冊
巻
科學校

# 文部省檢定濟

尋常師範學校教科用書

尋常中學校教科用書



コサマヤ

Smith, Charles.

A TREATISE
ON
# ALGEBRA.

# 代數學教科書

大學教授理學士ドクトル藤澤利喜太郎
理學士飯島正之助 共譯

三省堂發行

# 代數學教科書卷四目錄

## 第廿六編　不等式

頁

## 第廿七編　連分數





## 第廿八編　整數論

## 第廿九編　不定方程式

頁



## 第三十編　確カラシサ









## 第卅一編　行列式



## 附錄　例題集答

巻四目錄終

# 代數學教科書卷四

英國　チヤールス、スミス　著
大學教授理學士ドクトル　藤澤利喜太郎
理學士　飯島正之助　共譯

## 第二十六編　不等式 (Inequalities.)

第三百三十九條　兩ツノ正量ノ等差中項ハ其ノ等比中項ヨリモ大ナリトイフ定理ハ既ニ第二百二十八條ニ於テ證明セリ據コレヨリハ此ノ類ノ定理即チ謂ハユル不等式ノ事ヲ論ズベシ、

注意　本編ニ於テハ各文字ミナ正ノ實量ヲ表ハスモノト假定ス、

第三百四十條　左ニ擧ゲタル不等式ノ原理ハ容易ニ證明シ得ベキモノナリ、

第一、$a>b$ ナル片ハ從ヒテ又 $a+x>b+x$ 且 $a-x>b-x$ ナリ、

第二、$a>b$ ナル片ハ從ヒテ又 $-a<-b$ ナリ、

第三、$a>b$ ナル片ハ從ヒテ又 $ma>mb$ 且 $-ma<-mb$ ナリ、

第四、$a>b,\ a'>b',\ a''>b'',\ \ldots\ldots$ ナル片ハ従ヒテ又

$$a+a'+a''+\ldots\ldots>b+b'+b''+\ldots\ldots \text{ 且 } aa'a''\ldots\ldots>bb'b''\ldots\ldots$$ ナリ、

第五、$a>b$ ナル片ハ従ヒテ又 $a^m>b^m$ 且 $a^{-m}<b^{-m}$ ナリ、

〔例一〕$a^3+b^3>a^2b+ab^2$ ノ證明如何、

サテ爰ニ證明スベキヿハ、$a^3-a^2b-ab^2+b^3>0$ ナルヿ即 $(a^2-b^2)(a-b)>0$ ナルヿ是ナリ、然ルニ是ハ如何ニモ眞ナリ、其故ハ、$a$ ガ $b$ ヨリ大ナルモ、兩因數ハ倶ニ正量ニシテ、其ノ積ハ正量ナルベク、又 $a$ ガ $b$ ヨリ小ナルモ、兩因數ハ倶ニ負量トナリテ、其積ハ矢張正量ナレバナリ、

〔例二〕$m>n$ ナル片ハ、$a^m+a^{-m}>a^n+a^{-n}$ ナリ、其證明如何、

コヽニ證明スベキヿハ、$(a^m-a^n)(1-a^{-m-n})>0$ ナルヿ是ナリ、然ルニ此ハ如何ニモ眞ナリ、其故ハ $a$ ノ値、$1$ ヨリ大ナル片ハ兩因數ハ倶ニ正量トナリ、又ソノ値 $1$ ヨリ小ナルモ、兩因數ハ倶ニ負量トナリ、何レニシテモ其積ハ正量トナルベケレバナリ、

〔例三〕$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)>(ll'+mm'+nn')^2$ ノ證明如何、

$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)-(ll'+mm'+nn')^2\equiv(mn'-m'n)^2+(nl'-n'l)^2+(lm'-l'm)^2$ ナルヿ容易ニ證明スルヲ得ベシ、サテ後節ノ式ハ決シテ負トナルヿ能ハズ、又 $mn'-m'n$, $nl'-n'l$, $lm'-l'm$ ナル三式悉ク零トナル片ニ限リテ零トナル、而シテ此場合ニ於テハ $\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$ ナリ、



斯クノ如クナルヲ以テ、$(l^2+m^2+n^2)(l'^2+m'^2+n'^2)>(ll'+mm'+nn')^2$ ハ、$\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$ ナル片ノ外ハ恒ニ眞ナリ、而シテ $\frac{l}{l'}=\frac{m}{m'}=\frac{n}{n'}$ ナル片ニハ、不等式ハ變ジテ相等式トナルベシ、

**第三百四十一條　定理一**　與ヘラレタル和ヲ有スル兩正量ノ積ハ、其ノ兩因數ノ相等シキ片ニ最大値ヲ有ス、

如何ニトイフニ、$2a$ ヲ以テ與ヘラレタル和トナシ、$(a+x)$ ト $(a-x)$ トヲ以テ兩正量トセンニ、其ノ兩量ノ積ハ $(a^2-x^2)$ ナリ、而シテ其ノ値ハ $x$ ノ零ナル片ニ最大ナルハ分明ナリ、即チ各因數ト與ヘラレタル和ノ半ト相等シキ片ニ積ハ最大ナリ、

右ニ證明セル定理ハ、其ノ實、第二百二十八條ノ定理ニ同ジキモノナリ、如何ニトイフニ、第二百廿八條ニ據リテ $\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)>ab$ ナレバナリ、

**第三百四十二條　定理二**　與ヘラレタル和ヲ有セル正量何程數多ノ積ニテモ、其ハ、諸量ノ悉ク相等シキ片ニ最大値ヲ有ス、

如何ニトイフニ、其ノ諸因數中ノ任意ノ二ツヲ $a$、$b$ トシ、且コレヲ相等シカラザルモノト假定セヨ、

サテ外ノ因數ハ毫モ變ズルヿナク、唯 $a$ ト $b$ トノ代リニ $\frac{1}{2}(a+b)$ ト $\frac{1}{2}(a+b)$ トヲ取レバ、總ベテノ因數ノ和ハ依然トシテ變ズルヿナキモ其ノ連乘積ノ値ハ増大スベシ、如何ニトイフニ、

$a=b$ ナルニ非ルヨリハ、$\frac{1}{2}(a+b)\times\frac{1}{2}(a+b)>ab$ ナレバナリ、

斯クノ如クナルニ因リテ、何レカ二ツ相等シカラザル因數ノアル間ハ、諸因數ノ和ヲ變フルヿナシニ、連乘積ノ値ヲ增大スルヿヲ得ベキナリ、コノ故ニ其ノ連乘積ノ最大値ヲ有スルニ當リテハ、其ノ諸因數ハ悉ク相等シカラザルベカラズ、

斯ク、$a$、$b$、$c$、$d$、……トイフ $n$ 箇ノ量、悉ク相等シキニアラズンバ、

$$abcd\cdots\cdots<\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}\right)^n$$

ナルベシ、コノ故ニ

$$\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}>\sqrt[n]{(abcd\cdots\cdots)}.$$

コヽニ得タル結果ハ、等差中項等比中項ナル辭ノ意義ヲ推シ擴ゲテ、左ノ如クニ述ブルヿヲ得ベシ、

**定理三**　如何ニ許多ノ正量ハ等差中項ニテモ、其ハ等比中項ヨリハ大ナリ、

**第三百四十三條**　如何ニ許多ノ正量ナリトモ、悉ク相等シカラザル間ハ、其ノ等差中項ハ等比中項ヨリモ大ナリトイフヿハ、又次ノ如クニ證明スルヿヲ得ベキナリ、

サテ、二ツノ量ノ場合ニ本定理ノ眞ナルヿハ明カナレバ

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\quad cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2.$$





是ニ由リテ　$abcd<\left(\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}\right)^2.$

然ルニ　$\frac{a+b}{2}\times\frac{d+c}{2}<\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right)\right\}^2$

即　$\frac{a+b}{2}\times\frac{c+d}{2}<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$

コノ故ニ　$abcd<\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$

箇樣ニ論ジツヽ行カバ、

$$abcd\cdots\cdots\text{（}m\text{因數ニ至ル）}<\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots\text{（}m\text{項ニ至ル）}}{m}\right)^m.$$

ナルヿヲ證明スルヿヲ得ベシ、但シ茲ニハ $m$ ハ2ノ整數乘羃ナルヲ要ス、

次ニ $n$ ノ値、2ノ整數羃ナラザル場合ニ於テモ、本定理ハ眞ナリトイフヿヲ證明センニ、先ツ $m$ ヲ以テ $n$ ヨリモ大ナル2ノ整數羃トシ、且 $m=n+r$ ト假設スベシ、今 $a$、$b$、$c$、$d$、……トイフ $n$ 箇ノ量ト、各々 $\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots}{n}=k$ ニ等シキ $r$ 箇ノ量トヲ考ヘンニ、茲ニ $(n+r)$ ハ2ノ整數乘羃ナルヲ以テ

$$abcd\cdots\cdots\text{（因數}n\text{箇）}\times k.k.k.\cdots\cdots\text{（因數}r\text{箇）}<\left(\frac{a+b+c+d+\cdots\cdots+r.k}{n+r}\right)^{n+r}$$

∴ $abcd\cdots\cdots\times k^r<\left(\frac{nk+rk}{n+r}\right)^{n+r}$ 即 $abcd\cdots\cdots k^r<k^{n+r}$

∴ $abcd\cdots\cdots<k^n$ 即 $abcd\cdots\cdots<\left(\frac{a+b+c+d\cdots\cdots}{n}\right)^n$.

〔例一〕 $a^3+b^3+c^3>3abc$ ナルヿヲ證明スベシ

$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}>\sqrt[3]{(a^3b^3c^3)}$ 即 $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}>abc$ ナレバナリ

〔例二〕 $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}>n$ ナルヿヲ證明スベシ

如何ニトイフニ、$\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)>\sqrt[n]{\left(\frac{a_1}{a_2}\times\frac{a_2}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_1}\right)}$

即 $\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)>\sqrt[n]{1}$

ナレバナリ.

〔例三〕 $x+y+z$ ヲ常數トスレバ、$x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ハ如何ナル𬼀ニ最大値ヲ有スベキカ.

サテ、$P=x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ト置ク𬼀ハ、

$$\frac{P}{\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma}=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha\cdot\left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta\cdot\left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma$$

$$=\frac{x}{\alpha}\times\frac{x}{\alpha}\times\frac{x}{\alpha}\times\cdots\times\frac{y}{\beta}\times\frac{y}{\beta}\times\frac{y}{\beta}\times\cdots\times\frac{z}{\gamma}\times\frac{z}{\gamma}\times\frac{z}{\gamma}\times\cdots$$

コノ最後ノ積ニ於ケル因數ノ和ハ、$\alpha\cdot\frac{x}{\alpha}+\beta\cdot\frac{y}{\beta}+\gamma\cdot\frac{z}{\gamma}=x+y+z$ ナルヲ以テ、常數ナリ、故ニ 定理二 ニ據リテ、$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{y}{\beta}\right)^\beta\left(\frac{z}{\gamma}\right)^\gamma$ ハ $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ ナル𬼀ニ最大値ヲ有ス.

サテ、$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ ハ何レモ常數ニシテ、其値ハ定マリタルモノナレバ、$P/\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma$ ノ最大ナル𬼀ニハ、$P$ モ亦最大ナルベキヿ分明ナリ、故ニ $P$ ハ $x/\alpha=y/\beta=z/\gamma$ ノ𬼀ニ最大値ヲ有ス、

右ニ於テハ、$\alpha\ \beta\ \gamma$ 何レモ整數ト假定シタレ𪜈、モシ、然ラザル場合ニ於テハ、$n$ ヲ以テ $\alpha\ \beta\ \gamma$ ノ分母ノ最小通倍數ヲ表ハスベシ、偖 $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ガ最大値ヲ有スルハ、$x^{n\alpha}y^{n\beta}z^{n\gamma}$ ガ最大値ヲ有スル𬼀ニ在ルベシ、然ルニ $n\alpha, n\beta, n\gamma$ ハ何レモ整數ナレバ、右ニ證明セル理ニヨリテ、$x^{n\alpha}y^{n\beta}z^{n\gamma}$ ノ最大値ヲ有スルハ $\frac{x}{n\alpha}=\frac{y}{n\beta}=\frac{z}{n\gamma}$ ナル𬼀ニ在リ、即 $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ ナル𬼀ニ在リ.

斯クノ如クナルヲ以テ、$\alpha\ \beta\ \gamma$ ノ整數タリ分數タルニ論ナク、$(x+y+z)$ 常數ナル𬼀ニ $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ノ最大値ヲ有センニハ、$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ ナラザルベカラズ、

## 第三百四十四條　定理四

與ヘラレタル積ヲ有セル正量ノ和ハ、其諸量ノ悉ク相等シキ

トキニ最小値ヲ有ス、

マヅ第一ニ、$a$ 及 $b$ ヲ以テ表ハサレタル二ツノ量ノ場合ヲ考ヘン、サテ $a$ 及 $b$、モシ相等シカラザルモノナラバ、$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$ ナリ、此故ニ $a+b>\sqrt{ab}+\sqrt{ab}$ ナリ、乃チ二ツノ相等シカラザル量 $a$ 及 $b$ ノ和ハ、恒ニ、其ノ二ツノ積ニ等シキ積ヲ有スル所ノ相等シキ二ツノ量 $\sqrt{ab}$ 及 $\sqrt{ab}$ ノ和ヨリハ大ナリトイフコトヲ知ル、

次ニハ、二ツヨリ多クノ量アル場合ヲ論ゼン、

サテ、其ノ多クアル量ノ中ニ相等シカラザル二ツ、$a$ 及 $b$ アリトセバ、他ノ量ハ其儘ニ變ズルコトナク、獨リ $a$ 及 $b$ ノ代ハリニ $\sqrt{ab}$ 及 $\sqrt{ab}$ ヲ取リテ見ヨ、總ベテノ量ノ積ハ變ハリ無キモ、其ノ總和ハ小サクナルベシ、ソハ $\sqrt{ab}+\sqrt{ab}<a+b$ ナレバナリ、斯クノ如クナルヲ以テ、諸量中ニ、何レニテモ二ツ、相等シカラザルモノ有ル間ハ、其ノ積ノ値ヲバ變ゼズニ、其和ノ値ヲ小サクスルコトヲ得ルナリ、此ノ故ニ其和ガ最小値ヲ有スルトキハ其ノ諸量ハ悉ク相等シカラザル可カラザルナリ、

## 第三百四十五條　定理五

$m$ 及 $r$ 共ニ正整數ニシテ、且ツ $m$ ハ $r$ ヨリモ大ナラバ、

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m}{n}$$ ハ $$\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\times\frac{a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots+a_n^{m-r}}{n}$$ ヨリモ大ナルベシ、

茲ニ證明スベキハ $n(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)>(a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r)(a_1^{m-r}+a_2^{m-r}+\cdots+a_n^{m-r})$

ナルコト、即チ、$(n-1)(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m)>\Sigma(a_1^ra_2^{m-r}+a_1^{m-r}a_2^r)$

ナルコト、即チ、$\Sigma(a_1^m+a_2^m-a_1^ra_2^{m-r}-a_1^{m-r}a_2^r)>0$

ナルコト是ナリ、但シ、茲ニハ各字ヲ他ノ $n$-1 字ト組ミ合ハスベキモノトス、

サテ、$a_1^m+a_2^m-a_1^ra_2^{m-r}-a_1^{m-r}a_2^r=(a_1^r-a_2^r)(a_1^{m-r}-a_2^{m-r})$

且ツ此ノ兩邊ハ正量ナリ、如何ニトイフニ、$a_1$ ガ $a_2$ ヨリモ大、或ハ小ナルニ對シテ、$(a_1^r-a_2^r)$ 及 $(a_1^{m-r}-a_2^{m-r})$ ノ兩式ハ倶ニ正、或ハ倶ニ負ニシテ、恒ニ同號ヲ有スレバナリ、

是ニ因リテ　$\Sigma(a_1^m+a_2^m-a_1^ra_2^{m-r}-a_1^{m-r}a_2^r)>0.$

ヲ得、即チ本定理ヲ證明スルモノナリ、

尚、右ノ定理ヲ累子テ適用セバ、左ノ關係ヲ得ベキナリ、

$$\frac{\Sigma a_1^m}{n}>\frac{\Sigma a_1^\alpha}{n}\cdot\frac{\Sigma a_1^\beta}{n}\cdot\frac{\Sigma a_1^\gamma}{n}\cdots\cdots$$

但シ $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=m$ トス

又

$$\frac{\Sigma a_1^m}{n}>\left(\frac{\Sigma a_1}{n}\right)^m.$$

〔例一〕 $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ ノ證明如何、

〔例二〕 $a^5+b^5+c^5>abc(a^2+b^2+c^2)$ ノ證明如何、

コレ定理五ニヨリテ

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{3}>\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

マタ定理三ニヨリテ　$>\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.abc.$ ナレバナリ、

**第三百四十六條**　$a_1$及$a_2$ガ相等シカラザル片ハ、$m$ガ正ノ眞分數ナルト否トニ應ジテ、夫々ニ、$\frac{a_1^m+a_2^m}{2}$ハ$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^m$ヨリモ小、或ハ大ナリトイフヿハ證明

$a_1$ハ$a_2$ヨリ大キナルモノト假定セヨ、サテ又$a_1$ト$a_2$トノ和ノ半分ヲ$s$ニテ、差ノ半分ヲ$d$ニテ表ハシ、即チ$a_1=s+d, a_2=s-d$ト置クベシ、

サスレバ、$a_1^m+a_2^m=(s+d)^m+(s-d)^m$ナリ、

茲ニ、$d$ハ$s$ヨリモ小ナルヿ勿論ナレバ、$d/s$ハ一ヨリモ小ナル數ナリ、是ニ因リテ、$(s+d)^m$ト$(s-d)^m$トハ二項定理ニヨリテ、$d/s$ノ昇冪ヲ以テ進ム所ノ級數ニ展開スルヿヲ得ベシ、

斯クテ

$$\frac{a_1^m+a_2^m}{2}=\frac{1}{2}s^m\left\{1+m\frac{d}{s}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2}{s^2}+\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{2}s^m\left\{1-m\frac{d}{s}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2}{s^2}-\cdots\right\}$$
$$=s^m\left\{1+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{d^2}{s^2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\cdot\frac{d^4}{s^4}+\cdots\right\}\quad\cdots\cdots(\alpha).$$

第一、$m$ガ正整數、或ハ負數ナル場合ニハ(α)ノ諸項ハ悉ク正ナルベク、從ヒテ$\frac{1}{2}(a_1^m+a_2^m)>s^m$、即チ$\frac{1}{2}(a_1^m+a_2^m)>\{\frac{1}{2}(a_1+a_2)\}^m$ナルベシ、



第二、$m$正ノ眞分數ナル場合ニハ、(α)ノ諸項中ニ獨リ第一項ノミガ正ニテ他ハ悉ク負ナルベシ、是ニ因リテ、$1>m>0$ナル片ハ、$\frac{1}{2}(a_1^m+a_2^m)<\{\frac{1}{2}(a_1+a_2)\}^m$.

第三、$m$ガ一ヨリモ大ナル正ノ分數ナル場合ニハ、$\frac{1}{2}(a_1^m+a_2^m)$ガ$s^m$ヨリモ大ナルカ或ハ小ナルカハ(α)ニ由リテ直チニ判斷シ難シ、ソハ例ヘバ、$m$ガ2ト3トノ間ノ値ヲ持ツナラバ、(α)ノ第三項以下ハ何レノ項モ負トナリ、第二項ト第三項以下ノ諸項ノ總和トハ、數値上イヅレガ大ニ、イヅレガ小ナルカハ、觀察ニヨリテハ見定メ難ケレバナリ、

サテ、$m$ガ一ヨリモ大ナル正ノ分數、タトヘバ$p/q$ナル場合ニハ、$a_1=x_1^{\frac{q}{p}}$, $a_2=x_2^{\frac{q}{p}}$ト置クベシ、然ルトキハ、

$$\frac{x_1+x_2}{2}\lessgtr\left(\frac{x_1^{\frac{q}{p}}+x_2^{\frac{q}{p}}}{2}\right)^{\frac{p}{q}}$$ 即チ $$\frac{x_1^{\frac{q}{p}}+x_2^{\frac{q}{p}}}{2}\gtrless\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{\frac{q}{p}}$$ ナルニ從ヒテ夫々ニ又

$$\frac{a_1^{\frac{p}{q}}+a_2^{\frac{p}{q}}}{2}\lessgtr\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{\frac{p}{q}}$$ ナルベシ、

然ルニ、$q/p$ハ正ノ眞分數ナルヲ以テ、$\frac{x_1^{\frac{q}{p}}+x_2^{\frac{q}{p}}}{2}<\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{\frac{q}{p}}$ナルヿ、既ニ第二ノ場合ニ於テ證明セリ、是ヲ以テ、$\frac{p}{q}>1$ナル場合ニハ、$\frac{a_1^{\frac{p}{q}}+a_2^{\frac{p}{q}}}{2}>\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^{\frac{p}{q}}$ナリ、

斯クノ如ク、$m$正ノ眞分數ナル場合ニハ$\frac{a_1^m+a_2^m}{2}$ハ$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^m$ヨリモ小ナレ𪜈、總テ他ノ場

合ニ於テハ、却ツテ大ナルヿヲ知ルベシ、乃チ本定理ノ證ヲ得タリ、
右ニ論ジタルハ二ツノ量ノ場合ナレドモ、尚三ツ以上ノ量ニ付キテモ、本定理ハ矢張リ眞ナルヿ、第三百四十二條ノ方法ニテモ、又第三百四十三條ノ方法ニテモ、何レニテモ證明スルヿヲ得ベケレバ、茲ニハ之ヲ略ス、
斯クノ如ク、$m$ガ正ノ眞分數ナルト否トニ從ヒテ、夫々ニ、

$$\frac{a_1^m+a_2^m+\dots+a_n^m}{n} \lessgtr \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^m$$

ナリ、即チ之ヲ左ノ如クニ述ブベシ、
正ノ量$n$箇ノ、$m$乘羃ノ等差中項ハ、$m$ガ正ノ眞分數ナルト然ラザルトニ從ヒテ、夫々ニ、夫等ノ量ノ等差中項ノ$m$乘羃ヨリモ小、或ハ大ナリ、

## 第三百四十七條

次ノ二三ノ例題ヲ解キテ、本編ヲ結バン、（第百三十三條ヲモ見ヨ、）

〔例一〕 $a_1, a_2, \dots a_n$ ノ和ヲ$s$トシ、且ツ此$n$箇ノ量ハ、悉クハ相等シカラザルモノト假定スル𪜈ハ、

$$\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\dots+\frac{s}{s-a_n} > \frac{n^2}{n-1}$$

ナルヿヲ證明セヨ、
設、$a_1=a_2=\dots=a_n$ ニアラザルヲ以テ、

$$\frac{1}{n}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\dots+\frac{s}{s-a_n}\right) > \sqrt[n]{\frac{s^n}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}}$$

及ビ

$$\frac{(s-a_1)+(s-a_2)+\dots+(s-a_n)}{n} > \sqrt[n]{\{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)\}}.$$

ナリ、

今コノ兩不等式ヲ掛ケ合ハスル𪜈ハ、$(s-a_1)+(s-a_2)+\dots+(s-a_n)=ns-s$ ニヨリテ、左ノ如シ、

$$\frac{n-1}{n^2}\left(\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\dots+\frac{s}{s-a_n}\right)>1$$

〔例二〕 $a+b+c+d=3s$ ナル𪜈ハ $abcd>81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ ナルベシトイフヿヲ證明セヨ、
如何ニトイフニ　$3\sqrt[3]{\{(s-b)(s-c)(s-d)\}}<\{(s-b)+(s-c)+(s-d)\}$, 即チ $<a$.
又コレト同ジク、　$3\sqrt[3]{\{(s-c)(s-d)(s-a)\}}<b$,　$3\sqrt[3]{\{(s-d)(s-a)(s-b)\}}<c$.
$3\sqrt[3]{\{(s-a)(s-b)(s-c)\}}<d$.
故ニ、掛合ハセテ、　$81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)<abcd$.

〔例三〕 $x$、$y$、$z$ 悉ク相等シキニ非ンバ、$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z$ ナルヿヲ證明セヨ、
マヅ、$x$、$y$、$z$ ハ整數ナルモノト假定セヨ、然ル𪜈ハ定理三ニヨリテ、

$$\frac{(x+x+\dots x項ニ至ル)+(y+y+\dots y項ニ至ル)+(z+z+\dots z項ニ至ル)}{x+y+z}>\sqrt[x+y+z]{x^xy^yz^z}.$$

$$\therefore\ \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z.$$

次ニ$x$、$y$、$z$整數ナラズンバ其ノ分母ノ最小通倍數ヲ$m$ニテ表ハスベシ、サスレバ、$mx$、$my$、$mz$ハ整數トナルヲ以テ右ニ論ジタル第一ノ場合ヨリ

$$\left(\frac{m^2x^2+m^2y^2+m^2z^2}{mx+my+mz}\right)^{mx+my+mz}>(mx)^{mx}(my)^{my}(mz)^{mz}.$$

即チ

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{m(x+y+z)}\times m^{m(x+y+z)}>(x^xy^yz^z)^m\times m^{m(x+y+z)}$$

故ニ

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z.$$

本定理ハ量ガ三ツダケノ場合ナレド、尚ホ何程數多ノ量アリテモ、本定理ト同樣ノ關係アルヿ同樣ニシテ證明スルヿヲ得ベシ、

## 第三十五例題集

次ニ擧ゲタル不等式ヲ證明スベシ但シ文字ハ總ベテ正量ヲ表ハスモノトス、

第一　$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2 \not< xyz(x+y+z)$.

第二　$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots\cdots)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots\cdots) \not< (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots)^2$.

第三　$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots)\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\cdots\cdots\right) \not< (a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots)^2$.



第四　$a^6+b^6 \not< a^5b+ab^5$.

第五　$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \not< 9$.

第六　$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \not< 9abc$.

第七　$a^2cd+b^2ad+c^2ab+d^2bc \not< 4abcd$.

第八　$(bc+ca+ab)^2 \not< 3abc(a+b+c)$.

第九　$a^4+b^4+c^4 \not< abc(a+b+c)$.

第十　$a^5+b^5+c^5+d^5 \not< abcd(a+b+c+d)$.

第十一　$\frac{a-x}{a+x}<\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$. 但シ $x<a$.

第十二　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \not< \frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

第十三　$na>(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2>a$. 但シ $a=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$.

第十四　$x_1$、$x_2$、……$x^n$何レモ$a$ヨリハ大ニシテ、且ツ$(x_1-a)(x_2-a)\cdots(x_n-a)=b^n$ナルキハ$x_1x_2\cdots x_n$ノ最小値ハ$(a+b)^n$ナルベシ、但シ$a$モ$b$モ正量トス、

第十五　$\frac{(a+b)xy}{ay+bx} \not> \frac{ax+by}{a+b}$.

第十六　$\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \not< \frac{9}{a+b+c}$.

第十七　$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}+\frac{3}{a+b+c} \not< \frac{16}{a+b+c+d}$.

第十八　$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b$, 但シ $a>b>c$.

第十九　$x^2=y^2+z^2$ナルキハ、$n$ガ2ヨリモ大或ハ小ナルニ從ヒテ夫々ニ$x^n \gtreqless y^n+z^n$.

第二十　$(abcd)^{\frac{1}{p+q+r+s}}$ ノ值ハ、$a^{\frac{1}{p}}$、$b^{\frac{1}{q}}$、$c^{\frac{1}{r}}$、$d^{\frac{1}{s}}$ ノ中ノ最大ナルモノト最小ナルモノトノ中間ニ在リ、

第廿一　$1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n \nless (2n+1)x^n$.

第廿二　$n\dfrac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1} > \dfrac{a}{a-1}$. 但シ $a>1$、且ツ $n$ ハ正整數、

第廿三　$(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+2n-1) < (m+n)^{2n-1}$.

第廿四　$abc \nless (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

第廿五　$abcd \nless (b+c+d-2a)(c+d+a-2b)(d+a+b-2c)(a+b+c-2d)$.

第廿六　$a_1a_2a_3\cdots a_n \nless (n-1)^n(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)$, 但シ $(n-1)s=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$.

第廿七　$a$　$b$　$c$ ハ相等シカラザル正量ニシテ、且ツ其ノ何レノ二ツノ和モ餘ノ量ヨリハ恒ニ大ナル丼ハ $\dfrac{1}{b+c-a}+\dfrac{1}{c+a-b}+\dfrac{1}{a+b-c} > \dfrac{9}{a+b+c}$.

第廿八　$a$、$b$、$c$ 悉ク相等シキニ非ンバ、$(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)+(a-b)^2(a+b-c)>0$,

第廿九　$a$、$b$、$c$、ハ相等シカラザル正量ニシテ、且ツ其ノ何レノ二ツノ和ニテモ他ノ一量ヨリハ恒ニ大ナル丼ハ　$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)>0$.

第三十　$x \neq 1$ ナルカ、或ハ $p=q=r$ ナラザル丼ハ $px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}>0$,

第卅一　$\dfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n} < \sqrt{\dfrac{1}{2n+1}}$.　第卅二　$\dfrac{3.7.11\cdots(4n-1)}{5.9.13\cdots(4n+1)} < \sqrt{\dfrac{3}{4n+3}}$.

第卅三　$r^n(a_1^m+a_2^m+\cdots+a_r^m)^n > r^m(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_r^n)^m$. 但シ $n>m$.

第卅四　$x$、$y$、$z$ ノ值ハ $ax^\alpha+by^\beta+cz^\gamma=d$ トイフ要件ニ從フベキモノトセバ $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ ノ最大值ハ如何

第卅五　$n$ モシ $2$ ヨリ大ナラバ　$(n!)^2>n^n$.

第卅六　$n$ モ　正號ノ數ナラバ　$(1+x)^n(1+x^n)>2^{n+1}x^n$.

第卅七　等比級數ノ項數奇數ナルモノニ於テ奇數ノ番號ノ項ノ平均ハ偶數ノ番號ノ項ノ平均ヨリモ大ナリ

第卅八　等差級數ト等比級數トノ二級數、モシ初項、末項、及ビ項數ヲ同ジウスルナラバ、其ノ等差級數ノ和ハ等比級數ノ和ヨリモ大ナルベシ

第卅九　與ヘラレタル正量 $n$ 箇ノ中ヨリ取リタル $r$ 箇ヅヽノ等比中項ノ等差中項ヲ $P_r$ トスベシ然ル丼ハ $P_1$、$P_2$、$P_3$……$P_n$ ハ遞次小ナルベシ

第四十　$x^xy^yz^z > \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$.

第四十一　$n$ モシ正ノ整數ナラバ $2^{n(n+1)}>(n+1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{1}\right)^n\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^{n-1}\cdots\left(\dfrac{2}{n-1}\right)^2\left(\dfrac{1}{n}\right)^1$.

# 第二十七篇　連分數 (Continued Fractions.)

**第三百四十八條**　下ノ如キ形チノ式ヲ總ベテ連分數ト稱ス、$a\pm\cfrac{b}{c\pm\cfrac{d}{e\pm\cdots\cdots}}$

然レモ連分數ハ便宜ノ爲ニ通例ハ　$a\pm\frac{b}{c\pm}\frac{d}{e\pm}\frac{f}{g\pm}\cdots\cdots$　ノ形チニ書キ表ハス、

**第三百四十九條**　$a, b|c\ d|e, \cdots\cdots$ハ夫々ニ連分數　$a\pm\frac{b}{c\pm}\frac{d}{e\pm}\cdots\cdots$　ノ第一元素(The first element.)、第二元素(The second element.)、第三元素(The third element.)……ト稱セラル、連分數ヲバ任意ノ元素ニテ止メ其ノ後ノ諸元素ヲ切捨ツルヿニテ得ラル、分數ヲ其連分數ノ近數(Convergent.)ト稱ス例ヘバ　$a\pm\frac{b}{c\pm}\frac{d}{e\pm}\cdots\cdots$　ニ位テ、$a$ 即チ $a|1$ ハ第一近數ナリ、$a\pm\frac{b}{c}$ 即チ $\frac{ac\pm b}{c}$ ハ第二近數ナリ以下コレニ準フ、

一般ニ連分數ノ第 $r$ 近數ハ之ヲ $p_r|q_r$ ニテ表ハスベシ、

**第三百五十條**　$a, b, c, \cdots\cdots$ 皆正量ナル𪜈ハ、$a+\frac{b}{c+}\frac{d}{e+}\cdots\cdots$ ナル形チノ連分數ノ逐次ノ近數ハ其連分數ノ値ヨリモ大ナルモノト小ナルモノト一ツ置キニアリ、





如何ニトイフニ第一近數ハ連分數ヨリモ小ナリ、ソハ $\frac{b}{c+}\cdots$ ダケ足ラザレバナリ、次ニ第二近數 $a+\frac{b}{c}$ ハ連分數ヨリモ大ナリ、ソノ分母 $c$ ハ連分數ニ於ケル分母ヨリモ小ナレバナリ、

次ニ又第三近數ハ連分數ヨリモ小ナリ、ソハ $c+\frac{d}{e}>c+\frac{d}{e+}\cdots$ ナレバナリ以下次第ニ斯クノ如シ、

**第三百五十一條**　或ル連分數ノ任意ノ一近數ヲ索メンニハ、算術ニ於ケルガ如クニ、後ノ方ヨリ始ムルヲ最自然ノ方法トス例ヘバ、

$$\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1}{b_1+\frac{a_2b_3}{b_2b_3+a_3}}=\frac{a_1b_2b_3+a_1a_3}{b_1b_2b_3+b_1a_3+a_2b_3}.$$

此方法唯一ツノ近數ノ値ヲ索ムルニハ適セルモ、第一、第二、第三、…ト逐次ノ近數ヲ索ムルニハ適セズ如何ニトイフニ、此方法ニテハ、各近數ニ付キテ別々ノ手數ヲ要シ、既ニ得タルモノヲ利用シテ次ノ計算ノ手數ヲ省クナドノ事毫モ爲スヿ能ハズ大ニ勞力ヲ費ヤスベケレバナリ然レモ連分數ノ逐次ノ近數タルヤ單簡ナル規律ヲ以テ相關係セルモノナレバ逐次ノ近數ヲ索ムルニハ是ヲ利用スルヲ便利トス、次ニ其關係ヲ說カン、

**第三百五十二條**　連分數 $a+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots$ ハ逐次ノ近數成立ノ規律ヲ證明スルヿ、

扨第一近數ハ $\frac{a}{1}$、第二ハ $\frac{ab_1+a_1}{b_1}$、第三ハ $\frac{ab_1b_2+aa_2+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}=\frac{(ab_1+a_1)b_2+(a)a_2}{b_1b_2+1.a_2}$

今コレヲ觀ルニ此第三近數ノ分子ハ其前ニ隣レル二近數ノ分子ニ夫々ニ第三元素ノ分子ト分母トヲ掛ケタルモノヽ和ニ等シク、其分母モ亦同シ規律アルヲ知ルベシ、

次ニハ歸納法ニヨリテ第三以後ノ近數モ皆コレト同シ規律ニ從ヒテ成リ立テルヿヲ證明セントス、但シ何處ニ於テモ分母子ヲ約スルヿナキモノトス

先ヅ此規律ハ第 $n$ 近數マデハ行ハルヽモノト假定セヨ扨第 $n$ 元素ハ $a_{n-1}\div b_{n-1}$ ニシテ又第 $n$ 近數ハ $p_n\div q_n$ ニテ表ハスヿ例ノ如シ、

右ノ假定ニヨリテ、

$$\left.\begin{aligned}p_n&=b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2}\\ q_n&=b_{n-1}q_{n-1}+a_{n-1}q_{n-2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i}).$$

然ルニ第 $n$ 近數ヨリ第 $(n+1)$ 近數ヲ得ルニハ、$\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ ノ代リニ $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}+}\frac{a_n}{b_n}$ ヲ置キ卽チ $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ ヲ $\frac{a_{n-1}b_n}{b_{n-1}b_n+a_n}$ ニ變ズレバ足レリ是ニ因リテ(i)ニ於テ $a_{n-1}$ ノ代リニハ $(a_{n-1}b_n)$ ヲ置キ $b_{n-1}$ ノ代リニハ $(b_{n-1}b_n+a_n)$ ヲ置カバ其ノ $p_n$, $q_n$ ハ變ジテ $p_{n+1}$, $q_{n+1}$ ニナルベシ斯クノ如ク、

$$\begin{aligned}p_{n+1}&=(b_{n-1}b_n+a_n)p_{n-1}+a_{n-1}b_np_{n-2}\\ &=b_n(b_{n-1}p_{n-1}+a_{n-1}p_{n-2})+a_np_{n-1}.\end{aligned}$$

(i) ニ由リテ

$$=b_np_n+a_np_{n-1}.$$

同シ理ニテ

$$q_{n+1}=b_nq_n+a_nq_{n-1}.$$

斯ク右ノ規律モシ第 $n$ 近數マデ眞ナラバ必ズ亦第 $(n+1)$ 近數ニ於テモ眞ナリトイフヿ明カニナリタリ、

然ルニ第三近數ニ於テ其ノ眞ナルヿハ實際ニ明カナルヲ以テ第四近數ニ於テモ必ズ亦眞ナルヿ右ノ證明ニテ明カナリ斯ク第四近數ニ於テ眞ナルヿ既ニ明カニナリタレバ第五近數ニ於テモ必ズ亦眞ナルヿ右ノ證明ニテ明カナリ斯クノ如クニ逐次推論スルトキハ何番目ノ近數ニ於テモ同規律アルヿヲ知ルベキナリ、

系一　連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots$ ニ於テハ $p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}$, $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$.

系二　連分數 $\frac{a_1}{b_1-}\frac{a_2}{b_2-}\frac{a_3}{b_3-}\cdots$ ニ於テハ $p_n=b_np_{n-1}-a_np_{n-2}$, $q_n=b_nq_{n-1}-a_nq_{n-2}$.

[例]　連分數ノ逐次ノ近數ヲ聯屬スル所ノ規律ニヨリテ左ノ連分數ノ第五近數ヲ索ムベシ、

(i) $1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3+}\frac{1}{4}$.　(ii) $\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots$

(iii) $\frac{1}{2+}\frac{2}{3+}\frac{3}{4+}\frac{4}{5+}\frac{5}{6}$.　(iv) $3+\frac{2}{5+}\frac{2}{5+}\frac{2}{5+}\frac{2}{5+}\cdots$

(v) $\frac{1}{1+}\frac{2}{1+}\frac{3}{1+}\frac{4}{1+}\frac{5}{1}$.　(vi) $\frac{4}{4+}\frac{3}{3+}\frac{2}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$.

(vii) $\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\frac{2}{3-}\cdots$　(viii) $\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{1}{1-}\cdots$

答　$\frac{73}{43}$, $\frac{29}{140}$, $\frac{597}{1522}$, $\frac{2627}{779}$, $\frac{28}{48}$, $\frac{120}{144}$, $\frac{62}{63}$, $\frac{5}{3}$.

