+\sqrt{13}}{6} \text{ 或ハ } \frac{-1-\sqrt{13}}{6}.$$

即チ所要ノ根ハ $\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{6}$ ノ四ツナリ.

例 3. 方程式 $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$ ヲ解ケ.

與ヘラレタル方程式ニ於テ $x+\frac{1}{x}$ ヲ一ノ未知數ノ如ク取扱ヒ $x+\frac{1}{x}=y$ ト置クベシ,然ルトキハ $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$ ナル故ニ與ヘラレ方程式ハ次ノ如クナルナリ.

$$6(y^2-2)+5y-38=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$y=\tfrac{5}{2}, \text{ 或ハ } -\tfrac{10}{3}.$$

ヲ得.

最初ノyノ値ヨリ

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}.$$

分母ヲ拂フテ項ヲ移セバ

$$2x^2-5x+2=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$x=2 \text{ 或ハ } \tfrac{1}{2}.$$

次ニyノ第二ノ値ヨリ

$$x+\frac{1}{x}=-\frac{10}{3}.$$

分母ヲ拂ヒ項ヲ移シテ

$$3x^2+10x+3=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$x=-3 \text{ 或ハ } -\tfrac{1}{3}.$$

即チ所要ノ根ハ$2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$ノ四ツナリ

演習問題 48.

次ノ方程式ヲ解ケ.

1. $x^4-11x^2+30=0.$
2. $2x^4-8x^2+6=0.$
3. $x^4-30x^2+56=0.$
4. $x^4-7x^2-18=0.$
5. $4x^4-3x^2-10=0.$
6. $\dfrac{x^2-2}{6}+\dfrac{4}{x^2}=2.$
7. $x(x-1)(x+1)=6\times7\times8.$
8. $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{5}{2}.$
9. $(x^2-x)^2-4(x^2-x)=12.$
10. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2+\dfrac{1}{a^2}.$
11. $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{17}{4}.$
12. $(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)=12.$

13. 一ツノ根ヲ知リテ次ノ三次方程式ヲ解ケ,但シ既知ノ根ハ〔 〕中ニ挿入セルモノナリ.

(1). $x^3-3x+2=0$, $[x=1]$.

(2). $x^3+10x^2-53x+42=0$, $[a=3]$.

(3). $x^3-x^2-3x-1=0$, $[x=-1]$.

(4). $2x^3-9x^2-22x+13=0$, $[x=\frac{1}{2}]$.

(5). $3x^3-13x^2+11x+14=0$, $[x=-\frac{2}{3}]$.

(6). $2x^3-17x^2+12x+63=0$, $[x=7]$.

14. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}.$

15. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12.$

16. $x^2+x+1=\dfrac{42}{x^2+x}.$
17. $x^4-1=0.$
18. $2x^3-x^2-11x+10=0.$
19. $x^3-x^2-7x+3=0.$
20. $x^3-2x^2-2x+3=0.$
21. $x^3+x^2-8x+4=0.$
22. $x^3+3x^2-6x-8=0.$
23. $2x^3-x^2-2x+1=0.$
24. $2x^3+x^2-2x-1=0.$
25. $x^3+1=0.$

26. 方程式$x^4+3x^3+x^2+4x+5=0$ト$x^4+4x^3+3x^2-7x-7=0$トハ一ツノ共通ノ根ヲ有ストイフ,仍テ問フ此根如何.

27. 方程式$\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ヲ解ケ.

28. 方程式$6\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+5\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-33=0$ヲ解ケ.

29. 方程式$x^2+3x+2=0$ト$x^4-5x^2+4=0$トニ共通ノ根ヲ求ム.

30. 次ノ方程式ヲ解ケ.

(1). $x(x+1)(x+2)=24.$

(2). $x^3-x^2-38x-28=0.$

(3). $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)=12.$

(4). $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=6.7.8.9.$

(5). $(x+3)(x-5)+\dfrac{45}{(x+1)(x-3)}=2.$

第十二章 聯立二次方程式.

145. 二次或ハ二次以上ノ聯立方程式ノ一般ノ解法ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ此處ニハ唯二次方程式ヲ應用シテ解キ得ベキ聯立方程式ノ解法ヲ示スニ止メン.

先ヅ二ツノ未知數ヲ含ミ而カモ一ツノ方程式ガ一次ナル場合ヨリ初メン.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x+y=8,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=15.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式ノ兩邊ノ平方ヲ作レバ

$$x^2+2xy+y^2=64.$$

(2)式ヨリ $4xy=60.$

相減ズレバ $x^2-2xy+y^2=4.$

平方ニ開キテ $x-y=\pm 2.$

(1)式ト組合シテ次ノ二組ノ方程式ヲ得.

$$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=2.\end{cases}\text{或ハ}\begin{cases}x+y=8,\\x-y=-2.\end{cases}$$

之ヲ解キテ

$$\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases}$$

注意. 此場合ニ於テハ所要ノ根ハ $x=5$ 或ハ $3, y=3$ 或ハ 5 ト書スベカラズ,何ントナレバ $x=5$ ニシテ同時ニ $y=3$ ナル値ガ上ノ聯立方程式ニ適合シ,或ハ $x=3$ ナルトキニハ同時ニ $y=5$ ナル値ガ方程式ニ適合ス,即チ $x=5, y=3$ ガ一組ヲナシ, $x=3, y=5$ モ一組ヲナス,然レトモ $x=3, y=3$ ナル組ハ方程式ニ適合セズ,故ニ $x=5$ 或ハ $3, y=3$ 或ハ 5 ト書セバ未知數ノ値ノ組合セ甚ダ曖昧ナルヲ以テ此ノ如キ書キ方ハ之ヲ避ケ上ノ如ク一組ヅヽ書スベシ.

此例ニ示セル解法ハ未知數ノ和 $x+y$ ガ與ヘラレタルトキニハ他ノ方程式ヲ用ヰテ其差 $x-y$ ノ値ヲ見出シ,次ニ此和ト差トヲ用ヰテ x ト y トヲ見出スニアリ.

此方法ヲ用ウル場合中々多シ.

此例ハ又次ノ如クシテモ解クヿヲ得.

與ヘラレタル方程式ヲ吟味スルニ此處ニハ二ツノ未知數 x, y ノ和ト其積トガ知レ居ルナリ,今 x, y ガ或二次方程式ノ二根ヲ表ハストスレバ,根ノ和ト積トガ知レ居ル故ニ x, y ヲ根トセル二次方程式ヲ作ルヿヲ得ベシ(第十章ニヨリ).即チ

$$z^2-8z+15=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ二ツノ根 3 ト 5 トヲ得,此根ノ内一ヲ x トスレバ他ハ y ナリ,故ニ與ヘラレタル聯立方程式ノ根ハ次ノ如シ.

$$\begin{cases} x=3, \\ y=5. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$$

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x-y=8, \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$xy=33. \cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)式ノ兩邊ノ平方ヲ作レバ

$$x^2-2xy+y^2=64.$$

(2)式ヨリ $4xy=132.$

相加ヘテ $x^2+2xy+y^2=196.$

平方ニ開キテ

$$x+y=\pm 14.$$

(1)式ト結合シテ次ノ二組ノ方程式ヲ得.

$$\begin{cases}x-y=8,\\x+y=14.\end{cases} \text{或ハ} \begin{cases}x-y=8,\\x+y=-14.\end{cases}$$

之ヲ解キテ

$$\begin{cases}x=11,\\y=3.\end{cases} \text{或ハ} \begin{cases}x=-3,\\y=-11.\end{cases}$$

例 3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x+y=12, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2+y^2=90 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ノ兩邊ノ平方ヲ作リ,(2)ノ兩邊ヲ夫々減ズレバ

$$2xy=54.$$

或ハ $xy=27. \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)ト(3)トノ方程式ヲ解キテ所要ノ根ヲ得可シ;偖(1)ト(3)トノ解法ハ例1ノ場合ト全ク相等シ,之ヲ解キテ

$$\begin{cases}x=3,\\y=9.\end{cases} \text{或ハ} \begin{cases}x=9,\\y=3.\end{cases}$$

例 4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$2x-3y=5, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x^2-2xy-15y=25. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ヨリシテ

$$y=\frac{2x-5}{3}.$$

此yノ値ヲ(2)ノ方程式中ニ置キ換フレバ

$$3x^2-2x\frac{2x-5}{3}-15\frac{2x-5}{3}=25.$$

或ハ $5x^2-20x=0.$

此二次方程式ヲ解キテ$x=0$或ハ4.

$x=0$ナル時ニハ$y=\frac{2\times 0-5}{3}=-\frac{5}{3}.$

$x=4$ナル時ニハ$y=\frac{2\times 4-5}{3}=1.$

即チ所要ノ根ハ

$$\begin{cases}x=0,\\y=-\frac{5}{3}.\end{cases} \text{或ハ} \begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$$

此例ニ示ス處ハ聯立方程式ニ於テ一次方程式ヲ含ム場合ノ一般ナル解法ナリ,即チ其解法ハ先ヅ一次方程式ヨリシテ二ツノ未知數ノ中ノ何レカ一ツヲ他ノ未知數ト既知數トニテ表ハシ之ヲ他ノ方程式中ニ置キ換ヘテ得ベキ他ノ未知數ノミヲ含ム方程式ヲ解キ,而シテ得

タル未知數ノ値ヲ用ヒテ尙ホ一ツノ未知數ノ値ヲ見出スニアリ.

例1,2,3モ亦此方法ニテ解クヿヲ得.

例 5. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$xy+4x-5y=8, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2xy-3x+2y=7. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

與ヘラレタル方程式ハ何レモ一次方程式ニアラズ,然レ𪜈此方程式ヨリ一次方程式ヲ誘出スルヿヲ得,從テ其ヲ用ウレバ此場合ノ解法ハ一ツノ方程式ガ一次方程式ナル場合トナルナリ,其方法ハ次ニ示ス如シ.

(1)ノ兩邊ノ二倍ヨリ夫々(2)ノ兩邊ヲ減ズレバ

$$11x-12y=9.$$

因テ $$y=\frac{11x-9}{12}.$$

此値ヲ(1)ノ中ニ置キ換フレバ

$$x\frac{11x-9}{12}+4x-5\frac{11x-9}{12}=8.$$

或ハ $$11x^2-16x-51=0.$$

此二次方程式ヲ解キテ

$$x=3 \text{ 或ハ } -\frac{17}{11}.$$

先ヅ $x=3$ ナルトキニハ $y=\frac{11\times3-9}{12}=2.$

$x=-\frac{17}{11}$ ナルトキニハ $y=\frac{11\times(-\frac{17}{11})-9}{12}=-\frac{13}{6}.$ 即チ所要ノ根ハ

$$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases} \text{ 或ハ } \begin{cases}x=-\frac{17}{11},\\y=-\frac{13}{6}.\end{cases}$$

演習問題 49.

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

1. $x+y=11,$ $xy=24.$
2. $x+y=-2,$ $xy=-63.$
3. $x+y=13,$ $xy=22.$
4. $x-y=8,$ $xy=105.$
5. $x-y=-3,$ $xy=238.$
6. $xy=115,$ $x+y=28.$
7. $x+y=-34,$ $xy=168.$
8. $x+y=21,$ $x^2+y^2=221.$
9. $x-y=2,$ $x^2+y^2=34.$
10. $2x-4y=5,$ $4x^2+y^2=2.$
11. $3x+y=14,$ $x^2-2xy+2y^2=29.$
12. $x+y=7,$ $x^2-y^2=63.$

13. $x+y=-7,$
$x^2+y^2=65.$

14. $xy-x+2y=44,$
$5x-2xy+6y=-3.$

15. $2x^2+xy-10y^2=20,$
$3x+7y=4.$

16. $3xy+5x-y=1,$
$8x+2y+2xy=0.$

17. $x-y=-1,$
$x^2+y^2=5.$

18. $x-2xy+5y=8,$
$2x+5xy+25y=4.$

146. 二ツノ未知數ヲ含ム二ツノ二次方程式ヨリ成ル聯立方程式ノ一般ノ解法ヲ論ズルトキニハ二次以上ノ方程式ヲ解カザルベカラズ,從ツテ此ノ如キ塲合ノ解法ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スル故ニ此處ニハ唯或格段ナル塲合ノ解法ヲ示スニ止メン.

一般ニ聯立方程式ヲ組成スル二ツノ二次方程式ノ未知數ヲ含ム項ガ何レモ其未知數ニツキテ同次ニシテ二次ナルトキニハ次ノ例ニ示ス如クシテ解クヿヲ得.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$3x^2+xy+2y^2=32,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-xy+6y^2=12.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ノ兩邊ヲ(2)ノ兩邊ニテ除スレバ

$$\frac{3x^2+xy+2y^2}{x^2-xy+6y^2}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}\cdots(3)$$

故ニ $3(3x^2+xy+2y^2)=8(x^2-xy+6y^2).$

或ハ $x^2+11xy-42y^2=0.\cdots\cdots\cdots(4)$

偖テ $x\neq0$,何トナレバ $x=0$ ナラバ(4)ニヨリテ $y=0$ トナルベク,然ルニ $x=0, y=0$ ハ與ヘラレタル方程式ニ適合セザレバナリ.

因テ x^2 ニテ(4)ノ兩邊ヲ除セバ

$$1+11\frac{y}{x}-42\left(\frac{y}{x}\right)^2=0.$$

今 $\frac{y}{x}$ ヲ一ツノ未知數ノ如クニ考フレバ此方程式ハ $\frac{y}{x}$ ニ付キテ二次方程式ナリ,之ヲ解キテ

$$\frac{y}{x}=\frac{1}{3}\text{ 或ハ }-\frac{1}{14}.$$

即チ $y=\frac{x}{3}$ 或ハ $y=-\frac{x}{14}.$

先ヅ $y=\frac{x}{3}$ トスレバ(1)ハ $\frac{32x^2}{9}=32$ 或ハ $x^2=9$ トナリ,

(2)ハ $\frac{12x^2}{9}=12$ 即チ同ジク $x^2=9$ トナル,之ヨリ

$$x=\pm3.$$

$x=3$ ナルトキニハ $y=\frac{3}{3}=1.$

$x=-3$ ナルトキニハ $y=\frac{-3}{3}=-1.$

次ニ $y=-\frac{1}{14}x$ ナルトキニハ(1)ハ $\frac{144}{49}x^2=32$ 或ハ $9x^2=98$ トナリ,(2)ハ $\frac{54}{49}x^2=12$ 即チ同ジク $9x^2=98$ トナリ之ヨリ

$$x=\pm\frac{7\sqrt{2}}{3}.$$

$x=\frac{7\sqrt{2}}{3}$ ナルトキニハ $y=-\frac{7\sqrt{2}}{3\times14}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$

$x=-\frac{7\sqrt{2}}{3}$ ナルトキニハ $y=-\left(\frac{-7\sqrt{2}}{3\times14}\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}.$

故ニ所要ノ根ハ次ノ四組アルナリ.

$$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=-3,\\y=-1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{7\sqrt{2}}{3},\\y=-\frac{\sqrt{2}}{6}.\end{cases}\quad\begin{cases}x=-\frac{7\sqrt{2}}{3},\\y=\frac{\sqrt{2}}{6}.\end{cases}$$

此處ニ示セル解法ノ眼目トセル處ハ未知數ノミヲ含ム方程式ヲ作リテ夫ヨリ y ハ x ノ何倍ニ等シキカヲ表ハス關係即チ y ト x トノ比(後章比ノ定義ヲ參照セヨ)ヲ見出スニアリ,故ニ次ノ如クシテモ解クヿヲ得.

$y=mx$ ト置クベシ,然ルトキハ方程式(1)及ビ(2)ハ

$$x^2(3+m+2m^2)=32,\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$x^2(1-m+6m^2)=12.\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

(5)ノ兩邊ヲ(6)ノ兩邊ニテ夫々除スレバ

$$\frac{3+m+2m^2}{1-m+6m^2}=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}\cdots\cdots(7)$$

或ハ $$1+11m-42m^2=0.$$

之ヨリ $m=\frac{1}{3}$ 或ハ $-\frac{1}{14}$ ヲ得,之ヲ用ヰテ(5)ヨリ x ヲ得ベク其値ヨリ y ヲ得ベシ,其方法ハ上ト相同シ.

注意. 與ヘラルタル聯立方程式ニ於テ未知數ヲ含ム項ヲ一邊ニ集メテ得ベキ二次ノ同次式ガ公約數ヲ有スルトキニ上ノ方法ニヨリテ解ケバ m(或ハ $\frac{y}{x}$)ノ不合理ナル値ヲ得ベシ,之ヲ避クルニハ(3)或ハ(7)ノ如ク書キ表ハシタルトキニ其左邊ノ分數式ヲ簡約(即チ分子及ビ分母ヲ其最大公約數ニテ除ス)スレバ可ナリ.

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x^2+3xy+2y^2=35,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x^2+xy-2y^2=25.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$y=mx$ ト置ケバ(1)ト(2)ハ

$$x^2(1+3m+2m^2)=35,\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$x^2(3+m-2m^2)=25. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

トナル,(3)ノ兩邊ヲ(4)ノ兩邊ニテ除スレバ

$$\frac{1+3m+2m^2}{3+m-2m^2}=\frac{35}{25}=\frac{7}{5}\cdots\cdots\cdots(5)$$

之ヨリ　$5(1+3m+2m^2)=7(3+m-2m^2).$

或ハ　$24m^2+8m-16=0.$

$$3m^2+m-2=0.$$

之ヲ解キテ $m=\frac{2}{3}$ 或ハ -1 ヲ得.

先ヅ $m=\frac{2}{3}$ ナルトキニハ(3)ニヨリ

$$\frac{35x^2}{9}=35.$$

或ハ　$x^2=9.$

即チ　$x=\pm 3.$

$x=3$ ナルトキニハ $y=\frac{2}{3}\times 3=2.$

$x=-3$ ナルトキニハ $y=\frac{2}{3}\times(-3)=-2.$

次ニ $m=-1$ ナルトキニハ(3)ノ左邊ハ0トナリテ此値ハ不合理ナリ,今與ヘラレタル方程式ヲ吟味スルニ次ノ如ク書クヿヲ得ベシ.

$$(x+y)(x+2y)=35,$$

$$(x+y)(3x-2y)=25.$$

即チ未知數ヲ含ム項ヲ一邊ニ集メテ得ル處ノ二次ノ同次式ガ公約數$(x+y)$ヲ有ス,是ニ於テカ不合理

ナルmノ値ヲ得タルナリ,左レドモ今mノ計算ニ於テ(5)ノ左邊ヲ簡約スレバ次ノ如クナル.

$$\frac{1+2m}{3-2m}=\frac{7}{5}.$$

之ヲ解キテ　$m=\frac{2}{3}.$

ヲ得,而シテ最早不合理ナル値ハ出テ來ラザルナリ.

故ニ所要ノ根ハ

$$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}\text{或ハ}\begin{cases}x=-3,\\y=-2.\end{cases}$$

例 3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x^2+y^2=90,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=27.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此場合ハ以上ノ二例ト同ジ方法ヲ用ヰテ解クヿヲ得レドモ,次ノ如クスル方簡單ナリ.

(2)ノ兩邊ニ2ヲ乘ジテ夫々(1)ノ兩邊ニ加ヘ或ハ兩邊ヨリ減ズレバ次ノ方程式ヲ得.

$$x^2+2xy+y^2=144,$$

$$x^2-2xy+y^2=36.$$

平方ニ開キテ　$x+y=\pm 12,$

$$x-y=\pm 6.$$

之ヨリ次ノ四組ノ方程式ヲ得.

$$\begin{cases}x+y=12\\x-y=6\end{cases},\ \begin{cases}x+y=-12\\x-y=6\end{cases},\ \begin{cases}x+y=12\\x-y=-6\end{cases},\ \begin{cases}x+y=-12\\x-y=-6\end{cases}.$$

之ヲ解キテ

$$\begin{cases}x=9,\\y=3.\end{cases}\ \begin{cases}x=-3,\\y=-9.\end{cases}\ \begin{cases}x=3,\\y=9.\end{cases}\ \begin{cases}x=-9,\\y=-3.\end{cases}$$

此解法ハ前節ノ例1,2ニ於ケルト同ジク其眼目トスル處ハ先ヅ二ツノ未知數ノ和ト差トノ値ヲ見出スニアリ.

147. 尙ホ二三ノ格段ナル問題ノ解法ヲ示サン.

例 1. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x+y=5,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^3+y^3=35.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

此一ツハ三次方程式ナリ,左レニ次ノ如クシテ解クヿヲ得.

(1)ノ兩邊ニテ(2)ノ兩邊ヲ夫々除スレバ

$$x^2-xy+y^2=7.\cdots\cdots(3)$$

(1)ノ兩邊ノ平方ヨリ(3)ノ兩邊ヲ減ズレバ

$$3xy=18.$$

或ハ

$$xy=6.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(1)ト(4)トヲ組合ハシテ得ル聯立方程式ノ根ガ所

要ノ根ナリ. 即チ

$$\begin{cases}x+y=5,\\xy=6.\end{cases}$$

之レ145節ノ例1ト其形全ク相等シキ故ニ同樣ニシテ解クヿヲ得ベシ,即チ之ヲ解キテ次ノ根ヲ得.

$$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}\text{或ハ}\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$$

又次ノ如クシテモ解クヿヲ得.

(1)ヨリ$y=5-x$ヲ得,此値ヲ(2)ノ中ニ置キ換フレバ

$$x^3+(5-x)^3=35,\ 15x^2-75x+90=0.$$

或ハ

$$x^2-5x+6=0.$$

之ヲ解キテ$x=2$或ハ3,之ヨリ上ノ二組ノ値ヲ得ベシ.

例 2. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x+y=4,\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$x^4+y^4=82.\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

$x=z+2$ト置ケバ$x+y=4$ニヨリ$y=2-z$, 此等ノ値ヲ(2)ニ置キ換フレバ

$$(z+2)^4+(2-z)^4=82.$$

$$2z^4+48z^2-50=0.$$

即チ

$$z^4+24z^2-25=0.$$

之ヲ解キテ$z^2=1$或ハ-25,從テ$z=\pm1$或ハ$\pm5i$ヲ得.

$z=1$ ナルトキニハ　$x=1+2=3, y=2-1=1.$

$z=-1$ ナルトキニハ $x=-1+2=1, y=2-(-1)=3.$

$z=5i$ ナルトキハ　$x=2+5i.$

$y=2-5i.$

$z=-5i$ ナルトキニハ $x=2-5i.$

$y=2+5i.$

即チ次ノ四組ノ答ヲ得タリ.

$$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}\quad\begin{cases}x=2+5i,\\y=2-5i.\end{cases}\quad\begin{cases}x=2-5i,\\y=2+5i.\end{cases}$$

例 3. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x-y=2, x^5-y^5=242.$$

此方程式ハ上ノ例2ノ如ク $x=z-1$ ト置キテ解クヿヲ得ベシ,左レモ又次ノ如クシテモ解クヿヲ得.

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=\frac{242}{2}=121.$$

$$x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+x^4=121\ldots\ldots(1)$$

$x-y=2$ ノ兩邊ヲ自乘スレバ

$$x^2-2xy+y^2=4.$$

或ハ　$$x^2+y^2=2xy+4\ldots\ldots(2)$$

此方程式ノ兩邊ヲ自乘スレバ

$$x^4+2x^2y^2+y^4=4x^2y^2+16xy+16.$$

或ハ　$$x^4+y^4=2x^2y^2+16xy+16\ldots\ldots(3)$$

(1)ヲ書キ直セバ

$$x^4+y^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2=121.$$

x^4+y^4 ノ代リニ(3)ノ右邊, x^2+y^2 ノ代リニ(2)ノ右邊ヲ置キ換フレバ

$$2x^2y^2+16xy+16+xy(2xy+4)+x^2y^2=121.$$

$$5x^2y^2+20xy=105.$$

即チ　$$x^2y^2+4xy-21=0.$$

之ヲ解キテ $xy=3$ 或ハ -7 ヲ得. 因テ

$$\begin{cases}x-y=2,\\xy=3.\end{cases}\text{或ハ}\begin{cases}x-y=2,\\xy=-7.\end{cases}$$

之ヲ解キテ

$$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=-3.\end{cases}\text{或ハ}\begin{cases}x=1+i\sqrt{6},\\y=-1+i\sqrt{6}.\end{cases}\quad\begin{cases}x=1-i\sqrt{6},\\y=-1-i\sqrt{6}.\end{cases}$$

例 4. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$2xy-x^2=3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

$$x^2+4xy+3x=40-6y-4y^2.\ldots\ldots(2).$$

(2)ノ項ヲ移セバ

$$x^2+4xy+4y^2+3x+6y-40=0.$$

$$(x+2y)^2+3(x+2y)-40=0.$$

$$(x+2y+8)(x+2y-5)=0.$$

因テ　$x+2y=5$ 或ハ -8.

$x+2y=5$ ト(1)トヨリ

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ y=\frac{7}{4}. \end{cases}$$

$x+2y=-8$ ト(1)トヨリ

$$\begin{cases} x=\dfrac{-4+\sqrt{10}}{2}, \\ y=\dfrac{-12-\sqrt{10}}{4}. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x=\dfrac{-4-\sqrt{10}}{2}, \\ y=\dfrac{-12+\sqrt{10}}{4}. \end{cases}$$

148. 三ツノ未知數ヲ含ム聯立二次方程式ノ一般ノ解法ハ初等代數學ニ於テ論ズルヿヲ得ズ,故ニ次ニハ最モ簡單ナル一例ヲ示スニ止メン.

例. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$xy+xz=14, \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

$$yz+yx=18, \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

$$zx+zy=20. \cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

(1)ノ兩邊ヘ(2)ノ兩邊ヲ夫々相加フレバ

$$2xy+xz+yz=32. \cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

(4)ノ兩邊ヨリ(3)ノ兩邊ヲ夫々相減ズレバ

$$2xy=12.$$

即チ $xy=6. \cdots\cdots\cdots (5).$

之ニヨリテ(1)ヨリ $xz=8. \cdots\cdots\cdots (6).$

又(2)ヨリ $yz=12. \cdots\cdots (7).$

(5)ト(6)トヨリ乘法ニヨリテ

$$x^2yz=48.$$

(7)ニヨリテ $x^2=4.$

故ニ $x=\pm 2.$

因テ $x=2$ ナル時ニハ(5)ト(6)トヨリ

$$y=3,\ z=4.$$

$x=-2$ ナル時ニハ $y=-3,\ z=-4.$

即チ次ノ二組ノ根ヲ得タリ.

$$\begin{cases} x=2, \\ y=3, \\ z=4. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x=-2, \\ y=-3, \\ z=-4. \end{cases}$$

別法. 次ノ如クシテモ解クヿヲ得.

(1),(2),(3)ノ兩邊ヲ夫々相加フレバ

$$2xy+2yz+2zx=52.$$

故ニ $xy+yz+zx=26. \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4)ト(3)トヨリ $xy=6. \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

(4)ト(2)トヨリ $xz=8. \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$

(4)ト(1)トヨリ $yz=12. \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$

此三方程式ノ各邊ヲ夫々相乘ズレバ

$$x^2y^2z^2=576.$$

平方ニ開キテ $xyz=\pm 24.$

$xyz=24$ ナル時ニハ(5),(6),(7)ヨリ

$$x=2,\ y=3,\ z=4.$$

ヲ得,$xyz=-24$ ナルトキニハ

$$x=-2,\ y=-3,\ z=-4.$$

ヲ得ルナリ.

演習問題 50.

次ノ聯立程方式ヲ解ケ.

1. $x+y=6,$ $x^2+y^2=90.$

2. $x-y=10,$ $3xy=72.$

3. $x-y=2,$ $x^2+y^2=\frac{5}{2}.$

4. $x-y=2,$ $x^2-xy+y^2=3.$

5. $x+2y=7,$ $xy-3x+8y=24.$

6. $xy-x=5,$ $2xy+y-6x=12.$

7. $2x-3y=2,$ $2x^2-6xy+2y^2+7x=11.$

8. $x+2y=2,$ $4y+3x=12xy.$

9. $x-y=3,$ $x^3-y^3=9.$

10. $2x^2-xy=0,$ $3y^2+5xy=102.$

11. $x^2-3xy=0,$ $3y^2+5x^2=48.$

12. $x^2+2xy=24,$ $2xy-y^2=7.$

13. $2x^2-3y^2=2,$ $3x^2+y^2=91.$

14. $7x^2+3xy=10,$ $y^2-11xy=75.$

15. $x^2+xy-6y^2=21,$ $xy-2y^2=4.$

16. $x^2+xy=6,$ $3xy+4y^2=115.$

17. $x^2+y^2=5,$ $x^2-y^2=xy+1.$

18. $(x-y)^2=9,$ $y^2-xy+x=3.$

19. $2x^2-5xy-3y^2=36,$ $2x^2-11xy-6y^2=60.$

20. $y(2x-3y)=4,$ $2x^2-xy-3y^2=11.$

21. $7(x^2+y^2)=25(x^2-y^2),$ $xy=48.$

22. $2x^2-xy+y^2=2y,$ $2x^2+4xy=5y.$

23. $x^2+y^2=a^2+b^2,$ $xy+y^2=b(a+b).$

24. $x^2+y^2=5,$ $2xy-x-y=1.$

25. $x+y=3,$ $x^5+y^5=33.$

26. $x^2+xy+y^2=37,$ $x^4+x^2y^2+y^4=481.$

27. $x^2+xy=8x+3,$ $y^2+xy=8y+6.$

28. $x^2+2xy-y^2=a^2+2a-1,$ $(a-1)x(x+y)=a(a+1)y(x-y)$

29. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1,$ $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=2.$

30. $\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=3,$ $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}=20.$

31. $x^2-xy=2x+5,$ $xy-y^2=2y+2.$

32. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3},$ $x^2-y^2=3.$

33. $\frac{x}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=1,$ $2+3xy=3x.$

34. $x^3+1=9y,$ $x^2+x=6y.$

35. $x^2-y^2=7,$
$x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)}=30.$

36. $xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3},$
$xy+\frac{y}{x}=\frac{5}{6}.$

37. $x^2+y^2-16=2xy,$
$xy(xy-11)=12.$

38. $18+9(x+y)=2(x+y)^2,$
$6-(x-y)=(x-y)^2.$

39. $x^2=ax+by,$
$y^2=ay+bx.$

40. $\frac{a^2}{x^2}-\frac{y^2}{b^2}=12,$
$\frac{ab}{xy}=2.$

41. $x^2yz=a^4,$
$xy^2z=b^4,$
$xyz^2=c^4.$

42. $(x+y)(x+z)=a^2,$
$(y+z)(y+x)=b^2,$
$(z+x)(z+y)=c^2.$

聯立二次方程式應用問題.

