再訂

新實業幾何學教科書

理學博士 松本敏三 編

広島大学図書
2000054772

40195
教科書文庫
4
413
44-1937
2000.0
54772

375.9
Ma20
教科書文庫
4
413
44-1937
2000054772
資料室

らふあえる筆 數學者ノ群「あてねノ學校」

京都帝國大學理學部教授

理學博士 松本敏三 編

再訂

新實業幾何學教科書

広島大学 教 54772 図書

文部省檢定濟

昭和十二年一月十三日 實業學校數學科

東京 冨山房 神田

広島大学図書
2000054772

再訂版序

本書ガソノ初版發行以來ノ數年間ニ於テ,廣ク江湖ノ歡迎ニ浴シ,且ツ多數ノ學校ニ採用セラレタルハ,編者ノ大イニ欣幸トスルトコロデアル。

今回編者ハ本書ノ姉妹篇タル新實業算術教科書及ビ新實業代數學教科書ノ再訂版ヲ公ニシタ。從ツテ本書モ亦再訂ヲ必要トスル。今回ノ改訂ニ當ツテハ,印刷及ビ挿圖ノ整美ニ努メ,內容ニ關シテハ說述ノ改良,問題ノ取捨等尠クナイ。但シ本書ノ仕組ハ初版以來カハル所ハナイ。內容ノ取捨ニ就イテハ教授者ノ自由手腕ニ信頼スルモノデアル。

大方諸彥ノ高評ヲ希フ。

昭和十一年十月

編者識

初版緒言

本書ハ諸種ノ實業學校程度ノ幾何學教科書トシテ編纂シタモノデアル。

實業學校ニ於テ幾何學ヲ課スル理由ハ勿論ソノ應用ニアル。然シ一口ニ應用トイツテモ,ソレハ頭腦ニヨルコトデアル。頭腦ガ綿密デナケレバ何事モ出來ルモノデナイ。緻密ニシテ嚴格ナル推理力ハ何レノ場合ニ於テモ最モ必要デアル。コノ嚴密ナル推理ノ力ヲ養成スルニハ幾何學ヲ以テ第一トスル。コノ考ヨリシテ編者ハ最モ嚴密ニ各定理ヲ講述シタ。然シ嚴密ナルガ爲メニ理解ノ難澁ナルハ編者ノ最モ嫌フ所デアル。編者ガ出來ル得ル限リ平易ヲ旨トシタノハコノ理由ニヨルノデアル。更ニ編者ハソノ結果ノ應用ニ留意シ,或ハ明晰ナル圖ヲ添ヘ又ハ名畫ヲ挿入シテ,如何ニ幾何學ガ重要ニシテ興味深キカヲ示シタ。

細部ニ入ツテ語ルナラバ,本書ノ緒論ニ於テ線分及ビ角ニ關スル初等知識ヲ授ケ,旁ラ幾何學ノ歴史及ビ目的ヲ話シ,次デ定理,系,公理等ヲ說明シタ。初學ノ生徒ハ常識ト學問トヲ區別スルコト困難ナルタメ,幾何學ノ最初ハ難解デアル。コノ第一章緒論ハ幾何學入門トモ稱ス可ク、ヤガテ嚴密ナル推論ヲナス基礎ヲ作ルモノトシテ役立ツコトヲ希望スル。又コノ緒論ニ於テハ線分及ビ

角ガ量ナルコトヲ充分了解スルヲ要スル。

平行線ハコレヲ幾何學ノ初メノ部分ニ教授シテモヨイガ,サウスルト平行線ガ必然的ナ觀念ナルカノ如キ感ヲ與ヘ,他日非ゆうーくりっど幾何學等ノ了解ヲ害フカヲ虞レル。又作圖題モ後章ニ於テ纏メテ教授スルコトトシタ。作圖題ヲ一纏ニセズシテコレヲ隨所ニ揭ゲルコトハ作圖ニ對スル嚴正ナル理解ヲ與ヘ難キカヲ虞レル。圖ヲ畫クコトガ作圖デハナイ。作圖題トハ一定ノ法ノ拘束ノ下ニアルノデアル。未ダ充分幾何學的知識ヲ習得シナイ以前ニ於テ,ヨクコノ法ノ拘束ヲ感知スルコトガ出來ルヤ否ヤハ,甚ダ疑問トセザルヲ得ナイ。

本書ハ續編ニ於テ立體幾何學及ビ三角法初步ヲ授ケテアル。コノ續編ハ授業時間數ニ應ジテソノ一部又ハ全部ヲ削除シテモヨイ。又立體幾何學ヲ削除シテ三角法ヲ教ヘテモ勿論差支ナイ。

編者ハ中等數學教科書ヲ編纂シテ種々ナル研究ヲナシ,今茲ニ又實業教科書ノ編纂ニ及ンダノデアル。然シ編者ノ實業教科書ハ決シテ中等教科書ノ頁數ヲ短縮シタモノデナイ。全ク新規ニ統制ヲ持ツタ著書デアル。

筆ヲ擱クニ當リ編者ハ實地教授ノ任ニアル大方諸彥ノ高評ト忠言トヲ切望スルモノデアル。

昭和五年十月

編　者　識

目次

		頁
第一章	緒論	1
第二章	三角形	23
第三章	平行線	35
第四章	多角形	43
第五章	三角形ノ邊ト角ノ大小・重心	52
第六章	圓	60
第七章	作圖題	89
第八章	比・比例線	104
第九章	相似形	113
第十章	面積	126
第十一章	二線分ノ積	147
第十二章	圓ノ周,面積	154
第十三章	軌跡	161

續編

第十四章	平行・垂直	171
第十五章	多面體	185
第十六章	曲面體	202

第十七章	球	207
第十八章	鋭角ノ三角函數	213
第十九章	鈍角ノ三角函數	230
第二十章	一般ノ三角形	232

附錄	問題ノ答	1—4
	三角函數ノ眞數表	卷末

再　訂

新實業幾何學教科書

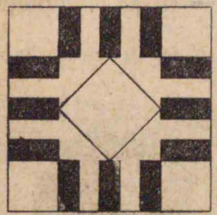
全

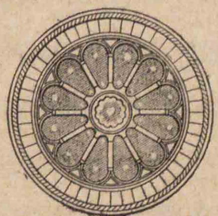
平面幾何學

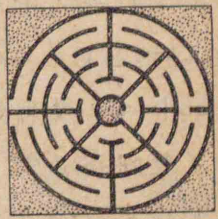
第一章　緒　論

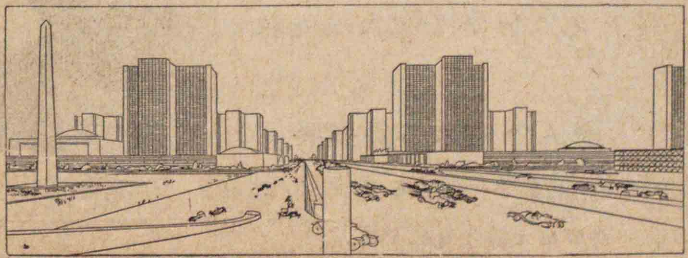
1. 幾何學

矩形□,圓○,平行線＝等ハ幾何學的圖形デアル。斯様ナ圖形ハ澤山アル。次ニ示スモノハ幾何學的圖形ヲ應用シタ圖デアル。









幾何學ニ於テハ斯様ナ圖形ニツイテソノ構成法ヤ計算又ハソレ等ノ性質ヲ研究スル。

幾何學ノ發達　幾何學ハぎりしやカラ吾々ニ傳ハツタモノデ,幾何學ノ原語 Geometry ハ二ツノぎりしや語 ge-metron ヨリ來リ,「土地」ト「計ル」ノ意味デアル。ソシテ幾何學ハぎりしやヘハえじぷとカラ傳ハツテ來タモノデアル。えじぷとノぴらみっどノ壁ニハ澤山ナ幾何學的圖案ガアル。えじぷとデハないる河ガ年々氾濫シタノデ,ソノ度毎ニ土地ヲ測量シナケレバナラナカツタ。コレニヨツテ幾何學ガえじぷとニ發達シタノデアルト傳ヘラレテキル。

ぎりしやノ七哲ノ一人デアル**たーれす** (Thales, 640—546 B.C.*) ハえじぷとヲ旅行シテ種々ノ修業ヲナシ,中ニモ幾何學ニ於ケル力ハ彼ノ教師達ヲ驚カシタトイフ。ぎりしやニ歸ツテカラ彼ハ旅行中修得シタ幾何學ヲ友人達ニ教ヘタ。

たーれす

ぎりしや人ハ漸次必要ト共ニ幾何學ソレ自身ニ興味ヲモツヤ

* B.C. ハ西暦紀元前ノ意味デアル。

ウニナリ,たーれすノ時代カラ三百年ヲ經タ頃ニハ幾何學ハぎりしやニ於テ立派ナ學問トナツテキタ。

ぴたごらす (Pythagoras, 約580—約500 B.C.) ヤ**ぷらとー** (Plato, 429—348 B.C.) ハ偉大ナ學者デアツタ。ぷらとーハ自分ノ學校ノ入口ニ「幾何學ヲ知ラザルモノハ入ルヲ許サズ」ト掲示シテオイタ。彼ハ又神ハ永遠ニ幾何學スル」トイフ程信ジテキタ。

ぴたごらす

ぷらとー

コノ時代ニ種々ノ教科書ガ書カレタノデアルガ標準的ナモノヲ書イタノハ**ゆーくりっど** (Euclid, 約330 B.C.生) デアツタ。コノゆーくりっどノ書イタ教科書ハ誠ニ立派ナモノデ,ソノ後2200年ノ久シイ間教科書トシテ用ヒラレ,種々ナ學者ニヨツテ改良進歩ヲナシ遂ニ今日ニ到ツタ。

ゆーくりっど

吾々ガ學ブ幾何學ハゆーくりっどカラ傳ハツタモノデアツテ,一

名ゆーくりっど幾何學トモイフ。

2. 立體・面・線・點

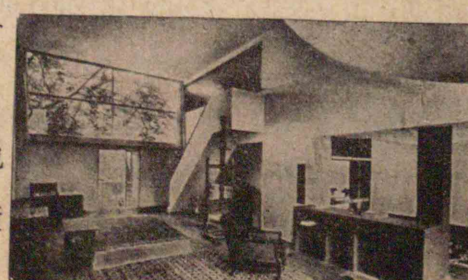
物體ヲソノ**形**,**大イサ**,**位置**ダケニツイテ考ヘルトキ,ソレヲ**立體**トイフ。立體ノ限界ヲ**面**トイフ。面ノ限界又ハ二面ガ出會フ所ヲ**線**トイフ。線ノ端又ハ二線ノ出會フ所ヲ**點**トイフ。

點ハ位置バカリ,線ハ位置ト長サバカリ,面ハ大イサト位置バカリヲモツ。

然シ點ヲ書キ表ハスニハ •,× ヲ用ヒ,コレニA, B等ノ文字ヲツケ**點A**,**點B**等ト呼ブ。

3. 直線・平面

細イ絹絲ヲ張ツタヤウナ眞直（マツスグ）ナ線ヲ**直線**トイフ。コレヲ嚴格ニイヘバ「直線トハ長サガアツテ大イサガナク,且ツソノ何レノ部分ヲ他ノ部分ニ如何樣ニ重ネテモ全ク



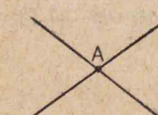
合スルモノ」デアル。

直線ハ通常————ヲ以テ表ハシ,ソレヲ書クニハ定規ヲ用ヒル。

直線デナイ線ヲスベテ**曲線**トイフ。

靜カナ水面ノヤウナ平ラナ面ヲ**平面**トイフ。コレヲ嚴格ニイヘバ「平面トハ廣サガアツテ厚サガナク,且ツソノ何レノ部分ヲ他ノ部分ニ如何樣ニ(ソノマヽ又ハ裏返シテ)重ネテモ全ク合スルモノ」デアル。

平面ニハ廣サガアルカラソノ上ニ點ヲトルコトガ出來,且ツ平ラデアルカラ直線ヲ書クコトガ出來ル。又ソノ直線ヲ平面カラ離サズニ如何樣ニデモ動カスコトガ出來ル。



一平面上ノ二直線ガ切リ合フ所ハ點デアル。コレヲソノ二直線ノ**交點**トイヒ,二直線ハソノ點デ**交ル**トイフ。

平面デナイ面ヲスベテ**曲面**トイフ。

問1. 一ツノ平面上ノ二點ヲ過ル直線ヲ引クトソノ直線ハソノ平面ニ密着スルカ。

問2. 大工ガ板ヲ削ルトキ,指金（サシガネ）ノ縁ヲアテヽ透

シテ見ルノハ何故カ。

4. 圖形

立體,面,線,點又ハソレ等ノ集合ヲ**圖形**トイフ。一平面上ノ圖形ヲ**平面圖形**トイヒ,特ニソレガ直線バカリカラ出來テヰルトキハ**直線圖形**トイフ。

圖形ハソノ位置ヲカヘテモカハラナイ。

一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ重ネタトキニ,ソノ二ツノ圖形ガ全ク合スルナラバ,コレ等ハ**合同**又ハ**全等**デアルトイフ。

幾何學トハ圖形ノ性質ヲ論ズル學科デアル。特ニ**平面幾何學**ニ於テハ平面圖形ノ性質ヲ論ジ,**立體幾何學**ニ於テハ立體ガ干與スル圖形ノ性質ヲ論ズル。

5. 直線ノ種類

二點ヲ過ル直線ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。

コレハ自明ノ理デアルガ,試ミニ紙面上ニ二點ヲ取リ,定規ヲアテヽソレ等ヲ過ル直線ヲ引イテ見ルニ,如何ニシテモ一本シカ引キ得ナイ。

上ノコトヲ**二點ハ一直線ヲ決定スル**トイフ。

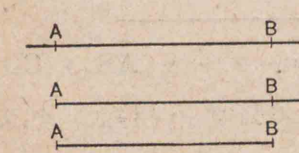
コレヨリ次ノコトガワカル。

(i) 二點ヲ共有スル二直線ハ合シテ一直線トナル。

(ii) 二直線ハ一點ヨリ多クノ點デ交ラナイ。

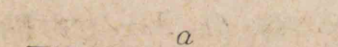
直線ハ双方ヘ限リナク長イモノデアル。因テ**平面上ニ於テ一直線ノ兩側ニ各ゝ一點ヲトルト,コレ等ヲ過ル直線ハ必ズ初メノ直線ト交ル。**

直線ハ通常ソノ上ニ任意ニ二點A,Bヲトリ**直線AB**ト呼ブ。直線上ニ一點ヲトリソノ一方ダケヲ考ヘルトキハ,コレヲ**半直線**トイフ。



半直線ABノ場合ニハ通常Aヲソノ一端ノ點トスル。直線上ニ二點ヲトリ,ソノ間ノ部分ダケヲ考ヘルトキハ,**線分**又ハ**有限直線**トイフ。コレヲ表ハスニハソノ兩端ノ點A,Bヲ用ヒ**AB**又ハ$\overline{\mathbf{AB}}$ト書キ,**線分AB**ト呼ブ。

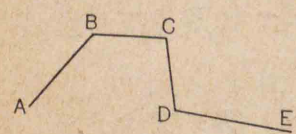
二點ヲ兩端トスル線分ヲ引クコトヲ,ソノ**二點ヲ結ブ**トイフ。



直線及ビ線分ハ時トシテハ唯一ツノ文字例ヘバ

aデ表ハシ,夫々**直線**a,**線分** aトイフコトガアル。

半直線又ハ線分ハ直線ノ一部分デアル。ソシテソノ殘リノ部分ヲソノ半直線又ハ線分ノ**延長**トイフ。



線分ガ幾ツカ連ナツテ出來タモノヲ**折線**トイヒ,線分ノ各端ニツケタ文字ヲ連ネテ呼ブ。例ヘバ**折線** ABCDE ノヤウデアル。

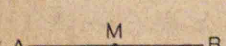
6. 距離・中點

二點間ノ距離トハ,ソノ二點ヲ結ブ線分ノ長サノコトデアル。

二ツノ線分AB,CDガ與ヘラレタトキ,ABトCDトガ合同ナラバ,コレ等ノ線分ノ長サハ相等シク,又A,B間ノ距離ハC,D間ノ距離ニ等シイ。コレヲ **AB=CD** ト書ク。

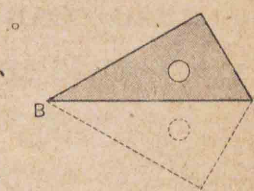
モシ或一ツノ線分ノ長サヲ**長サノ單位**ニトルト,任意ノ線分ノ長サヲ計ルコトガ出來ル。

長サノ基本單位ハ **1めーとる**デアル。



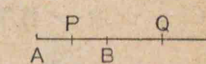
線分 AB 上ニ一點Mヲトリ, AM=MBナルトキ,Mヲ線分 AB ノ**中點**又ハ**二等分點**トイフ。

線分ノ中點ハ唯一ツヨリナイ。



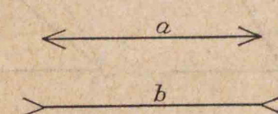
問 1. 定規ノ正否ヲ驗スニハドウスレバヨイカ。

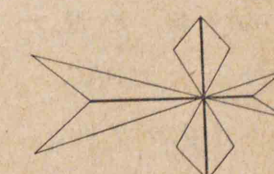
問 2. 或直線ノ一部分ヲ他ノ直線上ニ重ネルト,コレ等ノ二直線ハ全ク合スルトイフ。何故カ。



問 3. 一直線上ニ三點A, B, Cガ圖ノヤウナ順ニアツテ AB=a糎, BC=b糎 ナルトキ, AB ノ中點PトBC ノ中點Qトノ距離如何。

問 4. 次ノ兩圖ニ於テ太イ線分ノ長サハ夫々相等シイカ。

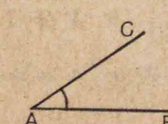




7. 角

一點カラ引イタ二ツノ半直線ハ**角ヲナス**又ハ**角ヲ夾ム**トイフ。

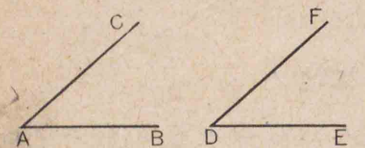
角ヲナス二直線ヲ角ノ**邊**,二邊ノ交點ヲ角ノ**頂點**トイフ。



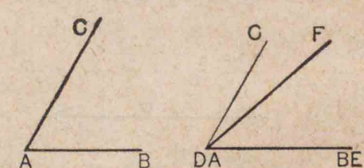
圖ニ於テAハ角ノ頂點, AB, AC ハソノ邊デアル。コノ角ヲ表ハス

ニハ ∠BAC, ∠CAB 又ハ ∠A ト書キ,∠ヲ角ト讀ム。

二ツノ角 BAC, EDF ガ與ヘラレタトキ,ソレ等ノ頂點及ビ二邊ヲ夫々重ネ得ルトキ,コノ二ツノ角ノ大イサハ相等シイトイヒ,コレヲ ∠BAC＝∠EDF ト書ク。

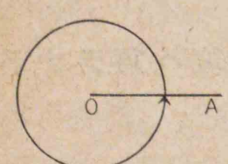


モシ ∠BAC ノ大イサヲ**角ノ單位**ニトルト,任意ノ角ノ大イサヲ計ルコトガ出來ル。又 ∠BAC, ∠EDF ガ與ヘラレタトキ,次圖ノヤウニ A ヲ D ニ,邊 AB ヲ邊 DE ニ重ネ,二ツノ角ヲ DE ノ同ジ側ニ倒ストキ,AC ガ細イ線ノ位置ヲ取ツタナラバ,∠BAC ハ ∠EDF ヨリ大デアル。