**第三百五十三條**　$a$、$b$、$c$、$d$、…皆正整數ナルヰハ、$a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{d+}\cdots$ ノ形チノ連分數ノ近數ニハ、此ノ如キ連分數チシテ特別ノ利用アラシムル所ノ性質具ハレリ、是ヨリ夫等ノ性質チ考フベシ、然レ圧、先ヅ第一ニ、有理ノ分數ハ總ベテ此ノ如キ形チノ、且ツ一定數ノ元素ヨリ成レル連分數ニ化スルヿチ得、トイフヿチ示サン、

如何ニトイフニ、今 $\frac{m}{n}$ チ與ヘラレタル分數トセンニ、$m$ モシ $n$ ヨリモ大ナラバ、$n$ チ以テ $m$ チ割ルベシ、而シテ $a$ チ其商トシ、$p$ チ其殘リトセヨ、乃チ $\frac{m}{n}=a+\frac{p}{n}$ ナリ、次ニ $n$ チ $p$ ニテ割リ、商 $b$ ニ殘リ $q$ チ得ルヿトスレバ、$\frac{p}{n}=\frac{1}{\frac{n}{p}}=\frac{1}{b+\frac{q}{p}}$ ナリ、次ニ又 $p$ チ $q$ ニテ割リ商 $c$ ニ殘リ $r$ チ得ルヿトスレバ、$\frac{q}{p}=\frac{1}{\frac{p}{q}}=\frac{1}{c+\frac{r}{q}}$ ナリ、尚カクノ如クニ爲スヰハ、$\frac{m}{n}$ ハ遂ニ所要ノ形チニナルベシ、即チ左ノ如シ、

$$\frac{m}{n}=a+\frac{p}{n}=a+\frac{1}{b+\frac{q}{p}}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots$$





$p$、$q$、$r$、……ノ數ハ、必ズ段々ニ小サクナリ行クチ以テ、何處ニテカ割リ切ルルニ非ズンバ其ノ一ツハ、早晩、一トナラザルベカラズ、從テ割リ算チ施スヿ一定回數ノ後ニハ、右ノ演算ハ必ズ終リニ來ルベキナリ、

茲ニ注意スベキハ、右ニ記述セル仕方ハ、$m$ 及 $n$ ノ最大通約數チ索ムル仕方ト全ク同ジク、$a$、$b$、$c$、……ガ即チ逐次得ル所ノ商ナルヿ是ナリ、此ノ故ニ、連分數 $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots$ ニ於ケル、$a$、$b$、$c$、……ノ數ハ、屢々第一、第二、第三、……ノ部分商 (Partial Quotients) ト名ツケラル、

右ノ如クニシテ $\frac{m}{n}$ 及 $\frac{mk}{nk}$ ニ對スル連分數チ索ムルヰハ、全ク相同ジキ連分數ガ出來ベキヿ、容易ニ知ルヿチ得ベシ、但シ $k$ ハ整數トス、

[例]　$491\div1224$ 及 $3{\cdot}14159$ チ連分數ニ化シ、各ノ第四近數チ索ムベシ、

答、$\frac{71}{177}$、$\frac{355}{113}$、

**第三百五十四條**　**近數ノ性質** (Properties of Convergents.)　$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots$ チ所論ノ連分數トシ、其ノ第 $n$ 近數チ $\frac{p_n}{q_n}$ トセヨ、

第一　第三百五十二條ニ由リテ、

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_{n-2}q_{n-1}-p_{n-1}q_{n-2}}{q_nq_{n-1}}$$

是ニ因リテ、

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=-(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}).$$

同理ニテ逐次ニ、$p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}=-(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2})$.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_3q_2-p_2q_3=-(p_2q_1-p_1q_2).$$

然ルニ　$p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1a_2=1$.

故ニ　$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$

因リテ又　$\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$

系　一ヨリモ小サキ連分數 $\dfrac{1}{a_1+}\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots$ ニ於テハ

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1},\quad \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}.$$

第二　$p_n$ ト $q_n$ トノ通約數ハ何レモ亦 $(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)$ ノ約數ナラザルベカラズ、即チ右ノ第一ニヨリテ、$\pm1$ ノ約數ナラザルベカラズ是ニヨリテ $p_n$ ト $q_n$ トニハ通約數アル丁能ハズ、斯ク近數ハ總ベテ已約分數ナリ、

第三　今 $F\equiv a_1+\dfrac{1}{a_2+}\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n+}\cdots\cdots$ トスル片ハ、$F$ ハ其第 $n$ 近數ヨリシテ、$\dfrac{1}{a_n}$ ノ代ハリニ $\dfrac{1}{a_n+}\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots\cdots$ ヲ入ルル丁ニテ、索メ得ベシ、



是ニヨリテ、$F=\dfrac{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\dfrac{p_n+\lambda p_{n-1}}{q_n+\lambda q_{n-1}}$.

但シ $\lambda$ ハ $\dfrac{1}{a_{n+1}+}\cdots$ ノ代ハリニ置ケルモノナリ、即チ $\lambda$ ハ一ヨリモ小サキ正ノ量ナリ、

是ニヨリテ　$F-\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{p_n+\lambda p_{n-1}}{q_n+\lambda q_{n-1}}-\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{\lambda(p_{n-1}q_n-p_nq_{n-1})}{q_n(q_n+\lambda q_{n-1})}$

$$=\frac{(-1)^{n-1}\lambda}{q_n(q_n+\lambda q_{n-1})}.$$

又

$$F-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_n+\lambda p_{n-1}}{q_n+\lambda q_{n-1}}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}$$

$$=\frac{(-1)^n}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}.$$

然ルニ、$\lambda$ ハ一ヨリモ小サク又 $q_n$ ハ $q_n$ ヨリモ大ナリ、是ニヨリテ　$F\sim\dfrac{p_n}{q_n}<F\sim\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$.

斯ク何レノ近數モ直ニ其ノ前ニ隣レル近數ヨリハ連分數ニ近ク從ヒテ亦ソノ前ノ何レノ近數ヨリモ之ニ近シ、

第四　第 $n$ 近數ヨリモ一連分數ニ近キ任意ノ分數ヲ $\dfrac{x}{y}$ ト假定セヨ、然ラバ此分數 $\dfrac{x}{y}$ ハ

右ノ第三ニヨリテ、第$(n-1)$近數ヨリモ連分數ニ近カルベシ、然ルニ連分數自身ハ、第三百五十條ニイヘル如ク、第$n$近數ト第$(n-1)$近數トノ中間ニ在ルモノナレバ、$x/y$モ亦此ノ兩近數ノ中間ニ在ルコトヲ要スルヤ、知ルベキナリ、

是ニヨリテ、$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \sim \frac{x}{y} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \sim \frac{p_n}{q_n}$ ナラザルベカラズ、

即チ $\frac{p_{n-1}y \sim q_{n-1}x}{q_{n-1}y} < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$ ナラザルベカラズ、

故ニ $y > q_n(p_{n-1}y \sim q_{n-1}x)$ ナラザルベカラズ

然ルニ諸量ミナ整數ナルヲ以テ、$y$ハ$q_n$ヨリ大ナラザルベカラズ

斯ク、任意ノ一近數ヨリモ連分數ニ近キ各分數ノ分母ハ其近數ノヨリモ大ナラザルベカラズ、

**第五**　ステニ第三ニ於テ言ヘルガ如ク、

$F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}(q_n+\lambda q_{n-1})}$.（但シ$\lambda$ハ一ヨリモ小ナル正ノ量トス）

ナルヲ以テ、 $F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} > \frac{1}{q_{n-1}(q_n+q_{n-1})}$.

又 $F \sim \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}q_n}$.

斯ク、一ノ連分數ノ近數ト其連分數トノ差ハ數値上、$\frac{1}{d_1d_2}$ ト $\frac{1}{d_1(d_1+d_2)}$ トノ中間ニアリ、但シ$d_1$及$d_2$ハ夫々ニ右ノ近數及ソノ次ノ近數ノ分母ナリ

〔例二〕 $\frac{p_r}{q_r}$ヲ連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_n}$ ノ第$r$近數トスルトキハ〕

$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_2+}\frac{1}{a_1}$. ナリ、其證明如何

如何ニトイフニ

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2},$$
$$p_{n-1} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3},$$
$$\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_2 = a_2 p_1 + 1$$
$$p_1 = a_1$$

ナルヲ以テ、

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1}+\frac{p_{n-3}}{p_{n-2}}} = \cdots\cdots$$
$$= a_n + \frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_2+}\frac{p_1}{p_2}$$

$$=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_3+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_1}.$$

倘同法ニテ證明スルヿヲ得ベキガ如ク

$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{+a_3+}\frac{1}{a_2}.$$

〔例二〕　$n$ モシ正ノ整數ナラバ　$\frac{n}{n+1}$　ト連分數　$\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots$　ノ　$n$ 元素マデトハ相等シ其證明如何、

サテ

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & \frac{n}{n+1}=\frac{1}{2-\frac{n-1}{n}}, \\
2) & \frac{n-1}{n}=\frac{1}{2-\frac{n-2}{n-1}}, \\
\vdots & \cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n-1) & \frac{2}{3}=\frac{1}{2-\frac{1}{2}}, \\
n) & \frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{array}\right\}$$

ナルニ因リテ、$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots$（$n$ 元素マデ）.





〔例三〕　$\frac{p_r}{q_r}$ ヲ以テ連分數 $\frac{a}{b+}\frac{a}{b+}\frac{a}{b+}\cdots\cdots$ ノ第 $r$ 近數トスル𪜈ハ、$p_{u+1}=aq$　ナリ、其證明如何、

マヅ此事ハ $n$ ノ値ガ $m$ ナル𪜈、及ビ $(m-1)$ ナル𪜈ニ眞ナルモノト假定セヨ、

サテ、第三百五十二條ニ由リテ、

$$p_{m+1}=bp_m+ap_{m-1}$$

假定ニ由リテ、

$$=b.aq_{m-1}+a.aq_{m-2}=a(b.q_{m-1}+aq_{m-2})$$

再ビ、第三百五十二條ニ由リテ

$$=aq_m.$$

斯ク、本定理モシ $n$ ノ相隣レル二値ニ付テ眞ナラバ、其次ノソレヨリモ大ナル $n$ ノ値ニ付テモ矢張マタ眞ナルベシ、然ルニ、$n$ ノ値ノ一ナル𪜈、及ビ二ナル𪜈ニ本定理ノ眞ナルヿハ容易ニ知ラルヽヿナルヲ以テ、本定理ハ $n$ ノ値ノ三ナル𪜈ニモ眞ナルベシ、從テ四ナル𪜈ニモ、又從テ五ナル𪜈ニモ、……即チ $n$ ノ總テノ値ニ付テ眞ナルベシ

## 第三十六例題集

第一　元素ノ分子何レモ $1$ ナル連分數ノ相接スル所ノ三近數ヲ $\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$、$\frac{p_3}{q_3}$ トスル𪜈ハ、$p_3-p_1:q_3-q_1=p_2:q_2$　ナルヿヲ證明セヨ.

第二　連分數 $\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\cdots\cdots$　ノ第 $n$ 近數ヲ $\frac{p_n}{q_n}$ トスル𪜈ハ、$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$

$=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots\cdots a_n$ ナルコトヲ證明セヨ

第三　目盛セル定木二本ヲ合セタルニ其零點モ相符合シ又一本ノ方ノ百番目ノ目盛ト他ノ一本ノ方ノ六十三番目ノ目盛ト相符合セリ然ラバ他ノ目盛ノ中ニテ最モ符合ニ近キハ廿七番目ト十七番目トナルベシ其證明如何、

第四　$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ldots\ a_n$ モ調和級數ヲナスモノナラバ、$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2-}\frac{1}{2-}\cdots\cdots\frac{1}{-2-}\frac{a_2}{a_1}$ ナルベシ其證明如何

第五　$na_1+\frac{1}{na_2+}\frac{1}{na_3+}\frac{1}{na_4+}\cdots=n\left\{a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{n^2a_4+}\frac{1}{a^5+}\cdots\right\}$.

第六　$P=\frac{a}{a+}\frac{b}{b+}\frac{c}{c+}\cdots\cdots+\frac{k}{k+1}$, $Q=\frac{a}{b+}\frac{b}{c+}\frac{c}{d+}\cdots\cdots+\frac{h}{k}$ ナラバ、$P(a+Q+1)=a+Q$ ナリ其證明如何、

第七　$\frac{n}{n+}\frac{n-1}{n-1+}\frac{n-2}{n-2+}\cdots+\frac{2}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$ ノ値ヲ索ムベシ、

第八　$n$ 奇數ナルモ偶數ナルモ、$\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\frac{1}{1-}\frac{1}{4-}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ハ $\frac{2n}{n-1}$ ニ等シ其證明如何、

第九　昇(Ascending)連分數 $\frac{b_1+}{a_1}\frac{b_2+}{a_2}\frac{b_3+}{a_3}\cdots$ ハ $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_1a_2}+\frac{b_3}{a_1a_2a_3}+\cdots$ ニ等シ其證明如何、

第十　連分數 $\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b^3+}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ノ分子ヲ $p_n$ トスルトキハ、(i) $p_1,\ p_2,\ p_3\ \ldots\ldots$ ノ相連續セル四量間ニハ何レモ一次ノ(Linear)關係アルコトヲ證シ、(ii) ソノ關係ヲ索ムベシ

第十一、$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots$ ノ第 $r$ 近數ヲ $\frac{p_r}{q_r}$ トスルトキハ、$p_{2n+2}=p_{2n}+bq_{2n}$ 及 $q_{2n+2}=qp_{2n}+(ab+1)q_{2n}$ ナルコトヲ證明セヨ

第十二、$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots$ ノ第 $r$ 近數ヲ $\frac{p_r}{q_r}$ トスルトキハ、$p_{3n+3}=bp_{3n}+(bc+1)q_{3n}$ ナリ其證明如何

第十三、$\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\frac{a}{1+}\frac{b}{1+}\cdots$ ノ第 $r$ 近數ヲ $\frac{p_r}{q_r}$ トスルトキハ、$p_{2n}q_{2n-1}-q_{2n}p_{2n-1}=-a^nb^n$ ナリ其證明如何、

第十四、$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ヲ $\frac{p_n}{q_n}$ トスルトキハ、$q_{2n}=p_{2n+1}$, $bq_{2n+1}=ap_{2n}$ ナリ其證明如何、

第十五、$\dfrac{p}{q}=a+\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{c+}\cdots+\dfrac{1}{k+}\,\dfrac{1}{l}$ トスルトキハ $\dfrac{1}{l+}\,\dfrac{1}{k+}\cdots+\dfrac{1}{c+}\,\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{l+}\,\dfrac{1}{k+}\cdots+\dfrac{1}{c+}\,\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{pq}$ ナリ、其證如何、

第十六、$P/Q$ ヲ連分數ニ直シ、其ノ第一ノ部分商ヲ $a$ トシ、$P/Q$ ノ直チニ前ニアル近數ヲ、$p/q$ トセヨ、然ルトキハ $Q/q$ ヲ連分數ニ直シナバ、其最後ノ近數ハ $(P-aQ)\div(p-aq)$ ナリ其證如何、

第十七、一連分數 $x$ ノ相隣レル二近數ヲ何レニマレ $p/q$、$p'/q'$ トスルトキハ $\dfrac{p}{q}\gtrless\dfrac{p'}{q'}$ ニ從ヒテ夫々ニ $\dfrac{pp'}{qq'}\gtrless x^2$ ナルベシ、其證如何、

## 第三百五十五條　連分數ノ第$n$近數ヲ索ムルヿ、

連分數ノ相接セル三近數ヲ連繫スル所ノ規律ハ、既ニ第三百五十二條ニ於テ索メ得タリ、サレバ近數ノ値ヲ逐次ニ定ムルヿハ常ニ爲スヿヲ得ベシ、或ル場合ニハ、任意ノ近數ノ値ヲ其前ナル諸近數ヲ含マザル一式ニテ表ハスヿヲ得ベシ、其方法ハ次ニ示スベキ例ニ就キテ悟レ、

〔例一〕連分數 $\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1.3}{4+}\,\dfrac{3.5}{4+}\,\dfrac{5.7}{4+}\cdots$ ノ第$n$近數ヲ索ムルヿ、

爰ニハ第$n$元素ハ $\dfrac{(2n-3)(2n-1)}{4}$ ナリ、故ニ

$$p_n=4p_{n-1}+(2n-3)(2n-1)p_{n-2}.$$

之ヲ書換フレバ

$$p_n-(2n+1)p_{n-1}=-(2n-3)\{p_{n-1}-(2n-1)p_{n-2}\}.$$

$n$ ノ値ヲ次第ニ1ヅヽ減ジテ $p_{n-1}-(2n-1)p_{n-2}=-(2n-5)\{p_{n-2}-(2n-3)p_{n-3}\}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_3-7p_2=-3\{p_2-5p_1\}.$$

且ツ $p_1=1$, $p_2=4$ ナレバ　$p_2-5p_1=-1.$

コレヲ掛ケ合ハセテ、$p_n-(2n+1)p_{n-1}=(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdots\cdots3.1.$

是ニ由リテ又、

$$\frac{p_n}{1.3\cdots(2n+1)}-\frac{p_{n-1}}{1.3\cdots(2n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

$$\frac{p_{n-1}}{1.3\cdots(2n-1)}-\frac{p_{n-2}}{1.3\cdots(2n-3)}=\frac{(-1)^{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_2}{1.3.5}-\frac{p_1}{1.3}=\frac{(-1)^1}{3.5}.$$

$$\frac{p_1}{1.3}=\frac{1}{1.3}.$$

コレヲ加ヘ合ハセテ

$$\frac{p_n}{1.3.5\cdots(2n+1)}=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

近數ノ分母モ分子ト同ジ規律ニ據ルモノナレバ右ノ結果ヨリシテ、

$$q_n-(2n+1)q_{n-1}=(-1)^{n-2}3.5\cdots(2n-3)\{q_2-5q_1\}$$

然ルニ $q_1=3,\ q_2=15$ ナルヲ以テ $=0$

是ニヨリテ、

$$\frac{q_n}{(2n+1)(2n-1)\cdots3.1}=\frac{q_{n-1}}{(2n-1)\cdots3.1}=\cdots=\frac{q_2}{5.3.1}=\frac{q_1}{3.1}=1.$$

是ニヨリテ、 $q_n=1.3.5\cdots(2n-1)(2n+1).$

斯クノ如クナルガ故ニ第 $n$ 近數 $\frac{p_n}{q_n}$ ハ左ノ如シ、

$$\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}.$$

〔例三〕 連分數 $\frac{1}{1+}\frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ヲ索ムルヿ。

此處ニ要スル方法ハ既ニ第二百四十七條ノ〔例五〕ニ於テ示セルモノニ同ジ、斯クシテ

$$\left\{\begin{aligned}p_n&=\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{\underline{|n+1}},\\ q_n&=1-\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}-\cdots+\frac{(-1)^{n}}{\underline{|n+1}}.\end{aligned}\right.$$

ヲ得ベシ。

$n$ モシ無窮ニ大ナルモノナラバ、 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}=\frac{1}{e-1}.$

## 第三百五十六條　循環連分數

(Periodic Continued Fractions.) 連分數ノ元素斷エズ同ジ順序ニ出顯スルトキハ其連分數ヲ循環連分數ト稱ス、而シテ其循環ノ初頭ヨリ始マルモノヲ單(Simple)循環連分數、然ラザルモノヲ混(Mixed)循環連分數ト稱ス。

例ヘバ

$$a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots$$ ハ單循環連分數ナリ

マタ

$$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{b+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$$ ハ混循環連分數ナリ

## 第三百五十七條　循環スル所ハ元素唯一ツナル循環連分數ハ第 $n$ 近數ヲ索ムルヿ、

其分數ヲ $a+\frac{b}{c+}\frac{b}{c+}\frac{b}{c+}\cdots\cdots$ トセヨ、然ルトキハ第三以下ノ近數ニ於テ總ベテ $p_n=cp_{n-1}+bp_{n-2}$ ノ關係アリ、但シ $b$ 及 $c$ ハ、$n$ ノ値ニ拘ハラズシテ恆ニ同ジ値ヲ有スル、謂ハユル常數ナリ。

扨、$u_1+u_2x+\cdots+u_nx^{n-1}+\cdots$、モシ、$\frac{A+Bx}{1-cx-bx^2}$ ヲ展開シテ得ラレタル循環級數ナラバ、第三以下ノ逐次ノ係數ニハ $u_n=cu_{n-1}+bu_{n-2}$ トイフ規律アルベシ

是ニ因リテ、今モシ $A$ ト $B$ トノ値ヲ適當ニ撰定シテ $u_1=p_1$, $u_2=p_2$ ナルヤウニ爲サバ、$n$ ノ値ノ如何ニ拘ハラズ常ニ $u_n=p_n$ ナルベシ、サテ斯クノ如クナルニ要スル $A$ ノ値ハ $p_1$ 即チ $a$、又ソノ $B$ ノ値ハ $(p_2-cp_1)$ 即チ $b$ ナリ、

斯クノ如クナルニ因リテ連分數 $a+\frac{b}{c+}\,\frac{b}{c+}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ハ $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ニ等シ

右ト同理ニテ第 $n$ 近數ノ分母モ、$\frac{q_1+(q_2-cq_1)x}{1-cx-bx^2}$ 即チ $\frac{1}{1-cx-bx^2}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ナリ、

〔例一〕連分數 $1+\frac{3}{2+}\,\frac{3}{2+}\,\frac{3}{2+}\cdots$ ノ第 $n$ 近數如何、

サテ此ノ第 $n$ 近數ノ分子ハ $\frac{1+3x}{1-2x-3x^2}$ 即チ $\frac{3}{2(1-3x)}-\frac{1}{2+2x}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ナリ、

是ニ因リテ、

$$p^n=\frac{1}{2}\{3^n+(-1)^n\}.$$

又第 $n$ 近數ノ分母ハ $\frac{1}{1-2x-3x^2}=\frac{3}{4(1-3x)}+\frac{1}{4(1+x)}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ナリ、

是ニ因リテ、

$$q^n=\frac{1}{4}\{3^n-(-1)^n\}.$$



斯ク第 $n$ 近數ハ $2\times\frac{3^n+(-1)^n}{3^n-(-1)^n}$ ナリ、

〔例二〕連分數 $\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ヲ索メヨ、

サテ、

$$\left.\begin{aligned} p_{2n}&=dp_{2n-1}+cp_{2n-2}\\ p_{2n-1}&=bp_{2n-2}+ap_{2n-3}\\ p_{2n-2}&=dp_{2n-3}+cp_{2n-4}\end{aligned}\right\}$$

コレヨリ $p_{2n-1}$ ト $p_{2n-3}$ トヲ逐ヒ出セバ

$$p_{2n}-(a+c+bd)p_{2n-2}+acp_{2n-4}=0.$$

コノ結果タル、$a$ 及 $c$ ニ就キテ對稱ニシテ、又 $b$ 及 $d$ ニ付キテモ對稱ナリ、是ニ因リテ

$$p_{2n-1}-(a+c+bd)p_{2n-3}+acp_{2n-5}=0$$

斯クノ如クナルガ故ニ、$p_n-(a+c+bd)p_{n-2}+acp_{n-4}=0$ ナルヿハ、$n$ ノ總ベテノ値ニ付キテ眞ナリ、

ザレバ、$p_n$ ハ $\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ナルベシ、但シ此事ガ初メノ四近數ニ付テ眞ナル樣ニ $A$、$B$、$C$、$D$、ノ値ハ撰定スベシ、乃チ $\frac{a+adx-acx^2}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ガ $p_n$ ナルベシ

同理ニテ $q_n$ ハ $\dfrac{b+(bd+c)x-acx^3}{1-(a+c+bd)x^2+acx^4}$ ノ展開ニ於ケル $x^{n-1}$ ノ係數ナルヿモ知ラルベシ、

## 第三百五十八條　連分數ノ收斂 (Convergency of Continued Fractions.)

連分數ノ元素限ナク連續シタルモノナル時ハ其ノ收斂ナリヤ否ヤヲ定ムルヿ肝要ナルベシ、連分數ノ第 $n$ 近數ガ知ラルヽ塲合ニハ既ニ研究シ置ケル法則ヲ用ヰルヿヲ得ベキモ第 $n$ 近數ヲ索ムル能ハザルヿ屢々アリ

連分數 $\dfrac{a_1}{b_1+}\dfrac{a_2}{b_2+}\dfrac{a_3}{b_3+}\cdots$ ニ於テハ第三百五十四條ノ如クニシテ容易ニ證明サルヽ如ク

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots a^n}{q_{n-1}q_n}$$

コレニ因リテ、

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_1}{q_1}-\frac{a_1a_2}{q_1q_2}+\cdots+(-1)^n\frac{a_1a_2\cdots a_n}{q_{n-1}q_n}$$

今文字ハスベテ正ノ量ヲ表ハスモノト假定セバ、コノ右邊ニ在ル級數ノ項ハ、一ツ置キニ正ト負トニナレリ、又各項ハ其前項ヨリモ小ナリ、如何ニトイフニ、$q_r=b_rq_{r-1}+a_rq_{r-2}$ ナルヲ以テ第 $r$ 項ノ其前項ニ對スル比 $\dfrac{a_rq_{r-2}}{q_r}$ ハ一ヨリモ小ナルベケレバナリ、

是ニヨリテ、此級數從ヒテ亦此連分數ハ、其第 $n$ 項ガ、$n$ ノ限ナク增大スルニ從ヒテ限ナク減小スル時ニハ收斂ナリ、

$b_nb_{n-1}:a_n$ トイフ比モシ、$n$ ノ總ベテノ値ニ付キテ有限ナランニハ、常ニコノ收斂ナル爲メノ要件ニ適合スルヿヲ證明スルヲ得ベシ、(トドハンタア氏著代數學第七百八十三條)

如何ニトイフニ、$b_nb_{n-1}$ 常ニ $ka_n$ ($k$ ハ或ル有限量)ヨリモ大ナリトセバ、

$$u_n=\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}{q_{n-1}q_n}=\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{q_{n-1}\left(q_{n-2}+\dfrac{b_n}{a_n}q_{n-1}\right)}$$

然ルニ

$$\frac{b_n}{a_n}q_{n-1}>\frac{k}{b_{n-1}}q_{n-1},\quad \text{即チ}\quad >\frac{k}{b_{n-1}}(b_{n-1}q_{n-2}+a_{n-1}q_{n-3})>kq_{n-2}.$$

因リテ

$$u_n<\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}(1+k)}.$$

因リテ

$$u_n<\frac{a_1a_2}{q_1q_2(1+k)^{n-2}}$$

然ルニ $k$ ハ有限ナルヲ以テ $(1+k)^{n-2}$ ハ $n$ ト倶ニ限ナク增大ス、是ニ因リテ、$n$ 限ナク增大スル時ハ、$u_n$ ハ限ナク減小スベシ、

コノ故ニ次ノ定理アリ、

**定理**　諸文字ミナ正量ヲ表ハスモノトセバ無窮連分數 $\dfrac{a_1}{b_1+}\dfrac{a_2}{b_2+}\dfrac{a^3}{b_3+}\cdots$ ハ、$b_nb_{n-1}:a_n$ トイフ

比モシ常ニ或ル一定ノ有限量ヨリ大ナラバ收斂ナリ、

注意　$a$、$b$、$c$、…ヲ正ノ整數トセバ　$a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots$ノ形チノ無窮連分數ハ何レモ收斂ナリ、

**第三百五十九條**　次條以下ノ五條ニ於テハ、連分數ハ總ベテ　$a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots$ノ形チノモノニテ、而モ$a$、$b$、$c$、…ハ正ノ整數ト假定セン、

此形チノ連分數ニハ二様ノ大便益アリ、ソハ各近數ノ已約分數タルヿ一ナリ、任意ノ近數ト眞ノ値トノ差、容易ニ視察ニテ見ルヿヲ得ルヿ二ナリ.

**第三百六十條**　各單循環連分數ハ、有理ノ係數ヲ有スル所ノ二次方程式ノ一根ナリ、而シテ其ノ兩根ハ正負ノ符號ヲ異ニシ、且ツ一根ハ1ヨリ大ニ、他ノ一根ハ一ヨリ小ナルモノナリ、又ソノ負號ヲ有スル所ノ一根ノ逆數ト同ジ商ヲバ倒ノ順序ニ有スル所ノ連分數トハ、大サ相等シ、

サテ其連分數ヲ　$x=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\frac{1}{+k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$トシ、

其第1循環部(Period.)ノ最後ノ二近數ヲ$\frac{P'}{Q'}$、$\frac{P}{Q}$トセヨ、然ルトキハ、

第三百五十二條ニヨリテ　$x=\frac{xP+P'}{xQ+Q'}$　$\therefore\ x^2Q+x(Q'-P)-P'=0$　………(i).



サテ(i)ノ兩根ハ分明ニ正負ヲ相異ニス、而シテ其ノ正ナル方ガ、此連分數ノ値ナリ、

第三百五十四條ナル〔例1〕ニ由リテ、

$$\frac{P}{P'}=l+\frac{1}{k+}\cdots\frac{1}{+b+}\frac{1}{a};\quad \frac{Q}{Q'}=l+\frac{1}{k+}\cdots\frac{1}{+b}.$$

是ヲ以テ、

$y=l+\frac{1}{k+}\cdots\frac{1}{+a+}\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\cdots$トセバ、　$y=\frac{Py+Q}{P'y+Q'}$.

$$\therefore\ y^2P'+y(Q'-P)-Q=0.\ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}).$$

(ii)ノ兩根ハ明白ニ正負ヲ相異ニス、而シテ其ノ正ノ根ハ連分數　$l+\frac{1}{k+}\cdots\frac{1}{+a+}\frac{1}{l+}\cdots$ノ値タリ、

(i)及(ii)ニ因リテ觀レバ、(ii)ノ根ノ正ナル方ト、(i)ノ根ノ負ナル方ノ逆數トハ、純値ヲ等シクスルヿヲ知ル、此故ニ(i)ノ根ノ負ナル方ノ逆數ハ　$-\left(l+\frac{1}{k+}\cdots\frac{1}{+a+}\frac{1}{l+}\cdots\right)$ナリ、

(i)ノ根モ、(ii)ノ根モ、其ノ正ナル方ハ倶ニ1ヨリ大ナルヿ、視察ニテ明カナリ、故ニ(i)ノ負ナル方ノ一根ハ1ヨリモ小ナラザルベカラズ、

連分數　$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\frac{1}{+l+}\frac{1}{a+}\cdots$ハ、別ニ吟味スルニ及バズ、如何ニトイフニ、唯$x$ヲ$\frac{1}{x}$

ニ變シ、$y$ヲ$\frac{1}{y}$ニ變ズレバ前ト同ジ場合ニナレバナリ斯クノ如クナルヲ以テ $\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots + \frac{1}{k+}\ \frac{1}{l+}\ \frac{1}{a+}\cdots$ ハ二次方程式 $P'x^2-(Q'-P)x-Q=0$ ノ根ノ正ナル方ニ等シク又ソノ負ナル方ノ一根ハ $-\left\{l+\frac{1}{k+}\cdots\cdots+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{a}\right\}$ ナリ、

是ニ因リテ、マタ前ノ如クニ、此ノ$x$ニ付キテノ二次方程式ノ一根ハ1ヨリモ大ニシテ他ノ一根ハ1ヨリモ小ナリ、

第三百六十一條　定理　循環セザル元素二箇以上ヲ有セル混循環連分數ハ、何レモ有理ノ係數ヲ有シ且ツ同號ノ兩根ヲ有スル所ノ二次方程式ノ一根ナリ、

其連分數ヲ

$$x=a+\frac{1}{b+}\cdots\cdots+\frac{1}{k+}\ \frac{1}{\alpha+}\ \frac{1}{\beta+}\cdots\cdots+\frac{1}{\mu+}\ \frac{1}{\nu+}\ \frac{1}{\alpha+}\ \frac{1}{\beta+}\cdots\cdots$$

トシ、且又

$$y=\alpha+\frac{1}{\beta+}\cdots\cdots+\frac{1}{\mu+}\ \frac{1}{\nu+}\ \frac{1}{\alpha+}\ \frac{1}{\beta+}\cdots\cdots$$

ト置クベシ、

サテ循環セザル部分ノ最後ノ二近數ヲ $\frac{A'}{B'}$ 及 $\frac{A}{B}$ トスル時ハ、

$$x=\frac{yA+A'}{yB+B'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i}).$$

又、$y$ト置ケル連分數ノ第一循環部ノ最後ノ二近數ヲ $\frac{P'}{Q'}$ 及 $\frac{P}{Q}$ トスル時ハ





$$y=\frac{yP+P'}{yQ+Q'}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii}).$$

(i)及(ii)ノ兩方程式ヨリ、$y$ヲ逐ヒ出シナバ、有理ノ係數ヲ有セル、$x$ニ付キテ二次ノ方程式ガ出デ來ベキヿ分明ナリ、

今モシ(ii)ノ根ノ正ナル方ヲ(i)ニ入レ換フレバ、$x$ノ一正値ヲ得ベク、而シテ其ハ與ヘラレタル連分數ノ現實ノ値ナルベキヿモ分明ナリ、

次ニ又、前條ニ由リテ、$\frac{1}{y}$ノ負値ハ $-\left\{\nu+\frac{1}{\mu+}\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha}\right\}$ ナリ、今コノ値ヲ(i)ニ入レ換フレバ、

$$x=a+\frac{1}{b+}\cdots\cdots+\frac{1}{k-\nu-}\ \frac{1}{\mu+}\cdots\cdots$$

ヲ得、サテ此ノ正量ナルヿヲ證明セザルベカラズ、

第一ニ、$k$モシ$\nu$ヨリモ大ナラバ、此事アルハ明白ナリ、第二ニ$k$モシ$\nu$ヨリモ小ナラバ、

$$\frac{1}{k-\nu-}\ \frac{1}{\mu+}\cdots\cdots$$

ハ負ニシテ、且ツ其純値ハ1ヨリモ小ナリ、此故ニ、$k$ハ前ニ少クモ一元素ダニ有ラバ、$x$ハ正ナリ、最後ニ$k$ト$\nu$ト相等シキ場合ナレドモ、コノ場合ハ成リ立チ難シ、如何ニトイフニ此ノ二ツガ相等シカランニハ循環スル部分ハ$k$ヲ以テ始マリテ、$\alpha$ヲ以テハ始マラヌヿトナレバ

ナリ、以上ノ如クナルヲ以テ、$x$ノ値ハ如何ナル場合ニモ倶ニ正ナルヿヲ知ルベシ、

(本條及前條マタ第三百六十五條ハ、Nouvelles Annales de Mathematiques 第一帙ニ出デタル Gerono 氏ノ論文ヨリ取レルモノナリ)

## 二次ノ不盡根數ヲ連分數ニ直ホスヿ

(Reduction of Quadratic Surds to Continued Fractions.)

**第三百六十二條**　マヅ二次ノ不盡根數ハ、元素ノ數ニ定限アル連分數ニハ等シキヿ能ハズ、是レ斯カル連分數ハ、何レモ通度シ得ベキ分母ト分子トヨリ成レル、通常ノ分數ニ直スヿヲ得ルニテ明カナリ、次ニ二次ノ不盡根數ハ循環連分數ノ形チ $a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots$ ($a$、$b$、$c$、…ハ正ノ整數トス)ナルモノニ直スヿヲ得トイフモ證明サルベシ、其仕方ニ至リテハ、須ク次ノ例ニ由リテ悟ルベシ、

〔例〕$\sqrt{8}$ヲ連分數ニ直スベシ、

$\sqrt{8}$ヨリ小ナル、且コレニ最近ノ整數ハ2ナリ、乃チ、

$$\sqrt{8}=2+\sqrt{8}-2=2+\frac{(\sqrt{8}-2)(\sqrt{8}+2)}{\sqrt{8}+2}=2+\frac{4}{\sqrt{8}+2}=2+\frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}}.$$

$\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ヨリ小ナル、且コレニ最近ノ整數ハ1ナリ、乃チ、



$$\frac{\sqrt{8}+2}{4}=1+\frac{\sqrt{8}+2}{4}-1=1+\frac{\sqrt{8}-2}{4}=1+\frac{4}{4(\sqrt{8}+2)}=1+\frac{1}{\sqrt{8}+2}.$$

$\sqrt{8}+2$ヨリ小ナル、且コレニ最近ノ整數ハ4ナリ、乃チ、

$$\sqrt{8}+2=4+\sqrt{8}-2=4+\frac{4}{\sqrt{8}+2}=4+\frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}}.$$

サテ斯ク $\frac{\sqrt{8}+2}{4}$ 出來リタレバ、最早前ト同樣ノ手續ヲ繰返ヘサンノミ、乃チ、

$$\sqrt{8}=2+\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots\cdots$$

斯ク、$\sqrt{8}$ニ等シトイフ此連分數ハ、循環連分數ニシテ、循環セヌ元素一ツアリ、而シテ此ノ循環セヌ元素ハ、循環スル部分ノ最後ノ部分商ノ半ナルヲ觀ル、此事タルヤ、後ニ證明スベキガ如ク何レノ二次不盡根數ニ付キテモアルヿトス、

**第三百六十三條**　是ヨリ、二次ノ不盡根數ヲ連分數ニ直ス公通ノ仕方ヲ示サントス、

$\sqrt{N}$ヲ二次ノ不盡根トシ、$\sqrt{N}$ヨリモ小ナル且コレニ最近ノ整數ヲ$a$トセン、然ルトキハ、

$$\sqrt{N}=a+\sqrt{N}-a=a+\frac{N-a^2}{\sqrt{N}+a}=a+\frac{1}{\frac{\sqrt{N}+a}{r_1}}.\quad 但シ\quad r_1=N-a^2.$$

サテ $1>\sqrt{N}-a>0$ ナルヲ以テ、$\dfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}>1$ ナルヲ知ル、乃チ $b$ ヲ以テ $\dfrac{\sqrt{N}+a}{r_1}$ ヨリ小ナル且コレニ最近ノ整數トセバ、

$$\frac{\sqrt{N}+a}{r_1}=b+\frac{\sqrt{N}-(br_1-a)}{r_1}=b+\frac{N-(br_1-a)^2}{r_1\{\sqrt{N}+(br_1-a)\}}=b+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}}$$

但シ、$a_2=br_1-a$；$r_2=\dfrac{N-a_2^2}{r_1}$.

サテ前ノ如クニ、$\dfrac{\sqrt{N}+a_2}{r^2}>1$ ナルベシ而シテ $\dfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ ニ最近ノ、且コレヨリモ小ナル整數ヲ $c$ トセバ、

$$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=c+\frac{\sqrt{N}-(cr_2-a_2)}{r_2}=c+\frac{N-(cr_2-a_2)^2}{r_2\{\sqrt{N}+cr_2-a_2\}}=c+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}}.$$

但シ、$a_3=cr_2-a_2$；$r_3=\dfrac{N-a_3^2}{r_2}$.