149. 次ニ聯立二次方程式應用問題ノ例ヲ示サン.

例 1. 甲乙ノ二數アリ,其平方ノ和ハ其積ノ二倍ヨリモ9丈ケ大ニシテ,甲數ノ三倍ヨリ乙數ヲ減ジタル差ハ1ニ等シトイフ,仍テ問フ甲乙二數トハ如何.

xヲ以テ甲數,yヲ以テ乙數ヲ表ハサン,然ルトキハ題

意ニヨリ次ノ二次方程式ヲ得.

$$x^2+y^2=2xy+9, \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

$$3x-y=1. \cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

(1)ニ於テ項ヲ移セバ

$$x^2-2xy+y^2=9.$$

平方ニ開キテ $x-y=\pm 3.$

因ツテ次ノ二組ノ方程式ヲ得.

$$\begin{cases} x-y=3, \\ 3x-y=1. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x-y=-3, \\ 3x-y=1. \end{cases}$$

之ヲ解キテ

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-4. \end{cases} \text{或ハ} \begin{cases} x=2, \\ y=5. \end{cases}$$

例 2. 若干個ノ林檎ヲ若干名ノ兒童ニ等分セシニ,各一人ノ分ケ前ハ兒童ノ數二人多キトキノ分ケ前ヲ14ヨリ減ジタル差ニ等シク,若シ林檎ノ總數二個多ク兒童ノ數一人少ナキトキニハ各一人ノ分前ハ10個ナリトイフ,仍テ問フ林檎ノ總數及ビ兒童ノ人數各如何.

yヲ以テ林檎ノ總數,xヲ以テ兒童ノ人數ヲ表ハサン,然ルトキハ$\frac{y}{x}$ハ各兒ノ分ケ前ヲ表ハシ,$\frac{y}{x+2}$ハ兒童

二名多キトキノ分ケ前,$\frac{y+2}{x-1}$ハ林檎ノ數二個多ク兒童ノ數一名少ナキトキノ分ケ前ヲ表ハスベシ,故ニ題意ニヨリ

$$\frac{y}{x}=14-\frac{y}{x+2},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{y+2}{x-1}=10.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)ヨリ　$y+2=10(x-1),\ y=10x-12.$

(1)ヨリ　$y(x+2)=14x(x+2)-xy.$

$$2xy+2y=14x^2+28x.$$

即チ　$xy+y=7x^2+14x.$

yノ代リニ$10x-12$ヲ置キ換フレバ

$$x(10x-12)+10x-12=7x^2+14x.$$

$$10x^2-12x+10x-12=7x^2+14x.$$

即チ　$3x^2-16x-12=0.$

之ヲ解キテ$x=6$或ハ$-\frac{2}{3}$ヲ得,偖テxハ兒童ノ數ヲ表ハス故ニ正ノ整數ナルベキヲ以テ$-\frac{2}{3}$トイフ値ハ題意ニ適セズ,故ニ$x=6$,然ルトキハ$y=10\times6-12=48$,故ニ兒童ノ數ハ六名ニシテ林檎ノ數ハ48個ナリ.

演習問題 51.

1. 二個ノ正數アリ,其平方ノ和ハ153ニシテ其積ハ36ナリトイフ,此二數ヲ求ム.

2. 甲乙ノ二數アリ,甲ノ平方ハ乙ノ平方ノ二倍ヨリモ7丈ケ多ク,乙ノ三倍ハ甲ノ二倍ヨリモ1丈ケ多シトイフ,甲乙二數各如何.

3. 二數アリ,其平方ノ和ハ58ニシテ,此和ハ又二數ノ積ノ二倍ヨリモ16丈ケ大ナリトイフ,二數トハ各如何.

4. 甲乙ノ二正數アリ,甲ノ平方ヨリ乙ノ平方ヲ減ジタル差ハ39ニシテ,二數ノ平方ノ和ハ其積ノ二倍ヨリモ9丈ケ大ナリトイフ,仍テ問フ甲乙二數各如何.

5. 二桁ノ數アリ,十位ノ數字ト一位ノ數字トノ積ノ二倍ハ此數ヨリモ2丈ケ大ニシテ,此數ニ18ヲ加ヘタルモノハ此數ノ數字ノ位置ヲ轉倒シテ得ル數ニ等シトイフ,此數ヲ問フ.

6. 二個ノ正數アリ,其平方ノ和ハ137ニシテ,其積ハ其和ノ三倍ヨリモ1丈ケ少ナシトイフ,仍テ問フ此二數トハ如何.

7. 周圍60間面積216坪ノ矩形ノ宅地アリ,此宅地ノ長サ幅各如何.

8. 二個ノ正數アリ,其和ノ平方ト其和ノ三倍ト

ノ和ハ270ニシテ,其平方ノ和ハ其積ノ二倍ト121トノ和ニ等シトイフ,此二數ヲ見出セ.

9. 二個ノ正數ノ差ト其平方ノ差トノ積ハ160ニシテ,此二數ノ和ニ其和ノ平方ヲ加ヘタルモノハ110ニ等シトイフ,仍テ此二數如何.

10. 甲乙二種ノ酒アリ,甲種ハ乙種ヨリモ一升ニ付キ15錢丈ケ高價ナリトイフ,或人甲酒若干升ヲ購求シ其代價トシテ金24圓ヲ仕拂ヒ,又乙酒ヲ甲酒ヨリモ8升丈ケ餘計ニ購入シ其代價トシテ金21·6圓ヲ仕拂ヒタリトイフ,此人ノ買ヒ取リシ兩種ノ酒ノ升數ヲ問フ.

11. 二個ノ正數ノ積ハ其和ニ等シク,其和ニ其平方ノ和ヲ加ヘタルモノハ12ニ等シトイフ,二數如何.

12. 一組ノ水夫アリ,一ノ河流ヲ溯ルニ9時間ヲ要セリ,又靜水ノ時ニ同距離ヲ漕グニ要スル時間ハ同ジ河流ニ從ツテ同距離ヲ漕カズニ下ルニ要スル時間ヨリモ12時間丈ケ少ナシトイフ,此一組ノ水夫ガ此河流ノ同距離ヲ漕下ルニ要スル時間幾何.

13. 三桁ノ數アリ,十位ノ數字ハ一位ノ數字ト百位ノ數字トノ和ノ半分ニ等シク,此數ニ5ヲ加ヘタルモノハ各數字ノ平方ノ和ノ7倍ニ等シ,又此數ニ

198ヲ加ヘタルモノハ此數ノ一位ト百位トノ數字ノ位置ヲ交換シタル數ニ等シトイフ,此數ヲ求ム.

14. 長サハ幅ヨリモ30間長キ矩形ノ池ノ周圍ニ或幅ノ馬場ヲ造ル爲メニ800坪ノ地面ヲ要シ,而シテ此馬場ノ周廻180間ナリトイフ,仍テ問フ此馬場ノ巾及ビ池ノ面積如何.

15. 一旅客甲地ヲ出發シテ乙地ニ向ヒ20哩ヲ行キタル後足ヲ痛メタル爲メニ每時ノ速度2哩ヲ減ジテ目的地ニ達セリ,又若シ途中足ヲ痛ムルヿ無カリセバ一時間早ク,又若シ終始後ノ速度ヲ以テ進ミタランニハ5時間遲ク到着シタルナラントイフ,甲乙兩地ノ距離及ビ此旅客ノ初メノ速度每時何哩ナルカ.

16. 二數アリ,其立方ノ和ハ63ニシテ,其平方ノ和ト其積ノ二倍トノ和ハ9ニ等シトイフ,仍テ此二數ヲ問フ.

17. 一飛脚甲地ヲ發シテ乙地ニ向ヘリ,此路程ノ中央ヨリ先ハ山路ナルヲ以テ前半路程ヲ進ミタルトキヨリハ每時二十四町丈ケ少ナキ速度ニテ進ミ十時間ニシテ乙地ニ達セリ,歸途ニハ最初ノ速度ヨリモ每時半里丈ケ少ナキ速度ニテ進ミ甲地ニ歸着ス

ルニ十時四十分間ヲ要セシトイフ,此飛脚ノ最初ノ速度及ビ甲乙兩地ノ距離ヲ計算セヨ.

18. 二數アリ,其平方ノ和ハ其積ノ二倍ニ4ヲ加ヘタルモノニ等シク,又其積ト此積ヨリ3ヲ減ジタル差トノ積ハ4ニ等シトイフ,仍テ此二數ヲ問フ.

19. 或人若干ノ金高ヲ以テ上下二種ノ鷄卵ヲ購求セリ,上卵十個ノ價ハ下卵十個ノ價ヨリモ五錢丈ケ高價ナリ,偖所持金ノ一半ヲ以テ上卵ヲ他ノ半分ヲ以テ下卵ヲ買ヒシニ下卵ノ數ハ上卵ノ數ヨリモ二十個丈ケ多カリキ,若シ所持金ノ$\frac{2}{3}$ニテ上卵ヲ買ヒ而シテ之ト同數ノ下卵ヲ買ハンニハ殘金ニテハ四十錢丈ケ不足スベシトイフ,仍テ問フ此人ノ所持金及ビ上下兩種ノ鷄卵十個ノ價各如何.

20. 旅客列車ガ甲驛ヲ發シテ乙驛ニ向ヒタルト同時ニ荷物列車ガ乙驛ヲ發シテ甲驛ニ向ヒ,$43\frac{1}{6}$分間ノ後兩列車相會シ,又荷物列車ハ旅客列車ヨリモ36分間丈ケ早ク目的地ニ達セリトイフ,甲乙兩驛ノ距離ハ36哩ナリトス,兩列車ノ每時ノ速度如何.

21. 或商人絹手巾若干打ヲ購求シ,四打ヲ引去リテ其餘ヲ原價ノ三割ノ利益ヲ以テ賣リシニ收得金ハ總元金ヨリモ16圓丈ケ少ナカリキ,若シ全躰ヲ二

割ノ利益ヲ得テ賣リタランニハ純益金ハ24圓ナルベシトイフ,仍テ問フ此商人手巾ヲ何打買ヒシカ又手巾一打ノ價如何.

22. 甲乙ノ工人同ジ日數ノ間或仕事ニ從事シ,甲ハ此日數ノ間一日モ休業セズシテ賃金12·80圓ヲ受取リ,乙ハ此間ニ四日間休ミテ賃金7·20圓ヲ受取リタリ,若シ乙ガ一日モ休業セズ甲ハ四日間休業シタランニハ兩人同額ノ賃錢ヲ受取ルナラントイフ,此日數及ビ甲乙兩人一日ノ賃金幾何.

23. a,bナル二人ノ飛脚アリ,bガ乙地ヲ發スルト同時ニaハ甲地ヲ發シテbト同シ路ヲ取ル爲メニ乙地ニ向ヘリ,而シテaガbニ追付キタル時迄ニ兩人ノ歩行セシ道程ハ合計15里ニシテaハ此時ヨリ二時間前ニ乙地ヲ經過セリ,又bガ甲地ヲ發シテ此處ニ達センニハ$4\frac{1}{2}$時間ヲ要スルナラントイフ,甲乙兩地間ノ距離ヲ問フ.

24. 一ノ傳令騎兵甲地ヲ發シテ乙地ニ向ヒタル後二十分間ヲ經テ一ノ郵便脚夫自轉車ニ乘ジテ甲地ヲ發シ乙地ニ向ヒ,六里ヲ進ミタル後騎兵ニ追付キタリ,尙ホ十分間ヲ經テ郵便脚夫ハ乙地ニ達シ騎

兵ハ出發セシ時ヨリ一時十五分間ヲ經テ目的地ニ達セリトイフ,甲乙兩地ノ距離ヲ問フ.

第十三章 羃及ビ根.

羃.

150. 或數ノ羃ヲ求ムルヿハ乘法ノ格段ナル塲合ニ外ナラズ,從テ次ニ揭グル處ノ羃ニ關スル定則ノ多クハ既ニ知ル處ノモノナリ.

此章ニ於テ何ノ斷モナキトキハm又ハnハ正ノ整數ヲ表ハスモノト知ルベシ.

151. 同ジ數ノ數個ノ羃ノ積ハ諸羃ノ指數ノ和ヲ指數トセル同ジ數ノ羃ニ等シ.

之レ既ニ41節ニ於テ得タル處ナリ.

即チ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ .....(1)

一般ニ $a^m \times a^n \times a^p \times \ldots \times a^t = a^{m+n+p+\cdots+t}$.(2)

$m, n, p, \ldots t$ ハ何レモ正ノ整數ナリ.

之ヨリ直チニ次ノ定則ヲ得.

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \ldots\ldots(3)$$

即チ或ル數ノ羃ノ羃ハ二ツノ指數ノ積ヲ指數トセル同ジ數ノ羃ニ等シ.

又既ニ54節ニ於テ

$$a^m \div a^n = a^{m-n},\ m > n \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}},\ m < n \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ナルヿヲ知リタリ.

即チ或數ノ二種ノ羃ニ於テ高次ノ羃ヲ低次ノ羃ニテ除シテ得ル商ハ兩指數ノ差ヲ指數トセル同ジ數ノ羃ニ等シク,低次ノ羃ヲ高次ノ羃ニテ除シテ得ル商ハ兩指數ノ差ヲ指數トセル同ジ數ノ羃ノ反數ニ等シ.

又 $(ab)^2 = ab \times ab = aabb = a^2b^2.$

$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = aaabbb = a^3b^3.$

一般ニ $(ab)^n = a^nb^n.$

同樣ニ $(abcd\ldots k)^n = a^nb^nc^nd^n\ldots k^n \ldots\ldots (6)$

因テ或ル積ノ或ル高サノ羃ハ各因數ノ同ジ高サノ羃ノ積ニ等シ.

又 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3}$

一般ニ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$

因テ分數ノ或高サノ羃ハ分子ノ同ジ

高サノ羃ヲ分子トシ分母ノ同ジ高サノ羃ヲ分母トセル分數ニ等シ.

152. 正數ノ羃ハ常ニ正數ニシテ,負數ノ羃ハ其指數ガ偶數ナルトキニハ正數ニシテ奇數ナルトキニハ負數ナリ.

之レ符號ノ法則ニヨリテ明ラカナリ.

例令バ $(+a)^2 = a^2,\ (+a)^3 = a^3.$

$(-a)^2 = a^2,\ (-a)^3 = -a^3.$

之ヲ換言スレバ或數ノ偶數次ノ羃ハ正ニシテ奇數次ノ羃ハ其數ト同ジ符號ヲ有ス. 即チ

$$(+a)^{2n} = a^{2n},\ (-a)^{2n} = a^{2n}.$$

$$(+a)^{2n+1} = a^{2n+1},\ (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}.$$

153. 多項式ノ羃ノ公式ノ或モノハ已ニ乘法ニ於テ之ヲ見出シタルヲ以テ次ニ其二三ヲ再記セン.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

之等ノ公式ハ何レモ後章ニ於テ論ズル處ノ二項法定理ノ格段ナル塲合ニ過ギズ.

又 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c$$
$$+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc.$$

之等ノ公式ヲ應用スレバ多項式ノ冪ノ或モノハ容易ニ計算スルヿヲ得.

多項式ノ或ル冪ヲ示ス爲メニ此式ヲ括弧ニ入レ,指數ヲ其右肩ニ附シテ示セル式ノ括弧ヲ取去リテ此冪ニ等シキ式ヲ見出スヿヲ稱シテ此式ヲ展開スルトイフ;假令バ上ノ諸公式ニ於テ等號ノ左邊ノ式ヲ展開シタルモノガ右邊ノ式ナリ.

演習問題 52.

次式ノ括弧ヲ取レ.

1. $(a^2xy^4)^2$.
2. $(-3a^4b)^3$.
3. $(-2x^3y^2)^4$.
4. $(a^4x^2y)^6$.
5. $(-4abx^3)^3$.
6. $(-a^5x^3y^7)^9$.
7. $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4$
8. $\left(-3\frac{x^4}{a^3}\right)^5$.
6. $\left(-\frac{a^2x}{2b^3}\right)^4$.

次式ヲ展開セヨ.

10. $(2-3x^2)^2$.
11. $(ax-2by)^2$.
12. $(a^2-2c^2)^3$.
13. $(2-3x+x^2)^2$.
14. $(2x-3y^2)^4$.
15. $(a+b-c-d)^2$.
16. $(3a-4bx+3cy)^2$.
17. $(a-b-2c)^3$.
18. $(a^2+2b^2-4c^2)^3$.
19. $(2+3a^2x^2-4a^4x^4)^2$.
20. $(a^2-2bx)^5$.
21. $(1+x+x^2-x^3)^2$.
22. $(a+6x+cx^2)^4$.

根.

154. 平方根. 一數ノ平方根ハ恒ニ二ツアリ;其中ノ一ハ正號ヲ有シ他ハ負

號ヲ有ス;例令バa^2ノ平方根ハa及ビ$-a$ノ二ツナリ,此二ツノ内何レカ一ヲ知レバ他ハ直チニ得ラル可シ,故ニ以下此章ニ於テハ其正號ヲ有スル方ノミヲ求ムベシ,又多項式ノ開キ切ルヽ場合ニハ其初項ノ正ナル方ノミヲ求ムベシ.

前ニモイヒタル如ク$\sqrt{a}$ヲ以テaノ平方根ノ正ノ方ヲ表ハス.

155. 立方根. 一數ノ立方根ハ恒ニ三ツアリ.

既ニ144節ノ例ニ於テ1ノ平方根ハ三ツアルヿヲ見出シタリ,即チ$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$之レナリ.

今xヲ以テ或數a^3ノ立方根ヲ表ハスモノトセン,然ルトキハx^3ハa^3ニ等シカラザルベカラズ,故ニ

$$x=a^3.$$

或ハ

$$x^3-a^3=0.$$

即チa^3ノ立方根ハ此三次方程式ノ根ニ等シカルベシ.

偖$x^3-1=0$ノ三根

$$1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

ノ内複素數ナル根ヲ表ハスニ通常ωナル文字ヲ用ウ.

今 $\omega=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ トセバ $\omega^2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

何トナレバ上ノ三數ガ$x^3-1=0$ノ根ナラバ

$$(x^3-1)=(x-1)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

ナラザルベカラズ,之ニヨリテ

$$1=1\times\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\times\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

又上ノ三數ハ1ノ立方根ナル故ニ

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^3=\omega^3=1=1\times\omega\times\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

故ニ $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

又ハ$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ヲ直チニ自乘シテモ$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$トナルナリ.

又 $\omega=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ トセバ $\omega^2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

故ニ今 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 或ハ $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$

トスルトキニハ1ノ立方根ハ次ノ如シ.

$$1, \omega, \omega^2.$$

偖 $x^3=a^3$ ヲ書キ直セバ

$$\frac{x^3}{a^3}=1.$$

或ハ $$\left(\frac{x}{a}\right)^3=1.$$

此方程式ニ適合スル $\frac{x}{a}$ ノ値ハ $1, \omega, \omega^2$ ナル故ニ此方程式ノ根即チ a^3 ノ立方根ハ

$$a, \omega a, \omega^2 a.$$

ノ三ツナリ.

是ニ由ツテ一ツノ有理數ノ立方根ハ常ニ三ツアリテ其中一ハ實數ニシテ他ノ二ツハ複素數ナリ.

通常或數 a ノ立方根ノ實數ノ方ヲ表ハスニ $\sqrt[3]{a}$ ナル記號ヲ用ウ.

此章ニ於テ立方根ヲ求ムルニハ實根

ヲ求ムルヿニ止メン.

一般ニ任意ノ數ノ n 乘根ハ其數 n アリ. 此證明ハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ此處ニハ揭ゲズ.

$\sqrt[n]{a}$ ヲ以テ a ノ n 乘根ノ實數ヲ表ハシ, 若シ實根ニ正負ノ二種アルトキニハ其正ナル方ヲ表ハスモノトス.

一般ニ正數ノ偶數乘根ニハ實根ハ正負ノ二ツアルナリ, 而シテ凡テ有理數ノ奇數乘根ノ實根ハ唯一ツナリ.

又負數ノ偶數乘根ハ皆虛數ヲ含ム.

156. 既ニ $(ab)^n=a^nb^n$ ナルヿヲ知リタリ, 偖根ヲ求ムルコトハ冪ヲ作ルヿノ逆算ナルヲ以テ次式モ亦正シカルベシ.

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}.$$

一般ニ $$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$$

又既ニ單項式ヲ n 乘スルニハ各因數

ノ指數ヲn倍スレバ可キヿヲ知リタリ,因テ逆ニ單項式ノn乘根ヲ求ムルニハ各因數ノ指數ヲnニテ除スレバ可ナリ.

$$\sqrt[n]{a^m b^t}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{t}{n}}.$$

例 1. $\sqrt{4a^2x^4}=\sqrt{2^2a^2x^4}=2ax^2.$

例 2. $\sqrt[3]{27a^3x^6y^9}=\sqrt[3]{3^3a^3x^6y^9}=3ax^2y^3.$

偖各因數ノ指數ガnニテ割リ切レザルトキニハ如何ニスベキヤトイフニ,此時ニハ其割リ切レザル指數ヲ有スル因數ニハ根號ヲ附シ置クベシ.

例 1. $\sqrt{4a^3}=\sqrt{2^2a^3}=2\sqrt{a^3}.$

例 2. $\sqrt[5]{x^5y^3}=x\sqrt[5]{y^3}.$

分數式ノn乘根ハ分子ノn乘根ヲ分子トシ,分母ノn乘根ヲ分母トセル分數式ニ等シ.

例令バ $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

一般ニ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

例 1. $\sqrt{\frac{9x^2}{16a^2}}=\frac{\sqrt{9x^2}}{\sqrt{16a^2}}=\frac{3x}{4a}.$

例 2. $\sqrt[3]{\frac{x^3y^6}{8a^3b^3}}=\frac{\sqrt[3]{x^3y^6}}{\sqrt[3]{8a^3b^3}}=\frac{xy^2}{2ab}.$

157. 開平法. 之ヨリ多項式ノ平方根ヲ求ムル方法ヲ述ベン.

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ナル公式ヲ用ウレバ或多項式ノ平方根ハ視察ニヨリテ容易ニ見出シ得ベキヿアリ.

例 1. $4a^2x^2+12abx+9b^2$ノ平方根ヲ求ム.

或ル格段ナル文字例令バxニ付キテ降冪ノ順ニ配列スベシ,與ヘラレタル式ハ其順ニ配列シアルヲ以テ此場合ニハ此手數ダケ省ケルナリ,次ニ初項ノ平方根ハ$2ax$ニシテ末項ノ平方根ハ$3b$ナリ,此時平方根ノ正號ヲ有スル方ヲ取ルベシ,且ツ此二ツノ積ノ二倍ハ與式ノ中項ニ等シキヲ以テ上ノ公式ニヨリ所要ノ平方根ハ$2ax+3b$ナルヿヲ知ル.

例 2. $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$ ノ平方根ヲ見出セ.

與式ヲ a ノ降冪ノ順ニ配列スレバ

$$a^2-2ab-2ac+b^2+2bc+c^2$$
$$=a^2-2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2)$$
$$=a^2-2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=\{a-(b+c)\}^2.$$

故ニ所要ノ平方根ハ $a-b-c$ ナリ.

以上ノ例ニ於テ示セル如ク公式ヲ用ヰ視察ニヨリテ平方根ヲ見出シ得ル場合ハ與式ガ簡單ナル場合ニ限リ,其他ノ場合ニハ次ニ掲グル一般ノ開平法ヲ用ウルヲ可トス.

158. 一般ニ平方根ヲ發見スル方法ヲ示サンガ爲メニ先ヅ $a^2+2ab+b^2$ ノ平方根ヲ求ムルヿヲ示スベシ.

先ヅ與式ヲ或ル格段ナル文字ニ付キテ降冪ノ順ニ排列スベシ,此場合ニ於テハ既ニ a ニ付キテ降冪ノ順ニ排列シアルヲ以テ其手數ヲ費ヤスヲ要セズ.

初項ノ平方根ハ a ナリ,之ヲ以テ所要ノ平方根ノ初項トナス,此平方 a^2 ヲ與式ヨリ減ジ而ル後此數 a ノ二倍即チ $2a$ ヲ以テ剩餘ノ初項 $2ab$ ヲ除シテ得ル商 b ヲ以テ所要ノ平方根ノ第二項トス,此項ヲ第一項ノ二倍ニ加ヘ其和 $2a+b$ ニ此項 b ヲ乘ジタル積ヲ上ノ剩餘 $2ab+b^2$ ヨリ減ズベシ,此場合ニ於テハ差ハ 0 トナルヲ以テ所要ノ根ハ $a+b$ ナリ.

$$\begin{array}{r|l} & a^2+2ab+b^2\,(a+b \\ & a^2 \\ \hline 2a+b & 2ab+b^2 \\ & 2ab+b^2 \\ \hline \end{array}$$

若シ第二ノ剩餘ガ 0 ナラザル時ニハ $a+b$ ノ二倍ヲ以テ第二ノ剩餘ヲ除シテ得ル所ノ商ノ初項ヲ以テ所要ノ平方根ノ第三項トスベシ,而シテ此項ヲ $a+b$ ノ二倍ニ加ヘタル和ニ此項ヲ乘ジテ此第二ノ剩餘ヨリ減ズベシ,逐次斯クノ如クシテ進ミ遂ニ剩餘ナキニ至リテ止ムベ

シ.

例 1. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$ ノ平方根ヲ求ム.

先ヅ或格段ナル文字例令バ a ノ降冪ノ順ニ排列シ,上ノ方法ヲ用ウレバ次ノ如シ.

$$
\begin{array}{l}
a^2+2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2\big(a+b+c+d. \\
\underline{a^2} \\
2a+b\big)\,2ab+2ac+2ad+b^2+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \\
\qquad\quad \underline{2ab \qquad\qquad\quad +b^2} \\
2a+2b+c\big)\,2ac+2ad \qquad +2bc+2bd+c^2+2cd+d^2 \\
\qquad\qquad \underline{2ac \qquad\qquad\quad +2bc \qquad +c^2} \\
2a+2b+2c+d\big)\,2ad \qquad\qquad +2bd \qquad +2cd+d^2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2ad \qquad\qquad\quad +2bd \qquad +2cd+d^2}
\end{array}
$$

因テ所要ノ平方根ハ $a+b+c+d$ ナリ.

例 2. $x^4-8x^3+30x^2-56x+49$ ノ平方根ヲ求ム.

$$
\begin{array}{l}
x^4-8x^3+30x^2-56x+49\big(x^2-4x+7. \\
\underline{x^4} \\
2x^2-4x\big)-8x^3+30x^2-56x+49 \\
\qquad\quad \underline{-8x^3+16x^2} \\
2x^2-8x+7\big)14x^2-56x+49 \\
\qquad\qquad \underline{14x^2-56x+49}
\end{array}
$$

因テ所要ノ平方根ハ x^2-4x+7 ナリ.

例 3. $4x^6+80x^4-8x+60x^3+32x^5+1$ ノ平方根ヲ求ム.

先ヅ x ニ付キテ降冪ノ順ニ排列シ,開平ノ算法ヲ行フヿ次ノ如シ.

$$
\begin{array}{l}
4x^6+32x^5+80x^4+60x^3 \quad -8x+1\big(2x^3+8x^2+4x-1. \\
\underline{4x^6} \\
4x^3+8x^2\big)32x^5+80x^4+60x^3 \quad -8x+1 \\
\qquad\quad \underline{32x^5+64x^4} \\
4x^3+16x^2+4x\big)16x^4+60x^3 \quad -8x+1 \\
\qquad\qquad \underline{16x^4+64x^3+16x^2} \\
4x^3+16x^2+8x-1\big)-4x^3-16x^2-8x+1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-4x^3-16x^2-8x+1}
\end{array}
$$

因テ所要ノ平方根ハ $2x^3+8x^2+4x-1$ ナリ.

注意. 以上ノ算法ハ $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$ 等ノ公式ニ據ルモノナリ,夫ハ以上ノ算法ヲ熟察スレバ直チニ班然スベキヲ以テ煩雜ヲ遮クル爲メニ茲ニハ其說明ヲ與ヘザレモ初學者ハ宜シク之ヲ試ムベシ.

159. 算術ニ於テ吾人ハ一般ニ一ノ數ハ平方ニ開キ切レザルヿヲ知レリ,同樣ニ代數式ハ通例平方ニ開キ切レザルモノニシテ,其平方ニ開クヿヲ得ルハ極メテ

特別ナル場合ニ過ギズ,其開キ切レザルトキニハ其平方根ヲ表ハスニ$\sqrt{}$〔或ハ$\sqrt{(\ )}$〕ナル符號ヲ以テス;例令バ$a+4bx^2$ノ平方根ヲ$\sqrt{a+4bx^2}$或ハ$\sqrt{(a+4bx^2)}$ヲ以テ表ハスナリ.

與ヘラレタル整式ガ外見上其開キ切ルヽヤ否ヤ分明ナラザルトキ上ノ開法ヲ施シテ何處迄至ルモ剩餘ガ0トナラザルトキニハ其整式ハ開キ切レザルモノト知ル可シ.

160. 開立法. 多項式ノ立方根モ亦公式ヲ用ヰテ視察ニヨリテ發見スルヿヲ得ル場合アリ. 既ニ

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

ナル公式ヲ知リ居ルヲ以テ之ヲ用ウレバ簡單ナル場合ニハ容易ニ視察ニヨリテ立方根ヲ發見スルヿヲ得レ𪜈,多クハ次ニ與フル一般ナル算法ニ從フヲ可ト

ス,尤モ此算法モ亦此公式ニ據レルナリ.

先ヅ$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ノ立方根ヲ發見スル方法ヲ擧ゲテ一般ノ方法ヲ示サントス.

先ヅ與ヘラレタル式ヲ其中ノ或格段ナル文字例令バaノ降冪ノ順ニ排列スベシ.

$$\begin{array}{ll} 3a+b & 3a^2 \\ & \underline{(3a+b)b} \\ & 3a^2+3ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3(a+b. \\ \underline{a^3} \\ 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \underline{3a^2b+3ab^2+b^3} \end{array}$$

初項ノ立方根ハaナリ,之ヲ以テ所要ノ立方根ノ初項トシ,此立方a^3ヲ與式ヨリ減ズベシ,此項ノ三倍$3a$ヲ第一行ニ,此項ノ平方ノ三倍$3a^2$ヲ第二行ニ書シ,而シテ$3a^2$ヲ以テ第一ノ剩餘ノ初項ヲ除スベシ,然ルトキハ商トシテbヲ得,之レ所要ノ立方根ノ第二項ナリ,此項即チbヲ第一行ニ加ヘ其和$3a+b$ト又此項トノ積即

チ $(3a+b)b$ ヲ第二行ニ加ヘ而シテ其ノ和 $3a^2+3ab+b^2$ ト此項即チ b トノ積ヲ第一ノ剰餘ヨリ減ズベシ,上ノ例ニ於テハ第二ノ剰餘ハ0トナル,因テ所要ノ立方根ハ $a+b$ ナリ.