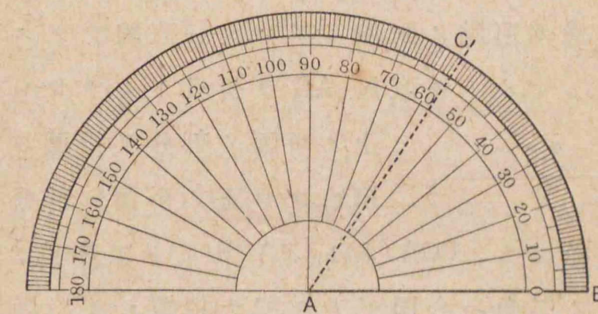
角ノ基本單位ハ**1度**デアル。

今半直線 OA ガ O ヲ固定シテ矢デ示スヤウニ一周シタトキ,コノ角ヲ**一周角**トイヒ,ソノ大イサヲ**360度**トスル。ソノ $\frac{1}{360}$ ノ大イサヲモツ角ハ**1度**デアル。1度ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**1分**,1分ノ $\frac{1}{60}$ ヲ**1秒**トイフ。度,分,秒ヲ書キ表ハスニハ夫々 °, ′, ″ ヲ數字ノ右肩ニ小サク記ス。

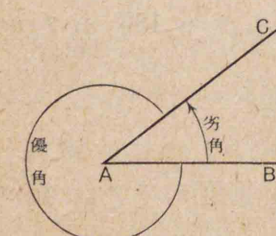


例ヘバ 8 度 3 分 25 秒ヲ 8°3′25″ ト書ク。

角ヲ計ルニハ**分度器**ヲ用ヒル。例ヘバ ∠BAC ヲ計ルニハ分度器ヲ圖ノヤウニ置キ,邊 AC ニ當ル數ヲ讀メバヨイ。卽チ圖ニ於テハ ∠BAC=57° デアル。



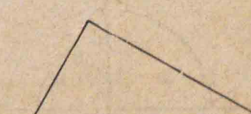
次ニ半直線 AB, AC ハ圖ノヤウニ二ツノ角ヲナスモノト見ルコトガ出來ル。斯樣ナ二ツノ角ヲ**共軛角**トイヒ,大ナル方ヲ**優角**,小ナル方ヲ**劣角**トイフ。共軛ナ二角ノ和ハ 360° デアル。



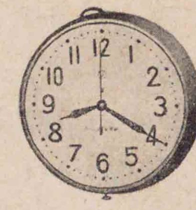
注意 單ニ角トイヘバ通常劣角ヲ指スモノトスル。

問1. 分度器ヲ用ヒテ 30°, 45°, 60°, 135° ノ角ヲ作レ。

問2. 右圖ノ各角ハ何度デアルカ。又ソノ和ヲ求メヨ。

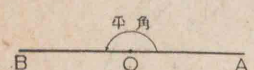


問3. 右ノ時計ノ兩針ハ何度ノ角ヲナスカ。



8. 平角・直角

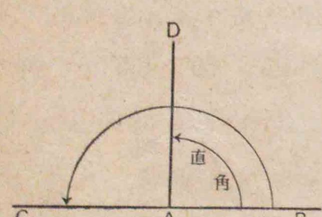
特別ナ場合トシテ圖ノヤウニ,角ノ二邊ガ頂點ノ兩側ニアッテ一直線ヲナスコトガアル。コノトキ直線ABヲ折目トシテソレカラ上ノ平面ノ部分ヲ折返スト,BOAカラ下ノ平面ノ部分ニ重ナル。從ッテ∠BOA(上)ト∠AOB(下)トモ亦重ナル。故ニコノ二角ハ合同デアル,卽チ相等シイ。因テ∠BACハ一周角ノ半分デ,ソノ大イサハ180°デアル。斯樣ナ角ヲ**平角**トイフ。



平角ノ半分ヲ**直角**トイフ。

因テ平角ハ二直角,一周角ハ四直角デアル。從ッテ直角ハソノ大イサガ90°ナル一定ノ角デアル。

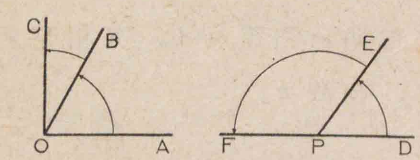
圖ニ於テAハ頂點,AB,ACハ一直線デ∠BADガ∠DACニ等シイトスルト,∠BACハ平角,∠BADト∠DACトハ直角デアル。



幾何學デハ角ノ單位ニ直角ヲ用ヒル。直角ノ記

號ハR∠デアル。

二角ノ和ガ直角ナルトキソノ各角ヲ他ノ角ノ**餘角**トイヒ,又二角ノ和ガ平角ナルトキ,ソノ各角ヲ他ノ角ノ**補角**トイフ。

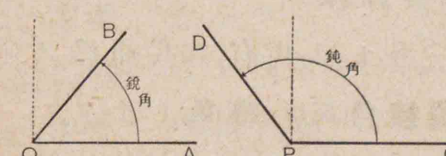


圖ニ於テ∠AOCヲ直角,∠DPFヲ平角トスル。然ルトキハ∠AOBノ餘角ハ∠BOC,∠BOCノ餘角ハ∠AOBデアル。又∠DPEノ補角ハ∠EPF,∠EPFノ補角ハ∠DPEデアル。

直線上ノ一點カラ半直線ヲ引クトキコノ半直線ハ初メノ直線ノ上ニ**立ツ**トイフ。

前圖ニ於テPEハDFノ上ニ立ッテヰル。

直角ヨリ小ナル角ヲ**銳角**,直角ヨリ大デ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ。



圖ニ於テ∠AOBハ銳角,∠CPDハ鈍角デアル。

問1. $\frac{1}{3}$直角,$\frac{2}{5}$直角,$\frac{6}{11}$平角ヲ度,分,秒ニ直セ。

問2. 30°, 45°, 60°ヲ直角ヲ單位トシテ表ハセ。

問3. 30°, 45°, $\frac{2}{3}$直角ノ夫々ノ餘角ヲイヘ。

問4. 60°,直角, $\frac{2}{5}$直角ノ夫々ノ補角ヲイヘ。

問5. 二ツノ角ノ差ハ 30° デ,コノ二ツノ角ハ互ニ補角デアルトイフ。コノ二ツノ角ヲ求メヨ。

問6. 相等シイ角ノ餘角ハ相等シイ。又相等シイ角ノ補角ハ相等シイ。何故カ。

9. 定義

嚴密ナ推理デハソレニ用ヒル言葉ガ何ヲ指シ,何ヲ表ハシテヰルカヲ一々明瞭ニ述ベテ置クコトガ必要デアル。コノ

用語ノ意味ヲ述ベタモノヲ**定義**トイフ。

例ヘバ上ノ「用語ノ意味ヲ述ベタ……」ハ定義ノ定義デアル。

問 直線,平面,圖形,直角,鋭角,鈍角ノ定義ヲ述ベヨ。

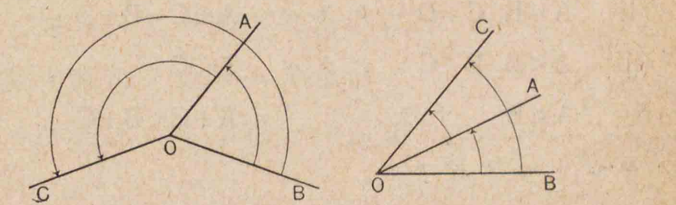
10. 隣接角・二等分線

定義 頂點ト一邊トヲ共有シ,共通邊ノ兩側ニアル二角ヲ**隣接角**(又ハ**接角**)トイフ。

共通デナイ二邊ニ夾マレタ角ヲソノ二ツノ隣接角ノ和トイフ。

次頁ノ圖ニ於テ $\angle BOA$ ト $\angle AOC$ ハ互ニ接角デ,

$\angle BOC$ ハソノ和デアル。逆ニ $\angle BOA$ ヲ $\angle BOC$ ト $\angle AOC$ トノ差,$\angle AOC$ ヲ $\angle BOC$ ト $\angle BOA$ トノ差トイフ。



定義 一ツノ角ヲ二ツノ相等シイ接角ニ分ケル直線ヲ,初メノ角ノ**二等分線**トイフ。

前圖ニ於テ $\angle BOA=\angle AOC$ ナラバ, OA ハ $\angle BOC$ ノ二等分線デアル。

角ノ二等分線ハ唯一ツヨリナイ。

11. 公理

嚴密ナ學科ノ推理ノ最モ根本ニハ必ズ説明ノ出來ナイトコロガアル。**何人モコレヲ眞ナリト容認スル**カラ,始メテソノ學科ガ出來上ルノデアル。

定義 説明ハ出來ナイガ,眞ナリト容認スル推理ノ最モ根本トナルモノヲ**公理**トイフ。

公理ニハ**普通公理**ト**幾何公理**トノ二種ガアル。

普通公理ハ量ニ關スル公理デ,幾何公理ハ圖形ニ關スル公理デアル。

普通公理ハ例ヘバ四ツノ量 A, B, C, D ノ間ニ成立

ツトコロノ，

(i) $A=B,\ B=C$ ナラバ $A=C$

(ii) $A=B,\ C=D$ ナラバ $A\pm C=B\pm D$

(iii) $A<B,\ B<C$ ナラバ $A<C$

(iv) $A<B$ ナラバ $A+C<B+C$

ノヤウナモノデアル。

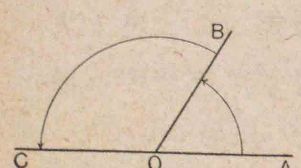
幾何公理ハ前ニ述ベタ「圖形ハソノ位置ヲカヘテモカハラナイ」,「二點ヲ過ル直線ハ一ツハ必ズアル，ソシテ唯一ツニ限ル」,「平面上ニ於テ一ツノ直線ノ兩側ニ各〻一點ヲトルト，コレ等ヲ過ル直線ハ必ズ初メノ直線ト交ル」ノヤウナモノデアル。

12. 定理・系

定義 幾何學ニ於テハ論理的ニ間違ヒナイト知ツタ事柄ヲ**定理**トイフ。

定理（又ハ定義，公理）ヨリスグワカル事柄ヲソノ**系**トイフ。系モ亦定理ノ一種デアル。

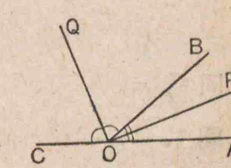
定理 1. 接角ヲナス二ツノ角ノ和ガ二直角ナルトキ，共通デナイ二ツノ邊ハ一直線ヲナス。



接角ヲナシテキル二ツノ角ヲ $\angle AOB$, $\angle BOC$，トシ，

$\angle AOB+\angle BOC=2R\angle$ トスル。然ルトキハ OA, OC ハ一直線ヲナス。

問 接角ヲナス二ツノ角ノ二等分線ガ直角ヲナストキ，初メノ接角ノ共通デナイ二邊ハ一直線ヲナス。



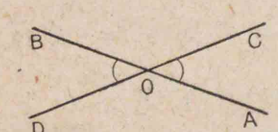
13. 對頂角

定義 二ツノ直線ガ相交ツテナス四ツノ角ノ中，接角デナイ二角ヲ**對頂角**トイフ。

下ノ圖ニ於テ二ツノ直線 AB, CD ガ O デ交ル。ソノトキ $\angle ACC$ ト $\angle BOD$ ハ對頂角，又 $\angle COB$ ト $\angle AOD$ モ對頂角デアル。

定理 2. 對頂角ハ相等シイ。

二ツノ直線AB, CDノ交點ヲOトスル。



然ルトキハ

$\angle AOC=\angle BOD,\ \angle COB=\angle AOD$

デアル。

何トナレバ，OC ハ AB ノ上ニ立ツテキルカラ

$$\angle AOC+\angle COB=2R\angle$$

又 OB ハ CD ノ上ニ立ツテキルカラ

$$\angle COB+\angle BOD=2R\angle$$

∴ $\angle AOC+\angle COB=\angle COB+\angle BOD$

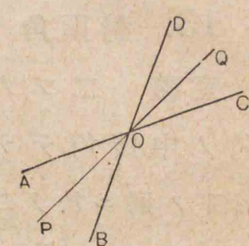
双方カラ$\angle COB$ヲ引クト

$$\angle AOC=\angle BOD$$

同様ニ $\angle COB=\angle AOD$

問 1. 一ツノ直線 AB 上ノ一點 O カラコノ直線ノ兩側ニ OC, OD ヲ引キ, $\angle AOC=\angle BOD$ ナラシメルトキ, OC, OD ハ一直線ヲナス。

問 2. 一ツノ角ノ二等分線ノ延長ハコノ角ノ對頂角ヲ二等分スル。

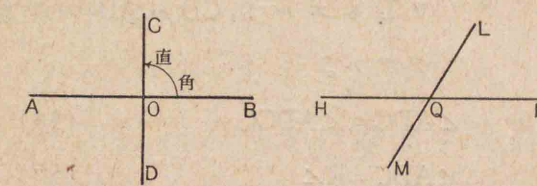


14. 垂線・斜線

定義 二ツノ直線ガ交ツテナス角ノ一ツガ直角ナルトキハ,コノ二ツノ直線ハ互ニ**垂直デアル**トイフ。或ハ二ツノ直線ハ**直交スル**又ハ**直角ニ交ル**トモイフ。ソシテ一方ノ直線ガ他方ノ直線ノ上ニ立ツト考ヘルトキ,前ノ直線ヲ後ノ直線ノ**垂線**トイヒ,ソノ出會フ點ヲ垂線ノ**足**トイフ。

二ツノ直線ガ直角ニ交ラナイトキハ,一方ノ直線ガ他方ノ直線ノ上ニ立ツト考ヘルト

キ,前ノ直線ヲ後ノ直線ノ**斜線**トイヒ,ソノ出會フ點ヲ斜線ノ**足**トイフ。



圖ニ於テ$\angle BOC$ハ直角デ, $\angle KQL$ハ直角デナイトスル。然ルトキハ AB, CD ハ互ニ垂直デ, OC ハ AB ノ垂線, OA ハ CD ノ垂線, O ハ垂線ノ足デアル。次ニ LQ ハ HK ノ斜線, QH ハ LM ノ斜線, Q ハ斜線ノ足デアル。

垂直ノ記號ニハ⊥ヲ用ヒル。上圖ニ於テ **AB⊥CD** 又ハ **OC⊥AB, OA⊥CD** ト書ク。

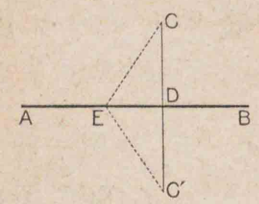
系 一直線上ノ一點ニ於テコレニ垂直ナ直線ハ唯一ツデアル。

如何トナラバ,垂線ハ平角ノ二等分線デアルカラ唯一ツデアル。

定理 3. 一直線外ノ一點カラコレニ垂線ヲ引クコトガ出來ル。ソシテコノ垂線ハ唯一ツヨリナイ。

AB ヲ直線, C ヲソノ上ニナイ點トスル。

(i) 直線 AB ヲ折目トシテ,點 C ガアル平面ノ部



分ヲ折返スト點Cハ點C′ニ來ル。CトC′ヲ結ビABトノ交點ヲDトスルト，CDハABノ垂線デアル。

如何トナラバ　$\angle ADC = \angle ADC'$　(§4)

$\therefore$　$\angle ADC = R\angle$　(§8)

卽チ　$AB \perp CC'$　(定義)

(ii) 次ニ垂線CDノ外ニナホ垂線CEガアルトスル，但シEハソノ足デアル。ソノトキ直線ABヲ折目トシテ，點Cガアル平面ノ部分ヲ折返ストECハEC′ニ重ナル。

故ニ　$\angle AEC = \angle AEC'$　(§4)

モシ$\angle AEC = R\angle$トスルト上ノ結果ヨリ

$$\angle AEC + \angle AEC' = 2\angle AEC = 2R\angle$$

トナル。故ニ定理1ニヨリCEC′ハ一直線デナケレバナラナイ。然ルニCDC′モ一直線デアルカラ，コレハ不都合デアル。因テ點Cヲ過ルABヘノ垂線ハ一ツヨリナイ。

定義　一直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂直ニ下シタ線分ノ長サヲ，コノ點トコノ直線トノ**垂直距離**又ハ單ニ**距離**トイフ。

15. 定理ノ形式

定理ノ文章ハ總テ次ノヤウニ書キ直スコトガ出來ル。

「若シ…………トセヨ」，「然ラバ…………デアル」

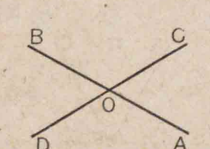
コノ初メノ部分ハ**假リニ斯樣デアルトキメタ事柄**デアッテ，コレヲ**假設**トイフ。後ノ部分ハソノ假設カラ**起ッテ來ル結果**デアッテ，コレヲ**終結**トイフ。

假設カラ終結ヲ推論スル道行キヲ**證明**トイフ。

例ヘバ§13ノ定理2「對頂角ハ相等シイ」ハ次ノヤウニ書キ直スコトガ出來ル。

「若シ對頂角アリトセヨ」，「然ラバソノ對頂角ハ相等シイ」

コノ初メノ部分ガ假設デ，後ノ部分ハ終結デアル。



尙コレヲ圖ノ上デ表ハスト「二ツノ直線AB，CDノ交點ヲOトシ，$\angle AOC$，$\angle BOD$；$\angle COB$，$\angle AOD$ヲ夫々對頂角トスル」ガ假設デ，「$\angle AOC = \angle BOD$，$\angle COB = \angle AOD$」ガ終結デアル。

定理2ノ說明中「何トナレバ」カラ終リマデハ證明デアル。

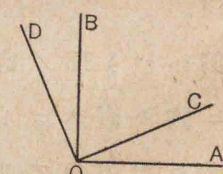
[注意] 簡單ナ定理特ニ系ノ證明ハ略スルコトガ多イ。然シソレ等ハ何レモ既有知識デ證明出來ル事柄デアル。證明出來ナイ事柄ヲ定理トイフコトハ出來ナイ。

練習 (1)

1. 一ツノ角ノ二等分線ノ延長ハソノ共軛角ヲ二等分スル。

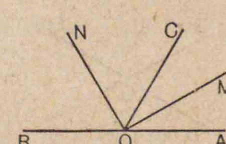
2. 一ツノ角ノ二等分線ト,ソノ對頂角ノ二等分線トハ一直線ヲナス。

3. 圖ニ於テ ∠AOB, ∠COD ハ何レモ直角デアルトスレバ, ∠AOC=∠BOD デアル。



4. 前題ニ於テ ∠BOC ガ 65° デアルトスレバ優角 AOD ハ何度デアルカ。

5. 直線 AB 上ノ一點 O カラ半直線 OC ヲ引キ, ∠AOC, ∠COB ノ二等分線ヲ夫々 OM, ON トスレバ, OM⊥ON デアル。



6. 前問ノ圖ニ於テ ∠AOC ノ二等分線ヲ OM, 又

ON⊥OM トスレバ, ON ハ ∠BOC ヲ二等分スル。

第二章 三角形

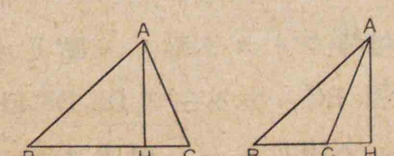
16. 三角形

定義 三ツノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**三角形**トイフ。

三角形ヲ圍ム各線分ヲ三角形ノ**邊**,相隣ル二邊ガ夾ム形內ノ角ヲ三角形ノ**角**,ソノ角ノ頂點ヲ三角形ノ**頂點**ト名ヅケル。

三角形ヲ表ハスニハ頂點ニツケタ文字ヲナラベ, **三角形ABC**或ハ**△ABC**ト書ク。三角形ノ一ツノ角ト,ソノ角ヲ夾マナイ邊トハ相**對スル**トイヒ,ソノ邊ヲ角ノ**對邊**,角ヲ邊ノ**對角**トイフ。