此仕方ハ、意ノ儘ニ、イヅコマデモ續クルコヲ得ベシ斯クシテ $\sqrt{N}=a+\dfrac{1}{b+}\,\dfrac{1}{c+}\,\dfrac{1}{d+}\cdots\cdots$ ヲ得ベシ、

**第三百六十四條**　二次ノ不盡根數ハ何レモ循環連分數ニ等シトイフ證明、



此證明ヲ爲スニハ、先ヅ第一ニ前條ニ於テ $a$、$a_2$、$a_3$、…、$r_1$、$r_2$、$r_3$、…ト名ツケタル諸量ノ悉ク正ノ整數ナルコヲ證明スルヲ要ス、

サテNハ正ノ整數ナルコ、及ビ $a$、$b$、$c$、$d$、…モ悉ク正ノ整數ナルコハ既ニ知レテアルコナリ、

又、左ノ如キ關係モアリ、

$$r_1=N-a^2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)};$$

$$a_2=br_1-a,\quad r_1r_2=N-a_2^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)};$$

$$a_3=cr_2-a_2,\quad r_2r_3=N-a_3^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iii)};$$

$$a_4=dr_3-a_3,\quad r_3r_4=N-a_4^2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(iv)};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

サテ、(i)ニ因リテ觀レバ、$r_1$ ノ整數ナルコハ明カナリ、

又、(ii)ニ因リテ、$r_2=\dfrac{N-(br_1-a)^2}{r_1}=1+2ab-b^2r_1$ ナリ、是レ $N-a^2=r_1$ ナルニ因ル、斯クノ如ク、$a_2=br_1-a$，$r_2=1+2ab-b^2r_1$ ニシテ、且ツ $r_1$ ハ整數ナルヲ以テ、$a_2$ モ $r_2$ モ整數ナルコヲ知ルベシ、

同ジ樣ニ又、(iii)ニ因リテ、$a_3=cr_2-a_2$，$r_3=1+2a_2c-c^2r_2$ ナリ、且ツ $a_2$ 及 $r_2$ ハ倶ニ整數ナルヲ以テ、$a_3$ 及 $r_3$ ノ整數ナルコヲ知ル、

又、同ジ樣ニ、(iv)ニ因リテ、$a_4=dr_3-a_3$，$r_4=1+2a_3d-d^2r_3$ ナリ、且ツ $a_3$ 及 $r_3$ ハ整數ナルヲ以テ

$a_4$ モ $r_4$ モ整數ナルヿヲ知ルベシ、

以下モ次第ニ斯クノ如クニシテ、$a_n$ 及 $r_n$ ハ、$n$ ノ値ニ拘ハラズ、恒ニ整數ナルヿヲ知ルベシ、

次ニハ $a_n$ モ $r_n$ モ、$n$ ノ値ニ拘ハラズ、恒ニ正量ナルヿヲ證明セザルベカラズ、

サテ、$a$、$b$、$c$、……ハ、夫々ニ、$\sqrt{N}$, $\frac{\sqrt{N}+a}{r_1}$, $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$, …ヨリ、小ナル且ツ最近ナル正整數ナルヿハ、既ニ知レテアレバ、$\sqrt{N}-a$, $\sqrt{N}-a_2$, $\sqrt{N}-a_3$, …ノ何レモ正ナルヤ明カナリ、從ヒテ又 $N-a^2$, $N-a_2^2$, $N-a_3^2$, … 何レモ正ナルヤ明カナリ、即チ $r_1$、$r_2$、$r_3$、…ハ、悉ク正ナルナリ、

次ニ、$b$ ハ $\frac{\sqrt{N}-a}{r_1}$ ニ最近ハ、且ツ之ヨリモ小ナル整數ナルヲ以テ、$\sqrt{N}+a<br_1+r_1$ ナルヿヲ知ル、而シテ $a<br_1$ ナリ、如何ニトイフニ、若シ $a\geqq br_1$ ナラバ、$\sqrt{N}<r_1$ ナラザルベカラズ、從ヒテ $a<r_1$ ナルベシ、然ルニ $r_1$ ハ正、$b$ ハ正整數ナレバ、又 $a<br_1$ ナルベシ即チ假定ニ反ス、斯ク $a\geqq br_1$ トハ假定スルヿ能ハズ、故ニ $a<br_1$ ナラザルベカラズ、是ニ因リテ $(br_1-a)$ 即チ $a_2$ ハ正ナリ、

次ニ、$c$ ハ $\frac{\sqrt{N}+r_2}{r_2}$ ニ最近キ、且コレヨリモ小ナル整數ナルヲ以テ、$\sqrt{N}+a_2<cr_2+r_2$ ナルヿヲ知ル、而シテ $a_2<cr_2$ ナリ、如何ニトイフニ、若シ $a_2\geqq cr_2$ ト假定セバ、$\sqrt{N}>r_2$ ナラザルベカラズ、從ヒテ $a_2<r_2$ ナルベシ、然ルニ $r_2$ ハ正、$c$ ハ正整數ナレバ、又 $a_2<cr_2$ ナルベシ、即チ假定ニ反ス、斯ク $a_2\geqq cr_2$ トハ假定スルヿ能ハズ、故ニ、$a_2<cr_2$ ナラザルベカラズ、是ニ因リテ



$a_2<cr_2$ 即チ $a_3$ ハ正ナリ、

以下モ次第ニ斯クノ如クニシテ、$a_n$ ハ、$n$ ノ値ニ拘ハラズ、恒ニ正ナルヿヲ知ルベシ、

サテ、$r_1$、$r_2$、…、$a$ $a^2$…… ノ總ベテ正ノ整數ナルヿヲ證明シタレバ、$r_n r_{n-1}=N-a_n^2$ トイフ關係ニ因リテ、$a_n^2<N$ ナルヿヲ知ル、乃チ $a_n \ngtr a$ ナリ、是ニヨリテ、$a_n$ ノ有スルヿヲ得ル値ハ、1、2、…、$a$ ニ外ナラザルナリ、

然ルニ又、$a_n+a_{n+1}=k.r_n$ トイフ關係アリ、且 $k$ ハ正ノ整數ナルヲ以テ、$r_n$ ハ $2a$ ヨリハ大ナルヿ能ハザルヲ知ル、

是ニ因リテ、$\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ナル式ノ値ハ、$2a\times a$ 通リヨリ多カルヿ能ハズ、故ニ多クモ $2a^2$ ダケノ商アリタル后ニハ循環ガ始マラザルベカラズ、

**第三百六十五條　定理**　二次ノ不盡根ハ何レモ循環セヌ元素一箇ヲ有スル所ノ循環連分數ニ直スヿヲ得、ソノ循環スル所ノ商ノ最後ナルハ、循環セヌ商ノ二倍ナリ、又循環スル所ノ商ハ、最後ノ元素ヲ除ケバ後ヘ讀ムモ前ヘ讀ムモ全ク相同ジ、

$\sqrt{N}$ ヲ二次ノ不盡根トセヨ、然ル時ハ前條ニ由リテ $\sqrt{N}$ ハ循環連分數ニ等シキヿヲ知ル、且ツ又循環連分數ハ有理ノ係數ヲ有スル所ノ二次方程式ノ一根ニ等シキヿモ知レテアリ、而シテ有理ノ係數ヲ有シ、$x$ ニ付キテ二次ノ方程式ノ一根、$\sqrt{N}$ ナルモノハ、唯 $x^2-N=0$ アルノミ、$x^2-N=0$ ノ根ハ純値倶ニ1ヨリモ大ニシテ、正負ノ符號ハ相異ル、故ニ第三百六十條及第三百

六十一條ニ由リテ、$\sqrt{N}$ ニ等シキ連分數ハ、循環セザル元素壹箇ヲ有スル所ノ混循環連分數ナラザルベカラズ、

是ニ因リテ、　$\sqrt{N}=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$.

即チ、　$\sqrt{N}-a=\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$

然ルニ　$\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots$ ハ有理ノ係數ヲ有スル所ノ二次方程式ノ根ノ正ナル方ナリ、而シテ此ノ正ナル根ハ $(\sqrt{N}-a)$ ナレバ、負ナル方ハ $(-\sqrt{N}-a)$ ナラザルベカラズ、斯クノ如クナレバ、第三百六十條ニ因リテ、

$$\frac{1}{\sqrt{N}+a}=\frac{1}{l+}\frac{1}{k+}\frac{1}{h+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \sqrt{N}+a=l+\frac{1}{k+}\frac{1}{h+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots$$

是ニ因リテ、　$l-a+\frac{1}{k+}\frac{1}{h+}\cdots\cdots\frac{1}{+c+}\frac{1}{b+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots$

$$=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\cdots\cdots\frac{1}{+h+}\frac{1}{k+}\frac{1}{l+}\cdots\cdots$$

是ニ因リテ、　$l-a=a,\ k=b,\ h=c,\cdots\cdots$ ナルヿ、容易ニ知ラル、

## 連分數トシテ表ハシタル級數
(Series expressed as Continued Fractions.)

**第三百六十六條**　級數ハ何レモ連分數トシテ表ハスヿヲ得トイフ證明、

サテ級數ヲ　$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ ……………………(i),

トスル時ハ、此級數ノ $n$ 項ノ和ハ連分數

$$\frac{u_1}{1-}\ \frac{u_2}{u_1+u_2-}\ \frac{u_1u_3}{u_2+u_3-}\ \frac{u_2u_4}{u_3+u_4-}\cdots\cdots-\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n-}\cdots\cdots\ \cdots\cdots\text{(ii)}.$$

ノ第 $n$ 近數ニ等シ

是ハ、次ノ如クニ歸納法ニヨリテ證明スルヿヲ得ベシ、

(i)ノ首項以下 $n$ 項ノ和ハ(ii)ノ第 $n$ 近數ニ等シト假定セヨ、扨、イマ一ツ項ヲ取ルニハ、$u_n$ ヲバ $(u_n+u_{n+1})$ ニ變ズレバ足レリ、而シテ斯ク $u_n$ ヲバ $(u_n+u_{n+1})$ ニ變ズル時ハ $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n}$ ハ

$\frac{u_{n-2}(u_n+u_{n+1})}{u_{n-1}+(u_n+u_{n+1})}$、即チ　$\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n-}\ \frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n+u_{n+1}}$ トナル、

斯クノ如ク、(i)ノ$n$項ノ和モシ(ii)ノ第$n$近數ニ等シカラバ必ズ又(i)ノ$(n+1)$項ノ和ハ(ii)ノ第$(n+1)$近數ニ等シカルベシ、

然ルニ、$n$ノ1ナル片ニモ、2ナル片ニモ、3ナルトキニモ、本定理ノ眞ナルヿ、至リテ視易キヲ以テ、$n$ノ4ナル片ニモ亦眞ナラザルベカラズ既ニ$n$ノ4ナル片ニ眞ナルヲ以テ$n$ノ5ナル片ニモ亦眞ナラザルベカラズ、次第ニ斯ノ如クニ推論スレバ遂ニ其ノ$n$ノ如何ナル値ニ付キテモ眞ナルヿヲ知ルベシ、

斯ク、$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n=\frac{u_1}{1-}\,\frac{u_2}{u_1+u_2-}\,\frac{u_1u_3}{u_2+u_3-}\,\frac{u_2u_4}{u_3+u_4-}\cdots\cdots-\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}+u_n}$、$\cdots\cdots\cdots$[A].

マタ全ク同シ仕方ニテ證明スルヿヲ得ベキハ次ノ關係ナリ、

$$u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}u_n=\frac{u_1}{1+}\,\frac{u_2}{u_1-u_2+}\,\frac{u_1u_3}{u_2-u_3+}\,\frac{u_2u_4}{u_3-u_4+}\cdots\cdots+\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1}-u_n},\ \cdots\cdots[B].$$

此[B]ノ範式ハ、[A]カラ出ダスヿモ爲シ得ベシ、即チ[A]ノ一ツ置キノ項ノ符號ヲ變ズルナリ

(範式[A]ハオイレル氏が得タルモノナリ)

## 第三百六十七條

次ニ示ス場合ハ格別ニ有益ノモノナリ

$$\frac{a_1}{b_1}\pm\frac{a_1a_2}{b_1b_2}+\frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}\pm\cdots+(\pm1)^{n-1}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{b_1b_2\cdots b_n}=\frac{a_1}{b_1\mp}\,\frac{b_1a_2}{b_2\mp a_2\mp}\,\frac{b_2a_3}{b_3\pm a_3\mp}\cdots\frac{b_{n-1}a_n}{\pm b_n\pm a_n}\quad[C].$$

但シ、複號ハ、上號ナラバ始終上號ノミヲ取ルベク、下號ナラバ終始下號ノミヲ取ルベキモノトス、コノ[C]ノ範式ハProceedings of the London Math. Society. 第五冊ニ於テグレエシヤア氏ノ與ヘタルモノナリ)

又、

$$\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\pm\frac{1}{a_4}+\cdots\cdots+(\pm1)^{n-1}\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a_1\mp}\,\frac{a_1^2}{a_2\pm a_1\mp}\,\frac{a_2^2}{a_3\pm a_2\mp}\cdots\frac{a_{n-1}^2}{a_n\pm a_{n-1}}.\ [D].$$

但シ、複號ハ、上號ナラバ終結上號ノミヲ取ルベク、下號ナラバ終始下號ノミヲ取ルベキモノトス、

コノ[C]及[D]ハ、前條ト同ジク歸納法ニテ證明スルヿヲ得ベシ、

例ヘバ歸納法ニテ[C]ヲ證明スルニハ下ノ如クス、

マヅ、$n$ガ2ナル片ニ本定理ノ眞ナルハ、觀察ニテ明白ナリ、

次ニ、[C]ハ$n$ノ或ル特別ノ値ニ付キテハ眞ナリト假定セヨ、然ル片ハ其次ノソレヨリモ大ナル値ニ付キテモ亦必ズ眞ナルベシ、如何ニトイフニ、眞リト假定シタル場合ヨリモ、今一ツ多クノ項ヲ取リテ和ヲ索メヨ、即チ$\frac{a_n}{b_n}$ノ代ハリニ$\frac{a_n}{b_n}\pm\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}$ヲ取レバヨシ、是ニ因リテ、$\frac{b_{n-1}a_n}{b_n\pm a_n}$ハ變ジテ

$$\frac{b_{n-1}\left(\frac{a_n}{b_n}\pm\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}\right)}{1\pm\left(\frac{a_n}{b_n}\pm\frac{a_na_{n+1}}{b_nb_{n+1}}\right)}$$

トナルベシ、即チ是ハ$\frac{b_{n-1}a_nb_na_{n+1}}{b_n\pm a_n\mp b_{n+1}\pm a_{n+1}}$ニ等シキヿ容易ニ

觀ルコトヲ得、是[C]モシ$n$ノ或ル値ニ付キテ眞ナラバ、其値ヨリ大ナル且ソレニ最近ノ値ニ付キテモ亦、[C]ハ眞ナルベシ、トイフコトヲ示スモノナリ、

然ルニ、$n$ノ2ナル時ニ[C]ハ眞ナレバ、是ニヨリテ、$n$ノ3ナル時ニモ眞ナラザルベカラズ、既ニ$n$ノ3ナル時ニ眞ナレバ、4ナル時ニモ眞ナラザルベカラズ、次第ニ斯クノ如クニ推論セバ際限ヲ見ザルコトニテ、遂ニ$n$ノ如何ナル値ニ付キテモ眞ナリトイフコトヲ斷定シ得ベキナリ、

次ニ[C]ノ特別ナル場合ヲ示サン、

$$a_1\pm a_1a_2+a_1a_2a_3\pm a_1a_2a_3a_4+\cdots=\frac{a_1}{1\mp}\,\frac{a_2}{1\pm a_2\mp}\,\frac{a_1a_3}{1\pm a_3\mp}\,\frac{a_2a_4}{1\pm a_4\mp}\cdots \qquad [E].$$

$$\frac{1}{a_1}\pm\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a_2a_3}\pm\frac{1}{a_1a_2a_3a_4}+\cdots=\frac{1}{a_1\mp}\,\frac{a_1}{a_2\pm1\mp}\,\frac{a_2}{a_3\pm1\mp}\,\frac{a_3}{a_4\pm1\mp}\cdots\cdots \qquad [F].$$

〔例一〕 $\frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\cdots$（限ナク續ク）$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$（限ナク續ク）、〔ブロウンケル氏〕

コハ[D]ニ於テ$a_1$ヲ1、$a_2$ヲ3、$a_3$ヲ5、……ト置キテ知ルベシ、

〔例二〕 $\frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\cdots$（限ナク續ク）$=\log_e 2.$ 〔オイレル氏〕

コハ[D]ニ於テ$a_1$ヲ1、$a_2$ヲ2、$a_3$ヲ3、……ト置キテ知ルベシ、

〔例三〕 無窮連分數 $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{2+}\,\frac{3}{3+}\,\frac{4}{4+}\cdots\cdots$ ノ値如何、

[F]ニヨリテ、$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{2+}\,\frac{3}{3+}\cdots$（限ナク續ク）$=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\cdots$（限ナク續ク）$=1-e^{-1}$

〔例四〕 $\frac{1}{3+}\,\frac{3}{2+}\,\frac{3}{2+}\cdots$ ノ第$n$近數如何、

[F]ニヨリテ、$\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3}+\frac{1}{3.3.3}-\cdots=\frac{1}{3+}\,\frac{3}{2+}\,\frac{3}{2+}\cdots$

是ニヨリテ、第$n$近數ハ $\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ ナリ、

〔例五〕 $1+\frac{r}{1-}\,\frac{r}{r+2-}\,\frac{2r}{r+3-}\,\frac{3r}{r+4-}\cdots=e^r,$

[C]ニヨリテ、

$$e^r=1+\frac{r}{1}+\frac{r.r}{1.2}+\frac{r.r.r}{1.2.3.}+\frac{r.r.r.r}{1.2.3.4}+\cdots$$

$$=1+\frac{r}{1-}\,\frac{r}{r+2-}\,\frac{2r}{r+3-}\,\frac{3r}{r+4-}\cdots$$

## 第三十七例題集

第一、次ノ二次不盡根數ト同値ノ連分數ヲ索ムベシ

(1) $\sqrt{17}$, (2) $\sqrt{140}$, (3) $\sqrt{33}$, (4) $\sqrt{43}$, (5) $\sqrt{(a^2+1)}$, (6) $\sqrt{(a^2+2a)}$.

第二、$a$ ハ任意ノ値ノモノ、$b$ ハ $(N-a^2)$ ニ等シキモノトセバ、$\sqrt{N}=a+\frac{b}{2a+}\,\frac{b}{2a+}\cdots$ ナルコトヲ證明スベシ、

第三、次ノ無窮連分數ノ値ヲ索ムベシ、

(i) $1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\cdots$

(ii) $1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\cdots$

(iii) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$

第四、無窮連分數 $\left(7+\frac{1}{14+}\,\frac{1}{14+}\cdots\right)$ ハ無窮連分數 $\left(1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots\right)$ ノ五倍ニ等シ、其證如何、

第五、$\left(\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{c+}\,\frac{1}{d+}\,\frac{1}{a+}\cdots\right)\left(d+\frac{1}{c+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{d+}\cdots\right)=\frac{b+d+bcd}{a+c+acb}$. ナルコトヲ證明スベシ。

第六、$x$ ヲシ無窮連分數 $\left(y+\frac{1}{2y+}\,\frac{1}{2y+}\cdots\right)$ ニ等シカラバ、$y$ ハ又無窮連分數 $\left(x-\frac{1}{2x-}\,\frac{1}{2x-}\cdots\right)$ ニ等シカルベシ、其證如何、

第七、無窮連分數 $\left(\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\cdots\right)$, $\left(\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2b+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2b+}\cdots\right)$, $\left(\frac{1}{3a+}\,\frac{1}{3b+}\,\frac{1}{3a+}\,\frac{1}{3b+}\cdots\right)$ ヲバ、夫々ニ、$x$、$y$、$z$ トセバ、$x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0$ ナルベシ、其證如何、

第八、$n$ ヲシ正整數ナラバ、$n=1+\frac{n^2-1^2}{3\ +}\,\frac{n^2-2^2}{5\ +}\,\frac{n^2-3^2}{7\ +}\cdots$

第九 $\frac{1+a^2+a^4+\cdots\cdots+a^{2n}}{a+a^3+a^5+\cdots\cdots+a^{2n-1}}=a+\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}\ \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}-}\cdots\cdots$ ($n$個ニ至ル) ナルコトヲ證明スベシ、

第十 $x=\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\cdots$, $y=\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\cdots$ トセバ、$bx-dy=a-c$ ナルベシ、其證如何、

第十一 $\left(a+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{1+}\cdots\right):\left(b+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{1+}\cdots\right)=1+a:1+b$. 此證如何、

第十二　$\frac{1}{3-}\,\frac{4}{3-}\,\frac{2}{3-}\,\frac{2}{3-}\cdots$ ノ第$n$近數ハ $\frac{2^n-1}{2^n+1}$ ナリ、其證如何、

第十三　$2+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$ ノ第$n$近數ハ $\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}$ ナリ、其證如何、

第十四　$\frac{1}{1-}\,\frac{2}{3-}\,\frac{2}{3-}\cdots$ ノ第$n$近數ハ $(2^n-1)$ ナリ、其證如何、

第十五　$\frac{1}{a+b-}\,\frac{ab}{a+b-}\,\frac{ab}{a+b-}\cdots$ ノ第$n$近數ハ $\frac{a^n-b^n}{a^{n+1}-b^{n+1}}$ ナリ、其證如何、

第十六　$\frac{2}{1-}\,\frac{3}{5-}\,\frac{8}{7-}\cdots\cdots\frac{r^2-1}{2r+1-}\cdots\cdots$ ノ第$n$近數ヲ索ムベシ、

第十七　$p_r=q_{r-1}$、$q_r=(r^2-1)p_{r-1}+2q_{r-1}$ トイフ規則ニヨリ作ラレタル分數、$\frac{p_1}{q_1}$、$\frac{p_2}{q_2}$、…ノ級數ニ於テ、$\frac{p_n}{q_n}$ ガ$n$限ナク大キクナルトキニ取ル極限ノ値ハ $\frac{1}{1+n}$ ナルコトヲ證明セヨ、

第十八　連分數 $\frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\cdots+\frac{a_n}{b_n+}\cdots$、ノ第$n$近數ノ第$(n\text{-}1)$近數ニ對スル比ハ、次ノ如クナルベシ、其證如何、$b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\cdots+\frac{a_3}{b_2}:b_n+\frac{a_n}{b_{n-1}+}\cdots+\frac{a_2}{b_1}$.

第十九　單循環連分數ノ第一循環部ノ終マデ取リテ得タル近數ヲ$y_1$トシ、第二循環部ノ終マ





デ取リタル近數ヲ$y_2$トシ、次第ニ斯クノ如クシ、且ツ$y_1$ノ直チニ前ニアル二近數ヲ$\frac{P}{Q}$、$\frac{P'}{Q'}$トセバ $y_n=\frac{Py_{n-1}+P'}{Qy_{n-1}+Q'}$ ナルベシ、其證如何、

第二十　$Z$ハ完全平方數ニアラザル任意ノ整數トシ、$\sqrt{Z}$ヲ變ジテ連分數

$$a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{c+}\cdots\cdots+\frac{1}{k+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{b+}\cdots\cdots$$

トナシ、第一第二…第$i$循環部（各循環部ハ$k$ヲ以テ終ルモノトス）ノ終マデ取リテ得タル近數ヲ$P_1$、$P_2$、…$P_i$ニテ表ハセバ、$\frac{P_i+\sqrt{Z}}{P_i-\sqrt{Z}}=\left(\frac{P_1+\sqrt{Z}}{P_1-\sqrt{Z}}\right)^i$ ナルベシ、其證明如何、

第廿一　連分數 $\frac{1}{a+a^{-1}-}\,\frac{1}{a+a^{-1}-}\,\frac{1}{a+a^{-1}-}\cdots$ ノ第$n$近數ヲ索メヨ、且ツ第$n$近數ノ、$n$限ナク增大スルトキノ極限値ハ、$a$ノ數値ガ1ヨリ小ナルト大ナルトニ從ヒテ夫々ニ$a$ナルカ、或ハ$a^{-1}$ナリ、其證如何、

第廿二　$\frac{1}{2+}\,\frac{2}{2+}\,\frac{3}{2+}\,\frac{3}{2+}\cdots$ ノ第$n$近數ハ $\frac{3}{8}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$ ナルコトヲ證明セヨ

第廿三　$e^{-x}=\frac{1}{1+}\,\frac{x}{1-x+}\,\frac{x}{2-x+}\,\frac{x}{3-x+}\cdots$（限ナク續ク）、其證如何、

第廿四　$\frac{x}{a}-\frac{x^2}{ab}+\frac{x^3}{abc}-\cdots=\frac{x}{a+}\,\frac{ax}{b-x+}\,\frac{bx}{c-x+}\cdots$（限ナク續ク）、其證如何、

第廿五　$\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{2}{3+}\frac{4}{5+}\frac{6}{7+}\cdots$(限リナク續ク)$=e^{-\frac{1}{2}}$. ヿノ證如何、

第廿六　$\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{3}{5+}\frac{6}{8+}\cdots+\frac{3(n-2)}{3n-4+}\cdots$(限ナク續ク). 其證如何、

第廿七　左ノ證明如何、

$$\frac{1}{3+}\frac{1^2.3^2}{5+}\frac{2^2.4^2}{7+}\frac{3^2.5^2}{9+}\cdots+\frac{(n-1)_2(n+1)_2}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}.$$

第廿八　$\frac{2}{1-}\frac{2}{9-}\frac{2}{1-}\frac{2}{9-}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ハ $6\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}$ ナリ、其證如何、

第廿九　$\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}\frac{1}{3-}\frac{4}{3-}\cdots$ ノ第 $n$ 近數ハ $\frac{6n-1+(-1)^n}{6n+7+(-1)^n}$ ナリ、其證如何

第三十　無窮連分數 $\frac{1^2}{3-}\frac{2^2}{5-}\frac{3^2}{7-}\cdots$ ハ 1 ニ等シ、其證如何、

第卅一　$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1.2}{3+}\frac{3.4}{3+}\frac{5.6}{3+}\cdots$(限ナク續ク)、其證如何、

第卅二　$1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2+}\frac{2.3}{1+}\frac{4.5}{1+}\frac{6.7}{1+}\cdots$(限ナク續ク)、其證如何



第卅三　$\frac{1}{4-}\frac{3.4}{9-}\frac{5.6}{13-}\frac{7.8}{17-}\frac{9.10}{21-}\cdots$(限リナク續ク)$=1$. 其證如何、

第卅四　$(1+x)^n=1+\frac{nx}{1-}\frac{(n-1)x}{2+(n-1)x-}\frac{2(n-2)x}{3+(n-2)x-}\frac{3(n-3)x}{4+(n-3)x-}\cdots$ 其證如何、

第卅五　$n$ 正ノ整數ナラバ、$2^n=1+\frac{n}{1-}\frac{n-1}{n+1-}\frac{2(n-2)}{n+1-}\frac{3(n-3)}{n+1-}\cdots-\frac{(n-1)1}{n+1}$. 其證如何、

第卅六　$\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a'}\right)\left(1+\frac{x}{a''}\right)\cdots=1+\frac{x}{a-}\frac{a(x+a)}{x+a+a'-}\frac{a'(x+a')}{x+a'+a''-}\cdots$ 其證如何、

第卅七　$\frac{1}{n-}\frac{n}{2n+1-}\frac{2n}{3n+1-}\cdots$(限ナク續ク)$=\frac{1}{n-1+}\frac{n}{2n-1+}\frac{2n}{3n-1+}\cdots$(限ナク續ク)、此證明如何、

# 第二十八編　整數論 (Theory of Numbers)

第三百六十八條　本編ニ於テ數トイフハ正ノ整數ノ謂ニシテ、割ルトイフハ其原來ノ意ナル剩餘ナク割リ盡スヿ即整除スル意ナリ又屢々 $p$ ノ倍數ヲ $M(p)$ ト書キ表ハスヿアルベシ、

定義　自身ト一トノミニテ割ラルル數ヲ素數 (Prime number 或ハ prime) ト稱ス、

自身ト一トノ外ノ數ニテモ割ルル數ヲ複素數 (Composite number) ト稱ス、

兩數ノ一ニヨリテノミ同時ニ割ラルヽ片ハ、之ヲ相互ニ素ナリトイヒ、又ソノ一數ハ他ノ一數ニ對シテ素ナリトモイフ、

## 第三百六十九條　エラトスゼニース氏ノ篩 (The Sieve of Eratosthenes.)

素數ハ次ノ仕方ニテ逐次索ムルヿヲ得ベシ、即コレエラトスゼニース氏ノ篩トイフ仕方ナリ、

1ヨリ始メテ、自然數ヲバ、入用ノ處マデ、次第ニ書キ列ヌベシ、即チ左ノ如シ、

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, |
| 11, | 12, | 13, | 14, | 15, | 16, | 17, | 18, | 19, | 20, |
| 21, | 22, | 23, | 24, | 25, | 26, | 27, | 28, | 29, | 30, |
| 31, | 32, | 33, | 34, | 35, | 36, | 37, | 38, | 39, | 40, |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

マヅ、第一ノ素數2ヲ取リ、2ノ後ノ數ニハ逐次ニ二ツ目毎ニ、其上ニ一點ヲ加フベシ、斯クスレバ2ノ倍數ニ悉ク點ヲ付クルヿトナル、

2ノ次ノ點ノ付カヌ數ハ3ナリ、コハ其儘ニ置キテ、3ノ後ノ數ニハ逐次ニ三ツ目毎ニ、其上ニ點ヲ加フベシ、斯クスレバ3ノ倍數ニ悉ク點ヲ付クルヿトナル、

3ノ次ノ點ノ付カヌ數ハ5ナリ、コハ其儘ニ置キテ、5ノ後ノ數ニハ、逐次ニ五ツ目毎ニ其上ニ點ヲ加フベシ、斯クスレバ、5ノ倍數ニ悉ク點ヲ付クルヿトナル、以下コレニ準フ

斯クノ如クスル片ハ、點ノ付カヌ數ハ皆素數ナルベシ、如何ニトイフニ、斯カル數ハ何レモ、一ノ外ノ夫自身ヨリ小サキ數ニテハ割レザレバナリ、

茲ニ注意スベキヿアリ、即チ或ル複素數ヲ二ツノ因數ノ積トシテ表ハス片ハ、其ノ一因數ハ本數ノ平方根ヨリモ小ニシテ、他ノ一因數ハ却ツテ之ヨリ大ナラザルベカラズ、但シ本數ガ完全平方ナル場合ニ限リテハ兩因數ハ共ニ其平方根ニ等シキヿヲ得、是ニ因リテ、複素數ハ何レモ其ノ平方根ヨリモ大ナラザル素數ニテ割ラルベキナリ、此故ニ、例ヘバ121ヨリモ小サキ素數ヲ索メンニハ、素數2、3、5、7ノ倍數ヲ右ニイヘルガ如キ仕方ニテ篩ヒ落スヿヲ要スルノミ、如何ニトイフニ、121ヨリ小サキ複素數ハ何レモ11ヨリ小サキ素數ニテ割ラルヽベケレバナリ、

## 第三百七十條　定理

素數ノ數ハ限ナク多シ、

如何ニトイフニ、モシ素數ノ數ヲ限アリトセンニハ、其ノ中ニ最大ナル一ツノ素數アルヿヲ要ス、今スベテノ素數中ノ最大ナルモノヲ$p$トセバ、$\underline{|p}$ハ$p$ニテモ、又$p$ヨリ小サキ何レノ素數ニテモ、割ラルルヿ明カナリ、是ニヨリテ$\underline{|p}+1$ハ$p$ニテモ割レズ、$p$ヨリ小サキ何レノ素數ニテモ割レザルベシ、此ノ故ニ$\underline{|p}+1$ハ或ハ、$p$ヨリモ大ナル素數ニテ割ルルモノカ、或ハ自身ガ既ニ$p$ヨリモ大ナル一ツノ素數ナルカ、何レカナルベシ、乃$p$ヨリモ大ナル素數アルヲ示スモノナリ、斯クノ如ク最大素數$p$ハ成立ツヿ能ハザルナリ、故ニ素數ノ數ハ限アルヿナシ、

〔例〕一ツトシテ素數ナラザル相連續シタル$n$箇ノ數ヲ索ムベシ、

棄ムル所ノ數ハ $\underline{|n+1}+r$ ナリ、爰ニ $r$ ハ $2,3,\ldots,(n+1)$ ノ中ノ何レカ一數ヲ表ハスモノトス、

**第三百七十一條　定理**　有理ノ整式ナル代數式ハ決シテ素數ノミヲ表ハス能ハズ、

如何ニトイフニ、モシ爲シ得ベクンバ、$a\pm bx\pm cx^2\pm dx^3\pm\cdots$ ナル式ハ $x$ ノ任意ノ整數値ト $a,b,c,\ldots$ ノ或ル一定ノ整數値トニ對シテ常ニ素數ヲ表ハスモノト假定セヨ、サテ此式ヲシテ零ニモアラズ一ニモアラザル、$p$ ナル値ヲ取ラシムル如キ任意ノ整數値例ヘバ $m$ ヲ $x$ ニ與フベシ、乃 $p=a\pm bm\pm cm^2\pm\cdots$ ナリ、次ニ $x$ ニ與フルニ $(m+np)$ ナル任意ノ値ヲ以テスベシ、但シ $n$ ハ任意ノ正整數ヲ表ハスモノトス、然ル𪜈ハ全式ノ値ハ左ノ如シ

$$a\pm b(m+np)\pm c(m+np)^2\pm\cdots=a\pm bm\pm cm^2\pm\cdots+M(p)=p+M(p).$$

是則、$p$ ノ倍數ニシテ素數ニアラズ、此事 $n$ ノ値ニ拘ハラズ然ルヿ故、$a\pm bx\pm cx^2\pm\cdots$ ヲシテ素數ナラザル値ヲ取ラシムル所ノ $x$ ノ値ハ限ナク多キヲ知ルベシ、斯クノ如クニ、此式ハ常ニ素數ヲ表ハスヿ能ハザルナリ、

右ノ定理ニ連類シタル次ノ範式ハ注意ノ價値アルモノナリ

(i)　$x^2+x+41$ ハ $x<40$ ナル𪜈ニ素數ヲ表ハス〔オイレル氏〕

(ii)　$x^2+x+17$ ハ $x<16$ ナル𪜈ニ素數ヲ表ハス〔バアロー氏〕

(iii)　$2x^2+29$ ハ $x<29$ ナル𪜈ニ素數ヲ表ハス〔バアロー氏〕

**第三百七十二條**　學生ハ既ニ算術ニ於テ數ノ因數ニ關スル種々ノ性質ヲ學ヒタルベシ、





而シテ此等ハ總テ次ノ定理ニ起因スルモノナリ、

**定理**　二ツノ因數ノ積ヲ割リ、且ソノ一因數ニ對シテ素ナル數ハ他ノ一因數ヲ割ルベシ、

如何ニトイフニ、今 $x$ ハ $ab$ ヲ割リ且 $a$ ニ對シテ素ナルモノト假定セヨ、サテ $a/x$ ヲ連分數ニ直シ、$p/q$ ヲ以テ $a/x$ ノ直前（スグマヘ）ニアル近數トスル𪜈ハ（第三百五十四條ノ第一ニヨリテ）$qa-px=\pm1$ ナリ、是ニヨリテ $qab-pxb=\pm b$ ナリ、偖 $qab$ ハ假定ニヨリテ $p$ ニテ割ルヽ故、$(qab-pxb)$ モ $p$ ニテ割レズンバアラズ、即 $b$ ハ $p$ ニテ割レズンバアラズ、

左ノ件々ハ右ノ定理ニ由リテ容易ニ推知シ得ベキモノナリ、

**第一**　數多ノ因數ノ積ヲ割ル素數ハ少クモ其一因數ヲ割ラザルベカラズ、

**第二**　$a^n$ ヲ割ル素數ハ $a$ ヲモ割ルベシ、

**第三**　$\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ ノ何レニ對シテモ素ナル數ハ其ノ積 $(\alpha\beta\gamma\cdots)$ ニ對シテモ亦素ナルベシ、

**第四**　$a$ モシ $b$ ニ對シテ素ナラバ $a^n$ ハ $b^m$ ニ對シテ素ナルベシ、

**第五**　數多ノ素數ニテ別々ニ割ルヽ數ハ夫等ノ素數ノ積ニテモ亦割ルヽベシ、

**第三百七十三條　定理**　複素數ハ何レモ素ナル因數ニ分解スルヿヲ得ベク、且ソノ分解ノ仕方ハ唯一ツニ限ル、

如何トイフニ、今一ツノ數 $N$ モシ素數ナラズンバ $N$ 及 $1$ ノ外ノ或ル數、例ヘバ $a$ ニテ割ルヽベシ、斯ク $N=ab$ ヲ得、茲ニ又 $a$ 及 $b$ モシ素數ナラズンバ、$a=cd$, $b=ef$ ヲ得ベク、從ヒテ $N=cdef$ ヲ得、斯クノ如クニ分解シテ行ク𪜈ハ、因數ハ逐次ニ小サクナルベキニ因リテ、終ニハ悉ク素ナ

ル因數ヲ得ルニ至ルベシ、乃Nヲ $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta\times\cdots$ ノ形チニ表ハシ得ベシ、茲ニ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ 皆素數ニテハアレド悉ク相異ナレルモノタルコトヲ要セズ此故ニ $N$ ヲ寧ロ $\alpha^p\beta^q\gamma^r\cdots$ ノ形チニ表ハスヲ可トス、但シ $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ ハ $N$ ノ因數ニシテ皆相異ナレル素數トス、

次ニ、一ツノ數ヲ素ナル因數ニ分解スル仕方ハ唯一ツニ限ルトイフコトヲ證明セン、

$N=abcd\cdots$ ニシテ其ノ $a,b,c,d,\cdots$ ハ悉ク素數ニシテ必ズシモ悉ク相異ナレルモノタルコトヲ要セザルモノト假定セヨ、又 $N=\alpha\beta\gamma\delta\cdots$ ニシテ、其ノ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ モ悉ク素數ニシテ亦悉ク相異ナレルモノタルコトヲ要セザルモノト假定セヨ、然ルトキハ

$$abcd\cdots=\alpha\beta\gamma\delta\cdots$$

ナリ、是ニ因リテ $a$ ハ $(\alpha\beta\gamma\delta\cdots)$ ヲ割ル、然ルニ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ ハ何レモ素ナルヲ以テ $a$ ハ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\cdots$ ノ何レトカ等シカラザルベカラズ、是ニ因リテ $a=\alpha$ トセヨ、乃 $bcd\cdots=\beta\gamma\delta\cdots$ コレニ因リテ矢張マタ前ノ如クニ $b$ ハ $\beta,\gamma,\delta,\cdots$ ノ何レカニ等シカラザルベカラズ、以下モ次第ニ斯クノ如クニシテ、終ニ素ナル因數 $a,b,c,\cdots$ ハ $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ ト同ジキコトヲ知ルベシ、

〔例〕 29645 ト 13689 ト 90508 トヲ素ナル因數ノ積トシテ表ハスベシ、

答 $5\times7^2\times11^2$, $3^4\times13^2$, $2^2\times11^3\times17$.