若シ第二ノ剰餘0ナラザルキニハ先ヅ第二行ニ立方根ノ第二項即チ b ト第一行トノ積ト此項ノ平方即チ b^2 ヲ加ヘ第一行ニ此項ノ二倍即チ $2b$ ヲ加フベシ,而ノ後第二行ヲ以テ第二ノ剰餘ヲ除シテ得ル商ノ初項ヲ見出シ之ヲ所要ノ立方根ノ第三項トス,此第三項ヲ第一行ニ加ヘテ得ル和ト此第三項トノ積ヲ第二行ニ加ヘ,此和ト第三項トノ積ヲ第二ノ剰餘ヨリ減スベシ,尙ホ剰餘アレバ同樣ノ手續ヲ經テ演算ヲ行ヒ逐次斯クシテ剰餘ナキニ至リテ止ム.

例. $8x^6-36x^5-144x-171x^3+102x^4+204x^2+64$ ノ立方根ヲ求ム.

先ヅ與式ヲ x ニ付キ降冪ノ順ニ排列シ上ニ擧ゲ

タル算法ヲ施スト次ノ如シ.

$$
\begin{array}{l|l}
 & 8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64 \\
\hline
8x^6 & 2x^2-3x+4 \\
\hline
12x^4 & -36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64 \\
 & -36x^5+54x^4-27x^3 \\
\hline
 & 48x^4-144x^3+204x^2-144x+64 \\
 & 48x^4-144x^3+204x^2-144x+64 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
6x^2-3x \\
\quad -6x \\
\hline
6x^2-9x+4 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
12x^4 \\
-3x(6x^2-3x) \\
\left.\begin{array}{l}12x^4-18x^3+9x^2 \\ \quad +9x^2\end{array}\right\} \\
\hline
12x^4-36x^3+27x^2 \\
4(6x^2-9x+4) \\
\hline
12x^4-36x^3+51x^2-36x+16 \\
\hline
\end{array}
$$

注意. 第二行ニ $3x(6x^2-3x)$ ヲ二度目ニ加フルキハ已ニ一度之ヲ記シアル故ニ再ビ之ヲ記入シテ加フルニ及バズ,直チニ最初ニ記入セシ分ヲ加フレバ可ナリ,其樣子ハ上ノ算式ニ於テ特ニ { ヲ以テ示セル處ノ如シ.

因テ所要ノ立方根ハ $2x^2-3x+4$ ナリ.

注意. 一ツノ代數式ガ立方ニ開キ切ルヽ場合ハ極メテ特別ナル場合ニ限リ,一般ニハ開キ切レザルナリ,若シ前法ニ從ツテ何處迄モ剩餘生ズルキニハ與ヘラレタル式ハ開キ切レザルモノト知ルベシ.

161. 以上ノ算法ヲ一見スレバ直チニ算術ニ於ケル開平及ビ開立ノ算法ノ由來ヲ知ラル可シ,即チ算術ニ於ケル開平及ビ開立ノ算法ハ上ニ擧ゲタル開平及ビ開立ノ算法ニ基ヅクナリ.

演習問題 53.

次式ノ値ヲ視察ニヨリテ發見セヨ.

1. $\sqrt{25x^4}$.
2. $\sqrt{4a^4x^6}$.
3. $\sqrt{49a^2x^4y^8}$.
4. $\sqrt[3]{a^3x^6}$.
5. $\sqrt[4]{16x^4y^8}$.
6. $\sqrt[3]{-27b^6x^9}$.
7. $\sqrt[5]{32x^5y^5z^{10}}$.
8. $\sqrt[4]{4x^4y^4z^8}$.

9. $\sqrt[n]{a^{3n}b^{6n}c^{9n}}$.
10. $\sqrt{(9x^2-6ax+a^2)}$.
11. $\sqrt{(4x^4+16x^2+16)}$.
12. $\sqrt{(a^2x^2-10abx+25b^2)}$.
13. $\sqrt[3]{(a^3-b^3+3ab^2-3a^2b)}$.

次式ノ平方根ヲ求ム.

14. $a^2+4b^2+c^2-4ab-2ac+4bc$.
15. $4x^2+y^2+9z^2-4xy+12xz-6yz$.
16. $x^4-6x^3+13x^2-12x+4$.
17. $9x^4-30x^3+19x^2+10x+1$.
18. $x^4-4ax^3-2a^2x^2+12a^3x+9a^4$.
19. 次ノ各數ノ平方根ヲ求ム.

(1). 1071225. (2). 19154·56. (3). 414·9369.

(4). 73229·7721. (5). 0·12334144.

20. $x^2+4y^2+z^2+9w^2-4xy+2xz-6xw-4yz+12yw-6zw$.
21. $x^6+4x^5-10x^3+4x+1$.
22. $4x^6-12x^5+5x^4+26x^3-29x^2-10x+25$.
23. $x^6-2bx^5+7b^2x^4-14b^3x^3+17b^4x^2-24b^5x+16b^6$.
24. $\dfrac{16x^4-8x^2+1}{9x^4+12a^2x^2+4a^4}$.
25. $\dfrac{4x^4-4x^3y-3x^2y^2+2xy^3+y^4}{x^4+2x^3y-x^2y^2-2xy^3+y^4}$.

次ノ各式及ビ各數ノ立方根ヲ求ム.

26. $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$.

27. $125a^3x^3+75a^2x^2y+15axy^2+y^3.$

28. $64x^6-144a^2x^4+108a^4x^2-27a^6.$

29. $x^6-3x^5+5x^3-3x-1.$

30. $x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8.$

31. $8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27.$

32. $27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64.$

33. $8x^6+48ax^5+60a^2x^4-80a^3x^3-90a^4x^2+108a^5x-27a^6.$

34. $1-3x+6x^2-10x^3+12x^4-12x^5+10x^6-6x^7+3x^8-x^9.$

35. 9800·344.　　36. 2000376.

37. 60236·288.　　38. 20910518875.

39. 3385135128375.　　40. 42720835·145912.

次式ノ四乘根ヲ求ム.

41. $1-4x+6x^2-4x^3+x^4.$

42. $16x^4-96x^3+216x^2-216x+81.$

43. $x^8-4x^7+10x^6-16x^5+19x^4-16x^3+10x^2-4x+1.$

次ノ各式ノ六乘根ヲ求ム.

44. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64.$

45. $729x^6+2916x^5+4860x^4+4320x^3+2160x^2+598x+64.$

第十四章　指　數.

162. 今迄ハ羃ノ指數ハ正ノ整數ニ限リタリ,是レ羃ノ定義ヨリ然ルベキナリ,從テa^{-3}或ハ$a^{\frac{5}{4}}$ノ如キ負數或ハ分數ヲ指數ニ有スル式ハ無意義ノモノナリ,斯ノ如ク負數或ハ分數ヲ指數ニ有スル式ハ元來無意義ノモノナルガ故ニ之ニ新タニ意義ヲ附スルコハ差支ナキコナリ,但シ其意義ヲ附スルニハ指數ガ正ノ整數ナル時ノ諸法則ニ抵觸セザル樣ニスレバ可ナリ,之ヨリ如何ニ其意義ヲ附スルカヲ示サントス.

先ヅ指數ガ正ノ整數ナルトキニ存スル處ノ諸法則ヲ下ニ列記セン.

m, n ガ正ノ整數ヲ表ハセバ

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}. \qquad m > n.$$

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}. \qquad m < n.$$

又mガnノ倍數ナラバ

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

163. 是ヨリ指數ガ負數或ハ分數ナル場合ノ意義ヲ定ムル爲メニ,先ヅm, nガ如何ナル數ナリトモ$a^m \times a^n = a^{m+n}$ナル基礎ノ定理ハ成立ツモノトノ規約ヲ設クベシ.

(I). $a^{\frac{p}{q}}$ノ意義. p, qハ正ノ整數ナリトス.

m, nガ如何ナル數ナリトモ$a^m \times a^n = a^{m+n}$ナリトノ規約ニヨリ

$(a^{\frac{p}{q}})^2 = a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}}$,從ツテ同樣ニ$(a^{\frac{p}{q}})^3 = a^{\frac{3p}{q}}$.

又同樣ニ$a^{\frac{p}{q}}$ノq次ノ冪ヲ作レバ

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{qp}{q}} = a^p.$$

故ニ $$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

即チ$a^{\frac{p}{q}}$ハ$\sqrt[q]{a^p}$ニ等シ.

之ニ因テ又 $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

此p乘ヲ作レバ$(a^{\frac{1}{q}})^p = a^{\frac{p}{q}}$ナル故ニ

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p \ldots\ldots\ldots\ldots (1').$$

因テ又$a^{\frac{p}{q}}$ハ$\sqrt[q]{a}$ノp乘ニ等シ.

(II). a^0ノ意義.

m, nガ如何ナル數ニテモ$a^m \times a^n = a^{m+n}$ナル故ニ,今此處ニ於テ$m=0$ト置ケバ

$$a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n.$$

故ニ $$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

$$a^0 = 1. \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

因テ0ヲ指數ニ有スル任意ノ數ハ1ニ等シ.

(III). a^{-n}ノ意義. 但シnハ正數トス.

上ニ用ヰタル同ジ規約ニヨリ

$$a^{-n} \times a^n = a^{n-n} = a^0 = 1.$$

故ニ $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

因テa^{-}ハa^nノ反數ニ等シ.

164. 以上ノ(I),(III)ニヨリ分數,負數ヲ

指數ニ有スルモノヽ意義ヲ定メタリ,今是等ノ意義ハ指數ガ正ノ整數ナルトキノ法則ニ適用シテ矛盾ヲ生セザルヿヲ示スベシ.

$a^{\frac{p}{q}}$ニ於テpトqトハ正ノ整數ナリトスレバ(1)ニヨリ $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$.

偖若シpガqノ倍數ナラバ如何ニトイフニ,此時ニモ

$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

ナルヿハ既ニ知ル處ナリ.

又 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ニ於テmトnトハ正數ニシテ$m<n$トセン

然ルトキハ $a^m\div a^n=a^{-(n-m)}$. $n-m>0$.

偖(3)ニヨリ

$$=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

是レ既ニ得タル處ノ法則ナリ.

因テmガnヨリモ大ナルトキ又ハ小ナルトキノ二ツノ場合ヲ常ニ次ノ一ツノ公式ニヲ表ハスヿヲ得.

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

又之ハ $a^m\times a^{-n}=a^{m-n}$.

故ニ之ハ$a^m\times a^n=a^{m+n}$ナル一般ノ形ノ中ニ含マルベシ.

m,nガ整數,分數,又ハ負數ノ如何ナル數ヲ表ハストキ常ニ$(a^m)^n=a^{mn}$ナリ.

m,nガ正ノ整數ナルトキニハ之ハ正當ナルヿヲ既ニ知リタリ.

(I). nガ正ノ整數ナリトセン(mハ任意ノ數トス)

$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\ldots\ldots n$項ノ積(規約ニヨル)

$=a^{m+m+m+\cdots\cdots n\text{項ノ和}}$

$=a^{mn}$.

(II). nガ分數ナリトセン(mハ任意ノ數トス)

$$n=\frac{p}{q}.$$

トシ,p,qハ正ノ整數ナリトスレバ

$$\left\{(a^m)^{\frac{p}{q}}\right\}^q=(a^m)^{\frac{p}{q}\cdot q}$$
$$=(a^m)^p$$
$$=a^{mp}.$$

q乘根ヲ取レバ

$$(a^m)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{q}}$$
$$=a^{m\frac{p}{q}}=a^{mn}.$$

(III). nハ負數ニシテ$n=-r$トセン,但シrハ正數トス(mハ任意ノ數トス)

$$(a^m)^n=(a^m)^{-r}$$
$$=\frac{1}{(a^m)^r}$$
$$=\frac{1}{a^{mr}}$$
$$=a^{-mr}$$
$$=a\ .$$

即チm,nガ任意ノ數ヲ表ハストキニハ

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

又同樣ニ$(ab)^n=a^nb^n$ハnガ任意ノ數即チ整數,分數,負數ノ何レヲ表ハストモ正シキ

コトヲ證スルコトヲ得.

因テ以上ニ示セル如ク分數或ハ負數ヲ指數トスル式ノ意義ヲ定ムレバ指數ガ正ノ整數ナル場合ニ眞ナル公式ハ指數ガ分數,負數ナルトキニモ亦眞ナリ. 即チ分數或ハ負數ヲ指數トセル式ハ指數ガ正ノ整數ナル式ト全ク同樣ニ取扱フコトヲ得ルナリ.

165. 次ニ二三ノ例ヲ擧ゲテ此章ヲ終ハルベシ.

例 1. $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{4}}$ニ$x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}$ヲ乘ゼヨ.

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4},\ \frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6},\ \frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}.$$

故ニ $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{3}{4}}\times x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{4}}y^{\frac{7}{6}}z^{\frac{13}{12}}.$

例 2. $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}}$ヲ$a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}$ニテ除スベシ.

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6},\ \frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

故ニ $(a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})=a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{12}}.$

例 3. $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^6$ヲ簡約セヨ.

$$\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt[3]{a^{-2}}}\div\sqrt{\frac{a\sqrt{b^{-1}}}{b\sqrt{a^{-2}}}}\right)^6=\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}{ba^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt{\frac{ab^{-2}}{ba^{-1}}}\right)^6$$

$$=(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\div\sqrt{a\cdot b^{-3}})^6$$
$$=(a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{3}{2}}\div ab^{-\frac{3}{2}})^6$$
$$=(a^{\frac{1}{3}})^6$$
$$=a^2.$$

例 4. $3x^{-\frac{1}{3}}+x+2x^{\frac{2}{3}}$ ニ $x^{\frac{1}{3}}-2$ ヲ乘ゼヨ.

x ニ付キテ降冪ノ順ニ排列シ而シテ後乘法ヲ行フヿ次ノ如シ.

$$\begin{array}{l}
x+2x^{\frac{2}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}} \\
x^{\frac{1}{3}}-2 \\
\hline
x^{\frac{4}{3}}+2x+3 \\
\quad -2x-4x^{\frac{2}{3}}-6x^{-\frac{1}{3}} \\
\hline
x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}+3-6x^{-\frac{1}{3}}.
\end{array}$$

所要ノ積ハ $x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{2}{3}}+3-6x^{-\frac{1}{3}}$ ナリ.

例 5. $16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6$ ヲ $1+2a^{-1}$ ニテ除スベシ.

a ニ付キテ昇冪ノ順ニ排列シ,而シテ後除法ヲ行フヿ次ノ如シ.

$$\begin{array}{l}
2a^{-1}+1\big)16a^{-3}-6a^{-2}+5a^{-1}+6\big(8a^{-2}-7a^{-1}+6. \\
\quad 16a^{-3}+8a^{-2} \\
\hline
\qquad -14a^{-2}+5a^{-1} \\
\qquad -14a^{-2}-7a^{-1} \\
\hline
\qquad\qquad 12a^{-1}+6 \\
\qquad\qquad 12a^{-1}+6 \\
\hline
\end{array}$$

即チ $8a^{-2}-7a^{-1}+6$ ガ所要ノ商ナリ.

例 6. $\dfrac{4x^2}{y}+\dfrac{\sqrt{x^3}}{y^{-\frac{1}{2}}}-2x+\dfrac{y}{4}+x^3-4\sqrt{x^5y^{-1}}$ ノ平方根ヲ求ム.

根號ヲ取去リ,x ニツキテ降冪ノ順ニ排列シ,而シテ後開平法ヲ行フヿ次ノ如シ.

$$\begin{array}{l}
x^3-4x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+4x^2y^{-1}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\dfrac{4}{y}\Big(x^{\frac{3}{2}}-2xy^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \\
\quad x^3 \\
\hline
2x^{\frac{3}{2}}-2xy^{-\frac{1}{2}}\Big)-4x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+4x^2y^{-1}+x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\dfrac{y}{4} \\
\quad -4x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+4x^2y^{-1} \\
\hline
\quad 2x^{\frac{3}{2}}-4xy^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\dfrac{y}{4} \\
\qquad\qquad x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+\dfrac{y}{4} \\
\hline
\end{array}$$

即チ所要ノ平方根ハ $x^{\frac{3}{2}}-2xy^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{2}^{\frac{1}{2}}$ ナリ.

演習問題 54.

次ノ各式ノ値ヲ求ム.

1. $4^{\frac{1}{2}}$.
2. $8^{\frac{2}{3}}$.
3. $16^{-\frac{1}{4}}$.
4. $\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}$.
5. $\left(\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.
6. $(125)^{\frac{2}{3}}$.
7. $\left(\dfrac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}$.
8. $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{7}{5}}$.

9. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{5}{6}}$.

次ノ各式ヲ簡約セヨ.

10. $a^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{3}{2}}$　　11. $(a^3)^{-2}$.

12. $x^{\frac{2}{3}}\times x^{\frac{1}{6}}$.　　13. $y^{-\frac{3}{5}}\times y^{\frac{1}{5}}$.

14. $a^2b^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}$.　　15. $(a^6b^{-4})^{-\frac{1}{2}}$.

16. $(\sqrt{a^{-6}})^{\frac{1}{3}}$.　　17. $(\sqrt[3]{a^2})^{-\frac{3}{2}}$.

18. $(a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{5}}\times a^{\frac{2}{3}}b)^{-\frac{1}{2}}$.　　19. $(x^{q-r})^p\times(x^{r-p})^q\times(x^{p-q})^r$.

20. $(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$.　　21. $(ab)^{a+b}\div(a^ab^b)$.

22. $(x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{7}})^{\frac{1}{2}}\times(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{7}})^{-\frac{3}{5}}$.　　23. $\dfrac{\sqrt{a^{-4}b^{-3}}}{a^{-3}\sqrt{b^{-2}}}\div\sqrt[3]{\dfrac{b^{-3}}{a^{-4}}}$.

24. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\div\sqrt{y^{\frac{2}{5}}}}{\sqrt{x^3\div y^{\frac{1}{2}}}}\div\dfrac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

25. $\left(a^{\frac{l-m}{lm}}\right)^n\left(a^{\frac{m-n}{mn}}\right)^l\left(a^{\frac{n-l}{nl}}\right)^m\div a^{\frac{l-m}{n}+\frac{m-n}{l}+\frac{n-l}{m}}$.

26. $\left(x^{\frac{a}{b}}y^{-1}\right)^b\div\left(\dfrac{x^{a^2-b^2}}{y^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$.　　27. $\left\{\dfrac{x^{l-m}}{\sqrt[m]{x^{m^2-lm}}}\times x^{2(m-l)}\right\}^n$.

28. $\left[\left(x^{\frac{p-q}{r}}\right)^{\frac{q-p}{p}}\right]^{\frac{r-p}{q}}\times x^{\frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}}$.

次ノ各式ノ積ヲ見出セ.

29. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.　　30. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}},\ a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}$.

31. $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.

32. $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$.

33. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1,\ x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$.　　34. $x^{\frac{2}{3}}-1+x^{-\frac{2}{3}},\ x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}$.

35. $4x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1,\ 2x^{\frac{1}{3}}-1$.

36. $x^{\frac{2}{3}}+2+4x^{-\frac{2}{3}},\ x^{\frac{2}{3}}-2+4x^{-\frac{2}{3}}$.

37. $a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1,\ a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}-1$.

38. $x^{\frac{7}{4}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{4}}-x,\ x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}$.

39. $3x^{\frac{3}{5}}-4x^{\frac{1}{5}}-x^{-\frac{1}{5}},\ 3x^{\frac{1}{5}}+x^{-\frac{1}{5}}-6x^{-\frac{3}{5}}$.

40. $x^4+x^2+1,\ x^{-4}-x^{-2}+1$,　41. $x^m+x^{\frac{m}{2}}+1,\ x^m-x^{\frac{m}{2}}+1$,

42. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}-z^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}$.

43. $x^{\frac{2}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}+2,\ x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}-1$.

44. $x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{5}}y+y^{\frac{4}{3}},\ x^{\frac{1}{5}}+y^{\frac{1}{3}}$.

次ノ問題ニ於テ第一式ヲ第二式ニテ除スベシ.

45. $x-y,\ x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.　　46. $a^{\frac{2}{3}}x^2-y^{\frac{2}{3}},\ a^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{6}}$.

47. $x^n-y^{-n},\ x^{\frac{n}{3}}-y^{-\frac{n}{3}}$.

48. $x^2+16x+256,\ x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}+4$.

49. $5x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}}-4x^{-\frac{1}{3}}-5,\ x^{\frac{1}{6}}-2x^{-\frac{1}{6}}$.

50. $x^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{4}}+a^3,\ x^{\frac{1}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+a$.

51. $a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}},a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$.

52. $\sqrt[3]{x^2}+2x^{\frac{1}{3}}-16x^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{32}{x},\ x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}+\dfrac{4}{\sqrt{x}}$.

53. $4\sqrt[3]{x^2}-8x^{\frac{1}{3}}-5+\dfrac{10}{\sqrt[3]{x}}+3x^{-\frac{2}{3}},\ 2x^{\frac{5}{12}}-\sqrt[12]{x}-\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}$.

次ノ各式ノ平方根ヲ求ム.

54. $x+2x^{\frac{3}{2}}+3x+2x^{\frac{1}{2}}+1$.　　55. $x^{\frac{4}{5}}-4x^{\frac{3}{5}}+8x^{\frac{1}{5}}+4$.

56. $9x-12x^{\frac{1}{2}}+10-4x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}$.

57. $x^{\frac{2}{3}}+4a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{9}}-10ax^{\frac{1}{3}}+4a^{\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{9}}+a^2$.

58. $(x+x^{-1})^2-4(x-x^{-1})$.

59. $9x^{-4}-18x^{-3}\sqrt{y}+\frac{15y}{x^2}-6\sqrt{\frac{y^3}{x^2}}+y^2$.

60. $81\left(\frac{\sqrt[3]{x^4}}{y^2}+1\right)+36\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{y}}(x^{\frac{2}{3}}y^{-1}-1)-158\frac{\sqrt[3]{x^2}}{y}$.

第十五章 無理數或ハ不盡根數.

166. 開キ切レザル根數ヲ**無理數**トモ或ハ**不盡根數**トモ稱ス;例令バ $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$ ノ如キハ何レモ無理數(或ハ不盡根數)ナリ.

代數式ノ開キ切レザル根ヲモ亦無理數(又ハ無理式)或ハ不盡根數(又ハ不盡根式)ト稱ス;例令バ $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt[3]{a^2b}$ 等何レモ無理數(又ハ無理式)ナリ,但シ此場合ニハ全ク外形上ヨリノ名稱ナルヲ以テ實際ニハ a,b 等ノ文字ノ數値ノ如何ニヨリテハ開キ切ルヽヿモアリ得ルナリ,例令バ $a=9$ ナルトキニハ $\sqrt{a}=\sqrt{9}=3$ ニシテ開キ切ルヽナリ,之レハ a ガ丁度開キ切ルヽ數ヲ代表セル故ニ $\sqrt{a}$ ハ實際其數値ハ不盡根數ニアラザレドモ,$\sqrt{a}$ ハ代數學上根號ノナキ形ニテ表ハスヿヲ得ザルガ

故ニ之ヲ無理數(或ハ無理式)ト稱スルナリ.

無理數ニ對シテ根號ヲ有セザル數ヲ有理數ト稱ス.

無理數或ハ不盡根數ハ又一種ノ數ニシテ有理數ト同ジ計算ノ法則ニ從フモノト規定ス.

不盡根數ニ於テ其何乘根ナルヤヲ示ス數ヲ以テ此**不盡根數ノ次數**トス;例令バ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{a}$ ハ何レモ二次ノ不盡根數ニシテ, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{a}$ ハ三次ノ不盡根數ナリ.

一般ニ $\sqrt[n]{a}$ ハ n 次ノ不盡根數ナリ.

167. 有理數ヲ不盡根數ノ形ニ表ハスコト. 有理數ハ之ヲ任意ノ次數ノ不盡根數ノ形ニ表ハスコトヲ得.

例令バ
$$5=\sqrt{25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[n]{5^n}$$
$$a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$$

注意. 此處ニ論ズルコトハ有理數ハ外

形上不盡根數ノ形ニ表ハスコトヲ得トイフコトニシテ,之ハ決シテ不盡根數ニ變ズルコトヲ得トイフニアラズ,初學者誤解セザランコトヲ要ス.

又任意ノ次數ノ不盡根數ハ之ヲ或他ノ次數ノ不盡根數ノ形ニ書キ表ハスコトヲ得.

例令バ
$$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{2^3}.$$
$$\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

此例ニ於テ $\sqrt{3}$ ノ次數ハ2ニシテ, $\sqrt[6]{2^3}$ ノ次數ハ6ナリ,又 $\sqrt[m]{a}$ ノ次數ハ m ニシテ, $\sqrt[mn]{a^n}$ ノ次數ハ mn ナリ.

168. 二ツ或ハ二ツ以上ノ異リタル次數ノ不盡根數ヲ同次ノ不盡根數ノ形ニ化スルコト屢必要ナリ.

此場合ニハ最低次ノ同次ノ不盡根數ノ形ニ化スルヲ可トス. 其方法ハ與ヘラレタル不盡根數ヲ其次數ノ最小公倍

數ヲ次數トセル不盡根數ニ化スルニアリ.

例 1. $\sqrt{a}, \sqrt[4]{a^3}, \sqrt[3]{b^2}$ ヲ同次ノ不次根數ニ化スベシ.

先ヅ各數ノ次數2,4,3ノ最小公倍數ハ12ナルヲ以テ

$$\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{6}{12}}=\sqrt[12]{a^6},$$

$$\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{9}{12}}=\sqrt[12]{a^9},$$

$$\sqrt[3]{b^2}=b^{\frac{2}{3}}=b^{\frac{8}{12}}=\sqrt[12]{b^8}.$$

即チ $\sqrt[12]{a^6}, \sqrt[12]{a^9}, \sqrt[12]{b^8}$ ガ所要ノ答ナリ.

例 2. $\sqrt[m]{a^p}, \sqrt[n]{b^q}$ ヲ同次ノ不盡根數ニ化スベシ.

$$\sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}=a^{\frac{pn}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{pn}}.$$

$$\sqrt[n]{b^q}=b^{\frac{q}{n}}=b^{\frac{qm}{mn}}=\sqrt[mn]{b^{qm}}.$$

又 m ト n トノ最小公倍數ヲ l トシ

$$l=ms=nt.$$

トスレバ

$$\sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}=a^{\frac{ps}{l}}=\sqrt[l]{a^{ps}},$$

$$\sqrt[n]{b^q}=b^{\frac{q}{n}}=b^{\frac{qt}{l}}=\sqrt[l]{b^{qt}}.$$

169. 異次ノ不盡根數ノ大小ハ之ヲ同次ノ不盡根數ニ化スルコトニヨリテ比較スルコトヲ得.

例. $\sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[4]{10}$ ヲ大サノ順ニ排列セヨ.

2,3,4ノ最小公倍數ハ12ナルヲ以テ各數ヲ12次ノ不盡根數ニ化スレバ

$$\sqrt{3}=\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[12]{729},$$

$$\sqrt[3]{6}=\sqrt[12]{6^4}=\sqrt[12]{1296},$$

$$\sqrt[4]{10}=\sqrt[12]{10^3}=\sqrt[12]{1000}.$$

故ニ大サノ順ニ排列スレバ

$$\sqrt{3}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}.$$

ナリ.

170. 前章ニ於テ m ガ整數,分數,負數ノ中何レヲ表ハスモ

$$(ab)^m=a^m b^m.$$

ナルコトヲ得タリ. 今 $m=\frac{1}{n}$ ニシテ n ハ正ノ整數ナリトスレバ

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}.$$

或ハ $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}.$

同樣ニ $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}.$

一般ニ $\sqrt[n]{abc\ldots k}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots\sqrt[n]{k}.$

例 1. $\sqrt[3]{15}=\sqrt[3]{3\times5}=\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{5}.$

例 2. $\sqrt{a^4b}=\sqrt{a^4}\sqrt{b}=a^2\sqrt{b}.$

例 3. $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}.$

此處ノ例ニモ示セル如ク或ル不盡根數ハ之ヲ有理數ト不盡根數トノ積ノ形ニ表ハスヿヲ得.

例. $\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$

此ノ如ク初ノ式ヲ最後ノ式ニ化スルヿヲ稱シテ不盡根數ヲ最モ簡單ナル形ニ化スルトイフ.

之レト逆ニ有理數ト不盡根數トノ積ニ於テ其有理數ヲ不盡根數ノ形ニ化シ根號內ニ入ルヽヿヲ得.

例 1. $3\sqrt{5}=\sqrt{9}\sqrt{5}=\sqrt{9\times5}=\sqrt{45}.$

例 2. $a\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[3]{a^3b^2}.$

一ノ不盡根數ガ有理數ト不盡根數トノ積トシテ表ハサレタルトキニハ其不盡根數ナル因數ヲ**無理因數**ト稱シ,有理數ナル因數ヲ**係數**ト稱ス.

有理數ナル因數ヲ有セザルトキニハ此不盡根數ノ係數ハ1ナリ.

例令バ $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt{a^3}$ 等ノ係數ハ何レモ1ナリ.

二ツ或ハ二ツ以上ノ不盡根數ガ同ジ無理因數ヲ有スルカ,又ハ之ヲ有スルヤウニ化シ得ルトキニハ,此等ノ不盡根數ヲ稱シテ**同類不盡根數**トイフ.

例令バ $4\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ ハ同類不盡根數ナリ; $3\sqrt{a}$, $b\sqrt{a}$ モ亦然リ;又 $\sqrt[3]{24}$ ト $\sqrt[3]{3}$ モ亦タ同類不盡根ナリ,何トナレバ $\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\times3}=2\sqrt[3]{3}$ ナレバナリ.

171. 同類不盡根數ノ和或ハ差ヲ求ムルニハ共通ノ無理因數ニ係數ノ和或ハ差ヲ乘ズレバ可ナリ.

例 1. $3\sqrt{20}$, $2\sqrt{5}$ ノ和ヲ求ム.

$$\begin{aligned}3\sqrt{20}+2\sqrt{5}&=3\sqrt{4\times5}+2\sqrt{5}\\&=3\times2\sqrt{5}+4\sqrt{5}\\&=6\sqrt{5}+4\sqrt{5}\\&=10\sqrt{5}.\end{aligned}$$

例 2. $a\sqrt[3]{x}$, $2\sqrt[3]{b^3x}$, $-3c\sqrt[3]{x}$ ノ和ヲ求ム.

$$a\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{b^3x}-3c\sqrt[3]{x}$$
$$=a\sqrt[3]{x}+2b\sqrt[3]{x}-3c\sqrt[3]{x}$$
$$=(a+2b-3c)\sqrt[3]{x}.$$

同類ナラザル不盡根數ノ和或ハ差ハ唯各不盡根數ヲ加法或ハ減法ノ符號ヲ以テ列記スレバ可ナリ.