三角形ノ一ツノ頂點ニ着目シタトキ,ソノ對邊ヲ**底邊**,頂點ニ於ケル角ヲ**頂角**,底邊ノ兩端ニ於ケル角ヲ**底角**トイフ。又頂點ト底邊トノ距離ヲ三角形ノ**高サ**トイフ。



圖ニ於テ角 A ノ對邊ハ BC, 邊 BC ノ對

角ハ∠A デアル。又 A ヲ頂點ト見ルト BC ハ底邊, ∠A ハ頂角, ∠B, ∠C ハ底角, AH ハ高サデアル。

注意 三角形ニハ**六ツノ原素**ガアル,三ツノ邊ト三ツノ角ガ即チソレデアル。コレ等ノ六原素ノ間ニハ種々ノ關係ガアル。

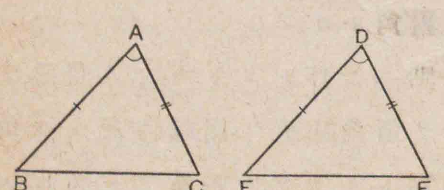
17. 三角形ノ合同(一)

定理 4. **二邊トソノ夾角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。**

假設 △ABC ト △DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF, ∠A=∠D トスルト

終結 △ABC ト △DEF トハ合同デアル。

證明 △ABC ヲ △DEF ノ上ニ置キ,點 A ヲ點 D ニ, 邊 AB ヲ邊 DE ノ上ニ重ネル。但シ點 C ト點 F トヲ DE ノ同ジ側ニアルヤウニ置ク。然ルトキハ邊 AB ト邊 DE トハ相等シイカラ點 B ハ點 E ニ重ナル。



又 ∠A ハ ∠D ニ相等シク且ツ AC ガ DF ニ相等シイカラ點 C ハ點 F ニ重ナル。即チ三邊 AB, AC, BC ハ夫々三邊 DE, DF, EF ニ重ナル。因テ △ABC ト △DEF トハ合同デアル。

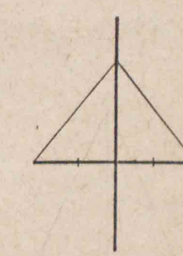
注意 1. 合同ノ記號ニ≡ヲ用ヒル。例ヘバ三角形 ABC ト三角形 DEF ガ合同ナルトキハ,次ノヤウニ書ク。

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

注意 2. 合同ナ二ツノ三角形ニ於テハ等シイ角ト等シイ邊トハ夫々相對スル。

定義 合同ナ圖形ニ於テハ相等シイ邊,相等シイ角及ビソノ頂點ヲ夫々**對應邊**,**對應角**及ビ**對應頂點**トイフ。

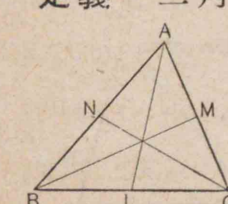
定義 一ツノ線分ノ中點ヲ過リ,ソノ線分ニ垂直ナ直線ヲ,ソノ線分ノ**垂直二等分線**トイフ。



系 **一ツノ線分ノ垂直二等分線上ノ任意ノ一點ハ線分ノ兩端カラ等距離ニアル。**

問 三角形 ABC ノ頂點 A カラ邊 BC ニ下シタ垂線ガ BC ノ中點ヲ過レバ, AB=AC デアル。

定義 三角形ノ一頂點トソノ對邊ノ中點トヲ結ブ線分ヲコノ三角形ノ**中線**トイフ。



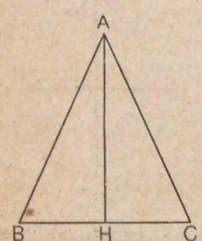
圖ニ於テ邊 BC, CA, AB ノ中點ヲ夫々 L, M, N トスレバ線分 AL, BM, CN ハ何レモ中線デアル。

18. 三角形ノ分類

定義 二邊ガ相等シイ三角形ヲ**二等邊三角形**又ハ**等脚三角形**トイフ。

三邊ガ相等シイ三角形ヲ**正三角形**又ハ**等邊三角形**トイフ。

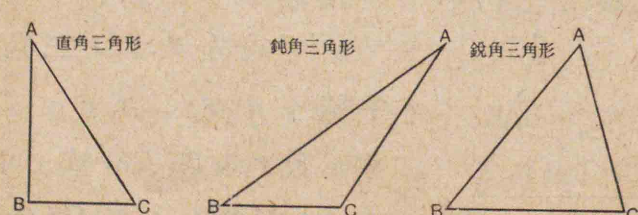
二等邊三角形ニ於テハ通常等シイ二邊ノ交點ヲ**頂點**,頂點ニ對スル邊ヲ**底邊**トイフ。



圖ニ於テAB=ACナルトキ,Aハ頂點,BCハ底邊デアル。從ツテ∠Aハ頂角,∠B及ビ∠Cハ底角デアル。又AH⊥BCトスレバ,AHハ高サデアル。

定義 一角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**トイフ。

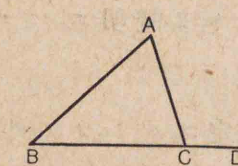
一角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイ



フ。

三ツノ角ガ何レモ鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ。

定義 三角形ノ一ツノ邊トソレニ隣ル邊ノ延長トガ夾ム角ヲ三角形ノ**外角**トイヒ,外角ニ對シテソノ隣接角ヲ**内角**トイフ。又外角ニ隣ラナイ二ツノ内角ノ各ヽヲソノ外角ノ**内對角**トイフ。



圖ニ於テCDヲBCノ延長トスレバ∠ACDハ一ツノ外角デ,∠A, ∠Bハソノ内對角デアル。

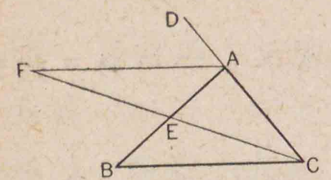
注意 BCヲCノ方ヘ延長スルコトヲBCヲ延長スルトイフ。

定理 5. 三角形ノ外角ハソノ内對角ヨリ大デアル。從ツテ三角形ノ二角ハ必ズ鋭角デアル。

假設 △ABCガ與ヘラレ, CAヲDマデ延長シ,∠BADヲ外角トスルト

終結 ∠BADハ∠B, ∠Cヨリ大デアル。

證明 頂點Cカラ出ル中線CEノ延長上ニCEニ等シクEFヲトリ,AトFトヲ結ブ。然ルトキハ



$\triangle BCE$ ト $\triangle AFE$ トニ於テ

$BE=AE$

$CE=EF$

$\angle BEC=\angle AEF$ (對頂角)

$\therefore$ $\triangle BCE\equiv\triangle AFE$ (定理 4) $\therefore$ $\angle B=\angle EAF$

然ルニ AF ハ $\angle BAD$ 內ニアルカラ

$\angle EAF<\angle BAD$

$\therefore$ $\angle B<\angle BAD$

同樣ニ $\angle C<\angle BAD$ ナルコトヲ證明スルコトガ出來ル。

次ニ $\angle A$ ヲ直角又ハ鈍角ト假定スルト,ソノ外角 BAD ハ直角又ハ銳角デアル。然ルニ上ノ證明ヨリ $\angle B$, $\angle C$ ハ $\angle BAD$ ヨリ小デアルカラ,ソレ等ハ共ニ銳角デアル。卽チ三角形ノ二角ハ銳角デアル。

注意 コノ定理ヨリ三角形ヲ角ノ大イサニツイテ分類スルト,頁26ニ述ベタ三種ヨリナイコトガワカル。

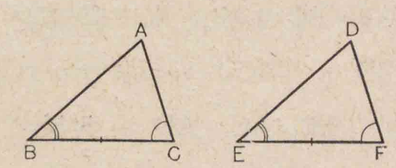
19. 三角形ノ合同(二)

定理 6. 二角トソノ間ノ邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$, $BC=EF$ トスルト

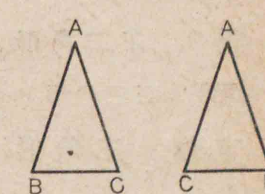
終結 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ デアル。

證明 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle DEF$ ノ上ニ重ネルニ $BC=EF$ デアルカラ點 B ヲ點 E ニ,點 C ヲ點 F ニ重ネルコトガ出來ル,ソシテ點 A ト點 D ガ EF ノ同ジ側ニアルヤウニ置ク。然ルトキハ $\angle B=\angle E$ デアルカラ BA ハ ED ニ重ナリ, $\angle C=\angle F$ デアルカラ CA ハ FD ニ重ナル。從ッテ點 A ハ點 D ニ重ナル。



因テ $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$

系 1. 二角ガ相等シイ三角形ハ二等邊三角形デアル。 ($\triangle ABC$ ニ於テ $\angle B=\angle C$ トシ,コノ三角形ヲ裏返シタ三角形トモトノ三角形トヲ比較セヨ)



系 2. 三ツノ角ガ相等シイ三角形ハ正三角形デアル。

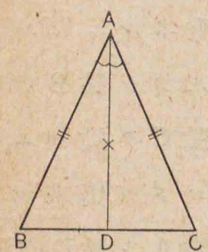
問 三角形 ABC ノ頂角 A ノ二等分線ガ底邊 BC ニ垂直ナルトキ,コノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

20. 二等邊三角形・正三角形

定理 7. 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シイ。

假設 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB=AC$ トスルト

終結 $\angle B=\angle C$ デアル。



證明 頂角 A ノ二等分線ヲ引キ,底邊 BC ト交ル點ヲ D トスル。

$\triangle ABD$ ト $\triangle ACD$ トニ於テ

$AB=AC$, AD ハ共通,

$\angle BAD=\angle CAD$

$\therefore$ $\triangle BAD\equiv\triangle CAD$ (定理 4)

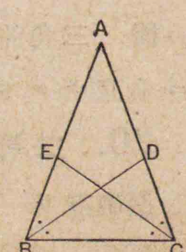
$\therefore$ $\angle B=\angle C$

系 1. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底ニ垂直デ且ツ底ヲ二等分スル。從ツテ二等邊三角形ノ高サ,頂角ノ二等分線,底邊ノ垂直二等分線及ビ頂點カラ出ル中線ハ皆合スル。

系 2. 正三角形ノ三ツノ角ハ相等シイ。

注意 正三角形ノコトヲ**等角三角形**トモイフ。

定義 三角形ノ頂角ノ二等分線ノ頂點ト對邊トノ間ニアル線分ヲ,ソノ頂角ノ**二等分線**トイフ。(§ 10 參照)



問 1. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ハ相等シイ。

問 2. 正三角形ノ三邊ノ中點ヲ順次ニ結ンデ出來ル三角形ハ亦正

三角形デアル。

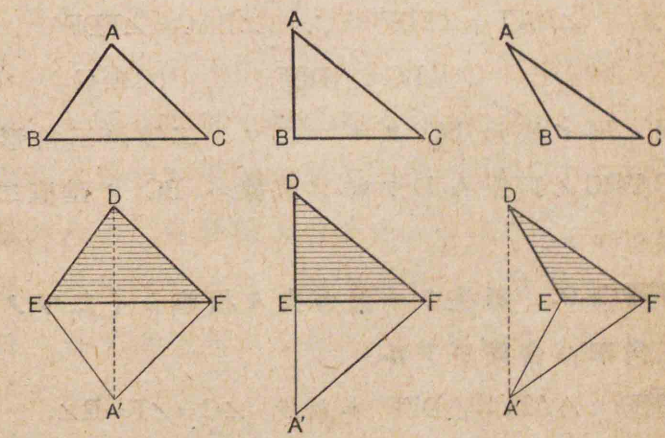
21. 三角形ノ合同(三)

定理 8. 三邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。

假設 $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ $AB=DE, AC=DF, BC=EF$ トスルト

終結 $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ デアル。

證明 $\triangle ABC$ ノ頂點 B ヲ頂點 E ニ,邊 BC ヲ邊 EF ニ重ネルト,$BC=EF$ デアルカラ C ハ F ニ重ナル。次ニ $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'EF$ ノ位置ニ移シ,A' ト D ヲ結ブ。



(i) A'D ガ EF ニ交ル場合。

$\triangle FA'D$ ニ於テ $FA'=FD$

$\therefore$ $\angle FA'D=\angle FDA'$

同様ニ $\triangle EA'D$ ニ於テ　$\angle EA'D=\angle EDA'$

$\therefore$　$\angle FA'D+\angle EA'D=\angle FDA'+\angle EDA'$

$\therefore$　$\angle EA'F=\angle EDF$　$\therefore$　$\angle BAC=\angle EDF$

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)

(ii) A'D ガ點 E ヲ過ル場合。

$\triangle FA'D$ ヨリ　$\angle A'=\angle D$

$\therefore$　$\angle A=\angle D$

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)

(iii) A'D ガ EF ニ交ラナイ場合。

$\angle FA'D\sim\angle EA'D=\angle FDA'\sim\angle EDA'$

$\therefore$　$\angle EA'F=\angle EDF$　$\therefore$　$\angle BAC=\angle EDF$

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)

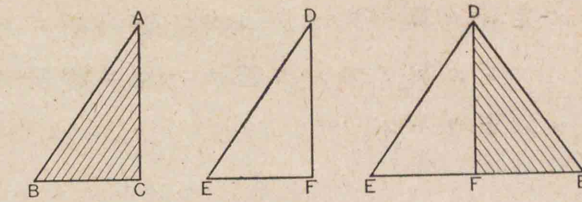
問　同ジ底邊 BC ヲモツ二ツノ二等邊三角形 ABC, DBC ノ頂點 A, D ヲ結ブ直線ハ BC ノ垂直二等分線デアル。

定理 9.　斜邊ト一邊ガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。

假設　$\triangle ABC$, $\triangle DEF$ ニ於テ　$\angle C=\angle F=R\angle$, $AB=DE$, $AC=DF$ トスルト

終結　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ デアル。

證明　$\triangle ABC$ ヲ裏返シテ後,點 A ヲ點 D ニ,邊 AC



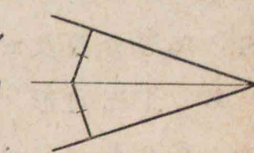
ヲ邊 DF ノ上ニ重ネルト, $AC=DF$ デアルカラ C ハ F ニ重ナル。ソシテ B ノトル位置ヲ B' トスルト

$$\angle DFE+\angle DFB'=2R\angle$$

ソレ故 EFB' ハ一直線ヲナス。

然ルニ $DE=AB=DB'$ デアルカラ $\triangle DEB'$ ハ二等邊三角形デ, DF ハソノ高サデアル。故ハ DF ハ頂角ヲ二等分スル。(定理7,系1)

$\therefore$　$\triangle ABC\equiv\triangle DEF$　(定理4)



系　一點カラ角ノ兩邊ニ下シタ垂線ノ長サガ相等シイトキ,ソノ點ハ角ノ二等分線上ニアル。

問　三角形ノ底邊ノ兩端カラソノ對邊ニ引イタ垂線ノ長サガ等シイトキ,ソノ三角形ハ二等邊三角形デアル。

22. 定理ノ逆

定義　一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ取リカヘタモノヲ,モトノ定理ノ逆トイフ。

一ツノ定理ガ眞デアツテモソノ逆ハ必ズシモ眞デナイ。ソレガ眞デアルカ否カハ別ニ證明ヲシテ見ナケレバナラナイ。

練習 (2)

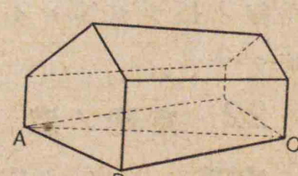
1. 角 XAY ノ一邊 AX 上ニ二點 B, C ヲ,他ノ邊 AY 上ニ二點 D, E ヲトリ, AB=AD, AC=AE ナラシメルトキ,線分 BE ト線分 CD トハ相等シイ。

2. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC ヲ双方ニ等シク延長シテ BD=CE ナル點 D, E ヲトルト,三角形 ADE モ亦二等邊三角形デアル。

3. 正三角形ノ一頂點カラ出ル中線,高サ,ソノ頂角ノ二等分線及ビ對邊ノ垂直二等分線ハ合スル。

4. 正三角形ノ三ツノ中線ハ相等シク,從ツテ三ツノ高サ及ビ三ツノ頂角ノ二等分線ハ相等シイ。

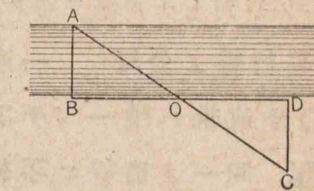
5. 平地ニ建テタ圖ノヤウナ家屋ガアル。コノ家ノ内ニ入ラズニ AC ノ距離ヲ知ルニハドウスレバヨイカ。



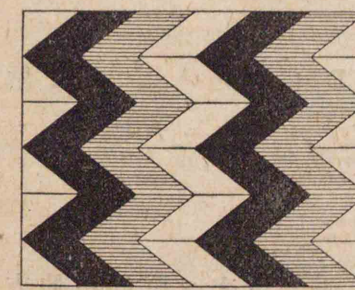
6. 三ツノ線分 AB, CD, EF ガ一點 O デ交ツテ O ガ各線分ノ中點ナルトキ,

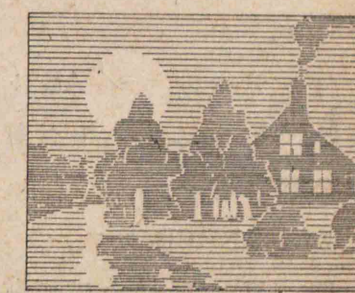
二ツノ三角形 ACE, BDF ハ合同デアル。

7. 河幅 AB ヲ計ルニハ圖ノヤウニシテ CD ヲ計レバヨイ,何故カ。但シ ∠B=∠D=R∠, BO=OD。



第三章 平行線





23. 平行線

定義 同一ノ平面上ニアツテ相交ラナイ二直線ハ互ニ**平行デアル**トイヒ,ソレ等ヲ**平行線**トイフ。

平行ノ記號ニハ // ヲ用ヒル。

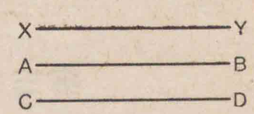
上ノ定義ヨリ同一ノ平面上ノ二直線ハ相交ルカ,互ニ平行ナルカノ何レカデアル。

【注意】 吾々ハ平面圖形ヲ論ジテキルノデアルカラ,以下「同一ノ平面上」ナル語ヲ略スル。

平行線ノ公理 **一直線外ノ一點ヲ過リ,コレニ平行ナ直線ハ唯一ツデアル。**

系 **同一ノ直線ニ平行ナ二直線ハ互ニ平行デアル。**

$\left.\begin{array}{l} XY /\!/ AB \\ XY /\!/ CD \end{array}\right\}$ ナラバ $AB /\!/ CD$



デアル。

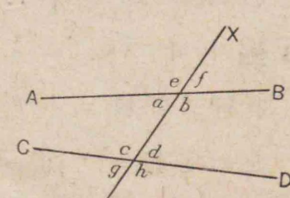
何トナレバ,モシ AB ト CD トガ交レバ,ソノ交點カラ XY ニ二ツノ平行線ガアルワケニナル。コレハ公理ニ背ク。