## 第三百七十四條

$\underline{|n}$ ニ含マレタル或ル素數ノ最高羃ヲ索ムル下

サテ $I\left(\frac{x}{y}\right)$ ト書キテ $x\div y$ ノ整數部ヲ表ハシ又 $a$ ヲ以テ任意ノ素數トスベシ、然ルトキハ $\underline{|n}$ ノ中ニ在ル因數ニシテ $a$ ニテ割ルヽモノハ $a,2a,3a,\cdots,I\left(\frac{n}{a}\right)a.$ ナルベシ、斯ク $\underline{|n}$ ノ中ニハ $a$ ニテ割ルヽ因數 $I\left(\frac{n}{a}\right)$ 箇ダケアルナリ、同ジ理ニテ $a^2$ ニテ割ルヽ因數ハ其ノ中ニ $I\left(\frac{n}{a^2}\right)$ 箇アルナリ、以下之ニ準フ、

是ニ因リテ、素數 $a$ ノ $\underline{|n}$ ノ中ニ含マレタル回數ハ $I\left(\frac{n}{a}\right)+I\left(\frac{n}{a^2}\right)+I\left(\frac{n}{a^3}\right)+\cdots$ ナリトス、

〔例一〕 $\underline{|50}$ ノ中ニ含マレタル2ノ最高羃ト7ノ最高羃トヲ索メヨ、

コヽニハ $I\left(\frac{50}{2}\right)=25$, $I\left(\frac{50}{2^2}\right)=12$, $I\left(\frac{50}{2^3}\right)=6$, $I\left(\frac{50}{2^4}\right)=3$, $I\left(\frac{50}{2^5}\right)=1.$ 是ニ因リテ $2^{25+12+6+3+1}=2^{47}$ ヲ以テ所要ノ2ノ最高羃トナス、

又 $I\left(\frac{50}{7}\right)=7$, $I\left(\frac{50}{7^2}\right)=1$ 是ニ因リテ $7^{7+1}=7^8$ ヲ以テ所要ノ7ノ最高羃トナス、

〔例二〕 $\underline{|80}$ ヲ割ル所ノ3ノ最高羃ト5ノ最高羃トヲ索メヨ、

答、3ノ卅六乘羃、5ノ十九乘羃、

〔例三〕 $\underline{|1000}$ ヲ割ルベキ7ノ最高羃ヲ索メヨ、

答、7ノ百六十四乘羃

## 第三百七十五條　定理

相連續セル數 $r$ 箇ノ積ハ恒ニ $\underline{|r}$ ニテ割ルヽ、

サテ相連續セル數 $r$ 箇ノ第一ノモノヲ $n$ トセヨ、然ルトキハ茲ニ證明スベキハ

$\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\underline{|r}}$ 即 $\dfrac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-1}}$ ノ整數ナルヿナリ、

コレ直ニ $\dfrac{\underline{|n+r-1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-1}}$ ノ ${}_{n+r-1}C_r$ ニ等シキヿヨリ出デ來ルヿトス、如何ニトイフニ、一時ニ$r$箇ヅヽ取リタル $(n+r-1)$ 箇ノ相異ナルモノヽ配合ノ數ハ、其ノ$n$ト$r$ト如何ナル値ノモノタルニ拘ハラズ、恒ニ整數ナルベケレバナリ、

コノ定理ハ亦第三百七十四條ヲ用井、基礎ノ原理ヨリ直ニ證明スルヿモ得ベシ、

如何ニトイフニ

$$I\left(\frac{n+r-1}{a}\right) \nless I\left(\frac{n-1}{a}\right)+I\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$I\left(\frac{n+r-1}{a^2}\right) \nless I\left(\frac{n-1}{a^2}\right)+I\left(\frac{r}{a^2}\right),$$

……………………

ナルヿハ明白ナリ、是ニ由リテ $\underline{|n+r-1}$ ニ含マレタル或ル素數ノ數ハ、$\underline{|n-1}\times\underline{|r}$ ニ含マレタル同素數ノ數ヨリモ決シテ少カラズ、或ハ多カルヿヲ得ベキヿ、第三百七十四條ニヨリテ明カナルベシ、斯クノ如クナレバ、$\underline{|n-1}\times\underline{|r}$ ニ含マレタル各素數ノ最高羃ハ、$\underline{|n+r-1}$ ニ於ケル同數ノ最高羃ヨリモ高次ナルヿ能ハズ、或ハ同次ナルカ或ハ低次ナルベシ、是即 $\underline{|n-1}\times\underline{|r}$ ニテ



$\underline{|n+r-1}$ ガ割ルヽヿヲ證スルモノナリ、

コレト同ジ仕方ニテ、$\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$ ナル𪜈ハ $\dfrac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\cdots}$ ノ整數ナルヿモ證明シ得ベキナリ、

## 第三百七十六條

$n$モシ一ツノ素數ナル𪜈ハ、$(a+b)^n$ ノ展開ニ於ケル各項ノ係數ハ、首尾兩項ヲ除クノ外ハ必ズ$n$ニテ割ルヽ、

如何ニトイフニ、今ソノ首ト尾トノ兩項ヲ除ク𪜈ハ、諸係數イヅレモ $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$ ニテ表ハスヿヲ得ベク且ソノ$r$ハ$0$ト$n$トノ間ニ夾マレタル整數ノ何レカナルベシ、

サテ前條ニヨルニ $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$ ハ一ツノ整數ナリ、然ルニ$n$ハ$r$ヨリモ大ナル一ツノ素數ナルヲ以テ、$\underline{|r}$ ニ對シテモ亦素數ナラザルベカラズ、故ニ $\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}$ ハ整數ナラザルベカラズ、是ニヨリテ首項ト尾項トノ外ノ項ノ係數ハ、イヅレモ$n$ニテ割ルヽヿ明カナリ、

同ジ理ニテ、$n$モシ一ツノ素數ナル𪜈ハ $(a+b+c+\cdots)^n$ ノ展開ニ於テ、二箇以上ノ文字ヲ含メル項ノ係數ハ何レモ$n$ニテ割ルヽヿヲ知ルベシ、

如何ニトイフニ二箇以上ノ文字ヲ含メル項ノ係數ハ、何レモ $\frac{\lfloor n}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma\cdots}$ ノ形チヲ具ヘ、且ツ $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=n$ ノ關係アリテ、$\alpha$、$\beta$、$\gamma$、…ハ何レモ $n$ ヨリハ少サキモノナリ、サテ $\frac{\lfloor n}{\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma\cdots}$ ハ前條ニヨリテ整數ナリ、然ルニ $n$ ハ $\alpha$、$\beta$、$\gamma$、…ノ何レヨリモ大ナル素數ナルヲ以テ $\lfloor\alpha\lfloor\beta\lfloor\gamma\cdots$ ニ對シテモ亦素ナラザルベカラズ、此故ニ二字ヨリ多クヨリ成レル項ノ係數ハ何レモ $n$ ニテ割ル、ヿヲ知ルベシ、

〔例一〕 $n(n+1)(2n+1)=M(6)$ ヲ證セヨ、

〔例二〕 $n$ 奇數ナル片ハ $(n^2+3)(n^2+7)=M(32)$ ナルヿヲ證セヨ、

〔例三〕 $n$ 奇數ナル片ハ $n^4+4n^2+11=M(16)$ ナルヿヲ證セヨ、

〔例四〕 $1+7^{2n+1}=M(8)$ ヲ證セヨ、

〔例五〕 $19^{2n}-1=M(360)$ ヲ證セヨ、

〔例六〕 $n$、$3$ ヨリモ大ナル素數ナル片ハ $n(n^2-1)(n^2-4)=M(360)$ ナルヿヲ證セヨ、

## 第三百七十七條　フェルマー氏ノ定理 (Fermat's Theorem.)

$n$ ヲ以テ或ル素數トシ、$m$ ヲ以テ $n$ ニ對シテ素ナル任意ノ數トスル片ハ、$m^{n-1}-1$ ハ $n$ ニテ割ル、

$n$ 素數ナル片ハ、$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n$ ノ展開ニ於テ二字以上ヲ含メル項ノ係數ハ何レモ $n$ ニテ割ル、トイフヿ前條ニヨリテ明カナリ、且ソノ展開ニ於ケル他ノ項、即唯一ツノ文字ヲ含メル項ハ $m$ 項ダケアリテ、其ノ係數ハ何レモ $1$ ナリ、此故ニ今 $a_1=a_2=\cdots=a_m=1$ ト置ク片ハ

$$m^n=m+M(n);$$

ヲ得、是ニ因リテ $m(m^{n-1}-1)=M(n)$.

ヲ得、斯クノ如クナルヲ以テ $m$ モシ $n$ ニ對シテ素ナル數ナラバ $(m^{n-1}-1)$ ハ $n$ ノ倍數ナラザルベカラズ、

〔例一〕 $n$ 素數ナル片ハ $1^{n-1}+2^{n-1}+3^{n-1}\cdots+(n-1)^{n-1}+1=M(n)$ ナルヿヲ證明スベシ、

〔例二〕 $a$ モ $b$ モ共ニ素數 $n$ ニ對シテ素ナル數ナル片ハ $a^{n-1}-b^{n-1}$ ハ $n$ ノ倍數ナルベシトイフヿヲ證明セヨ、

〔例三〕 $n^5-n=M(30)$ ナルヿヲ證明セヨ、

〔例四〕 $n^7-n=M(42)$ ナルヿヲ證明セヨ、

〔第五〕 $x$ モ $y$ モ共ニ $1365$ ニ對シテ素ナル數ナル片ハ $x^{12}-y^{12}=M(1365)$ ナリ其ノ證如何、

〔例六〕 $m$ モ $n$ モ共ニ素數ナル片ハ $m^{n-1}+n^{m-1}-1=M(mn)$. ナリ其ノ證如何、

〔例七〕 $m$ モ $n$ モ $p$ モ共ニ素數ナル片ハ

$$(np)^{m-1}+(pm)^{n-1}+(mn)^{p-1}-1=M(mnp)$$ ナリ其證如何、

〔例八〕 如何ナル數ニテモ其ノ四乘冪ハ何レモ $5m$ 或ハ $5m+1$ ノ形チヲ具フベシ其ノ證ヲ

求ム、

〔例九〕如何ナル數ニテモ其ノ十二乘羃ハ何レモ $(13m)$ 或ハ $(13m+1)$ ノ形ヲ具フベシ其ノ證ヲ求ム、

〔例十〕如何ナル數ニテモ其ノ八乘羃ハ何レモ $(17m)$ 或ハ $(17m\pm1)$ ノ形ヲノモノナルベシ其ノ證ヲ求ム、

## 第三百七十八條　與ヘラレタル數ハ約數ノ數ヲ索ムルヿ、

與ヘラレタル數 $N$ ヲ素ナル因數ニテ表ハシタルモノヲ $a^xb^yc^z\cdots$ トスベシ、然ルトキハ $N$ ハ

$$(1+a+a^2+\cdots+a^x)(1+b+b^2+\cdots+b^y)(1+c+c^2+\cdots+c^z)\cdots$$

ナル連乘積ニ於ケル何レノ項ニテモ割ルヽヿハ分明ナリ、是ニ因リテ $N$ ヲ割ル所ノ數ノ總數ハ $N$ ト $1$ トヲモ算入スルトキハ

$$(x+1)(y+1)(z+1)\cdots$$

箇ナリ、

〔例一〕$600$ 即 $2^3.3.5^2$ ノ約數ノ總數ハ $(3+1)(1+1)(2+1)=24$ ナリ、

〔例二〕與ヘラレタル數ノ約數ノ和ヲ索ムベシ、

與ヘラレタル數ヲ $N=a^xb^ya^z\cdots$ トスルトキハ、所要ノ和ハ次ノ如クナルベキヿ容易ニ知ラル、

$$\frac{(1-a^{x+1})(1-b^{y+1})(1-c^{z+1})\cdots}{(1-a)(1-b)(1-c)\cdots}.$$





〔例三〕壹千、三千六百、及壹万四千五百五十三ノ三數ニ就キテ、約數ノ何箇アルカヲ索ムベシ、

答、拾六箇、四十五箇、二十四箇、

〔例四〕六、貳拾八、及四百九十六ノ三數ハ何レモ充數(perfect number)ナルヿヲ證明セヨ(充數トハ、其ノ數自身ヲ除キ他ノ約數ヲ盡ク加ヘ合ハセタルモノニ等シキ數ヲイフ)

〔例五〕六ツノ約數ヲ有セル最小數ヲ索ムベシ　答　拾貳、

〔例六〕拾五箇ノ約數ヲ有セル最小數ヲ索ムベシ　答　百四十四、

〔例七〕貳拾箇ノ約數ヲ有セル最小數ヲ索ムベシ　答　貳百四十、

〔例八〕四千七百貳十五ニ掛カリテ(第一)平方數ヲ生ズル最小數、及(第二)立方數ヲ生ズル最小數ヲ索ムベシ、　答　(第一)貳十壹、(第二)貳百四十五、

## 第三百七十九條　與ヘラレタル一數ハ有スル因數中、相互ニ素ナルモノハ幾對アルカヲ索ムルヿ、

與ヘラレタル一數ヲ $N$ トシ、且ツ $N\equiv a^xb^yc^z\cdots$ ト假定スベシ、今相互ニ素ナル一對ノ因數ノ一、モシ $a$ ヲ含メルモノナランニハ、他ノ一ハ $a$ ヲ含ムヿ能ハズ、此事ハ他ノ素因數ノ何レニ就キテモ同樣ナルベシ、

是ニヨリテ、所要ノ因數ハ $(1+a^x)(1+b^y)(1+c^z)\cdots$ ナル乘積ニ於ケル相異ナレル諸項ナルベク、而シテ其ノ數ハ、$N$ ニ在ル諸素因數ノ數ヲ $n$ トスルトキハ、$2^n$ ナリ、

コノ故ニ相互ニ素ナル因數ノ對ハ $2^{n-1}$ 對アリ、但シ是レ $N$ 及 $1$ ヲモ一對トシテ算入シタル

結果トス、

譯者曰ク此條原文ノ書キ方甚蕪シ然レ𪜈爰ニハ原文ヲ其儘ニ飜譯セリ盡シ其意ハ次ノ如クナルベシ、

與ヘラレタル數ヲ$N$トシ、$N=a^xb^yc^z\dots$ トスベシ爰ニ$a$、$b$、$c$…ハ相異レル素數ヲ表ハスモノトス、今$N$ヲ二箇ノ因數ニ分解シ即 $N=PQ$ トシ且$P$ト$Q$トハ互ニ素ナリトス、此樣ニ$N$ヲ分解スル仕方幾通リアリヤ、是本條ノ問題ナリ、サテ$P$ニシテ$a$ヲ含ムモノナラバ$Q$ハ$a$ヲ含ムヿ能ハズ、故ニ$P$ハ總テノ$a$即$a^x$ヲ含マサルベカラズ、此事ハ$b$、$c$等ニ就キテモ同樣ナリ、故ニ$P$又ハ$Q$ハ $(1+a^x)(1+b^y)(1+c^z)\dots$ ナル乘積ニ於ケル一項ナラザルベカラズ、今此乘積ノ項數ハ$2^n$ナリ、然ルニ既ニ$P$ヲ撰定スルトキハ$Q$ハ$N$ヲ$P$ニテ割リテ自然ニ定マルヿナレハ、索ムルトコロノ數ハ此ノ半分即$2^{n-1}$ナリ、但シ$n$ハ$N$中ニアル素因數ノ數ナリ、

## 第三百八十條

與ヘラレタル一數ヨリモ小サク且ツ之ニ對シテ素ナル正整數ノ數ヲ索ムルヿ、

與ヘラレタル一數ヲ $N\equiv a^xb^yc^z\dots$ トスベシ、但シ$a$、$b$、$c$…ハ$N$ノ素因數ニシテ且ツ相異ナレルモノトス、

サテ$1, 2, 3, \dots N$ナル級數ニ於テ、$a$ニテ割ルヽ項ハ$a, 2a, 3a, \dots, \frac{N}{a}a$ナリ、故ニ$a$ニテ割ルヽ數ハ$\frac{N}{a}$箇アリ、同ジ理ニテ$b$ニテ割ルヽ數モ$\frac{N}{b}$箇アルベク、$bc$ニテ割ルヽ數ハ





$\frac{N}{bc}$箇アルベク、$abc$ニテ割ルヽ數ハ$\frac{N}{abc}$箇アルベク、以下コレニ準フ、

$N$ヨリ小ナル而モ$N$ニ對シテ素ナラザル整數ハ何レモ級數

$$\Sigma\frac{N}{a}-\Sigma\frac{N}{ab}+\Sigma\frac{N}{abc}-\Sigma\frac{N}{abcd}+\dots\dots\dots(\alpha)$$

ニ於テ一回ハ數ヘラルヽモ二回以上ハ數ヘラルヽヿナシ、次ニ之ヲ證明セン、

一整數アリ、$N$ノ素因數ノ唯一ツ、假ヘバ$a$ノミニテ割ルヽヿト假定セヨ、然ルトキハ其整數ハ$(\alpha)$ニ於テ唯一回ダケ數ヘラルベシ、即$a$ニテ割ルヽ$\frac{N}{a}$箇ノ内ノ一數トシテ數ヘラルベシ、

次ニ、一整數$a$、$b$、$c$、…ナル素因數ノ$r$箇ニテ割ルヽト假定セヨ、然ルトキハ其整數ハ$\Sigma\frac{N}{a}$ニ於テハ$r$回ダケ數ヘラルベシ、$\Sigma\frac{N}{ab}$ニ於テハ$\frac{r(r-1)}{1.2}$回ダケ數ヘラルベシ$\Sigma\frac{N}{abc}$ニ於テハ$\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}$回ダケ數ヘラルベク、次下コレニ準フ、

是ニヨリテ、$a$、$b$、$c$、…ナル素因數ノ$r$箇ニテ割ルヽ一整數ガ數ヘラルヽ總回數ハ左ノ如シ、

$$r-\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}-\dots+(-1)^{r-1}\frac{r(r-1)\dots1}{\underline{|r}}=1-(1-1)^r=1.$$

斯クノ如クナルヲ以テ$N$、ニ對シテ素ナラザル各整數ハ$(\alpha)$ニ於テ唯壹回ダケ數ヘラル、故ヲ以テ$N$ヨリ小サク且ツ$N$ニ對シテ素ナラザル正整數ノ數ハ$(\alpha)$ニテ與ヘラル、但シ1、ト、$N$、

トハ相互ニ單純ナルヿト假定スルモノナリ、

是ニヨリテ、$N$ ヨリ小ナル、且ツ $N$ ニ對シテ素ナル正整數ノ數ハ左ノ如シ

$$N-\Sigma\frac{N}{a}+\Sigma\frac{N}{ab}-\Sigma\frac{N}{abc}+\cdots=N\left[1-\Sigma\frac{1}{a}+\Sigma\frac{1}{ab}-\Sigma\frac{1}{abc}+\cdots\right]$$

$$=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots$$

第二百五十六條ニヨリテ.

〔例一〕　百ヨリモ小ニ、且ツ百ニ對シテ素ナル整數ノ數ヲ索ムベシ、

サテ $100=2^2.5^2$ ナルヲ以テ、所要ノ數ハ $100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})-1=39$ ナリ

〔例二〕　壹千五百七十五ヨリ小ニ、且コレニ對シテ素ナル整數ノ數ヲ索ムベシ、

答　七百十九箇、

〔例三〕　$N$(2ヨリモ大ナル數ト假定ス)ヨリモ小ナル、且ツ $N$ ニ對シテ素ナル整數(1ヲモ算入ス)ハ偶數ナルヿ、及ソレ等ノ數ノ半分ハ $\frac{N}{2}$ ヨリ小ナルヿヲ證明スベシ、

(如何ニトイフニ $N$ ニ、$a$ モシ $N$ ニ對シテ素ナル數ナランニハ $N-a$ ニ對シテモ亦素ナル數ナルベク、且ツ $a>\frac{N}{2}$ ナルトキハ、$N-a<\frac{N}{2}$ ナルベケレバナリ)

## 第三百八十一條　平方數ノ形チ

平方數 (Square numbers.) ノ形チハ成リ立チ得ル





モノト得ヌモノトアルヿ次ノ例ニ就キテ知ルベシ.

〔例一〕　平方數ニ形チハ或ハ $3m$ 或ハ $3m+1$ ナルヿヲ證明スベシ、如何ニトイフニ、如何ナル數ニテモ $3m$ 或ハ $3m\pm1$ ノ形チヲ有スルヲ以テ平方數ハ $9m$ 或ハ $3m+1$ ノ形チヲ具フベシ、

〔例二〕　平方數ハ或ハ $5m$ 或ハ $5m\pm1$ ノ形チナルヿヲ證明スベシ、

如何ニトイフニ、如何ナル數ニテモ $5m$, $5m\pm1$, 或ハ $5m\pm2$ ノ形チヲ具フルヲ以テ、各平方數ハ $5m$, $5m+1$, 或ハ $5m+4$ ノ形チヲ有セサルベカラズ、

〔例三〕　$a$、$b$、$c$ 共ニ整數ニシテ、且ツ $a^2+b^2=c^2$ ナルトキハ $abc$ ハ六十ノ倍數ナルヿヲ證明スベシ、

マヅ第一ニ平方數ノ形チハ、$3m$ ナルカ、$3m+1$ ナルカ何レカナリ、故ニ3ノ倍數ナラザル二ツノ平方數ノ和ハ、$3m+2$ ノ形チナルベク、即チ平方數タルヿ能ハズ、然ルニ本題ニ於テハ、$a^2$ ト $b^2$ トノ和ハ $c^2$ 即チ平方數ナリトアレバ、$a$ $b$ ノ何レカハ3ノ倍數タルヿヲ要スルナリ、

次ニ、平方數ノ形チハ、$5m$ ナルカ、$5m\pm1$ ナルカ何レカナリ、故ニ5ノ倍數ナラザル二ツノ平方數ノ和ハ、其形チ、或ハ $5m$、或ハ $5m\pm2$ ナルベシ、然レ𪜈、平方數ノ形チハ $5m\pm2$ ナルヿ能ハズ、本題ニ於テハ、$a^2$ ト $b^2$ トノ和、平方數 $c^2$ ナリトアレバ、$c^2$ ノ形チハ $5m$ ノ方ナラザルベカラズ、故ニ $a$ $b$ ハ5ノ倍數ナラザルモ、$c$ ハ5ノ倍數ナラザルベカラズ、從テ $abc$ ハ5ノ

倍數ナルベシ、此事ハ $a$、$b$ ガ5ノ倍數ナルトキニハ勿論ナレバ、一般ニ眞ナリ、

最後ニ、如何ナル數ニテモ其形ヲ、$4m$, $4m+1$, $4m+2$, $4m+3$ ヲ出デズ、從ヒテ平方數ノ形ヲモ、$16m$, $8m+1$, $16m+4$ ヲ出ヅベカラズ、扨 $a$、$b$ ハ倶ニ奇數ナルヿ能ハズ、如何ニトイフニ、斯クスルトキハ、其平方ノ和ハ、$8m+2$ ノ形ヲ取リテ、平方數ナルヿ能ハザレバナリ、モシ一數ハ奇數、一數ハ偶數ナラバ、其偶數ハ4ノ倍數ナラザルベカラズ、如何ニトイフニ、$8m+1$ 及 $16m+4$ ノ形ヲノ二平方數ノ和ハ $8m+5$ トナリテ、平方數タルヿ能ハザレバナリ、故ニ $ab$ ハ4ノ倍數ナラザルベカラズ、

斯クノ如ク、$abc$ ハ、3ニテモ、5ニテモ、4ニテモ割ルル數ナリ、然ルニ此ノ3、5、4ハ相互ニ素ナル數ナルガ故ニ、$abc$ ハ $3\times5\times4=60$ ニテ割レザルベカラズ、

〔例四〕立方數ノ形ヲハ、$7m$ ナルカ、$7m\pm1$ ナルカ何レカナリ、又立方數ノ形ヲハ $9m$ 及 $9m\pm1$ ノ何レカナリ、以上二事ヲ證明セヨ、

〔例五〕四乘冪ハ何レモ $5m$ 或ハ $5m+1$ ノ形ヲ具フ、其證如何、

〔例六〕平方數ハ2、3、7、或ハ8トイフ數字ニテ終ルヿナキヲ證明セヨ、

〔例七〕平方數モシ奇數ヲ以テ終ルナラバ、其前ノ數字ハ偶數ナルベシ、其證如何、

〔例八〕スベテ數ノ最後ノ數字ハ、其 $(4n+1)$ 乘冪ノ最後ノ數字ニ同ジ、其證如何、

〔例九〕連續セル四數ノ積ハ、平方數タルヿ能ハズ、其證如何、

## 第三十八例題集

第一、3ヨリ大ナル二ツノ素數ノ平方ノ差ハ、24ニテ割ルルヿヲ證明セヨ、

第二、$n$ モシ3ヨリ大ナル素數ナラバ、$n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)=M(2^7.3^2.5.7)$ ナルヿヲ證明セヨ、

第三、$n$ モシ奇數ナラバ、$(n+2m)^n-(n+2m)=M(24)$. ナルヿヲ證明セヨ、

第四、$a^{4m+p}-a^{4n+p}=M(30)$. ノ證明如何、

第五、$x$ 及 $y$ 正ニシテ、且ツ $N-a^2=x$, $(a+1)^2-N=y$ ナルトキハ、$N-xy$ ハ平方數ナリ、其證如何、

第六、千ヨリモ小ナル數ニテ、2、3或ハ5ニテ割レヌモノハ、幾ツアルカ、

第七、$P$、$Q$、$R$、$p$、$q$、$r$ ハ整數ニシテ、且 $p$、$q$、$r$ ハ相互ニ素ナルトキ、若シ $\frac{P}{p}+\frac{Q}{q}+\frac{R}{r}$ ガ整數ナラバ、$P|p$ モ、$Q|q$ モ、$R|r$ モ、皆整數ナルベシ、其證如何、

第八、二百八十四ト二百二十トハ和順數(Amicable numbers.)ナルヿヲ證明セヨ(和順數トハ、二數ノ何レモ他ノ數ノ約數ノ和ニ等シキモノヲイフ)、

第九、$2^n-1$ モシ素數ナラバ、$2^{n-1}(2^n-1)$ ハ充數(Perfect number.)ナルベシ、其證如何(充數トハ、一數ノ其約數(其數自身ハ除ク)ノ和ト相等シキモノヲイフ)、

第十、二十ヨリ小ニシテ、且ツ $x^{16}-1$ ヲシテ六百八十ノ倍數タラシムル $x$ ノ値ヲ、悉ク看出スベシ、

第十一、數字ノ和15ナル數ハ完全ナル平方數タルヿモ、立方數タルヿモ、能ハズトイフ證明如

何、

第十二、如何ナル平方數モ、二ツノ平方數ノ差トシテ表ハスヿヲ得ベシ、其證明如何、

第十三、7ニテ割レバ1ガ殘リ、8ニテ割レバ2ガ殘リ、9ニテ割レバ3ガ殘ル數ノ公式如何、又四百九十八ガ其最小ナルモノナルヿヲ證明セヨ、

第十四、$N$トnト相互ニ素ニシテ、且ツnハ素數ナル時ハ、$N^{(n-1)n}-1=M(n^2)$ナルベク、又一般ニ$N^{n^r-n^{r-1}}-1=M(n^r)$ナルベシ、此二事ヲ證明スベシ、

第十五、$n$、$N$相互ニ素ニシテ、且$n$ハ素數ナル時ハ$N^{1+2+\dots+(n-1)}-1=M(n^2)$ナルベシ、其證如何、

第十六、$p$素數ニシテ、且ツ$(1+x)^{p-2}=1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$ナル時ハ、$a_1+2$, $a_2-3$, $a_3+4$, …ハ$p$ノ倍數タルベシ、其證明如何、

第十七、三ツノ素數等差級數ヲ爲ス時ハ、其通差ハ6ノ倍數タルベシ、但シ3ガ其素數ノ一ツナル時ハ此限ニアラズ、此證如何、

第十八、$\dfrac{\underline{|2a}\;\underline{|2b}}{\underline{|a}\;\underline{|b}\;\underline{|a+b}}$ハ整數ナルヿヲ證セヨ、

第十九、$\dfrac{\underline{|2n}}{\underline{|n+1}\;\underline{|n}}$ハ整數ナルヿヲ證セヨ、





第二十、$\dfrac{\underline{|nr}}{\underline{|n}\{\underline{|r}\}^n}$ノ整數ナルヿヲ證セヨ、

第廿一、平方數n箇ノ和ニ等シキ數二ツノ積ハ、$\frac{1}{2}n(n-1)+1$箇ノ平方數ノ和トシテ表ハスヿヲ得其證如何、

第廿二、$a$ト$b$ト倶ニ3ニテ割ルルニ非ンバ、$a^2+b^2$ハ3ニテ割レズ、又コノ事ハ3ニ限ラズ、7ニテモ11ニテモ眞ナリ其證如何、

第廿三、$a^2+b^2=c^2$ナル時ハ、$ab(a^2-b^2)=M(84)$ナリ、其證如何、

第廿四、$a^2+b^2=3(c^2+d^2)$, $a^2+b^2=7(c^2+d^2)$, $a^2+b^2=11(c^2+d^2)$ノ何レニ於テモ、$a$、$b$、$c$、$d$ハ有理ナルヿ能ハズ、其證如何、

第廿五、$a^2+c^2=2b^2$ナル時ハ、$a^2-b^2=M(24)$ナリ、其證如何、

## 等剩式　(Congruences.)

第三百八十二條　定義　兩數$a$及$b$ヲ、第三數$c$ニテ割ル時ニ同ジ剩餘ヲ生ズル時ハ、此兩數ハ$c$ナル率數(Modulus.)ニ對シテ等剩(Congruent.)ナリトイフ、コレヲ表ハスニ記法$a\equiv b(\mathrm{mod.}c)$ヲ以テシ、コレヲ等剩式(Congruence.)ト稱ス、

例ヘバ　$21\equiv1(\mathrm{mod.}10)$, 又$(a+1)^2\equiv1(\mathrm{mod.}a)$.

等剩式 $a\equiv b(\mathrm{mod}.c)$ ニ由レバ、$(a-b)$ ガ、$c$ ノ倍數ナルヿヲ觀ル、即コノ事ハ次ノ如キニ書キ表ハスヲ得ベシ

$$a-b\equiv o(\mathrm{mod}\ c).$$

## 第三百八十三條　定理

$a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}.x)$, 且ツ $a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}.x)$ ナルキハ、又 $a_1+a_2\equiv b_1+b_2(\mathrm{mod}.x)$ 且ツ $a_1a_2\equiv b_1b_2(\mathrm{mod}.x)$ ナルベシ、

如何ニトイフニ、$a_1=m_1x+r_1$ 及 $a_2=m_2x+r_2$ トスルキハ、假定ニヨリテ $b_1=n_1x+r_1$ 及 $b_2=n_2x+r_2$ ナルベシ、

是ニヨリテ

$$a_1+a_2-(b_1+b_2)=(m_1+m_2-n_1-n_2)x;$$

故ニ

$$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\equiv o(\mathrm{mod}.x),$$

即チ

$$a_1+a_2\equiv b_1+b_2(\mathrm{mod}.x).$$

次ニ又 $(a_1a_2-b_1b_2)$ $x$ ノ倍數ナルヿ容易ニ知ルヿヲ得ベシ、故ニ

$$a_1a_2\equiv b_1b_2(\mathrm{mod}.x).$$

此定理ハ二ツノ等剩式ニ限ラズ、幾箇ノ等剩式ニテモ、其ノ率數ダニ相同ジカラバ恒ニ眞ナルヿ分明ナリ、

## 第三百八十四條　定理

$a$ ト $b$ ト相互ニ素ナルキハ、$a, 2a, 3a, \ldots, (b-1)a$ ヲ $b$ ニテ割リテ得ラルヽ剩餘ハ皆相異ナレルモノナリ、





如何ニトイフニ、$ra$ 及 $sa$ ヲ $b$ ニテ割ルニ相同ジキ剩餘ヲ得ルモノト假定セヨ、然ルキハ $ra-sa=M(b)$ ナルベシ、然レ圧 $b$ モシ $(r-s)a$ ヲ除シ盡シ、且ツ $a$ ニ對シテ素ナルキハ、$b$ ハ $(r-s)$ ヲ割ラザルベカラズ、然レ圧、$r$、$s$ トモニ $b$ ヨリ小ナルモノナレバ、此事ハ出來得ベカラザルナリ、

是ニヨリテ、$b$ ニテ $a, 2a, \ldots, (b-1)a$ ヲ割リタル剩餘ハ悉ク相異ナラザルベカラズ、然ルニ其ノ剩餘ハ $(b-1)$ 箇ダケアルヿ故、其ノ剩餘ハ即チ $1, 2, \ldots b-1$ ナラザルベカラズ、但シ其ノ順序ハ様々ナルベシ、

$a$ モシ $b$ ニ對シテ素數ナラザランカ、$b$ ヲ以テ $a\ 2a \ldots (b-1)\ a$ ヲ割リテ得ラルヽ剩餘ハ悉ク相異ナレルモノニハ非ルベシ、如何ニトイフニ、$k$ モシ $a$ 及 $b$ ノ通因數ニシテ、從テ $a=ka'$ $b=k\beta$ ナルキハ、$(r+\beta)a$ ト $ra$ トハ、$b$ ニテ割ラバ同ジ剩餘ヲ生ズベシ、然ルニ此ノ $(r+\beta)a$ 及 $ra$ ハ倶ニ級數 $a, 2a, \ldots (b-1)a$ ノ中ノ數ナルベシ、但シ $r+\beta<b-1$ トス、斯ク同ジ剩餘ヲ生ズルモノアレバ、悉ク相異ナレルモノニ非ルヤ明カナリ、

系　$a$ ハ $b$ ニ對シテ素ナル數、$n$ ハ任意ノ整數ナルキハ、$b$ ヲ以テ $n, n+a, n+2a, \ldots\ldots, n+(b-1)a$ ヲ割リテ得ラルヽ剩餘ハ皆相異ナレル數ナルベク、且ツソハ $0, 1, 2, \ldots (b-1)$ ナルベシ、

## 第三百八十五條　フヘルマア氏ノ定理 (Fermat's Theorem)

前條ノ結果ニ由リテフヘルマア氏ノ定理ハ容易ニ推定シ得ベキナリ、如何ニトイフニ、$a$ 及 $b$ 相互ニ素ナルキハ、

$a, 2a, \ldots, (b-1)a$ ハ、$b$ ニテ割ラルヽトキニ、$1, 2, \ldots, (b-1)$ ナル剩餘ヲ生ズベシ、是ニヨリテ、

$$a.2a.3a\cdots(b-1)a\equiv 1.2.3\cdots(b-1)\ (\mathrm{mod}.b)$$

即チ

$$\underline{|b-1}\,(a^{b-1}-1)\equiv o\ (\mathrm{mod}.b).$$

然ルニ $b$ モシ素數ナラバ、$\underline{|b-1}$ ハ $b$ ニ對シテ素ナルベク、從テ

$$a^{b-1}-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}.b)$$

ナルベシ、是レ即チフヘルマア氏ノ定理ナリ。

## 第三百八十六條　ウヰルソン氏ノ定理 (Wilson's Theorem.)

$n$ ガ素數ナルトキハ $1+\underline{|n-1}$ ハ $n$ ニテ割ルヽベシ

素數 $n$ ヨリモ小ナル一數ヲ $a$ トスルトキハ、$a$ ハ $n$ ニ對シテ素數ナルベシ、斯ク $a$ ト $n$ ト相互ニ素ナルヲ以テ、$a, 2a, \ldots, (n-1)a$ ヲ $n$ ニテ割リタル剩餘ハ $1, 2, \ldots, (n-1)$ ナリ、是レ第三百八十四條ニヨリテ明カナルベシ、乃チ此等ノ剩餘ノ唯一ツガ $1$ ナルベシ、サテ其ノ $1$ トイフ剩餘ヲ生ズル所ノ $a$ ノ倍數ヲ $ba$ トセヨ、然ルトキハ $b$ モシ $a$ ニ等シカラバ、$a^2=1+M(n)$ 即チ $(a+1)(a-1)=M(n)$ ナルベシ、然ルニ $a$ ハ $n$ ヨリ小ク、又 $n$ ハ素數ナルヲ以テ、斯クナルニハ、$a=1$ 或ハ $a=n-1$ ナラザルヲ得ズ、是ニヨリテ、$2, 3, \ldots, (n-3), (n-2)$ ナル數ハ之ヲ適當ニ分ツトキハ各々二數ヨリ成レル組々トナシ、其各組ナル兩數ノ積モ、從テ亦ソノ組々ヲ悉ク掛ケタル積モ、皆 $M(n)+1$ ノ形ヲノモノナラシムルヿヲ得ベキナリ、斯クノ如クナルヲ以テ、

$$2\times3\times4\times\cdots\times(n-2)=M(n)+1;$$

$$\therefore\quad \underline{|n-1}=M(n)\times(n-1)+n-1.$$

是ニヨリテ

$$\underline{|n-1}+1=M(n).$$

ウヰルソン氏ノ定理ハ、次ノ如クニシテモ證明スルヿヲ得ベシ

第三百〇一條ニヨリテ

$$(n-1)^{n-1}-(n-1)(n-2)^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(n-3)^{n-1}-\cdots$$
$$+(-1)^{n-2}\frac{(n-1)(n-2)\cdots2}{\underline{|n-2}}1^{n-1}=\underline{|n-1}.$$

然ルニフヘルマア氏ノ定理ニヨリテ　$(n-1)^{n-1}=1+M(n);\ (n-2)^{n-1}=1+M(n);\ \cdots$

コレニヨリテ

$$1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdots\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)+M(n)=\underline{|n-1}.$$

即チ　$(1-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}+M(n)=\underline{|n-1}.$

是ニ由リテ　$\underline{|n-1}+(-1)^{n-1}=M(n)$

$n-1$ ハ偶數ナレバ　$|\underline{n-1}+1=M(n)$.