172. 二ツ或ハ二ツ以上ノ同次ノ不盡根數ノ積ヲ求ムルニハ係數ト無理因數トヲ別々ニ相乘ジ而シテ同次ノ無理因數ノ積ヲ求ムルニハ根號ノ下ニテ乘ズレバ可ナリ.

例令バ $a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}=ab\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=ab\sqrt[n]{xy}.$

又 $a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}\times c\sqrt[n]{z}=abc\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}\sqrt[n]{z}$
$$=abc\sqrt[n]{xyz}.$$

例 1. $4\sqrt{3}\times3\sqrt{11}=12\sqrt{33}.$

例 2. $\sqrt[4]{a+b}\times\sqrt[4]{a-b}=\sqrt[4]{(a+b)(a-b)}=\sqrt[4]{a^2-b^2}.$

例 3. $5\sqrt[3]{x}\times2\sqrt[3]{x^2}=10\sqrt[3]{x\,x^2}=10x.$

若シ不盡根數ガ最モ簡單ナル形ヲ有セザルトキニハ先ヅ之ヲ其形ニ化スルヲ

可トス.

例. $3\sqrt{8},5\sqrt{3},\sqrt{45}$ ノ積ヲ求ム.

$$3\sqrt{8}\times5\sqrt{3}\times\sqrt{45}=(3\times2\sqrt{2})\times5\sqrt{3}\times(3\sqrt{5})$$
$$=3\times2\times5\times3\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{5}$$
$$=90\sqrt{30}.$$

又同次ナラザル不盡根數ヲ乘ズルニハ先ヅ之ヲ同次ノ不盡根數ノ形ニ化シ而ノ後乘法ヲ施スベシ.

例 1. $7\sqrt{2}$ ト $3\sqrt[3]{5}$ トノ積ヲ求ム.

$$7\sqrt{2}\times3\sqrt[3]{5}=7\sqrt[6]{8}\times3\sqrt[6]{25}$$
$$=21\sqrt[6]{8\times25}$$
$$=21\sqrt[6]{200}.$$

例 2. $\sqrt[3]{a},c\sqrt[4]{b^3}$ ノ積ヲ求ム.

$$\sqrt[3]{a}\times c\sqrt[4]{b^3}=\sqrt[12]{a^4}\times c\sqrt[12]{b^9}=c\sqrt[12]{a^4b^9}.$$

除法モ亦乘法ト同樣ニシテ行フモノトス,而シテ無理因數ヲ無理因數ニテ除スルニハ先ヅ之ヲ同次ノ不盡根數ノ形ニ化シ而シテ後除法ヲ施スベシ.

且ツ同次ノ無理因數ノ商ヲ求ムルニ

ハ根號ノ下ニ於テ除法ヲ施セバ可ナリ.

不盡根數ノ商ヲ分數ノ形ニテ表ハストキニ當リ分母ノ無理因數ハ之ヲ除却スルヲ可トス;其方法ハ次ノ如シ.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{c}}{\sqrt{c}\times\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{ac}}{c}.$$

又 $$\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}=\frac{a\sqrt{b}\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{c^2}}=\frac{a\sqrt{b}\sqrt[3]{c^2}}{c}=\frac{a\sqrt[6]{b^3c^4}}{c}.$$

例 1. $3\sqrt{7}\div4\sqrt{5}=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{4}\frac{\sqrt{7}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{35}}{20}.$

例 2. $2\sqrt{5}\div7\sqrt[3]{3}=2\sqrt[6]{125}\div7\sqrt[6]{9}.$

$$=\frac{2}{7}\frac{\sqrt[6]{125}}{\sqrt[6]{9}}=\frac{2}{7}\frac{\sqrt[6]{125}\times\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{3^4}}.$$

$$=\frac{2}{7}\frac{\sqrt[6]{125\times81}}{3}=\frac{2\sqrt[6]{10125}}{21}.$$

173. 複雜ナル不盡根數ノ乘法ハ恰カモ有理多項式ノ乘法ト同樣ナリ.

例 1. $3\sqrt{5}-4\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ ノ積ヲ求ム.

$$\begin{array}{l} 3\sqrt{5}-4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{5}+3\sqrt{2} \\ \hline 6\times5-8\sqrt{10} \\ \qquad 9\sqrt{10}-12\times2 \\ \hline 30+\sqrt{10}-24 \\ =6+\sqrt{10}. \end{array}$$

故ニ $6+\sqrt{10}$ ガ所要ノ積ナリ.

例 2. $\sqrt{a}-2\sqrt{x}$, $3\sqrt{a}+\sqrt{x}$ ノ積ヲ求ム.

$$(\sqrt{a}-2\sqrt{x})(3\sqrt{a}+\sqrt{x})$$
$$=3(\sqrt{a})^2-5\sqrt{a}\sqrt{x}-2(\sqrt{x})^2$$
$$=3a-5\sqrt{ax}-2x$$
$$=3a-2x-5\sqrt{ax}.$$

174. 茲ニ複雜ナル不盡根數ノ積ニ於テ注意スベキコアリ,即チ一ツノ二次ノ不盡根數ト有理數トノ和ト差トノ積或ハ二ツノ二次ノ不盡根數ノ和ト差トノ積ハ何レモ有理數ナリトイフコナリ.

例令バ $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=a^2-b.$

又 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$

上ノ事柄ヲ應用スレバ二次ノ不盡根數ト有理數トノ和或ハ差,又ハ二ツノ二次ノ不盡根數ノ和或ハ差ヲ分母ニ有スル式ノ分母ヨリ其不盡根數ノ根號ヲ取去ルコヲ得ルナリ.

例. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ノ分母ノ根號ヲ取去レ.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{x+\sqrt{xy}}{x-y}.$$

此ノ如ク分母ノ不盡根數ノ根號ヲ取去ルヿヲ稱シテ分母ヲ有理化スルトイフ.

例 1. $4+3\sqrt{2}$ ヲ $5-3\sqrt{2}$ ニテ除スベシ.

$$\frac{4+3\sqrt{2}}{5-3\sqrt{2}}=\frac{(4+3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}{(5-3\sqrt{2})(5+3\sqrt{2})}$$

$$=\frac{20+18+12\sqrt{2}+15\sqrt{2}}{25-18}$$

$$=\frac{38+27\sqrt{2}}{7}.$$

例 2. $\frac{2a-\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-b}$ ノ分母ヲ有理化セヨ.

$$\frac{2a-\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-b}=\frac{(2a-\sqrt{ab})(2\sqrt{ab}+b)}{(2\sqrt{ab}-b)(2\sqrt{ab}+b)}$$

$$=\frac{4\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3}}{4ab-b^2}.$$

175. $a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}$ ニシテ a,b,x,y ハ有理數, $\sqrt{x},\sqrt{y}$ ハ外形上ノミナラズ眞ニ不盡根數ヲ表ハストキニハ $a=b, x=y$ ナリ.

如何トナレバ

$$a+\sqrt{x}=b+\sqrt{y}.$$

ナル故ニ $a-b+\sqrt{x}=\sqrt{y}.$

兩邊ヲ自乘スレバ

$$(a-b)^2+2(a-b)\sqrt{x}+x=y.$$

或ハ $2(a-b)\sqrt{x}=y-x-(a-b)^2.$

此左邊ハ $(a-b)\neq 0$ ナラバ無理數ニシテ右邊ハ有理數ナリ,從テ此等式ハ不合理トナル,因テ $a-b=0$ ナラザルベカラズ.

故ニ $a=b.$

從テ與式ヨリ $\sqrt{x}=\sqrt{y}.$

故ニ $x=y.$

176. $a+\sqrt{b}$ ノ平方根ヲ求ム,但シ a,b ハ有理數ニシテ $\sqrt{b}$ ハ無理數ナリトス.

先ヅ $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$

ト假定セン, x, 及ビ y ヲ見出セバ問題ハ解カレタルナリ.

兩邊ヲ自乘スレバ

$$a+\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

$$a=x+y,$$

$$b=4xy.$$

故ニ139節ニヨリx,yハ方程式

$$z-az+\frac{b}{4}=0.$$

ノ二根ナリ. 此方程式ヲ解キテ

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \text{ 及ビ } \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

ノ二根ヲ得.

故ニ $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$

偖$\sqrt{a^2-b}$ガ有理數ナラザルトキニハ右邊ハ左邊ヨリモ複雜ナルヲ以テ此演算ハ$\sqrt{a^2-b}$ガ有理數ナル場合ニ於テノミ有効ナリ.

例. $11+2\sqrt{30}$ノ平方根ヲ求ム.

$$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

トシ,兩邊ヲ自乘スレバ

$$11+2\sqrt{30}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

因テ $x+y=11,\ xy=30.$

之ヨリx,yノ値ヲ發見スレバ

$$\begin{cases}x=5,\\y=6.\end{cases} \text{或ハ} \begin{cases}x=6,\\y=5.\end{cases}$$

何レニシテモ

$$\sqrt{11+2\sqrt{30}}=\sqrt{5}+\sqrt{6}.$$

演習問題 55.

次ノ問題ニ於ケル不盡根數ヲ十二次ノ不盡根數トシテ表ハセ.

1. $\sqrt[3]{2}$.　　2. $\sqrt[4]{5}$.

3. $\sqrt[3]{ax^2}$.　　4. $\sqrt[4]{a^3b^5}$.

5. $\sqrt[6]{xy}$.　　6. $\sqrt[4]{\frac{1}{a^3x^7}}$.

次ノ7乃至12ノ諸數ヲ最低ノ同次ノ不盡根數トシテ表ハセ.

7. (1) $\sqrt{a},\sqrt[3]{a^5}$.　(2) $\sqrt[5]{a^2},\sqrt[4]{a^7}$.　(3) $\sqrt[7]{x^3},\sqrt{x^5y^3}$.

8. $\sqrt[12]{x^7},\sqrt[4]{xy^3},\sqrt[6]{x^5}$.　　9. $\sqrt{5},\sqrt[3]{11},\sqrt[6]{13}$.

10. $\sqrt[3]{2},\sqrt[9]{8},\sqrt[6]{16}$.　　11. $\sqrt[3]{x^2},\sqrt[6]{a^3x^7},\sqrt[8]{3a}$.

12. $\sqrt{14}$ト$\sqrt[3]{5^2}$トハ孰レカ大ナルカ.

13. $\sqrt{7},2\sqrt[3]{3},5\sqrt[4]{4}$ヲ大サノ順ニ排列セヨ.

14. $2\sqrt[3]{4},3\sqrt[4]{6},\sqrt[5]{11}$ヲ大サノ順ニ排列セヨ.

15. $\sqrt{6},\sqrt[3]{12},\sqrt[4]{20},2\sqrt[4]{2}$ヲ大サノ順ニ排列セヨ.

次ノ各數ヲ簡單ニセヨ.

16. $\sqrt{288}$.　　17. $\sqrt[3]{256}$.

18. $\sqrt[4]{3125}$.　　19. $\sqrt[3]{-125a^4x^3}$.

20. $\sqrt[n]{a^{2n}b^{3n}x^5}$.　　21. $\sqrt[p]{x^{a+p}y^{2p}z^p}$.

22. $\sqrt{x^3-2x^2y+xy^2}$.　　23. $\sqrt{20}+\sqrt{45}$.

24. $\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$.　　25. $4\sqrt{63}+4\sqrt{7}-6\sqrt{28}$.

26. $2\sqrt[3]{189}+3\sqrt[3]{875}-7\sqrt[3]{56}$.

27. $\sqrt[3]{-54}+\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{432}$.

28. $2\times\sqrt{14}\times\sqrt{51}$.　　29. $\sqrt[3]{54}\times3\sqrt{16}$.

30. $5\sqrt[3]{168}\times2\sqrt[3]{147}$.　　31. $a\sqrt{x^3}\times x\sqrt{ax}$.

32. $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{b^2}{x}}\times\sqrt{\frac{x^3}{3b^4}}$.　　33. $5\sqrt{27}\div4\sqrt{18}$.

34. $6\sqrt{14}\div2\sqrt{27}$.　　35. $\frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{27}}\div\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{22}}$.

次ノ各數ヲ展開セヨ.

36. $(3\sqrt{x}-7)\times5\sqrt{x}$.　　37. $(\sqrt{a+b}-1)\times\sqrt{a+b}$.

38. $(7\sqrt{a}-2\sqrt{b})\times(3\sqrt{a}-\sqrt{b})$.

39. $(\sqrt{7}+5\sqrt{3})(2\sqrt{7}-4\sqrt{3})$.

40. $\left(\sqrt[3]{4}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\times\sqrt[3]{4}$.

41. $(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})(7\sqrt{3}+4\sqrt{5})$.

42. $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2$.　　43. $(\sqrt{a+x}-1)(\sqrt{a+x}+3)$.

44. $(\sqrt{2x-a}-\sqrt{a-x})^2$.　　45. $(\sqrt{a^2+b^2}-2\sqrt{a^2-b^2})^2$.

46. $(\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

47. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$.　　48. $(\sqrt{m-n}+\sqrt{m+n})^2$.

次ノ分數式ノ分母ヲ有理化セヨ.

49. $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$.　　50. $\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}-1}$.

51. $\frac{3\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}}$.　　52. $\frac{13-\sqrt{3}}{12-3\sqrt{3}}$.

53. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$.　　54. $\frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{x}}{\sqrt{a}+5\sqrt{x}}$.

55. $\frac{x}{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.　　56. $\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$.

57. $\frac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.　　58. $\frac{1}{2+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$.

59. $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$.

60. $\frac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$.

次ノ各數ノ平方根ヲ求ム.

61. $3+2\sqrt{2}$.　　62. $5-\sqrt{24}$.

63. $21-2\sqrt{38}$.　　64. $14+8\sqrt{3}$.

65. $33-4\sqrt{35}$.　　66. $45-30\sqrt{2}$.

67. $2a-2\sqrt{a^2-x^2}$.　　68. $2x+3-2\sqrt{x^2+3x+2}$.

次ノ各數ヲ簡單ニセヨ.

69. $\frac{3}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}$.　　70. $\frac{\sqrt{14-8\sqrt{3}}}{2-\sqrt{3}}$.

71. $\sqrt{4-\sqrt{12}}-\sqrt{8+\sqrt{60}}$.　　72. $\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}+\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$.

73. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

74. 若シ $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ナラバ

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

ナルヿヲ證セヨ；但シ a, b ハ有理數ニシテ $\sqrt{b}$ ハ無理數ナリトス.

第十六章 比及ビ比例.

比.

177. 或數 a ノ或數 b ニ對スル**比**トハ a ハ b ノ幾倍ナルカトイフコトノ關係ヲイフナリ.

$a:b$ ヲ以テ a ノ b ニ對スル比ヲ表ハシ, a ヲ此比ノ**前項**, b ヲ其**後項**ト稱シ, a, b ヲ此比ノ**兩項**ト稱ス.

比 $a:b$ ヲ「a ノ b ニ對スル比」「a ト b トノ比」,「a ノ b ニ於ケル比」又ハ單ニ「a, b ノ比」等ト呼唱ス.

比 $a:b$ ノ値ハ其前項 a ヲ其後項 b ニテ除シタル商 $\frac{a}{b}$ ニ等シ.

元來比ト比ノ値トハ其意義異ナルモノナレドモ,屢々比ノ値トイフコトヲ略シテ單ニ比ト稱スルヿアリ; 例令バ比 $\frac{a}{b}$ トイフトキニハ比 $a:b$ ノ値 $\frac{a}{b}$ ヲ意味ス.

1ヨリモ大ナル値ヲ有スル比ヲ**優比**トイヒ,1ヨリモ小ナル値ヲ有スル比ヲ**劣比**ト稱シ,値ノ1ニ等シキ比ヲ**等比**ト稱ス.

178. 比ノ兩項ニ同數ヲ乘ズルモ其値ハ變化セズ.

何トナレバ比$a:b$ノ兩項ニ同數mヲ乘ズレバ$ma:mb$トナル,然ルニ

$$\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}.$$

即チ比$a:b$ノ兩項ニ同數mヲ乘ズルモ此比ノ値ハ變化セズ.

從テ比ノ兩項ヲ同數ニテ除スルモ其値ハ變化セズ.

179. 二ツ或ハ二ツ以上ノ比ノ大小ヲ比較センニハ各比ノ値ヲ表ハス分數式ヲ通分シ而シテ後分子ノ大小ヲ比較スレバ可ナリ.

例令バ比$a:b$ト比$x:y$トヲ考ヘン;先

ヅ比$a:b$ノ値$\frac{a}{b}=\frac{ay}{by}$ニシテ,比$x:y$ノ値$\frac{x}{y}=\frac{bx}{by}$ナリ,故ニ比$a:b$ハ$ay$ガ$bx$ヨリモ大ナルカ,小ナルカ,或ハ之ニ等シキカニ從ツテ比$x:y$ヨリモ大ナルカ,小ナルカ,或ハ之ニ等シ.

180. 比ノ兩項ニ同數ヲ加フレバ優比ハ其値ヲ減少シ,劣比ハ其値ヲ增加ス.

a,b,xヲ何レモ正ノ數トセン,然ルトキハ

$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}$$
$$=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}.$$

故ニ若シ$a>b$ナラバ$a-b>0$.

故ニ $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$.

若シ$a<b$ナラバ$a-b<0$.

故ニ $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

即チ定理ハ證明サレタリ.

同樣ニシテ次ノ定理ヲ證明スルヿヲ得.

比ノ兩項ヨリ各項ヨリモ小ナル同數

ヲ減ズレバ優比ハ其値ヲ增加シ,劣比ハ其値ヲ減少ス.

上ノ二定理ハ又次ノ如ク言ヒ表ハスコトヲ得.

比ノ兩項ニ同數ヲ加フレバ其値ハ1ニ近接シ,又比ノ兩項ヨリ各項ヨリモ小ナル同數ヲ減ズルトキニハ其値ハ1ヨリ遠カル.

181. 比$ac:bd$ヲ比$a:b$ト比$c:d$トノ**相乘比**或ハ**複比**ト稱ス,一般ニ數多ノ比ノ前項ノ積ヲ前項トシ,後項ノ積ヲ後項トシテ新タニ得タル比ヲ與ヘラレタル諸比ノ相乘比或ハ複比ト稱スルナリ.

比$a^2:b^2$ヲ比$a:b$ノ二乘比ト稱ス.

比$a^3:b^3$ヲ比$a:b$ノ三乘比ト稱ス.

比$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ヲ比$a:b$ノ平方根比ト稱ス.

此等ノ定義ハ屢々必要ナルコトアルナリ.

注意. 二數a, bノ比ノ値ハ$\frac{a}{b}$ニシテ,此數ハ有理數タリ又ハ無理數タルコトモ得ルナリ;例令バ3ト2トノ比ノ値ハ$\frac{3}{2}$ニシテ有理數ナレドモ,$\sqrt{5}$ト3トノ比ノ値ハ$\frac{\sqrt{5}}{3}$ニシテ之ハ無理數ナリ.

演習問題 56.

1. 比5:9ト比3:10トノ複比ノ値ヲ求ム.
2. 比21:17ト比13:9トノ大小ヲ比較セヨ.
3. 比3:2ノ二乘比ト比5:12トノ相乘比ヲ作リ且ツ其値ヲ見出セ.
4. 比25:36ノ平方根比ト比3:5トノ複比ヲ求ム.
5. 比5:4, 8:7, 21:16, 38:35ヲ大サノ順ニ列記セヨ.
6. 比$(3+x):(5+x)$ガ比5:6ニ等シキ爲メニハxノ値ハ如何ナルベキカ.
7. 二數アリ,其比ハ4:3ニ等シク,其和ハ35ナリトイフ,二數トハ如何.
8. 比11:13ノ兩項ニ如何ナル數ヲ加フレバ其比ハ3:4ニ等シクナルカ.
9. $5x^2+2y^2=7xy$ナル時比$x:y$ノ値ヲ求ム.

10. $\frac{7x+5y}{x+3y}=3$ ナルトキ比 $x:y$ ノ値ヲ求ム.

11. 二數アリ,其和,其差,其平方ノ差ガ 4:1:8 ノ如クナルトイフ,仍テ問フ二數トハ如何.

12. 或比ノ兩項ニ 3 ヲ加フレバ 2:3 ニ等シクナリ,其兩項ヨリ 3 ヲ減ズレバ 1:3 ニ等シクナルトイフ,或比トハ如何ナル比ゾヤ.

13. 比 $(a-x):(b-x)$ ガ比 $a:b$ ノ二乘比ニ等シクナル樣ナル x ノ値ヲ求ム.

14. $\frac{2a^2-3b^2}{a^2+b^2}=\frac{2}{41}$ ナルトキ比 $a:b$ ノ値ヲ求ム.

15. 比 $2x:3y$ ガ比 $(2x-m):(3y-m)$ ノ二乘比ニ等シキ爲メニハ m ハ如何ナル値ヲ有スベキカ.

16. 比 $(x+1):(2x-4)$ ガ比 $(x-3):(x+1)$ ニ等シキトキニハ x ノ値如何.

17. 父子ノ年齡ノ比ハ比 2:1 ニ等シク,今ヨリ十年以前ニハ其比ノ値 $\frac{8}{3}$ ナリシトイフ,仍テ問フ父子現今ノ年齡幾干.

18. 一ツノ比ノ各項ヨリ他ノ項ノ反數ヲ減ジテ得ル所ノ比ハ原ノ比ニ等シキコトヲ證セヨ.

19. 比 $m:n$ ガ比 $(m-x):(n-x)$ ノ平方根比ニ等シキトキニハ $x=\frac{mn}{m+n}$ ナルコトヲ證セヨ.

20. a 及ビ x ガ正ニシテ且ツ $a>x$ ナラバ比 $(a^2-x^2):(a^2+x^2)$ ハ比 $(a-x):(a+x)$ ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ.

21. 比 $(x-y):(x+y)$ ガ比 $(2y-x):(3x-2y)$ ニ等シキトキニハ比 $x:y$ ノ値如何.

比例.

182. 四數 a, b, c, d ニ於テ第一數 a ト第二數 b トノ比 $a:b$ ガ第三數 c ト第四數 d トノ比 $c:d$ ニ等シキトキニハ此四數ガ**比例**ヲナスト稱ス.

此二比ノ相等ヲ示セル式ヲ比例ト稱ス.

比例ヲ書キ表ハスニハ次ノ如クス.

$$a:b=c:d.$$

或ハ $$a:b::c:d.$$

a ト d トヲ此比例ノ**外項**, b ト c トヲ其**內項**ト稱ス.

183. 四數 a, b, c, d ガ比例ヲナストキニハ

其外項ノ積adト其內項ノ積bcトハ相等シ.

a, b, c, dガ比例ヲナス故ニ

$$a:b=c:d.$$

或ハ $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

此兩邊ニbdヲ乘ズレバ

$$ad=bc.$$

即チ外項ノ積ハ內項ノ積ニ等シ.

是ニ因テ逆ニ四數a, b, c, dニ於テ$ad=bc$ナラバ此四數ハ比例ヲナシ, a, dハ外項, b, cハ內項タルベク, 又ハb, cガ外項ニシテa, dガ內項タルベシ.

184. 四數a, b, c, dニ於テ$ad=bc$ナルトキニハ次ノ四ツノ比例ノ成立スルヿハ前節ニヨリテ明カナリ.

即チ $$a:b=c:d.$$

$$a:c=b:d.$$

$$b:a=d:c.$$

$$b:d=a:c.$$

是ニ因テ又此四ツノ內何レカ一ツガ正シキトキニハ,他ノ三ツモ又正當ナルヿヲ知ル.

185. 若シ$a:b=c:d$ナラバ$(a+b):b=(c+d):d$ナリ.

如何トナレバ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ナル故ニ$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1.$

或ハ $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}.$$

即チ $$(a+b):b=(c+d):d.$$

又$a:b=c:d$ナラバ$(a-b):b=(c-d):d$ナリ.

如何トナレバ

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ナル故ニ$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1.$

或ハ $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

即チ $$(a-b):b=(c-d):d.$$

186. 數多ノ數アリ,第一數ト第二數トノ比,第二數ト第三數トノ比,第三數ト第四數トノ比,等逐次斯クシテ作リタル比

ガ相等シキトキニハ,此等ノ數ハ**連比例**ヲナストイフ.

例令バ　$a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots\cdots$

即チ　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots$

ナルトキニハ a, b, c, d 等ハ連比例ヲナスナリ.

三數ガ連比例ヲナストキニハ第二數ヲ第一數及ビ第三數ノ**比例中項**ト稱シ,第三數ヲ第一數及ビ第二數ノ**第三比例項**ト稱ス.

例令バ $a:b=b:c$ ナルトキニハ b ヲ a, c ノ比例中項トイヒ,c ヲ a, b ノ第三比例項ト稱ス.

二數ノ比例中項ハ其積ノ平方根ニ等シ.

a, c ヲ以テ二數ヲ表ハシ,b ヲ以テ其比例中項ヲ表ハセバ

$$a:b=b:c.$$

ナルベク,從テ　$ac=b^2.$

即チ　$b=\sqrt{ac}.$

三數ガ連比例ヲナストキニハ第一數ト第三數トノ比ハ第一數ト第二數トノ比ノ二乘比ニ等シ.

a, b, c ヲ以テ連比例ヲナス處ノ三數ヲ表ハサン,然ルトキハ

$$a:b=b:c.$$

即チ　$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$

偖テ　$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}.$

即チ　$a:c=a^2:b^2.$

187. 次ニ二三ノ例題ノ解法ヲ示サン.

例 1. $a:b=c:d$ ナルトキニハ $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$ ナルコトヲ證セヨ.

185節ニ於テ $a:b=c:d$ ナルトキニハ

$$(a+b):b=(c+d):d.$$

又　$(a-b):b=(c-d):d.$

ナルコトヲ知リ得タリ,即チ

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}.$$

下式ノ兩邊ニテ夫々上式ノ兩邊ヲ除スレバ

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

即チ $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$

例 2. $a:b=c:d,\ e:f=g:h$ ナルトキニハ

$$ae:bf=cg:dh.$$

ナルヿヲ證セヨ.

如何トナレバ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 及ビ $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ ナル故ニ,兩邊ヲ相乘ズレバ

$$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}.$$

即チ $ae:bf=cg:dh.$

例 3. $a:b=c:d$ ナルトキニハ $(ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2)$ ナルヿヲ證セヨ.

先ヅ $\frac{a}{b}=x$ ト置カン,然ルトキハ $\frac{c}{d}=x$ 而シテ $a=bx$, $c=dx$ ナリ,因テ

$$ab+cd=bx.b+dx.d=b^2x+d^2x=(b^2+d^2)x.$$

$$ab-cd=b^2x-d^2x=(b^2-d^2)x.$$

$$a^2+c^2=b^2x^2+d^2x^2=(b^2+d^2)x^2.$$

$$a^2-c^2=b^2x^2-d^2x^2=(b^2-d^2)x^2.$$

故ニ $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{(b^2+d^2)x}{(b^2-d^2)x}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$

又 $\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(b^2+d^2)x^2}{(b^2-d^2)x^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$

故ニ $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$

即チ $(ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2).$

例 4. $(3a+6b+c+2d)(3a-6b-c+2d)=(3a-6b+c-2d)(3a+6b-c-2d)$ ナルトキニハ $a:b=c:d$ ナルヿヲ證セヨ.

與式ニヨリ

$$\frac{3a+6b+c+2d}{3a-6b+c-2d}=\frac{3a+6b-c-2d}{3a-6b-c+2d}.$$

$$\begin{cases} A=3a+6b+c+2d, & B=3a-6b+c-2d, \\ C=3a+6b-c-2d, & D=3a-6b-c+2d. \end{cases}$$

ト置カン,然ルトキハ

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}.$$

故ニ $\frac{A+B}{A-B}=\frac{C+D}{C-D}.$

$A+B=2(3a+c),\qquad A-B=2(6b+2d).$

$C+D=2(3a-c),\qquad C-D=2(6b-2d).$

故ニ $\frac{2(3a+c)}{2(6b+2d)}=\frac{2(3a-c)}{2(6b-2d)}.$

或ハ $\frac{3a+c}{6b+2d}=\frac{3a-c}{6b-2d}.$

或ハ $\frac{3a+c}{3a-c}=\frac{6b+2d}{6b-2d}.$

因テ又 $\frac{(3a+c)+(3a-c)}{(3a+c)-(3a-c)}=\frac{(6b+2d)+(6b-2d)}{(6b+2d)-(6b-2d)}$

或ハ $\frac{6a}{2c}=\frac{12b}{4d}.$

或ハ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}.$

或ハ $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

即チ $$a:b=c:d.$$

例 5. 若シ $a:b=c:d$ ナラバ各比ハ次ノ分數式

$$\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}$$

ニ等シキヿヲ證セヨ.

今 $a:b=c:d$ 即チ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=x$ ト置カン, 然ルトキハ

$$\frac{a}{b}=x,\quad \frac{c}{d}=x.$$

從ツテ $$a=bx,\quad c=dx.$$

因テ $$a^2=b^2x^2,\ c^2=d^2x^2,\ ac=bdx^2.$$

故ニ $$\frac{\sqrt{(la^2+mac+nc^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}=\frac{\sqrt{(lb^2x^2+mbdx^2+na^2x^2)}}{\sqrt{(lb^2+mbd+nd^2)}}.$$

$$=\sqrt{x^2}=x.$$

即チ問題ハ證明サレタリ.

演習問題 57.

次ノ比例ニ於ケル x ノ値ヲ求ム.

1. $3:x=21:14.$
2. $(1+x):(4-x)=2:3.$
3. $a^2:bd=ab:x.$
4. $a^3:ab^2=5a^2b^2:x.$
5. $(6+x):(3+2x)=(10-x):(13-3x).$
6. $(x^2-2x+3):(2x-3)=(x^2-3x+5):(2x-5).$
7. $(x^2-2x-1):(x^2+4x-6)=(x-1):(x+12).$

次ノ二數ノ比例中項ヲ求ム.

8. $a^2,\ b^2.$
9. $(a+b)^2,\ (a-b)^2.$
10. $a+b,\ \frac{c^2}{a+b}.$
11. $\frac{a}{b},\ \frac{bc^2}{ad^2}.$

次ノ二數ノ第三比例項ヲ求ム.

12. $a^2,\ ab.$
13. $xy,\ y^2z^2.$
14. $(1-x)^2,\ 1-x^2.$
15. $ax^2,\ xy.$

三數 a, b, c ガ連比例ヲナストキニハ次ノ比例ノ成立ツヿヲ證セヨ.