故ニ $AB /\!/ CD$ デアル。

問 互ニ平行ナ二直線ノ一方ニ交ル直線ハ他方ニモ交ル。

24. 內角・錯角

定義 圖ノヤウニ一直線 XY ガ二直線AB, CD ト交ルトキ出來ル,八ツノ角ヲ a, b, c, d, e, f, g, h ト名ヅケルトキ,a, b, c, d ヲ**內角**,$e, f, g,$



h ヲ**外角**,a ト d;b ト c ヲ**錯角**,e ト c;f ト d;a ト g;b ト h ヲ**同位角**トイフ。

問 一直線ガ二直線ト交ッテ出來ル一組ノ錯角ガ等シイトキ

(1) 他ノ一組ノ錯角ハ相等シイ。

(2) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

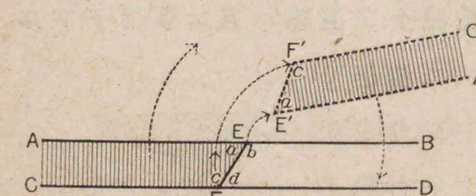
(3) 二組ノ同側ニアル內角ハ夫々互ニ補角ヲナス。

25. 平行線ノ定理

定理 10. 一ツノ直線ガ他ノ二直線ト交ッテ出來ル一組ノ錯角ガ相等シイトキ,後ノ二直線ハ互ニ平行デアル。

假設 直線 AB, CD ニ直線 EF ガ交ッテ出來ル錯角ノ中 $\angle a = \angle d$ トスルト

終結 $AB /\!/ CD$ デアル。



證明 圖ノヤウニ,圖形 AEFC ヲ切リハナシテ DFEB 上ニ重ネルニ,$\angle a = \angle d$ ナル故,各〻ノ補角デアル $\angle b$ ト $\angle c$ ハ相等シイ。即チ $\angle b = \angle c$

故ニ $E'F'$ ヲ FE ニ重ネルト $E'A'$ ハ FD ニ重ナリ, $F'C'$ ハ EB ニ重ナル。因テ圖形 $A'E'F'C'$ ハ $DFEB$ ニ全ク重ナル。

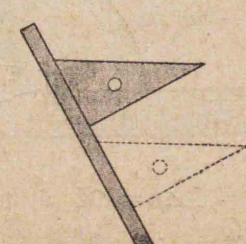
扨テ AB ガ CD ト EF ノ左側デ交ツタトスルト, $E'A'$ ト $F'C'$ トモ交リ, コレ等ト全ク重ナツタ FD ト EB モ亦交ルコトニナル。因テ AB, CD ハ二點デ交ル。コレハ不都合デアル。故ニ AB, CD ハ一點デ交ルコトハ出來ナイ。卽チ平行デアル。

注意 コノ證明法ヲ**歸謬法**トイフ。歸謬法トハ證明シヨウトスル終結ノ代リニソノ反對ヲ假定スルト不都合ヲ生ズルコトヲ明ラカニシ,因テモトノ終結ガ正シイコトヲ斷定スル證明法デアル。

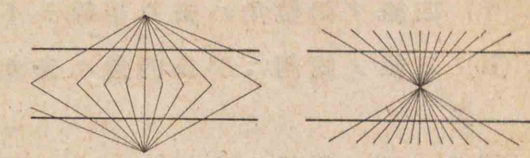
系 1. 一直線ガ二直線ト交ツテ出來ル一組ノ同位角ガ等シイカ,又ハ一組ノ同側ニアル內角ガ補角ヲナストキ,コノ二直線ハ互ニ平行デアル。

系 2. 一直線ニ垂直ナ二直線ハ互ニ平行デアル。

問 1. 三角定規ヲ二枚用ヒルカ又ハ直線定規ト三角定規トヲ一枚ヅツ用ヒテ平行線ヲ畫ケ。又平行線トナル理由ヲ述ベヨ。



問 2. 右圖ノ太イ二直線ハ夫々互ニ平行デアルカ。



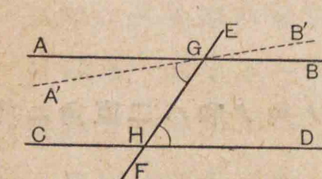
問 3. 二ツノ線分 AB, CD ガ點 O デ交リ,且ツ O ガ各線分ノ中點ナルトキ, $AC \parallel BD$, $AD \parallel BC$ デアル。

定理 11. 一直線ガ二ツノ平行線ト交ツテ出來ル錯角ハ相等シイ。

假設 $AB \parallel CD$ トシ, EF ガ AB, CD ト夫々 G H デ交ルトスルト

終結 $\angle AGH = \angle GHD$, $\angle BGH = \angle GHC$ デアル。

證明 モシ錯角 AGH, GHD ガ等シクナケレバ點 G ヲ過ツテ直線 $A'B'$ ヲ $\angle A'GH = \angle GHD$ ナルヤウニ引クト $A'B' \parallel CD$



然ルニ $AB \parallel CD$

因テ AB $A'B'$ ハ一點 G ヲ過ツテ CD ニ平行デアル。コレハ平行線ノ公理ニ背クカラ不都合デアル。

$\therefore$ $\angle AGH = \angle GHD$

從ツテ $\angle BGH = \angle GHC$

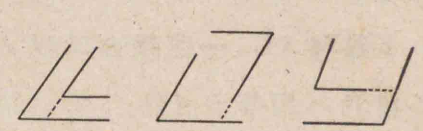
系 1. 一ツノ直線ガ二ツノ平行線ト交ルトキ

(i) 四組ノ同位角ハ夫々相等シイ。

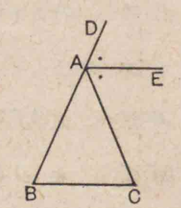
(ii) 二組ノ同側ニアル内角ハ夫々互ニ補角ヲナス。

系 2. 互ニ平行ナ直線ノ一方ニ垂直ナ直線ハ他方ニモ亦垂直デアル。(共通垂線)

問 1. 一ツノ角ノ二邊ガ他ノ角ノ二邊ト夫々互ニ平行ナルトキ,コノ二角ハ相等シイカ又ハ互ニ補角ヲナス。



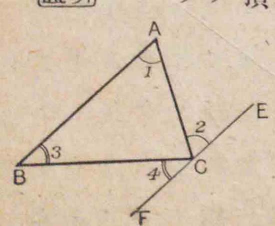
問 2. 二等邊三角形ノ頂點ヲ過リ底邊ニ平行ナ直線ハ頂角ノ外角ヲ等分スル。



26. 三角形ノ角ノ和

定理 12. 三角形ノ三ツノ角ノ和ハ二直角ニ等シイ。

證明 一ツノ頂點例ヘバ C ヲ過ツテ對邊 AB ニ平行ニ EF ヲ引クト



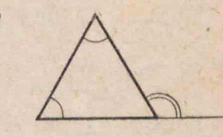
$\angle 1=\angle 2$ 及ビ $\angle 3=\angle 4$

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C$

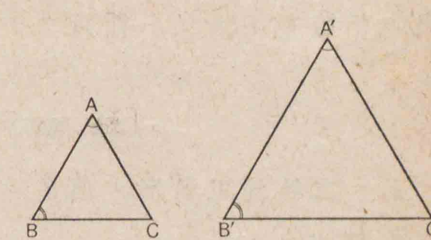
$=\angle 1+\angle 3+\angle C$

$=\angle 2+\angle 4+\angle C=\angle ECF=2R\angle$

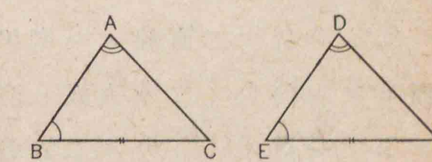
系 1. 三角形ノ外角ハソノ内對角ノ和ニ等シイ。從ツテ内對角ノ何レヨリモ大デアル。(定理5)



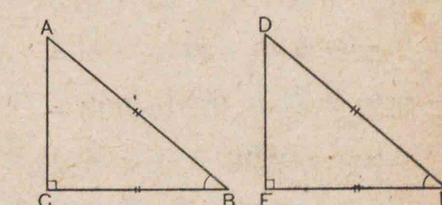
系 2. 一ツノ三角形ノ二角ガ他ノ三角形ノ二角ニ夫夫等シイトキ,殘リノ一角ハ相等シイ。



系 3. 一邊トソノ對角及ビ他ノ一角ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ハ合同デアル。(定理6)



系 4. 斜邊ト一鋭角ガ夫々相等シイ二ツノ直角三角形ハ合同デアル。



系 5. 角ノ二等分線上ノ點ハソノ兩邊カラ等距離ニアル。

系 6. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ヲナス。

問 1. 正三角形ノ一角ハ何度デアルカ。

問 2. 頂角ガ 30° ナル二等邊三角形ノ底角ハ何度デアルカ。

問 3. 二ツノ角ノ二邊ガ夫々垂直ナラバ,コノ二角ハ相等シイカ又ハ補角ヲナス。

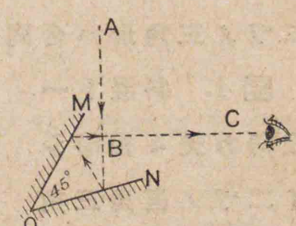
練習 (3)

1. 二等邊三角形ノ頂角ノ外角ノ二等分線ハ底ニ平行デアル。

2. 平行ナ二直線ニ一直線ガ交ルトキ,一組ノ同側ニアル内角ノ二等分線ハ直交スル。

3. 一角ガ 60° ナル二等邊三角形ハ正三角形デアル。

4. 光線 AB ガ 45° ノ角ヲナス二ツノ鏡デ圖ノヤウニ二回反射シテ BC ノ方向ニ進ンダ。∠ABC ヲ求メヨ。

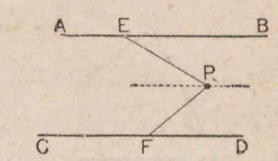


(入射光線ト反射光線ハ鏡ト常ニ等角ヲナス)

5. ∠C ヲ直角トスル三角形 ABC ノ ∠A ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ D トシ,D カラ邊 AB ニ下シタ垂線ヲ DE, ソノ足ヲ E トスレバ, DE=DC デアル。

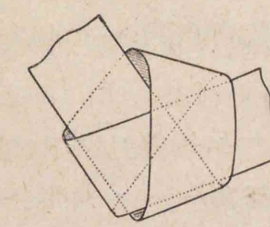
6. 三角形 ABC 内ノ一點ヲ O トスルト,角 BOC ハ角 A ヨリ大デアル。

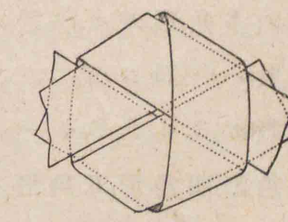
7. P ハ平行線 AB,CD 間ノ點デアル。然ルトキハ次ノ關係ガ成立スル。



$$\angle EPF = \angle PEB + \angle PFD$$

第四章 多角形



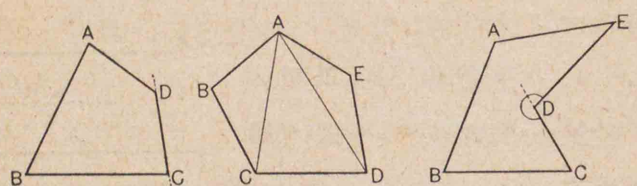


27. 多角形

定義 相續イタ幾ツカノ線分デ圍マレタ平面ノ部分ヲ**多角形**トイヒ,ソノ相隣ラナイ二ツノ頂點ヲ結ブ線分ヲ**對角線**トイフ。

多角形ノ邊,角,頂點ノ定義ハ三角形ノ場合ニ同ジ。次ニ各邊ヲ如何程延長シテモソノ多角形ヲキラナイトキハ,コノ多角形ヲ**凸多角形**トイヒ,サウデナイ

モノヲ**凹多角形**トイフ。



注意 普通ニ多角形トイヘバ凸多角形ヲ指ス。

邊ガ皆等シイ多角形ヲ**等邊多角形**トイヒ,角ガ皆等シイ多角形ヲ**等角多角形**トイフ。等邊デ且ツ等角ナ多角形ヲ**正多角形**トイフ。

一ツノ多角形ガモツ邊ノ數,角(內角トモイフ)ノ數,頂點ノ數ハ皆同ジデアル。

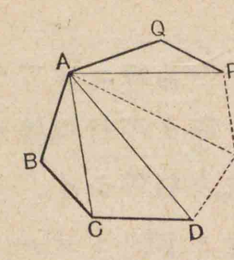
角ノ數ガ3, 4, 5, 6,……, nナルニ從ツテ,コノ多角形ヲ**三角形,四角形,五角形,六形角,……, n角形**トイフ。或ハ邊ノ數ニ從ツテ**三邊形,四邊形,五邊形,六邊形,……, n邊形**トモイフ。

定理 13. **n邊形ノ內角ノ總和ハ$(2n-4)$R∠デアル。**

假設 n邊形ヲABCD……PQトスルト

終結 ∠A+∠B+∠C+……+∠P+∠Q$=(2n-4)$R∠デアル。

證明 一ツノ頂點AカラA對角線AC, AD……, AP



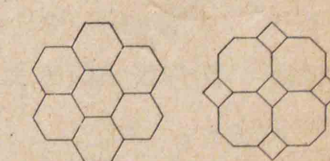
ヲ引クト,n邊形ハ$(n-2)$個ノ三角形ニ分タレル。ソシテコレ等ノ三角形ノ內角ノ總和ハn邊形ノ內角ノ總和デアル。然ルニ一ツノ三角形ノ內角ノ和ハ2R∠デアルカラ,求ムル內角ノ總和ハ2R∠ノ$(n-2)$倍,即チ$(2n-4)$R∠デアル。

系 1. 正n邊形ノ一ツノ內角ハ $\frac{2n-4}{n}$R∠ デアル。

系 2. 多角形ノ外角ノ總和ハ 4R∠ デアル。

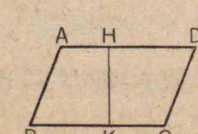
問 1. 四邊形ノ內角ノ總和ハ4R∠デアル。

問 2. 右圖ノヤウニ正六角形又ハ正四角形ト正八角形トヲ用ヒテ全平面ヲ塡メルコトガ出來ル,何故カ。



28. 平行四邊形

定義 相對スル邊ガ夫々平行ナル四邊形ヲ**平行四邊形**トイフ。



コノトキ相對スル二邊ノ共通垂線ノ長サヲソノ**高サ**トイフ。

平行四邊形ABCDヲ▱ABCD,

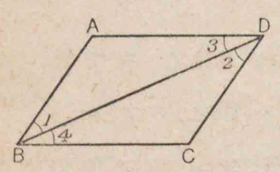
□AC 又ハ □BD ト書ク。

定理 14. 平行四邊形ハ，ソノ一對角線ニヨツテ合同ナ二ツノ三角形ニ分タレル。因テ平行四邊形ノ相對スル邊及ビ相對スル角ハ夫々相等シイ。

假設 □ABCD ニ於テ一對角線ヲ BD トスルト

終結 $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, $AB=CD$, $AD=CB$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ デアル。

證明 $AB \parallel CD$ ナル故 $\angle 1=\angle 2$



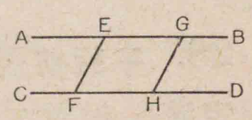
$AD \parallel BC$ ナル故 $\angle 3=\angle 4$

且ツ BD ハ $\triangle ABD$, $\triangle CDB$ ニ共通デアル。

$\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle CDB$

從ツテ $AB=CD$, $AD=CB$ 及ビ $\angle A=\angle C$

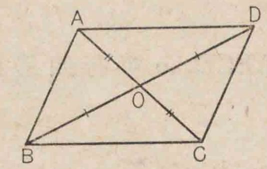
同様ニ對角線 AC ヲ引キ $\angle B=\angle D$ ヲ證明スルコトガ出來ル。



系 1. 平行二直線間ニアル平行二線分ハ相等シイ。

系 2. 平行二直線間ノ共通垂線ノ長サハ一定デアル。(コノ長サヲ**平行二直線ノ距離**トイフ)

定理 15. 平行四邊形ノ對角線ハ互ニ他ヲ二等分スル。



證明 略スル。

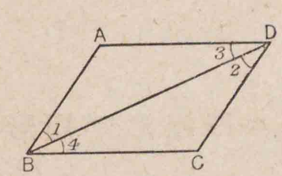
問 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ二邊ニ平行線ヲ作ツテ出來ル平行四邊形ノ周ハモトノ三角形ノ二ツノ等邊ノ和ニ等シイ。

定理 16. 相對スル二邊ガ平行デ且ツ相等シイ四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設 四邊形 ABCD ニ於テ $AB \parallel CD$, $AB=CD$ トスルト

終結 ABCD ハ平行四邊形デアル。

證明 BD ヲ結ベバ $\triangle ABD$, $\triangle CDB$ ニ於テ



$$\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ BD \text{ ハ共通} \\ \angle 1=\angle 2 \end{array}\right\}$$

$\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle CDB$

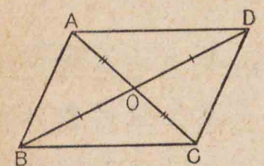
因テ $\angle 3=\angle 4$

$\therefore \quad AD \parallel CB$ 且ツ $AB \parallel CD$

故ニ ABCD ハ平行四邊形デアル。

定理 17. 對角線ガ互ニ他ヲ二等分スル四邊形ハ平行四邊形デアル。

假設 四邊形 ABCD ニ於テ $OA=OC$, $OB=OD$ ト



スルト

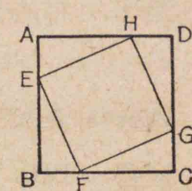
終結　ABCD ハ平行四邊形デアル。

證明　略スル。

29. 正方形

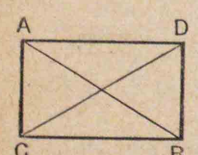
定義　總テノ邊,總テノ角ガ相等シイ四邊形ヲ**正方形**トイフ。

問　正方形 ABCD ノ邊 AB, BC, CD, DA 上ニ夫々點 E, F, G, H ヲトリ, AE=BF=CG=DH トスレバ EFGH ハ正方形デアル。



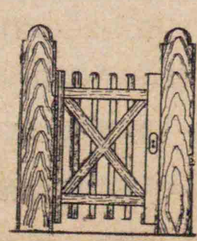
30. 矩形

定義　各角ガ皆直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ。



系　**矩形ハ平行四邊形デアル。**

問 1.　一角ガ直角ナ平行四邊形ハ矩形デアル。

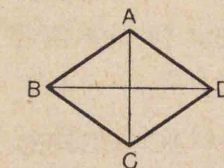


問 2.　矩形ノ對角線ハ相等シイ。

問 3.　對角線ガ相等シイ平行四邊形ハ矩形デアル。

31. 菱形

定義　各邊ガ皆等シイ四邊形ヲ**菱形**トイフ。



系　**菱形ハ平行四邊形デアル。**

問 1.　二隣邊ガ相等シイ平行四邊形ハ菱形デアル。

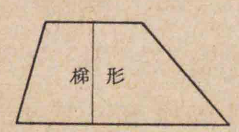
問 2.　菱形ノ對角線ハ直交スル。

問 3.　對角線ガ互ニ他ヲ垂直ニ二等分スル四邊形ハ菱形デアル。

32. 梯形

定義　一組ノ對邊ガ平行デ他ノ一組ガ平行デナイ四邊形ヲ**梯形**トイフ。

コノトキ平行ナ二邊ヲ**底**トイヒ,ソノ距離ヲ**高サ**トイフ。



平行デナイ二邊ガ相等シイ梯形ヲ**等脚梯形**トイフ。

問 1.　等脚梯形ノ兩底角(底ノ兩端ノ角)ハ相等シイ。

問 2.　一組ノ底角ガ相等シイ梯形ハ等脚梯形デアル。

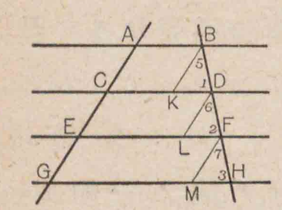
問 3.　等脚梯形ノ對角線ハ相等シイ。

33. 多クノ平行線

定理 18. 多クノ平行線ガソレ等ト交ル一直線カラ等シイ線分ヲキリトルトキ,他ノ何レノ直線ト交ツテモ亦等シイ線分ヲキリトル。

假設　AB//CD//EF//GH デアツテ AC=CE=EG トスルト

終結　BD=DF=FH デアル。



證明　AG ニ平行ニ BK, DL, FM ヲ引ク。然ルトキハ ACKB ハ平行四邊形デアル。

∴　AC=BK

同様ニ　CE=DL,　EG=FM

然ルニ假設ニヨリコレ等ノ等式ノ左邊ハ相等シイ。

故ニ　BK=DL=FM　(1)