抑ヽウヰルソン氏ノ定理ハ、素數ニ關スル一ノ較著ナル性質ヲ表ハシ明カニスルヲ以テ重要トス、如何ニトイフニ、$n$ 素數ナルニ非ンバ、$1+|\underline{n-1}$ ハ $n$ ニテ割レザレバナリ、其ノ故ハ $n$ モシ夫ヨリモ小ナル一數ニテ割ルヽナラバ、其ノ一數ハ $|\underline{n-1}$ ヲ割ルベク、從テ $|\underline{n-1}+1$ ヲ割ルヿ能ハザレバナリ。

## 第三百八十七條　定理

任意ノ一數 $n$ ヨリモ小ナル且ツ $n$ ニ對シテ素ナル整數ノ總數ヲ $\phi(n)$ ニテ表ハシ、又 $a$、$b$、$c$、…ヲ相互ニ素ナル數トスルトキハ、

$$\phi(abc\dots)=\phi(a)\times\phi(b)\times\phi(c)\times\dots$$

ナリ、但シ1ヨリモ大ナル諸數ハ1ニ對シテ素ナルモノト假定ス、

先ヅ第一ニ、$a$、$b$ ノ二數ノ場合ヲ論ゼン。

$ab$ 箇ノ數ヲ左ノ如クニ排列ス、

$$\begin{array}{lllllll}
1, & 2, & 3, & \dots\dots, & k, & \dots\dots & a, \\
a+1, & a+2, & a+3, & \dots\dots, & a+k, & \dots\dots & 2a, \\
2a+1, & 2a+2, & 2a+3, & \dots\dots, & 2a+k, & \dots\dots & 3a, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(b-1)a+1, & (b-1)a+2, & (b-1)a+3, & \dots\dots, & (b-1)a+k, & \dots\dots, & ba.
\end{array}$$



右ノ表ニ由リテ觀レバ、第 $k$ 行ニ於ケル諸整數ハ、$k$ ガ $a$ ニ對シテ素數ナルトキハ、皆 $a$ ニ對シテ素ナルベク、モシ $k$ ガ $a$ ニ對シテ素數ナラズンバ何レモ $a$ ニ對シテ素ナラザルベキヤ明カナリ、是ニヨリテ、$a$ ニ對シテ素ナル整數ハ右圖ニ於テ $\phi(a)$ 行ダケアルナリ、サテ又、$a$ ハ $b$ ニ對シテ素ナルヲ以テ、第三百八十四條ニヨリテ知ラルヽ如ク、$k, a+k, \dots, (b-1)a+k$ ヲ $b$ ニテ割リタル剩餘ハ、$0$、$1$、$2$、…$(b-1)$ ナリ、且ツ一數ヲ $b$ ニテ割リタル剩餘モシ $b$ ニ對シテ素ナルトキハ其一數ハ $b$ ニ對シテ素ナルベク、然ラズンバ $b$ ニ對シテ素ナラザルヤ明カナリ、斯クノ如クナルヲ以テ、各一行ニ在ル所ノ、$b$ ニ對シテ素ナル整數ノ數ハ、級數 $0$、$1$、$2$、…$(b-1)$、中ニ在ル所ノ、同ジモノヽ數ト等シカルベシ、即チ $b$ ニ對シテ素ナル整數ハ各行ニ $\phi(b)$ ヅツアルナリ、サレバ $a$ ニ對シテ素ナル整數ノ行ハ $\phi(a)$ 行アリテ、各行ニハ $b$ ニ對シテモ亦素ナル整數 $\phi(b)$ ダケアルナリ、然ルニ、$a$ ニ對シテモ、亦 $b$ ニ對シテモ素ナル、整數ハ總ベテ亦 $a.b$ ニ對シテモ素ナリ、是ニ因リテ、$ab$ ヨリモ小ナル、且ツ $ab$ ニ對シテ素ナル整數ノ總數ハ $\phi(a).\phi(b)$ ナリ、故ニ

$$\phi(ab)=\phi(a).\phi(b).$$

本命題ハ直ニ推シ廣ムルヿヲ得ベキナリ、ソハ次ノ如クナレバナリ、

$$\begin{aligned}
\phi(abc\dots)=\phi(a\times bc\dots)&=\phi(a).\phi(bc\dots) \\
&=\phi(a).\phi(b).\phi(c\dots) \\
&=\phi(a).\phi(b).\phi(c)\dots
\end{aligned}$$

$=\dots\dots\dots\dots$

**第三百八十八條**　一ツノ與ヘラレタル數ヨリ小ナル、且ソレニ對シテ素ナル整數ノ數ハ、前條ノ定理ニヨリテ索ムルヿヲ得、

如何トナレバ、今ソノ數ヲ $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\dots$ トシ、其 $a$、$b$、$c$、…ハ $N$ ノ素因數ニシテ又悉ク相異ルモノトスベシ、

サテ $a^{\alpha}$ ヨリモ小ナル、且ツ之ニ對シテ素ナル整數（1ヲモ其ノ一ツト算入ス）ノ數ヲ索ムルニハ $a^{\alpha}$ ヨリ $a^{\alpha-1}$ ヲ減ゼザルベカラズ、如何トナレバ $a^{\alpha}$ マデニアル、$a$ ニ對シテ素ナラザル數ハ $a, 2a, 3a, \dots, a^{\alpha-1}.a$ ナル $a^{\alpha-1}$ 箇ニ限レバナリ、斯クテ

$$\phi(a^{\alpha})=a^{\alpha}-a^{\alpha-1}=a^{\alpha}\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

同理ニテ　$\phi(b^{\beta})=b^{\beta}\left(1-\frac{1}{b}\right),\quad \phi(c^{\gamma})=c^{\gamma}\left(1-\frac{1}{c}\right),\dots\dots$

然ルニ前條ニヨリテ、　$\phi(a^{\alpha}.b^{\beta}.c^{\gamma}.\dots)=\phi(a^{\alpha}).\ \phi(b^{\beta}).\ \phi(c^{\gamma})\dots\dots$

$$=a^{\alpha}\left(1-\frac{1}{a}\right).\ b^{\beta}\left(1-\frac{1}{b}\right).\ c^{\gamma}\left(1-\frac{1}{c}\right)\dots\dots$$

是ニ因リテ

$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\dots\dots$$





但シ、玆ニ $a$、$b$、$c$、…ハ $N$ ノ素因數ニテ、悉ク相異ナレルモノ、又1ハ $a$、$b$、$c$、…ニ對シテ素ナルモノト見做セリ、

**第三百八十九條**　次ノ定理ハフヘルマア氏ノ定理ヲ推廣メタルモノナリ、

$a$ 及 $m$ ヲ相互ニ素ナル二數トシ、$\phi(m)$ ヲ $m$ ヨリ小ナル、且ツ $m$ ニ對シテ素ナル整數（1ヲモ其ノ一ツトス）ノ數トスル片ハ、$a^{\phi(m)}-1\equiv 0(\mathrm{mod}.m)$ ナリ、

$m$ ヨリ小ナル、且ツ $m$ ニ對シテ素ナル $\phi(m)$ 箇ノ整數ヲ $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots, (m-1)$. ニテ表ハスベシ、然ル片ハ、$a.1, a\alpha, a\beta, a\gamma, \dots, a(m-1)$. ハ、$m$ ニテ割レバ悉ク相異ナレル殘リヲ生ズベシ、如何トナレバ、モシ何レニテモ其ノ二ツ、例ヘバ $ra$ 及 $sa$、同ジ殘リヲ生ズルナラバ、$(r-s)a$ ハ $m$ ノ倍數ナルベシ、サレ圧 $a$ ハ $m$ ニ對シテ素ニシテ、$(r-s)$ ハ $m$ ヨリ小ナル數ナレバ、此事ハ有ラレヌナリ、故ニ殘リハ凡テ相異ナルヿヲ要ス、次ニ又、ソノ殘リハ何レモ $m$ ニ對シテ素ナラザルベカラズ、如何トナレバ、其被除數ハ何レモ、其除數 $m$ ニ對シテ素ナル數二ツノ積ナレバナリ、斯クノ如ク、コノ $\phi(m)$ 箇アル殘リハ、悉ク相異ナリ、且イヅレモ $m$ ニ對シテ素ナリ、然レバ其等ノ殘リハ、順序ハ如何ナルモ、兎ニ角ニ $1, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ トイフ $\phi(m)$ 箇ノ數ナラザルベカラズ、

是ニ因リテ、　$a.a\alpha.a\beta\dots a(m-1)\equiv 1.\alpha.\beta.\gamma.\dots(m-1)(\mathrm{mod}.m).$

即チ　$\{a^{\phi(m)}-1\}.1.\alpha.\beta.\gamma.\dots(m-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,m).$

然ルニ、　$1.\alpha.\beta.\gamma.\dots(m-1)$ ハ $m$ ニ對シテ素ナルヲ以テ、

$a^{\phi(m)}-1\equiv o(\text{mod}.m).$

ナラザルベカラズ、乃チ本定理ノ證ヲ得タリ、

$m$ モシ素數ナラバ $\phi(m)=m-1$ トナリテ、フヘルマア氏ノ定理ヲ得ルナリ、

## 第三百九十條

次ノ例題ヲ説キテ本篇ヲ結バン、

〔例一〕$3^{2n+2}-8n-9$ ハ六十四ノ倍數ナリ、其證ヲ問フ、

$$3^{2n+2}-8n-9=(1+8)^{n+1}-8n-9=1+(n+1)8+M(8^2)-8n-9=M(8^2).$$

〔例二〕$3^{2n}-32n^2+24n-1\equiv0(\text{mod}.512)$ ノ證如何、

サテ、
$$u_n=3^{2n}-32n^2+24n-1$$
トセバ、
$$u_{n+1}=3^{2n+2}-32(n+1)^2+24(n+1)-1$$
トナル、因リテ
$$u_{n+1}-9u_n=256n^2-256n=256\,n.(n-1)=M(512).$$
ナリ、是レ $n(n-1)$ ノ偶數ナルニ因ルナリ、

サテ、$u_{n+1}-9u_n\equiv o(\text{mod}.512)$ ナルガ故ニ、モシ $u_n\equiv o(\text{mod}.512)$ ナランニハ、必ズ $u_{n+1}\equiv o(\text{mod}.512)$ ナルベシ、故ニ此事モシ $n=1$ ナル時ニ眞ナラバ、$n$ ノ如何ナル値ニ付キテモ亦眞ナルベシ、然ルニ $u_1=0$ ナレバ、此事ハ實ニ $n$ ノ値ニ拘ハラズ眞ナリ、

〔例三〕$(n^2+1)$ ニ於テハ、$(4m-1)$ トイフ形チノ素因數ナシ、其證如何、

2ノ外ノ素數ハ何レモ $(2k+1)$ ノ形チナリ、扨 $(2k+1)$ ヲ $(n^2+1)$ ノ一素因數トセヨ、然ルトキハ $n$ ハ $(2k+1)$ ニ對シテ素ナリ、故ニフヘルマア氏ノ定理ニヨリテ、$n^{2k}=M(2k+1)+1$

然ルニ假定ニヨリテ、$n^2+1=M(2k+1)$. ナリ、故ニ、
$$n^{2k}=\{M(2k+1)-1\}^k=M(2k+1)+(-1)^k.$$
斯ク、$n^{2k}=M(2k+1)+1$ 又 $n^{2k}=M(2k+1)+(-1)^k$. ナルヲ以テ $k$ ハ偶數ナラザルベカラズ、故ニ $(n^2+1)$ ノ素因數ハ何レモ $(4m+1)$ ノ形チナリ、故ニ何レノ素因數モ $(4m-1)$ ノ形チナルコト能ハズ、

$(4m+1)$ ノ形チノ因數何程多クヲ掛ケ合ハスルモ、其積ハ亦同ジ形チナルベケレバ、$(n^2+1)$ ノ約數ノ奇數ナルモノハ必ズ $(4m+1)$ ノ形チナルベシ、

〔例四〕何レノ整數モ、マヅ9ガ續キテ其後ニ零ノ續ケル數ノ約數ナリ、其證如何、

其數、例ヘバ $n$、ニテ10ノ逐次ノ冪ヲ割ルベシ、然ルトキハ零ヲモ添ヘテ $n$ 箇ノ相異ナレル殘リヨリ多ク有ルコトハ能ハズ、故ニ何レノ殘リカハ幾遍モ出ヅベシ、即チ $10^x$ 及 $10^y$ ヲソノ $n$ ニテ割リテ同ジ殘リヲ生ズルモノトセヨ、然ルトキハ $(10^x-10^y)$ ハ $n$ ニテ割ルルベク、而シテ是レ題ニイヘル如キ形チノモノナリ、

## 第卅九例題集

第一　次ノ證明ヲ求ム、

(i) $2^{2n+1}-9n^2+3n-2=M(54).$　(ii) $5^{2n+1}+n^5-5n^3+4n-5=M(120).$

(iii) $4^{2n+1}+3^{n+2}\equiv0(\text{mod}.13).$　(iv) $3^{4n+2}+2.4^{3n+1}\equiv0(\text{mod}.17).$

第二　$a$ ヲ素數トシ、$b$ ヲ $a$ ニ對シテ素ナル數トスル片ハ、$1^2.b^2, 2^2.b^2, \dots, \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 b^2$ ハ、$a$ ニテ割ル片ニ、相異ナレル剩餘ヲ生ズベシ、

第三　$4n+1$ ヲ素數トセバ、コハ $\{\underline{|2n}\}^2+1$ ノ一因數ナルベシ、又 $4n-1$ モシ素數ナラバ、コハ $\{\underline{|2n}\}^2-1$ ノ一因數ナルベシ、以上二事ノ證明如何、

第四　$n$ ハ素數、$r$ ハ $n$ ヨリ小ナル數ナラバ、$\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}+(-1)^{r-1}=M(n)$. トナルベシ、其證如何、

第五、$m$、$n$ モシ相互ニ素ナラバ、$m^2+n^2$ ノ約數ノ奇數ナルモノハ $(4k+1)$ ノ形ナルモノナルベシ、其證如何、

第六　$\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$（限ナク續ク）$=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)^{-1}\cdots\cdots$

其證如何、但シ分母ニ在ル2、3、5、……ハ素數ヲ順次ニ取リタルモノナリ、

第七　$n$ ヨリ小ニシテ、且ツ $n$ ニ對シテ素ナル、總テノ數（一ヲモ含ム）ノ等差中項ハ $\frac{1}{2}n$ ナリ、其證如何、

第八　$N$ ヲ任意ノ一數トシ、$a$、$b$、$c$、…ヲ其ノ相異ナレル素因數トスル片ハ、$N$ ヨリ小ニシテ、且 $N$ ニ對シテ素ナル總テノ數ノ和ハ $\frac{N^2}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$ ナリ、又カヽル數ノ平方ヲ總テ加ヘ合ハセタルモノハ $\frac{N^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots+\frac{N}{6}(1-a)(1-b)\cdots$ ナリ、コノ二事ヲ證明スベシ、

第九　$m$ ヨリ小ニシテ、且 $m$ ニ對シテ素ナル總ベテノ整數ノ數ヲ $\phi(m)$ トシ、$n$ ノ相異ナレル約數ヲ $d_1$、$d_2$、$d_3$…トスル片ハ、$\Sigma\phi(d)=n$ ナリ、コノ證明如何、

第十　10 ニ對シテ素ナル素數 $b$ ヲ分母トセル分數 $a/b$ ヲ小數ニ直ス片ハ、循環小數トナリ、其循環部ヲ成ス所ノ數字ノ數ハ $(b-1)$ 箇ナルカ、或ハ $(b-1)$ ノ約數ナルベシ」又ソノ循環部ガ $(b-1)$ 箇ノ數字ヨリ成ル片ハ、ソレヲ眞中ニテ分テバ $\frac{b-1}{2}$ 位ノ二數トナルヲ、相加フレバ全ク9ノミヨリ成レル數ヲ得ベシ」又モシ、$b$ ハ10ニ對シテハ素ナルモ、自ラハ素數ナラヌ場合ニハ、其循環部ヲ成ス所ノ數字ノ數ハ $\phi(b)$ ナルカ、或ハ $\phi(b)$ ノ約數ナルベシ、但シ $\phi(b)$ トハ $b$ ヨリモ小ナル、且 $b$ ニ對シテ素ナル整數ノ數ヲ表ハスモノトス」以上三件ヲ證明スベシ、

第十一　$1/p$ モシ、$(p-1)$ 箇ノ數字ヨリ成レル循環部ヲ有スル所ノ、循環小數ニ直サルヽナラバ、$p$ ハ必ズ素數ナリ、」又ソノ循環部ニ2、3、…、$(p-1)$ ヲ掛クル片ハ、其循環部ニ在ル通リノ數字ガ而モ同ジ順序ニ出ヅベシ、コノ二事ヲ證明スベシ、（譯者曰ク、爰ニ同シ順序トアルハ循環部ノ頭ト尾トハ相連續シタルモノトシテ考ヘタルモノナリ、例ヘハ今循環部ヲ .142857 トスル片ハ 285714 ニ於ケル數字ハ同シ順序ニアルナリ、）

第十二　$\frac{1}{P}$ モシ $p$ 箇ノ數字ヨリ成レル循環部ヲ有シ、$\frac{1}{Q}$ ハ $q$ 箇ノ數字ヨリ成レルモノ、$\frac{1}{R}$ ハ $r$ 箇ノ數字ヨリ成レルモノト次第ニ斯クノ如ク、且ツ $P$ $Q$ $R$、…ハ素數ナルトキハ、$\frac{1}{P.Q.R\ldots}$ ハ $n$ 箇ノ數字ヨリ成レル循環部ヲ有スベシ、但シ $n$ ハ $p$、$q$、$r$、…ノ最小公倍數トス、此證明如何、

# 第二十九編　不定方程式 (Indeterminate Equations.)

第三百九十一條　前ニ既ニ言ヘル如ク、唯一ノ方程式ニ二ツ以上ノ未知量アル場合、或ハ $n$ 箇ノ方程式ニ $n$ 箇ヨリモ多クノ未知量アル場合ニ於テ、モシ其未知量ノ値ニ何ノ制限モ無カランニハ、其方程式ニ適合スル未知量ノ値ハ限ナク多カルベシ、然レ𪜈、其未知量ノ値モシ或ル制限ニ從フベキモノナランニハ、$n$ 箇ノ方程式ナリ𪜈、能ク $n$ 箇ヨリモ多クノ未知量ノ値ヲ定ムルニ足ルベシ、

本編ニ於テハ、方程式ニ於ケル未知量ノ値ノ整數ニ限ラレタル場合ノ或ルモノヲ論ズベシ、

第三百九十二條　$x$ 及 $y$ ノ二未知量ヲ含メル一次方程式ハ、$ax+by=\pm c$ 或ハ $ax-by=\pm c$ ノ形ナル方程式ニ變ズルヿヲ得ベシ、但シコヽニ $a$ $b$ $c$ トアルハ皆正ノ整數トス、

然ルニ $x$ ヲ變ジテ $-x$ トシ、$y$ ヲ變ジテ $-y$ トスルトキハ、$ax+by=c$ ハ $ax+by=-c$ トナリ、$ax-by=c$ ハ $ax-by=-c$ トナルベケレバ、$x$ 及 $y$ ニ就キテ一次ノ方程式ノ整數ナル根ヲ索ムベキ方法ヲ示ス爲ニハ、右ニ擧ゲタル四ツノ形チヲ取リテスルニ及バズ、唯 $ax+by=c$ 及 $ax-by=c$ ノ二ツノ形チニテ充分ナルベシ、

$a$ 及 $b$ ニ通因數アリテ、且ソノ通因數ハ $c$ ノ因數ニアラズトイフ場合ニ於テハ、$ax\pm by=c$ ニ適合スル所ノ $x$ 及 $y$ ノ値ノ整數タルヿ能ハザルヤ分明ナリ、次ニ $a$ 及 $b$ ノ通因數、マタ $c$ ノ因數タル場合ニ於テハ、其因數ニテ方程式ノ兩邊ヲ割リテ、$x$ ノ係數ト $y$ ノ係數トニ通因數ナキニ至ラシムルヿヲ得ベシ、コノ故ニ、以後ハ $a$ 及 $b$ ニ通因數ナキモノト假定スベシ、

第三百九十三條　$a$ 及 $b$ ニ通因數ナカランニハ、方程式 $ax\pm by=c$ ニ適合スル所ノ、$x$ 及 $y$ ノ整數値ハ恒ニ索ムルヿヲ得、トイフヿヲ證ス、

今 $\frac{a}{b}$ ヲ連分數ニ直シ、直ニ $\frac{a}{b}$ ノ前ニ隣接セル近數ヲ $\frac{p}{q}$ トスルトキハ、第三百五十四條ニヨリテ、左ノ如シ

$$aq-pb=\pm1;$$

$$\therefore\quad a(\pm cq)-b(\pm cp)=c\cdots\cdots\cdots(i),$$

$$a(\pm cq)+b(\mp cp)=c\cdots\cdots\cdots(ii).$$

是ニヨリテ、$x=cq, y=cp.$ 或ハ又 $x=-cq, y=-cp$ ハ方程式 $ax-by=c$ ノ解答ナルベキヿ(i)ニヨリ知ラル、マタ $x=cq, y=-cp$ 或ハ又 $x=-cq, y=cp$ ハ $ax+by=c$ ノ解答ナルベキヿ、(ii)ニヨリテ知ラル、

新ク、方程式 $ax\pm by=c$ ニ適合スル所ノ、$x$ 及 $y$ ノ整數値ノ、少クモ一組ダケハ、常ニ索ムルヿヲ得ベキナリ、

右ノ研究ハ $a$ 或ハ $b$ ノ一ナル場合ニハ適用セズ、併シナガラ $\alpha$ 整數ナランニハ、$x=\alpha, \pm y=c-a\alpha$ ガ $ax\pm y=c$ ニ適合スベク、又 $\beta$ 整數ナランニハ、$x=c\mp b\beta, y=\beta$ ガ $x\pm b\beta=c$ ニ適合スベキヿ明カナリ、

是ニ因リテ、$ax\pm by=c$ ニハ、少クモ一組ダケノ整數根ハ常ニアルナリ、

**第三百九十四條**　方程式 $ax-by=c$ ニ適合スル所ノ整數値ノ一組ヲ知リテ、有ラユル他ノ整數根ヲ索ムルヿ、

$x=\alpha, y=\beta$ ヲ以テ、方程式 $ax-by=c$ ノ解答ノ一組トセヨ、然ルトキハ $a\alpha-b\beta=c$ ナリ、是ニヨリテ引クヿニテ、

$$a(x-\alpha)-b(y-\beta)=0$$

ヲ得、サテ $a$ ハ $a(x-\alpha)$ ヲ割ルヲ以テ、$a(x-\alpha)$ ニ等シキ $b(y-\beta)$ ヲモ亦割ラズバアラズ、然ルニ $a$ ハ $b$ ヲ割ルヿ能ハザルモノ故ニ、$(y-\beta)$ ヲ割ラズバアラズ、斯ク $y-\beta=ma$ ト置クヿヲ得、但シ $m$ ハ整數トス、然ルトキハ $a(x-\alpha)=b(y-\beta)=mba$ ナリ、コノ故ニ $x=\alpha+mb.$ ナリ、是ニヨリテ方程式 $ax-by=c$ ノ一組ノ答解ヲ $x=\alpha, y=\beta$ トスルトキハ、有ラユル他ノ答解ハ

$$x=\alpha+mb,\quad y=\beta+ma$$



ニテ與ヘラルベシ、但シ $m$ ハ任意ノ整數トス、

右ニヨリテ觀レバ、今モシ方程式 $ax-by=c$ ニ適合スル所ノ整數値ノ一組アランニハ、マタ限ナク多クノ斯カル組々アルベキヿヲ知ルベシ、然ルニ一組ハ慥ニアルベキヿハ前條ニヨリテ明ナリ、故ニ方程式 $ax-by=c$ ニ適合スル所ノ整數値ノ組々ハ無限ニ多シ、

マタ $\alpha$ 及 $\beta$、正ノ數ナリモ、負ノ數ナリモ、零ナリモ、$\alpha+mb$ 及 $\beta+ma$ ヲ共ニ正ノ數タラシムベキ $m$ ノ値ハ、無限ニ多カルベキヿ明カナリ、

是ニヨリテ、方程式 $ax-by=c$ ノ答解ノ、正ノ整數ナルモノヽ數ハ限ナク多シ、

**第三百九十五條**　方程式 $ax+by=c$ ニ適合スル所ノ整值ノ一組ヲ知リテ、有ラユル他ノ整數ナル答解ヲ索ムルヿ、

方程式 $ax+by=c$ ノ答解ノ一ツヲ、$x=\alpha, y=\beta$ トスルトキハ、$a\alpha+b\beta=c$ ナルベシ、是ニヨリテ、引クヿニテ、

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0$$

ヲ得、サテ $a$ ハ $a(x-\alpha)$ ヲ割ルヲ以テ、又 $b(y-\beta)$ ヲモ割ラザルベカラズ、然ルニ $a$ ハ $b$ ニ對シテ素ナルヲ以テ、$a$ ハ $(y-\beta)$ ノ一因數ナラザルベカラズ、斯ク、$y-\beta=ma$ ト置クヿヲ得、但シ $m$ ハ整數トス、然ルトキハ $a(x-\alpha)=-b(y-\beta)=-mab$ ナリ、此故ニ $x=\alpha-mb$ ナリ、是ニヨリテ、方程式 $ax-by=c$ ノ一組ノ答解ヲ $x=\alpha, y=\beta$ トスルトキハ、有ラユル他ノ答解ハ

$$x=\alpha-mb,\quad y=\beta+ma$$

ニテ與ヘラルベシ、但シ $m$ ハ任意ノ整數トス、

右ニイヘルヿト、第三百九十三條トニヨリテ觀レバ、方程式 $ax+by=c$ ニ適合スル所ノ整數値ノ組々ハ限ナク多クアルヿ知ラル、併シナガラ此方程式ノ正ノ整數ナル答解ノ數ハ限アルナリ

**第三百九十六條**　方程式 $ax+by=c$ ノ正ノ整數ナル答解ノ數ヲ索ムルヿ、

第三百九十三條ニ於テ證明セル如ク、$p/q$ モシ $a/b$ ノ尾ヨリ二番目ノ近數ナランニハ、方程式 $ax+by=c$ ニハ、$x=cq,\ y=-cp$ 或ハ $x=-cq,\ y=cp$ ガ適合スベシ、

マヅ第一ニ、$x=cq,\ y=-cp$ ガ適合スト假定セン、然ルトキハ此方程式ニ適合スル所ノ有ラユル他ノ値ハ

$$x=cq-mb,\quad y=-cp+ma\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

ニテ與ヘラルベシ、但シ $m$ ハ任意ノ整數トス、

(i) ニヨリテ觀レバ、$x$ 及 $y$ ノ共ニ正量ニシテ零ナラザランガ爲ニハ、$m$ ハ一ノ正整數ナラザルベカラズ、且 $m$ ノ最大値ハ $I\left(\frac{cq}{b}\right)$、最小値ハ $I\left(\frac{cp}{a}\right)+1$ ニシテ、乃チ $m$ ノ値ノ相異ナレルモノヽ數ハ $I\left(\frac{cq}{b}\right)-I\left(\frac{cp}{a}\right)$ ナルヿヲ知ルベシ、是ニ因リテ、答解ノ數ハ $I\left(\frac{cq}{b}\right)-I\left(\frac{cp}{a}\right)$ ナ





リ、ソハ $m$ ノ値ニハ各々 $x$ 及 $y$ ノ値ノ一組ガ對合スレバナリ、

サテ $\frac{cq}{b}=I_1+f_1$ 又 $\frac{cp}{a}=I_2+f_2$ トスルトキハ

$$\frac{c}{ab}=\frac{a(cq)-b(cp)}{ab}=\frac{cq}{b}-\frac{cp}{a}$$
$$=I_1-I_2+f_1-f_2.$$

因リテ　$f_1\not<f_2$ ナルトキハ　$I\left(\frac{c}{ab}\right)=I_1-I_2$;

マタ　$f_1<f_2$ ナルトキハ　$I\left(\frac{c}{ab}\right)=I_1-I_2-1.$

斯クノ如クナルヲ以テ、$cq/b$ ノ分數部ガ $cp/a$ ノ分數部ヨリ小ナルトキト、小ナラザルトキトニヨリテ、答解ノ數ハ夫々ニ $I\left(\frac{c}{ab}\right)+1$ 或ハ $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ ナルベシ、

マタ、$x=-cq$ 及 $y=cp$ ガ方程式ニ適合スル場合ニハ、ソノ正ノ整數ナル答ノ數ハ、$cp/a$ ヘ分數部ガ $cq/b$ ノ分數部ヨリ小ナルトキト、小ナラザルトキトニヨリテ、夫々ニ $I\left(\frac{c}{ab}\right)+1$ 或ハ $I\left(\frac{c}{ab}\right)$ ナルベシ、

〔例一〕　方程式 $7x-13y=26$ ニ適合スル所ノ $x$ 及 $y$ ノ正整値ヲ索ムベシ、

サテ $\frac{7}{13}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6}$ ナレバ尾ヨリ第二ノ近數ハ $\frac{1}{2}$ ナリ、然ルトキハ $7\times2-13\times1=1$ ナルニ因リテ $7(2\times26)-13(26)=26$ ナリ、

是ニヨリテ一ツノ答解ハ $x=52, y=26$ ナリ、故ニ一般ノ答解ハ左ノ如シ、

$$x=52+13m,\ y=26+7m.$$

(コノ場合ニ於テハ、$x=0, y=-2$ ガ適合スルヿハ觀察ニテ明カナリ、是ニ由リテ一般ノ答解ハ $x=13m, y=-2+7m$ ナリ、コレ即チ前ニ得タル結果ト符合スルヿ容易ニ知ラルベシ)

〔例二〕 方程式 $7x+10y=280$ ニ適合スル所ノ $x$ 及 $y$ ノ正整値ヲ索ムベシ。

サテ、$\frac{7}{10}=\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{3}$ ナルヲ以テ、尾ヨリ第二ノ近數ハ $\frac{2}{3}$ ナリ、然レバ $7\times3-10\times2=1$ ナリ、故ニ $7(3\times280)+10(-2\times280)=280$ ナリ、

是ニヨリテ、$x=840, y=-560$ ハ一ツノ整數値ナル答ナリ、故ニ一般ノ整數値ノ答ハ $x=840-10m, y=-560+7m$ ナリ、而シテ $x$ 及 $y$ 正ノ數ナルニハ $m \ngtr 84$ 且ツ $m \nless 80$ ナラザルベカラズ、斯クノ如ク所要ノ答ハ次ノ如シ、

$$x=40, y=0;\ x=30, y=7;\ x=20, y=14;\ x=10, y=21;\ x=0, y=28.$$

〔例三〕 方程式 $3x+5y=1306$ ニ適合スル所ノ $x$ 及 $y$ ノ正整値ハ幾組アルカ、其數ヲ索ムベシ、





コヽニハ $\frac{3}{5}=\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2}$ ナルニヨリテ、$3\times2-5\times1=1$ ナリ、故ニ

$$3\times(2\times1306)+5(-1306)=1306.$$

是ニヨリテ、一般ノ答解ハ $x=2612-5m, y=3m-1306.$ ナリ、

$x$ 及 $y$ ガ正ノ値ノモノナランニハ $m>435, m \ngtr 522$ ナルヲ要ス、

是ニヨリテ答解ノ數ハ $522-435=87$ ナリ

## 第三百九十七條

二ツノ方程式 $ax+by+cz=d$ 及 $a'x+b'y+c'z=d'$ ノ整數ノ答解ハ次ノ如クニシテ索ムルヿヲ得、

何レカ一未知量、例ヘバ $z$、ヲ逐出スベシ、然ルトキハ次ノ方程式ヲ得ベシ、

$$(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)y=dc'-d'c \cdots\cdots\cdots (i)$$

此方程式ハ、モシ $(ac'-a'c)$ ト $(bc'-b'c)$ トガ互ニ素ナラバ整數ノ答解ヲ有スベシ、或ハ又タ互ニ素ナラザルモ、之ヲソノ通因數ニシテ而モ亦 $(dc'-d'c)$ ノ因數タルモノニテ割リタル后ニ互ニ素ナランニハ、矢張マタ整數ノ答解ヲ有スベシ、

是ニヨリテ、前ノ諸條ニ於ケルガ如クニシテ、(i) ヨリ次ノ一般ナル答解ヲ得ベシ、

$$x=\alpha+(bc'-b'c)n,\ y=\beta-(ac'-a'c)n.$$

但シ $x=\alpha, y=\beta$ ハ一ツノ整數ナル答解ニシテ、且ツ $n$ ハ任意ノ整數トス、

サテ、原ノ方程式ノ一ツニ是等ノ値ヲ置キ換フルトキハ、$Az+Bn=C$ ノ形チノ方程式ヲ得ベシ

此方程式ヨリシテ、$A$及$B$ハ相互ニ素ナルカ、或ハ$A$及$B$ノ通因數ニシテ而モ$C$ノ一因數ナルモノニテ之ヲ割リタル后ニ相互ニ素ナル𪜈ハ　$z=\gamma+Bm,\ n=\delta-Am$　ノ形チノ整數ナル答解ヲ得ルヿヲ得ベシ、

〔例〕　聯立方程式　$5x+7y+2z=24,\ 3x-y-4z=4$　ノ整數ナル答解ヲ索ムベシ、

$z$ヲ逐出ス𪜈ハ　$13x+13y=52$, 即　$x+y=4$　ヲ得ベシ、是ニ由リテ　$x=2+n,\ y=2-n$.　斯クスル𪜈ハ、$5(2+n)+7(2-n)+2z=24$　即　$z-n=0$　ヲ得ベシ.

是ニヨリテ、一般ノ答解ハ　$x=2+n,\ y=2-n,\ z=n$.　ナリ、

$x$、$y$、$z$　共ニ正ノ數ナランニハ答解ハ　$x=4,\ y=0,\ z=2;\ x=3,\ y=1,\ z=1;\ x=2,\ y=2,\ z=0$　ニ限ル、モシ亦零ナル値モ除去スベキナラバ答解ハ只一ツニ限ル、即チ　$x=3,\ y=1,\ z=1$　ナリ、

**第三百九十八條**　次ニ擧ゲタルハ不定方程式ノ他ノ例トス、ナホ他ノ場合ハバアロー氏ノ著 Theory of Numbers. ニアリ、就キテ見ヨ、

〔例一〕　方程式　$3x+2y+8z=40$　ニ適合スル所ノ　$x$ $y$ $z$　ノ正整値ヲ索ムベシ、但シ零ナル値ヲ除ク、

明白ニ　$z$　ハ　4　ヨリ大ナルヿ能ハズ、如何ニトイフニ　$x$　及　$y$　ハ零或ハ負ノ値ヲ有スルヿヲ許サヽレバナリ、是ニヨリテ、次ノ方程式アリ、

$$z=4,\ 3x+2y=8;\ z=3,\ 3x+2y=16;\ z=2,\ 3x+2y=24;\ z=1,\ 3x+2y=32.$$





是ニヨリテ所要ノ答解ハ下ノ如クナルヿヲ知ルベシ

2,1,4; 4,2,3; 2,5,3; 6,3,2; 4,6,2; 2,9,2; 10,1,1; 8,4,1; 6,7,1; 4,10,1; 2,13,1.

〔例二〕　方程式　$6x^2-13xy+6y^2=16$　ノ正整答解ヲ索ムベシ、

コノ方程式ハ　$(3x-2y)(2x-3y)=16$　ト書換フルヿヲ得ベク、且ツ　$x$　及　$y$　ハ整數ナルヲ以テ、$3x-2y$　ハ整數ナラザルベカラズ、且ツ又16ノ因數ナラザルベカラズ、斯クノ如クナルヲ以テ、次ニ擧ゲタル聯立方程式ノ何レカハ眞ナラザルベカラズ、

$$3x-2y=\pm16,\quad 2x-3y=\pm1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i});$$
$$3x-2y=\pm8,\quad 2x-3y=\pm2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii});$$
$$3x-2y=\pm4,\quad 2x-3y=\pm4 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iii});$$
$$3x-2y=\pm2,\quad 2x-3y=\pm8 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{iv});$$
$$3x-2y=\pm1,\quad 2x-3y=\pm16 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{v}).$$

是ニヨリテ、$5x$　ハ　$\pm(48-2),\ \pm(24-4),\ \pm(12-8),\ \pm(6-16),\ \pm(3-32)$　ナラザルベカラズ、故ニ　$x$　ノ整數値ハ　4　ト　2　トニ限リ、又コレニ對スル所ノ　$y$　ノ値ハ　2　ト　4　トナルヿヲ知ルベシ、

〔例三〕　方程式　$3x^2+7xy-2x-5y-35=0$　ノ正整答解ヲ索ムベシ、

サテ　$y(7x-5)+3x^2-2x-35=0$;

$$\therefore\ y+\frac{3x^2-2x-35}{7x-5}=0;$$

$$\therefore\ 7y+3x+\frac{x-245}{7x-5}=0.$$

$$\therefore\ 49y+21x+1-\frac{1710}{7x-5}=0.$$

是ニヨリテ、$\frac{1710}{7x-5}$ ハ整數ナラザルベカラズ、故ニ $(7x-5)$ ハ 1710 ノ1因數ナラザルベカラズ、是ニヨリテ、$x$ モシ正整數ナラバ、$(7x-5)$ ノ有シ得ル値ハ $(7x-5$ ハ 5 ノ倍數ナルヿヲ得ザルヲ以テ 342, 171, 114, 57, 38, 19, 18, 9, 6, 3, 2, 1 ニ限ル、是等ノ内ニテ $x$ ノ整數値ヲ與フルモノハ 114, 9, 2 ニ限リ、即チ $x$ ノ値ハ 17 ト 2 ト 1 トナルヿヲ知ルベシ、然レドモ $x=17$ トスルヰハ、$y$ ハ負ノ値ヲ有ス、$x=2$ トスルヰハ $y=3$ ナリ、$x=1$ トスルヰハ $y=17$ ナリ、斯クノ如クナルヲ以テ、正整ノ答解ハ獨リ $x=2, y=3$ 及 $x=1, y=17$ ノミナルヿヲ知ル、

## 第四十例題集

第一　次ニ擧ゲタル方程式ノ正整答解ヲ悉ク索ムベシ、

(1) $7x+15y=59$.　(2) $8x+13y=138$.

(3) $7x+9y=100$.　(4) $15x+71y=10653$.



第二　$2x+3y=133$ 及 $7x+11y=2312$ ノ正整答解ハ幾箇アルカ、

第三　次ノ方程式ノ一般ナル整數答解ヲ索ムベシ、

(1) $7x-13y=15$.　(2) $9x-11y=4$.

(3) $119x-105y=217$.　(4) $49x-69y=100$.

第四　次ニ擧ゲタル方程式ノ正整答解ヲ索ムベシ、但シ零ナル値ハ除ク、

(1) $2x+3y+7z=23$.　(2) $7x+4y+18z=109$.

(3) $\begin{cases}5x+y+7z=39,\\ 2x+4y+9z=63.\end{cases}$　(4) $\begin{cases}3x+2y+3z=250,\\ 9x-4y+5z=170.\end{cases}$

第五　次ノ方程式ノ正整答解ヲ索ムベシ、但シ零ナル値ハ除ク、

(1) $2xy-3x+2y=1329$.　(2) $x^2-xy+2x-3y=11$.

(3) $2x^2+5xy-12y^2=28$.　(4) $2x^2-xy-y^2+2x+7y=84$.