16. $a:(a+b)=(a-b):(a-c).$
17. $(a^2+b^2):(ab+bc)=(ab+bc):(b^2+c^2).$
18. $\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{b^3+c^3}.$
19. $a:b=c:d,\ b:x=d:y$ ナルトキニハ $a:x=c:y$ ナルヿヲ證セヨ.
20. $a:b=b:c$ ナルトキニハ $(b^2+bc+c^2)(ac-bc+c^2)=b^4+ac^3+c^4$ ナルヿヲ證セヨ.

四數 a, b, c, d ガ比例ヲナストキニハ次ノ比例或ハ等式ノ成リ立ツヿヲ證セヨ.

21. $a^2:c^2=(a^2-b^2):(c^2-d^2).$
22. $(pa+qb):(ra+sb)=(pc+qd):(rc+sd).$
23. $(a^2+ac+c^2):(a^2-ac+c^2)=(b^2+bd+d^2):(b^2-bd+d^2).$
24. $\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}\right):\left(\frac{c}{p}+\frac{d}{q}\right)=a:c.$

25. $(a+b):(c+d)=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$.

26. $\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right):\frac{ab}{a^2+b^2}=\left(\frac{d}{c}+\frac{c}{d}\right):\frac{cd}{c^2+d^2}$.

27. $\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}\right):\left(\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}\right)=ab:cd$.

28. $\sqrt[n]{a^n+b^n}:\sqrt[r]{a^r-b^r}=\sqrt[n]{c^n+d^n}:\sqrt[r]{c^r-d^r}$.

29. $(bcd+cda+dab+abc)^2=abcd(a+b+c+d)^2$.

30. $a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}=(abcd)^n\left(\frac{1}{a^{2n}}+\frac{1}{b^{2n}}+\frac{1}{c^{2n}}+\frac{1}{d^{2n}}\right)$.

31. $a:b=c:d=e:f$ ナルトキニハ

$$(a^3+a^2c+ace):(b^3+b^2d+bdf)=(ace+ac^2+c^3):(bdf+bd^2+d^3)$$

ナルヿヲ證セヨ.

32. a, b, c, d ガ連比例ヲナストキニハ次ノ比例ノ成リ立ツヿヲ證セヨ. $a:d=(a^3+b^3+c^3):(b^3+c^3+d^3)$.

33. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ ナルトキニハ $\frac{x+y}{a+b}=\frac{y+z}{b+c}=\frac{z+x}{c+a}$ 且ツ

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ ナルヿヲ證セヨ.

34. $a:b=c:d=e:f$ ナルトキニハ各比ハ

$$\sqrt[3]{\frac{2a^2c+3c^2e+4e^2a}{2b^2d+3d^2f+4f^2b}}$$

ニ等シキヿヲ證セヨ.

35. $a:b=c:d=e:f$ ナルトキニハ各比ハ

$$(la+mc+ne):(lb+md+nf)$$

ニ等シキヿヲ證セヨ.

36. a, b, c, d ガ連比例ヲナストキニハ $b+c$ ハ $a+b$ ト $c+d$ トノ比例中項ナルヿヲ證セヨ.

37. $b+c\neq 0$ ニシテ且ツ $\frac{bx-ay}{cy-az}=\frac{cx-az}{by-ax}=\frac{z+y}{x+z}$ ナルトキニハ各比ハ又 $\frac{x}{y}$ ニ等シキヿヲ證セヨ.

38. $(y-z):(b-c)=(z-x):(c-a)=(x-y):(a-b)$ ナルトキニハ

$$a(y-z)+b(z-x)+c(x-y)=0.$$

ナルヿヲ證セヨ.

39. b, d, f ガ正ナルトキニハ比 $(a+c+e):(b+d+f)$ ハ比 $a:b, c:d, e:f$ ノ中ノ最大ナルモノヨリモ小ニシテ最小ナルモノヨリモ大ナルヿヲ證セヨ.

40. $(a+b):(b+c)=(c+d):(d+a)$ ナルトキニハ $a=c$ カ或ハ $a+b+c+d=0$ ナルヿヲ證セヨ.

41. $x:(b+c-a)=y:(c+a-b)=z:(a+b-c)$ ナルトキニハ

$$(a+b+c)(yz+zx+xy)=(x+y+z)(ax+by+cz).$$

ナルヿヲ證セヨ.

第十七章 級數.

等差級數

188. 或一定ノ順序ニ從ヒ一列ニ並ベラレタル數多ノ數ニ於テ其中ノ任意ノ一數ト其次ノ數トノ差ガ何レモ同一ナルトキニハ,此一列ノ數ヲ**等差級數**ト稱シ,各數ヲ其**項**,此同一ナル差ヲ**通差**,最初ノ數ヲ**初項**,最後ノ數ヲ**末項**ト稱ス.

例令バ　3, 5, 7, 9, 11.

9, 5, 1, −3, −7, −11, −15.

$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d.$

此何レモ等差級數ニシテ第一ノ級數ノ通差ハ 2, 初項ハ 3, 末項ハ 11; 第二ノ級數ノ通差ハ −4, 初項ハ 9, 末項ハ −15; 第三ノ級數ノ通差ハ d, 初項ハ a, 末項ハ $a+5d$ ナリ.

189. 等差級數ニ於テ初項ヲ a, 通差ヲ d, 末項ヲ l, 項ノ數ヲ n トスレバ

初項 第二項 第三項 第四項....末項.

$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d,\ ..\ a+(n-1)d.$

即チ　$l=a+(n-1)d.$

是ニ因ツテ等差級數ノ初項,末項及ビ項數ガ與ヘラレタルトキニハ其通差ハ直チニ發見スルヿヲ得. 即チ

$$d=\frac{l-a}{n-1}.$$

190. 一ノ等差級數ニ於テ其内ノ二項ガ與ヘラレタルトキニハ其初項及ビ通差ハ之ヲ發見スルヿヲ得.

第 k 項ヲ α, 第 m 項ヲ β トシテ此二項ガ與ヘラレタリトセン, a ヲ以テ初項, d ヲ以テ通差ヲ表ハセバ

$$a+(k-1)d=\alpha.$$
$$a+(m-1)d=\beta.$$

ナルベシ,之レ a, d ヲ未知數トセル聯立一次方程式ナル故ニ之ヲ解キテ a, d ヲ發見スルヿヲ得ベシ.

例. 第三項ガ 7, 第五項ガ 13 ナル等差級數ノ初項

及ビ通差ヲ求ム.

aヲ以テ初項, dヲ以テ通差ヲ表ハセバ次式ヲ得.

$$a+2d=7,\ a+4d=13.$$

之ヲ解キテ$a=1, d=3$ヲ得.

即チ初項ハ1ニシテ通差ハ3ナリ.

191. 等差級數ノn項ノ和ヲ求ムルコト.

aヲ以テ初項, dヲ以テ通差, lヲ以テ末項, sヲ以テn項ノ和ヲ表ハセバ

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l.$$

又ハ $s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a.$

此二式ヲ加フレバ

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)$$
$$=n(a+l).$$

故ニ $$s=\frac{n}{2}(a+l).$$

又ハ $l=a+(n-1)d$ ナル故ニ

$$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}.$$

例. 等差級數4, 7, 10, 13, ……ノ第八項ヲ問フ, 又十二項ノ和ヲ求ム.

a, dヲ以テ初項及ビ通差ヲ表ハセバ

$$a=4,\ d=7-4=3.$$

故ニ 第八項$=a+7d=4+7\times3=25.$

十二項ノ和$=\frac{12}{2}\{2\times4+(12-1)\times3\}=6\times41=246.$

192. 三數ガ等差級數ヲナストキニハ第二項ヲ他ノ二項ノ等差中項ト稱ス.

例令バa, b, cノ三數ガ等差級數ヲナストキニハbヲa, cノ等差中項トイフ, 而シテ$b-a=c-b$ナルヲ以テ

$$b=\frac{a+c}{2}.$$

因テ二數ノ等差中項ハ其和ノ半分ナリ.

例. 5, 11ノ等差中項ハ$\frac{5+11}{2}=8$ナリ.

等差級數ヲナセル一列ノ數ニ於テ初項ト末項トノ間ニ在ル總テノ數ヲ此二項ノ等差中項ト稱ス.

例令バ等差級數4, 7, 10, 13, ……61, 64, 67ニ於テ7, 10, 13……61, 64ハ4ト67トノ間ニアル二十個ノ等差中項ナリ.

與ヘラレタル二數ノ間ニ與ヘラレタル數例令バ n 個ノ等差中項ヲ挿入スルニハ次ノ如クスベシ.

a, b ヲ以テ與ヘラレタル二數トスレバ問題ハ a ヲ初項 b ヲ末項トシ,項數ハ $n+2$ ナル等差級數ヲ作ルコトニ歸着スベシ,因テ今 d ヲ以テ通差ヲ表ハセバ

$$b=\text{第}(n+2)\text{項}=a+(n+1)d.$$

之ヨリ $$d=\frac{b-a}{n+1}.$$

因テ所要ノ中項ハ

$$a+\frac{b-a}{n+1},\ a+2\frac{b-a}{n+1},\ a+3\frac{b-a}{n+1},\ \ldots\ldots\ a+n\frac{b-a}{n+1}.$$

ナリ.

等差級數ニ於テ初項 a, 通差 d, 末項 l, 項數 n, 及ビ n 項ノ和 s ノ五ツノ内何レカ三ツガ與ヘラレタルトキニハ其等差級數ハ決定セラルベシ,但シ此内 n ハ常ニ正ノ整數ナラザルベカラズ.

例. 等差級數 $24, 20, 16, \cdots\cdots$ ノ幾項ノ和ガ72トナルカ.

n ヲ以テ所要ノ項數トセン,初項ハ24,通差ハ $20-24=-4$ ナル故ニ

$$72=\frac{n}{2}\{2\times 24+(n-1)(-4)\}.$$

之ヨリ $n^2-13n+36=0$, 或ハ $(n-4)(n-9)=0$.

$n=4$ 或ハ 9.

此二ツノ値ハ此場合ニ於テ何レモ問題ニ適合ス,即チ今9項ヲトレバ $24, 20, 16, 12, 8, 4, 0, -4, -8$ ニシテ終リノ5項ハ互ヒニ打チ消シテ其和ハ4項ノ和ト相等シクナルヲ見ルベシ.

演習問題 58.

1. 次ノ等差級數ノ第二十項ヲ問フ.

(1). $2, 6, 10, \cdots\cdots$ (2). $12, 7, 2, \cdots\cdots$

(3). $x+y, x-y, \cdots\cdots$

2. 第二項ハ5ニシテ,第六項ハ17ナル等差級數ノ第十五項ヲ問フ.

3. 次ノ等差級數ノ項數ヲ問フ.

(1). $5, 2, -1, \cdots\cdots -55$. (2). $13, 17, 21, \cdots\cdots 57$.

4. 初項ハ -5, 第廿五項ハ -125 ナル等差級數ノ第十二項及ビ第三十項ヲ求ム.

5. 次ノ等差級數ノ和ヲ求ム.

(1). $2, 6, 10, \cdots\cdots 102.$ (2). $35, 29, 23, \cdots\cdots -31.$

(3). $3, \frac{13}{3}, \frac{17}{3}, \cdots\cdots$第十二項迄.

(4). $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots\cdots$第三十項迄.

(5). $2a-b, 4a-3b, 6a-5b, \cdots\cdots$第四十項迄.

(6). $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\cdots\cdots$第七項迄.

(7). $(a+b)^2+(a^2+b^2)+(a-b)^2+\cdots\cdots$第$n$項迄.

6. 初項79, 末項7, 和1075ナル等差級數ノ項數ヲ求ム.

7. 和-133, 初項-3, 末項-16ナル等差級數ノ項數ヲ求ム.

8. 次ノ二數ノ等差中項ヲ問フ.

(1). $7, 21.$ (2). $-5, 13.$ (3). $a-b, a+b.$

9. 初項$3x$, 末項$-35x$, 和$-320x$ナル等差級數ノ項數幾何.

10. 次ノ二數ノ間ニ八個ノ等差中項ヲ挿入セヨ.

(1). $3, 30.$ (2). $2, -\frac{1}{4}.$ (3). $a, a-9b.$

11. x^2ト1トノ間ニx個ノ等差中項ヲ挿入セヨ.

12. 等差級數ヲナス處ノ三數ノ和ハ24ニシテ, 其平方ノ和ハ242ナリトイフ, 仍テ問フ三數トハ如何.

13. 或人初年ニハ金二十圓ヲ貯蓄シ, 次年ニハ金三十圓, 三年目ニハ金四十圓等, 年々貯蓄金高ヲ十圓ツヽ增ストキハ幾年ノ後貯金千七百圓トナルヤ.

14. 100ト300トノ間ニアル總テノ奇數ノ和ヲ求ム.

15. 等差級數ノ項數ヲ$2n+1$トスルトキ, 其奇數番ノ項ノ和ト偶數番ノ項ノ和トノ比ハ$(n+1):n$ニ等シキコトヲ證セヨ.

16. 等差級數ノ第p項, 第q項, 第r項ガ夫々a, b, cナルトキニハ次ノ等式ノ成立ツコトヲ證セヨ.

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0.$$

17. 1ヨリ初マリテ連續セル奇數若干個ノ和ハ恒ニ平方數ナルコトヲ證セヨ.

18. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ガ等差級數ヲナストキニハ$(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$モ亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ, 但シ此處ニ於テ$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ナリトス.

等比級數.

193. 一定ノ順序ヲ以テ一列ニ並ベラレタル數多ノ數ニ於テ其內ノ任意ノ一

數ト其前ノ數トノ比ガ何レモ同一ナルトキニハ,此一列ノ數ヲ**等比級數**ト稱シ,各數ヲ其項,同一ナル比ヲ**通比**,最初ノ數ヲ**初項**,最後ノ數ヲ**末項**ト稱ス.

例令バ　$3, 6, 12, \cdots\cdots 384.$

$$6, -2, \frac{2}{3}, \cdots\cdots \frac{2}{243}.$$

$$a, ar, ar,^2 \cdots\cdots ar^{n-1}.$$

ハ何レモ等比級數ニシテ第一ノ級數ニ於テハ初項ハ3,通比ハ2,末項ハ384;第二ノ級數ニ於テハ初項ハ6,通比ハ$-\frac{1}{3}$,末項ハ$\frac{2}{243}$;最後ノ級數ニ於テハ初項ハa,通比ハr,末項ハar^{n-1}ナリ.

194. 等比級數ニ於テ初項ヲa,通比ヲr,末項ヲl,項數ヲnトスレバ

初項　第二項　第三項　第四項‥‥末項.

$$a, \quad ar, \quad ar^2, \quad ar^3, \quad \cdots\cdots ar^{n-1}.$$

即チ　$l=ar^{n-1}.$

是ニ因テ等比級數ノ初項,末項,及ビ項數ガ與ヘラレタルトキニハ其通比ハ直チニ發見スルコトヲ得ベシ,即チ

$$r^{n-1}=\frac{l}{a}.$$

之ニヨリテ通比rヲ見出スヿヲ得.

195. 一ノ等比級數ニ於テ其內ノ二項ガ與ヘラレタルトキニハ此級數ノ初項及ビ通比ハ發見スルヿヲ得ベク,從テ等比級數ハ其內ノ二項ニヨリテ定マルベシ.

第k項ヲα,第m項ヲβトシテ此二項ガ與ヘラレタリトシ,aヲ以テ初項,rヲ以テ通比ヲ表ハセバ

$$ar^{k-1}=\alpha,$$

$$ar^{m-1}=\beta.$$

此二方程式ヨリaトrトヲ見出スヿヲ得.

例. 等比級數ノ第四項ハ189,第六項ハ1701ナルトキ其初項ト通比トヲ發見セヨ.

aヲ以テ初項,rヲ以テ通比ヲ表ハセバ

$$ar^3=189, \quad ar^5=1701.$$

因テ　$r^2=9.$

即チ　$r=3$ 或ハ -3.

因テ　$a=189\div3^3$ 或ハ $189\div(-3)^3$.

$=7$ 或ハ -7.

即チ初項7,通比3カ,或ハ初項-7,通比-3ナリ.

196. 等比級數ノn項ノ和ヲ求ムルヿ.

aヲ以テ初項,rヲ以テ通比,sヲ以テn項ノ和ヲ表ハセバ

$$s=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-1}.$$

rヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$sr=ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots+ar^{n-1}+ar^n.$$

下式ノ兩邊ヲ夫々上式ノ兩邊ヨリ減ズレバ

$$s-sr=a-ar^n.$$

$$s(1-r)=a(1-r^n).$$

故ニ　$$s=a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

lヲ以テ末項ヲ表ハセバ$l=ar^{n-1}$ナル故ニ

$$s=\frac{a-lr}{1-r}.$$

例. 等比級數8,12,18,……ノ八項ノ和ヲ求ム.

初項ハ8,通比ハ$\frac{3}{2}$ニシテ,項數ハ8ナル故ニ

$$s=a\frac{1-r^n}{1-r}=8\times\frac{1-(\frac{3}{2})^8}{1-\frac{3}{2}}$$

$$=8\times\frac{1-\frac{6561}{256}}{1-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{6305}{16}.$$

即チ所要ノ和ハ$\frac{6305}{16}$ナリ.

197. 三數ガ等比級數ヲナストキニハ中間ノ數ヲ他ノ二數ノ**等比中項**ト稱ス.

例令バa,b,cガ等比級數ヲナストキニハbヲa,cノ等比中項ト稱ス. 偖$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ナル故ニ　$b^2=ac.$

從ツテ　$b=\pm\sqrt{ac}.$

因テ二數ノ等比中項ハ其積ノ平方根ニ等シ.

等比級數ヲナセル數多ノ數ニ於テ初項ト末項トノ間ニアル總テノ數ヲ此二數ノ間ノ**等比中項**ト稱ス.

例令バ3,6,12,24,48ニ於テ6,12,24ハ3ト48トノ間

ノ三個ノ等比中項ナリ.

與ヘラレタル二數ノ間ニ與ヘラレタル數例令バn個ノ等比中項ヲ挿入スルニハ次ノ如クスベシ.

a, bヲ與ヘラレタル二數トセン,此問題ハaヲ初項bヲ末項ニ有シ,$n+2$項ノ等比級數ヲ作ルヿニ歸着スベシ.

今rヲ以テ通比ヲ表ハセバ

$$b=ar^{n+1}.$$

故ニ $$r^{n+1}=\frac{b}{a}.$$

因テ $$r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}.$$

故ニ所要ノ等比中項ハ

$$a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\ a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\ \ldots\ldots a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^n.$$

若シ$n+1$ガ偶數ナラバrハ正負二個ノ値ヲ有スベク,從テ所要ノ等比中項モ亦二樣アルベシ.(但シ虛數ヲ省ク)

198. 無限等比級數. 等比級數ノ初項ヲa,通比ヲr,項數ヲn,其和ヲsトスレバ196

節ニヨリテ

$$s=a\frac{1-r^n}{1-r}$$
$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

若シrノ絶對値ガ1ヨリモ小ナルトキニハr^nノ絶對値ハnノ增加スルニ從テ益々減小シ,nガ非常ニ大ナル數トナルトキニハr^nノ絶對値ハ非常ニ小ナル數トナリ,而シテnヲ十分ニ大ナラシムレバ此値ハ如何程ニテモ小ナラシムルヿヲ得,從テnガ測ル可カラザル程大トナルトキニハ此値ハ測ルベカラザル程小トナル,從ツテ$\frac{ar^n}{1-r}$モ測ルベカラザル程小トナリ遂ニ0トナル,是ニ因テ等比級數

$$a+ar+ar^2+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ニ於テrノ絶對値ガ1ヨリモ小ナラバ,測ル可カラザル程多數ノ項ノ和ハ$\frac{a}{1-r}$ニ等シ.

此ノ如ク通比ノ絶對値ガ1ヨリモ小

ナル等比級數ノ項ノ數ガ測ル可カラザル程澤山アルモノヲ**無限等比級數**ト稱シ,其和ハ $\frac{a}{1-r}$ ナリ,但シ a ハ初項,r ハ通比ナリトス.

例 1. 無限等比級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ ノ和ヲ求ム.

初項ハ1,通比ハ $\frac{1}{2}$ ナル故ニ和 s ハ次ノ如シ.

$$s=a\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

例 2. 無限等比級數ノ第二項ハ -8 ニシテ其和ハ18ナル等比級數ヲ求ム.

a ヲ初項トシ r ヲ通比トスレバ,題意ニヨリテ次ノ二方程式ヲ得.

$$ar=-8, \qquad \frac{a}{1-r}=18.$$

相除スレバ $\qquad r(1-r)=\frac{-8}{18}.$

$$r^2-r=\frac{4}{9}.$$

之ヲ解キテ $\qquad r=-\frac{1}{3}$ 或ハ $\frac{4}{3}$.

$r=\frac{4}{3}$ トイフ價ハ題意ニ適セズ,何トナレバ通比ノ絶對値ハ1ヨリモ小ナラザル可カラザレバナリ,故ニ題意ニ適セルハ $r=-\frac{1}{3}$ ノ値ナリ.

$r=-\frac{1}{3}$ ナル故ニ $ar=-8$ ヨリ $\quad a=24.$

故ニ此級數ハ $24, -8, \frac{8}{3}, \cdots\cdots\cdots\cdots$ ナリ.

演習問題 59.

1. 次ノ等比級數ノ第八項ヲ求ム.

(1). $3, 12, 48, \cdots\cdots$ (2). $9, -3, 1, \cdots\cdots$

(3). $24, 4, \frac{2}{3}, \cdots\cdots$ (4). $11, -33, 99, \cdots\cdots$

2. 次ノ等比級數ノ末項ヲ求ム.

(1). $6, -18, 54, \cdots\cdots$ 第六項迄.

(2). $\frac{1}{72}, \frac{1}{24}, \frac{1}{8}, \cdots\cdots$ 第八項迄.

(3). $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \frac{3}{\sqrt{3}}, \cdots\cdots$ 第八項迄.

(4). $\frac{1}{\sqrt{2}}, -2, \frac{8}{\sqrt{2}}, \cdots\cdots$ 第七項迄.

3. 486ト6トノ間ニ三個ノ等比中項ヲ挿入セヨ.

4. 48ト $-\frac{1}{36}$ トノ間ニ二個ノ等比中項ヲ挿入セヨ.

次ノ等比級數ノ和ヲ求ム.

5. $7, -21, 63, \cdots\cdots$ 第十項迄.

6. $98, 14, 2, \cdots\cdots$ 第八項迄.

7. $1, 4, 16, \cdots\cdots$ 第 m 項迄.

8. $\sqrt{x}, -\sqrt{x^3}, \sqrt{x^5}, \cdots\cdots$ 第 n 項迄.

9. $12, 6, 3, \cdots\cdots$ 無限.

10. $\frac{8}{5}, -1, \frac{5}{8}, \cdots\cdots$ 無限.

11. $4, 0{\cdot}8, 0{\cdot}16, \cdots\cdots$ 無限.

12. $\frac{a}{a+b}, \left(\frac{a}{a+b}\right)^2, \left(\frac{a}{a+b}\right)^3, \cdots\cdots$ 無限. $(a<a+b)$.

13. 等比級數ノ通比ガ正ニシテ$\frac{1}{2}$ヨリモ小ナルトキニハ各項ハ其次ノ總テノ項ノ和ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ.

14. 無限等比級數ノ第二項ハ5ニシテ其和ハ20ナリトイフ,此級數如何.

15. 三數ガ等比級數ヲナシ,其和ハ52ニシテ其平方ノ和ハ1456ナリトイフ,仍テ此三數ヲ問フ.

16. 等比級數ニ於テ第一項ハ第四項ヨリモ156少ナク,第二項第三項第四項ノ和ハ78ナリトイフ,此級數ヲ求ム.

17. a, b, c, d ガ等比級數ヲナストキニハ $a+b, b+c, c+d$ 或ハ $a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ モ亦等比級數ヲナスコトヲ證セヨ.

18. 等比級數ノ項數ガ奇數ナルトキニハ其初項ト中央ノ項ト末項トハ亦等比級數ヲナスコトヲ證セヨ.

19. x ガ1ヨリモ小ナルトキニハ次式ノ成立ツコトヲ證セヨ.

(I) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots$ 無限.

(II) $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots$ 無限.

20. a, b, c ガ等比級數ヲナストキニハ次式ノ成立ツコトヲ證セヨ.

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2.$$

21. a, b, c ハ等比級數ヲナシ x, y ハ夫々 a, b ト b, c トノ間ノ等差中項ナルトキニハ次式ノ成立ツコトヲ證セヨ.

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \text{ 及ビ } 2=\frac{a}{x}+\frac{c}{y}.$$

22. 次ノ等式ヲ證セヨ.

$$\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-2}+x^{n-1}.$$

$$\frac{1-x^{2n}}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+x^{2n-2}-x^{2n-1}.$$

$$\frac{1+x^{2n+1}}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots-x^{2n-1}+x^{2n}.$$

23. 次ノ等式ヲ證セヨ.

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+x^2y^{n-3}+xy^{n-2}+y^{n-1}.$$

$$\frac{x^{2n}-y^{2n}}{x+y}=x^{2n-1}-x^{2n-2}y+x^{2n-3}y^2-\cdots\cdots-x^2y^{2n-3}+xy^{2n-2}-y^{2n-1}.$$

$$\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{x+y}=x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\cdots\cdots+x^2y^{2n-2}-xy^{2n-1}+y^{2n}.$$

注意. 22, 23 ノ等式ハ屢々必要ナルコトアリ.

第十八章 順列及ビ組合セ.

順 列.

199. n個ノ相異ナル物ヨリr個ツヽ種々ニ取リ,之レヲ種々ノ順序ニ並列セシ配置ヲn個ノ物ヨリr個ツヽ取リタル**順列**ト稱ス.

例令バa, b, c, dナル四個ノ文字ノ内ヨリ二ツヽ取リタル順列ハ次ノ如シ.

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$
$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

之等ハ何レモ異ナリタル配置ナリ.

同ジ物ガ同ジ順序ニ配列サレタル時ニハ其等ノ順列ハ相等シキナリ.

例令バabc, abcノ二ツノ順列ハ相等シ,左レ此abc, acbノ二ツノ順列ハ相等シカラズ,夫ハ第一ト第二トニ於テb, cノ順ガ相異ナレバナリ.

n個ノ物ヨリr個ツヽ取リタル順列ノ數ヲ${}_nP_r$ヲ以テ表ハス.

200. n個ノ相異ナル物ヨリr個ツヽ取リタル順列ノ數ヲ見出スコト.

先ヅn個ノ物ヨリ一個ツヽ取リタル順列ノ數ハ明カニnナルコトヲ知ルベシ.

例令バa, b, c, d, eノ五個ノ文字ヨリ一個ツヽ取リタル順列ハa, b, c, d, eニシテ此數ハ5ナリ.

次ニn個ノ物ヲ$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ノ$n$個ノ文字ニテ代表セン.

今a_1ヲ取リ除キ,$a_2, a_3, \ldots a_n$ノ$(n-1)$個ノ文字ヨリ$(r-1)$個ツヽ取リタル順列ヲ作リ,此等ノ順列ノ各ノ首ニa_1ヲ配列セシメテ得ル處ノ順列ハ$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ノn個ノ文字ヨリr個ツヽ取リタル順列ノ中ニテa_1ヲ其首ニ有スルモノナル可ク,又此等ノ順列中ニテa_1ヲ其首ニ有スルモノハ上ノ如クニシテ得ル處ノ順列ヨリ外ニハ存セザルベシ,偖$a_2, a_3 \ldots a_n$ノ$(n-1)$個ノ文字ヨリ$(r-1)$個ツヽ取リタル順列ノ

數ハ ${}_{n-1}P_{r-1}$ ナル故ニ,n個ノ文字ヨリr個ツヽ取リタル順列ノ中ニテa_1ヲ其首ニ有スルモノヽ數ハ ${}_{n-1}P_{r-1}$ ナリ,同樣ニシテa_2ヲ其首ニ有スル順列ノ數モ ${}_{n-1}P_{r-1}$, a_3ヲ其首ニ有スル順列ノ數モ ${}_{n-1}P_{r-1}$,....a_nヲ其首ニ有スル順列ノ數モ亦 ${}_{n-1}P_{r-1}$ ナリ,而シテn個ノ文字$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ノ中ヨリ$r$個ツヽ取リタル順列ハ$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ヲ其首ニ有スル順列ノ群ニ分ツヿヲ得,且ツ各群中ノ順列ノ數ハ ${}_{n-1}P_{r-1}$ ニシテ群ノ數ハ文字ノ數即チn個ナルヲ以テ次ノ等式成立ス.

$${}_nP_r = n\,{}_{n-1}P_{r-1}.$$

此式ニ於テnノ代リニ$n, n-1, n-2, \ldots (n-r+2)$ヲ置キ換フレバ次ノ諸等式ヲ得.

$${}_nP_r = n\,{}_{n-1}P_{r-1}.$$

$${}_{n-1}P_{r-1} = (n-1)\,{}_{n-2}P_{r-2}.$$

$${}_{n-2}P_{r-2} = (n-2)\,{}_{n-3}P_{r-3}.$$

.....

$${}_{n-r+2}P_2 = (n-r+2)\,{}_{n-r+1}P_1.$$

此等ノ等式ノ兩邊ヲ相乘ジ,而シテ後兩邊ヲ相等シキ因數ニテ除スレバ

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)\,{}_{n-r+1}P_1.$$

偖 ${}_{n-r+1}P_1$ 即チ$n-r+1$個ノ物ヨリ一個ツヽ取リタル順列ノ數ハ$n-r+1$ナル故ニ

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

是レ所要ノ數ナリ.

是ニ因テ相異ナルn個ノ物ヲ悉ク取リテ得ル處ノ順列ノ數 ${}_nP_n$ ハ次ノ如シ.

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1.$$

$n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ ナル1ヨリn迄ノ總テノ整數ノ連乘積ヲ$n!$或ハ$\lfloor n$ヲ以テ表ハシ,之ヲnノ階乘ト稱ス.

例 1. 1,2,3,4,5ノ五個ノ文字ヲ用ヰテ三桁ノ數ヲ幾個作リ得ベキカ.

問題ハ五個ノ異ナル物ヨリ三個ツヽ取リタル順列ノ數ヲ求ムルヿト同一ナルベシ,即チ所要ノ數ヲ

Nニテ表ハセバ

$$N={}_5P_3=5.4.3=60.$$

故ニ60個ノ相異ナル數ヲ作ルヿヲ得.

例 2. 六人ノ小供ヲ一列ニ並ブル方法ハ幾通リアルカ.

問題ハ6個ノ相異ナル物ヲ悉ク取リタル順列ノ數ヲ求ムルヿニ歸着ス.