次ニ AB, CD, EF, GH ハ平行ナル故

$\angle 1=\angle 2=\angle 3$　(2)

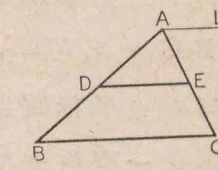
又 BK, DL, FM ハ同一ノ直線 AG ニ平行ナル故亦互ニ平行デアル。故ニ

$\angle 5=\angle 6=\angle 7$　(3)

(1), (2), (3) ヨリ　$\triangle BKD\equiv\triangle DLF\equiv\triangle FMH$

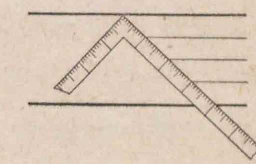
∴　BD=DF=FH

系 1. 三角形ノ一邊ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ直線ハ第三邊ノ中點ヲ過ル。



系 2. 梯形ノ平行デナイ一邊ノ中點ヲ過リ底ニ平行ナ直線ハ他ノ邊ノ中點ヲ過ル。

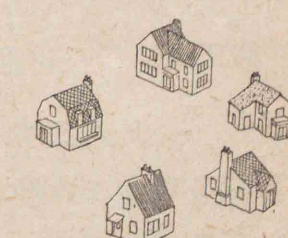
問　大工ガ板幅ヲ幾ツカニ等分スルトキ,物指ヲ圖ニ示スヤウニアテル。何故カ。



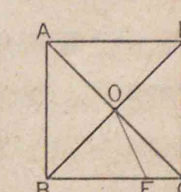
練習 (4)

1. 内角ノ總和ガ 16R∠ ナル多角形ノ邊數ヲ求メヨ。

2. 圖ノ様ニ住宅ガ5軒アル。二軒ヅツ他ノ家ニ道ヨリセズニ直線的ニ往來出來ルヤウニ道ヲツケルニハ道ガ何本イルカ。



3. 正方形 ABCD ノ一頂點 B カラ邊 BC 上ニ BO=BE ナルヤウニ點 E ヲトルト,$\angle BOE=3\angle COE$ デアル。



4. 三角形ABCノ邊BCノ中點ヲDトシ, BE, CFヲB, CカラADニ下シタ垂線トシBF, CEヲ結ベバ, BECFハ平行四邊形デアル。

5. 一直線ガ平行二直線ト交ツテナス內角ノ二等分線ハ矩形ヲ作ル。

6. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點カラ二邊ニ下シタ垂線ノ和ハ底ノ一端カラ對邊ニ下シタ高サニ等シイ。

7. 平行四邊形ABCDノ∠A, ∠Bノ二等分線ガ夫々BC, ADト點X, Yデ交ルトスルト, AXトBYトハ互ニ他ヲ二等分スル。

第五章 三角形ノ邊ト角ノ大小・重心

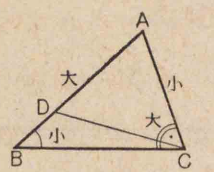
34. 一ツノ三角形ノ邊ト角

定理 19. 三角形ノ大ナル邊ノ對角ハ小ナル邊ノ對角ヨリ大デアル。逆ニ大ナル角ノ對邊ハ小ナル角ノ對邊ヨリ大デアル。

假設 △ABCニ於テ AB>AC トスルト

終結 ∠C>∠B デアル。

證明 大ナル邊 AB 上ニ小ナル邊 AC ニ等シク



AD ヲトルトDハ必ズA, B間ニアル。

扨テ AD=AC

∴ ∠ACD=∠ADC>∠B

然ルニ ∠C>∠ACD ∴ ∠C>∠B

逆ニ

假設 △ABCニ於テ ∠C>∠B トスルト

終結 AB>AC デアル。

證明 モシ AB>AC デナイトスルト, AB=AC カ又ハ AB<AC デナケレバナラナイ。

扨テモシ AB=AC トスルト ∠B=∠C トナリ, 假設ニ反スル。

又モシ AB<AC トスルト ∠C<∠B トナリ, コレモ假設ニ反スル。

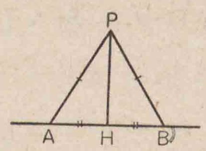
ソレ故 AB>AC デナケレバナラナイ。

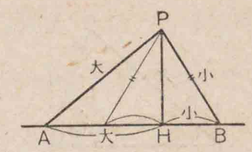
系 1. 直角三角形ニ於テ斜邊ハ三邊中最大デアル。

系 2. 一點ト一直線トノ垂直距離ハソノ點トソノ直線上ノ任意ノ點トノ距離ノ中,最小デアル。

系 3. 直線外ノ一點カラコノ直線ニ垂線ト斜線トヲ作ルトキ,垂線ノ足カラ等距離ニ足ヲモツ斜線

ハ相等シク,大ナル距離ニ足ヲモツ斜線ハ小ナル距離ニ足ヲモツ斜線ヨリ大デアル。





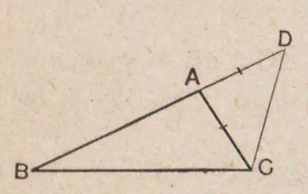
系 4. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ二邊ノ何レヨリモ大デアル。

定理 20. 三角形ノ任意ノ二邊ノ和ハ殘リノ一邊ヨリ大デアル。

假設 △ABC ノ三邊ヲ AB, AC, BC トスルト

終結 AB+AC>BC デアル。

證明 BA ヲ延長シ, AC ニ等シク AD ヲトリ, DC ヲ結ブト ∠ACD=∠ADC



又 ∠BCD=∠BCA+∠ACD

∴ ∠BCD>∠ADC

∴ BD>BC

然ルニ BD=AB+AC

∴ AB+AC>BC

系 1. 三角形ノ任意ノ二邊ノ差ハ殘リノ一邊ヨリ小デアル。

系 2. 與ヘラレタ二點ヲ兩端トスル任意ノ折線ハソノ二點ヲ結ブ線分ヨリ大デアル,即チ二點間ノ

距離ハソノ二點間ノ最短通路デアル。

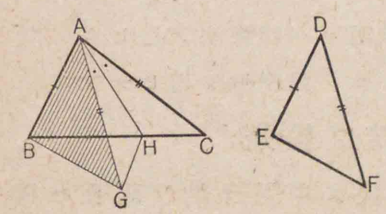
35. 二ツノ三角形ノ邊ト角

定理 21. 二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,ソノ夾角ガ大ナル方ノ第三邊ハ夾角ガ小ナル方ノ第三邊ヨリ大デアル。逆ニ二邊ガ夫々相等シイ二ツノ三角形ニ於テ,第三邊ガ大ナル方ノ對角ハ第三邊ガ小ナル方ノ對角ヨリ大デアル。

假設 △ABC, △DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF, ∠A>∠D トスルト

終結 BC>EF デアル。

證明 DE ヲ圖ノ如ク AB ニ重ネ, F ノトル位置ヲ G トスル。然ルトキハ ∠A>∠D ナル故, AG ハ ∠BAC 內ニ來ル。



次ニ ∠GAC ノ二等分線ヲ作リ, BC トノ交點ヲ H トシ, H, G ヲ結ブト

△AGH≡△ACH ∴ GH=HC

扨テ △BHG ニ於テ

BH+HG>BG ∴ BH+HC>EF

即チ BC>EF

逆ニ

[假設] AB=DE, AC=DF, BC>EF トスルト

[終結] ∠A>∠D デアル。

[證明] ∠A<∠D トスレバ上ノ證明ヨリ BC<EF, ∠A=∠D トスレバ三角形ノ合同定理ヨリ BC=EF

コレ等ハ共ニ假設ニ反スル。

故ニ ∠A>∠D デナケレバナラナイ。

[注意] コノ逆ノ證明法ヲ**轉換法**トイフ。

吾々ハ既ニ AB=DE, AC=DF ナル △ABC, △DEF ニ於テ

∠A>∠D ナルトキハ BC>EF

∠A=∠D ナルトキハ BC=EF

∠A<∠D ナルトキハ BC<EF

ナルコトヲ知ツタ。コレデ ∠A ト ∠D トノ間ニ起ル總テノ場合ヲ盡シ,且ツ終結ハ皆異ナツテヰル。斯様ナ場合ニハ逆ハ常ニ眞デアル。ソノ證明ニハ轉換法ヲ用ヒルノガ便利デアル。定理19ノ逆ニモコノ證明法ヲ用ヒテアル。

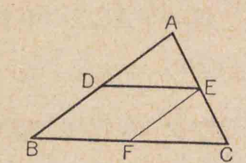
36. 二邊ノ中點ヲ結ブ線分

定理 22. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ第三邊ニ平行デ,且ツソノ半分ニ等シイ。

[假設] △ABC ニ於テ AD=DB, AE=EC トスルト

[終結] DE∥BC, DE=$\frac{1}{2}$BC デアル。

[證明] AB ノ中點 D カラ BC ニ平行ニ引イタ直線ハ AC ノ中點ヲ過ル。(定理18系1)



然ルニ AC ノ中點ハ E ノ外ニナイ。因テコノ平行線ハ DE ニ合スル。

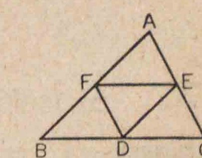
即チ DE∥BC

次ニ BC ノ中點ヲ F トスルト,上ト同様ニ

EF∥BD

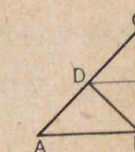
故ニ DBFE ハ平行四邊形デアル。

∴ DE=BF=$\frac{1}{2}$BC



問1. 三角形ノ三邊ノ中點ヲ順次ニ結ベバ四ツノ合同ナ三角形ヲ得ル。

問2. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ベバ平行四邊形ヲ得ル。



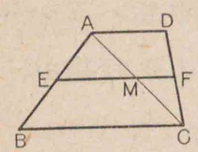
問3. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

定理 23. 梯形ノ平行デナイ二邊ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ,且ツソノ和ノ半分ニ等シイ。

[假設] 梯形 ABCD ニ於テ AD∥BC トシ, E,F ヲ夫夫 AB,DC ノ中點トスルト

[終結] EF∥BC, EF=$\frac{1}{2}$(AD+BC) デアル。

[證明] △ABC ニ於テ AB ノ中點 E カラ BC(AD) ニ



平行ニ引イタ直線ハ AC ノ中點 M ヲ過ル。故ニコノ直線ハ亦 △ACD ニ於テ CD ノ中點ヲ過ル。然ルニ CD ノ中點ハ F ノ他ニナイ。因テコノ平行線ハ EF ニ合スル。

即チ　　$EF \parallel BC$

且ツ　　$EM=\frac{1}{2}BC,\quad MF=\frac{1}{2}AD$

$\therefore\quad EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$

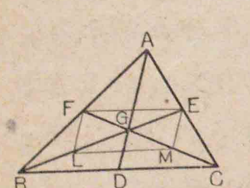
37. 三角形ノ重心

定理 24. 三角形ノ三中線ハ一點デ交ル。又ソノ交點ハ各中線上各頂點カラ夫々$\frac{2}{3}$ノ處デアル。

假設　△ABC ノ三中線ヲ AD, BE, CF トスルト

終結　AD, BE, CF ハ夫々頂點カラ $\frac{2}{3}$ ノ一點デ交ル。

證明　BE, CF ノ交點ヲ G トシ, BG, CG ノ中點ヲ夫々 L, M トスル。



$$\left.\begin{array}{l} LM \overset{*}{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BC \\ FE \,\underline{\parallel}\, \frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \quad \therefore\ LM \,\underline{\parallel}\, FE$$

* コノ記號ハ＝ト∥トヲ意味スル。

故ニ LMEF ハ平行四邊形デアル。

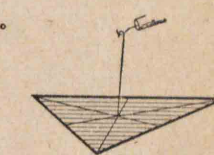
因テ　　$BL=LG=GE,\quad CM=MG=GF$

即チ G ハ BE, CF 上各頂點カラ $\frac{2}{3}$ ノ處デアル。

同様ニ AD ト BE トノ交リハ BE 上 $\frac{2}{3}$ ノ點ナルコトガ證明出來ル。

因テ三中線ハ各頂點カラ各々 $\frac{2}{3}$ ノ一點 G デ交ル。

注意　コノ點ヲ三角形ノ**重心**トイフ。



厚紙デ三角形ヲ作リ,絲デ吊シテ釣合フ點ハソノ重心デアルコトヲ確メヨ。

練習 (5)

1. 二等邊三角形 ABC ノ底邊 BC 上ノ一點ヲ D トスレバ, $DA<AC$ デアル。

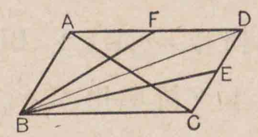
2. 梯形ノ對角線ノ中點ヲ結ブ線分ハ底ニ平行デ且ツ兩底ノ差ノ半分ニ等シイ。

3. 平行四邊形 ABCD ノ各頂點カラコノ平行四邊形ヲキラナイ直線 XY ヘ垂線 AA', BB', CC', DD' ヲ下ストキ, $AA'+CC'=BB'+DD'$ デアル。

4. 三角形 ABC ノ重心ヲ G トシ, A, B, C, G カラコノ三角形ヲキラナイ一直線ヘ垂線 AA', BB', CC', GG' ヲ引クト, $3GG'=AA'+BB'+CC'$ デアル。

5. 三角形ABCニ於テAB=ACトシ,BAヲDマデ延長シテAD=ABトスレバ,CD⊥BCデアル。

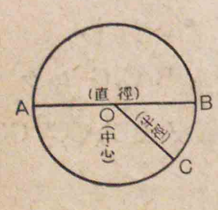
6. 平行四邊形ABCDノ邊CD,DAノ中點ヲ夫々E,Fトスレバ,BE,BFハACヲ三等分スル。



第六章 圓

38. 圓

定義 線分ノ一端ヲ固定シ,ソノ線分ヲ一周リ廻轉スルトキ,他端ノ畫ク曲線ヲ**圓周**,固定シタ點ヲ**圓ノ中心**トイヒ,線分ガ畫イタ平面ノ部分ヲ**圓**トイフ。



ソシテ圓ノ中心カラ圓周マデ引イタ線分ヲ圓ノ**半徑**トイフ。圓ノ中心ヲ過ツテ

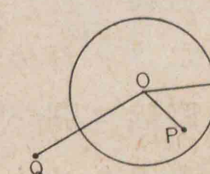
兩端ガ圓周上ニアル線分ヲ圓ノ**直徑**トイフ。

圓又ハ圓周ヲ表ハスニハ圓周上ノ三點例ヘバA,B,Cヲトリ,**圓**ABC又ハ**圓周**ABCトイフ。時トシテハ中心ヲ表ハス文字Oヲ用ヒテ**圓O**トモイフ。

系1. 一ツノ圓ノ半徑ハ皆相等シイ。又直徑ハ半徑ノ2倍デアル。

系2. 一ツノ圓ノ直徑ハ皆相等シイ。

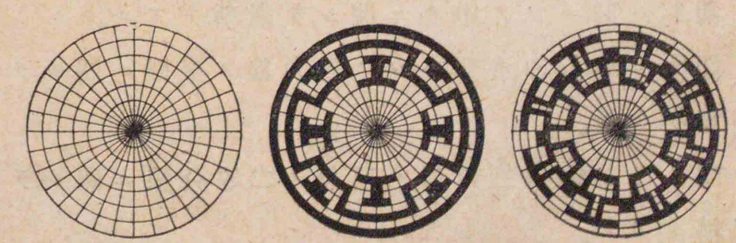
系3. 一ツノ點ト圓ノ中心トノ距離ガ圓ノ半徑ヨリ小ナルカ等シイカ又ハ大ナルカニ從ツテ,ソノ點ハ圓內,圓周上又ハ圓外ニアル。又コノ逆モ眞デアル。



系4. 半徑ガ等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

問 直徑ガ等シイ二ツノ圓ハ合同デアル。

定義 二ツ以上ノ合同ナ圓ヲ**等圓**トイヒ,中心ヲ共有スル圓ヲ**同心圓**トイフ。



39. 對稱圖形

定義　一點ヲ過ツテ或圖形上ニ兩端ヲモツ總テノ線分ガ皆ソノ點デ二等分セラレルトキ,ソノ圖形ハソノ**點ニ關シテ對稱デアル**又ハ**點對稱ヲモツ**トイヒ,ソノ點ヲ**對稱ノ中心**トイフ。

一直線ヲ折目トシテ或圖形ヲ折返ストキ,ソノ二ツノ部分ガ全ク合スレバ,ソノ圖形ハソノ**直線ニ關シテ對稱デアル**又ハ**線對稱ヲモツ**トイヒ,ソノ直線ヲ**對稱ノ軸**トイフ。

系1. 一ツノ圖形ノ對稱ノ軸ハソノ圖形ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

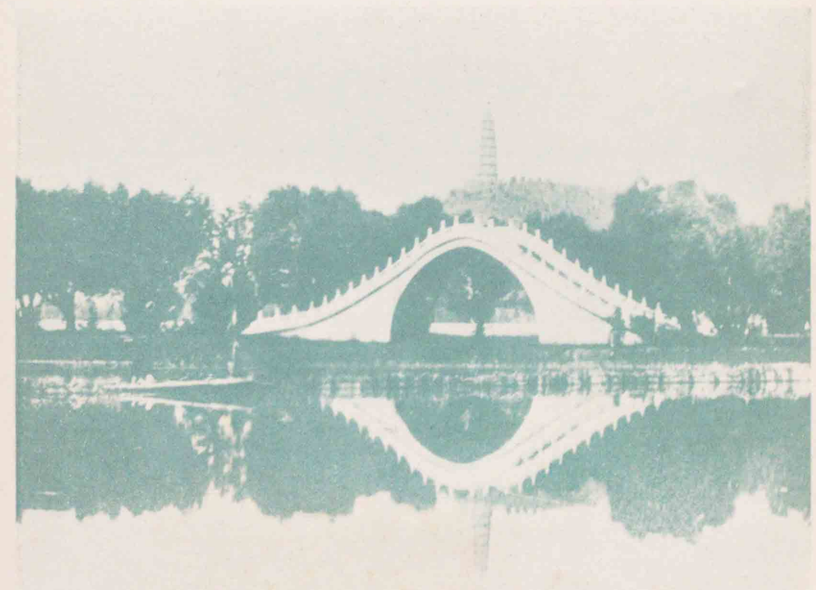
系2. 一ツノ圖形ノ對稱ノ中心ヲ過ル任意ノ直線ハソノ圖形ヲ合同ナ二ツノ部分ニ分ケル。