第六　方程式 $ax+by+cz=d$ ニ適合スル所ノ $x$ $y$ $z$ ノ整數値ハ三ツノ等差級數ヲナスベキヲ證明セヨ、

第七　三百十六ヲ兩分シ、其ノ一分ハ十三ノ倍數、他ノ一分ハ十一ノ倍數ナラシメヨ、

第八　貳志半ノ銀貨ト貳志（フローリン）ノ銀貨トヲ以テ壹磅六志六片ノ仕拂ヲナサントス、幾通リノ仕方アリヤ、

第九　貳拾壹志ノ金貨ト五志（クラウン）ノ銀貨トヲ以テ百磅ノ金額ヲ拵ヘントス、其仕方幾通リアリヤ、

第十　五志ノ銀貨八枚ヲ持テル一人、貳志ノ銀貨ノミヲ持テル他ノ一人ニ拾壹志ノ仕拂ヲ爲サントス、幾通リノ拂ヒ樣アルカ、

第十一　貳志半及貳志ノ兩種ノ貨幣ヲ用ヰテ、丁度八通リニ拂フヿヲ得ル金額ノ最大額及最小額ヲ索ムベシ、

第十二　四片及三片ノ兩種ノ貨幣ヲ用ヰテ、丁度三通リニ拂フヿヲ得ル金額ヲ悉ク索ムベシ、

第十三　貳數字ヨリ成リ、且ツ其二數字ノ倍數タル數ヲ悉ク索ムベシ、

第十四　何レモ貳數字ヨリ成リ、且ツ同ジ數字ヲ以テ終レル兩數アリ、9ヲ以テ之ヲ割ルニ、一數ヨリ得ラルヽ商ト他ノ一數ヨリ得ラルヽ剩餘ト相等シトイフ、斯カル要件ヲ具ヘタル諸數ヲ悉ク索ムベシ、

第十五　紀元壹千八百八拾七年ニ或ル人ノ年齡ハ、其ノ誕生ノ年ノ年號ノ數ニ於ケル數字ノ和ニ等シトイヘリ、當時何歲ノ人ナルカ、

第十六　モシ $\dfrac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_n})}=1+A_1x+\cdots+A_nx^n+\cdots$ ナラバ、方程式 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=m$ ノ正整根（零ヲモ算入ス）ハ $A_m$ 組アルベシ、但シ $a_1$、$a_2$、…$a_n$ ハ皆整數ト假定ス、

方程式 $x+2y=n$ ノ正整根ハ $\frac{1}{4}[2n+3+(-1)^n]$ 組アリ、

或ル集會ニ於テ、壹志、貳志、及五磅ノ三等ノ入場料ヲ徵收シタルニ總額壹千磅ノ入場料ヲ得タリトイフ、然ルトキハ集會者ノ組織ハ壹百萬五千貳百〇壹通リノ内ノ何レカナルベシ、其ノ證ヲ索ムベシ、

第十七　或ル音樂會ノ入場料三百磅アリ、且ツ一人ノ入場料ハ上等五志、中等三志、下等壹志ノ三等ナリシトイフ、然ラバ入場者ノ組織ハ壹百貳拾萬壹千八百〇壹通リノ内ヲ出ヅベカラズ、其ノ證ヲ索ムベシ、

# 第三十編「確カラシサ」(Probability).

第三百九十九條　「確カラシサ」ノ一般ノ定義ハ左ノ如シ、

定義　一ツノ出來事ガ起ルヿヲ得ル場合ノ數ヲ $a$ トシ、其起ラザルヿヲ得ル場合ノ數ヲ $b$ トシ、且此等ノ場合ハ何レモ同樣ナリトスルトキハ、此ノ出來事ノ起ル「確カラシサ」ハ $\dfrac{a}{a+b}$ ニシテ、又其起ラザル「確カラシサ」ハ $\dfrac{b}{a+b}$ ナリ

右ノ定義ヲシテ完全ナラシメンニハ、同樣トイフヿノ意ヲ說明セザルベカラズ、若干ノ出來事ハ同樣ナリトハ、其イヅレヲ取リテ考フルモ、其起ランヿヲ豫メ望ムベキ理由ニ差等ナキヲイフナリ

例ヘバ、一ツノ袋ノ中ニ黑球ト白球トアルヿハ知レタレドモ、其ノ數ニ付キテハ更ニ知レズトセ

ヨ、今ソノ球一ツヲ無心ニ抽キ出サンニ其ノ白ナランヿト望マルヽ理由ト、黒ナランヿト望マルヽ理由トハ、更ニ差等ナカルベシ、即コレヲ「黒ノ出ヅルヿト白ノ出ヅルヿトハ同樣ナリトイフナリ」、斯ク此例ニ於テハ黒ノ出ヅル場合ト黒ノ出デヌ場合ト、二ツノ場合アリテ、且其二ツノ場合ノ起ルヿハ同樣ナルニ因リテ黒ノ出ヅル「確カラシサ」(或ハ出ヅルラシサ)ハ、右ノ定義ニヨリテ1/2ナリ、又黒ノ出デサル「確カラシサ」(或ハ出デヌラシサ)ハ1/2ナリ、然ルニ此例ニ於テハ黒カ白カ必ズ出ヅルヿニテ黒ノ出デザルヿハ即白ノ出ヅルヿナレバ、白ノ出ヅル「確カラシサ」モ亦1/2ナリ

又、黒、白、赤ノ三色ノ球ヲ入レタル袋ヨリ、無心ニ一ツヲ抽キ出ストセンニ、其ノ三色ノ球ノ數ノ割合、全ク知レザランニハ、抽キ出ス丸ノ何色ナルカハ固ヨリ豫期シ難シ、即チ黒ナランヿト、白ナランヿト、赤ナランヿト、イヅレモ同樣ナリ、是ニヨリテ或ル一色ノ球ノ出ヅベキ「確カラサシ」ハ1/3ナリ、如何ニトイフニ、出ヅル所ノ丸ハ必ズ黒カ白カ赤カノ何レカニテ、此ノ三ツノ場合ノ中、例ヘバ黒ノ出ヅル場合ハ一ツ、黒ノ出デヌ場合(即、白或ハ赤ノ出ヅル場合)ハ二ツニテ、且ソノ三ツハ同樣ナレバ、定義ニヨリテ、黒ノ出ヅル「確カラシサ」ハ1/3ナラザルベカラズ、白ノモ赤ノモ皆コレニ同ジ、

同樣トイフヿハ尙ホ他ノ意ニモ考フルヿヲ得ベシ、則永キ經驗ニ照シ若干ノ出來事ガ同ジ度數起ルナラバ此等ノ出來事ハ同樣ナリトイフヲ得ベシ、例ヘバ一箇ノ錢ヲ投クルニ、或ハ表面(かた)或ハ裏面(なめ)ガ出デ、且表面ノ出ル度數ト裏面ノ出ル度數トハ必ズシモ同ジカラズ、然レモ其度數ヲ多クスル𪜈ハ二ツノモノノ度數ノ比ハ次第ニ一ニ近ヅクベシ、永キ經驗ニ照シ同ジ度數起ルトハ、此ノ意ナリ

今、モシ或ル出來事ノ起ルベキ $a$ 箇ノ場合ノ各ト、及ソノ起ラヌ $b$ 箇ノ場合ノ各トガ、終ニハ同ジ度數ダケ起ランニハ、其ノ始終ヲ通ジテ言ヘバ、$(a+b)$ ダケノ場合ノ中ノ、$a$ ダケニ於テハ其出來事ガ起リ、$b$ ダケニ於テハ其出來事ガ起ラヌ割合ナルヤ明カナリ、故ニ前ノ定義ト矛盾スルヿナクシテ能ク次ノ如クイフヿヲ得ベキナリ、曰ク或ル出來事ノ「確カラシサ」トハ、永キ經驗ニ照シ、其ノ起ル度數ガ終ニソノ起ル度數ト起ラヌ度數トノ和ニ對シテ有スル比ナリト、

例ヘバ、永キ經驗ニ照シ、四十一人ノ出生中、廿一人ハ男子、廿人ハ女子ノ割合ナリトイフ𪜈ハ、或ル出產ニ於テ男兒ガ生レントイフ「確カラシサ」ハ四十一分ノ二十一ナルガ如シ、

マタ、二人アリテ賭博ヲ爲セルニ、永キ間ノ始終ヲ通ジテ見レバ、八番ノ中、五番ハ甲勝チタル割合ナリトイフ𪜈ハ、或ル一番ノ賭ニ於テ、甲ノ勝タントイフ「確カラシサ」ハ八分之五ナリ、

多クノ場合、特ニ生命保險會社ニ於テ用ヰル材料ノ如キ實地有益ノ場合ニ於テ、「確カラシサ」ヲ算定スル、專ラ後ノ方法ニ依リ、大數ノ度數ヲ採リテ、其內或ル出來事ノ現ニ起ル度數ノ、其ノ起リタル度數ト其ノ起ラザリシ度數トノ和ニ對スル比ヲ索ムルナリ、

(譯者曰ク、爰ニ「確カラシサ」ニ前後二樣ノ定義ヲ揭ゲリ、而シテ此等兩樣ノ定義ハ互ニ相異ナレリ、本來「確カラシサ」ノ定義ハ前ナルモノナリ、後ナルハ通例經驗的「確カラシサ」(Empirical Probability)ト稱スルモノニシテ全ク別物ナリ、原文之ヲ同一視ス、其當ヲ得タルモノニアラズ)

第四百條　全ク確カナル出來事ハ何レノ場合ニ於テモ必ズ起ルベケレバ、其ノ「確カラシサ」ハ一ナリ

マタ「確カラシサ」ノ定義ニヨリテ、直ニ知ラルヽ通リ、或ル出來事ノ起ル「確カラシサ」ヲ$p$トスルトキハ、$(1-p)$ハ其ノ起ラヌナルベシ

或ル事ノ起ル確カラシサノ、其ノ起ラヌ「確カラシサ」ニ對スル比ヲ、$a:b$トスルトキ、$a$モシ$b$ヨリモ大ナラバ、其ノ事件ハ$b$ニ對スル$a$ヲ以テ成ルトイヒ、又$a$モシ$b$ヨリモ小ナラバ、其ノ事件ハ$a$ニ對スル$b$ヲ以テ敗ルトイフ、

第四百一條　同時ニ成立ツヿ能ハヌ出來事　(Exclusive Events.) 若干ノ出來事ノ中何レニテモ一ツガ起ルトイフヿト、其ノ餘ノモノガ起ルトイフヿト、兩立スルヿ能ハザルトキハ、夫等ノ出來事ヲ稱シテ同時ニ成立ツヿ能ハヌ出來事トイフ、

相異ナル若干ノ出來事、ミナ同時ニ成リ立ツヿ能ハザルモノナルトキハ、夫等ノ出來事ノ何レカ一ツガ起ラントイフ「確カラシサ」ハ其ノ各ノ出來事ノ「確カラシサ」ノ和ニ等シ、

マヅ、三箇ノ出來事アル場合ヲ考ヘナバ、十分ナルベシ、

今、ソノ三ツノ出來事ノ各々ノ「確カラシサ」ヲバ、通分母ヲ有スル分數ニテ表ハシタルモノヲ

$$\frac{a_1}{d}、\frac{a_2}{d}、及\ \frac{a_3}{d}、$$

トスベシ、然ルトキハ「確カラシサ」相等シキ$d$箇ノ場合ノ中ニテ、其ノ三ツノ出來事ハ、夫々ニ$a_1$、$a_2$、及$a_3$ダケノ場合ニ起ルヿトナル、





是ニヨリテ、「確ラシサ」相等シキ$d$箇ノ場合中、右ノ三ツノ出來事ノ何レカ一ツノ起ル場合ハ$(a_1+a_2+a_3)$箇アルベシ、ソハ此等ノ出來事ハ同時ニ起ルヿナケレバナリ、是ニヨリテ、三ツノ出來事ノ何レカ一ツガ起ルベキ「確カラシサ」ハ、

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{d} \quad 即 \quad \frac{a_1}{d}+\frac{a_2}{d}+\frac{a_3}{d} \quad ナリ、$$

コレ同時ニ成リ立ツヿ能ハザル出來事、三ツアル場合ニ本定理ノ眞ナルヿヲ證明スルモノナリ、其他ノ場合モ皆コレト同様ニ證明シ得ベシ、

〔例一〕　普通ノ六面体ノ賽ヲ一タビ振ルトキ、三ガ出ヅル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

借ソノ3ナルベキ場合ハ一ツ、3ナラザル(即1,2,4,5,6、ナルベキ)場合ハ五ツアリ且ツ各ノ面ノ出ヅルヿハ同様ナルニヨリ、$\frac{1}{6}$ヲ以テ答トス、

〔例二〕　普通ノ賽ヲ以テ、半數ヲ振リ出ス「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

〔例三〕　五ツノ白キ球ト、七ツノ赤キ球トヲ入レタル袋ヨリ抽キ出シタル一ツノ球ノ、赤ナルベキ「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

爰ニ赤ナルベキ場合ハ七ツ、赤ナラザル(即白ナルヘキ)場合ハ五ツアリ、且コノ都合十二箇アル場合ハ皆同様ナリ、即$\frac{7}{12}$ヲ得テ所要ノ「確カラシサ」トス

〔例四〕　五ツノ赤キ球ト、七ツノ白キ球トヲ入レタル袋ヨリ、二ツヲ抽キ出ダスニ、其ノ二ツトモ白ナルベキ「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

サテ袋ニハ何レノ二ツガ抽キ出ダサルル「確カラシサ」モ皆相等シク、且ツソノ二ツヅツ取ルコトハ $_{12}C_2$ 通リノ仕方アリテ、ソノ中ニテ二ツモ白ナル場合ハ $_7C_2$ 箇ダケアリ、故ニ所要ノ「確カラシサ」ハ、左ノ如シ、

$$\frac{_7C_2}{_{12}C_2}=\frac{\dfrac{7.6}{1.2}}{\dfrac{12.11}{1.2}}=\frac{7}{22}.$$

〔例五〕　赤キ球三ツト、白キ球二ツトヲ入レタル袋ヨリ、二ツヲ抽キ出ダス時ハ、其ノ共ニ赤ナルヘキコトハ、三ニ對スル七ヲ以テ敗レントイフコトヲ證明スヘシ

〔例六〕　黒、白、赤ノ三色ノ球、各々二ヅツヲ入レタル袋ヨリ、無心ニ三ツヲ抽キ出ダス時ハ、各色ノ球ノ出ヅルコトハ、二ニ對スル三ヲ以テ敗ルベク、マタ白ガ二ツ出ヅルコトハ、一ニ對スル四ヲ以テ敗ルベシトイフコトヲ證明スベシ、

〔例七〕　$n$ 人ヨリ成レル一群、全ク無心ニ一圓卓ヲ圍ミテ着席スル時ニ、或ル兩人ガ相隣ルベキコトハ、二ニ對スル $n-3$ ヲ以テ敗レントイフコトヲ證明ス可シ、

**第四百二條　關係ナキ出來事** (Independent Events.) 二ツノ關係ナキ出來事ノ同時ニ起ル確カラシサハ、其ノ各々ガ別々ニ起ル確カラシサノ相乗積ニ等シ、

イマ、第一ノ出來事ノ起ル場合ハ $a_1$ 箇、其ノ起ラヌ場合ハ $b_1$ 箇アリテ、且ツソノ $a_1$ 箇ノ各ト、$b_1$ 箇ノ各トハ、同樣ナリトセヨ、マタ第二ノ出來事ノ起ル場合ハ $a_2$ 箇、其ノ起ラヌ場合ハ $b_2$ 箇アリテ、又ソノ $a_2$ 箇ノ各ト、$b_2$ 箇ノ各、イツレモ同樣ナリトセヨ、サテ $(a_1+b_1)$ 箇ノ場合ノ各ト $(a_2+b_2)$ 箇ノ場合ノ各トヲ組合ハスル時ハ、$(a_1+b_1)(a_2+b_2)$ 箇ノ二ヅツ組ミ合ハセタル同樣ノ場合ヲ得ベシ、而シテ其ノ内ノ $a_1a_2$ 箇ノ場合ハ兩出來事ノ共ニ起ル所ノモノナリ、是ニ因リテ兩出來事ノ共ニ起ル「確カラシサ」ハ

$$\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \quad 即 \quad \frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{a_2}{a_2+b_2} \quad ナリ。$$

即本題ヲ證明スルモノナリ、

斯ク、二ツノ關係ナキ出來事各自ノ「確カラシサ」$p_1$ 及 $p_2$ ナルモノ、同時ニ起ルベキ「確カラシサ」ハ $p_1\times p_2$ ナリ

系　二ツノ互ニ關係ナキ出來事ノ「確カラシサ」ヲ $p_1$、$p_2$ トスル時ハ二ツモ起ラヌ「確カラシサ」ハ $(1-p_1)(1-p_2)$、マタ第一ノ出來事ハ起ルモ第二ノ出來事ハ起ラヌ「確カラシサ」ハ $p_1(1-p_2)$、マタ第二ノ出來事ハ起ルモ第一ノ出來事ハ起ラヌ「確カラシサ」ハ $(1-p_1)p_2$ ナリ、

互ニ關係ナキ若干ノ出來事各ノ自ノ「確カラシサ」ヲ $p_1$、$p_2$、$p_3$、… トスルトキハ、ソノ出來事ガ悉ク同時ニ起ルベキ「確カラシサ」ハ $p_1p_2p_3$… ニシテ、又ソノ諸出來事ガ一ツモ起ラス「確カラシサ」ハ $(1-p_1)(1-p_2)$… ナルコト等モ同法ニテ證明スルコトヲ得ベキナリ、

**第四百三條　關係アル出來事** (Dependent Events.) 二ツノ相關係セル出來事アリテ、其

ノ第二ノ出來事ノ「確カラシサ」ハ、第一ノ出來事ノ起ル片ト其ノ起ラヌ片トニヨリテ相異ナル場合アリ、斯カル場合ニモ前條ノ推理ハ通用スベキナリ、但シ前條トハ異ナリテ此處ニテハ $p_2$ ヲ以テ、第一ノ出來事ガ起リタル場合ニ第二ノ出來事ノ起ルベキ「確カラシサ」トセザルベカラズ、斯クノ如ク、$p_1$ ヲ以テ第一ノ出來事ノ起ル「確カラシサ」トシ、$p_2$ ヲ以テ、第一ノ出來事ハ旣ニ起リタルモノト假定シタル場合ニ於ケル、第二ノ出來事ノ起ル「確カラシサ」トスル片ハ、兩出來事ノ併ヒ起ル確カラシサハ $p_1 \times p_2$ ナルベシ、ソノ他、關係アル出來事幾件アリモ、皆コレニ準フ、

[例一] 一枚ノ錢ヲ二タビ投グル片、二度モ表面ガ出ヅル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

サテ表面ガ出ヅル確カラシサハ、每度ニ $\frac{1}{2}$ ナレバ、第四百二條ニヨリテ、所要ノ「確カラシサ」ハ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ナルヲ知ルベシ、

[例二] 普通ノ骰ヲ六タビ振ル片、少クモ一タビハ6ガ出ヅル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

コヽニ6ガ出デザル「確カラシサ」ハ、每度ニ $\frac{5}{6}$ ナルヲ以テ、六タビ投ゲテ一度モ6ガ出デザル「確カラシサ」ハ第四百二條ニヨリテ、$\frac{5}{6}$ ノ六乘冪ナルヿヲ知ル、是故ニ、少クモ一度ハ6ガ出ヅル「確カラシサ」ハ、$1-\left(\frac{5}{6}\right)^6$ ナリ、

[例三] 五ツノ赤キ球ト、七箇ノ白キ球トヲ入レタル袋ヨリ無心ニ二ツノ丸ヲ、一ヅツ二度ニ抽キ出ダス片、其ノ二ツトモ白ナルベキ「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

マヅ第一回ニ白ガ出ヅル確カラシサハ $\frac{7}{12}$ ナリ、サテ第一回ニ白ガ出タリトスル片ハ殘リハ赤五ツト白六ツトナルベシ、是故ニ第二回ニモ白ガ出ヅル確カラシサハ、$\frac{6}{11}$ ナリ斯クノ如クナレバ、第四百三條ニヨリテ、二度トモ白ガ出ヅル「確カラシサ」ハ $\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{7}{22}$ ナリ、(ナホ第四百一條ナル[例四]ヲ參考スベシ)、

[例四] 五ツノ赤キ球、七ツノ白キ球ヲ入レタル袋、マタ三ツノ赤キ球、十二ノ白キ球ヲ入レタル袋アリ、今ソノ二ツノ何レニトハ無ク手ヲ入レテ、一ツノ球ヲ引キ出ス片ハ、其ノ赤ナルベキ「確カラシサ」ハ何程ゾ、

コヽニハ、二ツノ袋ノ何レニトハ無ク手ヲ入ルヽヿユヱ、マヅ第一ノ袋ニ手ノ入ルベキ「確カラシサ」ハ $\frac{1}{2}$ ナリ、サテ第一ノ袋ヨリ一ツヲ抽キ出ダスヿトセバ、其ノ赤ナルベキ「確カラシサ」ハ $\frac{5}{12}$ ナリ、是ニ因リテ第一ノ袋ヨリ赤ヲ抽キ出ダス「確カラシサ」ハ $\frac{1}{2}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{24}$ ナリ、

マタ同理ニテ、第二ノ袋ヨリ赤ヲ出ダスベキ「確カラシサ」ハ $\frac{1}{2}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{10}$ ナリ

サテ、第一ノ袋ヨリスルヿト第二ノ袋ヨリスルヿトハ、同時ニ成リ立チ難キ出來事ナレバ、所要ノ「確カラシサ」ハ、$\frac{5}{24}+\frac{1}{10}=\frac{37}{120}$ ナリ、

[例五] 赤球二ツト白球十トヲ、二ツノ袋ニ分チ入レテ、何レモ空ナラザラシメントス、サテ如何ニ分チ配リタラバ、其ノ何レヨリモナク、一ツノ袋ヨリ、一ツノ球ヲ抽キ出ス片ニ、赤ノ出ヅル「確カラシサ」ハ、最小ナルベキカ (1) 最大ナルベキカ (2)、

(1) 一ツノ袋ニハ唯一ツノ而カモ白キ球アル場合ニハ、右ノ「確カラシサ」最小ニシテ即 $\frac{1}{11}$ ナリ、

(2) 一ツノ袋ニハ唯一ツノ而モ赤キ球アル場合ニハ「確カラシサ」最大ニシテ、即 $\frac{6}{11}$ ナリ、

**第四百四條** 一回ノ試シニ於テ或ル出來事ノ起ル「確カラシサ」知レタル時ハ、$n$ 回ノ試シニ於テ丁度其出來事ガ一回、二回、三回、……起ル「確カラシサ」モ、直ニ筆下スルヿヲ得ベシ、如何ニトイフニ、$p$ モシ一回ノ試シニ於テ其出來事ノ起ル「確カラシサ」ヲ表ハスナラバ、其ノ起ラヌ「確カラシサ」ハ $1-p=q$ ナリ、サレバ、如何ナル順序ニナリモ、一定ノ順序ニ其ノ $r$ 回ハ起リ $(n-r)$ 回ハ起ラヌ「確カラシサ」ハ第四百二條ニ據リテ、$p^rq^{n-r}$ ナリ、然ルニ其事ガ $n$ 回試ス中ニ丁度 $r$ 回ダケ起ルヿニハ ${}_nC_r$ 通リノ仕方アリ、且ツハ皆ソノ「確カラシサ」ヲ等フシ、又同時ニハ成リ立ツヿ能ハザル所ノモノナリ、是ニ因リテ、$n$ 回ノ試シニ丁度 $r$ タビ其出來事ノ起ルベキ「確カラシサ」ハ ${}_nC_rp^rq^{n-r}$ ナリ

斯クノ如クナルヲ以テ、$(p+q)^n$ ヲ二項定理ニヨリテ展開スル時ハ其ノ展開ニ於ケル項ハ、次々ニ $n$ 回試ス中ニ丁度 $n$ 回、$(n-1)$ 回、$(n-2)$ 回、……其出來事ガ起ルベキ「確カラシサ」ヲ表ハスベシ、

**系一** $n$ 回ノ試シニ於テ成敗ノ「カ確ラシサ」最大ナル（即最確カラシキ）ハ、何回ダケ成リテ何回ダケ敗ルヽヿナルカハ、$(p+q)^n$ ノ展開ニ於ケル最大項ヲ索ムレバ知ラルベシ、

**系二** $n$ 回ノ試シニ於テ少クモ $r$ 回ハ或ル出來事ガ起ルベキ「確カラシサ」ハ、左ノ如シ、

$$p^n+n.p^{n-1}q+\frac{n(n-1)}{1.2}p^{n-2}q^2+\dots+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}p^rq^{n-r}.$$



〔例一〕 四ツノ賽ヲ以テ十ヲ振リ出ス「確カラシサ」ハ如何、各ノ賽ノ表面ニハ六數ノ中ノ何レノ一數カハ現ハルルヿ故、$6^4$ 通リダケノ出デ樣アルベシ、又十ガ出ヅルヿハ其仕方ノ數、丁度 $(x+x^2+\dots+x^6)^4$ ニ於ケル $x^{10}$ ノ係數ニ等シカルベシ、如何ニトイフニ、此係數ハ是レ 1 2 3 4 5 6 ノ六數ヨリ四數（同ジ數ヲ幾遍取ルモヨシトシテ）ヲ取リ其ノ和ノ十ナル場合ノ數ヲ與フルモノナレバナリ、サテ $(x+x^2+\dots+x^6)^4=x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$ ニ於ケル $x^{10}$ ノ係數ハ八十ナルヿ容易ニ知ラルヽヲ以テ所要ノ「確カラシサ」ハ $80\div6^4=\frac{5}{81}$ ナリ、

〔例二〕 二ツノ賽ヲ以テ 8 ヲ出ダス「確カラシサ」ヲ索ムベシ、 答卅六分ノ五、

〔例三〕 二ツノ賽ヲ以テ 10 ヲ出ダス「確カラシサ」ヲ索ムベシ、 答十二分ノ一、

〔例四〕 三ツノ賽ヲ以テ 15 ヲ出ダス「確カラシサ」ヲ索ムベシ、 答百八分ノ五、

〔例五〕 甲乙各々一ツノ賽ヲ投グル時、甲ノ得ルモノハ乙ノ得ルモノヨリ大ナラヌヿハ 5 ニ對スル 7 ヲ以テ成ラントイフヿヲ證明スベシ、

〔例六〕 甲乙各二箇ノ賽ヲ投ゲ出シテ各同數ヲ得ル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

答六百四十八分ノ七十三

〔例七〕 一回々々ノ勝負事ニ於テ、甲ガ勝ツ「確ラシサ」ガ乙ハ勝ツ「確ラシサ」ニ同シ、サテ此勝負事ヲ繰リ返シ續ケ行ヒ甲乙各ガ勝チタル度數ヲ數ゾヘ、最初ニ六回ノ勝ヲ得タル者ヲ以テ全

体ノ勝者トス、今 (1) 甲ガ五回勝チ乙ガ四回勝チタルトキ、(2) 甲ガ五回勝チ乙ガ三回勝チタルトキ、(3) 甲ガ四回勝チ乙ガ二回勝チタルトキ、此等ノ場合ニ於テ、ソレゾレニ甲ガ全体ノ勝ヲ制スル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、

答 (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{7}{8}$, (3) $\frac{13}{16}$

〔例八〕 一回々々ノ勝負事ニ於テハ、甲ガ勝ツ「確カラシサ」ハ乙ガ勝ツ「確カラシサ」ニ同シ、然ルニ全体ノ勝ヲ制スルニハ、甲ハ尚ホ二回ノ勝ヲ要シ、乙ハ三回ノ勝ヲ要ス、此時ニ於ケル甲ガ全体ノ勝ヲ制スル「確カラシサ」ハ十六分ノ十一ナルヿヲ證明スベシ、

〔例九〕 一回々々ノ勝負事ニ於テハ甲ガ勝ツ「確カラシサ」ハ乙ガ勝ツ「確カラシサ」ニ同シ、然ルニ全体ノ勝ヲ制スルニハ、甲ハ尚ホ $n$ 回ノ勝、乙ハ $(n+1)$ 回ノ勝ヲ要ス、此時ニ於テ甲ガ全体ニ勝ツ「確カラシサ」ノ、甲ガ全体ニ負ケル確カラシサニ對スル比ハ、

$1+\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots2n}$ ノ $1-\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots2n}$ ニ對スル比ニ等シキヿヲ證明スベシ

〔例十〕 甲ガ乙ニ對シ一回ノ勝負ニ勝チ得ル「確カラシサ」ハ $\frac{3}{5}$ ナリ、今甲ガ三回ノ勝負ニ於テ二回以上勝ツ「確カラシサ」ヲ索ムベシ　答 $\frac{81}{125}$

〔例十一〕 甲ガ乙ニ對シ一回ノ勝負ニ勝ツ「確カラシサ」ハ $\frac{2}{3}$ ナリ、今甲ガ五回ノ勝負ニ於テ三回以上勝ツ「確カラシサ」ヲ索ムベシ　答 $\frac{192}{243}$

〔例十二〕 一ツノ骰ヲ六回投ゲ出シテ、二回以上六ヲ得ル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、答 $\frac{12281}{46656}$

〔例十三〕 一箇ノ錢ヲ續ケサマニ五回投ゲ出シ、其内三回續キテ同シ面(表或ハ裏)ヲ得ル「確カラシサ」ハ二分ノ一ナルヿヲ證明スベシ、

〔例十四〕 三人順番ニ錢ヲ投ゲ出シ、最初ニ表面ヲ得タルモノヲ以テ勝者トス、此等三人各ガ勝ツ「確カラシサ」ヲ索ムベシ、　答 $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$

## 第四百五條

或ル出來事モシ起ラバ一定ノ金高ガ或ル人ノ手ニ入ルトイフ場合ニ於テ、其ノ金額ガ得ラルヽ「確カラシサ」ノ値ヲ稱シテ、其人ノ望ミ (Expectation.) トイフ、

今、或ル出來事起ラバ $M$ ダケノ金高ガ得ラルヽトイフヰ、其出來事ノ起ル「確カラシサ」若シ $\frac{a}{a+b}$ ナラバ、其ノ場合ノ望ミハ $M\times\frac{a}{a+b}$ ナリ、

如何ニトイフニ $E$ ヲ以テ一回ノ試シニ於ケル望ミトスルヰハ、$E(a+b)$ ハ $(a+b)$ 回ノ試シニ於ケル望ミナルベシ、然ルニ「確カラシサ」$\frac{a}{a+b}$ ナリトイヘバ、平均シテ $(a+b)$ 回ノ試シニ $a$ 度ダケ $M$ ヲ得ラルヽ割合ナリ、是ニ因リテ $(a+b)$ 回ノ試シニ於ケル望ミハ $Ma$ ナルベシ、乃 $E(a+b)=Ma$ ナリ、是故ニ

$$E=M\times\frac{a}{a+b}.$$

斯クノ如クナルヲ以テ望ミハ、得ラルベキ金高ニ、ソノ得ラルヽ確カラシサヲ掛ケタルモノナ

リ、

〔例一〕 五ツノ白球ト、七ツノ黒球トヲ入レタル袋アリ、一人アリ其ノ中ヨリ球一ツヲ抽キ出ダスヿヲ許サレ、且黒ガ出ヅレバ壹志、白ナラバ五志ヲ受取ル約ヲナセリ、然ラバ其人ノ望ミハ何程ナルカ、

コヽニ黒ノ出ヅル「確カラシサ」ハ $\frac{7}{12}$ ナレバ、黒ガ出ヅル方ノ望ミハ七片ナリ、又白ガ出ヅル「確カラシサ」ハ、$\frac{5}{12}$ ナレバ、白ガ出ヅル方ノ望ミハ二志一片ナリ、然ルニ黒ガ出ヅルヿト白ガ出ヅルヿトハ同時ニ成リ立ツヿ能ハヌヿナレバ、全クノ望ミハ二志八片ナリ、

〔例二〕 一磅ノ貨幣二枚ト、二志半ノ貨幣三枚ト、一志ノ貨幣七枚トヲ入レタル財嚢アリ、今(1)ソノ中ヨリ一枚ヲ抽キ出ダスヿヲ許サレタリトセバ何程ヲ拂フベキカ(2)マタ二枚ヲ抽キ出スヿヲ許サレタル場合ハ如何、 答 (1) 四志六片半、 (2) 九志一片

〔例三〕 兩人アリ交互ニ一志ノ貨幣ヲ投ゲ、最初ニ表面ヲ得タルモノハ一志ヲ得ベキヿヲ約セリ、然ルトキハ兩人ノ望ミハ何程ナルカ 答 八片、四片、

〔例四〕 兩人アリ交互ニ一ツノ賽ヲ投ゲ、先キニ6ヲ出ダシタルモノハ十一志ヲ得ベキヿヲ約セリ兩人ノ望ミハ如何、 答 六志、五志、

**第四百六條** 逆（ギャク）「確カラシサ」 (Inverse Probability.) 一ツノ出來事ノ起リタルヿ、及ソハ必ズ或ル一定數ノ原因ノ一ヨリ出デタルヿ、ノ知レタルトキニ、夫等ノ何レニテモ一ツガ現實ノ原因ナラントイフ確ラシサヲ定ムルヿヲ稱シテ逆確カラシサノ問題トイフ、




例ヘバ、一ツノ黒キ球アリ、ソハ黒二ツト白七ツトヲ含メルモノト、黒五ツト白四ツトヲ含メルモノトノ二ツノ袋ノ何レカヨリ出デタルヿヲ知ルトキ、其球ガ第一ノ袋ヨリ出デタリトイフ「確カラシサ」ヲ索ムルニ、サテ極メテ大數、例ヘバ $2N$、ヲ抽キ出シタルモノトセバ、終ニハ各々ノ袋ヨリ $N$ ヅツ出ヅルヿトナルベシ、然ルニ第一ノ袋ヨリ $N$ ダケヲ出スヿトセバ、始終ヲ平均シタル所ニテ、$\frac{2}{9}N$ ダケハ黒ナルベシ、マタ第二ノ袋ヨリ出シタル $N$ ノ中ニハ $\frac{5}{9}N$ ダケ黒ナルベシ、是ニヨリテ $\frac{2}{9}N+\frac{5}{9}N$ ノ黒ノ内ニテ $\frac{2}{9}N$ ダケハ第一ノ袋ヨリ抽キ出サルヽ割合ナリ、斯クノ如クナルヲ以テ、右ノ球ガ第一ノ袋ヨリ出デタリトノ「確カラシサ」ハ $\frac{2}{9}N \div (\frac{2}{9}N+\frac{5}{9}N)=\frac{2}{7}$ ナリ、

次ニ公通ノ命題ニ就キテ證明セン

或ル出來事ハ原因タルベキモノハ $n$ 箇アリ何レモ同時ニ成立ツヿ能ハザルモノトス、即 $n$ 箇ノ中其一ツガ眞ノ原因ナラザルベカラザルモノトス、今此等ノ $n$ 箇ガ眞ノ原因ナルベキ「確カラシサ」ヲ夫々ニ $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$ ヲ以テ表ハシ、又ソレガ眞ノ原因ニテアリタラバソレヨリシテ此出來事ノ起ルベキ「確カラシサ」ヲ夫々ニ $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ ヲ以テ表ハストキハ、其事件ノ實際ニ起リタル場合ニ、ソハ第 $r$ 原因ニ出デタラントイフ「確カラシサ」ハ $P_r p_r \div (P_1p_1+P_2p_2+\ldots+P_np_n)$ ナリ

多クノ度數即チ $N$ 度ダケ試ミルヿトセヨ、然ルトキハ第一ノ原因ハ其ノ $N.P_1$ 箇ノ場合ニ於テ成リ立チ、且ツ其出來事ハ $N.P_1p_1$ 箇ノ場合ニ於テ出デ來ルベシ、ソレト同ジク亦第二原因モ

右ノ$N$度ノ内ノ$N.P_2$ダケニ於テ成リ立チ、且ツ其出來事ハ$N.P_2.p_2$箇ノ場合ニ於テ出デ來ルベシ、其ノ他モ之ニ準フ、

是ニヨリテ其出來事ガ第$r$原因ニ歸スルヿハ、全數$N(P_1p_1+P_2p_2+\dots+P_np_n)$ノ内ノ$N.P_r.p_r$箇ダケノ場合ナルベシ、乃チ第$r$原因ノ「確カラシサ」ハ$\frac{P_rp_r}{\Sigma P_p}$ナルヲ知ルベシ、

カク各々ノ原因ノ成立ツベキ「確カラシサ」ハ既ニ知レタルヲ以テ、其出來事ガ二回目ノ試ミノ時ニ出デ來ルベキ「確カラシサ」モ直チニ知ルヿヲ得ベキナリ、

如何ニトイフニ、今第$r$原因ノ成立ツベキ「確カラシサ」ヲ$P'_r$トスル時ハ、$p_r$ハ第$r$原因ノ成立ツ時ニ其出來事ノ起ルベキ「確カラシサ」ナリ、故ニ其出來事ヲ第$r$原因ヨリ出デ來ラントイフ「確カラシサ」ハ$P'_r.p_r$ナリ、

此ノ如クナレバ、是等ノ原因ハ何レモ同時ニ成立ツヿ能ハヌモノナルヲ以テ、第二回ノ試ミニ其出來事ノ起ラントイフ確カラシサハ左ノ如シ、

$$P'_1.p_1+P'_2.p_2+\dots+P'_n.p_n$$

〔例一〕 夫々ニ白球二箇及黒球三箇、白球四箇及黒球一箇、白球三箇及黒球七箇ヲ入レタル三箇ノ嚢アリ、今イヅレヨリトモナク無心ニ其一嚢ヨリ一球ヲ引キ出シタルニ黒球ヲ得タリトイフ、然ラバ其ノ黒球ハ最多クノ黒球ノ入リタル嚢ヨリ出デタリトイフ「確カラシサ」如何

茲ニハ$P_1$モ$P_2$モ$P_3$モ何レモ$\frac{1}{3}$ニ等シ、又$p_1$ハ$\frac{3}{5}$、$p_2$ハ$\frac{1}{5}$、$p_3$ハ$\frac{7}{10}$ナリ、

是ニヨリテ、所要ノ「確カラシサ」ハ下ノ如シ$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}\right)\div\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}\right)=\frac{7}{15}$.

〔例二〕 一ツノ袋アリ、其ノ中ニ四ツノ球アルヿヲ知ル、且ツソノ球ノ黒ナラントイフ「確カラシサ」モ白ナラントイフ「確カラシサ」モ全ク相等シ、而シテ今ソレヨリ無心ニ一球ヲ引キ出シタルニ白ヲ得タリトイフ、然ラハ其袋ニハ白球三箇ニ黒球一箇アラントイフ「確カラシサ」ハ如何

サテ此袋ニハ或ハ白球ノミ四箇、或ハ白球三箇ト黒球一箇ト、或ハ白球モ白球モ二箇ヅヽ、或ハ白球一箇ニ黒球三箇、或ハ黒球ノミ四箇アルヿヲ得ベシ、而シテ此ノ五ツノ場合ノ「確カラシサ」ハ夫々ニ$\frac{1}{16}$、$\frac{4}{16}$、$\frac{6}{16}$、$\frac{4}{16}$、$\frac{1}{16}$、ナルヿ第四百四條ニヨリテ明カナリ、又是等ノ場合ニ對シテ白球ノ出ヅヘキ「確カラシサ」ハ夫々ニ1、$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、及零ナルベシ、

是ニ因リテ所要ノ「確カラシサ」ハ下ノ如シ、$\left(\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{4}\right)\div\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{4}+\frac{6}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{16}\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$.