故ニ　所要ノ數$={}_6P_6=6.5.4.3.2.1=720.$

即チ720通リアルナリ.

201. n個ノ物ノ中ニ相同ジキ物アルキ,n個ノ物ヲ悉ク取リタル順列ノ數ヲ發見スルヿ.

今n個ノ文字ヲ以テn個ノ物ヲ代表シ,此内ニaガp個,bガq個,cガr個アリトシ,其他ハ皆相異ナレリトセン,而シテNヲ以テ所要ノ順列ノ數ヲ表ハサン.

今此N個ノ順列ノ任意ノ一ヲ取リ,其内ノp個ノaノ代リニp個ノ相異ナル新文字$a_1, a_2, \ldots a_p$ヲ置クベシ,而シテ他ノ文字ノ位置ヲ元ノ儘トシ$a_1, a_2, \ldots a_p$ノ位置ヲ變ズルコトニヨリテ$p!$個ノ順列ヲ得ベシ,今此變化ヲN個ノ順列ノ總テニ行ヘバ$N\times p!$個ノ順列ヲ得ベシ,次ニ此$N\times p!$個ノ順列ノ任意ノ一ヲ取リ,其内ノq個ノbノ代リニq個ノ相異ナル新文字$b_1, b_2, \ldots b_q$ヲ置キ,他ノ文字ノ位置ハ元ノ儘トシ$b_1, b_2, \ldots b_q$ノ位置ヲ變ズルコトニヨリテ$q!$個ノ順列ヲ得ベシ,今此變化ヲ$N\times p!$個ノ順列ノ總テニ行ヘバ$N\times p!\times q!$個ノ順列ヲ得ベシ,次ニ又此$N\times p!\times q!$個ノ順列ノ任意ノ一ニ於テr個ノcノ代リニr個ノ相異ナル新文字$c_1, c_2, \ldots c_r$ヲ置キ,他ノ文字ノ位置ヲ元ノ儘トシ此等ノ文字ノミヲ種々其位置ヲ變ズルヿニヨリテ$r!$個ノ順列ヲ得ベク,此變化ヲ$N\times p!\times q!$個ノ順列ノ總テニ行ヘバ$N\times p!\times q!\times r!$個ノ順列ヲ得ベシ,偖此等ノ$N\times p!\times q!\times r!$個

ノ順列ハ n 個ノ相異ナリタル物ヲ悉ク取リタル順列ノ總テニ外ナラザルベシ,

故ニ $$N\times p!\times q!\times r!=n!.$$

因テ $$N=\frac{n!}{p!q!r!}.$$

若シ重復セル文字ガ a, b, c ノ三個ヨリモ多キ場合ニモ同樣ノ結果ヲ得ベシ,即チ a ガ p 個, b ガ q 個, c ガ r 個, d ガ s 個....等アル時ニハ所要ノ數 N ハ次ノ如シ.

$$N=\frac{n!}{p!q!r!s!\cdots\cdots}.$$

例 1. 一ノ書棚ニ五冊ノ英書,三冊ノ佛書,一冊ノ獨書ヲ一列ニ並ベル仕方ハ幾通リアルカ.

問題ハ九個ノ文字ノ內 a ガ五個, b ガ三個, c ガ一個アルトキニ此等ノ文字ヲ悉ク取リタル順列ノ數ヲ見出スコト同樣ナルベシ,即チ所要ノ數ヲ N ニテ表ハセバ

$$N=\frac{9!}{5!\,3!}=504.$$

例 2. 2, 2, 4, 4, 4, 7, 7, 7 ノ八個ノ數字ヲ以テ作リ得ベキ八桁ノ數ハ幾個アルカ.

八個ノ內 2 ハ二個, 4 ハ三個, 7 モ亦三個アル故ニ所

要ノ數ハ

$$\frac{8!}{2!3!3!}=560.$$

組合セ.

202. n 個ノ相異ナル物ヨリ配列ノ順序ニハ無關係ニ r 個ツヽ種々ニ取リテ得ル處ノ群ヲ n 個ノ物ヨリ r 個ツヽ取リタル組合セト稱ス.

例 今ハ a, b, c, d ノ四文字ヨリ二個ヅヽ取リタル組合セハ次ノ如シ.

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

同物ヨリ成ル組合セハ其配列ノ順序異ナルトキ皆相等シキ組合セナリ.

例 今ハ $abc, acb, bac, bca, cba, cab$ 等何レモ相等シキ組合セナリ.

n 個ノ物ヨリ r 個ツヽ取リタル組合セノ數ヲ ${}_nC_r$ ヲ以テ表ハス.

203. n 個ノ相異ナル物ヨリ r 個ツヽ取リタル組合セノ數ヲ發見スルヿ.

n個ノ物ヲ$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n$ノ$n$個ノ文字ヲ以テ代表セン,偖所要ノ數ハ此等ノ文字ヨリr個ツヽ其順序ヲ論ゼズシテ取リタル群ノ數即チ${}_nC_r$ナリ.

今此${}_nC_r$ノ組合セノ內ノ任意ノ一ヲ取リ,其內ニ含ム處ノr個ノ文字ヲ悉ク取リタル順列ヲ作レバ$r!$個ノ順列ヲ得ベシ,偖${}_nC_r$個ノ組合セノ內ノ任意ノ一ツヨリ$r!$個ノ順列ヲ得ル故ニ總テノ組合セヨリハ${}_nC_r \times r!$個ノ順列ヲ得ベク而シテ此等ノ順列ハ皆相異ナレリ,且ツ此等ノ順列ハn個ノ文字$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ヨリ$r$個ツヽ取リタル順列ニシテ,又$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ヨリ$r$個ツヽ取リタル順列ハ斯クシテ得タル順列ノ外ニハ存セザルベシ,故ニ此${}_nC_r \times r!$個ノ順列ハ${}_nP_r$個ノ順列ト全ク相等シ,即チ次ノ等式ヲ得.

$${}_nC_r \times r! = {}_nP_r \quad 故ニ\ {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}.$$

偖201節ニヨリテ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ナルヲ以テ

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

又ハ$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ナルヲ以テ

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

204. n個ノ相異ナル物ヨリr個ツヽ取リタル組合セノ數ハ$(n-r)$個ツヽ取リタル組合セノ數ニ等シ.

何ントナレバ

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-n-r)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$
$$= {}_nC_r. \qquad 〔前節ニヨリ〕$$

205. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$ナルヿヲ證セヨ.

今n個ノ文字$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ヨリ$r$個ツヽ取リテ作リタル組合セノ總テヲ任意ノ一文字例令バa_1ヲ含ムモノト之ヲ含マザルモノトノ二群ニ分チタリト考ヘン,偖a_1ヲ含マザル組合セハ$a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ノ

$n-1$個ノ文字ヨリr個ツヽ取タル組合セナルベク,其數ハ${}_{n-1}C_r$ナリ,又a_1ヲ含ム組合セハa_1ヨリ外ノ$n-1$個ノ文字ヨリ$r-1$個ツヽ取リタル組合セニa_1ヲ添加シタルモノナルベク,從テ其數ハ${}_{n-1}C_{r-1}$ナル可シ,故ニ

$${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}.$$

又此等式ハ次ノ如クシテモ證明スルヿヲ得.

$$\begin{aligned}{}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}&=\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r)}{r!}+\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{(r-1)!}\\&=\frac{(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\{(n-r)+r\}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}\\&={}_nC_r.\end{aligned}$$

例 1. 十二人ノ小供ヨリ四人組ヲ作ラントス,其仕方幾通アルカ.

十二個ノ物ヨリ四個ヅヽ取リタル組合セノ數ヲ求ムレバ可ナリ,即チ其數ハ

$$\frac{12.11.10.9}{4.3.2.1}=495.$$

例 2. 男子八人女子六人アリ,之ヲ以テ男子二人女子二人ヨリ成ル組ヲ作ラントス,其仕方ハ幾通リアルカ.

八人ノ男子ヨリ二人ツヽ取リタル組合セノ數ハ${}_8C_2$ニシテ,六人ノ女子ヨリ二人ツヽ取リタル組合セノ數ハ${}_6C_2$ナリ,偖${}_8C_2$ノ組合セノ任意ノ一ト${}_6C_2$ノ組合セノ任意ノ一トヲ組合ハセバ所要ノ組ノ一ヲ得ベキガ故ニ${}_8C_2$ノ組合ハセノ内ノ任意ノ一ヨリ${}_6C_2$通リノ組ヲ得ベシ,故ニ所要ノ數ハ${}_6C_2\times{}_8C_2$ナル可シ;偖

${}_6C_2=\frac{6.5}{2.1}=15$, ${}_8C_2=\frac{8.7}{2.1}=28$ナル故ニ

$${}_6C_2\times{}_8C_2=15\times28=420.$$

即チ620通リノ組ヲ作ルヿヲ得.

演習問題 60.

1. *careful*ナル語ノ字母ヲ悉ク取リタル順列ノ數ヲ問フ.

2. いとゝろのひかりナル語ノ内ノ文字ヲ悉ク取リタル順列ノ數ヲ問フ.

3. 徵兵檢査ノ合格者三十六人アリ,其ノ内ヨリ十人ヲ徵集セントス,幾通リノ組合セヲ作リ得ベキカ.

4. 六打櫓ノ端艇ノ漕手ヲ十二人ノ學生中ヨリ撰出セントスルニ,内七人ハ左舷,餘ノ五人ハ右舷ヲ漕ギ得ベシトイフ,之ヲ艇内ニ配置スル方法幾通リ

アルカ.

5. 1, 1, 3, 4, 4, 4, 5 ノ七個ノ數字ヲ用ヰテ七桁ノ數ヲ幾通リ作リ得ベキカ.

6. 若干ノ生徒ヲ六人ツヽ一列ニ並ベル仕方ノ數ハ之ヲ四人ツヽ一列ニ並ベル仕方ノ數ノ十二倍ニ等シトイフ,生徒ノ數ヲ求ム.

7. $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ ノ九個ノ文字ヲ種々ノ順序ニ排列スルニ當リ,奇數ノ番號ヲ有スル文字ハ恒ニ奇數番目ニアル樣ニセントス,此ノ如キ仕方ハ幾通リアルカ.

8. n 個ノ相異ナル物ヲ卓上ニ圓形ニ排列スル仕方ノ數ハ $(n-1)!$ ナルコトヲ證セヨ,又 n 個ノ相異ナル珠ヲ以テ珠數ヲ作ル仕方ハ $\frac{1}{2}(n-1)!$ 通リアルコトヲ證セヨ.

9. 六人ノ貴女ト同人數ノ紳士トガ悉ク一ノ卓子ノ周圍ニ列坐セントス,但シ貴女ト貴女ト又ハ紳士ト紳士トハ相隣レルコトナシトス,此ノ如キ並ビ方ハ幾通リアルカ.

10. ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1}$ ナルコトヲ證セヨ.

11. 24人ノ兵士アリ,之ヲ第一第二第三第四ノ四組ノ分隊ニ等分セントス,其仕方ハ幾通リアルカ.

12. n 個ノ物ヨリ r 個ツヽ取リタル順列ノ內ニテ p 個ノ格段ナル物ヲ含ム順列ノ數ハ幾個アルカ.

第十九章　二項定理.

206. 此章ニ於テハnガ正ノ整數ナルトキ$(x+a)^n$ノ展開式ヲ求メントス.

乘法ニヨリテ次ノ等式ハ容易ニ之ヲ證スルヿヲ得.

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2$$

$$+(ab+bc+ca)x+abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3$$

$$+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$

$$+(abc+bcd+cda+dab)x+abcd.$$

此等ノ式ノ右邊ヲ吟味スレバ直チニ次ノ法則ヲ發見スベシ.

(I). 項ノ數ハ二項因數ノ數ヨリモ一個丈ケ多シ.

(II). 初項ノxノ指數ハ因數ノ數ニ等シク,而シテ任意ノ項ノxノ指數ハ其前ノ項ノxノ指數ヨリモ1丈ケ少ナシ.

(III). 初項ノ係數ハ1ニシテ,第二項ノ係數ハ二項因數中ノ第二番目ノ文字ノ和,第三項ノ係數ハ此等ノ文字ヨリ二個ヅヽ取リテ作リタル積ノ和,第四項ノ係數ハ此等ノ文字ヨリ三個ヅヽ取リテ作リタル積ノ和ナリ,以下之ニ準ジ最後ノ項ハ此等ノ文字ノ積ナリ.

以上ノ法則ハ二項因數ノ數ガ幾個アリトモ眞ナリ,其証ハ次ノ如シ.

nヲ以テ二項因數ノ數ヲ表ハス任意ノ正ノ整數トシ,若シ因數ガn個アルトキニ以上ノ法則眞ナラバ$n+1$個アルトキニモ亦眞ナルヿヲ証スベシ.

假定ニヨリテ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}$$

$$+A_3n^{n-3}+\ldots\ldots+A_n.$$

但シ　$A_1=a,b,c,\ldots k$ノn個ノ文字ノ和.

A_2＝此等ノ文字ヨリ二個ツヽ取リテ作リタル積ノ和.

A_3＝此等ノ文字ヨリ三個ツヽ取リテ作リタル積ノ和.

.....

A_n＝總テノ文字ノ積.

今上ノ等式ノ兩邊ニ二項式$x+l$ヲ乘ズレバ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)=x^{n+1}+(A_1+l)x^n+(A_2+A_1l)x^{n-1}+(A_3+A_2l)x^{n+3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_nl.$$

偖テ

$A_1+l=a+b+c+\ldots\ldots\ldots\ldots+k+l$

＝$a, b, c, \ldots k, l$ノ$n+1$個ノ文字ノ和.

$A_2+A_1l=A_2+l(a+b+c+\ldots\ldots+k)$

＝$n+1$個ノ文字ヨリ二個ツヽ取リテ作リタル積ノ和.

$A_3+A_2l=A_3+l(bc+ca+ab+\ldots\ldots)$

＝$n+1$個ノ文字ヨリ三個ツヽ取リテ作リタル積ノ和.

.....

$A_nl=abc\ldots.kl$＝總テノ文字ノ積.

故ニ因數ノ數ガn個ノトキニ以上ノ法則ガ眞ナラバ因數ノ數ガ$n+1$個ノトキニモ亦此法則ハ眞ナリ,偖因數ノ數ガ4ノトキニ眞ナルコハ既ニ証明サレタリ,因テ因數ノ數ガ5ノトキニモ亦眞ナルベク,從ツテ6個,7個,……一般ニn個ノトキニモ亦眞ナリ.

此處ニ用ヰタル証明ノ方法ヲ**數學的歸納法**ト稱ス.

今n個ノ二項因數ノ積ノ展開式ヲ前ノ如ク表ハセバ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+A_3x^{n-3}+\ldots\ldots+A_rx^{n-r}+\ldots\ldots+A_n.$$

此處ニ於テ A_1 ハ $a, b, c, \ldots, k$ ノ n 個ノ文字ノ和, A_2 ハ此 n 個ノ文字ヨリ二個ツヽ取リテ作リタル積ノ和ニシテ ${}_nC_2$ 個ノ積ノ和, A_3 ハ n 個ノ文字ヨリ三個ツヽ取リテ作リタル ${}_nC_3$ 個ノ積ノ和,又 A_r ハ n 個ノ文字ヨリ r 個ツヽ取リテ作リタル ${}_nC_r$ 個ノ積ノ和ニシテ, A_n ハ n 個ノ文字ノ積ナリ.

若シ $a=b=c=\ldots=k$, 即チ總テノ文字ガ a ニ等シトスレバ $A_1=na$, $A_2={}_nC_2a^2$, $A_3={}_nC_3a^3$, $\ldots A_r={}_nC_ra^r, \ldots\ldots A_n=a^n$ トナルベシ,從ツテ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+{}_nC_3a^3x^{n-3}+\ldots\ldots$$
$$+{}_nC_ra^rx^{n-r}+\ldots\ldots+a^n.$$

或ハ

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots\cdots r}a^rx^{n-r}+\cdots+a^n.$$

之レ二項定理ナリ.

207. 上ノ公式ニ於テ

$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}a^rx^{n-r}$ ノ項ハ第 $(r+1)$ 番

目ノ項ナリ,今此式ニ於テ $r=1$ ト置ケバ第二項, $r=2$ ト置ケバ第三項ヲ得ベク,次第ニ斯ノ如クシテ r ノ代リニ $1, 2, 3, \ldots n$ ト置クトキニハ總テノ項ヲ得ベシ,因テ此 $r+1$ 番目ノ項ヲ $(x+a)^n$ ノ展開式ノ公項ト稱ス.

例. $(x+a)^7$ ヲ展開セヨ.

此處ニ於テハ $n=7$ ナルヲ以テ

$$\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{7.6}{1.2}=21,\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{7.6.5}{1.2.3}=35,$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}=35,$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}=\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}=21,$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}=\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}=7,$$

故ニ

$$(x+a)^7=x^7+7x^6+21a^2x^5+35a^3x^4+35a^4x^3+21a^5x^2+7a^6x+a^7.$$

208. 上ノ公式中ニ a ノ代リニ $-a$ ト置ケバ $(x-a)^n$ ノ展開ノ公式ヲ得ベシ,即チ次ノ如シ.

$$(x-a)^n=x^n-nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}$$
$$+\cdots+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}a^rx^{n-r}+\cdots+(-1)^na^n.$$

又同ジ公式ニ於テxノ代リニ$1, a$ノ代リニxト置クトキハ次ノ公式ヲ得.

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^r+\cdots\cdots+x^n.$$

又此公式ニ於テxノ代リニ$-x$ト置ケバ

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$
$$\cdots+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}x^r+\cdots+(-1)^n x^n.$$

此處ニ掲ゲタル$(1+x)^n$ノ展開式ハ二項定理ノ最モ簡單ニシテ且ツ廣ク用ヰラルヽ形ナリ;又之ヨリ$(x+a)^n$ノ展開式ヲ見出スヿ容易ナリ,即チxノカハリニ$\frac{a}{x}$ヲ置キテ展開シタル式ノ兩邊ニx^nヲ乘ズレバ直チニ$(x+a)^n$ノ展開式トナルベシ,即チ次ノ如シ.

$$(x+a)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$
$$=x^n\left\{1+n\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{a^2}{x^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{a^n}{x^n}\right\}$$
$$=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a^n.$$

故ニ$(1+x)^n$ノ展開ノ公式ヲ以テ二項定理ノ一般ナル形ト見做スヿヲ得ベシ.

209. $(x+a)^n$ノ展開式ニ於テ首項ト末項トヨリ同番目ノ項ノ數係數ハ相等シ.

今$(x+a)^n$ノ展開式ノ首項ヨリ第$(r+1)$番目ノ項ノ數係數ハ$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}={}_nC_r$ニシテ,末項ヨリ第$r+1$番目ノ項ハ首項ヨリハ$n-r+1$番目ノ項ナリ,故ニ其係數ハ$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(r+1)}{1.2.3\cdots(n-r)}={}_nC_{n-r}$ナリ,然ルニ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ナルヲ以テ首項ト末項トヨリ同番目ノ項ノ數係數ハ相等シ.

例 1. $(1+x)^6$ヲ展開セヨ.

上ノ性質アル故ニ係數ハ第四番目迄計算スレバ可ナリ.

$$n=6,\ \frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{6.5}{1.2}=15,\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{6.5.4}{1.2.3}=20.$$

故ニ

$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$$

例 2. $(a-2x)^7$ノ展開式ニ於テ第五項ヲ求ム.

此展開式ノ第五項ノ係數ハ末項ヨリ數ヘテ第四番

目ノ項ノ係數ニ等シカルベシ,偖其係數ハ${}_7C_3=\frac{7.6.5}{1.2.3}=35$ナルヲ以テ所要ノ項ハ

$$35a^3(-2x)^4=35\times 2^4a^3x^4=560a^3x^4.$$

ナリ.

210. 展開式

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{1.2\cdots\cdots r}x^r+\cdots\cdots$$

ニ於テ公項$\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{1.2\cdots\cdots r}x^r$ノ$r$ニ1,2…等ノ整數ヲ置キ換ヘテ各項ヲ見出ストキニ若シmガ分數或ハ負數ナラバ項ノ數ハ限リナク澤山出來ルナリ,即チ展開式ハ限リ無ク澤山ノ項ヲ有スベシ,斯カルトキニハ此展開式ハ$(1+x)^m$ニ等シキヤ否ヤハ吟味ヲ要スルヿナリ,何トナレバ元來mハ正ノ整數ヲ表ハスモノトシテ上ノ展開式ハ得ラレタルモノナルヲ以テナリ,併シ此ノ如キ吟味ヲ行フヿハ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ此處ニハ論

ビズ,唯其吟味ノ結果ヲ次ニ示スニ止メシ.

xノ絶對値ガ1ヨリモ小ナルトキニハ次ノ等式ハmガ分數及ビ負數ヲ表ハストキニモ亦正當ナリ.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{1.2\cdots\cdots r}x^r+\cdots\cdots$$

例. $(1+\frac{1}{2})^{-1}$ノ展開式ヲ求ム.

$$(1+\tfrac{1}{2})^{-1}=1-\frac{1}{2}+\frac{(-1)(-1-1)}{1.2}\frac{1}{2^2}+\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)}{1.2.3}\frac{1}{2^3}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots(-1)^n\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots$$

211. 次ニ二三ノ例題ヲ掲ゲテ此章ヲ終ルベシ.

例. 1. $(2-3y)^6$ヲ展開セヨ.

$$(2-3y)^6=2^6-6.2^5(3y)+{}_6C_2 2^4(3y)^2-{}_6C_3 2^3(3y)^3$$
$$+{}_6C_4 2^2(3y)^4-{}_6C_5 2(3y)^5+(3y)^6,$$

偖テ ${}_6C_2=\frac{6.5}{1.2}=15,\quad {}_6C_3=\frac{6.5.4}{1.2.3}=20,$

${}_6C_4={}_6C_2=15,\quad {}_6C_5={}_6C_1=6.$

故ニ

$$(2-3y)^6=2^6-6\times2^5\times3y+15\times2^4\times3^2y^2-20\times2^3\times3^3y^3$$
$$+15\times2^2\times3^4y^4-6\times2\times3^5y^5+3^6y^6.$$

或ハ

$$(2-3y)^6=64-576y+216y^2-4320y^3+4860y^4-2916y^5+729y^6.$$

例 2. $(1+x-2x^2)^3$ ヲ展開セヨ.

先ヅ y ヲ以テ $x-2x^2$ ヲ表ハセバ

$$(1+x-2x^2)^3=(1+y)^3=1+3y+3y^2+y^3.$$

偖テ $y=x-2x^2.$

$$y^2=(x-2x^2)^2=x^2-4x^3+4x^4.$$

$$y^3=(x-2x^2)^3=x^3-6x^4+12x^5-8x^6.$$

故ニ

$$(1+x-2x^2)^3=1+3(x-2x^2)+3(x^2-4x^3+4x^4)+x^3-6x^4$$
$$+12x^5-8x^6$$
$$=1+3x-3x^2-11x^3+6x^4+12x^5-8x^6.$$

例 3. $(1+x)^m$ ノ展開式ニ於テ初項ト總テノ x ノ係數トノ和ハ 2^m ニ等シ.

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{1.2\cdots\cdots r}x^r+\cdots\cdots+x^m.$$

初項ト總テノ係數トノ和ハ

$$1+m+\frac{m(m-1)}{1.2}+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-r+1)}{1.2\cdots\cdots r}+\cdots\cdots+1.$$

然ルニ上ノ式ニ於テ $x=1$ ト置ケバ右邊ハ即チ此和ニシテ左邊ハ 2^m トナル,即チ問題ハ證明サレタリ.

演習問題 61.

次ノ各式ヲ展開セヨ.

1. $(a-3x)^5.$
2. $(a+bx)^6.$
3. $(1-2x^2)^6.$
4. $(a-b)^7.$
5. $(1-bx)^8.$
6. $(1-x+x^2)^4.$
7. $(1-2x-3x^2)^5.$
8. $(a-3y^2)^7$ ノ第四項ヲ求ム.
9. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ ノ第五項ヲ求ム.
10. $(x-by)^{12}$ ノ第十項ヲ求ム.
11. $\left(a+\frac{x}{a}\right)^{17}$ ノ第十四項ヲ求ム.
12. $(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x)^{11}$ ノ x^7 ノ係數ヲ求ム.
13. $(1-x)^{16}$ ノ中央ノ項ヲ求ム.
14. $\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^{24}$ ノ第二十項ヲ求ム.
15. $\left(\frac{1}{3}-\frac{3x^3}{2}\right)^{17}$ ノ x^{36} ノ係數ヲ求ム.
16. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{23}$ ノ x^7 ノ係數ヲ求ム.
17. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$ ノ中央ノ項ヲ求ム.
18. $(1+x)^{m+n}$ ニ於テ x^m 及ビ x^n ノ係數ハ相等シキヿ

ヲ證セヨ.

19. $\sqrt{(1-x)}$ ヲ第七項迄展開セヨ.

20. $\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}$ ヲ展開セヨ.

21. $(1-3x)^{-\frac{2}{3}}$ ヲ第五項迄展開セヨ.

22. $\sqrt[3]{(a^2+x^2)}-\sqrt[3]{(a^2-x^2)}$ ノ x^6 ノ係數ヲ求ム.

23. $(1-x+2x^2)^{-1}$ ノ x^3 ノ係數ヲ求ム.

24. $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots$ ヲ $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於ケル $x^0, x, x^2, \cdots\cdots$ ノ係數トスレバ $c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots=c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots$ ナルヿヲ證セヨ.

25. $(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)$ ノ展開式ヲ用ヰズシテ數學的歸納法ニヨリ二項定理ヲ證明セヨ.

第二十章 對數及ビ年金算.

對數.

212. $a^x=n$ ナルトキニハ x ヲ稱シテ a ヲ底(或ハ基)トセル n ノ對數トイフ.

例令バ $2^5=32$, 故ニ5ハ2ヲ底トセル32ノ對數ナリ.

又 $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$. 故ニ10ヲ底トセル10ノ對數ハ1, 同數ヲ底トセル100ノ對數ハ2, 同數ヲ底トセル1000ノ對數ハ3ナリ.

a ヲ底トセル n ノ對數ヲ表ハスニ $\log_a n$ ヲ用ウ.

即チ $a^x=n$ 及ビ $\log_a n=x$ ハ同ジ事柄ヲ表ハス.

例. 3ヲ底トセル $81\sqrt[8]{3^5}$ ノ對數ヲ求ム

x ヲ以テ所要ノ對數ヲ表ハセバ定義ニヨリテ

$$3^x=81\sqrt[8]{3^5}.$$

然ルニ $81\sqrt[8]{3^5}=3^4\cdot 3^{\frac{5}{8}}=3^{4+\frac{5}{8}}$ ナルヿヲ以テ

$$3^x=3^{4+\frac{5}{8}} \text{ 故ニ } x=4+\tfrac{5}{8}.$$

即チ $$x=4\cdot 625.$$

213. 次ニ對數ノ主要ナル性質ヲ掲ゲ

ン.

(I). 底夫自身ノ對數ハ1ナリ.

何ントナレバ $a^1=a$ ナルガ故ニ $log_a a=1$.

(II). 1ノ對數ハ0ナリ.

何ントナレバ a ヲ任意ノ數トスレバ $a^0=1$ ナルヲ以テ $log_a 1=0$.

即チ底ノ如何ニ拘ハラズ1ノ對數ハ0ナリ.

(III). 積ノ對數ハ其因數ノ對數ノ和ニ等シ.

今 $log_a m=x, log_a n=y$ トスレバ $a^x=m, a^y=n$.

故ニ $mn=a^x.a^y=a^{x+y}$.

故ニ $log_a mn=x+y=log_a m+log_a n$.

同樣ニシテ

$$log_a lmn=log_a l+log_a m+log_a n.$$

從ツテ因數ガ幾個アリトモ同樣ノ事柄成立ス.

例令バ $log_2(4\times32\times128)=log_2 4+log_2 32+log_2 128$

偖テ $4=2^2,\ 32=2^5,\ 128=2^7$ ナル故ニ

$$lag_2(4\times32\times128)=2+5+7=14.$$

(IV). 二數ノ商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタルモノニ等シ.

今 $log_a m=x, log_a n=y$ トスレバ $a^x=m, a^y=n$.

故ニ $m\div n=a^x\div a^y=a^{x-y}$.

故ニ $log_a(m\div n)=x-y=log_a m-log_a n$.

例. $log_5(3125\div25)=log_5 3125-log_5 25=log_5 5^5-log_5 5^2$

$=5-2=3.$

(V). 一數ノ羃ノ對數ハ此數ノ對數ニ羃ノ指數ヲ乘ジタルモノニ等シ.

今 $log_a n=x$ トスレバ $a^x=n$.

故ニ $n^l=(a^x)^l=a^{lx}$.

故ニ $log_a n^l=lx=l\,log_a n$.

例. $log_3\sqrt[6]{27}$ ヲ求ム.

$$log_3\sqrt[6]{27}=log_3 27^{\frac{1}{6}}=\tfrac{1}{6}log_3 27.$$

然ルニ $log_3 27=log_3 3^3=3$.

故ニ $log_3\sqrt[6]{27}=\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}=0{\cdot}5$.

(VI). a ヲ底トセル一數 n ノ對數ハ b ヲ

底トセル同數即チnノ對數ト$\log_a b$トノ積ニ等シ.

今 $\log_a n=x, \log_b n=y$ トスレバ $n=a^x, n=b^y$.

故ニ $a^x=b^y$, 故ニ $a^{\frac{x}{y}}=b$.

故ニ $\frac{x}{y}=\log_a b$.

或ハ $x=y\log_a b$.

即チ $\log_a n=\log_b n\times\log_a b$.

因テ又容易ニ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ ナルコトヲ知ル.

例. $\log_2 4096=12$ ヲ知リテ $\log_8 4096$ ヲ計算セヨ.

$$\log_8 4096=\log_2 4096\times\log_8 2.$$

然ルニ $\log_8 2=\frac{1}{3}$ ナリ,故ニ

$$\log_8 4096=12\times\frac{1}{3}=4.$$

214. 常用對數. 10ヲ底トセル對數ヲ常用對數ト稱ス.

例令バ $10^x=n$ ナルトキニハ x ハ n ノ常用對數ナリ.

通常計算ニ用ウルハ此常用對數ナリ,故ニ以下本章ニ於テ何ノ斷リモナク

單ニ對數トイフトキニハ常用對數ヲ意味スルコトヽ知ルベシ.

一般ニ一數ノ對數ハ必ズシモ整數ナラズ又必ズシモ正數ナラズ.

例令バ $2465<10^4$ ニシテ $>10^3$ ナリ.