(一方ヲ對稱ノ中心ノ周リニ二直角ダケ廻轉セヨ)

問1.　圓ハソノ中心ニ關シテ對稱デアル。

問2.　平行四邊形ハソノ對角線ノ交點ニ關シテ對稱デアル。

問3.　二等邊三角形ハ頂角ノ二等分線ニ關シテ對稱デアル。



夏宮殿ノ駱駝橋　(北京)

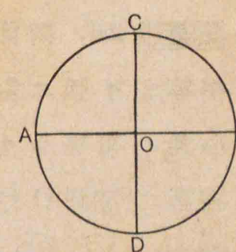
40. 圓周ノ對稱

定理 25. 圓周ハ直徑ニ關シテ對稱デアル。

證明　略スル。

系 1. **直徑ハ圓及ビ圓周ヲ二等分スル。**

系 2. **互ニ垂直ナ二ツノ直徑ハ圓及ビ圓周ヲ四等分スル。**



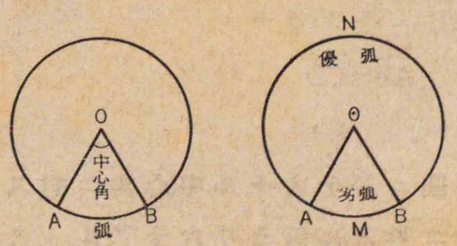
定義　圓ガ一ツノ直徑デ分タレタ二ツノ部分ヲ各々**半圓**トイヒ，互ニ垂直ナ二ツノ直徑デ分タレタ四ツノ部分ヲ各々**四分圓**又ハ**象限**トイフ。

41. 弧ト中心角

定義　圓周ノ一部分ヲ**弧**トイフ。

弧ヲ表ハスニハソノ兩端ノ文字ヲ用ヒル。例ヘバ下圖ニ於テハ**弧 AB** 又ハ $\overset{\frown}{AB}$ ト書ク。

定義　弧ノ兩端カラ引イタ二ツノ半徑ノナス角ヲ**中心角**トイフ。



コノトキ弧ト中心角トハ**相對スル**トイフ。

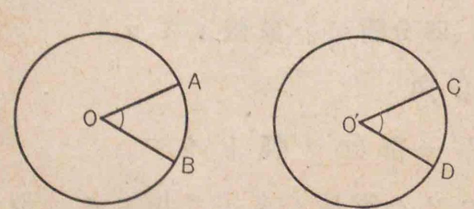
O 圓周上ニ二點 A, B ヲトルト，

全圓周ハ二ツノ弧ニ分タレル。ソレ等ノ中劣角AOBニ對スル弧ヲ**劣弧**,優角AOBニ對スル弧ヲ**優弧**トイヒ,弧ノ上ニ夫々一點ヲトリ,**弧AMB,弧ANB**又ハ$\widehat{AMB}$, $\widehat{ANB}$ト書イテ區別スル。

定理 26. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ハ相等シイ弧ニ對スル。逆ニ相等シイ弧ニ對スル中心角ハ相等シイ。

假設 等圓O, O′ニ於テ $\angle AOB=\angle CO'D$ トスルト

終結 $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ デアル。



證明 圓O′ヲ(ソノマヽ又ハ裏返シテ)圓Oノ上ニオキ,O′ヲOニ,O′CヲOAニ重ネルトCハAニ重ナル。

次ニ $\angle AOB=\angle CO'D$ ナル故,O′DハOBニ重ナリ,DハBニ重ナル。然ルニ兩圓周ハ既ニ重ナツテヰル。故ニ$\widehat{CD}$ハ$\widehat{AB}$ニ全ク重ナル。

$\therefore \qquad \widehat{AB}=\widehat{CD}$

逆ノ證明ハ略スル。

系 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大デアル。又コ

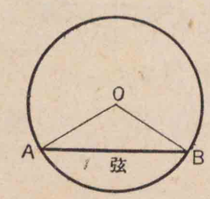
ノ逆モ眞デアル。

問 1. 同圓又ハ等圓ニ於テ中心角ガ2倍,3倍,…ニナレバ,ソレニ對スル弧モ亦2倍,3倍,…ニナル。

問 2. 圓周上ノ一點カラ二ツノ半徑(又ハソノ延長)ニ下シタ垂線ガ等シケレバ,二ツノ半徑ノ夾ム弧ハソノ點デ二等分セラレル。

42. 弧ト弦

定義 弧ノ兩端ヲ結ブ線分ヲ**弦**トイフ。

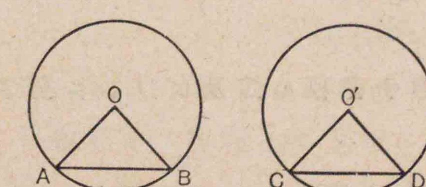


コノトキ弧ト弦トハ**相對スル**トイフ。一ツノ弦ニ對スル弧ハ二ツアルガ通常劣弧ヲトルモノトスル。

定理 27. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ニ對スル弦ハ相等シイ。逆ニ相等シイ弦ニ對スル弧ハ相等シイ。

假設 等圓O, O′ニ於テ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ トスルト

終結 $AB=CD$ デアル。



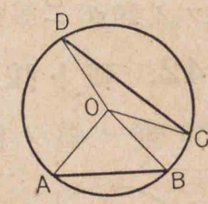
證明 O, O′ハ等圓デアツテ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ ナル故 $\angle AOB=\angle CO'D$

∴ $\triangle AOB \equiv \triangle CO'D$

∴ $AB = CD$

逆ノ證明ハ略スル。

系 **同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル弧ニ對スル弦ハ小ナル弧ニ對スル弦ヨリ大デアル。又コノ逆モ眞デアル。**



證明 O 圓周上デ $\overset{\frown}{CD} > \overset{\frown}{AB}$ トスルト $\triangle OAB$, $\triangle OCD$ ニ於テ

$\angle COD > \angle AOB$

且ツソレ等ヲ夾ム二邊ハ夫々相等シイ。

故ニ $CD > AB$

逆ノ證明ハ略スル。

問 1. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ中心角ニ對スル弦ハ相等シイ。

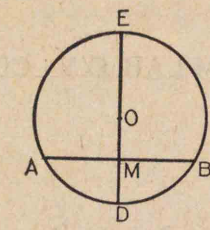
問 2. 同圓又ハ等圓ニ於テ,一ツノ弧 AB ガ他ノ弧 CD ノ 2 倍ナルトキ,弦 AB ハ弦 CD ノ 2 倍ヨリ小デアル。($\overset{\frown}{AB}$ ヲ二等分セヨ)

43. 弦ト中心

定理 28. 弦ニ垂直ナ直徑ハ弦及ビソレニ對スル弧ヲ二等分スル。

證明 略スル。(圓周ハ直徑ニ關シテ對稱ナルコトヨ

リ明ラカデアル)



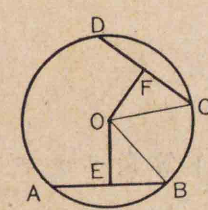
系 1. 弦ノ垂直二等分線ハ中心ヲ過ル。

系 2. 弦ノ中點ト中心トヲ結ブ直線ハ弦ニ垂直デアル。

定理 29. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弦ハ中心カラ等距離ニアル。 逆ニ**中心カラ等距離ニアル弦ハ相等シイ。**

假設 圓 O ニ於テ $AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ トスルト

終結 $OE = OF$ デアル。



證明 $OE \perp AB$ ナル故 E ハ AB ノ中點デアル。

同樣ニ F ハ CD ノ中點デアル。

扨テ $AB = CD$ ナル故 $EB = FC$

又 $OB = OC$ 且ツ $\angle E = \angle F = R\angle$

∴ $\triangle OBE \equiv \triangle OCF$

∴ $OE = OF$

逆ノ證明ハ略スル。

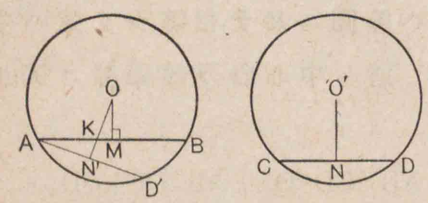
定理 30. 同圓又ハ等圓ニ於テ,大ナル弦ハ小ナル弦ヨリ中心ニ近イ。 逆ニ**中心ニ近イ弦ハ遠イ弦**

ヨリ大デアル。

[假設] 等圓 O,O′ ニ於テ $AB>CD$, $OM\perp AB$, $O'N\perp CD$ トスルト

[終結] $OM<O'N$ デアル。

[證明] O 圓周上デ $\overset{\frown}{AD'}$ ヲ $\overset{\frown}{CD}$ ニ等シクトレバ



$$AD'=CD$$

次ニ $ON'\perp AD'$ トスレバ

$$ON'=O'N$$

扨テ $\overset{\frown}{AD'}<\overset{\frown}{AB}$ デアルカラ ON' ト AB トハ交ル。ソノ交點ヲ K トスレバ

$$OM<OK<ON'$$

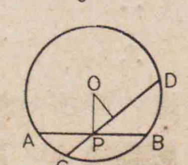
$$\therefore \quad OM<O'N$$

逆ノ證明ハ略スル。(轉換法)

問1. 直徑上ノ一點ヲ過リコレト等角ヲナス二ツノ弦ハ相等シイ。

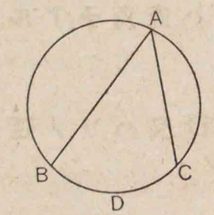
問2. 弦ノ最大ナルモノハ直徑デアル。

問3. 圓內ノ一點ヲ過ル弦ノ中，ソノ點デ二等分セラレルモノハ最小デアル。



44. 圓周角

定義 圓周上ノ一點カラ引イタ二ツノ弦ノナス角ヲ**圓周角**トイフ。



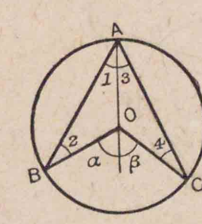
コノトキ圓周角トソノ二邊ガ夾ム弧トハ相**對スル**トイフ。

[定理] 31. 圓周角ハ同ジ弧ニ對スル中心角ノ半分デアル。

[假設] 圓 O ニ於テ $\overset{\frown}{BC}$ ニ對スル圓周角ヲ $\angle BAC$, 中心角ヲ $\angle BOC$ トスルト

[終結] $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ デアル。

[證明] $OA=OB$ $\quad\therefore\quad \angle 1=\angle 2$



然ルニ $\angle\alpha=\angle 1+\angle 2=2\angle 1$

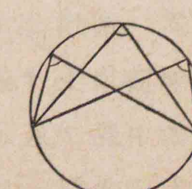
$\therefore\quad \angle 1=\frac{1}{2}\angle\alpha$

同樣ニ $\angle\beta=2\angle 3$

$\therefore\quad \angle 3=\frac{1}{2}\angle\beta$

$$\therefore\quad \angle BAC=\angle 1+\angle 3=\frac{1}{2}(\angle\alpha+\angle\beta)=\frac{1}{2}\angle BOC$$

[注意] 中心 O ガ $\angle BAC$ 內ニナイ場合ニモ同樣ニ證明スルコトガ出來ル。



[系] 1. 同ジ弧ニ對スル圓周角ハ皆相等シイ。

系 2. 同圓又ハ等圓ニ於テ,相等シイ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シイ。又コノ逆モ眞デアル。

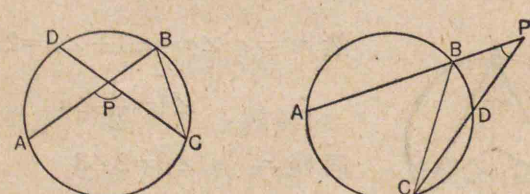
系 3. 半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角デアル。又コノ逆モ眞デアル。

定理 32. 圓ノ二ツノ弦 AB, CD 又ハソノ延長ノ交點ヲ P トスルトキ, ∠APC ハ

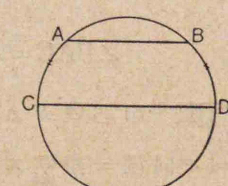
(i) P ガ圓内ニアルト,ソノ角及ビ對頂角ガ夾ム弧 AC, BD ニ對スル圓周角ノ和ニ等シイ。

(ii) P ガ圓外ニアルト,ソノ角ガ夾ム弧 AC, BD ニ對スル圓周角ノ差ニ等シイ。

證明 略スル。



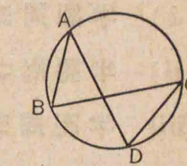
問 1. 一圓周ガ二ツノ平行線デキリトラレル弧ハ相等シイ。



問 2. 圓周角 APB ノ二等分線ハ P ガ圓周上ヲ動イテモ,常ニ弧 AB ノ中點ヲ過ル。

問 3. 次圖ニ於テ AB=CD ナラバ,BC=AD デアル。又コノ逆モ眞デアル。

(B ト D ヲ結べ)



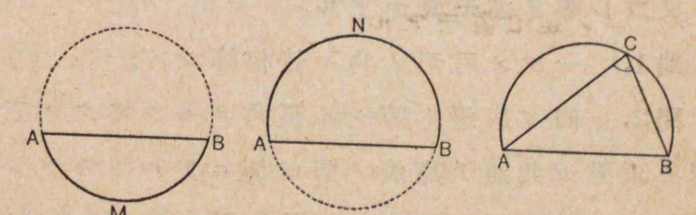
問 4. 直徑ノ兩端ニ於テコレト等角ヲナス二ツノ弦ハ相等シイ。

45. 弓形

定義 圓ノ弧トソレニ對スル弦トデ圍マレタ平面ノ部分ヲ**弓形**トイフ。

弓形ノ弧上ノ一點ヲソノ弧ノ兩端ニ結ンダ二ツノ弦ノナス角ヲ**弓形ノ角**或ハ**弓形ノ含ム角**トイフ。

弓形ヲ表ハスニハ弧ノ上ノ一點ヲ表ハス文字ヲ弧ノ兩端ヲ表ハス文字ノ間ニ置ク。例ヘバ圖ニ於



ケル二ツノ弓形ハ**弓形 AMB** 及ビ**弓形 ANB** デアル。又 ∠ACB ハ弓形 ACB ノ角デアル。

弓形ヲ圓ノ一部分トミルト弓形ノ角ハ圓周角デアル。因テ次ノ系ヲ得ル。

系 1. 弓形ノ角ハソノ弧ガ

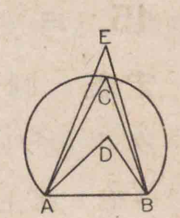
(i) 半圓周ヨリ大ナルトキハ鋭角デアル。

(ii) 半圓周ニ等シイトキハ直角デアル。

(iii) 半圓周ヨリ小ナルトキハ鈍角デアル。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

系2. 一ツノ點ヲ弓形ノ弦ノ兩端ニ結ンデ出來ル二ツノ線分ノナス角ハ



(i) ソノ點ガ弓形ノ内ニアルトキハ弓形ノ角ヨリ大デアル。

(ii) ソノ點ガ弓形ノ外ニアツテ弦ニ關シテ弧ト同ジ側ニアルトキハ,弓形ノ角ヨリ小デアル。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

問1. 一ツノ弓形ノ角ハ皆相等シイ。

問2. 同ジ底邊ト等シイ頂角ヲモツ多クノ三角形ハ頂點ガ共通ナ底邊ノ同ジ側ニアルトキ,ソレ等ノ三角形ノ頂點ハ皆ソノ底邊ヲ弦トスル一ツノ弓形ノ弧ノ上ニアル。

46. 圓ト直線

定理 33. 圓周ト直線トハ,圓ノ中心ト直線トノ距離ガ

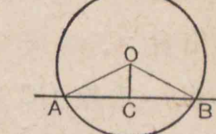
(i) 半徑ヨリ小ナルトキハ二點デ出會フ。

(ii) 半徑ニ等シイトキハ一點デ出會フ。

(iii) 半徑ヨリ大ナルトキハ出會ハナイ。

又コレ等ノ逆モ眞デアル。

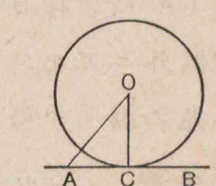
假設 圓ノ中心ヲO,直線ヲAB, OトABトノ距離ヲOCトシ



(i) OCハ半徑ヨリ小

(ii) OCハ半徑ニ等シイ

(iii) OCハ半徑ヨリ大トスルト

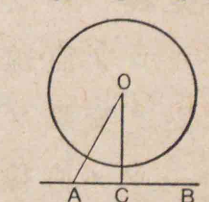


終結 圓周ト直線トハ

(i) 二點デ出會フ。

(ii) 一點デ出會フ。

(iii) 出會ハナイ。



證明 (i) OCハ半徑ヨリ小デアルカラCハ圓内ニアル。然ルニ直線ハ双方ヘ限リナク長イカラ,直線AB上ニハ圓Oノ外ノ點ガアル。故ニ直線ABハ少クモ一點デコノ圓周ト出會フ。ソノ點ヲAトシ, OCニ關シテOAニ對稱ナ線分OBヲ引クトOBトOAハ相等シイ。然ルニOAハ半徑デアルカラOBモ亦半徑ニ等シク,從ツテBハ圓周上ニアル。Oカラ直

線 AB ニ引イタ等シイ斜線ハ唯二ツデアルカラ,圓周トコノ直線トハ唯二ツノ點A, Bデ出會フ。

(ii) 垂線 OC ガ半徑ニ等シイカラ,任意ノ斜線 OA ハ半徑ヨリ大デアル。故ニ直線上C以外ノ點ハ圓外ニアル。故ニ圓周トコノ直線トハ唯一點Cデ出會フ。

(iii) 垂線 OC ガ半徑ヨリ大デアルカラ,任意ノ斜線 OA モ半徑ヨリ大デアル。故ニ直線上ノ點ハ總テ圓外ニアル。故ニ圓周ハコノ直線ト出會ハナイ。

逆ノ證明ハ略スル。

定義 一ツノ直線ガ圓周ト二點デ出會フトキ,コノ直線ハ圓ト**交ル**トイヒ,ソノ出會ツタ點ヲ**交點**,ソノ直線ヲ圓ノ**割線**トイフ。

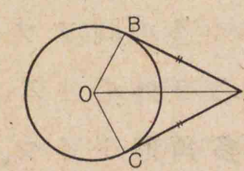
一ツノ直線ガ圓周ト唯一點デ出會フトキ,コノ直線ハ圓ニ**切スル**トイヒ,ソノ直線ヲ圓ノ**切線**トイフ。切線ガ圓周ト出會ツタ點ヲ**切點**トイフ。

系1. 圓周上ノ任意ノ一點ニ於ケル切線ハソノ點ヘ引イタ半徑ニ垂直デアル。

系2. 切點ヲ過リ切線ニ垂直ナ直線ハ圓ノ中心

ヲ過ル。

系3. 一點カラ圓ニ二ツノ切線ヲ引クトキ,ソノ點ト切點トノ距離ハ相等シイ。



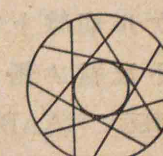
定義 圓外ノ一點カラ圓ニ切線ヲ引クトキ,切點ト初メノ點トノ距離ヲ**切線ノ長サ**トイフ。

問1. 直徑ノ兩端ニ於ケル切線ハ平行デアル。

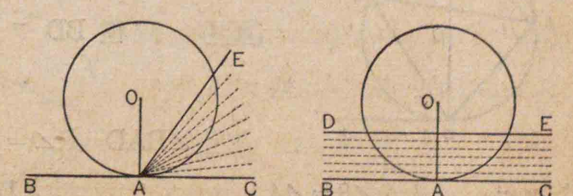
問2. 圓ノ一ツノ切線ニ平行ナ弦ハ何レモソノ切點ヲ過ル直徑ノタメニ垂直ニ二等分セラレル。