## 第四百七條　證據ノ確カラシサ (Probability of Testimony.)

證據人ノ信用ニ關ハリタル問題ノ解キ方ハ次ニ示セル例題ニ就キテ觀ルベシ

〔例一〕 黒球九十九ト白球一箇トノ入リタル嚢中ヨリ無心ニ一球ヲ抽キ出シタリ、或ル人曰ク抽キ出シタル球ハ白ナリト、而シテ此人ノ陳述ハ十回中九回ダケハ正確ナリト云フ、然ラハ實際白球ノ抽キ出サレタル「確カラシサ」如何、

白球ノ引キ出ダサルベキ「確カラシサ」ハ何レノ場合ニ於テモ$\frac{1}{100}$ナリ、故ニ白球ノ出デタリト

イヘル陳述ノ眞實ナル「確カラシサ」ハ $\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}$ ナリ、

次ニ白球ノ引キ出ダサレヌ確カラシサハ $\frac{99}{100}$ ナリ故ニ白球出デタリトイヘル陳述ノ僞ナル「確カラシサ」ハ $\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}$ ナリ、

斯ノ如クナルヲ以テ第四百六條ニ於ケルガ如ク所要ノ「確カラシサ」ハ左ノ如シ

$$\left(\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}\right)\div\left(\frac{1}{100}\times\frac{9}{10}+\frac{99}{100}\times\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{12}.$$

〔例二〕 1,2,3,…百ト標記セル百枚ノ牌ヲ入レタル一嚢ヨリ無心ニ一牌ヲ引キ出シタリ、或ル人曰クソハ或ル特別ナル一枚ナリト、而シテ其人ノ陳述ハ十回中ノ九回ダケ正確ナリトイフ然ラハ實際ニ其一枚ノ引キ出サレタル「確カラシサ」如何

今 $1000N$ 回ノ試ニ於テ此格段ナル牌ハ $10N$ 回顯ハレ出ツベシ、其内 $9N$ 回ダケハ此人正確ノ陳述ヲ爲スベシ即此牌ノ顯ハレ出テタルヿヲ保證スベシ又 $990N$ 回ダケハ此牌顯ハレ出デサルベシ、而シテ此内此人ハ $99N$ 回ダケ誤リタル陳述ヲ爲スベシ、然ルニ誤リタル陳述ヲ爲ス仕方ハ $99$ 通アリテ、イヅレモ同様ナリ、故ニ $99N$ 回ノ誤リタル陳述中丁度此牌ガ出デタリトノ誤述ヲ爲スヿハ $N$ 回ナルベシ是ニヨリテ所要ノ「確カラシサ」ハ $\frac{9}{10}$ ナリ、即チ索ムルトコロノ「確カラシサ」ハ證人ガ正確ノ陳述ヲ爲ス「確カラシサ」ニ等シ、





〔例三〕 甲ハ四回ノ中三回、乙ハ六回ノ中五回正確ノ陳述ヲ爲ス、今白球一箇黑球九箇ヲ入レタル一嚢ヨリ引キ出ダサレタル一球ニ就キテ、此甲乙兩人ハ同音ニ白球ナリシヿヲ陳述シタリ、然ラハ其ノ果シテ白球ガ引キ出ダサレタル「確カラシサ」如何、

サテ白球ノ引キ出ダサルヽ「確カラシサ」ハ何レノ場合ニ於テモ $\frac{1}{10}$ ナリ、故ヲ以テ甲乙ノ兩人ガ同ジク白球出デタリト陳ブルヿノ眞ナル「確カラシサ」ハ $\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}$ ナリトス、

次ニ一黑球カ引キ出ダサルベシトイフ「確カラシサ」ハ何レノ場合ニ於テモ $\frac{9}{10}$ ナリ、是ヲ以テ甲乙ノ兩人ガ同ジク白球出デタリト陳ブルヿノ誤ナル「確カラシサ」ハ $\frac{9}{10}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$ ナリトス、

斯ノ如クナレバ第四百六條ニ於ケルガ如ク、所要ノ「確カラシサ」ハ左ノ如シ、

$$\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\div\left(\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{8}.$$

〔例四〕 甲ハ四回ノ中三回、乙ハ六回ノ中五回、正確ノ陳述ヲ爲ス、今白及其他ノ色ノ球各一ヅツ都合十箇ヲ入レタル一嚢ヨリ引キ出ダサレタル一球ニ就キテ、甲乙ハ共ニ其ノ白色ナルヿヲ明言ス、然ラバ果シテ白球ノ引キ出ダサレタル「確カラシサ」如何、

サテ白球ノ出ヅベキ「確カラシサ」ハ何レノ場合ニ於テモ $\frac{1}{10}$ ナリ、故ニ甲乙兩人ガ同ジク白

球出デタリト陳ブルヿノ眞ナル「確カラシサ」ハ $\frac{1}{10}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{16}$ ナルベシ
又白球ノ出デヌ「確カラシサ」ハ何レノ塲合ニ於テモ $9/10$ ナリ、又甲ノ陳述ノ誤リナルベキ「確カラシサ」ハ $1/4$ ナリ、然ルニ玆ニハ誤レル陳述ヲ為ス仕方九通リアリテ何レモ同様ナルヲ以テ、甲ガ白球出デタリトノ誤リタル陳述ヲ為ス「確カラシサ」ハ $\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}$ ナルベシ、故ニ甲乙兩人ガ同ジク誤リテ白球出デタリト陳ズル「確カラシサ」ハ左ノ如シ、

$$\frac{9}{10}\times\frac{1}{4\times9}\times\frac{1}{6\times9}=\frac{1}{2160}.$$

是ニ因リテ所要ノ「確カラシサ」ハ下ノ如シ $\frac{1}{16}\div\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{2160}\right)=\frac{135}{136}.$

〔例五〕甲ハ四回ニ三回、乙ハ五回ニ四回、丙ハ七回ニ六回正確ノ陳述ヲ為ス、又或ル出來事ノ起ル「確カラシサ」ハ $1/2$ ナリトス、今甲ト乙トハ此出來事起リタリト唱ヘ、丙ハ其起ラサリシヿヲ主張ス、此出來事ノ果シテ起リタリト云フ「確カラシサ」ヲ索ムベシ、　答　三分ノ二、

**第四百八條**　次ニ舉ゲタル二三ノ例題ヲ解キテ以テ本編ヲ結ハン、「確カラシサ」ノ問題ニ就キテ更ニ深ク學バント欲スル所ノ讀者ハ Encyclopaedia Britannica（英國學術字彙ノ義）及トドハンタア氏著 History of the Mathematical Theory of Probability.（「確カラシサ」ノ數學的理論ノ歷史）ヲ見ヨ、

〔例一〕 $n$ 箇ノ球ヲ入レタル一囊アリ、何程ノ白球アルカハ全ク分カラズ、即チ其中白球一箇モナキヿ、一箇アルヿ、二箇アルヿ、…$n$ 箇悉ク白球ナルヿ、イヅレモ同様ナリトス、今コレヨリ一球ヅツ抽キ出ダシテ引キ續キ白球 $r$ 箇ヲ得ル「確カラシサ」ヲ索ムベシ、但シ一タビ出ダセルハ再ビ囊中ニ收メザルヿトス、

サテ其囊中ニ $s$ 箇ノ白球アル「確カラシサ」ハ $\frac{1}{n+1}$ ナリ、但シ $s$ ハ $0$ ヨリ $n$ ニ至ル何レノ整數ニテモヨキモノナリ、而シテ $s$ 箇ノ白球ト其他ノ球ト都合 $n$ 箇ノ球ヲ入レタル一囊ヨリ $r$ 箇ノ白球ガ引キ續キテ出ヅル「確カラシサ」ハ $\frac{s(s-1)\cdots(s-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}$ ナリ、是ニ因リテ所要ノ「確カラシサ」ハ左ノ如シ、

$$\frac{1}{n+1}\left\{\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}+\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}+\cdots+\frac{r(r-1)\cdots1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}\right\}.$$

然ルニ第三百十四條ニヨリテ、

$$\{1.2\cdots r\}+\{2.3\cdots(r+1)\}+\cdots+\{(n-r+1)\cdots(n-1).n\}=\frac{(n-r+1)(n-r+2)\cdots n(n+1)}{r+1},$$

是ニ因リテ所要ノ「確カラシサ」ハ $\frac{1}{n+1}\left\{\frac{(n-r+1)(n-r+2)\cdots n(n+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1).(r+1)}\right\}=\frac{1}{r+1}$ ナリ、斯クテ

嚢中ナル球ノ總數ニハ全ク關係ナキモノナリ、モシ$r$箇ノ白球ガ引キ續キテ抽キ出サレタリト知レタランニハ、其次ニ抽キ出ダシタル一球ガ白球ナルベキ「確カラシサ」モ、右ニ得タル結果ニ由リテ直ニ索ムル⼃ヲ得ベキナリ、ソハ如何ニトイフニ、大數$N$箇ノ場合ニ於テ$r$箇ノ白球ガ續出スル所ノ場合ハ$\frac{N}{r+1}$ダケ有ルベク、又$r+1$箇ノ白球ガ續出スル場合モ同理ニテ$\frac{N}{r+2}$ダケ有ルベシ、是ニ因リテ所要ノ「確カラシサ」ハ$\frac{N}{r+2} \div \frac{N}{r+1} = \frac{r+1}{r+2}$ナリ

〔例二〕 甲ハ$a$箇ノ數取リ、乙ハ$b$箇ノ數取リヲ持チテ、勝負事ヲ爲ス、此勝負事ニ於テハ一方ハ必ズ勝チ一方ハ必ズ負ケ相引ト云フ樣ナル⼃ナシ、又勝チタル者ハ負ケタル者ヨリ其都度一箇ノ數取リヲ受ケ受ルモノトス、又此勝負事ヲ一方ノ人其敵ノ數取リヲ取リ盡スマデハ幾回トナク續ケ行ヒ、其時ニ至リテ初メテ全体ノ勝敗決スルモノトス、今一回々々ノ勝負ニ於テハ甲ノ勝ツ「確カラシサ」ノ乙ノ勝ツ「確カラシサ」ニ對スル⼃$p$ノ$q$ニ於ケルニ等シトスル﹅ハ甲乙各ガ全体ノ勝ヲ制スル「確カラシサ」如何、

甲ガ$n$枚ノ數取リヲ持チタル﹅ニ全体ノ勝利ヲ得ベキ「確カラシサ」ヲ$u_n$ニテ表ハスベシ、扨甲ガ其次ノ一番勝負ニ勝ツベキ「確カラシサ」ハ$p \div (p+q)$ニシテ、果シテ勝利ガ得ラル﹅ナラバ其時ハ全体ノ勝利ヲ得ベキ「確カラシサ」$u_{n+1}$トナルベシ、



又其次ノ一番勝負ニ負ヲ取ルベキ「確カラシサ」ハ$q \div (p+q)$ニシテ、果シテ負クルナラバ其時ハ全体ノ勝利ヲ得ベキ「確カラシサ」$u_{n-1}$トナルベシ、然ルニ是ハ、問題ニモ言ヘル如ク勝チカ負ケカノ二ツヲ出デザル⼃ニテ、且又勝ツ⼃ト負クル⼃トハ同時ニ成立ツ⼃能ハヌ事ナレバ、次ノ如クナルベシ、

$$u_n = \frac{p}{p+q} \cdot u_{n+1} + \frac{q}{p+q} \cdot u_{n-1}.$$

即チ

$$p \cdot u_{n+1} - (p+q)u_n + q \cdot u_{n-1} = 0.$$

コノ方程式ニヨリテ觀レバ、$u_n$ハ$\frac{A+Bx}{p-(p+q)x+qx^2}$ノ展開ニ於ケル$x^n$ノ係數ニ等シカルベシ、但シ$A$ト$B$トハ之ヲ適當ニ取リ定メザルベカラズ、

サテ$\frac{A+Bx}{p-(p+q)x+qx^2}$ハ之ヲ$\frac{C}{p-qx} + \frac{D}{1-x}$ノ形チニ書キ換フル⼃ヲ得ルヲ以テソノ$x^n$ノ係數ハ$D + \frac{C}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n$ナル⼃ヲ知ルベシ、

斯クテ$u_n = D + \frac{C}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^n$ナリ、但シ$C$ト$D$トハ是ヨリ値ヲ定ムベキモノトス、然ルニ甲ニシテ一枚ノ數取リモ持タザリシナラバ全体ノ勝利ノ得ラル﹅見込ハ全ク無ク、又甲ニシテ$a+b$枚ノ數取リヲ持チタランニハ全体ノ勝利確實ナリ、乃チ

即チコレニ由リテ $C$ ト $D$ トノ値ハ定マルベシ、斯クテ

$$u_0=0;\quad u_{a+b}=1.\quad \therefore 0=D+\frac{C}{p};\ 1=D+\frac{C}{p}\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}.$$

$$u_n=\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n\right\}\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}.$$

故ニ

甲ガ全体ノ勝利ヲ得ル「確カラシサ」ハ　$\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a\right\}\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}.$

乙ガ全体ノ勝利ヲ得ル「確カラシサ」ハ　$\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^b\right\}\div\left\{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}.$

## 第四十一例題集

第一　甲乙ノ両人マヅ甲ヨリ始メテ代ル〱二箇ノ賽ヲ投ゲ、先キニ8ヲ得タルモノヲ勝トスルヿニ取極メタリ然ラバ甲乙各々勝ツ「確カラシサ」如何、

第二　甲乙丙ノ三人マヅ甲ヨリ始メテ順次ニ代ル〱三箇ノ賽ヲ投ゲ、先キニ6ヲ出ダシタルモノガ賞品ヲ得ルヿニ取極メタリ各人ノ賞品ヲ得ル「確カラシサ」如何、

第三　白球三箇ト黒球五箇トヲ入レタル一嚢ヨリ三人アリテ次々ニ一球ヅツヲ抽キ出ダシ（抽キ出シタル球ハ元ヘ戻シ入レサルモノトス）第一ニ白球ヲ得ント爭フアリ然ラバ三人ガ各其目的ヲ達スル「確カラシサ」ノ割合ハ二十七ト十八ド十一トノ如クナルベシ其證ヲ求ムベシ

第四　一箇ノ賽ヲ五十回ダケ投グルトキニハ六ノ何回出ヅルヿガ最モ確カラシキカ

第五　二箇ノ賽ヲ投グルトキニ七ヨリ大ナルモノガ出ヅル「確カラシサ」ト七ヨリ小ナルモノガ出ヅル「確カラシサ」トハ全ク相等シトイフ其證如何、

第六　1 2 3ト記セル三枚ノ牌ヲ出レタル嚢中ヨリ無心ニ一枚ヲ抽キ出ダシテハ亦戻シ入レ、斯クスルヿ四回ナルトキ、其ノ出デタル數ノ和ガ偶數ナル「確カラシサ」ハ八十一分ノ四十一ナルヿヲ證明スベシ、

第七　1ヨリ100マデノ數ヲ記セル百枚ノ牌ヲ入レタル一嚢ヨリ無心ニ二牌ヲ抽キ出ヅルトキハ其牌面ノ數ノ和奇數ナル「確カラシサ」ハ九十九分ノ五十ナルヿヲ證明スヘシ、

第八　1ヨリ $n$ マデノ數ヲ書ケル牌 $n$ 枚ヲ入レタル一嚢ヨリ一人アリ無心ニ二枚ヲ抽キ出ダシ其牌面ニ出デタル二數ノ乘積ニ等シキ志（シルリング）ノ數ヲ得ントス其人ノ望ミノ値如何、

第九　一ツノ出來事、$n$ 年ガ間ニ $n$ タビ起リタリシヿヲ知リ、或ル特別ナル一年ニ其出來事ノ起コラザリシ「確カラシサ」ハ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ ナルヿヲ證明スベシ、

第十　$p$ 箇ノ物ヲ $p$ 人間ニ無心ニ配ルニ少クモ一人ハ受クル所ナカルベキ「確カラシサ」ハ $\frac{p^p-\lfloor p}{p^p}$ ナリ其證明如何

第十一　甲書狀一通ヲ乙ニ郵送ス然ルニ返書ヲ得ズ今$m$通ノ中一通ダケハ郵送中ニ失ハルヽモノト假定スレバ甲ノ出ダシタル書狀ガ乙ノ手ニ渡リタル「確カラシサ」ハ $\frac{m-1}{2m-1}$ ナリ但乙ノ手ニ渡リタルモノナラバ乙ハ必ズ返事ヲ出スモノトス、

第十二　一磅ノ金貨ト一志ノ銀貨ト各三箇ヅツヲ入レタル一嚢ヨリ一人アリテ何レトハ無ク四箇ヲ取リ出ダシ之ヲ巳ガ空ノ財布ニ入レタリ、サテ又ソノ財布ヨリ何レトハ無ク二枚ヲ取リ出ダシタリシニ二枚トモ一磅ノ金貨ナリシトイフ然ラバ其財布ニ殘レル貨幣ニ就キテノ望ミノ値ハ十一志六片ナリ、其證如何、

第十三　一磅金貨四枚ニ一志銀貨四枚ヲ入レタル一嚢中ヨリ何レトハ無ク四枚ヲ取リ出ダシテ之ヲ空ノ財布ニ移シタリ扨ソノ財布ヨリ何レトハ無ク二枚ノ貨幣ヲ取リ出ダシテ見タルニ共ニ金貨ナリシトイフ然ラバ右ノ嚢中ニ殘レル貨幣ノ最モ確カラシキ價ハ廿九志四片ナリ其證如何

第十四　一圓周ノ上ニ何處トハ無ク三點ヲ取ルトキハ其ノ三點ガ共ニ同ジ半圓ノ上ニ在ルベキ「確カラシサ」ハ四分ノ三ナリ

第十五　一本ノ棒ヲ何處トモ無ク折リテ三片ト爲シタリ然ラバ其ノ何レノ一片モ他ノ二片ノ和ヨリハ大ナラズトイフ「確カラシサ」如何

第十六　一本ノ棒ヲ何處ヨリトモ無ク折リテ四片ト爲シタリ然ラバ其ノ何レノ一片モ他ノ三片ノ和ヨリハ大ナラズトイフ「確カラシサ」如何、

第十七　$4n$邊ノ正多角形ノ邊三ツヲ何レトモ無ク撰ブトキニ、ソレヲ延長シタルモノハ鋭角三角形ヲ生ジ而モ本ノ多角形ハ其ノ三角形中ニ在リトイフ「確カラシサ」ハ $\frac{(n-1)(n-2)}{(4n-1)(4n-2)}$ ナルヿヲ證明スベシ

第十八　環狀ニ座ヲ取リタル$m$人ノ中ヨリ誰トハ無ク三人ヲ撰ブトキ、其三人中イヅレノ二人モ舊ト隣接シタリシモノニハ非ズトイフ「確カラシサ」ハ $\frac{(m-4)(m-5)}{(m-1)(m-2)}$、ナリ其證明如何、

第十九　奇數$m$箇偶數$n$箇ヲ無暗ニ書キ下ストキハ其ノ何レノ二奇數モ相隣ルヿナシトイフ「確カラシサ」ハ $\frac{|\underline{n}\;|\underline{n+1}}{|\underline{m+n}\;|\underline{n-m+1}}$ ナリ、但シ $m \ngtr n+1$ トス、其證如何、

第二十　男子$a$人ト女子$b$人トノ間ニ$m$箇ノ物ヲ配布スルナラバ男子組ノ受クル所ノ物ノ箇數ハ奇數ナリトイフ「確カラシサ」ハ $\frac{1}{2}\frac{(b+a)^m-(b-a)^m}{(b+a)^m}$ ナリ、其證如何、

第廿一　整數二ツ其和百ナルアリ、今ソノ二數ノ積ノ一千ヨリ大ナル「確カラシサ」ハ如何、

第廿二　與ヘラレタル和ヲ有スル正ノ數二ツアリ、然ルトキハ其ノ積ハ其ノ積ノ最大値ノ四分三ヨリハ小クハ無カラントイフ「確カラシサ」ハ二分ノ一ナルベク、又其ノ積ハ其ノ積ノ最大

値ノ半分ヨリハ小ナリトイフ「確カラシサ」ハ $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルベシ、右ノ二件ノ證明如何、

**第廿三** 甲乙ノ兩人アリ、甲ハ $a$ 枚、乙ハ $b$ 枚ノ牌ヲ持チテ、數番ヨリ成レル一ノ數取リ勝負ヲ始メタリ、各番必ズ勝負アリテ決シテ無勝負トイフヿ無シ、且ツ其ノ取極メ、勝テルハ負ケタルヨリ一牌ヅツヲ取リ扱イヅレニマレ終ニ一牌モ持タザルニ至レルヲ全体ノ負ケトスルヿナリ、今甲乙ノ技ニハ優劣ナク一番勝負ニ勝ツ「確カラシサ」ハ甲乙相同シトスル𪜈ハ甲ガ全体ノ勝利ヲ得ル「確カラシサ」ハ $\frac{a}{a+b}$ ナリ、其證如何、

**第廿四** 一箇ノ壺ニ若干ノ球アリ、其ノ白球或ハ黒球ナルヿハ知レタレ𪜈、數ノ如何ニ就キテハ全ク知レズ、今ソノ $(p+q)$ 箇ヲ引キ出ダス𪜈(一タビ出ダシタルハ再ビ戻シ入レルヿナシ)モシ白球 $p$ 箇確黒 $q$ 箇トイフ結果ヲ得ベキモノナラバ、サテ其次ニ取リ出ダス一箇ノ黒球ナルベキ「確カラシサ」ハ $\frac{q+1}{p+q+2}$ ナリ其證ヲ求ム

**第廿五** 甲乙二人アリ、勝負事ヲ爲ス、勝チタル者ハ其都度一點ヲ得、二人ノ中イヅレカ先キニ $(2m+1)$ 點ヲ得タル者ヲ以テ全体ノ勝者トス、今甲ハ既ニ $x$ 點ヲ有シ乙ハ $y$ 點ヲ有セリトスル𪜈ハ、其次ノ番目ノ勝負ニ於テハ甲ノ勝ツ「確カラシサ」ノ乙ノ勝ツ「確カラシサ」ニ對スルハ $(2m+1-x)$ ノ $(2m+1-y)$ ニ於ケル如シトス、又甲ハ第一番目ノ勝負ニ勝テリトス、然ラバ甲ガ丁度勝ツ(即甲乙倶ニ既ニ $m$ 點ヲ有シ第 $(2m+1)$ 番目ノ勝負ニ甲ノ勝ツ「確カラシサ」ハ $\frac{\{(2m)!(2m+1)!\}^2}{(m!)^3(m+1)!(4m+1)!}$ ナルヿヲ證明スベシ、

# 第三十一編 行列式 (Determinants.)

**第四百九條**

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}$$

九ツノ量ヲ上ノ如クニ正四方形ニ排列シ、コレヨリシテ同行同列ナラザル三量ヅヽヲ有ラユル仕方ニ取リテ、掛ケ合ハス𪜈ハ

$$a_1b_2c_3,\ a_1b_3c_2,\ a_2b_3c_1,\ a_2b_1c_3,\ a_3b_1c_2,\ a_3b_2c_1$$

ヲ得ベシ、次ニ是等諸積ノ各ニ就キ、其附記ノ數字ヲ1、2、3ナル自然ノ順序ニ對照シ轉換(Inversion)ノ度數ヲ數ヅヘ、其偶數ナル𪜈ハ正號、奇數ナル𪜈ハ負號ヲ前置シ、而シテ後是等ノ諸積ヲ代數的ニ寄スル𪜈ハ、次ノ式ヲ得ベシ、

$$a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \cdots\cdots (A)$$

如何トイフニ、$a_1b_2c_3$ ニ於テハ附記ノ數字自然ノ順序ニ列スルガ故ニ正號ヲ附ス、$a_1b_3c_2$ ニ於テハ、3カ2ニ先ダチ、即轉換ノ度數一ナルガ故ニ負號ヲ附ス、$a_2b_3c_1$ ニ於テハ、2及ヒ3ガ1ニ先ダチ、即轉換ノ度數二ナルガ故ニ正號ヲ附ス、$a_2b_1c_3$ ニ於テハ、2ガ1ニ先ダチ、即轉換ノ度數一ナルガ故ニ負號ヲ附ス、$a_3b_1c_2$ ニ於テハ、3ガ1及ヒ2ニ先ダチ、即轉換ノ度數

ニナルガ故ニ、正號ヲ附ス、$a_3b_2c_1$ ニ於テハ、3ガ1及ヒ2ニ先ダチ、又2ガ1ニ先ダチ、即轉換ノ度數三ナルガ故ニ負號ヲ附ス、

サテ、$(A)$ ナル式ヲ $a_1$、$a_2$……ノ九ツノ量ノ行列式ト稱シ、$a_1$、$a_2$、……ヲバ行列式 $(A)$ ノ原素(Elements)ト稱シ又 $a_1b_2c_3$, $a_1b_3c_2$, ……ノ諸積ヲバ行列式ノ項(Terms)ト稱ス

第四百十條　定義　$n^2$ 箇ノ量ヲバ上ノ如ク縦横正四方形ニ排列ス、同列ハ同文字ヨリ成リ、同行ニ於テハ同數字ヲ附記シテ、即チ文字ハ列ヲ示シ、附記ノ數字ハ行ヲ示ス、今コレヨリシテ同列同行ナラザル $n$ 量ヅヽヲ有ラユル仕方ニ取リテ掛ケ合ハセ、此等ノ積ノ各ニ就キ附記ノ數字ノ順序ニ於ケル轉換ノ度數奇數ナルハ負號、偶數ナルハ正號ヲ前置シ、斯クシテ得タル總テノ積ノ代數上ノ和ヲ稱シテ、此ノ $n^2$ 箇ノ量即原素ノ行列式トイフ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots b_n \\ c_1 & c_1 & c_2 & \cdots c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots m_n \end{vmatrix}$$

$n^2$ 箇ノ量ガ右ニ述ベタル如クニ處分セラルベキヿヲ表ハスニハ、之ヲ二線ノ間ニ置クヿ右ノ圖ニ於ケルガ如シ、

其ノ左側ノ上偶ヲ通ル對角線ヲ主對角線(Principal diagonal.)ト稱シ、又コレニ沿ヒテ横ハレル $n$ 箇ノ原素 $a_1\ b_2\ c_3 \dots m_n$ ノ積ヲ行列式ノ主項(Principal term.)ト稱ス、

主項ノ外ノ總ベテノ項モ此ノ主項ヨリシテ、文字ヲ其ノ通リニ列ネ其ノ附記ノ數字ヲ有ユル仕方ニ變ズルヿニテ得ラル、是ヲ以テ時トシテハ、一ツノ行列式ヲバ、其ノ主項ノミヲ括弧ノ間ニ記入シテ表ハスヿモアルナリ、例ヘバ、右ノ行列式ヲ此ノ仕方ニテ表ハスニハ $[a_1b_2c_3\cdots m_n]$





ト書クナリ、或ハ又此行列式ヲ $\sum(\pm a_1b_2c_3\cdots m_n)$ ト書クヿモアリ、

唯一ツノ行列式ヲ考フル場合ニハ、$\Delta$ ナル記號ヲ以テ之ヲ表ハスヲ通例トス、

一ツノ行列式ノ各列ニモ各行ニモ共ニ $n$ 箇ノ原素アリテ、且ツ其ノ各項ハ $n$ 箇ノ原素ヨリ成ルトキハ、其ノ行列式ヲ稱シテ $n$ 次($n$th order.)ノ定列式ナリトイフ、

第四百十一條　$n$ 次ノ行列式ニ於ケル項數ハ、附記ノ數字 $n$ 箇ノ錯列ノ數ニ等シカルベシ、即 $n$ 次ノ行列式ニ於テハ、$\lfloor n$ 箇ノ項アリ、例ヘハ三次ノ行式列ニ於テハ六項アルガ如シ、

第四百十二條　前ニ與ヘタル行列式ノ項ノ正負ヲ定ムル規則ハ、次ニ述ブルトコロト結局同一ナリ、

第一列ヨリ始メテ、次々ノ諸列ヨリ順次原素ヲ取リ出スベシ、今此等原素ヲ取リ出シタルトコロハ、行ノ順序ニ於ケル轉換ノ度數偶數ナレバ其項ハ正ナルベク、又奇數ナレバ其項ハ負ナルベシ、

此規則中ニアル列及行トイフ詞ハ之ヲ彼此交換スルモ此規則ノ意味ハ毫モ變ハルヿナキヿヲ示サントス、コレヲ證明センニハ、任意ノ積、タトヘバ $a_5b_3c_1d_4e_6f_2$ 及コレト同值ナル $c_1f_2b_3d_4a_5e_6$ ヲ取リテ考ヘン、但シ初ノ形チニ於テハ文字ノ順序丁度羅馬字ノ順ニ從ヒ、後ノ形チニ於テハ數ガ自然ノ順ニ從ヘルヿニ注意セヨ

サテ初ノ形チニ於ケル附記ノ數ノ轉換ノ度數ト後ノ形チニ於ケル文字ノ轉換ノ度數トハ、相等シトイフヿ即コヽニ證明スベキ事タリ、然ルニ是ハ下ノ如キ事實アルヨリ直ニ推知サル、

ナリ、ソハ右ノ第一形ニ於テ任意ノ附記數ニ、モシソレヨリモ大ナル附記數 $r$ 箇ダケ先ダチタランニハ、第二形ニ於テ其ノ附記數ニ對スル文字ノ後ニハ、(羅馬字ノ順ヨリシテイヘバ)ソレヨリ先ナルベキ文字又 $r$ 字ダケ有ラザルベカラズ、トイフ事ナリ、例ヘバ右ニ取リタル例ニ於テ第一形ニ於テハ $2$ ノ先キニ、ソレヨリモ大ナル $5346$ トイフ四數アリテ、又第二形ニ於テハ其ノ $2$ ニ對スル $f$ ノ後ニ $b\ d\ a\ e$ トイフ四字アルガ如シ、

カク、列トイフ詞ト行トイフ詞トハ、項ノ正負ヲ定ムル規則ニ於テ相交換スルモヨキヿナルヲ以テ、次ノ如キ定理ガ出テ來ル、

**定理**　「行列式」ハ、ソノ列ヲ行ニ、行ヲ列ニ、取リ換フルモ、變ズルヿナシ、

例ヘバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

〔例一〕 $2314$、ト $3142$ ト $4231$ トニ於ケル轉換ノ度數ヲ數フベシ、　答、$2$、$3$、$5$、

〔例二〕 $4132$ ト $35142$ ト $531264$ トニ於ケル轉換ノ度數ヲ數フベシ、　答、$4$、$6$、$7$、

〔例三〕 下ノ行列式ニ於ケル $bfg$ ト $cdh$ ト $ceg$ トノ三項ノ正負ヲ定メヨ、

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$$

答、正、正、負、



〔行ノ順序ハ、$2\,3\,1$ ト、$3\,1\,2$ ト、$3\,2\,1$ トナリ〕

〔例四〕 下ノ行列式ニ於ケル $bgiq$ ト $celn$ ト $dfkm$ トノ三項ノ正負ヲ定メヨ、

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

(行ノ順序ハ $2\,3\,1\,4$、$3\,1\,4\,2$、$4\,2\,3\,1$、トナレリ)　答、正、負、負、

## 第四百十三條　定理一

行列式ハ、任意ノ一項ヲ取リ其ノ二ツノ附記數ヲ彼此交換スル𪜈ハ、舊トハ正負ヲ異ニセル他ノ項ガ得ラル、

サテ其行列式ノ一項ヲ $P.h_\alpha.k_\beta$ トセヨ即チ $P$ トハ $h_\alpha$ 及 $k_\beta$ ノ外ノ諸原素ノ積ヲ表ハスモノナリ、然ル𪜈ニ $\alpha$ 及 $\beta$ ヲ彼此交換スル𪜈ハ $P.h_\beta.k_\alpha$ トナル、サテ $P.h_\alpha.k_\beta$ ハ其行列式ノ一項ナレバ、$P$ ノ中ニハ $h$ ノ列及 $k$ ノ列ナル原素ヲ含ムヿナク、又 $\alpha$ ノ行、及 $\beta$ ノ行ナル原素ヲモ含ムヿナシ、是ニヨリテ $Ph_\beta k_\alpha$ モマタ行列式ノ一項タルベキヤ明カナリ

次ニ、右ノ二項ハ異號ヲ有ストイフヿヲ證明スベシ、

マヅ第一ニハ附記數ノ相隣接セル二ツヲ交換スルヿト假定セヨ即 $Ah_\alpha k_\beta B$ トイフ項ヲ考ヘン、爰ニ $A$ ハ $h_\alpha$ ノ前ナル諸原素ノ積、又 $B$ ハ $k_\beta$ ノ後ナル諸原素ノ積ヲ表ハスモノトス、今ソノ $\alpha\ \beta$ ヲ交換スル𪜈ハ $Ah_\beta k_\alpha B$ トナリ、即チ既ニ證明セルガ如ク又行列式ノ一項ナリ、サテ、右ノ二項ニ於ケル轉換ノ度數ハ、$A$ 及ヒ $B$ 中ニ含マレタル附記ノ數字ダケノトコロニ

テハ、之ヲ相互ニ比較スルモ、又$\alpha$及$\beta$ト比較スルモ、毫モ變ハルトコロナシ、然レ𪜈$\alpha\beta$若シクハ$\beta\alpha$何レカ一ツノ中ニ一度ノ轉換ナカラザルベカラズ、且同時ニ$\alpha\beta$及$\beta\alpha$雙方ニ轉換アルヿナシ、故ニ此等ノ二項ニ於ケル轉換ノ度數ノ差ハ一ナリ、即此等ノ二項ハ其符號ヲ異ニセザルベカラズ、

サテ次ニハ、二ツノ相隣接セザル附記ノ數字ヲ交換シタリト假定セヨ、且ツ其ノ交換セントスル附記ノ數字、假ヘバ$\alpha$及$\beta$ノ間ニハ$r$箇ノ原素アリトセヨ、

然ル𪜈ハ、相隣接セル附記ノ數字ヲ逐次ニ$(r+1)$度交換スルヿニヨリテ$\alpha$ヲ$\beta$ノ處ニ移スヿヲ得ベシ、斯クシタル后ニ、$\beta$ヲ、モト$\alpha$ノアリシ處ニ持チ行クニハ、相隣接セル附記ノ數字ノ交換ヲ逐次ニ$r$度ダケ交換スレバヨシ、此故ニ$\alpha$ト$\beta$トノ交換ハ、相隣接セル附記ノ數字ノ交換ヲ$(2r+1)$回、即チ奇數度ダケ施スヿニテ成サル、然ルニ第一ノ場合ニ據リテ觀レバ斯カル交換ヲ一回スル𪜈ハ必ズ一ツノ轉換ヲ增シ或ハ減スルガ故ニ、綜ベテニテハ奇數ダケ轉換ヲ增スカ或ハ減スベシ、故ニ新項ト舊項トハ符號ヲ異ニセザルベカラズ、

## 第四百十四條　定理二

任意ノ二行ヲ交換スルモ、或ハ任意ノ二列ヲ交換スルモ、行列式ノ純値ハ變ゼズ、但シ符號ハ變ズ、

今$h$及$k$ノアル二列ヲ交換スルヿト假定センニ、$A.h_a.B.k_\beta C$モシ原ノ行列式ノ任意ノ項ナランニハ新シキ行列式ニ於テ、前ト同ジ所ニ在ル諸原素ニテ作ラレタル項ハ$A.h_a.B.h_\beta.C.$ナルベシ、而シテ此ノ二ツノ項ハ兩行列式ニ於テ同號ヲ有セザルベカラズ、サテ第四百



十三條ニヨリテ$A.k_a.B.h_\beta.C$モ亦モトノ行列式ノ一項ナルヿ、及ソノ符號ハ$A.h_a.B.k_\beta.C$ノ符號ト異ナルヿヲ知ルベシ、カクノ如ク新行列式ノ項ハ何レモ舊行列式ノ一項ト純値ヲ等シクシ、正負ヲ異ニスルヲ以テ、此等兩行列式モ亦純値ヲ等シクシ符號ヲ異ニセザルベカラズ、

二列ヲ交換スル場合ニ斯ク眞ナル本定理ハ、第四百十二條ニヨリテ、又二行ヲ交換スル場合ニモ眞ナラサルベカラズ、

例ヘバ、左ノ如シ、

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \end{vmatrix}.$$

## 第四百十五條　定理三

一ツノ行列式ニ於テ二ツノ列、或ハ二ツノ行、全ク相同ジキ𪜈ハ、其行列式ハ零ニ等シ、

二ツノ列(或ハ二ツノ行)全ク相同ジカランニハ、ソノ二ツヲ交換スルモ定列式ハ純値符號トモニ變ゼザルヤ明カナリ、然ルニ前條ノ定理二ニヨルニ、二ツノ行列式ノ二列(或ハ二行)ノ交換ハ恒ニ其符號ノミヲ變ズトアリ、故ニ相同ジキ二列(或ハ二行)アル場合ニ於テハ、行列式ノ値ハ其符號ニ拘ハラズシテ相等シカラザルベカラズ、即チ零ナラザルベカラズ、

〔例一〕
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$
ノ値ヲ索ムベシ、

コノ行列式ニ於テ、モシ $a=b$ ナランニハ、ソノ値ハ零ナラザルベカラズ、是ニヨリテ $(a-b)$ ハ $\Delta$ ノ一因数ナラザルベカラズ、同理ニテ $(b-c)$ モ $(c-a)$ モ $\Delta$ ノ一因数ナラザルベカラズ、然ルニ視察ニヨリテ知ラルヽ如ク、$\Delta$ ハ $a\ b\ c$ ニ就キテ三次ノ式ナリ、故ニ $L$ ヲ以テ数係数トスルトキハ $\Delta=L(b-c)(c-a)(a-b)$ ナラザルベカラズ、サテ $\Delta$ ノ主項ハ $(bc^2)$ ニテ、他ニ $bc^2$ ヲ出ダス項ハ無シ、又 $L(b-c)(c-a)(a-b)$ ニ於ケル $bc^2$ ノ係数ハ $L$ ナリ、故ニ $L=1$ ナリ即
$$\Delta=(b-c)(c-a)(a-b).$$

〔例二〕
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$
ノ値ヲ索ムベシ、　答　$-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)$.

〔例三〕
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$
ノ値ヲ索ムベシ、

答　$-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$.





**第四百十六條**　定理四　一ツノ行列式ノ一列或ハ一行ナル諸原素ニ悉ク同一量ヲ掛クルハ定列式全体ニ其量ヲ掛クルニ等シ、

如何ニトイハヾ其行列式ノ各項ニハ何レノ行ノ原素モ何レノ列ノ原素モ一ツ宛ハ含マルヽモ二ツト含マルヽヿハナシ、サレバ一列或ハ一行ノ諸項ニ悉ク同量ヲ掛クルトキハ、ソノ行列式ノ各項従ヒテ其諸項ノ総和モ其量ニテ掛ケラルヽヿトナルナリ、

系　一ツノ行列式ノ二列或ハ二行ノ相異ナルヿ独リ常数ナル因数ノ有無ノミニ在ルトキハ其定列式ノ値ハ零ナリ、コレ定理三及四ヨリ出ヅ、

例ヘバ、
$$\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 & mc_1 \\ na_2 & nb_2 & nc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 \end{vmatrix} = mnp \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ma_1 & nb_1 & pc_1 \\ ma_2 & nb_2 & pc_2 \\ ma_3 & nb_3 & pc_3 \end{vmatrix}.$$

又
$$\begin{vmatrix} ma & na & 1 \\ mb & nb & 1 \\ mc & nc & 1 \end{vmatrix} = mn \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ c & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**第四百十七條**　小行列式、又ハ小式　(Minor Determinants.)