故ニ $\log 2465=3+$(1ヨリモ小ナル數)(即チ小數)

又 $0{\cdot}005<10^{-2}$ ニシテ $>10^{-3}$ ナリ.

故ニ $\log 0{\cdot}005=-3+$ 小數.

一般ニ10ノ整數乘ニ等シカラザル數ノ對數ハ必ズ小數部ヲ含ム.

對數ガ負數ナルトキニハ其小數部ハ常ニ正ノ數ニテ記シ,整數部ノミヲ負數ニテ表ハス,其記法ハ次ノ例ノ如シ.

例令バ

$$\log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=-2-\frac{1}{8}=-2{\cdot}125=-3+0{\cdot}875$$

ニシテ $\log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=\bar{3}{\cdot}875$ ナル記法ヲ用ウ,即チ3ノ上ノ符號ーヲ以テ此對數ノ整數部ノ負數ナルコトヲ示セルナリ.

一數ノ對數ノ整數部ヲ其**指標**ト稱シ,其小數部ヲ其**假數**ト稱ス.

例令バ $log 100\sqrt[4]{10}=2+\frac{1}{4}=2\cdot25$ ニ於テ 2 ハ此對數ノ指標ニシテ 0·25 ハ其假數ナリ.

215. 任意ノ一數ノ對數ノ指標ハ視察ニヨリテ容易ニ之ヲ發見スルヿヲ得ベシ.

先ヅ $10^0=1,\ 10^1=10,\ 10^2=100,$

$10^3=1000,\ 10^4=10000,\ldots\ldots$

故ニ $log 1=0,\ log 10=1,\ log 100=2,$

$log 1000=3,\ log 10000=4,\ldots\ldots$

故ニ 1 ト 10 トノ間ノ數ノ對數ハ正ニシテ 1 ヨリモ小ナリ,又 10 ト 100 トノ間ノ數ノ對數ハ 1 ヨリモ大ニシテ 2 ヨリモ小, 100 ト 1000 トノ間ノ數ノ對數ハ 2 ヨリモ大ニシテ 3 ヨリモ小, 1000 ト 10000 トノ間ノ數ノ對數ハ 3 ヨリモ大ニシテ 4 ヨリモ小ナリ,逐次斯ノ如シ.

故ニ 1 ト 10 トノ間ノ數ノ對數ノ指標ハ 0, 10 ト 100 トノ間ノ數ノ對數ノ指標ハ 1, 100 ト 1000 トノ間ノ數ノ對數ノ指標ハ 2, 1000 ト 10000 トノ間ノ數ノ對數ノ指標ハ 3 ナリ,逐次斯ノ如シ.

因テ 1 ヨリモ大ナル數ノ對數ノ指標ハ此數ノ整數部ノ數字ノ數ヨリモ 1 丈ケ小ナリ.

例令バ 3872·14 ハ其整數部ニ四個ノ數字ヲ有スルヲ以テ其對數ノ指標ハ 3 ナリ;又 13076·834 ノ對數ノ指標ハ 4 ナリ.

次ニ 1 ヨリモ小ナル數ノ對數ノ指標ヲ考究セン.

$10^{-1}=0\cdot1,\ 10^{-2}=0\cdot01,\ 10^{-3}=0\cdot001,\ 10^{-4}=0\cdot0001,\ldots$

故ニ $log 0\cdot1=-1,\ log 0\cdot01=-2,$

$log 0\cdot001=-3,\ log 0\cdot0001=-4,\ldots$

故ニ 1 ト 0·1 トノ間ノ數ノ對數ハ 0 ト −1 トノ間ニアリ,即チ −1 ニ或小數ヲ加ヘ

タルモノナルヲ以テ其指標ハ -1, 0·1ト0·01トノ間ノ數ノ對數ハ -2 ヨリモ大ニシテ -1 ヨリモ小ナリ故ニ其ノ指標ハ -2, 0·01ト0·001トノ間ノ數ノ對數ハ -3 ヨリモ大ニシテ -2 ヨリモ小ナル故ニ其指標ハ -3, 0·001ト0·0001トノ間ノ數ノ對數ハ -4 ヨリモ大ニシテ -3 ヨリモ小ナル故ニ其指標ハ -4 ナリ, 逐次斯ノ如シ.

因テ一ヨリモ小ナル正數ノ對數ノ指標ハ負ニシテ其絕對値ハ此數ノ小數點以下最初ノ有効數字迄ノ0ノ數ヨリモ1丈ケ大ナリ.

例令バ0·0008346ノ對數ノ指標ハ -4 ニシテ0·0000321ノ對數ノ指標ハ -5 ナリ.

216. 若干ノ數アリ, 何レモ同ジ數字ヲ同ジ順ニ列記シタルモノニシテ唯其小數點ノ位置ノミ異ナルトキニハ, 此等ノ數

ノ對數ノ假數ハ皆同一ナリ.

例令バ341·85, 3418·5, 0·034185ナル三數アリトセバ

$$341{\cdot}85=10^2\times3{\cdot}4185,\ 3418{\cdot}5=10^3\times3{\cdot}4185,\ 0{\cdot}034185=10^{-2}\times3{\cdot}4185$$

ナル故ニ

$$\log341{\cdot}85=2+\log3{\cdot}4185,\ \log3418{\cdot}5=3+\log3{\cdot}4185,$$

$$\log0{\cdot}034185=-2+\log3{\cdot}4185.$$

即チ與ヘラレタル三數ノ對數ノ假數ハ $\log3{\cdot}4185$ ニ等シ.

之ニヨリテ任意ノ數ノ對數ハ其數ト同ジ數字ヲ同ジ順ニ列記シテ得ル處ノ整數ノ對數ヨリ見出スコトヲ得ベシ, 故ニ對數ノ表ヲ作ルニハ整數ノ對數ノミヲ計算スレバ充分ナリ.

且ツ任意ノ數ノ對數ノ指標ハ視察ニヨリテ發見スルコトヲ得ルヲ以テ對數表ニハ唯其假數ノミ載セ置クヲ以テ十分ナリトス.

偖一般ニ10ノ整數乘ナラザル整數ノ對數ハ不盡數ナリ. (此證明ハ本書ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ之ヲ畧ス, 又任意ノ

數ノ對數ヲ計算スル方法モ初等代數學ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ之モ畧ス.)

因テ通常一數ノ對數ヲ計算スルニ當リ,小數點以下或位ヨリ先ハ四捨五入法ヲ以テ切棄ツルナリ.

對數表ニハ小數點以下四桁迄,五桁迄,六桁迄,或ハ七桁迄或ハ十桁,又ハ十二桁迄等掲載セルモノアリ,之等ヲ呼ンデ四桁ノ對數表,五桁ノ對數表,六桁ノ對數表,七桁ノ對數表,十桁ノ對數表,或ハ十二桁ノ對數表ト稱ス;例令バ[ガウス]氏ノ五桁ノ對數表ニハ1ヨリ10000迄ノ總テノ整數ノ對數ヲ小數點以下五桁迄掲載シアルナリリ.

普通ノ計算ニハ五桁ノ對數表ヲ以テ足レリトス.

上ニモイヘル如ク表ニ擧ゲタル數ハ四捨五入セシ數ナルヲ以テ實際ノ對數

ニアラズシテ唯其近似値ナルヿニ注意センヿヲ要ス.

217. 表ノ使用法ヲ例ヲ以テ示サン.

茲ニハ五桁ノ對數表ヲ用ウルヿトセン.

例 1. $log 361{\cdot}36$ ヲ求ム.

此對數ノ指標ハ2ナリ,次ニ表ニハ36136ノ對數ハ與ヘラレズ,然レ𪜈3613ト3614トノ對數ハ表中ニアリ,即チ$log 3613$ノ假數ハ0·55787ニシテ$log 3614$ノ假數ハ0·55799ナリ,故ニ所要ノ對數ノ假數ハ此間ニアルベシ,偖3613ニ1ヲ增シタル爲メニ其對數ノ假數ハ $0{\cdot}55799-0{\cdot}55787=0{\cdot}00012$ 丈ケ增シタルナリ,今3613ニ0·6ヲ增セバ對數ハ如何程增加スベキカトイフニ比例配分ニヨリテ計算スレバ其0·000072ナルヿヲ知ル,此數ガ表ノP.P.(*Proporsional part*ノ略)欄内12ト題スル行中6ノ列ニ7·2トシテ與ヘラルヽナリ,之レ表ニテハ對數ノ

最後ノ桁ヲ一位トシテ測ルヲ以テナリ.因テ所要ノ對數ハ3·55787+0·000072=3·55794(四捨五入法ニヨリテ次ノ桁ノ2ヲ捨テタルナリ)ナリ. 此運算ハ下ニ示セル如クス.

$\log 361\cdot 3 = 2\cdot 55787$
P.P. ヨリ $0\cdot 06\ldots\ldots\ldots 7$
$\log 361\cdot 36 = 2\cdot 55794$

此例ニ於テハ表ニナキ數ノ對數ヲ計算スルニ比例配分ヲ用ヰタリ,斯クシテモ差支ナキヿハ證明ヲ要スルヿナレ𪜈夫ハ本書ノ範圍外ニ屬スルヲ以テ之ヲ揭ゲズ.

例 2. $\bar{2}\cdot 46713$ ナル對數ヲ有スル數ヲ求ム.

表ヨリ $\log 2931$ ノ假數ハ0·46702ニシテ $\log 2932$ ノ假數ハ 0·46716 ナリ,偖與ヘラレタル對數ノ假數ハ此間ニアリテ後者ニ近ク且ツ指標ハ $\bar{2}$ ナルヲ以テ所要ノ數ハ0·02932ナリ,若シ五桁丈ケ計算センニハ $\log 2931$ ト $\log 2932$ トノ假數ノ差0·00014ヲ見出シP.P.ノ欄ノ14ト題スル行中ニ付キテ與ヘラレタル對數ノ假數ヨリ $\log 2931$ ノ對數ノ假數ヲ減ジタルモノ即チ0·00011或ハ11(表ニ於テ)ニ最モ近キ數11·2ニ對スル數8ヲ見出シ,之ヲ第五位ニ列記スベシ,即チ所要ノ數ハ0·029318ナリ.

注意. 五桁ノ對數表ヲ用ヰテハ如何ナル數ノ對數ニテモ其假數ハ五桁ヨリモ多ク計算スルヿヲ得ズ,又逆ニ同表ヲ用ヰテ與ヘラレタル對數ヲ有スル數ヲ計算スルニモ此數ノ桁數ハ五桁ヨリモ多ク計算スルヿヲ得ザルモノト知ルベシ.

218. 213節ニ擧ゲタル公式ノ示ス如ク對數ハ計算ヲ簡便ニスルノ特効アルナリ,即チ對數ヲ用ヰテ乘法ヲ加法ニ,除法ヲ減法ニ,冪ニ高ムルヿヲ乘法ニ,開法

ヲ除法ニ歸セシムルヿヲ得ルナリ. 今例ヲ以テ如何ニ其簡便ナルカヲ示ス可シ.

例 1. $\dfrac{(3\cdot1265)^3\sqrt[5]{8163\cdot4}}{(1\cdot2032)^2\sqrt{96\cdot126}}$ ヲ計算セヨ.

Nヲ以テ此數ヲ表ハセバ

$$\log N=\log\frac{(3\cdot1265)^3\sqrt[5]{8163\cdot4}}{(1\cdot2032)^2\sqrt{96\cdot126}}=\log\{(3\cdot1265)^3\sqrt[5]{8163\cdot4}\}$$
$$-\log\{(1\cdot2032)^2\sqrt{96\cdot122}\}$$
$$=\{3\log3\cdot1265+\tfrac{1}{5}\log8163\cdot4\}-\{2\log1\cdot2032+\tfrac{1}{2}\log96\cdot126\}.$$

偖テ $\log3\cdot1265=0\cdot49506$ $\quad 3\log3\cdot1265=1\cdot48518$

$\log8163\cdot4=3\cdot91187$ $\quad \tfrac{1}{5}\log8163\cdot4=0\cdot78237$

$2\cdot26755,$

$\log1\cdot2032=0\cdot08034$ $\quad 2\log1\cdot2032=0\cdot16068$

$\log96\cdot126=1\cdot98284$ $\quad \tfrac{1}{2}\log96\cdot126=0\cdot99142$

$1\cdot15210.$

因テ $\log N=2\cdot26755-1\cdot15210=1\cdot11545.$

之ヨリ計算スレバ $N=13\cdot045.$

注意. 此處ニ得タルNノ値ハ全ク所要ノ數ニ等シキニハアラズシテ其近似値ニ過ギズ,即チ各數ノ對數ヲ五桁丈ケ取リ,餘ハ四捨五入法ニヨリテ切捨テヽ計算シタル近似値ナリ.

例 2. $\log2=0\cdot30103$, $\log3=0\cdot47712$, $\log2\cdot1438=0\cdot3318$ ヲ知リテ $\dfrac{216\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{8\cdot1}}$ ヲ計算セヨ.

Nヲ以テ所要ノ數ヲ表ハセバ

$$\log N=\log\frac{216\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{8\cdot1}}=\log\{216\sqrt[7]{125}\}-\log\sqrt[3]{8\cdot1}$$
$$=\log216+\tfrac{1}{7}\log125-\tfrac{1}{3}\log8\cdot1.$$

偖テ $216=6^3=2^3\times3^3,\ 125=5^3=\dfrac{10^3}{2^3},\ 8\cdot1=\dfrac{81}{10}=\dfrac{3^4}{10}.$

故ニ $\log216=3\log2+3\log3=0\cdot90309+1\cdot43136=2\cdot33445$

$\log125=3-3\log2=3-0\cdot90309=2\cdot09691,\ \tfrac{1}{7}\log125=0\cdot29956$

$2\cdot63401.$

$\log8\cdot1=4\log3-1=1\cdot90848-1=0\cdot90848,\ \tfrac{1}{3}\log8\cdot1=0\cdot30283.$

之ヨリ $\log N=2\cdot63401-0\cdot30283=2\cdot33118.$

$N=314\cdot38.$

例 3. $\log2$ ト $\log3$ トヲ知リテ方程式 $18^{2-3x}.2^{5x+1}=6$ ヲ解キテxヲ小數點以下二桁迄計算セヨ.

兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$(2-3x)\log18+(5x+1)\log2=\log6.$$

然ルニ $18=2\times3^2,\ 6=3\times2$ ナルヲ以テ

$$(2-3x)(\log2+2\log3)+(5x+1)\log2=\log3+\log2.$$

故ニ $x(5\log2-3\log2-6\log3)=\log3+\log2-2\log2-4\log3-\log2.$

即チ $x=\dfrac{3\log3+2\log2}{6\log3-2\log2}.$

$$=\frac{2\cdot03342}{2\cdot26066}.$$

$$=0\cdot90.$$

演習問題 62.

1. 2ヲ底トセル次ノ數ノ對數ヲ求ム.

(1). $\sqrt[3]{64}$. (2). 0·125. (3). $\sqrt[4]{0\cdot03125}$. (4). $(1024)^{\frac{3}{8}}$.

2. $log_3 2187=7$ ヲ知リテ $log_9\sqrt[5]{2187}$ ヲ計算セヨ.

3. 次式ヲ簡單ニセヨ.

(1). $log\frac{(ab^2c^4)^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[9]{a^{-3}b^3c^6}}$. (2). $log\left\{\left(\frac{x^4y^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-3}\div\left(\frac{x^{-2}y^3}{xy^{-1}}\right)^5\right\}$.

4. $log_{25}x=\frac{1}{2}$, $log_3x=4$, $log_{0\cdot4}x=5$ ノ x ヲ求ム.

5. 次ノ各數ノ對數ノ指標ヲ視察ニヨリテ定メヨ.

(1). 346·25. (2). 0·0000342. (3). 120304. (4) 64827·64.

6. $log63489$ ノ假數ハ 0·80270 ナルヿヲ知リテ次ノ數ノ對數ヲ求ム.

(1). 63·489. (2). 63489000. (3). 0·000000063489.

7. $log24893$ ノ假數ハ 0·39607 ナリ;次ノ對數ヲ有スル數ヲ問フ.

(1). 3·39607. (2). $\bar{1}$·39607. (3). 7·39607. (4). $\bar{6}$·39607.

8. $log2=0\cdot30103$, $log3=0\cdot47712$, $log7=0\cdot84510$ ヲ知リテ次ノ數ヲ計算セヨ.

(1). $log1458$. (2). $log42000$. (3). $log0\cdot768$.

(4). $log\sqrt[5]{39\cdot2}$. (5). $log\frac{225}{224}-2log\frac{20}{189}+log\frac{512}{81}$.

(6). $log(\sqrt[3]{126}\sqrt{108}\div\sqrt[6]{1008}\sqrt[5]{162})$.

9. 72^{15} ノ桁數ヲ問フ.

10. $\left(\frac{4}{7}\right)^{25}$ ノ小數點以下最初ノ有効數字迄ノ0ノ數ヲ問フ.

11. 五桁ノ對數表ヲ用ヰテ次ノ數ヲ計算セヨ.

(1). 2·364×934·25. (2). $(1\cdot3872)^5$. (3). 370·62×0·00064573.

(4). 367·21÷1467·9. (5). 0·0054156÷25·324. (6). $(346\cdot58)^{\frac{1}{12}}$.

(7). $\frac{0\cdot0032}{638\cdot1\times3\cdot5692}$. (8). $\frac{0\cdot356\times723\cdot54}{896\cdot72}$.

(9). $(1\cdot23)^{11}$. (10). $(2\cdot1346)^8$. (11). $\sqrt{23\cdot587}$.

(12). $\sqrt[3]{38\cdot275}$. (13). $\sqrt[7]{18644}$. (14). $\sqrt[9]{25\cdot698}$.

(15). $\frac{46\cdot723\times\sqrt{1\cdot2145}}{(2\cdot264)^3\times(1\cdot8905)^6}$. (16). $\frac{(13\cdot87)^5\times(0\cdot00092314)^7}{(0\cdot00216)^8\times(1\cdot2003)^{\frac{1}{3}}}$.

12. 次ノ方程式ヲ解ケ.

(1). $2^{x+3}=160$. (2). $20^{3x-7}=2^{x+5}$.

(3). $5^{x-3}=8$. (4). $16^{2x+1}\cdot36^{5-x}=1468$.

年金算.

219. 年金算ニ入ルニ先チ利息ノ事ヲ少シク論ズベシ.

利息年金等ノ計算ハ其平易ナルモノハ算術ニ於

テ取扱フコトヲ得レモ,其複雜ナルモノニ至レバ代數學ノ扶ヲ要スルナリ,特ニ對數ヲ用ウルコトニヨリテ其計算甚ダ簡單トナル塲合多シ,以下本章ニ於テハ此等ノ塲合ヲ論スベシ;要スルニ之ハ代數學ノ應用タルコトヲ忘ルベカラズ.

單利法計算ハ算術ニテ十分行フコトヲ得ルヲ以テ茲ニハ擧ゲズ,複利法ノミニ付キテ少シク論ズベシ.

複利法ニ於テハ毎期ノ終リニ於テ利息ヲ元金ニ繰リ込ムモノナリ,今特別ノ斷ナキトキニハ利息ハ滿一年毎ニ元金ニ繰リ込ムモノト定メン.

220. 複利法ニ於テ元金,年利率,年數,元利合計,及ビ利息ノ關係ヲ求ム.

Pヲ以テ元金,rヲ以テ年利率,nヲ以テ年數,Mヲ以テ元利合計,及ビIヲ以テ利息ヲ表ハサン.

一ケ年後ノ利息ハPrナルヲ以テ元利合計ハ$P+Pr=P(1+r)$ナリ,二年目ノ元金

ハ$P(1+r)$ナルヲ以テ二年後ノ元利合計ハ$P(1+r)^2$ナリ,從ツテ一般ニn年後ノ元利合計ハ

$$M=P(1+r)^n.$$

ナリ,今$1+r=R$ト置ケバ

$$M=PR^n.$$

而シテ利息$I=M-P$ナルヲ以テ

$$I=P(R^n-1).$$

221. 一定年後ニ仕拂フベキ金額ノ現價及ビ割引ヲ求ム.

Pヲ以テ此金額,V,Dヲ以テ夫々現價及ビ割引ヲ表ハシ,n及ビRハ前節ニ於ケルト同ジモノヲ表ハストセン,然ルトキハVナル金額ハ之ヲ元金トシテ複利法ニテ計算スレバn年後ニハ元利合計Pトナルベキヲ以テ

$$P=VR^n.$$

故ニ $V=\frac{P}{R^n}$.

從ツテ $D=P-V=P\left(1-\frac{1}{R^n}\right)$.

此公式ハ前節ノ公式ヲ出シタルト同樣ニシテ見出スコトヲ得ルナリ.

222. 一定ノ期限間カ或ハ永久一定ノ金額ヲ受取ル株ヲ**確實年金**ト稱ス.

之ヨリ確實年金ニ付キテ少シク研究スベシ.

毎年受取ルベキ一定ノ金額ヲ**年金額**ト稱ス,以下Aヲ以テ之ヲ表ハス.

又年金ハ現時ヨリ一年ノ後第一回ノ年金額ヲ受取ルモノト假定セン.

若干年間仕拂ハザリシ年金ヲ其後一度ニ仕拂フキノ金額ヲ問フ.

nハ年數,Mハ仕拂ベキ金高,$R=1+r$ニシテrハ年利率トセン.

偖一ケ年後ニ仕拂フベキ金額ハAナリ,翌年ヨリ之ニ利息ヲ附スルヲ以テ第

n年ノ後ニハ此高ハAR^{n-1}トナル,同樣ニ第二年後ニ仕拂フベキ年金額Aハ清算ノキニハAR^{n-2}トナル,其他之ニ準ズ.

故ニ
$$M=AR^{n-1}+AR^{n-2}+\dots+AR^2+AR+A$$
$$=A(1+R+R^2+\dots+R^{n-2}+R^{n-1})$$
$$=A\frac{R^n-1}{R-1}.$$

223. 若干年間繼續スベキ年金即チ**定期年金**ノ現價ヲ求ム.

Vヲ以テ現價ヲ表ハサン.

前節ニヨリテn年後ニハ此間ニ受取リタル年金額及ビ其利息ノ合計ハ$A\frac{R^n-1}{R-1}$トナルベシ,又現時Vナル金額ハn年後ニハ元利合計VR^nトナルベシ,故ニ次ノ等式ヲ得.

$$VR^n=A\frac{R^n-1}{R-1}.$$

因テ $V=\frac{A}{R-1}\left\{1-\frac{1}{R^n}\right\}=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{R^n}\right\}$.

此公式ハ又前節ノ結果ヲ用ヰズシテ獨立ニ見出スコトヲ得ベシ.

224. 定期ヲ有セザル年金,即チ永續スル年金ヲ**永續年金**ト稱ス.

永續年金ノ現價ヲ求ム.

定期年金ノ現價ノ公式中ニ於テ n ヲ側ルベカラザル程大トスレバ所要ノ高ヲ得ベシ,即チ V ヲ以テ現價ヲ表ハセバ

$$V=\frac{A}{r}.$$

225. 一二ノ例ヲ示シテ此章ヲ終ルベシ.

例 1. 元金250圓,年利五分,二十年後ノ元利合計如何.

x圓ヲ以テ所要ノ元利合計ヲ表ハセバ220節ノ公式ニヨリテ

$$x=250(1+0\cdot05)^{20}=250(1\cdot05)^{20}$$

五桁ノ對數表ヲ用ヰテ計算スレバ

$$x=663\cdot34.$$

即チ所要ノ高ハ663·34圓ナリ.

例 2. 年金額150圓ノ十五年ノ定期年金ノ現價ヲ問フ,但シ利息ハ年六分ナリトス.

x圓ヲ以テ所要ノ現價ヲ表ハセバ223節ノ公式ニヨリテ

$$x=\frac{150}{0\cdot06}\left\{1-\frac{1}{(1+0\cdot06)^{15}}\right\}=\frac{150}{0\cdot06}\left\{1-\frac{1}{(1\cdot06)^{15}}\right\}.$$

五桁ノ對數表ヲ用ヰテ計算スレバ

$$x=1457\cdot0.$$

即チ所要ノ高ハ1457圓ナリ.

注意. 五桁ノ對數表ヲ用ウルトキニハ五桁ヨリモ多クハ計算スルヿヲ得ザル故ニ上例ニ於テハ錢位迄ハ計算スルヿヲ得ザルナリ,若シ五桁ヨリモ餘計ニ計算セント欲セバ桁數ノ多キ對數表ヲ用ウベシ.

演習問題 63.

次ノ問題ヲ解クニ當リ五桁ノ對數表ヲ用ウベシ.又利息ハ複利法ニ據ルベシ.

1. 金260圓アリ,年四分ノ利息ニテ18年間銀行ニ預ケ置クトキニハ元利合計幾干トナルカ.

2. 或人八年後ニ1200圓受取ルベキ株ヲ有ス,年利六分トシテ此株ノ現價如何.

3. 年利六分ナルトキニハ幾年ニシテ元金ノ二倍トナルカ.

4. 金750圓ヲ年利五分ニテ預ケタルトキニハ幾年ノ後元利合計1800圓トナルカ.

5. 半ケ年ヲ一期トスレバ元金p,年利率r,期數m,元利合計Mノ關係ハ$M=P(1+\frac{r}{2})^m$ナルコトヲ證セヨ.

6. 元金100圓,年利六分,每月利子ヲ元金ニ繰込ムトキニハ五十年後ニハ元利合計幾千トナルカ.

7. 年利五分五厘,年金額200圓ナルトキニハ十五年後ノ蓄積高ハ幾千ナルカ.

8. 年利六分,年金額350圓ナル廿年ノ定期年金ノ現價如何.

9. 或人每年ノ終リニ五十圓ツヽ貯金ス,年利四分五厘ナルトキニハ五十年ノ終ニハ總額幾千トナルカ.

10. 或人年金額200圓ノ永續年金ノ株ヲ賣拂ハントス,年利五分ノトキニハ其價額如何.

11. 現今五百圓ノ負債ヲ有スル人アリ,今後一年每ニ若干圓ツヽ八回ニ返濟セントス,年利七分トスレバ每回拂フベキ金額如何.

12. 或人生命保險ニ加盟シ,每年四十圓ノ保險料

ヲ納メ廿六年ノ後死去シタル爲メ遺族ノモノ若干ノ保險金ヲ受取リタリ,若シ此人每年保險料丈ケヲ年利四分ニテ銀行ニ預ケ置キタランニハ總額ハ保險金額ヨリモ228圓丈ケ少ナカルベシトイフ,仍テ問フ保險金額如何.

答

演習問題 41.

1. ± 5. 2. ± 4. 3. 8 或ハ 12. 4. 7 或ハ -2.

5. $-\frac{1}{5}$ 或ハ 4. 6. -4 或ハ -6. 7. 2 或ハ -7.

8. 9 或ハ -8. 9. 13 或ハ -12. 10. 9.

11. $\frac{11}{3}$ 或ハ 11. 12. $\frac{3}{4}$ 或ハ $-\frac{4}{5}$. 13. $\frac{3}{2}$.

14. 8 或ハ 13. 15. -3 或ハ 14. 16. $\frac{1}{2}$ 或ハ $-\frac{5}{3}$.

演習問題 42.

1. -5 或ハ $\frac{11}{5}$. 2. $\frac{7}{3}$ 或ハ 5. 3. -2 或ハ $\frac{15}{13}$.

4. -2 或ハ $\frac{15}{8}$. 5. 1 或ハ $\frac{1}{6}$. 6. 6 或ハ $-\frac{1}{5}$.

7. 2 或ハ $-\frac{11}{6}$. 8. $\frac{5}{2}$ 或ハ $-\frac{2}{3}$. 9. $\frac{1}{2}$ 或ハ $\frac{9}{2}$

10. $\frac{13}{3}$ 或ハ -3. 11. 1 或ハ $-\frac{7}{2}$. 12. $\frac{2}{5}$ 或ハ 1.

13. $4+\sqrt{13}$ 或ハ $4-\sqrt{13}$. 14. $\frac{1+\sqrt{37}}{6}$ 或ハ $\frac{1-\sqrt{37}}{6}$.

15. 3 或ハ $\frac{-12}{7}$. 16. $\frac{2}{3}$ 或ハ $\frac{5}{4}$.

17. 4 或ハ $-\frac{15}{4}$.　　18. 3 或ハ $-\frac{4}{3}$.

19. 2 或ハ 11.　　20. $-1+\sqrt{21}$ 或ハ $-1-\sqrt{21}$.

21. 2 或ハ $\frac{39}{8}$.　　22. $-3+\sqrt{-3}$ 或ハ $-3-\sqrt{-3}$.

23. $\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{139}{12}}$ 或ハ $\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{139}{12}}$.　　24. 3 或ハ -1.

25. $-1+\sqrt{-1}$ 或ハ $-1-\sqrt{-1}$.　　26. 4 或ハ $\frac{4}{3}$.

演習問題 43.

1. 2 或ハ -1.　　2. $\frac{1}{3}$ 或ハ $-\frac{7}{2}$.　　3. 3 或ハ 6.

4. $\frac{1}{2}$ 或ハ -7.　　5. -3 或ハ 5.　　6. $\frac{3}{2}$ 或ハ -9.

7. 4 或ハ -7.　　8. $\frac{2}{7}$ 或ハ 3.　　9. $1\pm\sqrt{2}$.

10. $\frac{-3}{11}$ 或ハ $\frac{7}{2}$　　11. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.　　12. 13 或ハ -6.

13. -1 或ハ $\frac{2}{3}$.　　14. $\frac{3}{5}$ 或ハ $\frac{4}{3}$.　　15. -3 或ハ $\frac{-5}{7}$.

16. $\frac{1}{13}$ 或ハ $\frac{-5}{3}$.　　17. $\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$.　　18. $1\pm\sqrt{3}$.

19. $\frac{-1\pm\sqrt{88}}{3}$.　　20. $\frac{-1\pm\sqrt{-14}}{3}$.　　21. $2\pm2i$.

22. 8 或ハ $\frac{-11}{17}$.　　23. $\frac{-7\pm\sqrt{101}}{2}$.　　24. $-\frac{9}{5}$ 或ハ $\frac{7}{3}$.

25. c 或ハ $-a$.　　26. $a\pm ib$.　　27. $b\pm c$.

28. a 或ハ $2a$.　　29. $\frac{-9\pm\sqrt{103}}{2}$.　　30. $\frac{27\pm\sqrt{982}}{11}$.

演習問題 44.

1. 1 或ハ $-\frac{1}{2}$.　　2. 7 或ハ $\frac{5}{3}$.　　3. 3 或ハ -7.