問3. 圓外ノ一點ト圓ノ中心トヲ結ブ直線ハソノ點カラ引イタ圓ノ二ツノ切線ガナス角ヲ二等分シ且ツ二ツノ切點ヲ結ブ弦ノ垂直二等分線デアル。

問4. 二ツノ同心圓ノ小圓ニ切スル大圓ノ弦ハ皆相等シイ。



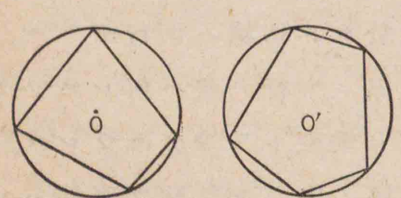
注意 下ノ圖ガ示スヤウニ,圓ノ一ツノ割線 AE ガ A ヲ中心トシテ廻轉シ,次第ニ AC ニ近ヅキ遂ニ AC ニ重ナルトキ, AE ハ點 A ニ於ケル切線トナル。又 OA ニ垂直ナ割線 DE ガ初メノ位置ニ平行シ



ナガラ中心Oヲ遠ザカリ遂ニ BC ニ合スルトキ, DE ハ點 A ニ於ケル切線トナル。

47. 外接圓ト內接多角形

定義 多角形ノ總テノ頂點ヲ過ル圓ヲソノ多角形ノ**外接圓**,ソノ圓ノ中心ヲ**外心**トイフ。又コノ多角形ヲ圓ノ**內接多角形**トイフ。

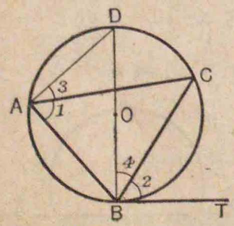


コノトキ圓ハ多角形ニ**外接スル**トイヒ, 多角形ハ圓ニ**內接スル**トイフ。

上圖ハ內接四邊形,內接五邊形デアル。

定理 34. 內接三角形ノ頂角ハソノ對邊ノ端ニ於ケル切線ト對邊トノナス角ノ中,對邊ニ關シテソレト反對ノ側ニアル角ニ等シイ。

假設 △ABC ハ圓 O ニ內接シ, B ニ於ケル切線ヲ BT トスルト



終結 ∠BAC=∠TBC デアル。

證明 直徑 BD ヲ引キ, AD ヲ結ブト

∠BAD=R∠=∠TBD

然ルニ ∠3=∠4 ∴ ∠1=∠2

卽チ ∠BAC=∠TBC

注意 邊 BC ガ半圓 BAD 內ニアルトキモ同樣ニ證明出來ル。

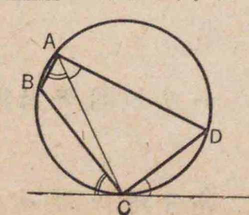
系 內接三角形ノ一邊ノ端カラソノ邊ニ關シテ三角形ト反對ノ側ニ引イタ直線トソノ邊トノナス角ガ,ソノ邊ニ對スル頂角ト等シケレバ,ソノ直線ハ外接圓ニ切スル。

問 1. 圓周上ノ一點 A カラ弦 AB 及ビ切線 AT ヲ引キ, ∠BAT ノ二等分線ガ $\widehat{AB}$ ト交ル點ヲ M トスルト, M ハ $\widehat{AB}$ ノ中點デアル。

問 2. 圓周上ノ一點 A カラ弦 AB, AC 及ビ切線 AT ヲ引キ, B カラ AT ニ平行ニ引イタ直線ガ弦 AC (又ハソノ延長)ト交ル點ヲ D トスルト, AB ハ圓 BDC ノ切線デアル。

定理 35. 圓ニ內接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ヲナス。又コノ逆モ眞デアル。

假設 圓ニ內接スル四邊形ヲ ABCD トスルト



終結 ∠BAD+∠BCD=2R∠

∠ABC+∠ADC=2R∠

證明 略スル。

系 圓ニ內接スル四邊形ノ

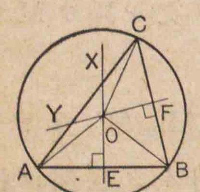
一外角ハソノ內對角(外角ニ隣ル內角ノ對角)ニ等シイ。又コノ逆モ眞デアル。

定理 36.　三角形ノ外接圓ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。

假設　三角形ヲABCトスルト

終結　△ABCノ外接圓ハ一ツハ必ズアル。ソシテ唯一ツヨリナイ。

證明　AB, BCノ垂直二等分線EX, FYヲ引ク。



AB, BCハ交ツテヰルカラ, EX, FYハ必ズ交ル。ソノ交點ヲOトシ, OA, OB, OCヲ結ブト

OA=OB,　OB=OC　(定理4系)

ソレ故Oヲ中心トシOAヲ半徑トスル圓ハ三點A, B, Cヲ過ル。因テコノ圓ハ△ABCノ外接圓デアル。卽チ外接圓ハ一ツハ必ズアル。

次ニ二直線EX, FYノ交點ハ唯一ツヨリナイカラ, 三點A, B, Cヲ過ル圓ノ中心モ唯一ツヨリナイ。從ッテ△ABCノ外接圓ハ唯一ツヨリナイ。

系 1.　一直線上ニナイ三點ハ一ツノ圓ヲ決定スル。

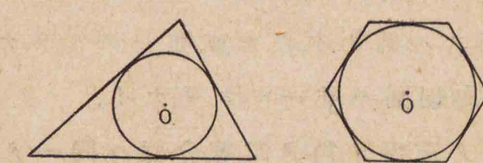
系 2.　三角形ノ三邊ノ垂直二等分線ハ同一ノ點ヲ過ル。ソシテソノ點ハ三頂點カラ等距離ニアル。

問　一點カラ圓周上ノ三點ニ引イタ線分ガ相等シイトキ,ソノ點ハソノ圓ノ中心デアル。

48.　內切圓ト外切多角形

定義　多角形ノ總テノ邊ニ切スル圓ヲソノ多角形ノ**內切圓**,ソノ中心ヲ**內心**トイフ。又ソノ多角形ヲ圓ノ**外切多角形**トイフ。

コノ場合ニ圓ハ多角形ニ**內切スル**トイヒ,多角形ハ圓ニ**外切スル**トイフ。

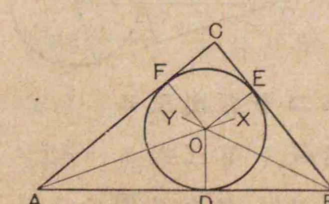


圖ニ於テ三角形及ビ六角形ハ共ニ圓Oノ外切多角形デ,圓Oハソレ等ノ內切圓デアル。

定理 37.　三角形ノ內切圓ハ一ツハ必ズアル,ソシテ唯一ツニ限ル。

假設　三角形ヲ△ABCトスルト

終結　△ABCノ內切圓ハ一ツハ必ズアル。ソシテ唯一ツヨリナイ。



證明　∠A, ∠Bノ二等分線AX,BYヲ引クト, ∠XAB+∠YBAハ2R∠

ヨリ小デアルカラ AX, BY ハ必ズ交ル。ソノ交點ヲ O トシ, O カラ三邊ニ夫々垂線 OD, OE, OF ヲ下スト

$$OE=OD, \quad OF=OD \qquad \text{(定理12系5)}$$

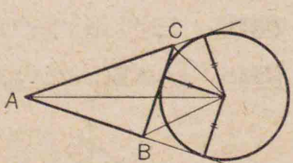
ソレ故 O ハ三邊 AB, BC, CA カラ等距離ニアル。

今コノ距離ヲ半徑トシ, O ヲ中心トスル圓ヲ畫クト, コノ圓ハ三角形ノ三邊ニ切スル。(定理33) 因テコノ圓ハ △ABC ノ内切圓デアル。卽チ内切圓ハ一ツハ必ズアル。

次ニ AX, BY ノ交點ハ唯一ツヨリナイカラ, 三邊 AB, BC, CA ニ切スル圓ノ中心モ亦唯一ツヨリナイ。從ッテ △ABC ノ内切圓ハ唯一ツヨリナイ。

系 1. 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ過リ, ソノ點ハ三邊カラ等距離ニアル。

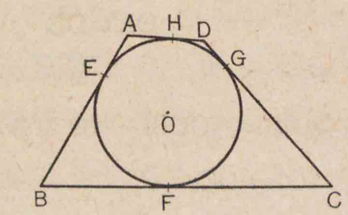
系 2. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線及ビ他ノ二角ノ外角ノ二等分線ハ同一ノ點ヲ過リ, ソノ點ハ三邊カラ等距離ニアル。因テコノ點ヲ中心トシテ, 三角形ノ二邊ノ延長ト殘リノ一邊トニ切スル圓ヲ作ルコトガ出來ル。



定義 三角形ノ二邊ノ延長ト第三邊トニ切スル圓ヲ三角形ノ**傍切圓**トイヒ, ソノ中心ヲ**傍心**トイフ。

定理 38. 圓ニ外切スル四邊形ノ相對スル邊ノ和ハ相等シイ。

假設 圓 O ニ外切スル四邊形ヲ ABCD トスルト



終結 AB+CD=BC+AD デアル。

證明 AB, BC, CD, DA ガ圓 O ニ切スル點ヲ夫々 E, F, G, H トスル。然ルトキハ

$$\left.\begin{array}{l} AE=AH, \quad BE=BF \\ CG=CF, \quad DG=DH \end{array}\right\} \qquad \text{(定理33系3)}$$

$$\therefore \quad AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH$$

卽チ $$AB+CD=BC+AD$$

系 四邊形ノ相對スル邊ノ和ガ相等シイトキ, コノ四邊形ハ圓ニ外切スル。

問 1. 圓ニ外切スル平行四邊形ハ菱形デアル。

問 2. 圓ニ外切スル矩形ハ正方形デアル。

49. 外切正多角形・内接正多角形

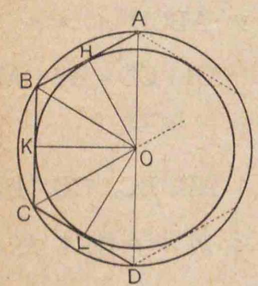
定理 39. 正多角形ハコレニ外接圓及ビ内切圓ヲ畫クコトガ出來ル。

假設 正多角形ヲ ABCD……トスルト

終結 ABCD……ニ(i)外接圓, (ii)内切圓ヲ畫クコ

トガ出來ル。

證明　(i) ∠A, ∠B ノ二等分線ノ交點ヲ O トスル。



然ルトキハ　$\angle OAB=\angle OBA$

∴　$OA=OB$

OC ヲ結ブト

$\triangle OAB\equiv\triangle OCB$　(定理4)

∴　$OA=OC$

∴　$OA=OB=OC$

扨テ　$\angle OCB=\angle OBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\angle BCD$

ソレ故 OC ハ ∠BCD ノ二等分線デアル。

次ニ OD ヲ結ブト上ト同樣ニ

$OB=OC=OD$

ヲ得ル。以下順ニ進ンデ

$OA=OB=OC=OD=\cdots\cdots$

因テ O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トスル圓ハ各頂點 A, B, C, D, …… ヲ過ル。

即チコノ圓ハ正多角形 ABCD…… ノ外接圓デアル。

(ii) O カラ AB, BC, CD, …… ニ垂線 OH, OK, OL, …… ヲ下スト AB=BC=CD=…… ナル故

$OH=OK=OL=\cdots\cdots$　(定理29)

因テ O ヲ中心トシ OH ヲ半徑トスル圓ハ各邊

AB, BC, CD, ……… ニ切スル。

即チコノ圓ハ正多角形 ABCD…… ノ内切圓デアル。

注意　正多角形ノ外接圓ノ中心ト内切圓ノ中心ハ同一ノ點デアル。コノ點ヲ**正多角形ノ中心**トイフコトガアル。

定理 40. 圓ノ中心ニ於ケル一周角ヲ幾ツカニ等分スル半徑ノ端ノ點ヲ順次ニ結ブトキハ,内接正多角形ヲ得ル。又ソノ半徑ノ端ノ點デ圓ニ切線ヲ引クトキハ,外切正多角形ヲ得ル。

假設　圓 O ニ於テ中心ニ於ケル一周角ヲ幾ツカニ等分スル半徑ヲ OA, OB, OC, OD, …… トシ,

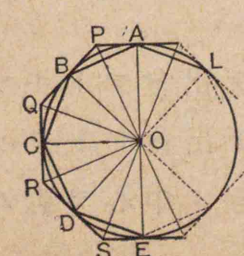
(i) A, B, C, D, ……… ヲ結ブ

(ii) A, B, C, D, ……… ニ於ケル圓 O ノ切線ノ次々ノ交點ヲ P, Q, R, S, …… トスルト

終結　(i) ABCDE…… ハ圓 O ノ内接正多角形

(ii) PQRS…… ハ圓 O ノ外切正多角形デアル。

證明　(i) $OA=OB=OC=\cdots\cdots$



$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\cdots\cdots$

∴　$\triangle OAB\equiv\triangle OBC\equiv\triangle OCD\equiv\cdots$

∴　$AB=BC=CD=\cdots\cdots$

且ツ　$\angle LAB=\angle ABC=\cdots\cdots$

故ニ ABCDE…… ハ正多角形,

即チ圓Oノ内接正多角形デアル。

(ii) 次ニOP, OQ, ……ハ∠AOB, ∠BOC, ……ノ二等分線デ,明カニ△OAP≡△OBQデアル。

又△OAP≡△OBPデアルカラ

$$\triangle OAP\equiv\triangle OBP\equiv\triangle OBQ$$

ヲ得ル。以下同様ニ進ンデ

$$\triangle OAP\equiv\triangle OBP\equiv\triangle OBQ\equiv\triangle OCQ\equiv\cdots\cdots$$

從ツテ　$PQ=QR=RS=\cdots\cdots,$

及ビ　$\angle P=\angle Q=\angle R=\cdots\cdots$

即チPQRS……ハ外切正多角形デアル。

問 1. 正方形ノ一邊ハソノ内切圓ノ直徑ニ等シイ。

問 2. 圓ニ内接スル等邊多角形ハ正多角形デアル。

問 3. 圓ニ外切スル等角多角形ハ正多角形デアル。

50. 二ツノ圓

定義　二ツノ圓周ガ二點デ出會フトキソレ等ハ相**交ル**トイヒ,唯一點デ出會フトキソレ等ハ相**切スル**トイフ。二圓ノ中心ヲ過ル直線ヲ二圓ノ**中心線**トイフ。

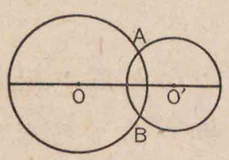
注意　三點ハ一ツノ圓ヲ決定スルカラ二ツノ圓周ハ三點以上デ出會ハナイ。

定理 41. 二ツノ圓周ガ相交ルトキ,ソノ交點ハソノ中心線ニ關シテ對稱デアル。

假設　O, O′ノ圓周ガ二點A, Bデ交ルトスルト

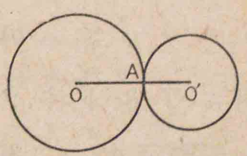
終結　A, Bハ中心線OO′ニ關シテ對稱デアル。

證明　圓ハ直徑ニ關シテ對稱デアルカラ,中心線OO′ヲ折目トシテ,ソレカラ上ノ平面ヲ下ヘ折返スト,上ノ半圓ハ夫々下ノ半圓ニ合スル。故ニ上ノ注意ヨリAハBニ合スル。因テA, BハOO′ニ關シテ對稱デアル。

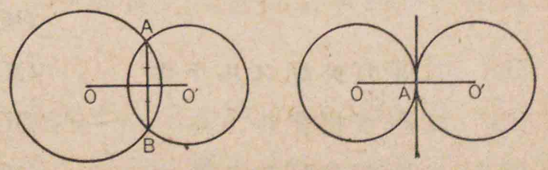


系 1. 二ツノ圓周ガ相切スルトキ,ソノ切點ハソノ中心線上ニアル。

(モシ切點ガ中心線上ニナケレバ,ソレニ關シ對稱ナ點デ再ビ出會フ。因テ二ツノ圓周ハ相交ルコトトナル)



系 2. 二ツノ圓周ガ相交ルトキ,ソノ中心線



ハ共通弦ヲ垂直ニ二等分スル。

系 3. **二ツノ圓周ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ過リ中心線ニ垂直ナ直線ハ二圓ニ共通ナ切線デアル。**

問 1. 相交ル二圓ノ交點ヲA, Bトシ,Aヲ過ッテ二圓ノ直徑AC, ADヲ引クトキ,三點C, B, Dハ一直線上ニアル。

問 2. 一ツノ直線上ノ一點ニ於テコノ直線ニ切スル二ツノ圓ハ相切スル。

問 3. 二ツノ圓ガ相切スルトキ,ソノ切點ヲ過ル任意ノ直線ハソノ二圓カラ等シイ角ヲ含ム弓形ヲキリトル。

51. 二圓ノ位置ノ關係

定義 相切スル二圓ガ互ニ他ノ外ニアルトキ,ソレ等ハ**外切スル**トイヒ,一方ガ他方ノ內ニアルトキ,ソレ等ハ**內切スル**トイフ。

定理 42. **二圓O,O'ノ半徑ヲ夫々r, r'トシ**

(i) **一方ノ圓ガ他方ノ圓ノ全ク外ニアルトキ** $OO'>r+r'$

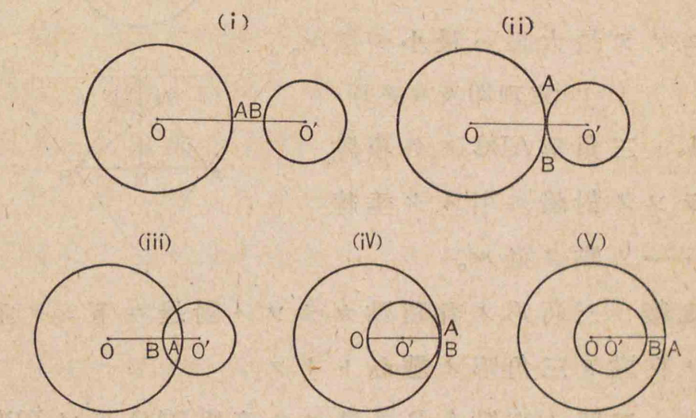
(ii) **二圓ガ外切スルトキ** $OO'=r+r'$

(iii) **二圓ガ相交ルトキ** $r\sim r'<OO'<r+r'$

(iv) **二圓ガ內切スルトキ** $OO'=r\sim r'$

(v) **一方ノ圓ガ他方ノ圓ノ全ク內ニアルトキ** $OO'<r\sim r'$

證明 略スル。



注意 二ツノ圓ノ位置ノ關係ハ上ノ五ツノ他ニハナイ。

練習 (6)

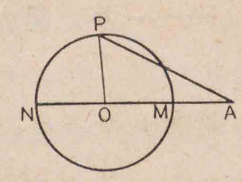
1. 矩形,菱形ハ夫々二ツノ對稱ノ軸ヲモチ,正方形ハ四ツノ對稱ノ軸ヲモツ。ソシテコレ等ノ軸ノ交點ハ對稱ノ中心デアル。一般ニ互ニ垂直ナ二ツノ對稱ノ軸ヲモツ圖形ハ軸ノ交點ニ關シテ對稱デアル。

2. 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓ノ周ト交ルトキ,ソノ直線ノ二ツノ圓周ノ間ニ夾マレル部分ハ相等