行列式中任意ノ同数ノ行ト列トヲ削リ、ソノ残リノ原素ニテ作リタル行列式ヲ小式ト称ス、一列一行ヲ削リテ得ル小式ヲ一次(First order)ノ小式又ハ第一ノ小式ト称ス、二行二列ヲ削リ

テ得ル小式ヲ二次(Second order)ノ小式又ハ第二ノ小式ト稱ス、以下之ニ準ス、

或ル格段ナル原素 $x$ ノ行及列ヲ削リテ得ル小式ヲ其原素ノ小式ト稱シ、之ヲ表ハスニ $\Delta_x$ ヲ以テス、

例ヘバ $\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_3&c_3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}b_2&c_2\\b_3&c_3\end{vmatrix}$ ハ、イヅレモ $\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$ ノ第一ノ小式ニシテ、

即チ夫々ニ、$\Delta c_3$, $\Delta b_2$, 又 $\Delta a_1$ ナリ

## 第四百十八條　行列式ノ展開　(Development of Determinants.)

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{vmatrix}$$

イマ、上ニ出セル四次ノ行列式ヲ取リテ考ヘンニ、ソノ若干項ハ $a_1$ ヲ含ムベシ、扨ソノ $a_1$ ヲ含メル諸項ノ總和ヲ $a_1.A_1$ ニテ表ハサン同ジ樣ニ、$a_2$ ヲ含メル諸項ノ總和ハ $a_2.A_2$ ニテ、$a_3$ ヲ含メル諸項ノ總和ハ $a_3.A_3$ ニテ、又 $a_4$ ヲ含メル諸項ノ總和ハ $a_4.A_4$ ニテ表ハスベシ、且イヅレノ項ニテモ $a_1$ $a_2$ $a_3$ $a_4$ ノ中ノ一字ダケハ含ムベク、但シ一字ヨリ多クハ含ムヿナカルベキニヨリテ、左ノ如シ、

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4.\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i}).$$

サテ $\Delta$ ノ何レノ項ニマレ $a_1$ ヲ含メルモノナラバ、他ニ $a_1$ ヲ通過セル行ト列トニアル三原素ヲ含ムヿ能ハザルヲ以テ、ソハ必ズ $\Delta a_1$ ノ中ノ或ル項ニ $a_1$ ヲ掛ケタルモノナルヿ明カナリ、又逆ニ、$\Delta a_1$ ノ中ノ任意ノ項、例ヘバ $T$、ニ $a_1$ ヲ掛ケタルモノハ必ズ $\Delta$ ノ中ノ一項ニシテ、且ツ $\Delta$ ノ中ノ $a_1T$ トイフ項ト $\Delta a_1$ ノ中ノ $T$ トイフ項トハ符號ヲ同シフス、如何ニトイフニ轉換ノ度數ニ變リナケレバナリ、

斯クノ如クナルニヨリテ、$\Delta$ ノ中ノ $a_1$ ヲ含メル諸項ノ和ハ $a_1.\Delta a_1$ ナリ、

次ニ、$\Delta$ ノ中ノ $a_2$ ヲ含メル項ハ、$a_2$ ト $\Delta a_2$ ノ中ノ或ル項トノ積ナリ、又逆ニ $a_2$ ト $\Delta a_2$ ニ於ケル任意ノ項、例ヘバ $T$、トノ積ハ必ズ $\Delta$ ノ一項ナリ、但シ $\Delta$ ニ於ケル $a_2.T$ トイフ項ニハ、$\Delta a_2$ ニ於ケル $T$ トイフ項ヨリモ轉換ノ度數一ツダケ多シ、是レ2ガ1ノ前ニ來リテアレバナリ、

斯クノ如クナルニヨリテ、$\Delta$ ニ於テ $a_2$ ヲ含メル諸項ノ總和ハ $-a_2.\Delta a^2$ ナリ、

同理ニテ、$\Delta$ ニ於テ $a_3$ ヲ含メル諸項ノ總和ハ $a_3.\Delta a_3$、又 $a_4$ ヲ含メルモノノ總和ハ $-a_4.\Delta a_4$ ナルヿヲ知ルベシ、

是ニヨリテ $\Delta=a_1\Delta a_1-a_2.\Delta a_2+a_3\Delta a_3-a_4\Delta a^4\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii}).$

又第四百十三條ト第四百十四條トニヨレバ、右ト同ジ樣ニシテ左ノ關係ヲモ證明スルヿヲ得ベシ、

$$\Delta=-b_1\Delta b_1+b_2\Delta b_2-b_3\Delta b_3+b_4\Delta b_4.$$
$$=a_1\Delta a_1-b_1\Delta b_1+c_1\Delta c_1-d_1\Delta d_1.$$

$=\&c.$

**系**　(i)ト(ii)トヲ對比スルトキハ、$a_1\ a_2 \dots$ノ原素ノ係數ハ、夫々ニツノ原素ノ小式ト同ジ絶値ヲ有スルコトヲ知ルベシ、

**第四百十九條**　前條ニ於テ考究シタルハ四次ノ行列式ノ場合ナレド、其ノ推論ノ法ニ至リテハ、一般ニ通ズルモノナリ、乃チ今 $a_1\ a_2 \dots a_n$ ナル原素ヲ第一列ハ第一行トスル所ノ $n$ 次ノ行列式ヲ $\Delta$ トスルトキハ左ノ關係アルベシ、

$$\Delta=a_1\Delta a_1-a_2\Delta a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_n\Delta a_n.$$

又　$$\Delta=(-1)^{r-1}\{k_1\Delta k_1-k_2\Delta k_2+\cdots+(-1)^{n-1}k_n\Delta k_n\}.$$

但シ玆ニ $k_1\ k_2 \dots k_n$ トアルハ第 $r$ 列或ハ第 $r$ 行ノ原素ヲ表ハスモノナリ、

例ヘバ下ノ如シ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$
$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1).$$

次ノ關係ヲ證明スベシ、

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\cancel{4}.$ /　　2. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=27.$　　3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=18.$



4. $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{vmatrix}=16.$　　5. $\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ a & b & 0 \\ 0 & b & c \end{vmatrix}=2abc.$　　6. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}=a(b-c)(a-b).$

7. $\begin{vmatrix} a+b & c & c \\ a & b+c & a \\ b & b & c+a \end{vmatrix}=4abc.$　　8. $\begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & c+a & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix}=4abc.$

9. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9.$　　10. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}=1.$

11. $\Delta=\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$ ノ展開ニ於ケル、$a, f,$ 及 $c$ ノ係數ヲ一々書下スベシ、

次ニ同ジ行列式ニ於ケル $a, b, \dots$ ノ係數ヲバ夫々ニ $A, B, \dots$ ニテ表ハシ、又 $\begin{vmatrix} A & H & G \\ H & B & F \\ G & F & C \end{vmatrix}$ ニ於

ケル $A$、$B$、…ノ係數ヲバ夫々ニ $A'$、$B'$、…ニテ表ハストキハ、$\frac{A'}{a}=\frac{B'}{b}=\dots=\Delta$ ナルヿヲ證明スベシ、

第四百二十條　定理五　行列式ノ一行ニアル原素ニ夫々ニ任意ノ他ノ行ニ於テ夫ニ對スル原素ノ係數ヲ掛クルトキハ得ル所ノ諸積ノ總和ハ零ナリ、

今第 $r$ 行ノ原素ニ夫々ニ第 $s$ 行ニ於テ夫ニ對スル原素ノ係數ヲ掛クルヿトセンニ、ソノ得ル所ノ諸積ノ和ハ $a_r A_s+b_r B_s+\dots$ ナリ、

サテ茲ニ與ヘラレタル行列式トハ唯ニ其第 $s$ 行ガ第 $r$ 行ト同ジキ點ニ於テノミ異ナル所ノ新シキ行列式ヲ取リテ考ヘンニ、$A_s$、$B_s$ …ハ舊ノ行列式ニ於テモ新シキモノニ於テモ何レモ相等シカルベシ、

故ニ新行列式ノ値ハ第四百十九條ニヨリテ次ノ如シ、

$$\pm\{a_s A_s+b_s B_s+\dots\}$$

$$=\pm\{a_r A_s+b_r B_s+\dots\},\quad a_r=a_s,\ b_r=b_s,\dots$$ ナレバナリ、

然ルニ第四百十五條ニヨリテ新行列式ハ零ナルヿヲ知ル、是ニヨリテ、

$$a_r A_s+b_r B_s+\dots=0.$$

例ヘバ行列式　$\Delta=[a_1b_2c_3d_4]$ ニ於テハ、

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+a_4A_4;$$



又

$$0=b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3+b_4A_4,$$

$$0=a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3+d_1D_3,\ \&c.$$

第四百二十一條　定理六　行列式ノ任意ノ一列(或ハ一行)ニ於ケル原素モシ何レモ二ツノ量ノ和ナラバ、其行列式ハソレト同ジ次數ノ二ツノ行列式ノ和トシテ表ハスヿヲ得ベシ、

コレハ下ノ如キ行列式ヲ例ニ引キテ示サバ明瞭ナルベシ、

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

今モシ第一行ナル原素ノ係數ヲ夫々ニ $A_1$、$A_2$、$A_3$ トセバ第四百十八條ニヨリテ左ノ如シ、

$$\Delta=(a_1+\alpha_1)A_1+(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c^2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

コレニ準ヘテ本定理ノ一般ニ眞ナルヿヲ知ルベシ、

右ト同樣ニシテ左ノ如キヿモ證スルヿヲ得ベシ、

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1-\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2-\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3-\beta_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ b_1 & \beta_2 & c_2 \\ c_1 & \beta_3 & c_5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

**第四百二十二條 定理七** 行列式ノ任意ノ一行(或ハ一列)ニ在ル各原素ニ、夫々ニ、他ノ行(或ハ列)ニ於テソレニ對合セル原素ノ同倍數ヲ加フルモ、ソノ行列式ノ値ハ變ハラズ、

三次ノ定列式ヲ例ニ取ランニ、コヽニ證明スベキコトハ即チ、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+mb_1+nc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+mb_2+nc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+mb_3+nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ナルコト是ナリ、

扨、コノ最後ノ行列式ハ定理四ニヨリテ、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mb_1 & b_1 & c_1 \\ mb_2 & b_2 & c_2 \\ mb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} nc_1 & b_1 & c_1 \\ nc_2 & b_2 & c_2 \\ nc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

ニ等シキコト明カナリ然ルニコノ第二及第三ノ行列式ハ何レモ(第四百十六條ノ系ニヨリテ)零ナリ、

即チ本定理ヲ證明スルモノナリ、

〔例一〕 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ ノ證明如何、





今第三行ニ第二行ヲ加フルトキハ、

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

コノ零トナルハ、第一行ト第三行ト全ク同ジクアルニヨリテナリ、

〔例二〕 $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & c & d \\ -a & -b & c & d \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd.$ ノ證明如何、

今、第一列ヲ他ノ各列ニ加フルトキハ、

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 2b & 2c & 2d \\ 0 & 2c & 2d \\ 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = 2ab\begin{vmatrix} 2c & 2d \\ 0 & 2d \end{vmatrix} = 8abcd.$$

〔例三〕 $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix} = 0$ ノ證明如何、

コレハ、第二列ヲ第三列ヨリ引キ次ニ第一ヲ第二ヨリ引ケバ知ラル、

〔例四〕
$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc.$$
ノ證明如何、

〔例五〕
$$\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$
ノ値ヲ索メヨ、

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

〔例六〕
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$
ト
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$
トノ値ヲ索メヨ、

答 0ト九ト、

## 第四百二十三條

次ナルハ一ノ緊要ナル例トス、





$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & l & m & n \\ a_2 & b_2 & c_2 & p & q & r \\ a_3 & b_3 & c_3 & s & t & u \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$
ヲ證明セヨ、

マヅ第一ニ、明カナルヿハ、コノ六次ノ行列式ノ一項ハ、$[a_1b_2c_3]$ノ中ノ任意ノ一項ト、$[\alpha_1\beta_2\gamma_3]$ノ中ノ任意ノ一項トヲ取レバ得ラルヽヿ是ナリ、カクテ

$$\Delta = [a_1b_2c_3] \cdot [\alpha_1\beta_2\gamma_3] + (l,m,n,\ldots \text{ヲ含メル諸項})$$

ナルヿヲ知ル、コノ$l$、$m$、$n$、…ヲ含メル諸項ノ和ハ零ナルヿヲ證明スベシ、

今、$l$ノ小式ヲ考ヘンニ、ソノ各項ニ在ル三原素ハ必ズ下ノ方ノ三列ヨリ取ラザルベカラズ、又ソノ三ツノ中ニテモ右ノ方ノ二行ヨリ取ラルヽハ二ツニ限ル、即チ其ノ三ツノ中ノ一ツハ必ズ零ナラザルベカラズ、故ニ$l$ノ小式ニ在ル各項ハ零ナリ、故ニ$l$ノ小式ハ零ナリ、是ト同ジ樣ニシテ、$m$、$n$…イヅレノ小式モ零ナルヿヲ知ルベシ、即チ$l$、$m$、$n$…ノ何レヲ含メル項モ皆$\Delta$ノ中ニハ無キヿヲ證明スルモノナリ、

同法ヲ以テ、$2n$次ノ行列式ニ於テ、モシ$n$次ノ小式ノ一ニ在ル各原素モシ零ナラバ、原ノ行列式ハ$n$次ノ二ツノ行列式ノ積ニ等シ、トイフヿモ證明スルヿヲ得ベシ、

## 第四百二十四條　行列式ノ掛ケ算 (Multiplication of Determinants.)

コヽニハ共ニ三次ナル二ツノ行列式ヲ掛ケ合ハスル場合ヲ考ヘントス但シ其ノ方法ニ至リテハ如何ナル場合ニモ洽ク通用スベキモノナリ、

左ノ二ツノ行列式ノ積ヲ三次ナル一ツノ行列式ニテ表ハスコト、

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad 及 \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

第四百二十三條ニヨリテ

$$\Delta_1\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(A).$$

コノ初メノ三列ニ夫々ニ $\alpha_1$、$\beta_1$、$\gamma_1$ ヲ掛ケ、ソノ積ヲ第四列ニ加ヘヨ、次ニ初メノ三列ニ夫々ニ $\alpha_2$、$\beta_2$、$\gamma_2$ ヲ掛ケテ、ソノ積ヲ第五列ニ加ヘヨ、次ニ又初メノ三列ニ夫々ニ $\alpha_3$、$\beta_3$、$\gamma_3$ ヲ掛ケテ其





其積ヲ第六列ニ加ヘヨ、サスレバ $(A)$ ト同値ナル次ノ行列式ヲ得、

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -1, & 0, & 0, \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0, & -1, & 0, \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0, & 0, & -1, \\ a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1, & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1, & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1, & 0, & 0, & 0, \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2, & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2, & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2, & 0, & 0, & 0, \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3, & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3, & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3, & 0, & 0, & 0. \end{vmatrix}$$

然ルニ、コレハ第四百廿三條ニヨリテ、

$$-\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{即チ}1\text{ト} \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\beta_1+a_3\gamma_1, & b_1\alpha_1+b_2\beta_1+b_3\gamma_1, & c_1\alpha_1+c_2\beta_1+c_3\gamma_1 \\ a_1\alpha_2+a_2\beta_2+a_3\gamma_2, & b_1\alpha_2+b_2\beta_2+b_3\gamma_2, & c_1\alpha_2+c_2\beta_2+c_3\gamma_2 \\ a_1\alpha_3+a_2\beta_3+a_3\gamma_3, & b_1\alpha_3+b_2\beta_3+b_3\gamma_3, & c_1\alpha_3+c_2\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}\text{ト}$$

ノ積ニ等シ即チ最后ノ行列式ガ所要ノ積ナリ

〔例1〕 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$ ニ $\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$ ヲ掛ケヨ、

所要ノ積ハ $\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix}$ ナリ但シ $\left\{\begin{array}{l} X=ax+by+cz, \\ Y=ay+bz+cx, \\ Z=az+bx+cy. \end{array}\right\}$ トス

サテ、$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}=x^3+y^3+z^3-3xyz$, 且又第二ノ行列式モ同形ナルヲ以テ、スベテ $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ノ形チノ二ツノ式ノ積モ亦同シ形チニ表ハスヿヲ得、トイフヿ(第百五十五條ノ例四ニ由リテ)知ラル、

〔例二〕 $\begin{vmatrix} 2bc-a^2, & c^2, & b^2 \\ c^2, & 2ac-b^2, & a^2 \\ b^2, & a^2, & 2ab-c^2 \end{vmatrix}=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2$. ヲ證明セヨ、

$\begin{vmatrix} a & -b & c \\ c & -a & b \\ b & -c & a \end{vmatrix}$ ト $\begin{vmatrix} -a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & c & a \end{vmatrix}$ トノ積ヲ作レ、

〔例三〕 $A_1$, $B_1$, …, ヲシ $[a_1b_2c_3]$ ノ展開ニ於ケル $a_1$, $b_1$ … ノ係數ナラバ、

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ナルヿヲ證明セヨ、



如何ニトイフニ、$A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3=B_1b_1+B_2b_2+B_3b_3=C_1c_1+C_2c_2+C_3c_3=[a_1b_2c_3]$,

且ツ $A_1b_1+A_2b_2+A_3b_3=\ldots\ldots=0$ 〔第四百廿條〕

ナルニヨリテ、$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} [a_1b_2c_3], & 0, & 0 \\ 0, & [a_1b_2c_3], & 0 \\ 0, & 0, & [a_1b_2c_3] \end{vmatrix}$

カクテ、$[A_1B_2C_3]\cdot[a_1b_2c_3]=[a_1b_2c_3]^3$, ナリ、

**第四百二十五條** 記法 $\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix}$ ハ、イヅレニマレ其ノ一行ヲ省キテ得ラル、行列式四ツヲ表ハス爲ニ用ヰルモノナリ、

**第四百二十六條** 次ニハ行列式ノ應用ノ緊要ナルモノヲ示シ、以テ終結ヲ爲サントス、

**第四百二十七條 一次ノ聯立方程式** 一次ノ聯立方程式ナニホド有リモ前ニイヘル行列式ノ性質ニヨラバ其ノ解ハ直チニ得ラル、

マヅ最初ニハ方程式三ツアル場合ヲ取リテ論セン、即チ

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=k_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3. \end{array}\right.$$

サテ此三ツノ方程式ニ、次第ニ、$A_1$、$A_2$、$A_3$ヲ掛ケヨ、但シ$A_1$、$A_2$、$A_3$、ハ夫々ニ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ニ於ケル$a_1$、$a_2$、$a_3$ノ係數トス、然ルキハ、加ヘ合ハスルヿニテ、

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3$$

然ルニ、第四百卄條ニヨリテ、コノ$y$ト$z$トノ係數ハ何レモ零ナリ、故ニ

$$[a_1b_2c_3]x=[k_1b_2c_3],$$

同シ理ニテ、

$$[a_1b_2c_3]y=[a_1k_2c_3],$$

$$[a_1b_2c_3]z=[a_1b_2k_3].$$

猶、$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+d_1x_4+\dots=k_1$ノ形チノ方程式$n$箇アル場合ヲ考ヘンニ、矢張前ノ如クニ、ソノ$n$箇ノ方程式ニ、次々ニ、$A_1$、$A_2$、$A_3$、…ヲ掛クベシ、ソノ$A_1$、$A_2$、$A_3$、…トハ夫々ニ行列式$[a_1b_2c_3\dots]$ニ於ケル$a_1$、$a_2$、$a_3$、…ノ係數ヲ表ハスモノトス、然ルキハ、加ヘ合ハスルヿニテ

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\dots)x=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3+\dots$$

ヲ得ベシ、コレ他ノ$y$、$z$、…ノ係數ハ何レモ第四百卄條ニヨリテ、零トナレバナリ、

コノ故ニ

$$x=\frac{[k_1b_2c_3\dots]}{[a_1b_2c_3\dots]}.$$





同理ニテ

$$y=\frac{[a_1k_2c_3\dots]}{[a_1b_2c_3\dots]},$$

……………

〔例一〕

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=6,\\ 2x+4y+\ z&=7,\\ 3x+2y+9z&=14. \end{aligned}\right\}$$

ヲ解クベシ、

$x$、$y$、$z$、ノ値ハ夫々ニ、

$$\frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 14 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}},\quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 14 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}},\quad \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}}$$

ナリ、且ツコノ各行列式ハ$-20$ナルヿ知ラルベケレバ、$x=y=z=1$ナリ、

〔例二〕

$$\left.\begin{aligned} x+\ y+\ z+\ w+k&=0,\\ ax+by+cz+dw+k^2&=0,\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2w+k^3&=0,\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3w+k^4&=0 \end{aligned}\right\}$$

ヲ解クベシ

サテ
$$x=\begin{vmatrix}1&1&1&k\\ b&c&d&k^2\\ b^2&c^2&d^2&k^3\\ b^3&c^3&d^3&k^4\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ a&b&c&d\\ a^2&b^2&c^2&d^2\\ a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$$
$$=\frac{k(c-d)(d-b)(b-c)(k-b)(k-c)(k-d)}{(c-d)(d-b)(b-c)(a-b)(a-c)(a-d)}=\frac{k(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

他ニ$y$、$z$及$w$ノ値モ、$x$ノ値ニ由リテ、書キ下シ得ベシ、

**第四百二十八條**　逐ヒ出シ (Elimination.)　三ツノ方程式
$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0,\\ a_3x+b_3y+c_3=0.\end{cases}$$
ガ聯立スルヿヲ得ベキ要件ヲ索ムルヿ、

コノ方程式ニ次第ニ$C_1$、$C_2$、$C_3$ヲ掛ケヨ、但シ$C_1$、$C_2$、$C_3$トハ夫々ニ
$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\\ a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$
ニ於ケル$c_1$、$c_2$、$c_3$ノ係數ヲ表ハスモノナリ、然ル片ハ、加ヘ合ハスルヿニテ、
$$(a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3)x+(b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3)y+c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=0$$
ヲ得、即チ第四百廿條ニ由リテ、





$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\\ a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0.$$
コレヲ所要ノ要件トス、

(擬、$a_1x+b_1y+c_1z=a_2x+b_2y+c_2z=a_3x+b_3y+c_3z=0.$ トイフ三ツノ同次方程式ニハ明白ニ$x=y=z=0$ガ適合ス、サレド$x$、$y$、$z$モシ悉ク零ナラザランニハ、右ニイヘル所ニ由リテ、$[a_1b_2c_3]=0$トイフ要件ナカルベカラズ、トイフヿヲ知ルベシ、)

又$a_1x+b_1y+\dots+k_1=0$トイフ形ヲノ方程式$n$箇アリテ、ソノ未知量ノ數ハ$(n-1)$ナルモノ、聯立スベキ要件即チ同時ニ眞ナルベキ要件ハ、$[a_1b_2c_3\dots k_n]=0$ナルヿモ同ジ様ニシテ證明スルヿヲ得ベシ、

**第四百二十九條**　シルヴェスター氏ノ逐ヒ出シノ方法 (Sylvester's Method of Elimination.) コレハ、$x$ニ付キテ有理ノ整方程式二ツカラシテ、$x$ヲ逐ヒ出ス一法ナリ、サテ其方法ハ、次ニ舉ゲタル例題ニ由リテ了解スベシ、

(例一) $ax^2+bx+c=0$ 及 $px^2+qx+r=0$ ヨリ$x$ヲ逐ヒ出セ、

與ヘラレタル方程式ニ由リテ、
$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx&=0,\\ ax^2+bx+c&=0,\\ px^3+qx^2+rx&=0,\\ px^2+rx+c&=0.\end{aligned}$$

サテ茲ニハ $x$ ノ種々ノ羃アルヲ皆相異ナレル未知量ト考フルヿヲ得ベシ、サテ右ノ四ツノ方程式ヨリ $x^3$ $x^2$ 及 $x$ ヲ逐ヒ出サバ、ソノ結果ハ第四百廿八條ニヨリテ、

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ o & a & b & c \\ p & q & r & o \\ o & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

(コノ結果ハ第百五十三條ノ[例三]ニ於テ得ラレタルモノニ等シ)

[第二]　方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 及 $px^2+qx+r=0$ ヨリ $x$ ヲ逐ヒ出スベシ.

與ヘラレタル方程式ヨリシテ、

$$\begin{aligned} ax^4+bx^3+cx^2+dx &=0, \\ ax^3+bx^2+cx+d &=0, \\ px^4+qx^3+rx^2 &=0, \\ px^3+qx^2+rx &=0, \\ px^2+qx+r &=0. \end{aligned}$$

コノ $x$ ノ種々ナル羃ヲバ皆相異ナレル未知量ト見做シテ、ソレヲ此五ツノ方程式ヨリ逐ヒ出スキハ、左ノ要件ヲ得ベシ、

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o \\ o & a & b & c & d \\ p & q & r & o & o \\ o & p & q & r & o \\ o & o & p & q & r \end{vmatrix}=0.$$

## 第四十二例題集

次ナルヿヲ一々證明スベシ

第一　$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}=4a^2b^2c^2.$

第二　$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix}=0.$

第三　$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b'+c' & c'+a' & a'+b' \\ b''+c'' & c''+a'' & a''+b'' \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$

第四　$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}=2(a+b+c)^3.$

第五　$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ba & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix}=4a^2b^2c^2.$

第六　$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & (c+a)^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2(bc+ca+ab)^3.$

第七　$\begin{vmatrix} -bc & bc+b^2 & bc+c^2 \\ ca+a^2 & -ca & ca+c^2 \\ ab+a^2 & ab+b^2 & -ab \end{vmatrix}=(bc+ca+ab)^3.$

第八　$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & ca & bc \\ ca & (b+c)^2 & ab \\ bc & ab & (c+a)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$

第九　$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$

第十　$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}=-(a+b+c)(-a+b+c)(-b+c+a)(-c+a+b).$

第十一　$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & \gamma^2 & \beta^2 \\ b^2 & \gamma^2 & 0 & \alpha^2 \\ c^2 & \beta^2 & \alpha^2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & a\alpha & b\beta & c\gamma \\ a\alpha & 0 & c\gamma & b\beta \\ b\beta & c\gamma & 0 & a\alpha \\ c\gamma & b\beta & a\alpha & 0 \end{vmatrix}.$

第十二　$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=abc.$

第十三　$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}=abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$

第十四　$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(a+d-b-c).$

第十五　$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix}=x^3(x+10).$

第十六
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

第十七
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0.$$

第十八
$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = a(b-a)^3.$$

第十九
$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = -(a-b)^4.$$

第二十
$$\begin{vmatrix} ax-by-cz & ay+bx & cx+az \\ ay+bx & by-cz-ax & bz+cy \\ cx+az & bz+cy & cz-ax-by \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)(ax+by+cz).$$



第廿一
$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

第廿二
$$\begin{vmatrix} (b-c)^2 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ (b-a)^2 & (c-a)^2 & (b-c)^2 \\ (c-a)^2 & (c-b)^2 & (a-b)^2 \end{vmatrix} = -2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^3.$$

第廿三　一ノ行列式ノ値モシ零ナラバ、ソノ任意ノ一列ノ小式ハ他ノ何レノ列ノ小式ニモ比例スベシ。

第廿四
$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1.$$

第廿五
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2+\alpha^2 & ab+\alpha\beta & ac+\alpha\gamma \\ 1 & ab+\alpha\beta & b^2+\beta^2 & bc+\beta\gamma \\ 1 & ac+\alpha\gamma & bc+\beta\gamma & c^2+\gamma^2 \end{vmatrix} = (b\gamma-c\beta-a\gamma+a\beta-ba)^2.$$

第廿六

$$\left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & z & a & b & 0 \\ 0 & y & 0 & a & 0 & c \\ x & 0 & 0 & 0 & b & c \\ x & y & z & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

ニ在ル行列式ハ何レモ皆零ナルベシ、

第廿七

$$\begin{vmatrix} x^2-yz & y^2-zx & z^2-xy \\ z^2-xy & x^2-yz & y^2-zx \\ y^2-zx & z^2-xy & x^2-yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}^2.$$

第廿八

$$\begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+\lambda c & ac-\lambda b \\ ab-\lambda c & b^2+\lambda^2 & bc+\lambda a \\ ac+\lambda b & bc-\lambda a & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3.$$

第廿九

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}.$$

代數學教科書巻四終



# 代數學教科書巻四附錄

## 答

### 第卅六例題集

第七　$\dfrac{n+1}{n+2}$.

第十　$b_{n-1}p_n^2-(b_na_n+b_n^2b_{n-1})p_{n-1}^2-a_nb_{n-1}(b_nb_{n-1}+a_n)p_{n-2}^2+a_nb_na_{n-1}^2p_{n-3}^2=0$.

### 第卅七例題集

第一　(i)　$4+\dfrac{1}{8+}\cdots\cdots$　　(ii)　$11+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{4+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{22+}\cdots\cdots$

(iii)　$5+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{10+}\cdots\cdots$

(iv)　$6+\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{5+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{12+}\cdots\cdots$

第三　(i)　$\sqrt{\dfrac{5}{3}}$.　　(ii)　$\dfrac{1}{7}(4+\sqrt{37})$.　　(iii)　$\dfrac{1}{52}(28-\sqrt{30})$.

第十六　$\dfrac{1}{2}(n^3+3n)$.　　第二十六　$e^{-\frac{1}{3}}$.

第六 733.

## 第卅八例題集

第十 3, 7, 9, 11, 13, 19. 第十三 $504n-6$.

## 第四十例題集

第一 (i) $x=2, y=3.$ (ii) $x=1, y=10; a=14, y=2.$

(iii) $x=4, y=8; x=13, y=1.$ (iv) 696, 3; 625, 18; 554, 33;……;57, 138.

第二 22, 30,

第三 (i) $x=4+13m, y=1+7m.$ (ii) $x=9+11m, y=7+9m.$

(iii) $x=15m-7, y=17m-10.$ (iv) $x=64+69m, y=44+49m.$

第四 (i) 3, 1, 2; 5, 2, 1; 2, 4, 1.

(ii) 1, 21, 1; 5, 14, 1; 9, 7, 1; 3, 13, 2; 7, 6, 2; 5, 5, 3; 3, 4, 4; 1, 12, 3; 1, 3, 5.

(iii) 2, 8, 3. (iv) 8, 38, 50; 19, 44, 35; 30, 50, 20; 41, 56, 5.

第五 (i) 1325, 2; 441, 3; 101, 8; 77, 10; 33, 21; 25, 27; 5, 112; 1, 333.

(ii) 5, 3. (iii) 8, 5. (iv) 6, 1; 13, 14.

第七 195, 121; 52, 264. 第八 3. 第九 20.



第十 3. 第十一 三磅十四志六片、四磅五志六片、

第十二 二志七片、二志十片、二志十一片、三志一片、三志二片、三志三片、三志四片、三志五片、三志六片、三志八片、三志九片及四志、

第十三 11, 12, 15, 24, 36. 第十四 15, 55; 25, 65; 35, 75. 第十五 21.

## 第四十一例題集

第一 $\frac{36}{67}, \frac{31}{67}.$ 第二 $\frac{11664}{33397}, \frac{11124}{33397}, \frac{10609}{33397}.$

第四 8. 第八 $3n^2+5n+2$片 第十五 $\frac{1}{4}.$

第十六 $\frac{1}{2}.$ 第廿一 $\frac{7}{9}.$

代數學教科書卷四附錄終

明治二十四年十月二十日印刷
明治二十四年十一月六日發行
明治二十五年五月十八日再版發行
明治二十六年三月廿五日三版發行
明治二十七年五月十二日四版發行
明治二十九年五月十五日五版發行
明治三十年六月五日六版發行

定價金五十五錢
代數學教科書卷之四



譯述者　藤澤利喜太郎
小石川區諏訪町三十六番地

譯述者　飯嶋正之助
本郷區西片町十五番地

發行者　龜井忠一
神田區裏神保町一番地

印刷者　熊田宜遜
神田區錦町三丁目廿五番地

## 東京市大賣捌所

| | |
|---|---|
| 神田區表神保町 | 開新堂 |
| 同表神保町 | 中西屋書店 |
| 同裏神保町 | 敬業社 |
| 同裏神保町 | 富山房 |
| 同裏神保町 | 明法堂 |
| 同一ツ橋通町 | 有斐閣 |
| 同表神保町 | 八尾書店 |
| 同表神保町 | 六合館 |
| 同表神保町 | 東京堂 |
| 同表神保町 | 中央堂 |
| 同小川町 | 牧野善兵衛 |
| 同裏神保町 | 渡邊書店 |
| 同錦町 | 炭本專吉 |
| 日本橋區通三丁目 | 丸善書店 |
| 同通一丁目 | 大倉書店 |
| 同通一丁目 | 青木嵩山堂 |
| 日本橋區通二丁目 | 小林新兵衛 |
| 同通三丁目 | 林平次郎 |
| 同下槇町 | 下村初太郎 |
| 同室町二丁目 | 杉本七百丸 |
| 同本石町二丁目 | 小林喜右衛門 |
| 同通油町 | 水野慶次郎 |
| 同若松町 | 榊原友吉 |
| 同大傳馬町 | 内田芳兵衛 |
| 同大傳馬町 | 長島書店 |
| 京橋區竹川町 | 共益商社 |
| 同銀座四丁目 | 八尾商店 |
| 同銀座三丁目 | 文海堂本店 |
| 同尾張町二丁目 | 東海堂 |
| 同弓町 | 松邑孫吉 |
| 同南傳馬町 | 目黒甚七 |
| 同南傳馬町 | 吉川半七 |
| 同大鋸町 | 青野友三郎 |
| 本郷區切通坂町 | 南江堂 |
| 同本郷一丁目 | 三河屋 |
| 同本郷六丁目 | 岡崎屋 |
| 麴町區麴町三丁目 | 文海堂支店 |
| 麻布區飯倉三丁目 | 橋爪米吉 |
| 芝區三田一丁目 | 福島書店 |

## 各地方大賣捌所

| | |
|---|---|
| 大阪市備後町 | 盛文館 |
| 同備後町 | 吉岡平助 |
| 同北久太郎町 | 柳原喜兵衛 |
| 同備後町 | 梅原龜七 |
| 同南久寶寺町 | 前川善兵衛 |
| 同北久寶寺町 | 三木佐助 |
| 京都市寺町四條 | 田中治兵衛 |
| 同寺町二條 | 松田庄助 |
| 同 | 河合文港堂 |
| 名古屋市本町 | 川瀬代助 |
| 同 | 谷島屋書店 |
| 遠州濱松町連尺 | 文源堂支店 |
| 駿州沼津町上土 | 渡邊八重吉 |
| 同吳服町 | 吉見書店 |
| 同馬場町 | 文源堂書店 |
| 同江川町 | 廣瀬市藏 |
| 静岡市新通一丁目 | 勝見儀助 |
| 同常盤町 | 内藤傳右衛門 |
| 甲府市柳町 | 柳正堂 |
| 福岡町 | 同支店 |
| 千葉町本町 | 同支店 |
| 上總國東金町 | 多田屋本店 |
| 水戸市上市泉町 | 川又銀藏 |
| 新潟市本町通七番町 | 櫻井產作 |
| 函館市末廣町 | 魁文舍 |
| 同 | 安中明太郎 |
| 同引地町 | 鶴野書店 |
| 長崎市酒屋町 | 安中半三郎 |
| 同元町五丁目 | 吉岡支店 |
| 神戸市相生町 | 熊谷幸助 |
| 同伊勢佐木町 | 鈴木松泉堂 |
| 同松ヶ枝町 | 天野弘集堂 |
| 横濱市辨天通 | 丸善書店 |
| 同 | 若林書店 |
| 同 | 大黑屋書店 |
| 德島市通町 | 坂井萬吉 |
| 豐前豐津町 | 佐野長七 |
| 佐賀市白山町 | 河内莊助 |
| 大分竹町 | 甲斐治平 |
| 久留米米屋町 | 菊竹書店 |
| 同 | 森岡書店 |
| 福岡博多中島町 | 積善館第一支店 |
| 同山下町 | 金光堂 |
| 鹿兒島市中町 | 吉田幸兵衛 |
| 同新坪井町 | 好文堂書店 |
| 熊本市新二丁目 | 長崎次郎 |
| 同 | 川岡清助 |
| 松江市天神町 | 大藍庄次郎 |
| 同道場門前町 | 山陽堂桂吉 |
| 山口市中ノ市町 | 小原松千代 |
| 廣島市鹽屋町 | 積善館第二支店 |
| 同 | 武内彌三郎 |
| 同上之町 | 本郷安次郎 |
| 岡山市中ノ市町 | 森碩藏 |
| 奈良町小樽井 | 辻本濃文堂 |
| 大津上小唐崎 | 島林專三郎 |
| 岐阜市泉町 | 郁文堂書店 |
| 同四日市町 | 伊東善太郎 |
| 同蚫頭領町 | 豐住謹次郎 |
| 伊勢津市大門町 | 河島九右衛門 |
| 同本町通鐵砲町 | 三輪文次郎 |

同七日町　牧野德太郎
山形市七日町　五十嵐太左衛門
同名掛町　佐藤養治
同國分町　有千閣
同大町　文學館書店
同大町　木村文助
仙臺市大町　高藤書店
同　博向堂
同福島町　漸進堂
同　森萬作
同若松町　田中善平
同　磐岳堂
岩代郡山町　富屋久之丞
宇都宮鐵砲町　內田濵吉
同堅町　文江堂
前橋市曲輪町　煥乎堂
同諏訪町　日新堂
同長野大門町　西澤喜太郎
同大名町　鶴林堂
信州松本南深志町　水琴堂
松山市港町　土肥書店
同堺町　山中專助
同本町下三丁目　同第二支店
同本町一丁目角　同第一支店
同種崎町　開成舍本店
高知市種崎町　澤本駒吉

---

同小樽永井町　川南重祐
同　螢間左右太
北海道札幌南一條西三丁目　自治堂書店
同地藏堂町　江口藤吉
同水原町　西村六平
同三條町　野島半七
同　松田喜久松
同表三ノ町　覺張治平
越後長岡表四ノ町　目黑十郎
同中町　小林清重堂
同太田口町　守川吉兵衛
同砂町　眞田善次郎
同西町　大橋甚吾
富山市東四十物町　中田書店
同　益智館
同尾張町　牧野一平
同石浦町　宇都宮源平
金澤市片町　石井久太郎
同　日新館
福井市佐佳枝中町　品川太右衛門
同　浦山政吉
靑森縣八戶町　伊吉商店
同森町米町　鎌田書店
同下土手町　赤平篤三郎
弘前市本町五丁目　今泉道次郎
秋田市茶町　成見清兵衛
同　佐藤庄兵衛
盛岡市内丸　上村才六
羽前鶴岡町　日向源吉