4. 3 或ハ -2.　　5. 5 或ハ -3.　　6. $-\frac{1}{3}$ 或ハ $\frac{-8}{3}$

7. $\frac{1}{2}$ 或ハ -8.　　8. 4 或ハ $-\frac{11}{3}$.　　9. 3 或ハ $\frac{13}{5}$.

10. 8 或ハ $\frac{26}{11}$.　　11. 4 或ハ $\frac{11}{17}$.　　12. -5 或ハ $-\frac{3}{2}$.

13. $\frac{3}{2}$ 或ハ $\frac{5}{6}$.　　14. $\frac{7}{2}$ 或ハ $\frac{3}{4}$.　　15. $\frac{1}{2}$ 或ハ -3.

16. 1 或ハ -3.　　17. $1\pm i\sqrt{\frac{1}{7}}$.　　18. 5 或ハ $-\frac{1}{6}$.

19. $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.　　20. 1 或ハ $\frac{1}{4}$.　　21. $-\frac{9}{5}$ 或ハ $+\frac{4}{3}$

22. $\pm\sqrt{153}$.　　23. 0 或ハ $\frac{4}{3}$.　　24. 5 或ハ $-\frac{18}{13}$.

25. 0 或ハ 1.　　26. 5 或ハ $-\frac{7}{2}$.　　27. -1.

28. a 或ハ $-\frac{1}{a}$.　　29. $\pm\sqrt{ab}$.　　30. $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$.

31. $a+b$ 或ハ $\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.　　32. $a+b$ 或ハ $\frac{2ab}{a+b}$.

33. $-a$ 或ハ $-b$.　　34. c 或ハ $\frac{a^2+b^2-ac-bc}{a+b-2c}$.

35. c 或ハ $\frac{ab(2c-a-b)}{ac+bc-2ab}$.　　36. 0 或ハ $\frac{1}{2}(a+b)$.

演習問題 45.

1. 1. 2. 3. 3. -1. 4. 4.

5. -1. 6. -5. 7. 3 或ハ 7. 8. -2.

9. 4. 10. 根ヲ有セズ.

11. ± 4. 12. 5 或ハ -1.

13. 0 或ハ 6. 14. 9 或ハ -12. 15. 9.

16. 4. 17. 3 18. $\frac{1}{2}$.

19. 4. 20. -2. 21. a 或ハ b.

22. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 23. $\frac{3}{4}$. 24. $4(a+b)$.

25. $3a^2$. 27. ± 2.

演習問題 46.

1. 6, 12. 2. 12, 36. 3. 12, 25. 4. 48.

5. 幅 45 間, 長サ 65 間. 6. 16 或ハ $-\frac{29}{2}$.

7. 3 或ハ $-\frac{2}{3}$. 8. 21. 9. 三十個. 10. 12, 15, 6

11. 父 60 才, 子 40 才. 12. 32, 37. 13. 横十間, 竪十二間. 14. 十六人. 15. 百株.

16. 20, 26. 17. 水二斗四升, 酒一斗二升.

18. 37 或ハ 73. 19 廿五俵. 20. 4, 6, 8.

21. 八斗一升. 22. 三日. 23. $3\frac{3}{8}$ 時間.

24. 新長サ二尺五寸, 巾一尺二寸. 舊長サ三尺, 巾一尺五寸. 25. 一間半. 26. 十二錢.

27. 八里, 十二里. 28. $\frac{1}{12}$, $\frac{3}{12}$. 29. 507 人.

30. 每一時間ニ 1 里. 31. 六分五厘.

32. $1\frac{5}{6}$ 時間. 33. 歩行—每時 3 哩, 舟行—往路ニハ每時 6 哩, 歸路ニハ每時 $4\frac{1}{2}$ 哩.

34. 上十五錢, 下拾貳錢五厘.

35. 矩形ノ長サ 16 尺, 巾 9 尺. 36. 甲 1 里, 乙 $1\frac{1}{6}$ 里.

37. 大麥 40 俵, 大豆 35 俵. 38. 每時 20 哩, 30 哩.

39. 等分. 40. 315 里 或ハ 216. 41. 廿里.

演習問題 37.

1. (1) 4; (2) $-\frac{7}{2}$; (3) 31; (4) -3.

2. (1) $-\frac{1}{7}$; (2) 5; (3) $\frac{q}{p}$; (4) $-\frac{p}{q}$.

3. (1) $x^2-x-12=0$; (2) $6x^2-17x+7=0$; (3) $x^2+10x+21=0$; (4) $x^2-5=0$; (5) $x^2-6x+7=0$; (6) $x^2-2x-6=0$; (7) $x^2-2x+4=0$; (8) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; (9) $x^2-2cx+c^2+d^2=0$.

4. (1) 3; (2) $\frac{8}{3}$; (3) $\frac{\sqrt{137}}{2}$; (4) $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{3a}$.

5. $16p^2-12q$. 8. $5x^2-28x+15=0$.

9. $x^2-2x-143=0$ 或ハ $x^2+24x+143=0$. 10. $\frac{4}{5}$.

12. $b^2-4c=p^2-4q$. 15. $qx^2+p(q+1)x+(q+1)^2=0$.

演習問題 48.

1. $\pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{6}$. 2. ±1, $\pm\sqrt{3}$. 3. $\pm\sqrt{2}$, $\pm2\sqrt{7}$.

4. ±3, $\pm i\sqrt{2}$. 5. $\pm\sqrt{2}$, $\frac{\pm i\sqrt{5}}{2}$. 6. $\pm\sqrt{2}$, $\pm2\sqrt{3}$.

7. 7, $\frac{-7\pm i\sqrt{143}}{2}$. 8. 1, -2. 9. 3, -2, $\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$.

10. $\pm a$, $\pm\frac{1}{a}$. 11. 2, 2, $\frac{1\pm i\sqrt{15}}{8}$.

12. $-1\pm\sqrt{6}$, $-1\pm i\sqrt{2}$. 13. (1) 1, -2; (2) 1, -14;

(3) $1\pm\sqrt{2}$; (4) $2\pm\sqrt{17}$; (5) $\frac{5\pm i\sqrt{3}}{2}$; (6) 3, $-\frac{3}{2}$.

14. -8, 0, 1, 3. 15. -1, -1, $3\pm2\sqrt{2}$.

16. -3, 2, $\frac{-1\pm i3\sqrt{3}}{2}$. 17. ±1, $\pm i$.

18. 1, 2, $-\frac{5}{2}$. 19. 3, $-1\pm\sqrt{2}$. 20 1, $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

21. 2, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. 22. -1, 2, -4. 23. -1, 1, $\frac{1}{2}$.

24. -1, 1, $-\frac{1}{2}$. 25. -1, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 26. -1.

27. 1, 1, $\pm i$. 28. 2, $\frac{-1}{2}$, $\frac{-7\pm\sqrt{85}}{6}$. 29 -2.

30. (1) 2, $\frac{-5\pm i\sqrt{23}}{2}$; (2) 7, $-3\pm\sqrt{5}$; (3) $\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$;

$\frac{-3\pm i\sqrt{3}}{2}$; (4) 5, -10, $\frac{-5\pm i\sqrt{215}}{2}$; (5) -2, 4, $1\pm\sqrt{13}$.

演習問題 49.

1. $(x=3, y=8)$, $(8, 3)$. 2. $(7, -9)$, $(-9, 7)$.

3. $(2, 11)$, $(11, 2)$. 4. $(15, 7)$, $(-7, -15)$.

5. $(-17, -14)$, $(14, 17)$. 6. $(5, 23)$, $(23, 5)$.

7. $(-6, -28)$, $(-28, -6)$. 8. $(10, 11)$, $(11, 10)$.

9. $(5, 3)$, $(-3, -5)$. 10. $\left(\frac{1}{2}, -1\right)\left(-\frac{7}{34}, -\frac{23}{17}\right)$.

11. $(3, 5)$, $\left(\frac{121}{25}, -\frac{13}{25}\right)$. 12. $(8, -1)$.

13. $(1, -8)$, $(-8, 1)$. 14. $(5, 7)$, $(18, 31)$.

15. $(6, -2)$, $\left(\frac{190}{13}, -\frac{17}{13}\right)$. 16. $(1, -2)$, $\left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{2}\right)$.

17. $(-2, -1)$, $(1, 2)$. 18. $(-3, 1)$, $\left(\frac{20}{3}, -\frac{4}{25}\right)$.

演習問題 50.

1. $(9, -3)$, $(-3, 9)$. 2. $(12, 2)$, $(-2, -12)$.

3. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. 4. $(1, -1)$.

5. $(1, 3)$, $\left(-8, \frac{15}{2}\right)$. 6. $(1, 6)$, $\left(-\frac{5}{4}, -3\right)$.

7. $(7, 4)$, $\left(\frac{13}{10}, \frac{1}{5}\right)$. 8. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

9. $(1, -2), (2, -1)$.

10. $(0, \sqrt{34}), (0, -\sqrt{34}),$
$\left(\sqrt{\frac{51}{11}}, 2\sqrt{\frac{51}{11}}\right), \left(-\sqrt{\frac{51}{11}}, -2\sqrt{\frac{51}{11}}\right)$.

11. $(0, 4), (0, -4), (3, 1), (-3, -1)$.

12. $(4, 1), (-4, -1), \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{6}{\sqrt{5}}, -\frac{7}{\sqrt{5}}\right)$.

13. $(5, 4), (-5, -4), (5, -4), (-5, 4)$.

14. $(2, -3), (-2, 3), \left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{70}}, \frac{5}{2}\sqrt{\frac{35}{2}}\right),$
$\left(-\frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{70}}, -\frac{5}{2}\sqrt{\frac{35}{2}}\right)$.

15. $(9, 4), (-9, -4)$.

16. $(1, 5), (-1, -5), \left(12, -\frac{23}{2}\right), \left(-12, \frac{23}{2}\right)$.

17. $(2, 1), (-2, -1), \left(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

18. $(3, 0), \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

19. $(3, -2), (-3, 2)$.

20. $\left(\frac{7}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right), \left(-\frac{7}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right)$.

21. $(8, 6), (-8, -6), (8i, -6i), (-8i, 6i)$.

22. $(0, 0), (1, 2), \left(\frac{15}{22}, \frac{9}{22}\right)$.

23. $(a, b), (-a, -b), \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}, -\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{a-b}{\sqrt{2}}, \frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)$

24. $(1, 2), (2, 1), \left(-1-\sqrt{\frac{3}{2}}, -1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right),$
$\left(-1+\sqrt{\frac{3}{2}}, -1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

25. $(1, 2), (2, 1), \left(\frac{3+i\sqrt{5}}{2}, \frac{3-i\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{3-i\sqrt{5}}{2}, \frac{3+i\sqrt{5}}{2}\right)$

26. $(3, 4), (4, 3), (-3, -4), (-4, -3)$,

27. $(3, 6), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

28. $(a, 1), (-a, -1), \left(\frac{a+1}{\sqrt{2}}, \frac{a-1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{a+1}{\sqrt{2}}, -\frac{a-1}{\sqrt{2}}\right)$.

29. $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$.

30. $\left(\frac{1}{4}, 1\right), \left(-\frac{7}{25}, -\frac{35}{71}\right)$.

31. $(5, 2), \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

32. $(2, 1), (-2, -1), (-2, 1), (2, -1)$.

33. $\left(1, \frac{1}{3}\right), \left(2, \frac{2}{3}\right)$.

34. $(2, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$.

35. $(4, 3), (-4, 3), (4, -3), (-4, -3)$.

36. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right), \left(i\frac{\sqrt{14}}{3}, -i\frac{\sqrt{7}}{2}\right),$
$\left(-i\frac{\sqrt{14}}{3}, i\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

37. $(6, 2), (-2, -6), (2, 6), (-6, -2), (2+\sqrt{3}, -2+\sqrt{3})$
$(2-\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}), (-2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}), (-2-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$.

38. $(4, 2), \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}\right), \left(-\frac{9}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

39. $(0, 0), (a+b, a+b),$
$\left(\frac{a-b-\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}, \frac{a-b+\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}\right),$
$\left(\frac{a-b+\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}, \frac{a-b-\sqrt{a^2+2ab-3b^2}}{2}\right)$.

40. $\left(\frac{a}{4}, 2b\right), \left(-\frac{a}{4}, -2b\right)$.

41. $\left(\frac{a^3}{bc}, \frac{b^3}{ca}, \frac{c^3}{ab}\right), \left(-\frac{a^3}{bc}, -\frac{b^3}{ca}, -\frac{c^3}{ab}\right), \left(i\frac{a^3}{bc}, i\frac{b^3}{ca}, i\frac{c^3}{ab}\right),$
$\left(-i\frac{a^3}{bc}, -i\frac{b^3}{ca}, -i\frac{c^3}{ab}\right).$

42. $\left(\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc}, \frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2abc}, \frac{b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}{2abc}\right),$
$\left(\frac{b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{2abc}, \frac{c^2a^2-a^2b^2-b^2c^2}{2abc}, \frac{a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{2abc}\right).$

演習問題 51.

1. 3, 12. 2. 甲 13, 乙 9; 或ハ 甲 −5, 乙 −3.
3. 7, 3 或ハ −7, −3. 4. 8, 5. 5. 46.
6. 4, 11. 7. 長サ 18 間, 巾 12 間.
8. 13, 2. 9. 3, 7. 10. 上酒四斗, 下酒四斗八升.
11. 2, 2. 12. $4\frac{1}{2}$ 時間. 13. 345.
14. 巾五間, 千坪. 15. 距離 24 哩, 速度每時 4 哩.
16. 4, −1; 或ハ $\frac{-3+i\sqrt{31}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.
17. 距離 16 里, 速度每時 2 里.
18. 1, −1; 或ハ $1+\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}$.
19. 所持金二圓四十錢. 十個ニ付キ上卵二十錢, 下卵十五錢.
20. 30 哩, 20 哩. 21. 12 打, 一打ノ價 10 圓.
22. 十六日. 賃金, 甲八十錢, 乙六十錢.

23. 三里. 24. 七里.

演習問題 52.

1. $a^4x^2y^8$. 2. $-27a^{12}b^3$. 3. $16x^{12}y^8$.
4. $a^{24}x^{12}y^6$. 5. $-64a^3b^3x^9$. 6. $-a^{45}x^{27}y^{63}$.
7. $\frac{a^8}{b^{12}}$. 8. $-243\frac{x^{20}}{a^{15}}$. 9. $\frac{a^8x^4}{16b^{12}}$.
10. $4-12x^2+9x^4$. 11. $a^2x^2-4abxy+4b^2y^2$.
12. $a^6-6a^4c^2+12a^2c^4-8c^6$. 13. $4-12x+13x^2-6x^3+x^4$.
14. $16x^4-96x^3y^2+216x^2y^4-216xy^6+189y^8$.
15. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab-2ac-2ad-2bc-2bd+2cd$.
16. $9a^2-24abx+18acy+16b^2x^2-24bcxy+9c^2y^2$.
17. $a^3-3a^2b-6a^2c+3ab^2+12ac^2+12abc-b^3-6b^2c-12bc^2-8c^3$.
18. $a^6+6a^4b^2+12a^2b^4+8b^6-12a^4c^2-48a^2b^2c^2+48b^4c^2-48a^2c^4$
$+96b^2c^4-64c^6$.
19. $4+12a^2x^2-7a^4x^4-24a^6x^6+16a^8x^8$.
20. $a^{10}-10a^8bx+40a^6b^2x^2-80a^4b^3x^3+80a^2b^4x^4-32b^5x^5$.
21. $1+2x+3x^2-x^4-2x^5+x^6$.
22. $a^4+4a^3bx+2a^2(3b^2+2ac)x^2+4ab(b^2+3ac)x^3+(b^4+12ab^2c$
$+6a^2c^2)x^4+4bc(b^2+3ac)x^5+2c^2(3b^2+2ac)x^6+4bc^3x^7+c^4x^8$.

演習問題 53.

1. $5x^2$. 2. $2a^2x^3$. 3. $7ax^2y^4$. 4. ax^3.

5. $2xy^2$. 6. $-3b^2x^3$. 7. $2xyz^2$. 8. $\sqrt{2}xyz^2$.

9. $a^pb^qc^r$. 10. $3x-a$. 11. $2x^2+4$. 12. $ax-5b$.

13. $a-b$. 14. $a-2b-c$. 15. $2x-y+3z$.

16. x^2-3x+2. 17. $3x^2-5x-1$. 18. $x^2-2ax-3a^2$.

19. (1) 1035; (2) 138·4; (3) 20·37; (4) 270·61; (5) 0·3512.

20. $x-2y+z-3w$. 21. x^3+2x^2-2x-1.

22. $2x^3-3x^2-x+5$. 23. $x^3-bx^2+3b^2x-4b^3$.

24. $\dfrac{4x^2-1}{3x^2+2a^2}$. 25. $\dfrac{2x^2-xy-y^2}{x^2+xy-y^2}$.

26. $2x-3y$. 27. $5ax+y$. 28. $4x^2-3a^2$.

29. x^2-x-1. 30. x^2-x+2. 31. $2x^2-x+3$.

32. $3x^2-x-4$. 33. $2x^2+4ax-3a^2$. 34. $1-x+x^2-x^3$.

35. 21·4. 36. 126. 37. 392.

38. 2755. 39. 15015. 40. 349·58.

41. $1-x$. 42. $2x-3$. 43. x^2-x+1.

44. $x-2$. 45. $3x+2$.

演習問題 54.

1. 2. 2. 4. 3. $\frac{1}{2}$. 4. 10. 5. 4.

6. 25. 7. 27. 8. 128. 9. $2^{\frac{1}{4}}3$. 10. a^{-1}.

11. a^{-6}. 12. $x^{\frac{5}{6}}$. 13. $y^{-\frac{2}{5}}$. 14. $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}$. 15. $a^{-3}b^{2}$.

16. a^{-1}. 17. a^{-1}. 18. $a^{-\frac{1}{6}}b^{-\frac{6}{5}}$. 19. 1.

20. $a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{3}}$. 21. $a^{b}b^{a}$. 22. $x^{-\frac{1}{5}}y^{\frac{4}{5}}$. 23. $a^{-\frac{1}{3}}b^{-1}$.

24. $x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{2}{5}}$. 25. 1. 26. x^{b}. 27. 1.

28. 1. 29. $x-y$. 30. $a^{\frac{4}{3}}-b^{\frac{4}{3}}$. 31. $a+b$.

32. $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$. 33. $x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}$. 34. $x+x^{-1}$.

35. $8x-1$. 36. $x^{\frac{4}{3}}+4+16x^{-\frac{4}{3}}$. 37. $a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}+1$.

38. $x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{3}{2}}$. 39. $9x^{\frac{4}{5}}-9x^{\frac{2}{5}}-25+23x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-\frac{4}{5}}$.

40. x^4+1+x^{-4}. 41. $x^{2m}+x^m+1$. 42. $x+y+z-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$.

43. $x-x^{-1}-4$. 44. $x+y^{\frac{5}{3}}$. 45. $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$.

46. $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}xy^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$. 47. $x^{\frac{2n}{3}}+x^{\frac{n}{3}}y^{-\frac{n}{3}}+x^{-\frac{2n}{3}}$.

48. $x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{5}{4}}-8x^{\frac{3}{4}}+32x^{\frac{1}{4}}+64$. 49. $5x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{6}}+3x^{-\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{2}}$.

50. $x+2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{4}}+3ax^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{4}}+a^2$. 51. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$.

52. $x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}-8x^{-\frac{1}{2}}$. 53. $2x^{\frac{1}{4}}-3x^{-\frac{1}{12}}-x^{-\frac{5}{12}}$.

54. $x+x^{\frac{1}{2}}+1$. 55. $x^{\frac{2}{5}}-2x^{\frac{1}{5}}-2$. 56. $3x^{\frac{1}{2}}-2+x^{-\frac{1}{2}}$.

57. $x^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{9}}-2a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{9}}-a$. 58. $x-2-x^{-1}$.

59. $3x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$. 60. $9x^{\frac{2}{3}}y^{-1}+2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{2}}-9$.

演習問題 55.

1. $\sqrt[12]{16}$ 2. $\sqrt[12]{125}$. 3. $\sqrt[12]{a^4x^8}$. 4. $\sqrt[12]{a^9b^{15}}$.

5. $\sqrt[12]{x^2y^2}$. 6. $\sqrt[12]{\frac{1}{a^9x^2}}$. 7. (1) $\sqrt[6]{a^3}$, $\sqrt[6]{a^{10}}$; (2) $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{a^{21}}$;

(3) $\sqrt[14]{x^6}$, $\sqrt[14]{x^{35}y^{-1}}$. 8. $\sqrt[12]{x^7}$, $\sqrt[12]{x^3y^9}$, $\sqrt[12]{x^{10}}$.

9. $\sqrt[6]{125}$, $\sqrt[6]{121}$, $\sqrt[6]{13}$. 10. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$.

11. $\sqrt[24]{x^{16}}$, $\sqrt[24]{a^{12}x^{18}}$, $\sqrt[24]{27a^3}$. 12. $\sqrt[3]{5^2}<\sqrt{14}$.

13. $\sqrt{7}$, $2\sqrt[3]{3}$, $5\sqrt[4]{4}$. 14. $\sqrt[5]{11}$, $2\sqrt[3]{4}$, $3\sqrt[4]{6}$.

15. $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[3]{12}$, $2\sqrt[4]{2}$, $\sqrt{6}$. 16 $12\sqrt{2}$. 17. $4\sqrt[3]{4}$.

18. $5\sqrt[4]{5}$. 19. $-5ax\sqrt[3]{a}$. 20. $a^2b^3\sqrt[n]{x^5}$.

21. $xy^2z\sqrt[n]{x^a}$. 22. $(x-y)\sqrt{x}$. 23. $5\sqrt{5}$.

24. $4\sqrt[3]{3}$. 25. $4\sqrt{7}$. 26. $7\sqrt[3]{7}$.

27. $-2\sqrt[3]{2}$. 28. $2\sqrt{714}$. 29. $36\sqrt[3]{2}$.

30. $140\sqrt[3]{9}$. 31. $ax^3\sqrt{a}$. 32. $\frac{1}{\sqrt{3}b}$.

33. $\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$. 34. $3\sqrt{\frac{14}{27}}$. 35. $11\sqrt{2}$.

36. $15x-35\sqrt{x}$. 37. $a+b-\sqrt{a+b}$. 38. $21a+2b-13\sqrt{ab}$.

39. $-46+6\sqrt{21}$. 40. $5\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. 41. $18+13\sqrt{15}$.

42. $2a-2\sqrt{a^2-b^2}$. 43. $a+x-3+2\sqrt{a+x}$.

44. $x-2\sqrt{3ax-2x^2-a^2}$. 45. $5a^2-3b^2-4\sqrt{a^4-b^4}$.

46. $4+2\sqrt{10}$. 47. $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

48. $2m+2\sqrt{m^2-n^2}$. 49. $-7+4\sqrt{3}$.

50. $\frac{13+7\sqrt{5}}{19}$. 51. $-\frac{9+3\sqrt{2}}{7}$. 52. $\frac{49+9\sqrt{3}}{39}$.

53. $\frac{7-\sqrt{15}}{17}$. 54. $\frac{2a+15x-13\sqrt{ax}}{a-25x}$.

55. $\frac{x^2+x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}$. 56. $\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}$.

57. $\frac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}$. 58. $\frac{8+3\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{35}}{38}$.

59. $\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})}{x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz}$.

60. $\sqrt{3}$. 61. $1+\sqrt{2}$. 62. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

63. $\sqrt{19}-\sqrt{2}$. 64. $\sqrt{6}+2\sqrt{2}$. 65. $2\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

66. $\sqrt{30}-\sqrt{15}$. 67. $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$.

68. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$. 69. $\frac{3(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$. 70. $\sqrt{2}$.

71. $-\sqrt{5}-1$. 72. 14. 73. $2-2\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

演習問題 56.

1. $\frac{1}{6}$. 2. $13:9>21:17$. 3. $45:48=\frac{15}{16}$.

4. $15:30=\frac{1}{2}$. 5. $38:35$, $8:7$, $5:4$, $21:16$. 6. 7.

7. 20, 15. 8. -5. 9. 1 或ハ $\frac{2}{5}$. 10 1.

11. 5, 3. 12. $5:9$. 13. $\frac{ab}{a+b}$. 14. $\frac{5}{4}$ 或ハ $-\frac{5}{4}$.

15. $\sqrt{6xy}$ 或ハ $-\sqrt{6xy}$. 16. 1 或ハ 11.

17. 父五十才, 子廿五才. 21. 0 ハ或 $\frac{3}{2}$.

演習問題 57.

1. 2. 2. 1. 3. $\frac{b^2d}{a}$. 4. $5b^4$.

5. 2 或ハ -24. 6. 0. 7. 3 或ハ $-\frac{6}{7}$.

8. ab, 或ハ $-ab$. 9. a^2-b^2, 或ハ b^2-a^2.

10. c 或ハ $-c$. 11. $\frac{c}{d}$ 或ハ $-\frac{c}{d}$. 12. b^2.

13. $\frac{y^3z^4}{x}$. 14. $(1+x)^2$. 15. $\frac{y^2}{a}$.

演習問題 58.

1. (1) 78; (2) -83; (3) $x-37y$. 2. 44.

3. (1) 21; (2) 12. 4. -60, -150. 5. (1) 1352; (2) 24;

(3) 124; (4) 195; (5) $840a-800b$; (6) $14+7\sqrt{2}$;

(7) $n\{a^2+b^2-(n-3)ab\}$. 6. 25. 7. 14.

8. (1) 14; (2) 4; (3) a. 9. 20.

10. (1) 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27;

(2) $1\frac{3}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{1}{4}$, 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$, 0;

(3) $a-b$, $a-2b$, $a-3b$, $a-4b$, $a-5b$, $a-6b$, $a-7b$, $a-8b$.

11. x^2-x+1, x^2-2x+2, x^2-3x+3,.....$3x-2$, $2x-1$, x.

12. 3, 8, 13. 13. 十七年. 14. 20000.

演習問題 59.

1. (1) 49152; (2) $\frac{-1}{243}$; (3) $\frac{1}{11664}$; (4) 24057.

2. (1) -1458; (2) $\frac{243}{8}$; (3) 27; (4) $256\sqrt{2}$.

3. 162, 54, 18; 或ハ -162, 54, -18. 4. -4, $\frac{1}{3}$.

5. -103334. 6. $\frac{1921600}{16807}$. 7. $\frac{1}{3}(4^m-1)$.

8. $\frac{\sqrt{x}(1-x^n)}{1-x}$. 9. 24. 10. $\frac{64}{65}$. 11. 5.

12. $\frac{a}{b}$. 14. 初項 10, 通比 $\frac{1}{2}$. 15. 4, 12, 36.

16. 初項 -78, 通比 -1.

演習問題 60.

1. 5040. 2. 2520. 3. 254186856.

4 12600 通リ. 5. 420. 6. ~~九人~~ 8人

7. 2880. 9. 86400. 11. ${}_{24}C_6 \times {}_{18}C_6 \times {}_{12}C_6 = 2308743493056$.

12. ${}_{n-p}C_{r-p} \times {}_rP_r = \frac{(n-p)!\,r!}{(n-r)!\,(r-p)!}$.

演習問題 61.

1. $a^5-15a^4x+90a^3x^2-270a^2x^3+405ax^4-243x^5$.

2. $a^6+6a^5bx+15a^4b^2x^2+20a^3b^3x^3+15a^2b^4x^4+6ab^5x^5+b^6x^6$.

3. $1-12x^2+60x^4-160x^6+240x^8-192x^{10}+64x^{12}$.

4. $a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7$.

5. $1-8bx+28b^2x^2-56b^3x^3+70b^4x^4-56b^5x^5+28b^6x^6-8b^7x^7+b^8x^8$.

6. $1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$.

7. $1-10x+25x^2+40x^3-190x^4-92x^5+570x^6+360x^7-675x^8$
$-810x^9-243x^{10}$.

8. $-945a^4y^6$. 9. 70. 10. $-220b^9x^3y^9$.

11. $2380\frac{x^{13}}{a^9}$. 12. $-\frac{880}{729}$. 13. $12870x^8$.

14. $-42504\frac{x^{38}}{a^{14}}$. 15. $\frac{7\times13\times17\times37}{2^{10}}$.

16. -1144066. 17. $(-1)^n\,{}_{2n}C_n$.

19. $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\frac{21}{1024}x^6$.

20. $2x^2+x^6+2x^{10}+2x^{14}+\ldots\ldots\ldots\ldots$

21. $1+2x+5x^2+\frac{40}{3}x^3+\frac{110}{3}x^4$.

22. $\frac{10}{81a^{5\frac{1}{3}}}$. 23. -3.

演習問題 62.

1. (1) 0·75; (2) -3; (3) $\bar{2}$·75; (4) 3·75.

2. 0 7. 3. (1) $\frac{1}{2}\log a$; (2) $-5\log y$.

4. 5, 81, 0·01024. 5. (1) 2; (2) -5; (3) 5; (4) 4.

6 (1) 1.80270; (2) 7·80270; (3) $\bar{8}$·80270.

7. (1) 2489·3; (2) 0·24893; (3) 24893000; (4) 0·0000024893.

8. (1) 3·16375; (2) 4·62325; (3) $\bar{1}$ 88536; (4) 0·31866;
(5) $\log 7+4\log 3=2·75358$; (6) $\frac{1}{3}\log 2+\frac{1}{2}\log 3+\frac{1}{6}\log 7$
$=0·47975$.

9. 28 桁. 10. 18 個.

11. (1) 2208·6; (2) 5·1369; (3) 0 23932; (4) 0 25016;
(5) 0·00021386; (6) 1·6280; (7) 0·0000014050;
(8) 0·28724; (9) 9·7502; (10) 431·08; (11) 4·8567;
(12) 3·3701; (13) 4·0745; (14) 1 4344; (15) 0·097188;
(16) 582450 12. (1) 4·3220; (2) 2·9462; (3) 4·2921;
(4) $-6·8300$.

演習問題 63.

1. 526·64 圓. 2. 752·83 圓. 3. 十一年十ヶ月餘.
4. 十七年十一ヶ月餘. 6. 2004·5 圓.
7. 4481·2 圓. 8. 4014·8 圓. 9. 8929·6 圓.
10. 40000 圓. 11. 83·742 圓. 12. 2000 圓.

明治三十三年五月廿五日印　　刷
同　三十三年五月三十日發　　行
同　三十四年一月廿八日訂正再版印刷
同　三十四年二月　一　日發　　行

著作者　國　枝　元　治

發行兼印刷者　金港堂書籍株式會社
東京市日本橋區本町三丁目十七番地

同社長
代表者　原　亮　一　郎
東京市下谷區龍泉寺町四百十四番地

印刷所　帝國印刷株式會社
東京市京橋區築地三丁目十五番地

賣捌所　各府縣特約販賣所

定價金七拾錢　(代數學教科書)