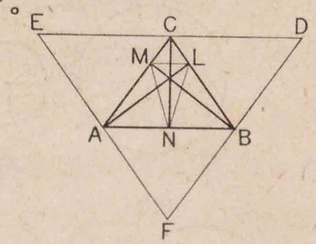
シイ。

3.　一ツノ點カラ圓周上ノ一點マデ引イタ線分ノ中,中心ヲ過ルモノガ最大又ハ最小デアル。

(定理20及ビ系1)



4.　三角形ABCノ各項點カラソノ對邊ヘ引イタ垂線ハ同一ノ點ヲ過ル。



定義　三角形ノ各頂點カラソノ對邊ニ下シタ垂線ノ交點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ。

5.　二圓ノ交點A,Bヲ過ッテ直線PAQ及ビRBSヲ引キ,圓周ト夫々P,Q及ビR,Sデ交ラシメルトキPR∥QS デアル。

6.　二圓ガ切スルトキ,ソノ切點ヲ過ル任意ノ二ツノ直線ガ二ツノ圓周カラキリトル弧ノ弦ハ平行デアル。

7.　一ツノ圓ノ半徑ヲ直徑トスル圓ヲ畫クトキ,ソノ切點ヲ過ル大圓ノ弦ハ小圓ノ周ニヨッテ二等分セラレル。

8.　三角形ABCノ垂心ヲHトスルト,四點A,B,C,Hノ中,任意ノ一ツハ他ノ三ツヲ頂點トスル三角形ノ垂心デアル。

9.　三角形ノ外心,內心,垂心ノ中二ツヅツガ同一ノ點ナルトキ,コノ三角形ハドンナ三角形カ。

10.　三角形ABCノ頂點Aニ於テ引イタ外接圓ノ切線ニ平行ナ直線ガ邊AB,ACト交ル點ヲ夫々P,Qトスルト,四邊形 BPQCハ圓ニ內接スル。

11.　互ニ外ニアル二圓ノ周上ニ兩端ヲモツ線分ノ中,最大及ビ最小ナルモノハソノ中心線上ニアル。

12.　三角形ABCノ垂心ヲH,外心ヲ O,OカラBCニ下シタ垂線ノ足ヲMトスルト, AH=2OM デアル。

13.　圓ニ內接スル多角形ノ角ガ皆等シイトキ,ソノ邊ハ一ツオキニ相等シイ。從ッテ邊數ガ奇數ナラバ,ソノ多角形ハ正多角形デアル。

第七章　作圖題

52.　作圖題

定義　與ヘラレタ條件ニ適スル圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ求メル問題ヲ**作圖題**トイヒ,圖形ヲ畫ク幾何學的方法ヲ**作圖法**或ハ單ニ**作圖**トイフ。

圖形ヲ畫クコトヲ**作圖スル**トイヒ,又作圖シテ得タ圖形ヲ作圖ノ**解答**トイフ。

53. 作圖ノ器具

作圖スルニ際シテ用ヒル器具ハ次ノ二ツニ限ラレテアル。

(i) **目盛ノナイ定規**…………(直線ヲ畫クモノ)

(ii) **こんぱす** ……………………(圓ヲ畫クモノ)

注意 線分ノ長サヲ計リ又ハ線分ヲ幾ツカニ等分スルタメニ目盛ノアル定規卽チ物指ヲ用ヒタリ,角ヲ計ルタメニ分度器又ハ三角定規ノ角ヲ用ヒタリ等スル作圖ノ仕方ハ幾何學的作圖法トハイハナイ。

54. 作圖ノ公法

作圖スルニ際シ前節デ述ベタヤウナ定規及ビこんぱすダケヲ用ヒルトイフコトハ,作圖ノ最初カラ次ノ二ツノコトガ出來ルモノト認メテアルノト同樣デアル。

(i) **任意ノ二點ヲ過ル直線ヲ引クコト。**

(ii) **任意ノ點ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫クコト。**

コレ等ヲ**作圖ノ公法**トイフ。從ツテ

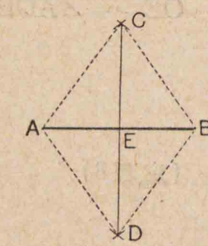
(i)ニヨツテ線分ヲ延長スルコトガ出來ル。

(ii)ニヨツテ線分ヲ他ニ移スコトガ出來ル。

55. 基本ノ作圖題

作圖題 1. **與ヘラレタ線分ヲ二等分セヨ。**

題意 與ヘラレタ線分ヲ AB トシ, AB ヲ二等分スルコトヲ求メル。



作圖 A 及ビ B ヲ中心トシテ,任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲ C, D トシ, C ト D ヲ結ビ,コレガ AB ト交ル點ヲ E トスル。然ルトキ E ハ AB ヲ二等分スル。

證明 AC, BC, AD, BD ヲ結ブト

$\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (定理 8)

$\therefore$ $\triangle ACE \equiv \triangle BCE$ (定理 4)

$\therefore$ $AE = EB$

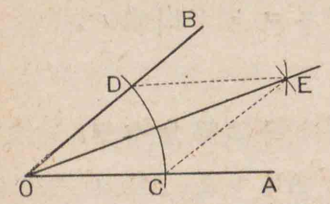
卽チ AB ハ E デ二等分セラレル。

注意 コノ作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

問 與ヘラレタ線分ヲ直徑トスル圓ヲ畫ケ。

作圖題 2. **與ヘラレタ角ヲ二等分セヨ。**

題意 與ヘラレタ角ヲ AOB トシ,コレヲ二等分スル直線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖　O ヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫キOA, OB ト交ル點ヲ夫々 C, D トスル。次ニ C 及ビ D ヲ中心トシテ,任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲ E トシ, OE ヲ結ブト OE ハ ∠AOB ヲ二等分スル。

證明　EC, ED ヲ結ブト

$\triangle OCE \equiv \triangle ODE$　　（定理8）

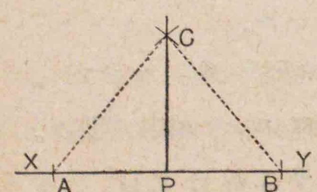
$\therefore$　$\angle EOC = \angle EOD$

即チ OE ハ ∠AOB ヲ二等分スル。

注意　コノ作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

作圖題 3.　與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ヲ過リ,ソノ直線ニ垂線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ直線ヲ XY トシ, XY 上ノ與ヘラレタ點ヲ P トスル。 P ヲ過ッテ XY ニ垂線ヲ引クコトヲ求メル。



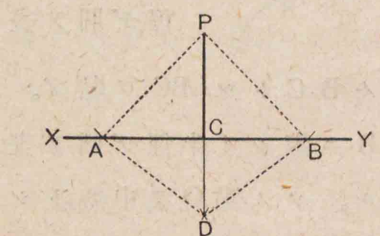
作圖　略スル。（作圖題2ノ特別ナ場合デアル）

問 1.　與ヘラレタ角ヲ四等分セヨ。

問 2.　與ヘラレタ圓ノ周上ニ在ル與ヘラレタ點ニ於テ,ソノ圓ニ切線ヲ引ケ。

作圖題 4.　與ヘラレタ直線外ノ與ヘラレタ點カラ,コノ直線ヘ垂線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ直線ヲ XY トシ, XY 外ノ點ヲ P トスル。 P カラ XY ヘ垂線ヲ下スコトヲ求メル。



作圖　P ヲ中心トシテ XY ニ交ル任意ノ半徑ノ圓ヲ畫キ, XY トノ交點ヲ A, B トスル。

次ニ A, B ヲ中心トシテ任意ノ等シイ半徑デ相交ル二ツノ圓ヲ畫キ,ソノ交點ヲ D トスル。 P ト D ヲ結ビ XY トノ交點ヲ C トスル。

PC ハ求ムル垂線デアル。

證明　略スル。

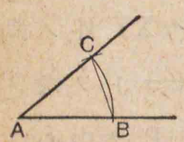
注意　作圖ハ常ニ可能デ,解答ハ唯一ツデアル。

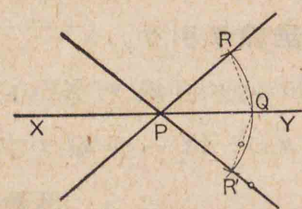
問　與ヘラレタ三角形ノ高サヲ作レ。

作圖題 5.　與ヘラレタ直線上ノ與ヘラレタ點ニ於テ,ソノ直線ト與ヘラレタ角ヲナス直線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ直線ヲ XY トシ, XY 上ノ與ヘ

ラレタ點ヲPトシ,與ヘラレタ角ヲBACトスル。Pヲ過ツテXYト$\angle BAC$ニ等シイ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求メル。





作圖 Aヲ中心トシテ任意ノ半徑デ圓ヲ畫キ,角ノ二邊ト交ル點ヲ夫々B,Cトシ, BCヲ結ブ。

次ニPヲ中心トシテ, ABニ等シイ半徑デ圓ヲ畫キ, PYト交ル點ヲQトスル。ソノ點Qヲ中心トシテ, BCニ等シイ半徑デ圓ヲ畫キ,前ノ圓トノ交點ヲR, R'トスル。PトRトヲ結ベバPRハ求ムル直線デアル。

證明 QRヲ結ブト

$$\triangle PQR \equiv \triangle ABC \qquad (定理8)$$

$$\therefore \quad \angle QPR = \angle BAC$$

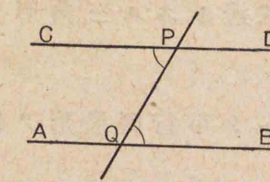
ソレ故PRハ求ムル直線デアル。

注意 PR'ヲ結ブト,コレモ亦求ムル直線デアル。ソレ故解答ハ二ツアル。

問 與ヘラレタ二角ノ和ヲ作レ。

作圖題 6. 與ヘラレタ點ヲ過ツテ與ヘラレタ直線ニ平行線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ點ヲP,直線ヲABトスル。Pヲ過ツテABニ平行線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖 AB上ニ任意ノ點Qヲトリ, PQヲ結ブ。次ニ點Pニ於テ$\angle BQP$ニ等シイ錯角QPCヲナスヤウニ直線CDヲ引ク。(作圖題5)

CDハ求ムル直線デアル。

證明 略スル。(定理10)

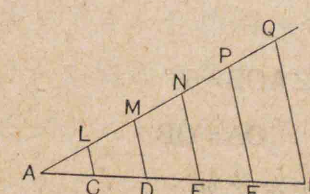
作圖題 7. 與ヘラレタ線分ヲ等分セヨ。

題意 與ヘラレタ線分ヲABトシ, ABヲ例ヘバ五等分スルコトヲ求メル。

作圖 Aカラ任意ノ半直線ヲ引キ,ソノ上ニ

$$AL=LM=MN=NP=PQ$$

ナルヤウニL, M, N, P, Qヲトリ, QBヲ結ブ。



次ニP, N, M, Lヲ過ツテQBニ平行線ヲ引キ, ABトノ交點ヲ夫々F, E, D, Cトスル。C, D, E, Fハ求ムル點デアル。

證明 略スル。(定理18)

注意 作圖ハ常ニ可能デアル,即チ幾等分デモ出來ル。

問1. 二邊トソノ夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問2. 與ヘラレタ三線分ヲ三邊トスル三角形ヲ作レ。

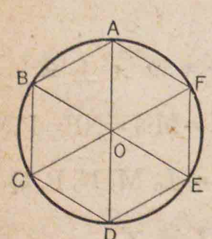
問3. 二邊トソノ夾角ヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。

56. 作圖題ノ完全解

作圖題 8. 圓ニ内接スル正六角形ヲ作レ。

題意 與ヘラレタ圓ヲOトシ,コノ圓ニ内接スル正六角形ヲ作ルコトヲ求メル。

(i) 先ヅ作圖ガ出來タモノトシ,即チ圓Oニ正六角形ABCDEFヲ内接シタトスル。



A, B, C, D, E, F ヲ中心Oト結ブト,中心ニ於ケル一周角ハ六等分セラレテ

$$\angle AOB = 60^\circ$$

然ルニ $OA = OB$

デアルカラ△OABハ正三角形デアル。

∴ $AB = OA$

即チ正六角形ノ一邊ハ半徑ニ等シイ。故ニ次ノヤウニ作圖スレバヨイ。

(ii) O圓周上ニ一點Aヲ取リ,半徑ノ長サニ等シクこんぱすヲ開イテ順々ニ圓周ヲキッテ點B, C, D, E, Fヲ定メ,コレ等ヲ順々ニ結ベバ,出來タ六角形ABCDEFハ内接正六角形デアル。

(iii) △OAB, △OBC, △OCD, △ODE, △OEFハ總テガ正三角形デアル。

$$\therefore\ \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF = 60^\circ$$

然ルニOノ周リノ一周角ハ360°デアルカラ

$$\angle FOA = 60^\circ$$

因テ中心ニ於ケル一周角ガ六等分セラレタカラABCDEFハ内接正六角形デアル。(定理40)

(iv) 圓周ヲ半徑ノ長サニ等シク開イタこんぱすデAカラ順ニキッテ行クコトハ必ズ出來テ且ツ一通リデアルカラ,解答ハ常ニ可能デ且ツ一ツデアル。

以上デコノ作圖題ハ完全ニ解カレタ。

扨テ作圖題ヲ解クニ當ッテ取ッタ道行キノ中,(i)ハ先ヅ求ムル圖形ガ作圖シ得タモノトシテ,ソノ圖形ニツイテソノ性質及ビ既知事項ト未知事項トノ關係等ヲシラベ,ソシテ如何ニスレバ作圖シ得ルカトイフコトヲ考ヘタノデアル。コレヲ作圖題ノ**解析**トイフ。(ii)ハ解析ノ結果ニ基イテ所要ノ作圖ヲ

行ツタモノデアル。コレヲ作圖題ノ**作圖**又ハ**總合**トイフ。(iii)ハ作圖法ノ正シイコトヲ示シタモノ即チ**證明**デアル。ソシテ(iv)ハ作圖ガ可能ナル場合及ビ解答ノ數ヲ探シタモノデアツテ,コレヲ作圖題ノ**吟味**トイフ。

困難ナ作圖題ハ通常コノ解析,作圖,證明,吟味ノ四階段ヲ經テ完全ニ解決シ得ルモノデアル。然シ容易ナ作圖題ハ作圖,證明,吟味ノ三階段デヨイ。

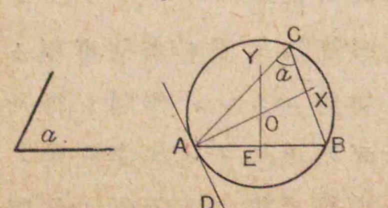
問 1.　圓ニ外切スル正六角形ヲ作レ。

問 2.　圓ニ內接及ビ外切スル正方形,正八角形ヲ作レ。

問 3.　圓ニ內接及ビ外切スル正三角形,正十二角形ヲ作レ。

作圖題 9.　與ヘラレタ線分上ニ與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲ畫ケ。

題意　與ヘラレタ線分ヲ AB トシ,與ヘラレタ角ヲ α トスル。AB 上ニ $\angle\alpha$ ヲ含ム弓形ヲ畫クコトヲ求メル。



作圖　A ヲ過リ AB ト $\angle\alpha$ ヲナス直線 AD ヲ引キ,A ニ於テコノ AD

ニ垂線 AX ヲ立テル。

次ニ AB ノ垂直二等分線 EY ヲ引キ,コレト AX トノ交點ヲ O トスル。O ヲ中心トシテ半徑 OA ノ圓ヲ畫ケバ $\angle$BAD ニ夾マレナイ弧ト AB トノナス弓形ガ求メルモノデアル。

證明　OA＝OB デアルカラ圓 O ハ B ヲ過ル。

又　　$\angle BAD=\angle\alpha$

　　$\angle BAD=\angle ACB$　　(定理 34)

$\therefore$　　$\angle ACB=\angle\alpha$

ソレ故弓形 ACB ハ $\angle\alpha$ ヲ含ム。

吟味　(イ)　直線 AB ニ關シテ弓形 ACB ト對稱ナ弓形モ亦條件ニ適スルカラ解答ハ二ツデアル。

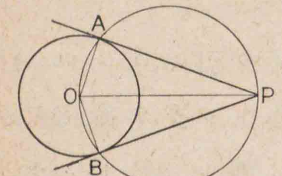
(ロ)　作圖ガ出來ルタメニハ $\angle\alpha<2R\angle$ デナケレバナラナイ。

問　與ヘラレタ圓カラ與ヘラレタ角ヲ含ム弓形ヲキリトレ。

57.　切線ノ作圖題

作圖題 10.　與ヘラレタ點カラ與ヘラレタ圓ヘ切線ヲ引ケ。

題意　與ヘラレタ圓ヲ O,與ヘラレタ點ヲ P トスル。P カラ圓 O ヘ切線ヲ引クコトヲ求メル。



作圖 OPヲ結ビ,コレヲ直徑トスル圓ヲ畫キ,圓Oトノ交點ヲA,Bトスル。PA,PBヲ結ブト,コレ等ハ求ムル切線デアル。

證明 略スル。

吟味 (イ) Pガ圓Oノ外ニアレバ解答ハ二ツ。

(ロ) Pガ圓Oノ周上ニアレバ解答ハ一ツ。

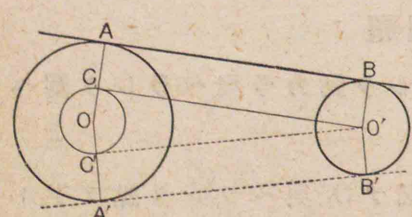
(ハ) Pガ圓Oノ内ニアレバ解答ハナイ。

作圖題 11. 與ヘラレタ二ツノ圓ニ共通ナ切線ヲ引ケ。

題意 與ヘラレタ圓ヲO,O'トシ,ソレ等ニ共通ナ切線(**共通切線**)ヲ引クコトヲ求メル。

(i) 二圓ガ共通切線ノ同側ニアル場合。(**共通外切線**)

解析 ABヲ共通外切線ノ一ツト假定シ,ソノ切點ヲA,Bトスル。OA, O'Bヲ結ブ。扨テ次ニ小ナル圓ノ中心O'カラABニ平行線ヲ引イテOAトノ交リヲCトスレバ,四邊形CABO'ハ矩形デ



∠OCO'=R∠デアル。

ソシテ OC=OA−AC=OA−O'B

ソレ故O'CハOヲ中心トシ,OCヲ半徑トスル圓ノ切線デアル。

作圖 大ナル圓ノ中心Oヲ中心トシ,二圓ノ半徑ノ差ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,O'カラコノ圓ニ切線O'Cヲ引キ,ソノ切點ヲCトスル。(作圖題10) Cヲ過ル圓Oノ半徑OAヲ畫キ,OAニ平行ニ圓O'ノ半徑O'Bヲ引ク。然ルトキハ直線ABハ求ムル共通外切線デアル。

證明 四邊形CABO'ハ矩形デアルカラ OA⊥AB, O'B⊥AB。即チABハ兩圓ニ切スル。

吟味 求ムル切線ノ數ハO'カラ二圓ノ半徑ノ差ヲ半徑トシタ第三ノ圓ニ引イタ切線ノ數ト同數デアルカラ,點O'ガ

(イ) 第三ノ圓ノ外ニアレバ解答ハ二ツ。

(ロ) 第三ノ圓周上ニアレバ解答ハ一ツ。

(ハ) 第三ノ圓ノ内ニアレバ解答ハナイ。

(ii) 二圓ガ共通切線ノ兩側ニアル場合。(**共通内切線**)

作圖 大ナル圓ノ中心Oヲ中心トシ,二圓ノ半徑